



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hugo Henryque Coelho e Silva

Teoria de Morse e aplicações a uma classe de problemas elípticos semilineares

Recife

2022

Hugo Henryque Coelho e Silva

Teoria de Morse e aplicações a uma classe de problemas elípticos semilineares

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de ciências exatas e da natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): José Carlos de Albuquerque Melo Júnior

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Luiza de Oliveira, CRB4-1316

S586t Silva, Hugo Henryque Coelho e
Teoria de Morse e aplicações a uma classe de problemas elípticos semilineares /Hugo Henryque Coelho e Silva. – 2022.
116 f.: il.

Orientador: José Carlos de Albuquerque Melo Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Teoria de Morse. 2. Grupos críticos. 3. Problema elíptico semilinear 4. Métodos variacionais. I. Melo Júnior, José Carlos de Albuquerque (orientador). II. Título.

415 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-154

HUGO HENRYQUE COELHO E SILVA

*TEORIA DE MORSE E APLICAÇÕES A UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS
SEMILINEARES*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 23/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Junior (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó. (Examinador Interno)
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (Examinador Externo)
Universidade Federal de São Carlos

Dedico à minha família e a todos os professores que contribuíram na minha formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por toda força concedida durante todos os momentos da minha formação que foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

A toda minha família, em especial, aos meus pais Sandra e Sigefredo Jr; a Bruno Apolinário por todo companheirismo e compreensão e aos meus avós Maria Cortêz, Uyara Neli e Paulo Roberto por todo apoio emocional e financeiro.

Ao meu orientador Prof^o Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior, por todo apoio, dedicação, paciência e contribuição na minha vida acadêmica.

A minha orientadora da graduação Prof^a Dra. Yane Lísley Araújo, por todo incentivo e apoio desde a graduação.

Ao Prof^o Dr. Maxwell Lizete Silva da UFG, pela contribuição dada ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos do grupo HLR/HRL que foram boas companhias em momentos fora da universidade.

Aos meus amigos da UFRPE e da UFPE, que me ajudaram a trilhar o caminho árduo da matemática e tanto contribuíram em meus estudos, em especial, aos que estão na caminhada junto comigo até hoje.

A todos os professores do departamento de matemática da UFRPE e da UFPE que contribuíram de forma direta ou indireta na minha formação. Em especial, aos professores Gilson Carvalho e Miguel Loayza.

A banca examinadora por aceitar contribuir na avaliação deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho elencaremos alguns resultados da teoria de Morse em dimensão finita e infinita para funcionais f duas vezes diferenciável, com derivadas até segunda ordem contínuas, definidos em uma variedade diferenciável M , modelada em um espaço de Hilbert H . Em determinados casos, tais resultados quando aliados a teoremas de deformação, nos possibilitam descrever grupos críticos de certos pontos críticos e, por conseguinte, a aquisição de teoremas de pontos críticos, que garantem sob quais condições f admite um ou mais pontos críticos não triviais. Como aplicação estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas envolvendo o operador Laplaciano. Para tal, utilizaremos ferramentas do cálculo variacional e a Teoria de Morse aplicados a um funcional I , associado ao problema proposto. Para este feito utilizaremos técnicas envolvendo os autovalores do Laplaciano, com objetivo de descrever os grupos críticos dos pontos críticos dessa classe de problemas com base nestes autovalores. Essa análise permitirá que possamos encontrar pelo menos quatro pontos críticos não triviais e distintos.

Palavras-chaves: teoria de Morse; grupos críticos; problema elíptico semilinear; métodos variacionais.

ABSTRACT

In this work we will list some results of the Morse theory in finite and infinite dimensions for functionals f twice differentiable with derivatives up to second order continuous, defined on a differentiable manifold M , modeled on a Hilbert space H . In certain cases, such results, when combined with deformation theorems, allow us to describe critical groups of certain critical points and, therefore, the acquisition of critical point theorems, which guarantee under which conditions f admits one or more critical points non-trivial. As an application we will study the existence and multiplicity of solutions for a class of problems involving the Laplacian operator. To do so, we will use variational calculus tools and Morse Theory applied to the functional I , associated with the proposed problem. For this purpose, we use the results of the Laplacian eigenvalues, with the objective of describe the critical clusters of the critical points of this class of problems based on these eigenvalues. This analysis, which allowed us to find at least four critical points non-trivial and distinct.

