



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

EPAMINONDAS SOARES SILVA FILHO

**A ECOLOGIA DO SABER ÁREA DO CÍRCULO EM LIVROS DIDÁTICOS
DE MATEMÁTICA E DOCUMENTOS OFICIAIS NACIONAIS DE EDUCAÇÃO: um
olhar para a história do saber**

Caruaru
2022

EPAMINONDAS SOARES SILVA FILHO

**A ECOLOGIA DO SABER ÁREA DO CÍRCULO EM LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA E DOCUMENTOS OFICIAIS NACIONAIS DE EDUCAÇÃO: um
olhar para a história do saber**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

Caruaru
2022

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Nasaré Oliveira - CRB/4 - 2309

S586e Silva Filho, Epaminondas Soares.
A ecologia do saber área do círculo em livros didáticos de matemática e documentos oficiais nacionais de educação: um olhar para a história do saber. / Epaminondas Soares Silva Filho. – 2022.
102 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Marcus Bessa de Menezes.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2022.
Inclui Referências.

1. Geometria plana - Medição. 2. Prática de ensino. 3. Livros didáticos. 4. Didática. 5. Aprendizagem. I. Menezes, Marcus Bessa (Orientador). II. Título.

CDD 370.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2022-060)

EPAMINONDAS SOARES SILVA FILHO

**A ECOLOGIA DO SABER ÁREA DO CÍRCULO EM LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA E DOCUMENTOS OFICIAIS NACIONAIS DE EDUCAÇÃO: um
olhar para a história do saber**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 30/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

Com todo amor e carinho à minha mãe,
Evania Claudia da Silva pela paciência,
cuidado e carinho que a mim dedicou, por
ser a minha base e por estar sempre
comigo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar apoio, força e coragem para não desistir e continuar até o fim.

À minha família, por todo amor, carinho e incentivo, em especial a minha mãe Evania Claudia da Silva e minha noiva Ruth Marques Melo, que sempre acreditaram em mim e foram minha sustentação durante essa caminhada. Aos meus irmãos, pois sei que posso contar com vocês a todo momento. Se cheguei até aqui foi por ter vocês em minha vida, obrigado, amo vocês.

À minha grande amiga, Marilene Rosa, por ter me ensinado o caminho da pesquisa, por ter me orientado e me conduzido até o mestrado, algo que nunca imaginei, saiba que você foi o motivo pelo qual cheguei até aqui.

À minha irmã de coração Natália Moraes, por todo apoio e palavras de incentivo nas horas mais difíceis.

Aos meus companheiros de caminhada Iolanda e Lucivânio, sabemos que o caminho foi difícil, mas com vocês ao meu lado tudo foi amenizado, sou grato pelo companheirismo que tivemos ao longo desses anos, sem sua ajuda isso não seria possível.

Ao grupo SEMEAR, por todos os momentos de discussão e aprendizado que foram essenciais para o meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional. Agradeço a todos do grupo em nome das chefes, Rosinalda Teles e Marilene Rosa.

Aos membros da banca, Paula Baltar, Marilene Rosa e Fernando Emílio, pelas importantes contribuições realizadas, desde a qualificação, para a melhoria desta pesquisa.

Ao meu orientador Marcus Bessa, por ter aceito me orientar, por toda paciência e compreensão, bem como, pela constante assistência, atenção, motivação e ensinamentos que me fizeram seguir adiante.

A todos da escola Napoleão Teixeira Lima, onde aprendi como discente e hoje compartilho experiências como docente com aqueles que me auxiliaram durante minha jornada.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.

A todos vocês, o meu muito obrigado!

RESUMO

Tivemos como objetivo de pesquisa analisar as praxeologias e a ecologia envolvidas na construção do saber área do círculo no período pré e pós documentos oficiais nacionais da educação básica. A fim de identificar como habita e sobrevive o saber área do círculo nos documentos oficiais e livros didáticos ao longo da história. Para tanto, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1999) e colaboradores, a partir dela pudemos caracterizar as praxeologias didáticas e matemáticas dos livros didáticos: 'Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau (1976)'; 'Matemática fazendo a diferença (2006)'; 'A conquista da matemática (2018)'. Assim, também pudemos analisar os documentos oficiais para a educação básica acerca do saber área do círculo sob a perspectiva da ecologia didática do saber. Deste modo, nossas análises retratam uma abordagem voltada para a construção do ambiente tecnológico-teórico e nas estruturas algébricas. Acreditamos que esse tipo de abordagem não favorece o estabelecimento da área do círculo enquanto grandeza, tornando o processo de ensino e de aprendizagem permeado por dificuldades conceituais, não contribuindo para a melhoria do ensino desse saber. Também, identificamos lacunas na construção do acossistema do saber área do círculo na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as cadeias e teias alimentares formadas por esse saber estão prejudicadas devido a forma que esses saberes foram alocados e na maneira que se relacionam nos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: área do círculo; livro didático; teoria antropológica do didático; praxeologia didática; praxeologia matemática.

ABSTRACT

The objective of our research was to analyze the praxeologies and ecology involved in the construction of the knowledge of the circle area in the period before and after the official national documents for basic education. In order to identify how the knowledge of the circle area inhabits and survives in the official documents and textbooks throughout history. To do so, we used the Anthropological Theory of Didactics (TAD) proposed by Chevallard (1999) and collaborators, from which we could characterize the didactic and mathematical praxeologies of the textbooks: 'Modern course in mathematics for teaching 1st grade (1976)'; 'Mathematics making a difference (2006)'; 'The conquest of mathematics (2018)'. Thus, we could also analyze the official documents for basic education about the knowledge of the circle area from the perspective of the didactic ecology of knowledge. Thus, our analyses portray an approach focused on the construction of the technological-theoretical environment and on algebraic structures. We believe that this type of approach does not favor the establishment of the circle area as a magnitude, making the teaching and learning process permeated by conceptual difficulties, not contributing to the improvement of the teaching of this knowledge.

Keywords: area of circle; textbook; anthropological theory of didactics; didactic praxeology; mathematical praxeology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Organização do mapeamento das pesquisas	21
Figura 2 - Níveis superiores de co-determinação didática	31
Figura 3 - Níveis de co-determinação didática	32
Figura 4 - Cadeia alimentar: área do círculo	50
Figura 5 - Exemplo de TC no capítulo do livro didático	54
Figura 6 - Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático	55
Figura 7 - Exemplo do subtipo T_{D2} no livro didático	56
Figura 8 - Exemplo do subtipo T_{D3} no livro didático	56
Figura 9 - Exemplo do subtipo T_{D4} no livro didático	57
Figura 10 - Exemplo do subtipo T_{D5} no livro didático	58
Figura 11 - Exemplo do subtipo T_{S1} no livro didático	59
Figura 12 - Exemplo do subtipo T_{S2} no livro didático	60
Figura 13 - Momento de primeiro encontro com o saber área do círculo no LD da 8 ^o série	61
Figura 14 - Momento de institucionalização do saber área do círculo no LD da 8 ^o série	62
Figura 15 - Exemplo de TC no capítulo do livro didático	65
Figura 16 - Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático	67
Figura 17 - Exemplo do subtipo T_{D2} no livro didático	67
Figura 18 - Exemplo do subtipo T_{D3} no livro didático	68
Figura 19 - Exemplo do subtipo T_{D4} no livro didático	69
Figura 20 - Exemplo do subtipo T_{D5} no livro didático	69
Figura 21 - Exemplo do subtipo T_{D6} no livro didático	70
Figura 22 - Exemplo do tipo de tarefa TO no capítulo livro didático	71
Figura 23 - Exemplo do tipo de tarefa TG no capítulo do livro didático	72
Figura 24 - Exemplo do tipo de tarefa TU no capítulo do livro didático	72
Figura 25 - Exemplo do tipo de tarefa TS no capítulo do livro didático	73
Figura 26 - Introdução do conceito de área do círculo no LD da 8 ^o série	74
Figura 27 - Trabalho da técnica no LD da 8 ^o série	75
Figura 28 - Extrato do LD que explora a ampliação da técnica (T_{D1})	76
Figura 29 - Exemplo do tipo de tarefa TD no LD	81
Figura 30 - Exemplo ₁ do tipo de tarefa TO no LD	82
Figura 31 - Exemplo ₂ do tipo de tarefa TO no LD	83
Figura 32 - Introdução do conceito de área do círculo no LD do 8 ^o ano	84

Figura 33 - Momento de elaboração da técnica no livro didático do 8º ano	84
Figura 34 - Exemplo do tipo de tarefa TC no LD	86
Figura 35 - Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático	87
Figura 36 - Exemplo do subtipo TD_2 no capítulo livro didático	87
Figura 37 - Exemplo do tipo de tarefa TO no capítulo do livro didático	88
Figura 38 - Exemplo do tipo de tarefa TS no capítulo do livro didático	89
Figura 39 - Introdução do conceito de área do círculo no LD do 9º ano	90
Figura 40 - Momento de elaboração da técnica (T_{D1}) no livro didático do 9º ano	91
Figura 41 - Extrato do LD que explora a ampliação da técnica (T_{D1})	91
Figura 42 - Extrato do LD que apresenta o trabalho da técnica	92

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Momentos de estudos descritos por Chevallard	28
Quadro 2 - Tipos de tarefas para a grandeza área	41
Quadro 3 - Critérios adotados na análise da praxeologia matemática no livro didático	42
Quadro 4 - Categorias e critérios de análise da praxeologia didática dos livros de matemática	43
Quadro 5 - Critérios avaliativos da relação institucional quanto à ecologia das tarefas e técnicas	44
Quadro 6 - Inter-relações entre área do círculo e outros objetos matemáticos ..	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro da 8ª série	52
Tabela 2 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro da 8º série	54
Tabela 3 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TS identificados no livro didático da 8º série	59
Tabela 4 - Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro da 8ª série	64
Tabela 5 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro didático da 8º série	66
Tabela 6 - Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro do 8º ano	78
Tabela 7 - Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro do 9º ano	80
Tabela 8 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro didático do 9º ano	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVO GERAL	18
1.1.1	Objetivos Específicos	18
1.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	18
2	REVISÃO DE LITERATURA	20
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	25
3.1	TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)	25
3.1.1	Elementos primitivos da TAD	25
3.1.2	A noção de praxeologia	26
3.1.3	Praxeologia Matemática	26
3.1.4	Praxeologia Didática.....	27
3.1.5	Ecologia Didática do Saber	29
3.1.6	Níveis de co-determinação didática	31
3.2	O PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS	33
3.2.1	O conceito de área no contexto das pesquisas	34
3.2.2	O conceito de área de figuras planas e os documentos oficiais nacionais ...	35
4	METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	38
4.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	38
4.2	PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS	39
4.2.1	Os livros didáticos e os documentos oficiais a serem analisados	39
4.2.2	Parte Curso e Parte Atividades Propostas para análise	40
4.2.3	Elaboração do quarteto praxeológico matemático	40
4.2.4	Elaboração da praxeologia didática	42
4.2.5	Análise das praxeologias modeladas	43
4.2.6	Análise ecológica dos livros didáticos e dos documentos oficiais	44
5	ANÁLISE DO SABER ÁREA DO CÍRCULO NOS PCN E NA BNCC	47
5.1	ANÁLISE DOS PCN	47
5.1.1	Análise do saber área do círculo nos PCN	47
5.2	ANÁLISE DA BNCC	48

5.2.1	Análise do saber área do círculo na BNCC	49
6	O SABER ÁREA DO CÍRCULO NOS LIVROS DIDÁTICOS	51
6.1	LIVRO DIDÁTICO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU	51
6.1.1	Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8º série	53
6.1.1.1	<i>Organização matemática pontual de TC</i>	54
6.1.1.2	<i>Organização matemática pontual de TD</i>	54
6.1.1.3	<i>Organização matemática pontual de TS</i>	58
6.1.2	Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8º série	60
6.2	LIVRO DIDÁTICO MATEMÁTICA FAZENDO A DIFERENÇA.....	63
6.2.1	Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8º série	65
6.2.1.1	<i>Organização matemática pontual de TC</i>	65
6.2.1.2	<i>Organização matemática pontual de TD</i>	66
6.2.1.3	<i>Organização matemática pontual de TO</i>	71
6.2.1.4	<i>Organização matemática pontual de TG</i>	71
6.2.1.5	<i>Organização matemática pontual de TU</i>	72
6.2.1.6	<i>Organização matemática pontual de TS</i>	73
6.2.2	Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8º série	74
6.3	LIVRO DIDÁTICO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	77
6.3.1	Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 8º ano	81
6.3.1.1	<i>Organização matemática pontual de TC</i>	81
6.3.1.2	<i>Organização matemática pontual de TD</i>	81
6.3.1.3	<i>Organização matemática pontual de TO</i>	82
6.3.2	Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 8º ano	83
6.3.3	Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 9º ano	85
6.3.3.1	<i>Organização matemática pontual de TC</i>	85
6.3.3.2	<i>Organização matemática pontual de TD</i>	86
6.3.3.3	<i>Organização matemática pontual de TO</i>	88

6.3.3.4	<i>Organização matemática pontual de TS</i>	88
6.3.4	Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 9º ano	90
7	RESUMO DAS ANÁLISES	94
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Em minha trajetória acadêmica, sempre estive engajado em grupos de pesquisa, desde o início da graduação, isso me levou a ler e investigar sobre as pesquisas que colegas e professores integrantes do grupo estavam desenvolvendo, o que culminou em uma proposta de pesquisa por uma das professoras do grupo através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). Ao longo de 12 meses, fizemos uma investigação sobre o conceito de área do círculo em livros didáticos de Matemática adotados no município de Garanhuns - PE e aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2017.

Durante essa pesquisa, percebi que o conceito de área do círculo ainda era pouco investigado em estudos nacionais, mesmo sendo permeado por dificuldades no seu processo de ensino e de aprendizagem tanto quanto as demais figuras geométricas que são quase unanimidade nas pesquisas desenvolvidas até então.

Disso, após um longo período de leituras sobre essa temática, surge o interesse em investigar como essas dificuldades no ensino do saber de área do círculo atravessaram tantas mudanças ao longo da história da educação brasileira e como a implementação de documentos oficiais nacionais norteadores da educação afeta o ensino desse saber. Neste sentido, nos questionamos sobre: Como estão organizadas as praxeologias e ecologia do saber área do círculo em livros didáticos de matemática entre os períodos pré e pós a criação de documentos oficiais nacionais norteadores da educação básica?

As pesquisas em história da Educação Matemática têm se expandido desde a década de 90 e se intensificado nos últimos anos, principalmente, em pesquisas realizadas em instituições da região sudeste do Brasil. Trazendo discussões importantes sobre a trajetória dos saberes matemáticos ensinados nas escolas brasileiras (DASSIE, 2008).

A princípio é pensado que os conteúdos que tem forte relação com o cotidiano dos alunos são de mais fácil compreensão por eles. Essa é uma visão comum acerca dos conceitos matemáticos ligados ao campo das Grandezas e Medidas, como por exemplo, o conceito de área, visto que esse conceito faz ligações com outras disciplinas escolares; permite a conexão com elementos do cotidiano; e possibilita a articulação com outros conteúdos da própria matemática. No entanto, contrapondo essa ideia podemos encontrar diversas pesquisas (ROSA DOS SANTOS, 2005;

TELES, 2007; FERREIRA, 2010; LIMA e BELLEMAIN, 2010; ROSA DOS SANTOS, 2015) que afirmam haver falhas no processo de ensino e aprendizagem desse conceito. Também é relevante observar os resultados dos estudantes nas avaliações institucionais. O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - SAEPE (2011)¹ apresenta em seus resultados que, “quando os alunos do 9º ano são solicitados a resolver tipos de tarefas envolvendo área de figuras planas no nível de sua escolaridade, o aproveitamento é inferior a 44%.” (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 69).

Apoiando os resultados obtidos nessas pesquisas, documentos oficiais também afirmam haver falhas no processo de ensino e aprendizagem do conceito de área, pois estaria voltado meramente para a conversão de unidades e aplicação de fórmulas sem um contexto adequado (PERNAMBUCO, 2012).

Segundo os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE), “Essa estratégia tem-se mostrado não só ineficiente, em relação à aprendizagem, mas, muitas vezes, geradora de dificuldades para futuras aprendizagens.” (PERNAMBUCO, 2012, p.67). E fortalecendo ainda mais esta ideia, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) “a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume [...]” (BRASIL, 2018, p.272).

Em relação ao livro didático (LD) que é utilizado em sala de aula, muitas vezes, esse material didático tem o papel de protagonista do processo de ensino e de aprendizagem, pois, a depender da relação que o professor tenha com o conteúdo a ser ensinado, o livro didático irá ditar o ritmo da apresentação de cada um deles e definir, implicitamente, o que é mais importante pela ênfase que dá a cada tópico (CARVALHO; LIMA, 2010). Além disso, o LD destaca-se no contexto das escolas públicas, visto que ele muitas vezes é a única ferramenta de pesquisa e de estudo, e assim, a ligação entre o professor, o saber e o aluno. Ainda mais no contexto dessa pesquisa, em que parte do material a ser analisado foi produzido em um período anterior à criação da internet.

É relevante destacarmos também as influências que os livros didáticos e saberes recebem ao longo da história, os transformando e direcionando-os para o que

¹ Os resultados por descritores que permitem essa análise mais detalhada não são mais divulgados, apenas as médias das proficiências em Matemática dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Além disso, os dados disponíveis sobre o SAEB 2019 apresentam apenas áreas de figuras simples (triângulo, paralelogramo e trapézio) sem citar a área do círculo no ensino fundamental. (BRASIL, 2020e).

são hoje. Salientamos aqui os últimos grandes movimentos da educação nacional que culminaram em mudanças no método do ensino da Matemática que são, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) e o Movimento da Educação Matemática (MEM), bem como a criação de documentos norteadores do ensino de Matemática na educação básica, em especial, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Baseado no que foi exposto até aqui, a partir da nossa problemática, como estão organizadas as praxeologias e ecologia do saber área do círculo em livros didáticos de matemática entre os períodos pré e pós a criação de documentos oficiais nacionais norteadores da educação básica? Construimos os seguintes Objetivos:

1.1 OBJETIVO GERAL

Analisar as praxeologias e ecologia envolvidas na construção do saber área do círculo no período pré e pós documentos oficiais nacionais da educação básica.

1.1.1 Objetivos Específicos

- Caracterizar as praxeologias matemática e didática relativas à área do círculo existentes nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Verificar a ecologia (habitat e nicho) do saber área do círculo em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Analisar os documentos oficiais nacionais da educação básica (PCN e BNCC) acerca do saber área do círculo.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Nosso trabalho está organizado em 8 (oito) seções, as quais, após a introdução apresentamos a revisão de literatura acerca do nosso objeto de estudo. Em seguida, apresentamos a fundamentação teórica e metodologia utilizadas para análise e levantamento dos dados desse trabalho.

Posteriormente, a partir da quinta seção, apresentamos os dados coletados através de nossas análises dos documentos oficiais nacionais (PCN e BNCC) e das coleções de livros didáticos. Por fim, nas duas últimas seções trazemos uma análise comparativa das informações coletadas e como essas informações refletem alguns

obstáculos pelos quais o saber área do círculo passa e que devem ser superados para a efetiva melhoria da educação nacional.

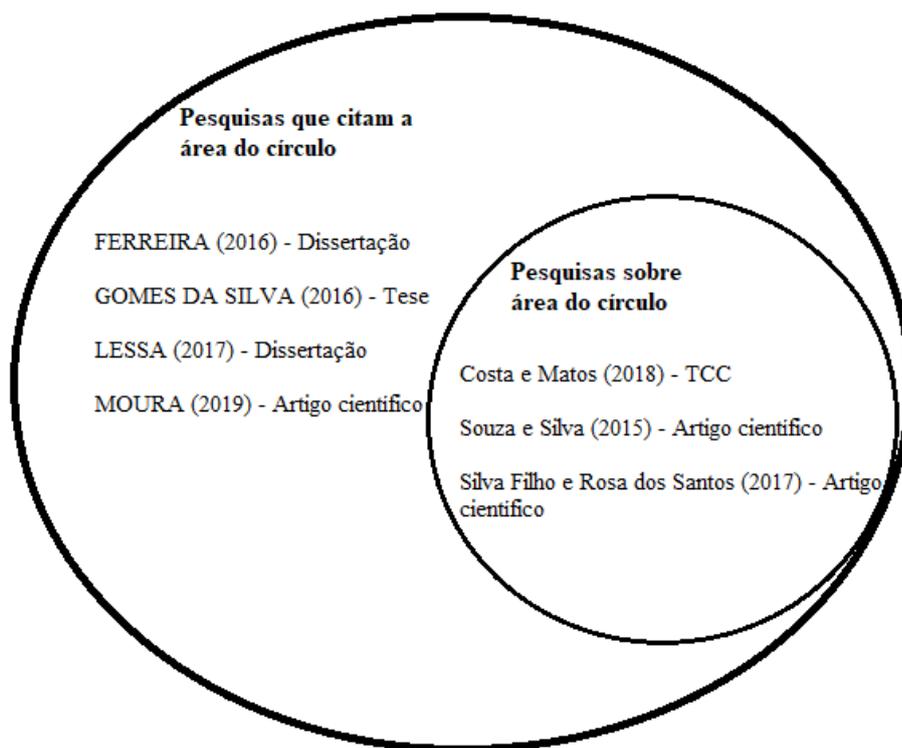
2 REVISÃO DE LITERATURA

Para fortalecer nossa argumentação sobre a escolha dos elementos que constituem esta pesquisa, realizamos um mapeamento de estudos que se relacionam com os nossos objetos de pesquisa. Para tanto, fizemos uma busca em periódicos nacionais de pesquisa como: CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Google Acadêmico. Este levantamento foi efetivado com dois enfoques, o primeiro, buscar pesquisas que se utilizam da Teoria Antropológica do Didático (TAD) ou de outra base teórica e que abordam o conceito de área do círculo, no período de 2014 a 2020, e no segundo, buscar pesquisas que abordam a história da educação matemática e o ensino de matemática durante o século XX no Brasil, no período de 2004 a 2020. Utilizamos de períodos distintos, pois as pesquisas em história da educação matemática são mais escassas, de modo que tivemos que ampliar o período para este levantamento.