Keywords: Morse theory; critical groups; semilinear elliptic problem; variational methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Representação gráfica de uma função com dois pontos críticos.	36
Figura 2	–	Subnível $f^{-\varepsilon}$ de $f(x, y) = y^2 - x^2$	37
Figura 3	–	Subnível f^ε de $f(x, y) = y^2 - x^2$	38
Figura 4	–	Pontos críticos de $f(x, y, z) = z$, no Toro	38
Figura 5	–	Subníveis no Toro	39
Figura 6	–	K-célula	45
Figura 7	–	Anexando uma K-célula ao subnível	47

LISTA DE SÍMBOLOS

f^a	$f^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\};$
$f^{-1}(c)$	$f^{-1}(c) = \{x \in M \mid f(x) = c\};$
A^c	Complementar de A ;
$B(x, r)$	$B(x, r) = \{\alpha \mid d(\alpha, x) < r\};$
$\partial B(x, r)^+$	$\partial B(x, r)^+ = \{u \in \partial B(x, r) \mid u^+ \neq 0\};$
2^*	Expoente crítico de Sobolev $\frac{2N}{N-2};$
$A^\perp$	Denota o complemento ortogonal de A ;
X^c	$\{x \in X \mid f(x) \leq c\};$
$\delta_{q,k}$	Denota o delta de Kronecker;
$L^p_{loc}(\Omega)$	Denota o espaço das funções u em $L^p(K)$, para todo $K \subset \Omega$ compacto;
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Denota o conjunto das funções contínuas que possuem derivada de todas as ordens contínuas;
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Denota o conjunto das funções contínuas que se anulam fora de um conjunto compacto, definidas em Ω , e que possuem derivada de todas as ordens contínuas;
K	$K = \{x \in H \mid f'(x) = 0\};$
K_c	$K_c = \{x \in H \mid f(x) = c \text{ e } f'(x) = 0\};$
Id, Id_X	Denotam a aplicação identidade $Id : X \rightarrow X$, definida por $Id(x) = x$;
u_m^+	$\max\{u_m, 0\};$
u_m^-	$\min\{u_m, 0\};$
$q.t.p$	Quase todo ponto;
$\ker(f)$	$\ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\};$

$im(f)$ $im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \text{ para algum } x \in X\};$

B^k Denota a bola em um espaço k —dimensional;

$|u|_p$ Denota a norma de uma função u no espaço $L^p(\Omega);$

$|\Omega|$ Denota a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega;$

$\langle u \rangle$ Denota o subespaço gerado pelo vetor $u.$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	15
2.1	TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	15
2.1.1	Espaços $L^p(\Omega)$	15
2.1.2	Espaços de Sobolev	16
2.1.3	Problema do autovalor do Laplaciano	19
2.2	HOMOTOPIAS E LEMAS DE DEFORMAÇÃO	22
2.2.1	Homotopias	22
2.3	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	23
2.3.1	Lemas de deformação	25
2.4	GRUPOS DE HOMOLOGIA	28
2.4.1	Homologia Singular	29
2.4.2	Axiomas de Eilenberg-Steenrod para homologia singular	31
2.4.2.1	Exemplos de grupos de homologia	33
2.5	OPERADORES DE FREDHOLM	34
3	TEORIA DE MORSE	35
3.1	TEORIA DE MORSE EM DIMENSÃO FINITA	35
3.1.1	Lema de Morse e teoremas de deformação	39
3.1.2	Polinômio de Morse	48
3.2	TEORIA DE MORSE EM DIMENSÃO INFINITA	51
3.2.1	Índice de Morse e Grupos críticos	51
3.2.2	Desigualdade de Morse	56
3.2.3	O Lema de Morse Generalizado	58
4	TEOREMAS DE PONTOS CRÍTICOS VIA TEORIA DE MORSE	70
4.1	PRIMEIROS RESULTADOS ABSTRATOS	70
4.2	MULTIPLICIDADE DE PONTOS CRÍTICOS	74
5	EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS VIA TEORIA DE MORSE	84
5.1	CONCEITOS PRELIMINARES	84
5.2	EXISTÊNCIA AO MENOS UMA SOLUÇÃO NÃO NULA	86

5.2.1	Demonstração do Teorema 5.2	101
5.3	MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES	105
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
	REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, utilizaremos mecanismos da Topologia Algébrica e Análise com objetivo de empregar as ferramentas da Teoria de Morse introduzida por Gromoll-Meyer (GROMOLL; MEYER, 1969) para garantir a existência e multiplicidade de pontos críticos não triviais para uma classe de funções $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um espaço de Hilbert H , e como aplicação obtemos a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos envolvendo o operador Laplaciano.

A motivação principal para utilizar as ferramentas citadas acima, deve-se ao fato de que ao analisarmos valores críticos, a topologia dos conjuntos de nível $I^a = \{x \in H \mid I(x) \leq a\}$, sofre modificações. Desta forma, em espaços de dimensão finita é possível estudar a topologia destes espaços sem recorrer a artifícios da Topologia Algébrica. Porém, ao consideramos espaços de dimensão infinita, perdemos a intuição geométrica e topológica dos mesmos, assim, recorreremos aos grupos de homologia em vizinhanças de pontos críticos, denominados de grupos críticos, visando estabelecer agora a estrutura destes grupos abelianos e suas modificações na presença de pontos críticos, garantindo a existência ou não de novos pontos críticos.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, o primeiro capítulo aborda resultados gerais da teoria dos espaços de Lebesgue e Sobolev, bem como Teoremas importantes envolvendo estes espaços, conceito e propriedades básicas dos grupos de Homologia e teoremas de deformação, que foram utilizados ao longo deste trabalho, além de uma breve introdução às variedades diferenciáveis.

No segundo capítulo, utilizando como referencias principais (MAWHIN; WILLEM, 1989), (CHANG, 1993) e (DAMASCELLI; PACELLA, 2010) abordamos aspectos da Teoria de Morse para pontos críticos de funcionais $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ definidos em variedades de dimensão finita ou infinita modeladas em um espaço de Hilbert H , definindo ponto crítico não degenerado, índice de Morse e nulidade de um ponto crítico. Neste contexto, apresentamos um resultado que descreve os grupos críticos de um ponto crítico u , no caso em que este é não degenerado ou um ponto de mínimo local isolado. Ainda neste capítulo, apresentamos o Lema de Morse em dimensão infinita, bem como o Lema de Morse generalizado, para funcionais I definidos em espaços de Hilbert, também conhecido como Teorema de Splitting, que permitem expressar I de forma conveniente na vizinhança de pontos críticos quando $I''(u)$ é um operador de Fredholm, isto é, possua núcleo e conúcleo de dimensão finita. Estes

resultados são importantes em nosso trabalho pois, nos auxiliam na descrição dos grupos críticos de pontos críticos u degenerados, quando $I''(u)$ é um operador de Fredholm, visto que, geralmente não é uma tarefa simples computar grupos de Homologia e grupos críticos utilizando apenas a definição destes.

Vale ressaltar que é imediato da definição, que um espaço de Hilbert H é uma variedade de Hilbert modelada em si mesmo, portanto os mesmos resultados em dimensão infinita são válidos no caso em que o domínio é apenas um espaço de Hilbert. A justificativa para considerarmos I definido desta forma, deve-se principalmente ao fato da teoria de Morse possuir aplicações em outras áreas da matemática e portanto, em casos em que o domínio não é um espaço de Hilbert.

No terceiro capítulo, seguindo os passos de (SILVA, 1996), apresentamos alguns resultados abstratos que asseguram sob quais condições uma determinada classe de funcionais $I : H \rightarrow \mathbb{R}$, pertencentes à $\mathcal{C}^2$ admite pelo menos um e em seguida quatro pontos críticos não triviais, utilizando os resultados de computação de grupos críticos pré-estabelecidos.

Por fim, no quarto capítulo, seguindo novamente os passos de (SILVA, 1996), apresentaremos resultados sobre existência e multiplicidade de soluções não triviais para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, que satisfaz algumas condições gerais e Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$. Para tal, consideramos um funcional de classe $\mathcal{C}^2$, associado ao problema acima, no qual denotaremos por I definido no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, e utilizamos técnicas variacionais para garantir que tal funcional satisfaz as condições de multiplicidade de pontos críticos impostas no capítulo três.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados que serão utilizados ao longo do nosso trabalho.

2.1 TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

2.1.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, introduziremos o conceito de espaços $L^p(\Omega)$ bem como alguns resultados importantes que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 2.1. Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p < +\infty$. Definimos o *espaço* $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}.$$

Tal espaço, assim definido, é um espaço normado quando munido da norma

$$\|f\|^p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

Observe que a definição acima foi proposta para o caso em que p é um expoente finito.

Definição 2.2. Quando $p = \infty$, definimos o *espaço* $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência) funções reais mensuráveis e limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{\Omega} |f| < \infty \right\}.$$

Assim como no caso em que p é finito, podemos definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$, a qual é dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f|,$$

onde $\sup_{\Omega} |f| = \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq c, q.t.p \text{ em } \Omega \}$.

Observe que $L^p(\Omega)$, assim definido, é um espaço de Banach, isto é, é um espaço vetorial normado e completo com a norma definida acima. Além disso, no caso em que $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Os resultados abaixo são teoremas clássicos e importantes da teoria dos espaços $L^p(\Omega)$, que serão aplicados neste trabalho.