Acerca do primeiro levantamento, referente às pesquisas que abordam a TAD ou outra base teórica e o saber área do círculo, utilizamos como palavras-chave “Teoria Antropológica do Didático”, “ensino de área do círculo”, “aprendizagem de área do círculo” e “área do círculo”. Neste sentido, identificamos um Trabalho de conclusão de curso (TCC) que aborda a área do círculo e que não utiliza a TAD como base teórica. Além disso, encontramos outros 6 (seis) trabalhos que utilizam a TAD como base teórica: uma tese de doutorado, duas dissertações de mestrado e três artigos científicos, sendo estes, dois publicados em anais de congressos e um em revista científica.

Destas pesquisas catalogadas, quatro citam área do círculo tendo como objetivo mais amplo observar outros conceitos, não apresentando resultados que contribuam para o avanço nas pesquisas sobre o saber área do círculo especificamente. Portanto, apenas três abordam diretamente a área do círculo como objeto de estudo, e por isso, somente essas serão discutidas aqui. Para melhor compreensão desse levantamento fizemos uma ilustração, como mostra a figura 01.

Figura 01 – Organização do mapeamento das pesquisas



Fonte: autoria própria

A pesquisa de Costa e Matos (2018) investigou duas perspectivas metodológicas, a aula investigativa e a atividade de ensino, ambas voltadas para o ensino de área do círculo no Ensino Fundamental (EF). Para tanto, as pesquisadoras desenvolveram duas propostas de ensino, uma para cada metodologia, e em seguida, aplicaram as duas metodologias em três turmas do 9º do EF de uma escola pública. Por se tratarem de duas metodologias, as pesquisadoras dividiram a pesquisa em duas partes, iniciando com a aula investigativa. Nessa aula, os estudantes foram divididos em grupos e lhes foi entregue uma série de materiais: folhas, compasso, barbante e tesoura. Em seguida, foi explicitado para os alunos o objetivo daquela dinâmica que era descobrir uma fórmula para cálculo da área do círculo, assim, a pesquisadora foi instruindo o passo a passo dos alunos para atingir esse objetivo. Ao fim da dinâmica a maioria dos alunos conseguiu atingir o objetivo de encontrar uma fórmula para cálculo da área do círculo. Na segunda intervenção, utilizando a metodologia da atividade de ensino, a pesquisadora organizou os alunos em grupos e lhes entregou os seguintes materiais: papel cartão e peças circulares de E.V.A. O objetivo dessa atividade era confeccionar o tabuleiro de Shisima e por meio de sua

mobilização entender que o octógono se aproxima da forma do círculo, e assim, relacionar o perímetro do octógono com o contorno do círculo, como também, que a apótema do octógono se aproximava da medida do raio do círculo e com isso por meio da mobilização algébrica chegar na fórmula para cálculo da área do círculo. Contudo, os estudantes não conseguiram chegar a essa conclusão. Por fim, as autoras relatam que ambas as metodologias utilizadas instigam os estudantes no aprendizado, como também mobilizam diversos conceitos matemáticos, os quais segundo as autoras não seriam mobilizados por meio de uma abordagem mais tradicional. Neste sentido, o estudo mostra alternativas para a apresentação do conceito de área de forma mais ativa e participativa pelos estudantes fugindo da ideia de um ensino da fórmula pela fórmula sem um contexto que auxilie os alunos nesse entendimento. Posto isto, os dados apresentados por Costa e Matos (2018) nos reforçam a ideia de que o ensino de área do círculo não deve estar pautado na simples aplicação da fórmula para cálculo da área do círculo.

A pesquisa de Souza e Silva (2015) teve como objetivo identificar como os autores do livro didático “A Conquista da Matemática” estabeleceram as praxeologias para o conteúdo Circunferência e Círculo. O referencial teórico do estudo é baseado na TAD, mais especificamente na noção praxeológica. Inicialmente as pesquisadoras sistematizam a descrição geral e estrutura do LD, mostrando o que os autores destacam no manual do professor e quais os conteúdos de geometria presentes na obra do 9º ano. Em seguida, fazem um estudo da organização praxeológica referente ao objeto Circunferência e Círculo, identificando as tarefas, técnicas e o discurso teórico-tecnológico. A partir dessa análise as pesquisadoras relatam que o uso de fórmulas é intensivo, fazendo prevalecer uma abordagem algébrica em detrimento das construções geométricas. Isto implica que a maioria das técnicas analisadas estão atreladas ao discurso teórico-tecnológico, onde os autores se utilizam da álgebra para explicar e justificar conceitos, propriedades e teoremas da geometria. Por outro lado, existem também tarefas orientadas para o bloco prático-técnico, onde estão voltadas para construções geométricas e resolução de problemas contextualizados. Outro ponto levantado pelas autoras é o de que somente a construção feita pelo livro didático é insuficiente para uma aprendizagem concreta dos saberes em questão, se fazendo necessário a intervenção do professor para que complemente essa abordagem com outras técnicas e tecnologias que possam favorecer o processo de ensino e de aprendizagem em sala de aula.

A pesquisa de Souza e Silva (2015) é semelhante à de Silva Filho e Rosa dos Santos (2017) que objetivou analisar a abordagem do conceito de área do círculo no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, adotado nas escolas públicas municipais de Garanhuns/PE. Para isso se utilizam da TAD como ferramenta teórico-metodológica e a noção de praxeologia matemática. Inicialmente os pesquisadores realizaram um mapeamento dos livros didáticos adotados nas escolas públicas do município de Garanhuns/PE, a fim de identificar qual coleção de livros eram adotadas. A partir desse levantamento puderam constatar que o município adotava uma única coleção de livros didáticos em suas escolas, a coleção “Vontade de saber” dos autores Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro aprovada no PNLD² 2017. Em seguida, foi feita a análise da praxeologia matemática do LD, utilizando como suporte, um recorte do filtro da grandeza área na forma proposta por Rosa dos Santos (2015) em sua tese de doutorado e a partir do desenvolvimento da pesquisa o filtro foi ampliado, pois foi identificado um novo tipo de tarefa, a qual denominaram TS (Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s)). Posteriormente, como resultados dessa investigação, foi constatado que o livro didático apesar de apresentar um bom repertório de tarefas envolvidas em situações-problema, a maioria delas está limitada ao tipo TD (Determinar a medida da área de uma figura ou região) e na aplicação de fórmulas, o que demonstra uma abordagem numérica e algébrica do conceito de área. Neste sentido, os autores relatam que somente a abordagem trazida pelo LD é insuficiente, necessitando de uma complementação por parte do professor.

Deste modo, ficam evidentes as relações que as pesquisas de Souza e Silva (2015) e Silva Filho e Rosa dos Santos (2017) têm com o nosso estudo, todas buscam a caracterização do ambiente praxeológico de livros didáticos, com o propósito de identificar como estas são construídas pelos autores de LD. As pesquisas realizadas (2015 e 2017) indicam que os autores de LD optam por construir a abordagem do conceito de área do círculo voltada para as estruturas algébricas.

Na realização do segundo mapeamento, buscamos as seguintes palavras-chave: Área de figuras geométricas planas; Área do círculo; História da Matemática; Ensino de Matemática; Teoria Antropológica do didático; Livro didático. Entretanto nesse mapeamento não pudemos identificar pesquisas que abordam o saber área do

² Programa Nacional do Livro Didático: que tem como principal objetivo avaliar e distribuir livros didáticos.

círculo, ou até mesmo, área de modo geral, nos revelando um espaço ainda não explorado por pesquisadores brasileiros.

Assim, a partir do mapeamento realizado, podemos dizer que nossa pesquisa apresenta relações com outras anteriormente desenvolvidas, contudo, nos propomos a ir mais a fundo no estudo do saber área do círculo, uma vez que, nos aprofundamos na ambientação histórica desse saber, tentando compreender a ecologia dos livros didáticos e documentos oficiais nacionais da educação básica, o que nos dá um panorama da construção desse saber ao longo da história, demonstrando se evoluímos ou não na sua organização. Assim como, baseado nos resultados dessa pesquisa conhecemos melhor a trajetória do objeto matemático estudado, com a qual podemos entender como o saber área do círculo sobrevive até os dias atuais sendo permeado por dificuldades no seu processo de ensino e de aprendizagem. Além de contribuirmos com os campos da história da educação matemática, e também, da educação matemática.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesta seção, iniciaremos com uma elucidação acerca da Teoria Antropológica do Didático (TAD), dando enfoque nas noções de praxeologias (ou organização) didática e matemática, além da ideia de ecologia didática do saber e dos níveis de co-determinação didática, sob a concepção de Yves Chevallard. Após, será apresentado um panorama sobre o conceito de área e o seu processo de ensino e aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental.

3.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard e colaboradores na década de 90, representa uma ampliação da Transposição Didática (TD). Por meio dessa ampliação, Chevallard (1999) introduz uma visão antropológica da relação ao saber, observando o homem diante de suas relações com o saber e de suas relações com as instituições. De acordo com esse autor, a TAD “situa a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais, ou seja, estuda o homem diante do saber matemático e, mais particularmente, frente a situações matemáticas.” (CHEVALLARD, 1991; 1999 apud SANTOS 2015, p.19).

3.1.1 Elementos primitivos da TAD

Em sua teoria, Chevallard (1992) aponta três conceitos primitivos, são eles: os *Objetos (O)*, as *Instituições (I)* e as *Pessoas (X)* que estão em relação à todo momento $R(O, I)$; $R(X, I)$; $R(X, O)$, o que contempla a relação pessoal ($R(X, O)$) e relação institucional ($R(I, O)$). Esse autor define *objeto (O)* como sendo todas as coisas que existem para pelo menos uma *pessoa (X)* ou *instituição (I)*, trata-se da definição mais aberta dos conceitos primitivos. Segundo Dias, Guardagnini e Júnior (2018, p. 86):

O pesquisador considera ainda que toda obra *O* é um objeto, explicitando que uma obra corresponde a qualquer parte de um complexo de organizações praxeológicas ou praxeologias e, mais especificamente, pode ser somente um componente material como um livro, uma mesa, um datashow.

Já a instituição (*I*) constitui um dispositivo social total ou parcial (micro-instituições) que impõe a seus sujeitos formas de agir e de pensar que são da característica de cada instituição. Alguns exemplos de instituição: a família, a escola, o livro didático, etc.

Por fim, temos a *Pessoa (X)*, que passa por três estágios: *indivíduo*, *sujeito* e *pessoa*. De acordo com a TAD, todos nascemos indivíduos, o indivíduo é o invariante, ou seja, não irá mudar e nem deixar de existir. Será ele que nos caracterizará durante toda a existência. Essa individualidade é que nos dará distinções entre as outras pessoas, pois, mesmo que passemos pelas mesmas instituições durante toda a vida, não seremos iguais ou nos sujeitamos da mesma forma as instituições. No segundo estágio, a contar do momento em que começamos a fazer parte de uma instituição nos tornamos sujeitos dela, pois nos sujeitamos às suas regras e exigências, e então a partir da relação com instituições, *objetos* e outros *sujeitos* partimos para o próximo estágio, assim, construímos nossa identidade como *pessoa (X)*. Contudo, isso não representa um estado fixo e imutável, pois a todo momento as relações $R(X, O)$ e $R(X, I)$ vão moldando uma “nova” pessoa (X) à medida que essa interação se transforma.

Nesta perspectiva, os elementos aqui apresentados: pessoa (X), objeto (O) e instituição (I), são essenciais para nosso estudo das relações institucionais $R(I, O)$, que foram analisadas com base nas praxeologias identificadas nos livros didáticos.

3.1.2 A noção de praxeologia

A TAD considera que toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma tarefa. Disto se forma a noção de praxeologia, “tipo de tarefas (T); técnicas (τ) que resolvem as tarefas desse tipo; tecnologia (θ) que justificam a técnicas e garantem sua validade, e, finalmente, a teoria (Θ) que justifica a tecnologia.” (Bittar, 2017, p.367). Desta forma, a noção de praxeologia é formada por dois blocos distintos, o do “saber-fazer”, formado por tipos de tarefas e técnicas [T, τ] e o bloco do “saber” que é formado por tecnologias e teorias [θ , Θ], constituindo assim, uma organização praxeológica completa [T, τ , θ , Θ]. Por exemplo, O tipo de tarefa “Calcular a medida da área de um círculo, dado a medida do raio ou diâmetro da figura plana”, a técnica para esta tarefa consiste na aplicação da fórmula para determinação de uma área, e o que justifica essa técnica é a demonstração da fórmula para cálculo da área do círculo.

Neste sentido, abordamos as praxeologias referentes ao saber matemático, ou seja, a praxeologia ou organização matemática e a praxeologia ou organização didática “que permitem descrever, respectivamente, escolhas matemáticas e didáticas em uma determinada instituição.” (Bittar, 2017, p.369).

3.1.3 Praxeologia Matemática

Segundo Rosa dos Santos (2015) a organização matemática (OM), estuda as situações que se apresentam em relação aos objetos matemáticos (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria). Desta forma, dizemos que as tarefas (T) são problemas propostos que comumente estão apresentadas com um verbo de ação mais o complemento da frase, por exemplo, determinar a área do círculo de raio 5 cm; técnicas (τ) são os procedimentos utilizados para realizar a tarefa, utilizando o exemplo anterior, a técnica empregada seria o uso da fórmula para cálculo da área do círculo; tecnologia (θ) que representam a justificativa da técnica, no caso exemplificado, seria a demonstração da fórmula; e a teoria (Θ), o que justifica a tecnologia.

De acordo com Chevallard (1999) as organizações matemáticas apresentam uma complexidade crescente, e essa complexidade é classificada nos seguintes graus:

Organização Matemática Pontual (OMP) [$T / \tau / \theta / \Theta$], quando são formadas por apenas um tipo de tarefa; Organização Matemática Local (OML) [$T_{eu} / T_{eu} / \theta / \Theta$], decorre da integração de várias praxeologias pontuais e destaca a tecnologia θ ; Organização Matemática Regional (OMR) [$T_{euj} / T_{euj} / \theta_j / \Theta$], é obtida com a articulação de praxeologias locais referentes à mesma teoria matemática, ou seja, traz a teoria para o primeiro plano Θ ; Organização Matemática Global (OMG) [$T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k$], obtido, em uma dada instituição, pela agregação de várias praxeologias regionais correspondentes a várias teorias Θ_k . (CHEVALLARD, 1999, p.2).

Disto, é pertinente destacar, que o conjunto de OMPs que se apresentam com uma única justificativa tecnológica, podem ser amalgamados em uma OML, ou seja, transformamos várias OM pontuais em uma OM local, de acordo com a construção institucional dada ao objeto estudado. Neste sentido, essa sequência de amálgamas, chegando conjunto das OMR, gera aquilo que Chevallard (2002) chama de níveis superiores de determinação de uma organização matemática que, por sua vez, serão amalgamadas gerando o conjunto da OMG que denotamos de Matemática.

Partindo dessa noção descrita, pudemos verificar as escolhas matemáticas na construção do ensino do conceito de área do círculo nos periódicos que analisamos. Nos expondo o cenário prático-técnico e tecnológico-teórico do livro didático.

3.1.4 Praxeologia Didática

Na organização didática (OD), além dos objetos matemáticos estuda-se também a forma como essa situação foi construída. Segundo Farias (2008 *apud* ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 48), “as organizações didáticas estão relacionadas com as possibilidades de ação, ou seja, as diversas alternativas de organizar o processo de ensino e aprendizagem da matemática em uma instituição concreta”. Desse modo, concordamos com Rosa dos Santos (2015), quanto a considerar que a OD não está restrita à sala de aula, podendo assim, incluir o livro didático e outros sujeitos que transformam o saber científico em saber ensinado.

Chevallard (2002) indica que existem situações que estão quase que necessariamente atreladas ao percurso de estudo, mesmo que de maneiras diversas, estas situações ele denomina de momentos didáticos ou momentos de estudos. Esse autor organiza esses momentos de estudos em quatro grupos, os quais, por sua vez, não apresentam nenhuma ordem cronológica necessária e estão apresentados no quadro 01.

Quadro 01 - Momentos de estudos descritos por Chevallard

Grupo I (Atividades de estudo e pesquisa)	1º Momento do primeiro encontro; 2º Momento da exploração de T e o surgimento da técnica τ ; 3º Momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$.
Grupo II (Sínteses)	4º Momento da institucionalização.
Grupo III (Exercícios e problemas)	5º Momento de trabalho da técnica.
Grupo IV (Controles)	6º Momento da avaliação.

Fonte: Adaptado de Chevallard (2002)

Por meio destes, descrevemos as escolhas da Parte Curso das coleções de livros didáticos que nos propusemos a analisar durante essa pesquisa, nos mostrando como os autores constroem e imaginam o estudo do saber área do círculo dentro da sua coleção.

3.1.5 Ecologia Didática do Saber

Abordamos nesta pesquisa os conceitos relacionados à ecologia didática do saber, sob a perspectiva de Chevallard, porém, antes é pertinente esclarecer que o termo ecologia não surge na didática, na verdade, de acordo com Fernandes e Guerra (2012) o termo ecologia surge em 1866 no livro *Generelle Morphologie der Organismen* do autor Ernst Haeckel que utilizou essa palavra para descrever a área da biologia que estuda as relações entre os seres vivos e o ambiente em que vivem.

Foi somente no ano de 1988 que o termo ecologia ganha forma no campo da didática com a defesa da tese de Landy Rajonson, intitulada *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: trois études de cas*³ (ARTAUD, 2008). Rajonson se apoia nos estudos a respeito da Teoria da Transposição Didática, e mais tarde, o próprio Chevallard ao se apropriar desses conceitos da biologia a respeito das noções de nicho ecológico, habitat, cadeia alimentar e ecossistema, dá um destaque maior para essa relação e propõe a Problemática Ecológica. Segundo Chevallard (1994, p. 5):

Os ecologistas distinguiram, tratando-se de um organismo, seu habitat e nicho. Para dizer em uma linguagem deliberadamente antropomórfica, o habitat é de alguma sorte um endereço, lugar de residência do organismo. No nicho estão as funções que o organismo preenche, isto é, alguma forma de profissão que ele exerce.

Para Almouloud (2007 *apud* SILVA e ALMOULOU, 2016, p. 1) a partir de uma ideia ecológica, Chevallard busca “explicar as relações entre os objetos e no estudo do objeto em si mesmo (aqui, objeto toma diferentes sentidos como, por exemplo: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições)”. Assim, Chevallard (1994) define *habitat* e nicho ecológico, dentro das noções da ecologia didática do saber, onde o *habitat* é o lugar onde reside determinada entidade e o nicho se caracteriza pelas funções que tal organismo desempenha ali.

³ A análise ecológica das condições e das restrições no estudo dos fenômenos da transposição didática: três estudos de casos.

A partir da inserção das noções ecológicas na didática foi possível identificar quatro tipos de ecossistemas:

Ecosistema do saber, no qual se produz a matemática; ecossistema didático escolar, no qual se estuda a matemática; ecossistema profissional, onde utilizam a matemática para concretizar algumas tarefas; ecossistema noosferiano, enfim, aonde a matemática é manipulada para fins de transposição. (ARTAUD, 2008, p. 3).

Neste trabalho focamos nossa atenção para o ecossistema noosferiano, onde está posto o conhecimento matemático que chega ao professor em sala de aula por meio dos documentos oficiais e dos livros didáticos, que são os materiais em foco nesta pesquisa.

Deste modo, é pertinente para este estudo definirmos a ecologia do saber, isto é, “a análise, com referência a um determinado universo cultural, das condições e métodos (ou formas) de existência de uma formação epistemológica, real ou hipotética [...]”⁴ (CHEVALLARD, 1988, p. 3, tradução nossa). Portanto, a ecologia didática do saber trata da existência ou não de saberes em uma instituição, da forma como esse conhecimento atua em meio a uma sociedade em constante mudança, dado que um saber muitas vezes é esquecido para dar lugar a uma outra visão ou versão dele próprio, ou até mesmo, sendo ignorada sua existência.

Neste sentido, se mostra fundamental compreendermos essas condições de existência dos saberes em uma instituição, pois num processo de aprendizagem “é crucial a comparação entre o conhecimento que está sendo aprendido e o conhecimento que nesse processo é esquecido e desaprendido.” (SOUSA SANTOS, 2007, p. 87).

Segundo Sousa Santos (2007, p. 90) “a ecologia de saberes assenta na ideia pragmática de que é necessária uma reavaliação das intervenções e relações concretas na sociedade e na natureza que os diferentes conhecimentos proporcionam”. Tais relações estão postas de forma hierárquica, revelando um vínculo de intervenção dos diversos níveis hierárquicos nos saberes propostos nas instituições. Nesse sentido, o autor argumenta que é necessário dar preferência a formas de conhecimento que sejam acessíveis ao maior número de grupos sociais que estejam envolvidos na concepção, execução, controle e posse da intervenção (SOUSA SANTOS, 2007).

⁴ L'analyse, en référence à un univers culturel déterminé, des conditions et des modalités (ou des formes) d'existence d'une formation épistémologique, réelle ou hypothétique [...].

A respeito dos níveis hierárquicos supracitados, Chevallard (2002) propõe uma relação de níveis que denomina, níveis de co-determinação didática, os quais trataremos com mais detalhes a seguir.