Teorema 2.3 ((BREZIS, 2010), p.94). *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$. Suponha que*

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Então, existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$i) \quad f_{n_j}(x) \rightarrow f(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega;$$

$$ii) \quad |f_{n_j}(x)| \leq h_p(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega \text{ para todo } j \in \mathbb{N}, \text{ com } h_p \in L^p(\Omega).$$

Teorema 2.4 (Lema de Fatou - (BREZIS, 2010), p. 90). *Seja $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, dx.$$

Teorema 2.5 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue - (BREZIS, 2010), p. 90). *Seja $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, q.t.p em Ω e existe uma função mensurável $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in \Omega$. Então, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Teorema 2.6 (Desigualdade de Hölder - (BREZIS, 2010), p. 92). *Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde p' é o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Teorema 2.7 (Teorema da Representação de Riesz - (BREZIS, 2010), p.135). *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H'$, temos que existe um único $u \in H$ de forma que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H'} = \|u\|_H$.

2.1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção, vamos introduzir os espaços de Sobolev de maneira geral, bem como alguns resultados mais importantes válidos nestes espaços, que serão utilizados em nossas aplicações.

Estes espaços, são os espaços naturais para buscarmos a existência de alguns tipos de Equações diferenciais parciais, inclusive a que iremos abordar neste trabalho. Assumiremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Mas, antes de introduzirmos os espaços de Sobolev, se faz necessário apresentar o conceito de derivada fraca. Do estudo do cálculo sabemos que o conjunto das funções diferenciáveis é um conjunto muito pequeno do ponto de vista topológico, desta forma o conceito de derivada fraca estende o conceito de derivada clássica para uma classe maior de funções de forma que a fórmula de integração por partes ainda seja válida, como veremos a seguir. Para discussão mais completa acerca deste tema, indicamos ao leitor que consulte (BREZIS, 2010) e (EVANS, 1998).

Definição 2.8. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a *derivada parcial fraca* de u em relação à x_i , se

$$\int_{\Omega} u(\partial_i \varphi) = - \int_{\Omega} v_i \varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty$. Nesta situação, escrevemos $v_i = \partial_i u$.

De posse do conceito de derivada fraca, podemos apresentar os espaços de Sobolev. Observe que estes espaços, são uma extensão dos espaços $C^k(\Omega)$ para funções fracamente diferenciáveis, isto é, dos espaços das funções que admitem derivada contínua até k -ésima ordem.

Definição 2.9. Fixado $1 \leq p < \infty$. Definimos o *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \text{cuas derivadas } \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existem no sentido fraco e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$, como definido acima, é um espaço vetorial normado quando munido com a norma definida por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p. \quad (2.2)$$

Quando $p = 2$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$.

Definição 2.10. Seja $1 \leq p < +\infty$. Definimos o *espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, como sendo

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$$

em $W^{1,p}(\Omega)$. Isto nos diz que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$, tal que $u_m \rightarrow u$, quando $m \rightarrow +\infty$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

No caso em que $p = 2$, denotamos

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.3)$$

Nosso objetivo em introduzir o espaço $H_0^1(\Omega)$ deve-se ao fato que, em nossas aplicações, estes espaços tornam-se o ambiente natural para buscarmos soluções no sentido fraco. Os espaços de Sobolev possuem algumas propriedades que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho, como seguem abaixo.

Teorema 2.11 ((EVANS, 1998) - p. 262). *Para todo $1 \leq p < +\infty$, temos que o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Observe que definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{1,p}(\Omega)$. Isto nos diz que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um subconjunto fechado de $W^{1,p}(\Omega)$, e sendo este um espaço de Banach, temos que por $W_0^{1,p}(\Omega)$ ser fechado, este também é um espaço de Banach quando munido da norma induzida de $W^{1,p}(\Omega)$. Em particular, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os próximos resultados estabelecem uma relação entre os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e os espaços $L^p(\Omega)$ que foram definidos na seção anterior. Para tal, precisamos definir o conceito de imersão contínua e imersão compacta, como segue

Definição 2.12. Sejam $X \subset Y$ espaços de Banach. Dizemos que X está *imerso continuamente* em Y , e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, quando existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \text{ para todo } u \in X. \quad (2.4)$$

Definição 2.13. Sejam $X \subset Y$ espaços de Banach. Dizemos que X está *compactamente imerso* em Y quando X está continuamente imerso em Y e dada $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada, temos que esta admite uma subsequência convergente em Y .