3.1.6 Níveis de co-determinação didática

Compreendendo a complexidade que cerca a construção de uma organização praxeológica de um saber matemático, Chevallard (2002) descreve uma hierarquia de níveis de co-determinação didática, um princípio essencial da ecologia das organizações didáticas, para que possamos melhorar nossa compreensão no estudo de um determinado tema ou assunto. De acordo com esse autor:

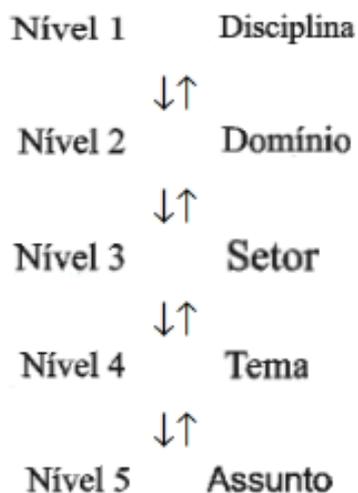
O reconhecimento da hierarquia de níveis assim esboçado, que vai de **assuntos** de estudo à **disciplina**, passando por **temas, setores e áreas**, tem por mérito principal permitir uma primeira ordenação nos pacotes de constrangimentos que presidem ao estudo escolar, evitando um desequilíbrio demasiado óbvio entre o que, destes constrangimentos, será tido em conta e o que ficará de fora. (Chevallard, 2002, p. 2).

Isso descreve os níveis de co-determinação didática superiores⁵ (figura 01), nos quais estão presentes os professores e os diferentes ecossistemas noosferianos. Em relação a posição dentro dos níveis, o professor se encontra, geralmente, confinado nos níveis *tema e assunto*, já a noosfera⁶ compõe e transita nos níveis superiores: *setor, domínio e disciplina* (CHEVALLARD, 2002).

Figura 02 – Níveis superiores de co-determinação didática

⁵ Denominamos de níveis superiores, pois neste texto em questão, Chevallard (2002) ainda não tinha inserido outros níveis, como por exemplo, o nível da civilização que entre outros aparece posteriormente para assim formar os níveis de co-determinação didática.

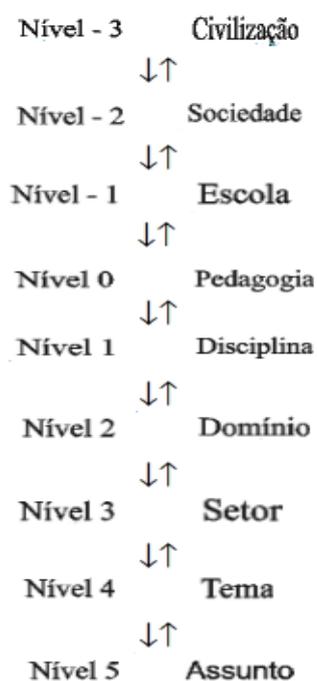
⁶ Chevallard define o termo noosfera como “a esfera de quem pensa, a esfera de quem reflete sobre o ensino, em qualquer registro.” (CHEVALLARD, 1986, p.11, tradução nossa).



Fonte: autoria própria (adaptado de CHEVALLARD, 2002)

Desenvolvendo as reflexões sobre os níveis de co-determinação didática, Chevallard (2002) amplia o universo hierarquizado incluindo as diversas realidades (escola, sociedade, matemática, etc.), formando assim, os níveis de co-determinação didática, representados na figura 02. Assim, “cada nível ajuda a determinar a ecologia de organizações matemáticas e de organizações didáticas pelos pontos de apoio que oferece e pelos constrangimentos que impõe.” (CHEVALLARD, 2002, p. 10).

Figura 03 – Níveis de co-determinação didática



Fonte: autoria própria (adaptado de CHEVALLARD, 2007)

Esses níveis representam um universo único e se relacionam mutuamente, ou seja, mudanças em níveis acima podem acarretar em mudanças nos níveis abaixo e vice-versa. Por exemplo, “a Disciplina, poderá fazer a diferença em níveis mais baixos como no Domínio, mas também em níveis mais altos como do Pedagógico, da Escola, da Sociedade e até mesmo das Civilizações”. (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 55).

Os níveis superiores de co-determinação didática estão atrelados a organização matemática, assim sendo:

A organização pontual está associada ao nível de codeterminação assunto (nível 5); a organização local está associada ao nível de codeterminação tema (nível 4); a organização regional está associada ao nível de codeterminação setor (nível 3); e a organização global está associada ao nível de codeterminação domínio (nível 2). (MELO, 2019, p. 45).

A respeito dos demais níveis, em nossa pesquisa, o nível Sociedade está caracterizada pela noosfera (documentos oficiais e livros didáticos); a Escola é a dos anos finais do Ensino Fundamental; a Pedagogia é a referente a concepção de ensino nos anos finais do Ensino Fundamental; a Disciplina é a Matemática; o Domínio relativo às Grandezas e medidas; o Setor, Área de figuras geométricas planas; o Tema, Área do círculo; o Assunto, o estudo do conceito de área do círculo.

Assim, os níveis de co-determinação didática foram uma ferramenta essencial na análise dos documentos oficiais para a educação básica (PCN e BNCC), buscamos a partir deles construir a ecologia desses materiais de modo a compreender como o saber área do círculo habita esse ecossistema e como os outros níveis se envolvem para que se estabeleça o seu nicho e suas relações tróficas.

3.2 O PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

A matemática como conhecemos hoje vem de um processo de evolução que atravessa séculos de estudos e aprimoramentos nas diversas áreas do conhecimento. Tudo que estudamos hoje teve início na necessidade das civilizações antigas de evoluir e resolver problemas que impediam essa evolução (EVES, 2011). Assim, quando pensamos no conceito de área ensinado atualmente devemos ter a consciência de que ele surge em algum momento da história a partir da necessidade de avançar perante algum obstáculo.

A civilização egípcia é uma das pioneiras no que se refere ao conhecimento matemático, várias descobertas arqueológicas comprovam o pioneirismo desse povo

quanto ao desenvolvimento do conhecimento matemático (EVES, 2011). Aqui podemos destacar o papiro de Rhind, um documento de cerca de 1.650 a.C. que apresenta a solução de diversos problemas matemáticos desenvolvidos pelos egípcios, como por exemplo, os relacionados ao cálculo de área do círculo. Em relação a isso, o matemático Howard Eves (2011, p.70) comenta que:

O papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Posto isso, a seguir, trataremos sobre o conceito de área de figuras geométricas planas enquanto grandeza geométrica, no que tange às pesquisas desenvolvidas e as deficiências identificadas no processo de ensino e de aprendizagem deste saber matemático.

3.2.1 O conceito de área no contexto das pesquisas

O conceito de área de figuras geométricas planas tem um papel social forte enquanto objeto do saber no currículo da escola básica, sua aprendizagem acarreta no aluno uma visão de mundo mais ampla em seu cotidiano e em sua trajetória escolar. Entretanto, pesquisas diversas, desenvolvidas a respeito desse conceito apontam a existência de dificuldades no seu processo de ensino e de aprendizagem, nos mostrando uma amálgama de problemas conceituais e didáticos.

Pesquisas recentes (ROSA dos SANTOS, 2015; LESSA, 2017; ROSA dos SANTOS e SILVA FILHO, 2017) apontam problemas didáticos e conceituais, apontados em documentos oficiais e em pesquisas desde as décadas passadas, nos mostrando que ainda se faz necessário compreender melhor esses problemas para conseguirmos superá-los.

A pesquisa de Rosa dos Santos (2015) teve por objetivo analisar o distanciamento entre a prática docente do professor de Matemática e a abordagem do livro didático adotado por ele no 6º ano do ensino fundamental em relação ao conceito de área de figuras geométricas planas, nos revela que apesar das melhorias conceituais apresentadas pelo LD e do professor se utilizar exclusivamente dessa ferramenta em suas aulas, ele não consegue fazer transformar o saber de modo que contribua para uma construção do conhecimento de forma significativa.

A pesquisa de Lessa (2017) cujo o objetivo era contribuir com o processo de formação docente a partir da construção de um Modelo Epistemológico de Referência, que considera as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático área e procura integrar elementos deste modelo na bagagem praxeológica de professores de matemática do 6º ano do ensino fundamental, detectou problemas comumente encontrados em pesquisas que tratam do conceito de área de figuras planas, ou seja, a escassez de técnicas que contribuam para uma conceituação de área enquanto grandeza e o enfoque na aplicação de fórmulas sem uma justificativa explícita dos motivos que os levaram a desenvolver tal técnica, favorecendo novamente para um aspecto numérico do conceito de área.

Na pesquisa de Rosa dos Santos e Silva Filho (2017) que objetivou analisar a abordagem do conceito de área do círculo no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, adotado nas escolas públicas municipais de Garanhuns/PE, temos novamente a presença de uma abordagem que não contribui para o conceito de área enquanto grandeza, o livro analisado prioriza o tipo de tarefa, determinar a medida da área de uma figura ou região, e foca no uso de fórmulas como técnica para resolução de tarefas, além de não apresentar em sua abordagem alguns tipos de tarefas, por exemplo, produzir superfícies de área dada.

Todas as pesquisas supracitadas consideram o conceito de área como grandeza geométrica, sendo assim, também adotaremos área nessa perspectiva, nos apoiando nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), que indicam a abordagem do conceito de área como grandeza fazendo a distinção e articulação entre três quadros: o geométrico, o das grandezas e o numérico. Acerca disso Douady e Perrin-Glorian (1989, pp.395-396 *apud* Ferreira 2010, p.27) atestam que:

O desenvolvimento, no ensino, do conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico, e uma identificação precoce entre grandezas e números favorece o amálgama de diferentes grandezas (no caso, comprimento e área).

3.2.2 O conceito de área de figuras planas e os documentos oficiais nacionais

No fim do século XX tivemos algumas mudanças no ensino brasileiro, a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que tem como principal finalidade, orientar a educação brasileira em seus diversos níveis, apontava

para os avanços subsequentes que viriam com a sua aprovação, como, os maiores investimentos em educação.

Em paralelo com as discussões sobre a LDB, no ano de 1995, o Governo Federal (GF) por meio do Ministério da Educação (MEC) encaminhou para consulta e avaliação de professores e acadêmicos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Após esta consulta diversos pareceres foram devolvidos ao MEC que com isso reelaborou a versão preliminar dos PCN e no ano de 1996 o encaminhou à nova versão ao Conselho Nacional de Educação (CNE) para que se deliberasse sobre a proposta (BONAMINO; MARTINEZ, 2002). Culminando na aprovação dos PCN para o primeiro e segundo ciclo em 1997 e posteriormente em 1998, para o terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental.

Os PCN são diretrizes elaboradas pelo GF que “visavam a tornar-se uma referência para elaboração dos currículos escolares, como também servir de subsídio para elaboração das propostas curriculares estaduais e municipais.” (SOUZA NETO, 2014, p. 113). São referenciais norteadores que tentam auxiliar os estados e municípios no oferecimento de uma educação básica de qualidade.

Em relação à Matemática, os PCN consideram que ela “caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.” (BRASIL, 1998, p. 24). A partir desse documento passa-se a discutir uma Matemática para a formação cidadã, onde os conteúdos matemáticos são organizados em grandes blocos.

O bloco das grandezas e medidas “caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento.” (BRASIL, 1998, p. 51). Além disso, de acordo com esse documento, esse bloco contribui para possíveis articulações com outros blocos de conteúdos, por sua forte ligação com a geometria e com os diferentes tipos de números.

Segundo os PCN, no ensino do conceito de área é comum que os estudantes confundirem as noções de área e perímetro ou fazerem relações incorretas entre elas, tendo como uma possível explicação, o fato dos alunos não serem expostos a tarefas em que ambas as noções se fazem presentes (BRASIL, 1998).

No ano de 2015 o GF inicia a discussão sobre a criação e implementação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nesse mesmo ano cria a primeira

versão deste documento e o encaminha para a consulta pública. Já em 2017, depois de três versões discutidas e analisadas a BNCC é homologada pelo MEC. Segundo seus autores a BNCC é:

Um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7).

Esse novo documento norteador para a criação dos currículos estaduais e municipais, aponta diversas habilidades e competências que os alunos dos diversos níveis da educação básica devem compreender durante sua trajetória escolar para que tenham de fato uma aprendizagem de qualidade. Para isso, a nova proposta contempla para o ensino de Matemática o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático. Segundo a Matriz do Pisa 2012 o letramento matemático tem a seguinte definição:

Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (OECD, 2013 apud BRASIL, 2018, p. 266).

Na BNCC, os conteúdos matemáticos estão dispostos em cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Em relação ao conceito de área, esse documento estabelece que o ensino desse conceito não deve recorrer no erro da aplicação de fórmulas de maneira excessiva, para isso, ressalta a importância de se utilizar as noções de equivalência de áreas e quadratura de uma figura para ampliação do repertório de abordagens do estudo da área do círculo em sala de aula (BRASIL, 2018).

4 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A seguir descreveremos os procedimentos e técnicas utilizados para a construção do conhecimento proposto por este trabalho, como também, os aspectos teóricos que serão adotados nesse percurso de análise. Desse modo, a metodologia vai além da descrição de procedimentos, indicando a escolha teórica realizada pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo (GERHARDT; SOUZA, 2009). Neste sentido, apresentaremos em seguida os métodos escolhidos para analisar os livros didáticos de Matemática, bem como, os documentos oficiais no que tange à abordagem do saber área do círculo nos anos finais do Ensino Fundamental. É relevante destacar que realizamos essa pesquisa em documentos, pois buscamos não só a compreensão de cunho didático, mas também entender o contexto histórico do saber em estudo.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa científica nos fornece ferramentas para que possamos conhecer e explicar fenômenos diversos, nos dando respostas para as questões que a norteiam. Neste sentido, Gil (1991, p. 19) define a pesquisa como “o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos”.

Posto isso, é relevante classificarmos a pesquisa com base em alguns critérios, são eles, os objetivos, a abordagem e os procedimentos técnicos. Deste modo, quanto aos objetivos, nossa pesquisa se caracteriza como descritiva, de acordo com Gil (1991) esse tipo de pesquisa objetiva a descrição de determinado fenômeno ou estabelecimento de relações entre variáveis. Portanto, faremos uma análise documental de livros didáticos e documentos oficiais, a fim de descrever as abordagens dos livros didáticos em relação ao movimento da educação que estão inseridos.

Em relação aos procedimentos técnicos, a pesquisa é caracterizada como documental, pois, além de analisarmos os documentos oficiais produzidos que norteiam o ensino de área do círculo, consideramos os livros didáticos como um documento ligado à instituição escolar. Segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 56) “todo documento deve passar por uma avaliação crítica por parte do pesquisador, que levará em consideração seus aspectos internos e externos”.

Quanto à abordagem, classificamos nossa pesquisa como qualitativa, não nos preocupamos com a representatividade numérica, mas sim, com as potencialidades e deficiências possivelmente encontradas nas abordagens dos documentos analisados. Para Prodanov e Freitas (2013, p. 70) esse tipo de abordagem “considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”.

4.2 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Pensando no melhor andamento da pesquisa, nos baseamos nas ideias propostas por Bittar (2017, p. 369) acerca da produção de dados à luz da TAD, que compõe as seguintes fases:

A escolha do material (livro) a ser analisado; a separação entre Curso e Atividades Propostas (divisão do material para análise); elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático; elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático; análise das organizações modeladas.

4.2.1 Os livros didáticos e os documentos oficiais a serem analisados

Tomando como orientação questão central da pesquisa, mapeamos algumas coleções de livros didáticos produzidos entre o período pré e pós documentos oficiais norteadores do ensino na educação básica, dentre estes, selecionamos três coleções de livros didáticos de matemática para análise: Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau (1976), Matemática fazendo a diferença (2006) e A conquista da matemática (2018).

Por serem coleções antigas e termos uma limitação para a aquisição dos periódicos, não pudemos ter uma seleção mais criteriosa acerca das coleções produzidas antes da década passada, sendo assim, como critério de seleção para as coleções publicadas em 1976 e 2006 foi utilizado a disponibilidade de acesso a coleção e ela ter sido produzida durante o período delimitado por nossa análise, ou seja, uma antes e outra após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Para a coleção de 2018, por ser mais recente e termos um acesso mais fácil a todas as coleções publicadas, foi selecionada a coleção mais adotada nas escolas públicas do Brasil e aprovada no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020.

Do mesmo modo, fizeram parte das nossas análises dois documentos oficiais: os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular. Optamos por esses documentos, pois são referenciais nacionais e contemplam o período no qual os livros didáticos foram produzidos, consistindo em uma fonte importante de informação para alcançarmos nosso objetivo geral de pesquisa.

4.2.2 Parte Curso e Parte Atividades Propostas para análise

Para a análise do LD, dividimos seu texto em duas partes: Curso e Atividades propostas, onde a parte Curso apresenta definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. É nessa parte do LD que os autores propõem aquilo que consideram importante para o aprendizado do aluno, além de representar uma fonte de consulta para os alunos de procedimentos técnicos a serem empregados nas atividades propostas, ou também, em alguns casos, pode ser utilizado pelo professor como fonte de consulta e apoio. Deste modo, a partir da análise da parte Curso, produzimos os blocos praxeológicos que serão testados e, talvez, modificados ao investigar a parte Atividades Propostas (BITTAR, 2017).

Após a realização da análise da Parte Curso, passamos para a análise das Atividades Propostas. Onde, de acordo com Bittar (2017, p. 373):

Nesse momento buscamos analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s).

Para a realização dessa análise, utilizamos, quando disponível, o manual do professor que nos representa uma fonte rica de informações sobre as pretensões do autor para o ensino proposto no LD. Disto, teremos informações suficientes para inferir sobre como os autores dos LD pretendiam que os alunos resolvessem as atividades propostas.

4.2.3 Elaboração do quarteto praxeológico matemático

Nesta fase, foi realizada uma leitura minuciosa, página a página, do capítulo referente ao estudo do conceito de área do círculo, identificando os blocos “prático-técnico” e “teórico-tecnológico” apresentados. Utilizamos para isso, o filtro da grandeza área, na forma posta por Rosa dos Santos (2015) em sua tese de doutorado

e ampliado por Silva Filho e Rosa dos Santos (2017), relacionados no quadro 02, que nos estabeleceu uma base de apoio para nossa análise.

Quadro 02 - Tipos de tarefas para a grandeza área

Sigla	Tipos de tarefa
TC	Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas.
TD	Determinar a medida da área de uma figura ou região.
TT	Converter unidades de medida de área.
TE	Estimar medidas de área de figuras planas.
TO	Operar com medidas de áreas de figuras planas.
TP	Produzir superfícies de área dada.
TG	Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas.
TU	Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies.
TS	Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).

Fonte: Autoria própria

Para nortear a análise praxeológica do objeto matemático área do círculo nos livros didáticos, acerca da avaliação dos blocos do “saber-fazer” e do “saber”, utilizamos os critérios adotados por Rosa dos Santos (2015) em sua tese que foram inspirados nos critérios de Chevallard (1999) e estão ilustrados no quadro a seguir:

Quadro 03 - Critérios adotados na análise da praxeologia matemática no livro didático

Elemento da praxeologia	Critérios adotados	Exemplos de questionamentos a serem observados no livro didático em relação ao conceito de área
<p>Tipo de tarefa</p> <p>(T)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Identificação. ● Representatividade. ● Razão de ser. ● Importância. ● Pertinência. 	<p>As tarefas propostas: a) são bem identificadas? b) são representativas? c) são importantes e tem uma razão de ser? d) são pertinentes? e) Quais os tipos de tarefas privilegiados no livro?</p>
<p>Técnica</p> <p>(τ)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Fáceis de utilização. ● Confiáveis e aceitáveis. ● Abrangentes. ● Possíveis de evoluir. ● Bem elaboradas. 	<p>As formas de resolver tarefas: a) são bem elaboradas ou apenas esboçadas? b) são fáceis de utilizar? c) são confiáveis e aceitáveis? d) são amplamente usadas em diversos tipos de tarefas? e) são possíveis de evoluir?</p>
<p>Tecnologia e Teoria</p> <p>[θ, Θ]</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Explicitação do conceito. ● Apresentação e justificativa do enunciado. ● Tipo de justificativa: canônica ou não. ● Forma de justificativa: explicativa, dedutiva, etc. ● Validade de argumentação. ● Exploração do bloco tecnológico-teórico. 	<p>O conceito de área de figuras planas é bem explicitado ou não? Sendo dado um enunciado o problema de sua justificativa é somente posto ou este enunciado é considerado tacitamente como ativo em si, evidente, natural ou ainda bem conhecido? As formas de justificativa são próximas às formas canônicas ou são adaptadas às suas condições de utilização e o que permitem justificar? São adotadas formas de justificativas explicativas, dedutivas e etc? Os argumentos utilizados são cientificamente válidos? Os resultados do bloco tecnológico-teórico disponibilizado são efetivamente e otimamente explorados?</p>

Fonte: Rosa dos Santos (2015, p. 101)

4.2.4 Elaboração da praxeologia didática

Nesta fase, fizemos a modelagem das escolhas didáticas dos autores de como ensinar área do círculo, para tanto, utilizamos os seis momentos de estudo descritos por Chevallard (1999) e adaptados por Rosa dos Santos (2015) e ilustrados no quadro

04. Consideramos que por meio da identificação e análise dos momentos de estudo podemos compreender a proposta de ensino do objeto matemático estudado neste trabalho.

Quadro 04 - Categorias e critérios de análise da praxeologia didática dos livros de matemática

Categorias (momentos)	Crítérios de análise
Primeiro encontro	Como inicia o assunto de área de figuras geométricas planas no livro?
Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica.	Como o livro explora os tipos de tarefas? Como se dá a elaboração de técnicas?
Constituição do ambiente tecnológico – teórico.	Como é realizada a construção de justificativas?
Trabalho da técnica	Quando acontece a construção do domínio da técnica? E da precisão da técnica? Há criação de novas técnicas?
Institucionalização	Como se concretiza a institucionalização (No início, meio e/ou no fim da abordagem do livro)?
Avaliação	Como acontece a avaliação: No início, meio e/ou no fim da abordagem do livro?

Fonte: Rosa dos Santos (2015, p. 100)

4.2.5 Análise das praxeologias modeladas

Por fim, nesta última fase, após a elaboração das OM e OD dos livros didáticos, fizemos a interpretação dos dados obtidos em cada fase. Assim, pudemos descrever a abordagem dos livros didáticos analisados e se o ensino do saber área do círculo foi ou não transformado durante o período analisado.