Teorema 2.14 (Imersões contínuas - (BREZIS, 2010), p. 284-285). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $1 \leq p < +\infty$, então as seguintes imersões são contínuas:*

- i) *Se $1 \leq p < N$ então, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*]$, onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$, denota o expoente crítico de Sobolev;*
- ii) *Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$;*
- iii) *Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Teorema 2.15 (Imersões compactas - (BREZIS, 2010), p. 285). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 . As seguintes imersões são compactas:*

- i) Se $1 \leq p < N$ então, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$;*
- ii) Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$;*
- iii) Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, podemos definir a parte positiva de u , por $u^+ = \max\{u, 0\}$ e a parte negativa como sendo $u^- = u - u^+$. O próximo resultado estabelece que as funções $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.16 ((EVANS, 1998)). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e $1 < p < +\infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então, $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso,*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{q.t.p sobre } \{u \geq 0\}, \\ 0, & \text{q.t.p sobre } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} \nabla u, & \text{q.t.p sobre } \{u \leq 0\}, \\ 0, & \text{q.t.p sobre } \{u \geq 0\}. \end{cases}$$

Consequentemente $\nabla u = 0$, sobre o conjunto $\{u = 0\}$ e $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.17 ((BREZIS, 2010) - p. 69). *Seja $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$. Se existe $C > 0$ tal que $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$, então existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Observação 2.18. Na realidade, o resultado acima é enunciado de forma mais geral, onde E é apenas um espaço de Banach reflexivo.

2.1.3 Problema do autovalor do Laplaciano

O problema do autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet consiste em encontrar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, tais que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

admite soluções não triviais. Na literatura atual, muito já fora desenvolvido no que se refere a existência de solução para esse tipo de problema, bem como a caracterização variacional dos autovalores. Desta forma, aqui abordaremos alguns destes resultados, que podem ser encontrados em (FIGUEIREDO, 1982) e (CHANG, 1993).

Teorema 2.19 (Decomposição espectral do Laplaciano - (FIGUEIREDO, 1982)). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Então o problema (2.5), possui uma sequência de soluções $(\lambda_k, \phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tais que*

- i) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$;
- ii) $\phi_k \in C^\infty(\Omega)$;
- iii) λ_1 é simples e a autofunção correspondente ϕ_1 pode ser escolhida de forma que $\phi_1(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$ e $\|\phi_1\| = 1$;
- iv) $\lambda_1 = \inf_{u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$, com $u \in H_0^1(\Omega)$;
- v) Se $u \in H_0^1$ é solução fraca de (2.5) com $\lambda = \lambda_1$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u = c\phi_1$.

De maneira geral, o próximo resultado em sua demonstração nos dá uma caracterização variacional para todo λ_k que é autovalor de (2.5).

Teorema 2.20 ((FIGUEIREDO, 1982)). *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Então, o problema de autovalor (2.5) possui um número infinito e enumerável de autovalores $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfazem*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

tais que $\lambda_k \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$. Além disso, as autofunções $\{\phi_k\}$ constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é, dada $v \in L^2(\Omega)$, temos que

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i.$$

Em particular,

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, \phi_i \rangle_2^2.$$

Desta forma, se λ_k é um autovalor do problema (2.5) então

$$\lambda_k = \inf_{u \in H_k} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx},$$

onde H_k é o subespaço ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções associadas aos primeiros $(k - 1)$ autovalores.

Uma variação natural do problema descrito acima, também conhecido como problema de autovalor do Laplaciano com peso, consiste em determinar as soluções da seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função chamada de peso. Note que o problema (2.5), nada mais é que um caso particular do problema (2.6) com $m \equiv 1$. Observe que embora sejam de naturezas semelhantes, os problemas carregam em si particularidades no que se refere a existência de soluções, uma vez que em (2.5) é possível determinar de forma explícita quem são os autovalores e as características das autofunções associadas, porém no caso do problema de autovalor com peso, podem existir autovalores negativos e autofunções negativas, o que influenciará neste fato será o sinal de m . Denotaremos os autovalores de um problema com peso, por $\lambda_k(m)$.

Teorema 2.21 (Manes-Michelleti - (MANES; MICHELETTI, 1973)). *Seja $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função pertencente à $L^r(\Omega)$, com $r > \frac{N}{2}$. Suponha que $m > 0$ em um subconjunto de Ω com medida positiva. Então, o primeiro autovalor $\lambda_1(m)$ de (2.6) é simples e sua autofunção associada é tal que $\phi_1 > 0$ em Ω .*

O próximo resultado, devido a Hess-Kato, é uma variação do Teorema de Manes-Michelleti, que nos fornece informações melhores para o autovalor principal de (2.6), quando m é contínua em $\overline{\Omega}$.

Teorema 2.22. (Hess-Kato - (HESS; KATO, 1980)) *Suponha que $m \in C(\overline{\Omega})$, e existe x_0 tal que $m(x_0) > 0$. Então, o problema (2.6) admite um autovalor principal $\lambda_1(m)$, caracterizado por ser o único autovalor positivo associado a uma autofunção positiva. Além disso, $\lambda_1(m)$ possui as seguintes propriedades:*

- i) Se $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ é outro autovalor com $Re(\tilde{\lambda}) > 0$, então $Re(\tilde{\lambda}) \geq \lambda_1(m)$;
- ii) $\dim(-\Delta - \lambda_1 m) = 1$.