4.2.6 Análise ecológica dos livros didáticos e dos documentos oficiais

Conduzimos nossa análise baseando-nos na problemática ecológica e nas noções de *habitat* “que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o *nicho* que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.” (ALMOULLOUD, 2015, p. 15).

Nesta análise, tomamos como norte os questionamentos propostos por Almouloud (2015, p.15) em relação a ecologia de um objeto de saber:

O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado?

Contudo, apesar de termos essas questões como norte, elas são uma base, podendo ser alteradas e ampliadas de forma a torná-las mais adequadas ao que pretendemos identificar com nossa pesquisa.

Dito isto, para a caracterização da relação institucional do saber área do círculo, quanto à ecologia das tarefas e técnicas identificadas nos livros didáticos e documentos oficiais, utilizamos uma adaptação dos critérios propostos por Vieira (2020), ilustrados no quadro 05.

Quadro 05 - Critérios avaliativos da relação institucional quanto à ecologia das tarefas e técnicas

Tipos de tarefas	As tarefas que envolvem área do círculo fazem parte de quais instituições ?
	As tarefas que envolvem área do círculo surgem em que habitat ?
	Área do círculo surge nas tarefas como objeto de estudo ou como um nicho ecológico para o estudo de um outro saber?
	Existem relações tróficas entre área do círculo e outros saberes no encaminhamento das tarefas

Técnicas	As formas de resolver as tarefas de área do círculo variam dentro e entre as instituições?
	As formas de resolver problemas que envolvem área do círculo têm sua origem em que habitat?
	As formas de resolver problemas que envolvem área do círculo são amplamente usadas em diversos tipos de tarefas de diferentes habitats?
	As formas de resolver problemas que envolvem área do círculo destacam área do círculo como objeto de estudo um como um nicho ecológico para o estudo de um outro saber?

Fonte: adaptado de Vieira (2020)

Para a análise das relações tróficas: cadeias e teias alimentares formadas entre o saber área do círculo e outros saberes do ecossistema da matemática, nas praxeologias didáticas e matemáticas (VIEIRA, 2020). Utilizamos uma adaptação dos critérios propostos por Vieira (2020), como mostra o quadro a seguir.

Quadro 06 - Inter-relações entre área do círculo e outros objetos matemáticos

Tipos de tarefas	As tarefas que envolvem área do círculo fazem parte de qual(is) habitat(s)?
	As tarefas que envolvem área do círculo surgem inter-relacionadas em qual(is) nicho(s)?
	A área do círculo se inter-relaciona nas tarefas como alimento ou como alimentando-se?
Técnicas	As formas de resolver as tarefas de área do círculo variam dentro e entre as comunidades de saberes?

	As formas de resolver problemas que envolvem área do círculo têm sua origem em que comunidade, população, saber?
	As formas de resolver problemas que envolvem área do círculo são amplamente usadas em diversos tipos de tarefas de diferentes comunidades, populações, saberes?
	As técnicas de resolver problemas que envolvem área do círculo destacam esse objeto como como um nicho ecológico em qual(is) comunidades, populações, saberes?

Fonte: adaptado de Vieira (2020)

A partir dessas investigações, procuramos conhecer a razão de ser do objeto matemático área do círculo na instituição documentos oficiais norteadores da educação básica, como também, identificar sob quais condições ele sobrevive até os dias atuais.

5 ANÁLISE DO SABER ÁREA DO CÍRCULO NOS PCN E NA BNCC

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos na análise dos PCN e da BNCC acerca do saber área do círculo, para tanto, utilizamos as noções de Ecologia Didática do Saber apresentadas na fundamentação teórica deste trabalho, como também, os elementos descritos em nossa metodologia.

5.1 ANÁLISE DOS PCN

Os PCN são inseridos em um período de transição para o pensamento dos educadores a respeito de como ensinar a *disciplina* Matemática, saindo de uma vertente mais tecnicista para o pensamento de uma matemática mais presente no cotidiano, em um ensino por intermédio de situações-problema que deem significado real para o aprender matemática.

Esse norteador da *escola* da Educação Básica brasileira propunha um avanço na *pedagogia* empregada até então em grande parte das escolas nacionais que sofriam grande influência do MMM e revela também a transição e aceitação de um novo jeito de pensar matemática trazido pelo MEM. Nesse sentido, o papel do professor se transforma de detentor do saber para um mediador de aprendizagem, onde o estudante está no centro do processo.

Os PCN também avançam no nível *sociedade*, uma vez que propõe seis temas transversais, visando a formação integral do aluno em meio às transformações que ocorriam na virada do século, se atentando ainda mais para as questões práticas e sociais que o estudante deveria ter ao fim da Educação Básica.

Além disso, os PCN se constituem como a primeira iniciativa para a unificação e democratização do ensino no país, apesar de não ser uma lei que deveria estar presente obrigatoriamente em todo o território nacional, é um documento que indicava como a educação deveria caminhar nesse início de um novo século.

5.1.1 Análise do saber área do círculo nos PCN

Na *disciplina* Matemática no nível do *domínio* relativo às Grandezas e Medidas, analisamos a apresentação proposta por esse documento do *setor* área de figuras geométricas planas, mais especificamente, do *tema* área do círculo.

Dentro dos PCN o ensino de Matemática está organizado em objetivos, ou seja, uma série de competências para cada eixo da matemática e essas competências

estão ligadas a conceitos e procedimentos. Assim sendo, o *habitat* do saber área do círculo está localizado no quarto ciclo (7^a e 8^a séries) do Ensino Fundamental, no eixo de Grandezas e Medidas. No entanto, não existe uma diretriz específica sobre como deve ocorrer o ensino de área do círculo.

Acerca das relações tróficas estabelecidas pelo saber área do círculo, podemos identificar que esse saber estabelece relação com o estudo da área da superfície e volume do cilindro, isto é, esse saber é alimentado pelo saber área do círculo. De mesmo modo, ao observarmos as sugestões de procedimentos no ensino de números irracionais encontramos a indicação de voltar esse estudo a situações-problema vinculadas à Geometria e medidas, como no caso do “pi”, assim, esse estudo de irracionais se alimenta do conceito de circunferência e, em seguida, alimenta o estudo da área do círculo, demonstrando o funcionamento desse ecossistema.

Em síntese, vemos que o estudo do ecossistema do saber área de figuras geométricas planas e em consequência de área do círculo, de acordo com os PCN, deveria estar pautado na resolução de situações-problema, retomando experiências que explorem o conceito de medida, que apresentem distinção e comparação entre área e perímetro, que trabalhem com composição e decomposição de figuras e que apresentem a estimativa como um aspecto importante das Grandezas e Medidas. Além disso, segundo os PCN:

A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. (BRASIL, 1998, p. 131).

Assim sendo, de acordo com os PCN (1998) os procedimentos supracitados quando utilizados favorecem a construção das noções envolvidas no estudo do saber em questão, e assim, evitam um ensino sem significado e carente de contexto para os estudantes dessa etapa de ensino.

Por fim, o saber área do círculo faz parte do ecossistema do conceito de área, o qual nos PCN tem o papel de estabelecer relações entre os temas, proporcionando um campo de problemas para a ampliação e consolidação do conceito de número e de conceitos geométricos (BRASIL, 1998).

5.2 ANÁLISE DA BNCC

A *disciplina* Matemática está posta na BNCC com um papel de destaque na formação crítica e social do indivíduo que compõe a população em nível escolar. Apesar de citar a base de axiomas e postulados na qual a Matemática se sustenta, a BNCC aponta para um ensino mais prático e experimental, onde os alunos consigam perceber os elementos do mundo real dentro da atividade matemática e façam associações entre os diversos campos da matemática.

Essa visão para a *escola* da Educação Básica ilustra a presença da influência do MEM na *pedagogia* empregada no ensino de matemática, se desligando de uma matemática tecnicista e complexa que estava presente durante o MMM e passando a privilegiar uma matemática de abordagem mais cotidiana que contenha maior sentido para o aluno.

A BNCC também avança no nível *sociedade*, pois propõe oito competências específicas para o ensino de matemática, as quais têm por finalidade desenvolver nos alunos, entre outras coisas, o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação. Além disso, a BNCC tem o papel de unificar todo o ensino nacional, de modo que todos estejam ensinando e aprendendo as mesmas coisas nos mais diversos níveis sociais e regionais do país, fazendo uma espécie de democratização do ensino em todo território nacional.

5.2.1 Análise do saber área do círculo na BNCC

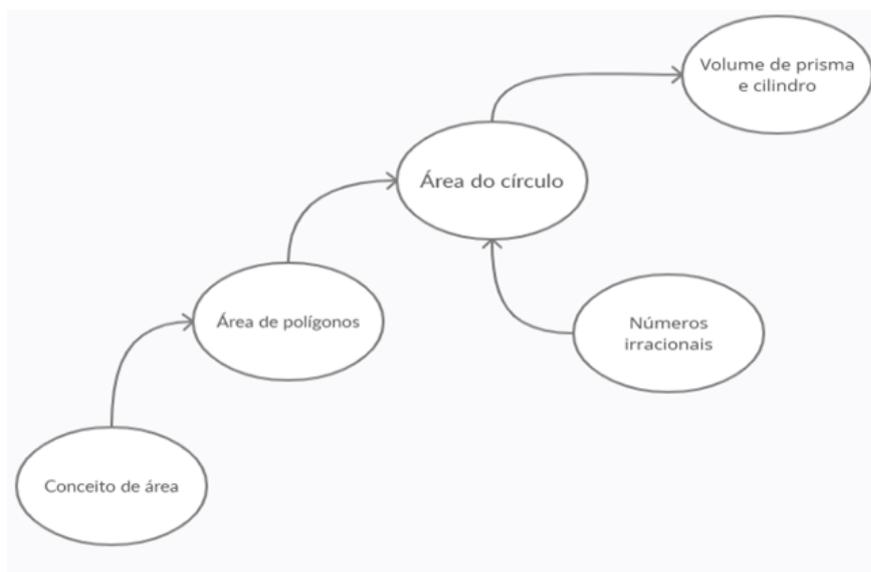
Nos aprofundando ainda mais no conteúdo da BNCC, dentro da *disciplina* Matemática no nível do *domínio* relativo às Grandezas e Medidas, analisamos a apresentação proposta por esse documento do *setor* área de figuras geométricas planas, mais especificamente, do *tema* área do círculo.

A BNCC está organizada em objetos de conhecimento e habilidades a serem trabalhadas em cada um desses objetos. Nesse sentido, localizamos o *habitat* do saber área do círculo no 8º ano dos anos finais do Ensino Fundamental na unidade temática Grandezas e Medidas.

Dentro desse ecossistema criado identificamos as relações tróficas com os diversos saberes, por exemplo, área de polígonos. Entretanto, algo que nos chamou atenção foi o fato de que esse saber estabelece relações tróficas com dois objetos do conhecimento do 9º ano, Volume de prismas e cilindros, de modo que alimenta esse objeto de conhecimento, assim como, também se relaciona com os números

irracionais se alimentando desse conceito. A seguir, temos uma ilustração da cadeia alimentar do saber área do círculo.

Figura 04 – Cadeia alimentar: área do círculo



Fonte: autoria própria

Desse modo, acreditamos ter identificado uma inconsistência no ecossistema montado pela BNCC, visto que ao observarmos os objetos de conhecimento da BNCC a área do círculo habita o 8º ano do Ensino Fundamental, mas se alimenta do saber números irracionais que habita o 9º ano, revelando uma falha na construção desse ecossistema.

Em síntese, como supracitado, o saber área do círculo faz parte do ecossistema do conceito de área, no qual dentro da BNCC o seu *nicho* está associado à ideia da resolução de problemas, como determinar a medida de terrenos (BRASIL, 2017).

6 O SABER ÁREA DO CÍRCULO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos nas análises das coleções de livros didáticos citadas na metodologia deste trabalho. Para a concretização dessas análises nos baseamos na TAD e nas suas noções de praxeologias matemáticas e didáticas (CHEVALLARD, 1999).

Para uma melhor apreciação e entendimento, esse estudo está organizado em duas etapas: a análise das praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas identificadas no LD e a análise das praxeologias didáticas do livro.

Em alguns casos, na construção da praxeologia matemática foi necessário a inserção de um subtipo de tarefa, pois apesar de terem a mesma ideia objetiva certos tipos de tarefas apresentam uma compreensão matemática mais específica. Para tanto, utilizamos uma notação para diferenciar os tipos dos subtipos de tarefas, isto é, inserimos um número natural subscrito nos tipos de tarefas, por exemplo, T_{D1} , T_{D2} , T_{D3} , etc.

Na a análise da OD dos livros utilizamos os seis momentos de estudos descritos por Chevallard (2002), ou seja, o Primeiro encontro; Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica; Constituição do ambiente tecnológico-teórico; Trabalho da técnica; Institucionalização e Avaliação. Como citado em nossa fundamentação teórica, os momentos de estudos não apresentam uma ordem cronológica necessária, sendo assim, nossas análises seguiram essa mesma premissa.

6.1 LIVRO DIDÁTICO CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU

Essa análise se deu no livro didático da 8ª série da coleção **Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau**, dos autores Anna Averbuch, França C. Gottlieb, Lucília B. Sanchez, Manhúcia P. Liberman e supervisão de L. H. Jacy Monteiro, 1ª edição de 1976.

Como supracitado, apesar de nessa análise observarmos toda a coleção relativa aos últimos quatro anos do ensino de 1º grau, focamos nossa investigação no último livro da coleção, referente a 8ª série, posto que o saber foco dessa pesquisa, área do círculo, habita nesse livro didático. Quanto a organização do LD da 8ª série, o mesmo é composto por 10 conteúdos estes organizados em quatro tópicos:

1. Exercícios preliminares por meio de situações conhecidas e estruturadas levam a algum princípio, conceitos ou técnica.
2. Observações são efetuadas através do texto com o título “Observe que”. Deste modo chamamos a atenção do aluno para as particularidades que caracterizam aquelas situações.
3. As conclusões e generalizações aparecem sob a denominação de “De um modo geral”. A maior parte dos enunciados “De um modo geral” foram colocados para dar uma oportunidade de aprimoramento aos alunos mais bem dotados.
4. Exercícios de aplicação. Visam levar o aluno no desejado aprofundamento das conclusões ou uma aplicação em outras áreas ou ainda à fixação de técnicas. (AVERBUCH; GOTTLIEB; SANCHEZ; LIBERMAN, 1976).

Partindo para a análise da composição de tarefas identificadas na décima unidade do LD (Áreas), identificamos um total de 68 tarefas⁷, onde dessas, 14 são referentes ao saber matemático área do círculo. Deste modo, excluimos de nossas análises as atividades que tratam de reflexões, tomadas de opiniões e que não abordam o conceito de área do círculo, visto que, apesar de terem uma importância para que o professor compreenda aquilo que os alunos já trazem de conhecimento prévio e contextualizam o ensino, essas não têm relação com o conteúdo matemático objetivo de nossa pesquisa.

Assim dizendo, nossa análise está baseada nas 14 tarefas referentes ao saber área do círculo, estas caracterizadas em tipos de tarefas de acordo com o filtro da grandeza área na forma posta por Rosa dos Santos (2015) e ampliado por Silva Filho e Rosa dos Santos (2017), ilustrados na tabela a seguir.

Tabela 1 – Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro da 8ª série.

Tipos de tarefas	Quantidade de tarefas	Percentual

⁷ Foram considerados todos os itens dispostos nas atividades propostas, por exemplo, uma atividade com dois itens (a e b) foi considerada como 2 tarefas.

TC - Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas	02	14%
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	09	64%
TT - Converter unidades de medida de área	00	0%
TE - Estimar medidas de área de figuras planas	00	0%
TO - Operar com medidas de áreas de figuras planas	00	0%
TP - Produzir superfícies de área dada	00	0%
TG - Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas	00	0%
TU - Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	00	0%
TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).	03	22%
Total	14	100%

Fonte: Autoria própria

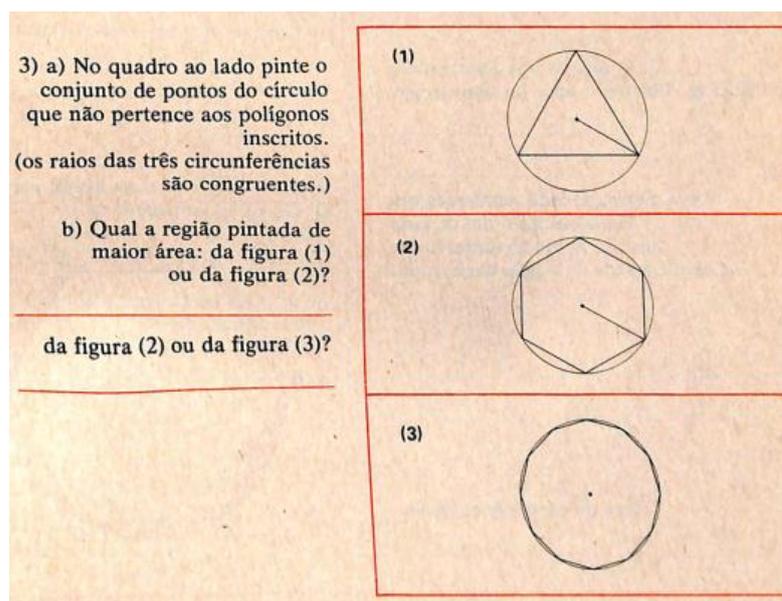
6.1.1 Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8^o série

Como já é sabido, foi identificado no livro didático 14 tarefas que estão distribuídas em 3 tipos de tarefas, os quais foram analisados de acordo com a noção praxeológica da TAD, isto é, a caracterização dos blocos do saber-fazer (T, τ) e do saber (θ, Θ). Acerca disso, apresentaremos para cada tipo de tarefa a sua OMP.

6.1.1.1 Organização matemática pontual de TC

Em TC foram classificadas duas tarefas de mesma natureza matemática, tratam-se de duas tarefas de comparação visual da área do círculo, quando este está inscrito por um polígono regular. Essa técnica de comparação pode ser justificada pela terceira propriedade de áreas de figuras geométricas planas: se a área de uma figura A_1 estiver contida em A_2 , teremos que a área de A_1 é menor do que a área de A_2 .

Figura 05 - Exemplo de TC no capítulo do livro didático



Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.183)

6.1.1.2 Organização matemática pontual de TD

As tarefas do tipo TD são predominantes na abordagem trazida pelo LD, compondo mais da metade das tarefas categorizadas. Neste sentido, as organizamos em cinco subtipos de tarefa, como ilustra a tabela a seguir:

Tabela 2 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro didático da 8ª série.

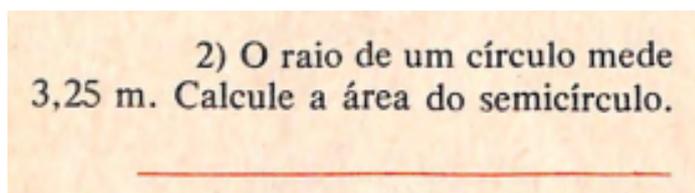
Tipo de tarefa	Subtipo de tarefas	Quantidade

TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	T _{D1} : Calcular área do círculo, dado a medida do raio ou diâmetro da figura plana.	01
	T _{D2} : Calcular a área do setor circular, dado à medida do raio, diâmetro ou comprimento.	01
	T _{D3} : Calcular a área da coroa circular, dado a medida do raio ou do diâmetro dos círculos.	01
	T _{D4} : Calcular a área de uma região, dado um polígono contido no círculo.	01
	T _{D5} : Calcular a área de uma região, dado um círculo ou setor circular circunscrito ou inscrito a outra figura plana.	05

Fonte: Autoria própria

No subtipo T_{D1}, a técnica empregada consiste na aplicação da fórmula para o cálculo da área do círculo, visto que, o enunciado lhe dá a medida do raio. Sendo justificada, dada a demonstração⁸ realizada pelos autores do livro na *Parte curso*.

Figura 06 - Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático

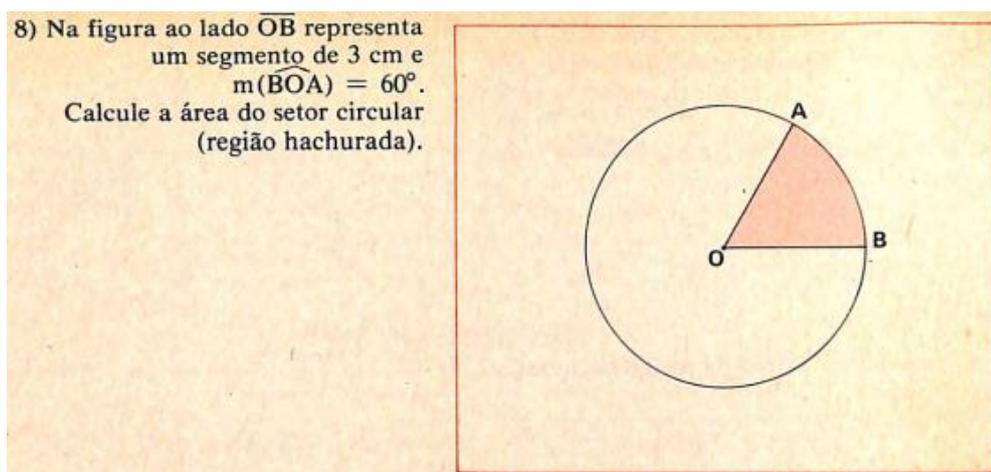


Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.184)

⁸ Classificamos a justificativa dada pelo LD como demonstração para fins de simplificação, mesmo compreendendo que o ato apresentado no livro não configura uma demonstração matemática formal da fórmula para cálculo da área do círculo.

Em T_{D2} , temos uma tarefa que trata do cálculo da área do setor circular, entretanto o LD não apresenta uma técnica específica para a resolução desta tarefa, deixando a cargo do aluno mobilizar seus conhecimentos de modo a encontrar a área do setor circular. Para tanto, inferimos que após a aplicação da fórmula para cálculo da área do círculo, o aluno aplicaria uma regra de três a fim de calcular a proporção da medida total da área com a parte que lhe é solicitada (60°). O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais.

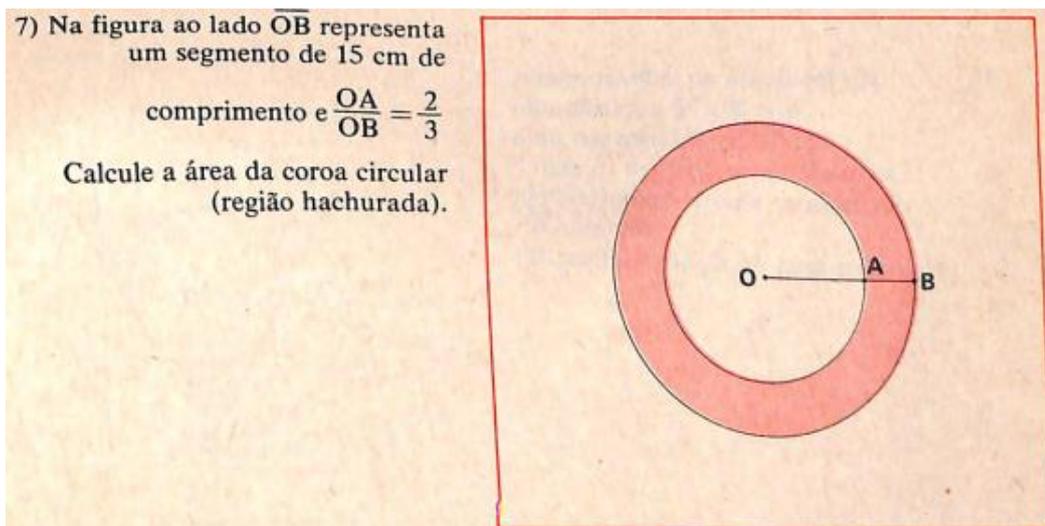
Figura 07 - Exemplo do subtipo T_{D2} no livro didático



Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.186)

No subtipo T_{D3} , o aluno deverá calcular a área da coroa circular, para isso, é dado a medida do raio maior e a razão entre os dois raios, de modo que o aluno deveria fazer um cálculo algébrico para encontrar a medida do raio menor, e assim, calcular a medida da área dos dois círculos e subtrair a medida da área maior pela medida da área menor. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais.

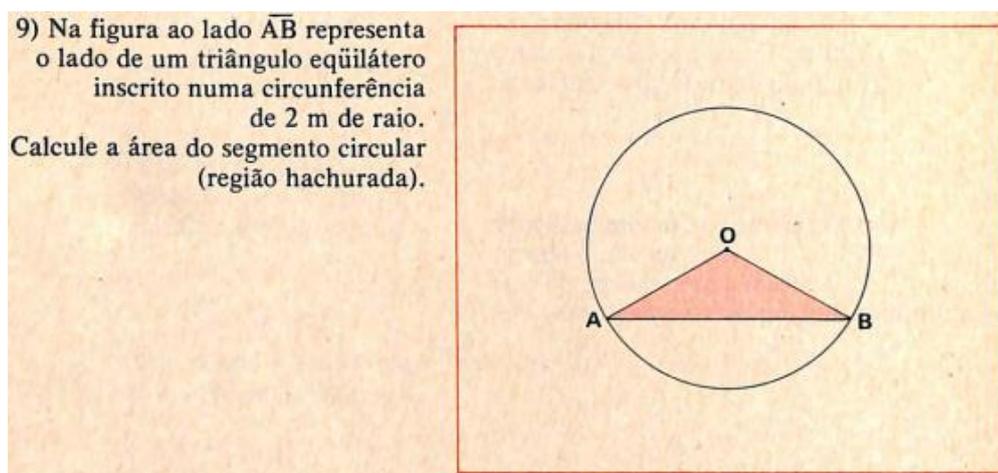
Figura 08 - Exemplo do subtipo T_{D3} no livro didático



Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.185)

No subtipo T_{D4} , o aluno deveria calcular a área de um triângulo equilátero contido⁹ em uma circunferência dado a medida do raio dessa circunferência. Para isso, é necessário que o estudante calcule a altura desse triângulo e em seguida aplique a fórmula para cálculo da área do triângulo. A justificativa para essa técnica está posta na demonstração apresentada anteriormente na *Parte Curso* do LD.

Figura 09 - Exemplo do subtipo T_{D4} no livro didático

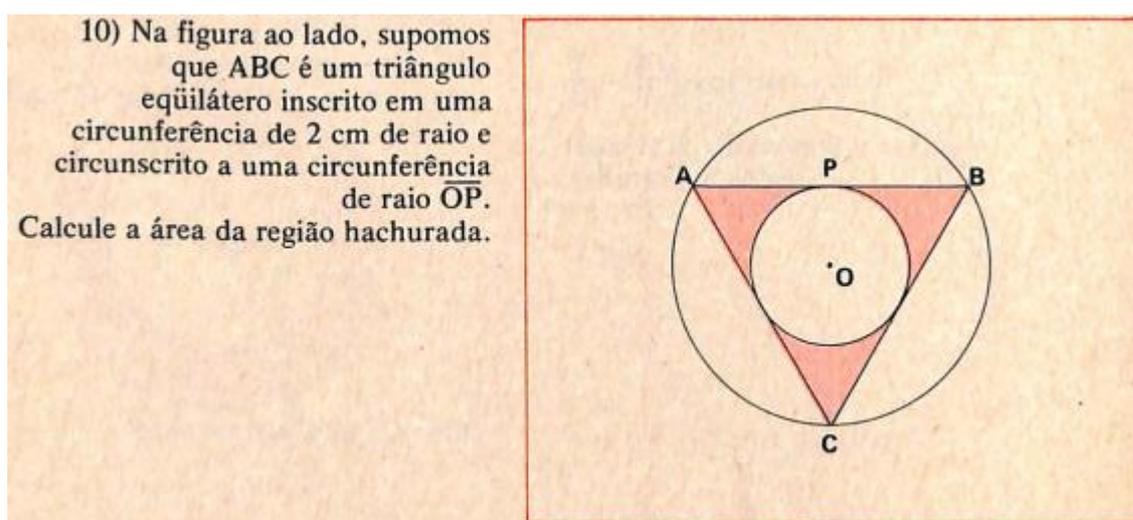


Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.186)

⁹ Nem todos os vértices do triângulo estão tangenciando a circunferência, assim sendo, é um equívoco dizer que o triângulo está inscrito na circunferência, visto que o centro não é parte da circunferência.

O subtipo T_{D5} representa o maior número de tarefas, onde a técnica (T_{D5}) consiste no cálculo da área de uma região dado um círculo inscrito ou circunscrito a outra figura plana. Essa técnica é associada às tarefas caracterizadas com outros saberes da matemática, como o Teorema de Pitágoras e a trigonometria. Ou seja, o estudante deveria calcular a área do círculo utilizando a fórmula e aplicar o Teorema de Pitágoras, ou trigonometria, para identificar outros elementos das figuras inscritas ou circunscritas para em seguida operar com as medidas de área encontradas.

Figura 10 - Exemplo do subtipo T_{D5} no livro didático



Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.185)

O estabelecimento do bloco do saber (θ , Θ) é justificado pela demonstração da fórmula para cálculo da área do círculo, as propriedades das operações fundamentais e as demonstrações apresentadas em capítulos anteriores acerca do Teorema de Pitágoras e dos conceitos de trigonometria.

6.1.1.3 Organização matemática pontual de TS

Apesar de representar um número reduzido de tarefas, classificamos TS em dois subtipos de tarefas (T_{S1} e T_{S2}) em razão de sua natureza matemática distinta.

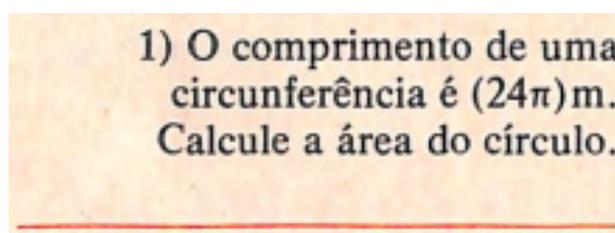
Tabela 3 – Distribuição dos subtipos de tarefa de TS identificados no livro didático da 8ª série.

Tipo de tarefa	Subtipo de tarefas	Quantidade
TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).	T _{S1} : Calcular área do círculo, dado a medida do comprimento da circunferência.	01
	T _{S2} : Calcular a área do círculo, dado a medida do comprimento de um polígono inscrito na circunferência.	02

Fonte: Autoria própria

No subtipo T_{S1}, a técnica (T_{S1}) consiste no trabalho da fórmula para cálculo do comprimento da circunferência de modo a identificar a medida do raio relativo a essa figura. Em seguida, o aluno deveria aplicar a medida do raio encontrada na fórmula para cálculo da área do círculo, para assim, encontrar a medida da área do círculo. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo, bem como, na demonstração da fórmula para cálculo do comprimento da circunferência.

Figura 11 - Exemplo do subtipo T_{S1} no livro didático

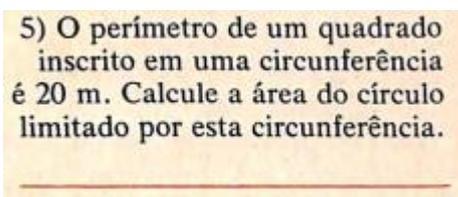


Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.184)

No subtipo T_{S2}, a técnica (T_{S2}) corresponde na aplicação de conceitos de geometria de figuras planas inscritas na circunferência, ou seja, o estudante deveria manipular os dados contidos nas tarefas sobre o perímetro das figuras inscritas, de maneira a identificar a medida do raio da circunferência que circunscreve essas figuras. Logo após encontrar a medida do raio da circunferência, o aluno teria de aplicar essa medida na fórmula para cálculo da área do círculo, desse modo, encontrando a resposta solicitada. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado

pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e na propriedade do perímetro de polígonos regulares.

Figura 12 - Exemplo do subtipo T_{S2} no livro didático



5) O perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência é 20 m. Calcule a área do círculo limitado por esta circunferência.

Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.185)

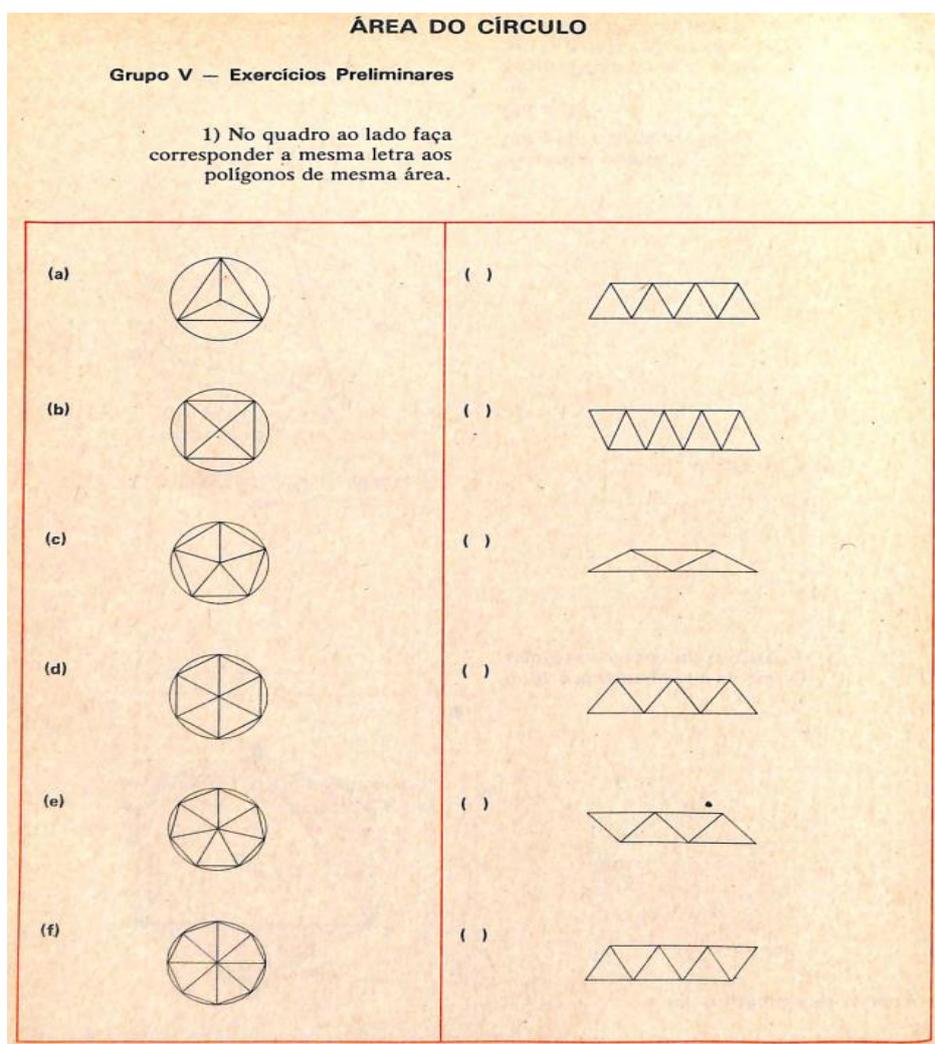
Por fim, os dados apresentados nessa etapa de análise das praxeologias matemáticas presentes no LD da 8^o série nos revela uma abordagem numérica do saber área do círculo, uma vez que o livro está focado em tarefas de determinar a área (TD) com a aplicação de fórmulas em praticamente todas as questões, o que já sabemos, não contribui para uma aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza.

Outro ponto a se destacar é a falta de contexto na elaboração das tarefas, em nenhum momento temos um esboço de aplicação real ou cotidiana do saber em estudo, ilustrando mais uma deficiência da abordagem trazida pelo LD e contrariando o que dizem os próprios autores nas primeiras páginas do livro. Ademais, se pensarmos no contexto em que o livro estava inserido (década de 70) temos um número bastante reduzido de tarefas relativas ao saber área do círculo, em um período de difícil acesso à informação onde o livro era, se não a única, mas a principal fonte de consulta e conhecimento formal por parte dos usuários do LD. Em suma, a abordagem proposta pelo LD é rasa e insuficiente para uma aprendizagem do saber área do círculo enquanto grandeza, sendo necessário uma grande complementação por parte do professor.

6.1.2 Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8^o série

A *Parte curso* se inicia com uma sequência de tarefas, ou seja, o momento de primeiro encontro acontece em um tópico que os autores denominam de “**Exercícios preliminares**”. Então a partir da resolução de algumas tarefas, o LD vai elaborando a técnica e a justificativa (θ , Θ) para o funcionamento das técnicas, tudo de modo sequencial e sucinto.

Figura 13 – Momento de primeiro encontro com o saber área do círculo no LD da 8ª série.



Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.182)

A partir da planificação de polígonos inscritos na circunferência, como ilustra a figura acima, o LD constrói a noção de que “a área de um polígono regular cujo perímetro é p e cujo apótema é a é: $p/2 \cdot a$ ” (AVERBUCH; GOTTLIEB; SANCHEZ; LIBERMAN, 1976, p. 183). Em seguida, é apresentada uma tarefa onde o aluno deve comparar a área resultante da inscrição de polígonos na circunferência (figura 14), de

maneira que esse polígono inscrito vai tendo seu número de lados aumentado, até quase se parecer com a circunferência que o circunscribe. A partir disso, o LD institucionaliza o saber até ali elaborado com a apresentação da fórmula para cálculo da área do círculo.

Figura 14 – Momento de institucionalização do saber área do círculo no LD da 8ª série.

Você observou que:

Aumentando o número de lados de um polígono regular inscrito em uma circunferência, sua área se aproxima cada vez mais da área do círculo, o seu perímetro se aproxima do comprimento da circunferência ($2\pi r$) e o seu apótema se aproxima do raio da circunferência (r).

Podemos admitir que:

A área do círculo de raio r é: $\frac{2\pi r}{2} \cdot r$ ou $\boxed{\pi r^2}$

Fonte: Averbuch e Gottlieb e Sanchez e Liberman (1976, p.184)

Doravante, o LD inicia com o trabalho da técnica, no tópico “**Exercícios de Aplicação**”. De modo geral, a técnica explorada se resume na aplicação da fórmula apresentada na *Parte curso*, ainda que em alguns momentos relacione o saber área do círculo com outros vistos anteriormente não apresenta evolução em termos conceituais, são tarefas carentes de um contexto real ou cotidiano, implicando em uma abordagem tecnicista, onde o foco é somente a aplicação de fórmulas.

Quanto ao momento de avaliação, em nossa perspectiva o LD não deixa margem para que aconteça em um momento específico, nem para que aconteça no decorrer do processo, pois a quantidade reduzida de tarefas não se faz suficiente para que o professor consiga avaliar o desenvolvimento do aluno acerca do saber área do círculo, necessitando assim de um complemento externo do professor.

Enfim, a partir dos dados apresentados até aqui podemos concluir que a abordagem empregada pelo LD é condizente com o momento histórico no qual está inserida, pois preza pela tecnicidade na aprendizagem de conceitos matemáticos, indo de encontro a conceitos apresentados até mesmo pelos autores no início do livro, a respeito do que pensam sobre educação, quando citam que a aprendizagem deve

estar ligada a realidade, tendo como princípio fugir do saudosismo sem objetivos. (AVERBUCH; GOTTLIEB; SANCHEZ; LIBERMAN, 1976).

6.2 LIVRO DIDÁTICO MATEMÁTICA FAZENDO A DIFERENÇA

Aqui apontaremos os dados obtidos na análise realizada na coleção **Matemática Fazendo a Diferença**, dos autores José Roberto Bonjorno, Regina Azenha Bonjorno e Ayrton Olivares, 1^o edição de 2006 aprovada no PNLD 2008.

Apesar de termos observado todos os livros da coleção, por se tratar de uma análise a respeito do saber matemático, área do círculo, focaremos nos resultados encontrados no livro da 8^a série do Ensino Fundamental, local onde habita esse saber. Esse livro está organizado em 10 unidades que por sua vez está subdividida em tópicos e estes apresentam algumas das seguintes seções: *Teoria, Atividades resolvidas, Atividades, Faça mais! Pensando com a calculadora, Desafios e Testes*.

Sobre o estudo da área do círculo, ele acontece na unidade 7: **ÁREA DE SUPERFÍCIES PLANAS**, tendo início no sexto tópico da unidade, *Área do círculo* e se desdobrando até o sétimo tópico, *Área do setor circular*. Na sua composição encontramos as seções: *Teoria, Atividade resolvida, Atividades, Faça mais!* e ao fim da unidade a seção de *Testes*.

Agora, partindo para a análise da composição de tarefas identificadas na unidade 7 do LD, identificamos um total de 130 tarefas¹⁰, destas, 35 são referentes ao conceito de área do círculo. Deste modo, excluimos de nossas análises as atividades que tratam de reflexões, tomadas de opiniões e que não abordam o conceito de área do círculo, visto que, apesar de terem uma importância para que o professor compreenda aquilo que os alunos já trazem de conhecimento prévio e contextualizam o ensino, essas não têm relação com o conteúdo matemático objetivo de nossa pesquisa.

Assim, nossa análise será baseada nas 35 tarefas relativas ao conceito de área do círculo, que foram caracterizadas em 4 tipos de tarefas de acordo com o filtro da grandeza área, ilustrado na tabela a seguir.

¹⁰ Foram considerados todos os itens dispostos nas atividades propostas, por exemplo, uma atividade com dois itens (a e b) foi considerada com 2 tarefas.

Tabela 4 – Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro da 8ª série.

Tipos de tarefas	Quantidade de tarefas	Percentual
TC - Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas	01	3%
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	20	59%
TT - Converter unidades de medida de área	00	0%
TE - Estimar medidas de área de figuras planas	00	0%
TO - Operar com medidas de áreas de figuras planas	05	15%
TP - Produzir superfícies de área dada	00	0%
TG - Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas	05	15%
TU - Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	02	5%
TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).	01	3%
Total	34	100%

Fonte: Autoria própria

6.2.1 Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8ª série

Identificamos no livro didático 34 tarefas que estão distribuídas em 6 tipos de tarefas, os quais foram analisados de acordo com a noção praxeológica da TAD, isto é, a caracterização dos blocos do saber-fazer (T, τ) e do saber (θ, Θ). Acerca disso, apresentaremos para cada tipo de tarefa a sua OMP.

6.2.1.1 Organização matemática pontual de TC

Na OMP de TC, identificamos uma única tarefa, onde o aluno deveria calcular a área de duas pizzas dado a medida do seu diâmetro, como ilustra a figura 15. A técnica empregada na resolução dessa tarefa é a aplicação da fórmula para cálculo da área do círculo, e após isso, o estudante deve fazer a comparação numérica dos resultados.

Figura 15 - Exemplo de TC no capítulo do livro didático

6 (Cesupa) Na semana promocional de uma pizzeria, duas famílias, cada uma com 4 pessoas, fizeram seus pedidos: a primeira optou por uma pizza "imensa" com 45 cm de diâmetro e 4 copos de suco com 500 ml cada um; enquanto a segunda preferiu pedir 2 pizzas "médias", que têm 30 cm de diâmetro, e 4 copos de suco com 300 ml cada um. O preço da pizza "imensa" é R\$ 20,00, e cada pizza "média" custa R\$ 11,00. O copo de 300 ml de suco custa R\$ 1,50, e o de 500 ml, R\$ 2,00. *R\$ 28,00 cada uma*

a) Calcule a despesa de cada família.
 b) Determine qual das famílias comeu maior quantidade de pizza, justificando sua resposta e usando $\pi = 3,14$.
 c) Comparando preço/quantidade, analise qual copo de suco é mais econômico: o de 300 ml ou o de 500 ml. *o de 500 ml*

b) a primeira ($1\ 589,6\text{ cm}^2 > 1\ 413,0\text{ cm}^2$)

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.236)

O estabelecimento do bloco do saber (θ, Θ) é justificado pela demonstração da fórmula para cálculo da área do círculo, bem como, a terceira propriedade de área de figuras planas.