Observe que, no Teorema 2.22, temos que m é contínua e $m(x_0) > 0$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$. Por definição de continuidade, temos que existe $r > 0$, tal que se $x \in B(x_0, r)$ então $m(x) > 0$.

Isto nos diz que a condição m ser contínua e positiva em apenas um ponto implica em $m > 0$ em um subconjunto de medida positiva.

2.2 HOMOTOPIAS E LEMAS DE DEFORMAÇÃO

2.2.1 Homotopias

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de homotopias entre aplicações e entre espaços topológicos. De maneira intuitiva, o conceito de homotopia formaliza a noção intuitiva de deformação entre espaços e entre aplicações contínuas. Para um estudo mais aprofundado, sugerimos (SPANIER, 2012).

Definição 2.23. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma *homotopia* é uma família de aplicações, $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$, onde a aplicação $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = f_t(x)$ é contínua.

Definição 2.24. Sejam X, Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que as aplicações f e g são *homotópicas* se existir uma aplicação $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ contínua, de forma que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 2.25. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Dizemos que f é uma *equivalência homotópica* quando existir uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Neste caso, g é a inversa homotópica de f e os espaços X e Y são *homotopicamente equivalentes*.

Definição 2.26. Um espaço topológico X é dito *homotopicamente nulo*, quando este é homotopicamente equivalente a um ponto.

Definição 2.27. Um espaço topológico X é dito *contrátil* se a função identidade $Id : X \rightarrow X$ é homotópica a uma função constante.

Exemplo 2.28. Seja X um espaço conexo. Então X é contrátil. Para ver isto, seja u_0 um ponto fixado de X e considere a aplicação $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$, definida por $F(x, t) = tu_0 + (1 - t)x$. Observe que F está bem definida e é contínua, pois sendo X conexo, temos que $F(x, t)$ é o segmento ligando os pontos u_0 e x , e este pertence a X . Além disso, $F(x, 0) = x$ e $F(1, x) = u_0$. Logo a aplicação identidade $Id : X \rightarrow X$ é homotópica a aplicação constante $h(x) = u_0$, para todo $x \in X$.

A proposição abaixo será útil na demonstração de alguns resultados ao longo deste trabalho, uma vez que a tarefa de garantir que um espaço é contrátil é relativamente mais simples.

Proposição 2.29 ((SPANIER, 2012) - p. 26). *Um espaço topológico X é contrátil se, e somente se, este é homotopicamente equivalente a um ponto.*

Definição 2.30. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço. Um *retrato de deformação* de A em X é uma família de aplicações contínuas $f_t : X \rightarrow X$, com $t \in [0, 1]$ tal que

$$i) \quad f_0 = Id;$$

$$ii) \quad f_1(X) = A;$$

$$iii) \quad f_t|_A = Id.$$

Definição 2.31. Seja $Y \subset X$ um subconjunto. Diremos que Y é um *retrato de deformação forte* de X se existe $F \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times X, X)$, tal que

$$F(t, u) = u, \quad \text{se } u \in X \text{ e } t \in [0, 1]$$

$$F(0, u) = u, \quad \text{e } F(1, u) \in Y, \text{ sempre que } u \in X.$$

2.3 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos da teoria das variedades diferenciáveis. O nosso objetivo em introduzir esta seção deve-se ao fato de que, na Teoria de Morse em dimensão finita, trabalharemos com funções definidas em variedades diferenciáveis e ao trabalharmos com algumas ferramentas dessa teoria, tencionamos que o leitor conheça tais ferramentas. Para maiores detalhes, sugerimos que consulte (TU, 2010).

Definição 2.32. Um espaço topológico M é dito *localmente euclidiano de dimensão N* , quando para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ em um subconjunto do $\mathbb{R}^N$. Ao par (U, φ) damos o nome de carta, U chamamos de vizinhança coordenada e φ um sistema coordenado de U . Dizemos que a carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ é centrada se $\varphi(p) = 0$ sempre que $p \in U$.

Definição 2.33. Duas cartas $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N)$ e $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^N)$, de uma variedade topológica são ditas $\mathcal{C}^\infty$ -compatíveis se as aplicações $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ e sua inversa $(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$ são de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definição 2.34. Um *atlas* em um espaço localmente euclidiano é uma coleção $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de pares de cartas $\mathcal{C}^\infty$ – compatíveis que cobre M , isto é, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Definição 2.35. Um atlas $\mathcal{M}$ em um espaço localmente euclidiano é dito um *atlas maximal* se para todo atlas $\mathcal{U}$ contendo $\mathcal{M}$, implicar que $\mathcal{U} = \mathcal{M}$.