6.2.1.2 Organização matemática pontual de TD

O tipo de tarefa TD (Determinar a medida da área de uma figura ou região) é predominante na abordagem trazida pelos autores do LD, representam mais da metade dos tipos de tarefas relacionadas. Desse modo, devido a grande quantidade e diversidade de tarefas deste tipo as organizamos em 6 subtipos, conforme a tabela a seguir:

Tabela 5 - Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro didático da 8^o série.

Tipo de tarefa	Subtipo de tarefas	Quantidade
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	T _{D1} : Calcular área do círculo, dado a medida do raio ou diâmetro da figura plana.	03
	T _{D2} : Calcular a área do setor circular, dado à medida do raio, diâmetro ou comprimento.	03
	T _{D3} : Calcular a área de uma região composta por semicírculo(s) e outra figura plana adjacente.	06
	T _{D4} : Calcular a área de uma região, dado um polígono contido no círculo.	01
	T _{D5} : Calcular a área de uma região, dado um círculo inscrito a outra figura plana.	01
	T _{D6} : Calcular a área de uma região, dado um círculo ou setor(es) circular(es) contido(s) em um polígono.	06

Fonte: Autoria própria

No subtipo T_{D1} , a técnica (T_{D1}) utilizada em todas as tarefas é a do emprego da fórmula para calcular a área do círculo. Sendo justificada, dada a demonstração realizada pelos autores do livro na *Parte curso*.

Figura 16 - Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático

3 (UFU-MG) Deseja-se construir a bandeira do Brasil, com as dimensões dadas (em cm), conforme a figura.

a) Calcule a área do círculo em função de π . $12,25\pi \text{ cm}^2$

b) Encontre as medidas das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} do losango. $AC = 16,6 \text{ cm}$; $BD = 10,6 \text{ cm}$

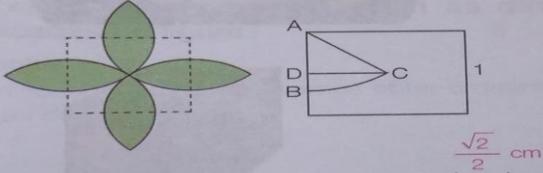
c) Calcule a área da região hachurada em função de π . $(87,98 - 12,25\pi) \text{ cm}^2$

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.235)

No subtipo T_{D2} , temos a progressão do estudo da técnica, o aluno deve fazer a mobilização da técnica inicial (fórmula da área do círculo) junto da medida do ângulo do setor circular, construindo a relação entre parte e todo. A técnica (T_{D2}) aplicada em todas as tarefas é a mesma, porém, os autores tornam a resolução das tarefas mais complexa que a simples aplicação da técnica apresentada no LD na *Parte curso*. Em todos os casos os alunos devem fazer uma composição de áreas, ou seja, além de aplicar a técnica é exigido que o aluno tenha um certo raciocínio geométrico para conseguir compor os setores da forma correta, isto é, a constituição do bloco do saber (θ , Θ) se dá na justificativa da técnica apresentada no LD e nas propriedades das operações fundamentais que justificam a adição ou subtração realizada.

Figura 17 - Exemplo do subtipo T_{D2} no livro didático

7 (OM-SP) Na figura, está o desenho de uma rosácea formada por arcos de circunferências. Os centros das circunferências são os vértices de um quadrado e todas elas passam pelo centro desse quadrado.



a) Calcule o raio das circunferências que determinam as pétalas da rosácea, sabendo que o lado do quadrado mede 1 cm. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

b) Olhando para a figura da direita, calcule a área do setor circular ABC. $\frac{\pi}{16}$ cm²

c) Usando os resultados anteriores, calcule a área da rosácea. $(\pi - 2)$ cm²

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.239)

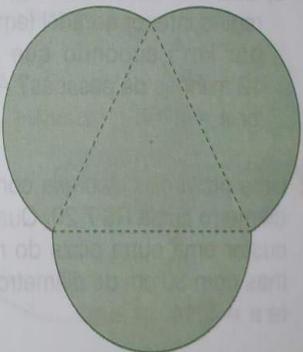
No subtipo T_{D3} , a técnica (T_{D3}) empregada é composta pela aplicação da fórmula para cálculo de área do triângulo ou do retângulo, a depender da tarefa, e também, de uma adaptação na fórmula para cálculo da área do círculo, visto que, o estudante deveria calcular a área de semicírculos que corresponde à metade de um círculo.

Além disso, o aluno deveria aplicar a propriedade aditiva de área de figuras planas, para a composição da área de figuras poligonais e semicírculos presentes nas tarefas. O bloco do saber (θ, Θ), nesse caso, é formado pela Parte curso do tópico do capítulo que compõe o estudo dessa pesquisa (Área do círculo), bem como, de tópicos anteriores apresentados no LD.

Figura 18 - Exemplo do subtipo T_{D3} no livro didático

5 A prefeitura de um município projetou uma praça no centro da cidade com a forma de um triângulo equilátero de 40 m de lado, sobre cujos lados são construídas semicircunferências.

Qual é, aproximadamente, em metros quadrados, a área dessa praça? (Use $\sqrt{3} = 1,7$ e $\pi = 3,14$)

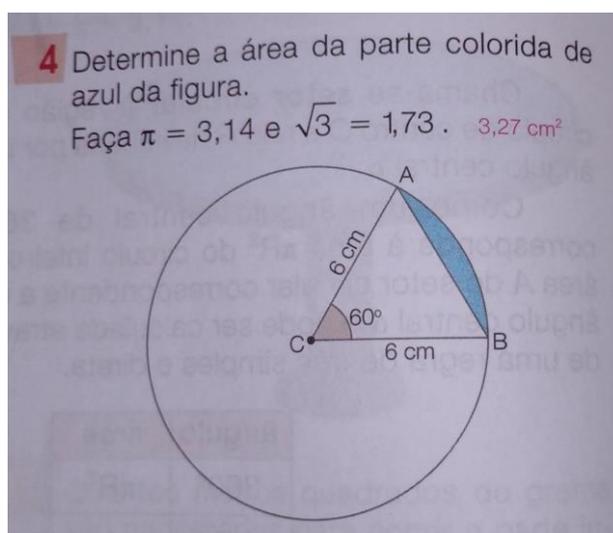


2 540 m²

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.235)

O subtipo T_{D4} representa apenas uma tarefa, onde o aluno deveria calcular a área do setor circular e à área de um triângulo contido na circunferência, para tanto, ele aplicaria a fórmula para cálculo das áreas do triângulo equilátero e do setor circular, ambas demonstradas anteriormente na *Parte curso* do LD. Após isso, o estudante deveria subtrair os valores calculados, e assim, encontrar a resposta solicitada na tarefa.

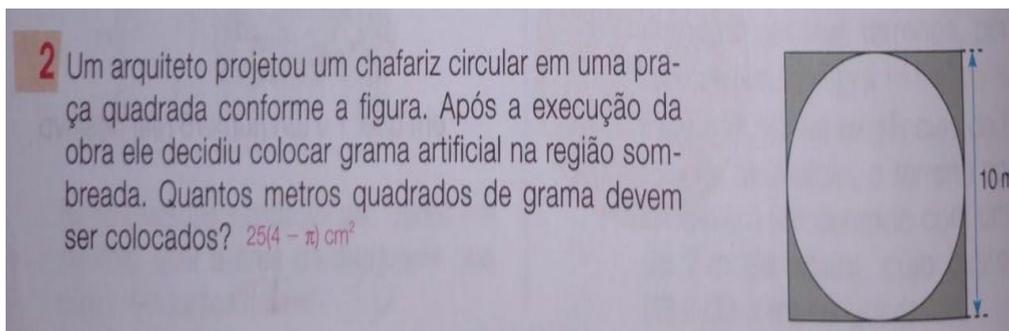
Figura 19 - Exemplo do subtipo T_{D4} no livro didático



Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.238)

O subtipo T_{D5} , assim como T_{D4} , representa uma única tarefa presente no LD, nesse subtipo de tarefa, o aluno deveria utilizar as fórmulas para cálculo da área do círculo e do quadrado, e em seguida, subtrair o valor calculado. Contudo, o autor não dá um valor aproximado para pi, isto é, o aluno deveria operar as duas fórmulas com pi em sua forma algébrica, representando uma constante. Assim como nos subtipos anteriores, a técnica (T_{D5}) para resolução desta tarefa foi justificada na *Parte curso* do LD pela demonstração das fórmulas e pelas propriedades das operações fundamentais que justificam a adição ou subtração realizada.

Figura 20 - Exemplo do subtipo T_{D5} no livro didático

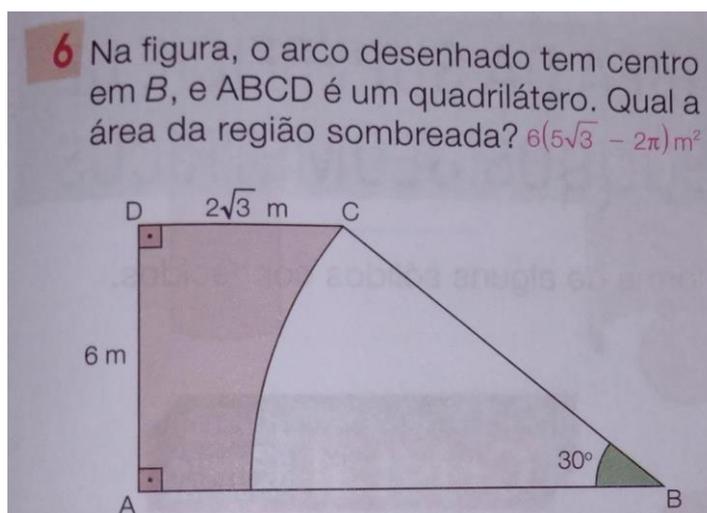


Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.234)

O subtipo T_{D6} , representa as tarefas de maior complexidade em TD, pois, além de solicitarem do estudante uma boa compreensão do conteúdo do capítulo de área é requerido também, conhecimentos prévios como o teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo.

Em T_{D6} são inseridos em polígonos regulares setores circulares de modo que o aluno deve calcular a área interna do polígono não ocupada pelo setor circular contido nele, como ilustra a figura 21.

Figura 21 - Exemplo do subtipo T_{D6} no livro didático



Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.239)

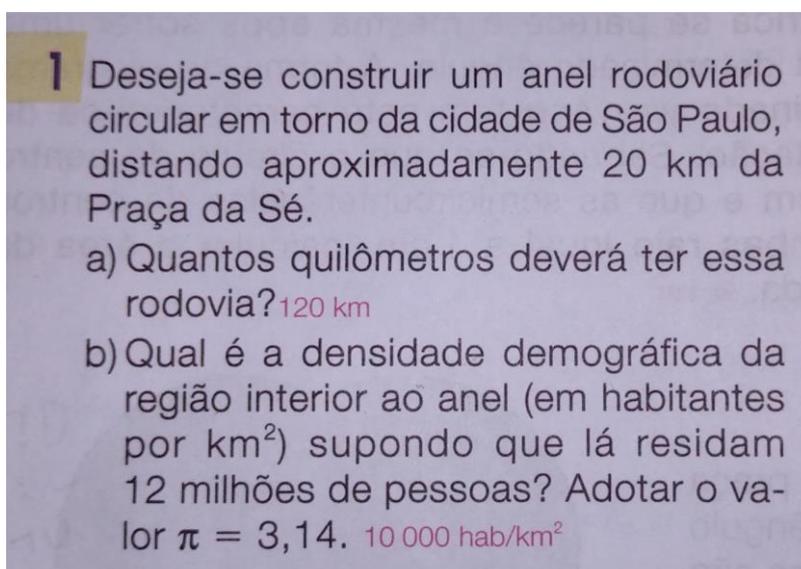
Como observado na figura acima, o aluno deveria calcular a área do trapézio e do setor circular e em seguida, fazer a subtração dos valores para encontrar a área sombreada, porém, os dados apresentados na figura são insuficientes, de modo que o aluno deve encontrar os elementos que faltam para a efetivação desses cálculos. Ou seja, a técnica (T_{D6}) consiste em aplicar conceitos de trigonometria ou do teorema de Pitágoras e em seguida utilizar esses dados nas fórmulas para cálculo da área do

setor circular e de polígonos (a depender da tarefa). Sendo justificada pela demonstração apresentada na *Parte curso* do capítulo de área de superfícies planas e em capítulos anteriores do LD, no caso do teorema de Pitágoras e dos conceitos de trigonometria.

6.2.1.3 Organização matemática pontual de TO

Identificamos cinco tarefas relativas a TO, contudo, não foi necessário a categorização em subtipos de tarefa, pois elas representam tarefas de uma mesma natureza matemática¹¹.

Figura 22 - Exemplo do tipo de tarefa TO no capítulo livro didático



Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.236)

Na resolução das tarefas referentes a TO, a técnica empregada é sempre a mesma, o estudante deve calcular a área de um círculo e em seguida operar com essa área de modo a encontrar a proporção entre ela e outra grandeza associada. O bloco do saber (θ , Θ), está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais.

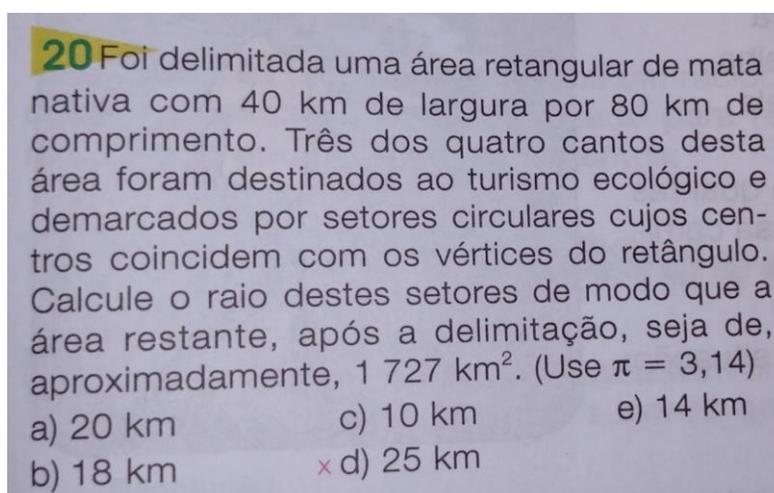
6.2.1.4 Organização matemática pontual de TG

Identificamos em TG cinco tarefas, onde a técnica empregada é semelhante, dado o valor da área do círculo ou setor circular, o aluno deve mobilizar

¹¹ O mesmo fato ocorre para os tipos de tarefas: TU, TG e TS.

algebricamente a fórmula para cálculo da área do círculo de modo a encontrar a medida do seu raio. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais.

Figura 23 - Exemplo do tipo de tarefa TG no capítulo do livro didático



Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.247)

6.2.1.5 Organização matemática pontual de TU

Assim como em TO, não foi necessário a categorização de subtipos de tarefa para TU, por serem tarefas de mesma natureza matemática. Nesse sentido, a técnica empregada na resolução das tarefas relativas a TU é a mesma, o estudante deverá calcular a área de dois círculos utilizando a fórmula e, em seguida, observar os efeitos de transformações nas medidas da área do círculo em relação à grandeza tempo associada. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais.

Figura 24 - Exemplo do tipo de tarefa TU no capítulo do livro didático

17 (IBMEC) Um CD comum, que comporta em média 80 minutos de música, tem 12 cm de diâmetro, sendo que não é possível gravar em seu círculo interno de diâmetro 4 cm. Considerando que o tempo total de música que pode ser gravada num CD é diretamente proporcional à sua área de gravação, se duplicarmos as medidas dos diâmetros do CD e do círculo interno em que não se pode gravar, será possível gravar neste novo CD: (Use $\pi = 3,14$)

a) 160 minutos de música
 b) 240 minutos de música
 x c) 320 minutos de música
 d) 400 minutos de música
 e) 480 minutos de música

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.246)

6.2.1.6 Organização matemática pontual de TS

O tipo de tarefa TS foi identificado em uma única tarefa do LD, onde é apresentado a medida do perímetro de uma figura inscrita em um retângulo, como mostra a figura 25. Disso, o aluno deve operar algebricamente este perímetro, de modo a encontrar a medida do lado dessa figura plana formada por um triângulo e um semicírculo. Após encontrar a medida do lado, o aluno deve calcular a área aproximada dessa região, ou seja, a área do semicírculo mais a área do triângulo. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais que justifica a adição realizada.

Figura 25 - Exemplo do tipo de tarefa TS no capítulo do livro didático

8 Na figura, o triângulo ABC é eqüilátero, e ADC é um semicírculo. O perímetro da região sombreada é $4 + \pi$. Calcular a área do retângulo circunscrito. $2(\sqrt{3} + 1)$

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.239)

Concluindo essa etapa de análise da organização matemática do LD, podemos fazer algumas considerações a respeito da abordagem matemática empregada pelos autores no estudo da área do círculo. Como é esperado para esse nível de escolaridade, as fórmulas estão muito presentes em todas as tarefas identificadas, no entanto, os autores aparentam ter uma preocupação de na maioria dos casos inserir um outro conceito ou problemática, seja com uma situação cotidiana ou uma articulação com outros conceitos matemáticos, o que torna a abordagem mais rica.

Durante o capítulo é perceptível a progressão de dificuldade das tarefas, outro ponto positivo é o fato de as tarefas serem ilustradas com figuras, mas também a presença de algumas sem figuras, o que demonstra um certo equilíbrio entre os elementos visuais e imaginários. Por outro lado, há um ponto a se refletir, o número de tarefas de determinar a área (TD) é elevado, mais da metade do total de tarefas, além do fato de que alguns tipos de tarefas foram pouco ou nada prestigiados na abordagem do LD.

Disso, entendemos que, mais uma vez, a concepção de ensino e aprendizagem da área do círculo está associada a repetição de fórmulas que não apresentam sentido real para o aluno. Apesar da tentativa dos autores de ampliar o escopo do saber área do círculo com associações a outros saberes em vários contextos de situações-problema, os mesmos ainda recorrem a equívocos identificados em livros de décadas atrás.

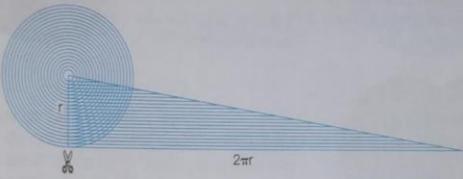
6.2.2 Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático da 8^o série

O primeiro contato com o saber área do círculo ocorre no capítulo 7, área de superfícies planas, no sexto tópico apresentado: Área do círculo. Nesse primeiro contato os autores apresentam uma demonstração da fórmula para cálculo da área do círculo por meio da decomposição da área do círculo e composição desta área em um triângulo retângulo, desse modo, é justificado para os usuários do LD o funcionamento da fórmula.

Figura 26 – Introdução do conceito de área do círculo no LD da 8^o série

6 ÁREA DO CÍRCULO

Imagine que o círculo seja formado por várias circunferências com o mesmo centro.



Cortando essas circunferências e esticando-as, obtemos um triângulo retângulo. Quanto maior o número de circunferências utilizadas para desenhar o círculo, melhor será a sua transformação em um triângulo.

As medidas da base e da altura do triângulo são, respectivamente, as medidas do comprimento da maior circunferência ($2\pi r$) e do raio do círculo (r).

A área desse triângulo é igual a:

$$A = \frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2} \rightarrow A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \rightarrow A = \pi r^2$$

Como o triângulo e o círculo são equivalentes, eles têm a mesma área. Assim, podemos dizer que a área da superfície do círculo é igual ao produto do número irracional π pelo quadrado da medida do raio.



$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

em que: r é um número real positivo

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.233)

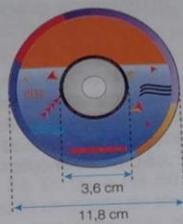
Em seguida, é apresentada uma tarefa resolvida, onde o autor inicia o estudo da técnica que será utilizada na resolução das tarefas propostas. Essa tarefa trata da área de um CD, sendo necessários calcular a área do círculo interno e externo, como ilustra a figura a seguir:

Figura 27 - Trabalho da técnica no LD da 8^o série

Atividade resolvida

A etiqueta do CD mostrado na figura tem a forma de uma coroa circular cujo diâmetro da circunferência externa mede 11,8 cm e da circunferência interna 3,6 cm. Considerando $\pi = 3,14$, determine o número inteiro mais próximo da medida (em cm^2) da área da etiqueta.

Resolução
Fazendo uma figura da área da etiqueta, temos:




O raio r_1 da circunferência interna é igual a:

$$r_1 = \frac{3,6}{2} = 1,8 \text{ cm}$$

O raio r_2 da circunferência externa é igual a:

$$r_2 = \frac{11,8}{2} = 5,9 \text{ cm}$$

A área da etiqueta é igual à área do círculo maior menos a área do círculo menor.

Assim:

- ★ área do círculo maior
 $A_2 = \pi r_2^2 \rightarrow A_2 = 3,14 \cdot 5,9^2 \rightarrow A_2 = 109,3 \text{ cm}^2$
- ★ área do círculo menor
 $A_1 = \pi r_1^2 \rightarrow A_1 = 3,14 \cdot 1,8^2 \rightarrow A_1 = 10,2 \text{ cm}^2$
- ★ área da etiqueta
 $A = A_2 - A_1 \rightarrow A = 109,3 - 10,2 \rightarrow A = 99,1 \text{ cm}^2$

Portanto, o número inteiro mais próximo da medida da área da etiqueta é 99 cm^2 .

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.234)

Como podemos perceber, o primeiro momento apontado no LD se constitui também de outros três momentos, elabora uma técnica, justificativa e institucionalização. É nesse primeiro contato que o LD concentra o saber acerca da área do círculo a ser aprendido pelos alunos, onde a principal técnica é apresentada para a resolução das tarefas que vem em seguida no capítulo.

Após uma sequência de tarefas propostas, o LD apresenta a evolução da técnica da área do círculo e insere a técnica para cálculo da área do setor circular, seguido de uma tarefa resolvida.

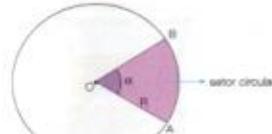
Figura 28 - Extrato do LD que explora a ampliação da técnica (T_{D1})

7 ÁREA DO SETOR CIRCULAR

Chama-se **setor circular** a região do círculo de centro O e raio R delimitada por um ângulo central α .

Como um ângulo central de 360° corresponde à área πR^2 do círculo inteiro, a área A do setor circular correspondente a um ângulo central α e pode ser calculada através de uma regra de três simples e direta.

ângulo	área
360°	πR^2
α°	A



$$A = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2$$

Fonte: Bonjorno e Ayrton (2006, p.237)

Nesse momento os autores apresentam bem como serão as questões a seguir, pois, além de apresentar uma nova técnica baseada na técnica inicial, eles associam essa tarefa a outro conceito da matemática (trigonometria), um fato que se repete em alguns momentos nas tarefas propostas em seguida.

Em relação ao trabalho da técnica nas tarefas propostas, é perceptível a tentativa de inserção de um certo contexto em algumas delas, porém a abordagem trazida ainda é focada na aplicação de fórmulas, isso acarreta no fortalecimento do aspecto numérico do conceito de área, de modo que não contribui para uma aprendizagem concreta desse saber matemático.

A respeito da avaliação da aprendizagem, os autores trazem no final do LD orientações para o professor, incluindo sugestões para a avaliação. Assim, os autores citam que a avaliação deve contemplar argumentações orais, para que o estudante evidencie seu raciocínio e outros aspectos não contemplados em avaliações escritas. No entanto, o LD não apresenta tarefas que permitam que o estudante discuta com os colegas e professor, deixando a cargo do professor a construção de todo esse ambiente de discussão e avaliação. Além disso, é requerido que o professor usuário do LD esteja atento aos objetivos das tarefas propostas, ou seja, o professor deve avaliar durante todo o processo de estudos apresentado no capítulo do livro.

Por fim, através das análises e dos dados apresentados até aqui, fica evidente que os autores propõem uma abordagem numérica e algébrica, focada na aplicação de fórmulas dentro de situações-problema. Situações essas focadas em sua maioria em um único tipo de tarefa, demonstrando as limitações dessa abordagem para uma aprendizagem concreta e sem lacunas do conceito de área do círculo.

Se compararmos com o LD anteriormente analisado, podemos observar que existem algumas pequenas diferenças na construção do saber, no livro de 1976 são trabalhadas questões preliminares que vão construindo a noção de área, mesmo que de forma algébrica. Já no LD de 2006 essa construção é mais direta, porém na apresentação das tarefas o contexto é mais explorado, tentando aproximar mais o estudo da realidade dos alunos.

6.3 LIVRO DIDÁTICO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Na análise da coleção **A CONQUISTA DA MATEMÁTICA**, cujos autores são José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, identificamos o saber área do círculo nos LD do 8º e 9º ano do ensino fundamental, 4º edição de 2018.

Ambos os livros analisados estão divididos em 9 unidades e estas estão subdivididas em capítulos, os quais estão organizados em itens e seções, são elas: *Abertura de unidade, Fórum, Pense e Responda, Atividades, Para quem quer mais, Saiba que, Um novo olhar, Descubra mais, Nós, Por toda parte, Educação financeira, Tratamento da informação, Tecnologias, Atualidades em foco, Retomando o que aprendeu e Respostas.*

No livro do 8º ano, temos o capítulo referente ao estudo do conceito de área do círculo localizado na unidade 8, capítulo 1, intitulado **ÁREAS DE FIGURAS PLANAS** que contém 4 páginas, estas, organizadas em dois itens: *Problemas envolvendo área de polígonos e A circunferência e o círculo.* Também é trabalhado as seções: *Pense e responda, Nós, Atividades e Por toda parte.* Ao final da unidade, é apresentada a seção *Retomando o que aprendeu.*

Na unidade 8, em que está presente o capítulo sobre área, identificamos um total de 51 tarefas, dentre essas, 5 são referentes ao conceito de área do círculo, sendo 3 localizadas no capítulo sobre área e 2 ao final da unidade, na seção *Retomando o que aprendeu.* Desta forma, excluímos de nossas análises as atividades que tratam de reflexões, tomadas de opiniões e que não abordam o conceito de área do círculo, visto que, apesar de terem uma importância para que o professor compreenda aquilo que os alunos já trazem de conhecimento prévio e contextualizam o ensino, essas não têm relação com o conteúdo matemático objetivo de nossa pesquisa.

Portanto, nossa análise foi baseada nas 5 tarefas que abordam o conceito de área do círculo, sendo essas caracterizadas em 3 tipos de tarefas de acordo com o recorte do filtro da grandeza área os quais podemos observar na tabela a seguir.

Tabela 6 – Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro do 8º ano.

Tipos de tarefas	Quantidade de tarefas	Percentual
TC - Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas	01	10%
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	02	40%

TT - Converter unidades de medida de área	00	0%
TE - Estimar medidas de área de figuras planas	00	0%
TO - Operar com medidas de áreas de figuras planas	02	40%
TP - Produzir superfícies de área dada	00	0%
TG - Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas	00	0%
TU - Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	00	0%
TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).	00	0%
Total	5	100%

Fonte: Autoria própria

No livro do 9º ano, o conceito de área do círculo está localizado na unidade 8, capítulo 1, intitulado: **FIGURAS PLANAS, ESPACIAIS E VISTAS** que contém 7 páginas e está organizado em seis itens: *Polígonos regulares inscritos na circunferência, Elementos de um polígono regular inscrito, Relações métricas, Construção de polígonos regulares, Área de um polígono regular e Área do círculo e de um setor circular*. Contém as seções: *Pense e responda, Atividades, Saiba que, Tratamento da informação e Retomando o que aprendeu*. Vale ressaltar que, nos dois livros, analisamos os itens relativos à área do círculo mais as Orientações didáticas dadas pelos autores do livro.

No capítulo referente ao conceito de área do círculo, identificamos 85 tarefas, dentre essas, 10 são relativas ao conceito de área do círculo. Os critérios supracitados aplicados para o livro do 8º ano também foram aplicados na análise do livro do 9º ano. É relevante citar que 3 das 10 tarefas identificadas no livro do 9º ano estão presentes

no livro do 8º ano. As tarefas classificadas estão ilustradas na tabela a seguir, incluindo as encontradas no livro do 8º ano.

Tabela 7 – Tipos de tarefas relativos ao conceito de área, especificamente área do círculo, identificados no livro do 9º ano.

Tipos de tarefas	Quantidade de tarefas	Percentual
TC - Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas	01	10%
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	06	60%
TT - Converter unidades de medida de área	00	0%
TE - Estimar medidas de área de figuras planas	00	0%
TO - Operar com medidas de áreas de figuras planas	02	20%
TP - Produzir superfícies de área dada	00	0%
TG - Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas	00	0%
TU - Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	00	0%
TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s).	01	10%
Total	10	100%

Fonte: Autoria própria

6.3.1 Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 8º ano

Como já é sabido, foi identificado no LD do 8º ano 5 tarefas que estão distribuídas em 3 tipos de tarefas, os quais foram analisados de acordo com a noção praxeológica da TAD, isto é, a caracterização dos blocos do saber-fazer (T, τ) e do saber (θ, Θ). Acerca disso, apresentaremos para cada tipo de tarefa a sua OMP.

6.3.1.1 Organização matemática pontual de TC

No tipo de tarefa TC, temos uma tarefa de comparação numérica de medidas de área, onde a técnica empregada se resume na aplicação da fórmula para cálculo da área do triângulo e do círculo e por fim, comparar os resultados obtidos nessas operações. Desse modo, a sua justificativa está na demonstração das fórmulas para cálculo da área do triângulo e círculo, assim como, na terceira propriedade de áreas de figuras geométrica planas: se a área de uma figura A_1 estiver contida em A_2 , teremos que a área de A_1 é menor do que a área de A_2 .

Podemos dizer que esse tipo de tarefa contribui para que o aluno compreenda melhor a noção de área em relação à figura geométrica que está associada.

6.3.1.2 Organização matemática pontual de TD

Temos duas tarefas associadas ao tipo de tarefa TD, na primeira o aluno deve substituir a medida do raio dada na fórmula para o cálculo da área do círculo e de forma algébrica encontrar a medida da área. Na outra tarefa, o aluno deve mobilizar conhecimentos prévios sobre equações do segundo grau, para assim encontrar a medida do raio e poder substituir na fórmula para calcular a área do círculo.

Figura 29 - Exemplo do tipo de tarefa TD no LD

- 5.** A divisão do número 0,5 por x tem o mesmo resultado que a adição do número 0,5 a x . Se x é um número real positivo e considerando $\pi = 3,14$, qual é a área do círculo cujo raio mede x cm?
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) 0,685 cm ² | d) 0,875 cm ² |
| b) 0,785 cm ² | e) 0,578 cm ² |
| c) 0,885 cm ² | Alternativa b. |

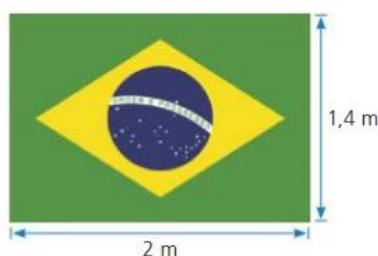
Nessa questão, o autor espera que o aluno aplique a fórmula de Bhaskara, contudo, essa fórmula não é apresentada em nenhuma das unidades anteriores, o que ilustra uma discrepância entre o nível da tarefa e o nível do aluno. Disso, podemos inferir que o professor deverá auxiliar os alunos fazendo a resolução da fórmula de Bhaskara ou ajudando os alunos na sua resolução, pois só assim seria possível a aplicação da fórmula da área do círculo para obter o resultado final da atividade. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) é justificado em ambas as tarefas pela demonstração da fórmula para cálculo da área do círculo.

6.3.1.3 Organização matemática pontual de TO

Em TO, temos duas tarefas, em uma delas o autor trabalha com os conhecimentos prévios dos alunos, como por exemplo, a conversão de unidades que está presente no livro do 6º e é retomada para que o aluno consiga resolver a tarefa proposta. Nessa tarefa, a técnica empregada, além da conversão de unidades, é a de subtração de áreas, em que, após fazer a conversão, o aluno irá subtrair a área menor da área maior. Podemos justificar essa técnica de acordo com as propriedades das operações fundamentais que justificam a subtração realizada.

Figura 30 - Exemplo₁ do tipo de tarefa TO no LD

1. Uma Bandeira Nacional brasileira foi confeccionada com as seguintes dimensões:



- a) Sabendo que os quatro vértices do losango são equidistantes da borda e estão a 17 centímetros dela, calcule a área que ocupa a parte verde visível nessa bandeira. **1,9202 m²**
- b) O círculo central dessa bandeira tem área de aproximadamente 38,5 dm². Quantos metros quadrados tem a área da parte amarela que fica visível nessa bandeira? **0,4948 m²**

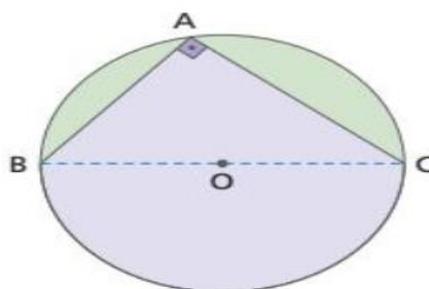
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 237)

Na outra tarefa referente a TO, o estudante deverá utilizar o teorema de Pitágoras em sua resolução, contudo, esse conceito só é abordado no livro do 9º ano, deixando assim uma lacuna, pois, o aluno dificilmente terá condições de solucionar essa tarefa. Nesse sentido, podemos inferir que é indispensável a intervenção do

professor nessa tarefa, auxiliando os alunos na aplicação do teorema de Pitágoras, e assim, na resolução da tarefa. De todo modo, após a resolução do teorema de Pitágoras o aluno deverá utilizar esse valor encontrado para calcular a área de um triângulo retângulo e de um semicírculo, e daí somar os resultados para se obter a medida da área preterida.

Figura 31 - Exemplo₂ do tipo de tarefa TO no LD

7. Na figura, $AB = 6 \text{ cm}$ e $AC = 8 \text{ cm}$. Sabendo que \overline{BC} é o diâmetro do círculo, qual é a área da região colorida de roxo?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- a) 63 cm^2 d) $63,75 \text{ cm}^2$
 b) $63,25 \text{ cm}^2$ e) $64,25 \text{ cm}^2$
 c) $63,50 \text{ cm}^2$ Alternativa **b**.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 246)

As técnicas empregadas na resolução dessa tarefa são justificadas pela demonstração das fórmulas da área do círculo e as propriedades das operações fundamentais que justificam a adição realizada.

6.3.2 Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 8º ano

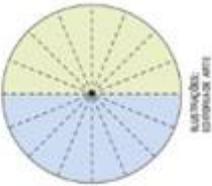
O primeiro contato com o conceito de área do círculo, proporcionado pelo LD na seção Área de regiões circulares, se dá com a demonstração da fórmula para o cálculo da área do círculo por meio da composição e decomposição da figura geométrica círculo em um paralelogramo que os autores do livro classificam erroneamente como sendo um retângulo, talvez para facilitar a compreensão dos alunos, contudo, isso acaba acarretando em uma falha conceitual do LD que poderá reverberar nos alunos.

Figura 32 – Introdução do conceito de área do círculo no LD do 8º ano

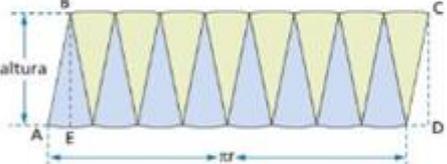
Área de regiões circulares

Para determinar a expressão para o cálculo da área do círculo, vamos utilizar a ideia de aproximação por áreas conhecidas. Observe.

Em uma cartolina desenhamos um círculo dividindo-o em 16 partes iguais. Depois recortamos, separando cada pedaço.



Juntamos as partes recortadas, encaixando-as, conforme a figura a seguir:



SAIBA QUE

Quanto maior a quantidade de partes em que dividimos o círculo, mais próxima de um retângulo fica a figura formada.

A superfície do círculo foi reorganizada, e sua área se aproxima da área de uma figura que conhecemos: o retângulo.

Assim, podemos calcular a área do círculo, multiplicando a medida da base pela medida da altura. Observando a imagem acima, percebemos que a medida da base é a metade da medida do comprimento da circunferência, e a medida da altura é equivalente à medida do raio da circunferência. Temos:

$$A = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 235)

Em seguida, após a demonstração da fórmula da área do círculo, é apresentada uma tarefa resolvida que consiste em calcular a área de uma folha de papelão em formato circular, utilizando para isso a fórmula apresentada.

Figura 33 – Momento de elaboração da técnica no livro didático do 8º ano

Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir.

- 1** Uma folha de papelão tem a forma circular de raio 21 cm. Qual é, em cm, a área ocupada por essa folha? (Usar: $\pi = 3,14$)

$$\text{Área} = \pi r^2 \rightarrow \text{Área} = 3,14 \cdot (21)^2 \rightarrow \text{Área} = 3,14 \cdot 441 \rightarrow \text{Área} = 1384,74$$

A área ocupada por essa folha é 1384,74 cm².

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 235)

Podemos perceber até aqui que no momento do primeiro encontro estão inseridos outros três momentos, ao mesmo tempo em que o livro apresenta o conceito, ele elabora uma técnica, justifica e institucionaliza. Ou seja, é no início da abordagem que os autores apresentam a técnica que será utilizada na resolução das tarefas referentes ao conceito de área do círculo.

Em relação às atividades propostas no LD, constatamos que a técnica inicial não evolui em termos conceituais, apesar de ser empregada em diversos contextos e em alguns casos relacionada a outras figuras geométricas, o que predomina é a técnica de aplicação da fórmula da área do círculo na resolução das tarefas propostas.

Quanto ao momento de avaliação os autores consideram importante que o professor observe as estratégias que os alunos utilizam na resolução das situações-problema em sala de aula, contudo, acreditamos que apenas as tarefas disponíveis no LD são insuficientes para que o professor consiga fazer a avaliação da aprendizagem dos alunos de forma satisfatória.

6.3.3 Praxeologias matemáticas relativas aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 9º ano

Nesta análise, utilizamos os mesmos parâmetros empregados na investigação do livro do 8º ano. Posto isto, nossa análise se baseou nas 10 tarefas referentes ao conceito de área do círculo, encontradas no livro do 9º ano. As 10 tarefas foram classificadas em 4 tipos de tarefas e quando necessário categorizadas em subtipos de tarefas.

6.3.3.1 Organização matemática pontual de TC

Em TC, temos uma tarefa que trata da comparação numérica da medida de área, para a sua resolução, o estudante deveria mobilizar conhecimentos de composição de figuras e as fórmulas para cálculo da área do quadrado e do círculo, após a manipulação algébrica desses conceitos ele encontraria o valor da medida da área da figura composta, podendo assim fazer a comparação numérica entre a medida área dada e a medida da área calculada.

Figura 34 – Exemplo do tipo de tarefa TC no LD

8. Um jardineiro cultiva suas plantas em um canteiro cuja forma é a da figura a seguir, em que uma parte é uma semicircunferência. Para cobrir todo o canteiro, ele calculou que precisaria comprar uma lona com 170 m^2 de área. Você pode afirmar que a área da lona é suficiente para cobrir esse canteiro? **Sim, pois $170 \text{ m}^2 > 139,25 \text{ m}^2$.**

O diagrama mostra um canteiro com uma base retangular de 10 m de largura e 15 m de altura. O topo do canteiro é formado por uma semicircunferência com um raio de 5 m, indicado por uma linha tracejada vertical. Dimensões e o texto estão em português.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

O estabelecimento do bloco do saber (θ, Θ) é justificado pela demonstração das fórmulas para cálculo da área do círculo e do quadrado, como também, a terceira propriedade de área de figuras planas.

6.3.3.2 Organização matemática pontual de TD

O tipo de tarefa TD foi identificado em 6 tipos de tarefas, que categorizamos em dois subtipos de tarefas, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 8 – Distribuição dos subtipos de tarefa de TD identificados no livro didático do 9º ano.

Tipo de tarefa	Subtipo de tarefa	Quantidade
TD - Determinar a medida da área de uma figura ou região	TD ₁ : Calcular área do círculo, dado a medida do raio ou diâmetro da figura plana.	03
	TD ₂ : Calcular a área do setor circular, dado à medida do raio ou diâmetro.	03

Fonte: autoria própria

No subtipo T_{D1} , a técnica (T_{D1}) utilizada em todas as tarefas é a do emprego da fórmula para calcular a área do círculo. Sendo justificada, dada a demonstração realizada pelos autores do livro na *Parte curso*.

Figura 35 – Exemplo do subtipo T_{D1} no capítulo do livro didático

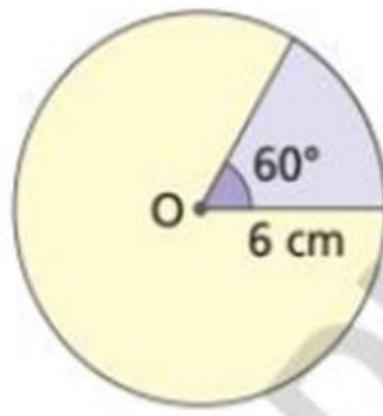
- 9.** Um vazamento no tanque de um navio provoca o aparecimento de uma mancha de óleo circular. O raio r da mancha, t minutos depois do início do vazamento, é dado, em metros, pela fórmula $r = \frac{\sqrt{t}}{5}$.
- a) Qual é, em metros, o raio da mancha após 4 minutos do início do vazamento?
- b) Nesse momento, qual é, em m^2 , a área da mancha? (Use: $\pi = 3,14$)

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

No subtipo T_{D2} , temos um avanço na técnica em relação ao subtipo T_{D1} , agora, o aluno deverá mobilizar a fórmula para cálculo da área do círculo junto da medida do ângulo do setor circular, fazendo a relação entre parte e todo. A técnica (T_{D2}) aplicada em todas as tarefas é a mesma e foi demonstrada pelos autores na *Parte curso* do livro, ou seja, o estudante deve relacionar a área do círculo e seu ângulo interno (360°) à área do setor circular e a medida do seu ângulo.

Figura 36 – Exemplo do subtipo T_{D2} no capítulo livro didático

- 6.** Qual é a área do setor circular colorido de amarelo na figura?



94,20 cm^2

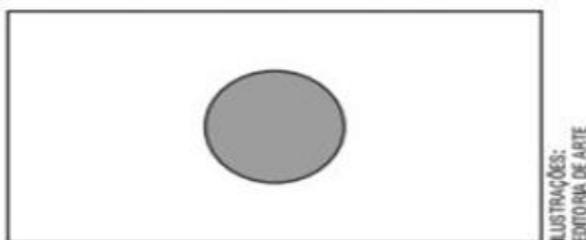
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

6.3.3.3 Organização matemática pontual de TO

Identificamos duas tarefas referentes a TO, porém, não foi necessário a categorização das mesmas em subtipos, por serem de mesma natureza matemática.

Figura 37 – Exemplo do tipo de tarefa TO no capítulo do livro didático

7. Uma pessoa pretende colocar um tapete circular no centro de uma sala retangular, conforme mostra a figura.



As dimensões da sala são 4,5 m (largura) e 8 m (comprimento), e o diâmetro do tapete equivale a $\frac{1}{4}$ do comprimento da sala. Nessas condições, qual é a área da superfície da sala que não ficará coberta pelo tapete? **32,86 m²**

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

A técnica para a resolução das tarefas de TO consiste em calcular a área de duas figuras geométricas utilizando a fórmula para o cálculo de área e em seguida realizará a adição ou subtração das medidas encontradas, onde o resultado obtido corresponde à solução do problema. O bloco tecnológico-teórico (θ , Θ) está justificado pela demonstração da fórmula para o cálculo de área e as propriedades das operações fundamentais que justificam a adição ou subtração realizada.