Definição 2.36. Uma *variedade diferenciável* é uma variedade topológica M munida com um atlas maximal.

Exemplo 2.37. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é uma variedade diferenciável quando munida do atlas identidade.

Assim como no $\mathbb{R}^N$, vamos definir o *germe* de uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $p \in M$ como sendo a classe de equivalência das funções $\mathcal{C}^\infty$ definidas em uma vizinhança de p em M . Duas funções são equivalentes se elas coincidem em alguma vizinhança de $p \in M$.

O conjunto de todos os germes da função real $\mathcal{C}^\infty$ em $p \in M$ é denotado por $\mathcal{C}_p^\infty(M)$. A adição e multiplicação de funções fazem $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ um anel. A multiplicação por escalar real tornam $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Generalizando a noção de derivada em um ponto de $\mathbb{R}^N$, definimos a derivada em um ponto da variedade M , como sendo o mapa linear $D : \mathcal{C}_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$.

Definição 2.38. O *vetor tangente* em um ponto p de uma variedade diferenciável M é a derivação em p . Assim como em $\mathbb{R}^N$, os vetores tangentes em p formam um espaço vetorial $T_p(M)$, chamado espaço tangente de M em p , o qual podemos denotar também por $T_p M$.

Definição 2.39. Seja H um espaço de Hilbert. Um espaço topológico M é dito uma *variedade de Hilbert $\mathcal{C}^k$ modelado em H* se existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de M , indexada por um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e uma família $\psi_i : U_i \rightarrow X$ de mapas satisfazendo as seguintes condições:

- i) $V_i = \psi(U_i)$ é aberto em X e ψ_i é um homeomorfismo de U_i em V_i ;
- ii) $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe $\mathcal{C}^k$.

Convém observar que, se tomarmos $M = H$, isto é, considerarmos todo o espaço de Hilbert, é imediato que H é uma variedade de Hilbert modelada em si mesmo, para ver isto basta tomar uma cobertura aberta de H e considerar ψ_i como sendo a aplicação identidade. Isto nos diz

que toda teoria apresentada neste trabalho, no caso em que M é uma variedade modelada em um espaço de Hilbert H , pode ser aplicada no caso em que estamos trabalhando apenas um espaço de Hilbert.

Nosso objetivo agora é introduzir o conceito de variedade Riemanniana. Para tal iniciaremos apresentando o conceito de métrica Riemanniana, como segue abaixo.

Definição 2.40. Seja M uma variedade de Hilbert $\mathcal{C}^k$, modelada em um espaço de Hilbert H . Uma *métrica Riemanniana* de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ em M é um mapa que associa a cada par (p, φ) , onde $p \in M$ e φ é uma carta de p , um operador positivo definido, simétrico e invertível $M_\varphi(p) : H \rightarrow H$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) O mapa $p \mapsto M_\varphi(p)$ é de classe $\mathcal{C}^{k-1}$;

ii) Se φ e ς são duas cartas de $p \in M$, então

$$[(\varsigma \circ \varphi^{-1})'(\varphi(u))]^* M_\varsigma(p) [(\varsigma \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))] = M_\varphi(p).$$

Sejam agora $v, w \in M$. A condição ii) acima, nos permite definir um produto interno em $T_p M$, dado por

$$\langle [p, \varphi, v], [p, \varphi, w] \rangle = \langle M_\varphi(p)v, w \rangle.$$

Desta forma, podemos então definir o que vem a ser uma variedade Riemanniana.

Definição 2.41. Uma *variedade Riemanniana de classe $\mathcal{C}^k$* é um par $(M, M_\varphi(p))$, onde M é uma variedade de Hilbert modelada em H de classe $\mathcal{C}^k$ e $M_\varphi(p)$ é uma métrica Riemanniana em M de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

2.3.1 Lemas de deformação

Definição 2.42. Dizemos que uma aplicação f satisfaz a condição de *Palais-Smale* a qual denotaremos por (PS) em um conjunto S se toda sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset S$, tal que

i) $(f(u_m))_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada;

ii) $f'(u_m) \rightarrow 0$,

possui uma subsequência convergente.