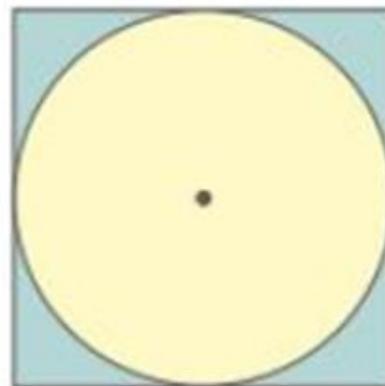
6.3.3.4 Organização matemática pontual de TS

Identificamos uma tarefa classificada em TS - Determinar a medida da área de uma figura ou região, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s). Onde o estudante deve operar com o perímetro do quadrado para encontrar a medida do raio de um círculo inscrito nesse quadrado, após isso, o aluno

irá aplicar a medida encontrada na fórmula para o cálculo da área do círculo e assim obter a solução da tarefa. A técnica manipulada é justificada pela demonstração da fórmula da área do círculo, realizada pelos autores na *Parte curso* do livro.

Figura 38 – Exemplo do tipo de tarefa TS no capítulo do livro didático

5. A figura nos mostra um círculo inscrito em um quadrado. Se o perímetro desse quadrado é 48 cm, calcule a área do círculo. **113,04 cm²**



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

Por fim, podemos refletir sobre alguns aspectos apresentados até aqui nesta seção. A presença das fórmulas é predominante em ambos os livros analisados, algo que poderia se justificar devido ao nível de escolaridade para que se propõe os LD, entretanto, uma abordagem sem contexto e predominantemente numérica de área não irá contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de área, como apontam documentos oficiais e pesquisas sobre esse tema.

Outro ponto a se destacar é a quantidade reduzida de tarefas referentes ao conceito de área do círculo que no somatório dos dois LD chegam a apenas 12 tarefas, descontando as que se repetem em ambos os livros. Nos levando a inferir que os autores consideram o ensino desse conceito como sendo algo simples e rápido, apenas para estudar a técnica de aplicação de uma fórmula. Podemos constatar isso também na constituição do bloco tecnológico-teórico que tem como base em todas as tarefas a fórmula da área do círculo, com quase nenhuma variação nos tipos de tarefas, que se restringem a três tipos no livro do 8º ano e quatro tipos no livro do 9º ano.

Acerca das tarefas presentes em ambos os livros, os autores não aparentam ter a preocupação em modificá-las de modo que sejam acessíveis para os alunos do 8º ano, visto que, para a resolução dessas tarefas é necessário conhecimentos estudados no livro do 9º ano, no qual tem a intenção de associar o conceito de área do círculo a outros vistos em unidades anteriores, o que nos traduz que das 5 (cinco)

tarefas identificadas no livro do 8º ano, apenas 3 (três) são acessíveis para esse ano de escolaridade.

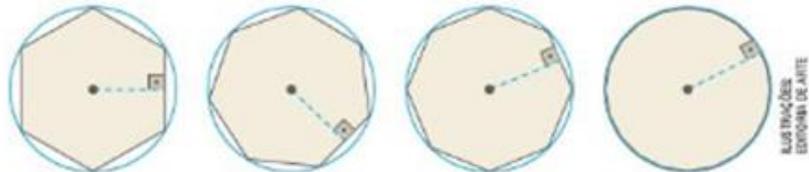
6.3.4 Organizações didáticas relativos aos tipos de tarefas presentes no livro didático do 9º ano

A introdução do conceito de área do círculo inicia-se na seção: Área do círculo e de um setor circular. Onde os autores do livro apresentam a demonstração da fórmula para a área do círculo através da associação da área de um polígono inscrito em uma circunferência, de modo que seu perímetro se aproxima do comprimento da circunferência e seu apótema tende a medida do raio, como podemos observar na figura 07 abaixo. Como forma alternativa, nas orientações didáticas, os autores sugerem a introdução do conceito de área do círculo através do método utilizado no LD do 8º ano¹².

Figura 39 – Introdução do conceito de área do círculo no LD do 9º ano

Área do círculo e de um setor circular

Observe a sequência de polígonos regulares inscritos em uma circunferência:



À medida que o número de lados aumenta, o polígono regular inscrito se aproxima do círculo determinado pela circunferência. Isso faz com que a área desse polígono regular se aproxime da área do círculo. Assim:

- o perímetro do polígono regular se aproxima do comprimento ($C = 2\pi r$) da circunferência.
- o semiperímetro do polígono regular tende ao valor $\frac{2\pi r}{2}$ ou seja, πr .
- o apótema do polígono regular tende a ser o raio.

Assim, a área do polígono regular tende a coincidir com a área do círculo. Logo:

$$\text{área do círculo} = \pi r \cdot r \text{ ou } \text{área do círculo} = \pi r^2$$

(πr = semiperímetro e r = medida do apótema)

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 232)

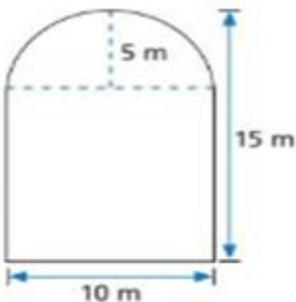
¹² Apresentado no tópico 6.3.2 deste trabalho.

De acordo com o que vimos até aqui, podemos afirmar que os autores optam por inserir já no primeiro encontro a elaboração da técnica, a justificativa e a institucionalização. Além de iniciar o trabalho da técnica com a inserção da técnica para o cálculo da área do setor circular. O que nos remete a uma abordagem rasa do conceito de área do círculo e focada no seu aspecto numérico.

Dando continuidade no capítulo, encontramos a seção Atividades, onde as tarefas propostas seguem a ideia apresentada no início da abordagem, ou seja, a aplicação da técnica para cálculo da área do círculo ou do setor circular. Em alguns casos o autor faz a relação da área do círculo com a área de outras figuras planas, no entanto, o sentido principal continua sendo a prática da técnica proposta inicialmente.

Figura 42 – Extrato do LD que apresenta o trabalho da técnica

8. Um jardineiro cultiva suas plantas em um canteiro cuja forma é a da figura a seguir, em que uma parte é uma semicircunferência. Para cobrir todo o canteiro, ele calculou que precisaria comprar uma lona com 170 m^2 de área. Você pode afirmar que a área da lona é suficiente para cobrir esse canteiro? **Sim, pois $170 \text{ m}^2 > 139,25 \text{ m}^2$.**



O diagrama mostra um canteiro com uma base retangular de 10 m de largura e 15 m de altura. O topo do canteiro é formado por uma semicircunferência com um raio de 5 m, indicado por uma linha tracejada vertical. Dimensões e o texto estão em português.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 233)

A avaliação da aprendizagem do conceito de área do círculo fica a cargo do professor, dado que devido às limitações na abordagem do livro e a quantidade reduzida de tarefas e tipos de tarefas o professor não tem as ferramentas suficientes para uma avaliação concreta dos alunos.

Assim, a partir das análises apresentadas, podemos concluir que os autores consideram que o ensino do conceito de área do círculo deve ser baseado no emprego repetitivo da fórmula para cálculo de sua área e de seu setor circular em algumas situações-problema. Revelando assim, uma predileção por uma abordagem algébrica e numérica com o conceito de área do círculo.

Portanto, consideramos que a abordagem trazida na coleção 'A conquista da matemática', é insuficiente para que o aluno consiga compreender de forma concreta

o conceito de área do círculo, pois favorece uma visão distorcida das grandezas e medidas, quando propõe para os alunos situações-problema de cunho prioritariamente algébrico, sem refletir sobre os outros fatores pertencentes ao conceito de área do círculo.

7 RESUMO DAS ANÁLISES

Nesta seção, discutiremos os resultados das análises nos documentos oficiais e nas coleções de livros didáticos de forma comparativa. Levaremos em consideração os pontos de divergência ou convergência entre os objetos de estudo da pesquisa, para que possamos compreender a composição e importância dada ao saber área do círculo durante o período analisado.

A princípio observamos a razão de ser do saber área do círculo nas instituições curriculares, onde os PCN e a BNCC apontam para um mesmo nicho ecológico desse saber voltado para a práxis (saber-fazer), contudo, sem negligenciar do saber sábio que alimenta outros saberes da matemática. Há convergência também quanto ao *habitat* desse saber que se localiza dentro do campo das grandezas e estabelece relações tróficas com outros saberes, por exemplo, volume de sólidos geométricos.

Apesar de representarem períodos diferentes da sociedade brasileira, ambas as instituições curriculares descrevem os mesmos problemas enfrentados pelos alunos quanto à aprendizagem do saber área de figuras planas. Isto demonstra a complexidade de transformar a *pedagogia* que antes da década de 90 era influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna e sua abordagem altamente tecnicista dos saberes matemáticos.

Do mesmo modo, é evidente a presença do pensamento mais progressista do Movimento da Educação Matemática que se apresenta como alternativa para superar o ensino de matemática focado na reprodução de técnicas sem contexto, que não apresentam sentido real para os alunos. A visão trazida em ambos os documentos curriculares é a de que o professor passa a ser um mediador da aprendizagem, colocando o estudante no meio desse processo.

Com relação aos ecossistemas montados por ambas as instituições curriculares, nossa análise demonstrou que a construção de teias e cadeias alimentares feita pelos PCN se mostrou mais completa e sem lacunas aparentes. Por outro lado, a BNCC constrói o seu ecossistema em forma de cascata, ou seja, os saberes que antes habitavam um único ano do ensino fundamental agora serão vistos também em outros anos, a fim de construir um ecossistema de saberes mais linear. Porém, essa ideia quando aplicada ao saber área do círculo criou uma lacuna conceitual em suas relações tróficas.

Na instituição livros didáticos, temos três coleções bastante distintas entre si, cada uma representa um período específico *sociedade*. A primeira de 1976 está inserida nos momentos finais da ditadura militar brasileira e carrega em sua ecologia as ideias desse momento histórico, como também, é perceptível a influência do Movimento da Matemática Moderna, dada a sua abordagem voltada para um saber mais matemático e tecnicista, sem contexto em suas tarefas ou na construção da *Parte curso*.

Na segunda coleção, Matemática Fazendo a Diferença (2006), podemos perceber algumas mudanças na construção do estudo do saber área do círculo, sua abordagem é mais contextualizada e suas tarefas mais voltadas para o cotidiano dos estudantes, transparecendo a influência que os PCN têm na construção dessa coleção. Como também, evidencia a tentativa da *sociedade* em transformar a *pedagogia* do ensino de Matemática.

Na terceira coleção, A Conquista da Matemática (2018), temos uma construção do saber semelhante à segunda coleção analisada, o estudo do saber área do círculo é construído com algum contexto, porém não existem tantas tarefas quanto na coleção de 2006, o que torna a formação desse ecossistema muito limitada.

Outro grande problema que identificamos foi o fato de que a BNCC como citamos anteriormente trouxe o saber área do círculo para o 8º ano do ensino fundamental, isto é, esse saber agora habita o 8º ano e o 9º ano. Entretanto, essa mudança acarretou em alguns equívocos conceituais na construção das cadeias alimentares do ecossistema desse saber. Os autores apresentam tarefas no LD do 8º ano que apresentam relações tróficas com saberes do 9º ano, isso impossibilita os alunos de compreenderem de fato essas tarefas, gerando lacunas conceituais em sua aprendizagem que já estava bastante limitada pela quantidade de tarefas.

Esse erro na construção do ecossistema nos faz inferir que apesar de a BNCC entender que os conceitos matemáticos devem ser apresentados de forma mais linear, os autores não conseguiram se adequar a essa concepção. Dessa forma, não são oferecidas condições adequadas para a existência desse saber no 8º ano do ensino fundamental.

Por fim, quando observamos à construção das coleções como um todo vemos como a *sociedade* por meio dos documentos oficiais e Livros Didáticos influenciam e transformam a construção do estudo de saberes matemáticos, contudo, apesar de representar um fator colaborador para a melhoria do processo de ensino e de

aprendizagem de matemática, somente essas instituições não conseguem moldar completamente a *pedagogia* do ensino da matemática, demonstrando a importância do professor dentro desse processo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todos os dados e informações expostas até aqui nos levam a refletir sobre o caminho que o saber área do círculo tem tomado durante todos esses anos, em nosso estudo apresentamos um recorte de cerca de 40 anos, onde a produção de conhecimento sobre esse tema no âmbito das pesquisas não pareceu ser suficiente para gerar uma grande mudança na noosfera.

Os livros didáticos apesar de terem suas particularidades do período histórico no qual estão inseridos, não avançam em relação aos níveis Tema e Assunto, mantendo o mesmo tratamento que dão ao saber em estudo. Se observarmos a abordagem trazida vemos que todos têm os mesmos equívocos, focam na aplicação de fórmulas e não há diversidade nos tipos de tarefas apresentados, até aqueles produzidos após a implementação de documentos oficiais nacionais, que em tese, representam um passo em direção a melhoria da qualidade do ensino. Entretanto, apesar de existir um certo avanço nos níveis superiores (Sociedade), a implementação de tarefas envolvidas em situações-problema, buscando dar contexto ao ensino, essas ainda estão presas a um pensamento técnico e algébrico do conceito de área, não conseguindo atravessar os demais níveis, e assim, não chegando ao nível Escola, mesmo com os documentos oficiais (PCN e BNCC) alertando que esse tipo de abordagem não é adequado e muitas vezes gera dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem.

Quanto aos documentos oficiais nacionais, acreditamos que cumprem bem o seu papel, auxiliam professores e gestores na organização do saber a ser ensinado na escola. Ao compararmos os PCN com a BNCC podemos ver os avanços que esse novo documento traz para a educação, por exemplo, na BNCC os conteúdos estão postos de maneira mais fragmentada, ou seja, os estudantes vão estudar os conteúdos de maneira mais contínua e em mais anos de sua escolaridade, como é o caso da área do círculo que habitava o 9º ano e agora também habita o 8º ano.

A respeito dessa persistência dos LD em manter uma abordagem desfavorável para o processo de ensino e de aprendizagem do saber área do círculo, entendemos que essa mudança posta nos documentos oficiais, inicialmente com os PCN, não chegou a sala de aula por não representar um documento oficial obrigatório a ser seguido, além do fato de que os LD são materiais criados para serem comercializados

nas escolas, ou seja, eles mantem um apelo para os professores formados décadas atrás que estavam inseridos nesse contexto tecnicista do ensino de matemática.

Em relação a BNCC, este já é um documento obrigatório, o qual os autores de LD devem se ater para a construção do seu material didático. No entanto, os autores parecem ainda não ter compreendido a hierarquia de conteúdos propostos nesse documento, de modo que fazem adaptações, mas estas representam uma distorção do que almeja a BNCC. A exemplo do caso apresentado neste trabalho com relação ao habitat do saber área do círculo que sai do 9º ano e passar a habitar também o 8º ano do Ensino Fundamental. Contudo, algo que à primeira vista parece ser positivo, pois os estudantes terão uma aprendizagem mais linear desse saber, essa mudança foi feita de maneira desajustada, uma vez que a construção desse ambiente é deficiente em ambos os LD, repetindo os mesmos equívocos identificados nos livros de anos anteriores.

Apesar disso, entendemos que a BNCC é um documento recente e que as transformações na educação levam tempo para serem efetivadas, nos mantendo esperançosos que esses erros serão corrigidos. Como também, acreditamos na melhoria da formação dos professores que cada vez mais serão capazes de superar esses obstáculos.

Outra reflexão que gostaríamos de deixar, a partir do nosso estudo, é a de que os professores devem ter mais atenção tanto na hora da escolha, quanto no manuseio do livro didático em seu dia a dia. Vimos por meio desse estudo que o livro é um auxiliar, mas desde a década de 70 até os dias atuais ficar preso somente a ele é insuficiente para construir uma aprendizagem completa e de qualidade. Isso é reconhecido até pelos próprios autores de LD que nos materiais mais recentes disponibilizam no manual do professor diversos meios de adquirir informações, como links para atividades e indicação de leituras para aperfeiçoamento da prática docente.

Para concluir, acreditamos que atingimos os objetivos pretendidos no início da construção deste trabalho, pudemos responder nossa questão de pesquisa em sua totalidade, de modo que conseguimos caracterizar as praxeologias dos LD e a ecologia do saber área do círculo, desde a década de 70 até os dias atuais. Assim como, identificamos elementos que nos revelam que ainda temos muitos entraves para a construção do saber área do círculo enquanto grandeza.

Esperamos que a partir deste trabalho outros pesquisadores se voltem também para o estudo da área do círculo e que possamos ter mais pesquisas que utilizem a história da educação matemática, pois é fundamental conhecer e entender o passado para que possamos construir o futuro sem recair nos mesmos erros. Acerca disso, sugerimos que pesquisas futuras se debrucem em questões que não pudemos explorar nesta pesquisa, como: em coleções de PNLD diferentes e mesmos autores ou editora, há uma reciclagem de elementos da parte Curso e parte Atividades propostas em relação ao saber área do círculo? Coleções aprovadas no mesmo PNLD apresentam discrepâncias a respeito da construção praxeológica do saber área do círculo? Qual a construção praxeológica de professores de matemática em relação ao saber área do círculo?

REFERÊNCIAS

- ARTAUD, M. CREHSTO e ORLÉANS. **Ecologia das Organizações Matemáticas e Didática. Curso ministrado no Centro de pesquisa sobre o ensino e a história das ciências e das técnicas de Órleans**, equipe MAPMO (UMR nº 6628, 2008).
- ALMOULOUD, S. A. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos**. Revista iberoamericana de educacion matemática, N. 42, p. 09-34, nov, 2015.
- ALMOULOUD, S. A; SILVA, C. V. **A noção de ecologia do didático aplicada ao conceito de simetria ortogonal**. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5880_2474_ID.pdf>. Acesso em: 21 abr, 2021.
- AVERBUCH, A.; GOTTLIEB, F. C.; SANCHEZ, L. B.; LIBERMAN, M. P. **CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU**. 1º ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF: MEC, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 21 abr, 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 21 abr, 2021.
- BITTAR, M. (2017). **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. *Zetetike*, 25(3), 364-387.
- BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **MATEMÁTICA FAZENDO A DIFERENÇA**. 1º ed. São Paulo: FTD, 2006.
- BONAMINO, A.; MARTINEZ, S. A. **Diretrizes e Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental: a participação das instâncias políticas do estado**. Educ. Soc., Campinas, vol. 23, n. 80, setembro/2002, p. 368-385. Disponível em: <<http://cedes.unicamp.br>> Acesso em: 21 abr, 2021.
- CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: **Coleção Explorando o Ensino**. Brasil. Matemática: ensino fundamental. Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, volume 17, 2010, p. 15 – 30.
- CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportées par une approche anthropologique. In: **Recherches em Didactique de Mathématiques**, v. 12, p. 73-112, 1992.
- _____. Les programmes et la transposition didactique Illusion, contraintes et possibles. Bulletin de l'APMEP, 1986, p. 32-50.

_____. Esquisse d'une théorie formelle du didactique. Paru *in* C. Laborde (éd.), *Actes*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1988, p. 97-106.

_____. La transposition didactique à l'épreuve. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994. p. 135-180.

_____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **Recherches em didactiques des mathématiques**, Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage, v. 19.2, n.56, p.221-265, 1999.

_____. Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. Cours donné à la *XIe école d'été de didactique des mathématiques* (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 41-56, 2002.

_____. Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons. Séminaire DIDIREM: Université Paris 7, 2007.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil**. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.

DIAS, M. A.; GUADAGNINI, M. R.; JUNIOR, V. B. S. **Ecologia do ensino do conceito de polinômios entre as décadas de 1960 a 2010 no Brasil**. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (p. 84-92). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. vol. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5.ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, L. F. D. **A Construção do Conceito de Área e da Relação entre Área e Perímetro no 3º ciclo do Ensino Fundamental: Estudos sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. UFPE, Recife, 2010.

FILHO, E. S. S.; SANTOS, M. R. **A Área do Círculo no Livro Didático de Matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Disponível em:

<http://epem.sbempe.com.br/anais/2017/PDFs/CC61508500487_133333.pdf>.

Acesso em: 25 jul, 2019.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível

em:<<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/52806/000728684.pdf>> Acesso em: 14 abr, 2021.

GIL, A. C. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. 3. Ed. São Paulo: Atlas, 1991.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A CONQUISTA DA MATEMÁTICA**. 4º ed. São Paulo: FTD, 2018.

LESSA, L. F. C. F. **Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área**. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. UFBA, Salvador, 2017.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: **Coleção Explorando o Ensino**. Brasil. Matemática: ensino fundamental. Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, volume 17, 2010, p. 167 – 200.

MELO, M. A. P. **Ecologia do saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco -UFPE, Recife, 2018.

NETO, S. A. O que são os PCN? O que afirmam sobre a literatura? **Debates em Educação**, v. 6, n. 12, p. 112-128, 2014.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <<http://www.faatensino.com.br/wpcontent/uploads/2014/11/2.1-E-book-Metodologia-o-Trabalho-Cientifico-2.pdf>> Acesso em: 14 abr, 2021.

SANTOS, M. R. **A Transposição Didática do Conceito de Área de Figuras Geométricas Planas no 6º Ano do Ensino Fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Tese (Doutorado). Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Recife, 2015.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas**. Recife. 178 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

SOUZA, D. S.; SILVA, V. A. **Praxeologias do objeto circunferência e círculo apresentadas no livro didático “A conquista da matemática”**. Revista fórum identidades, Itabaiana: GEPIADDE, Ano 9, Volume 18, mai. – ago. de 2015.

TELES, R. A. M. **A Influência de Imbricações entre Campos Conceituais na Matemática Escolar, um estudo sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2007.

VIEIRA, M. S. L. M. **Estudo da Ecologia do Saber proporcionalidade no ensino fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, 2020.