Teorema 2.43 (Primeiro teorema de deformação sob a condição (PS) - (MAWHIN; WILLEM, 1989) p. 131). *Se $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) em X e U é uma vizinhança aberta de K_c , então para todo $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in \mathcal{C}([0, 1] \times X, X)$ tal que*

$$\eta(1, f^{c+\varepsilon} \setminus U) \subset f^{c-\varepsilon},$$

além disso,

$$\eta(t, u) = u, \quad \text{se } u \notin f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

A partir de agora, nosso objetivo será introduzir mais dois resultados de deformação que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para tal, precisaremos enunciar o seguinte problema:

$$u''(t) = \nabla F(t, u(t)) \quad \text{em } [0, T]$$

onde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz a seguinte condição:

(A) $F(x, t)$ é mensurável em t para todo $x \in \mathbb{R}^N$, continuamente diferenciável em x , q.t.p $t \in [0, T]$, e existem $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e $b \in L^1([0, T], \mathbb{R}^+)$, tal que

$$|F(x, t)| \leq a(|x|)b(t), \quad |\nabla F(x, t)| \leq a(|x|)b(t),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e q.t.p $t \in [0, T]$.

Vamos então assumir algumas condições gerais:

i) M é uma variedade Riemanniana de Classe $\mathcal{C}^2$ e $f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$;

ii) X é positivamente invariante com relação ao fluxo definido por:

$$\begin{cases} \sigma'(t) &= -\nabla f(\sigma(t)), \\ \sigma(0) &= v, \end{cases}$$

isto é, $\sigma(t, u) \in X$ sempre que $u \in X$ e $t \in (0, w_+(u))$;

iii) $a < b$ são números reais tais que os pontos críticos de f em $f^{-1}([a, b]) \cap X$ são isolados e estão contidos no interior de $f^{-1}([a, b]) \cap X$;

iv) A condição de Palais-Smale é satisfeita em $f^{-1}([a, b]) \cap X$.

Além disso, para $c \in [a, b]$, podemos definir $X^c = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ e $K_c = \{u \in X \mid f(u) = c \text{ e } f'(u) = 0\}$. De posse das condições acima, podemos enunciar o segundo teorema de deformação desta seção.

Teorema 2.44 (Segundo teorema de deformação sob a condição (PS) - (MAWHIN; WILLEM, 1989)). *Suponha que a condição (A) é satisfeita e sejam $a \leq \alpha < \beta \leq b$ tais que $f^{-1}((\alpha, \beta)) \cap X$ é livre de pontos críticos. Então X^α é um retrato de deformação forte de $X^\beta \setminus K_\beta$.*

Nosso objetivo agora será enunciar o terceiro lema de deformação que fora utilizado neste trabalho. Para tal, precisamos do seguinte conceito:

Definição 2.45. Seja $c \in \mathbb{R}$.

a) Dizemos que $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível c , a qual denotaremos por $(Ce)_c$, se para toda sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset H$, tal que

$$i) \quad I(u_m) \rightarrow c;$$

$$ii) \quad \|I'(u_m)\|(1 + \|u\|) \rightarrow 0,$$

possuir uma subsequência convergente.

b) Se I satisfaz $(Ce)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$, diremos simplesmente que I satisfaz a condição (Ce) .

Teorema 2.46 (Teorema de deformação para condição (Ce) - (SILVA, 1994)). *Seja H um espaço de Hilbert e $f \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (Ce) . Vamos assumir que c é o único valor crítico de f no intervalo $[c, b)$, com $K_c = \{u_j\}_{j=1}^m$. Então, f^c é um retrato de deformação forte de $f^b \setminus K_b$.*

Observação 2.47. Se $b = \infty$, no Teorema anterior, então I^c é um retrato de deformação forte de H .

De maneira intuitiva, a observação acima nos diz que se não houver outro valor crítico de f no intervalo $(c, +\infty)$ então f^c é um retrato de deformação do espaço todo. Outra observação importante a ser feita a respeito dos resultados apresentados acima é que, embora estes possuam hipóteses relativamente distintas, eles nos levam a conclusões semelhantes. Estas conclusões nos permitirão garantir que alguns resultados que valem para funções que satisfazem (PS) também sejam válidos quando f satisfaça (Ce) , como veremos no decorrer deste trabalho.

Para finalizarmos esta seção, apresentaremos o seguinte resultado que será utilizado ao longo do nosso trabalho:

Lema 2.48 ((MAWHIN; WILLEM, 1989)). *Seja M uma variedade Riemanniana de classe $\mathcal{C}^2$ e seja u um ponto crítico isolado de $f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$. Se a condição de Palais-Smale é satisfeita em toda vizinhança fechada A de u , então existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança B de u tal que se $u \in B$, então $\sigma(t, u)$ está em A para $0 < t < w_+(u)$, ou $\sigma(t, u)$ pertence a A quando $f(\sigma(t, u)) < f(u) - \varepsilon$*

2.4 GRUPOS DE HOMOLOGIA

Uma das principais ferramentas ao se estudar Teoria de Morse são os grupos críticos, que em linhas gerais, são definidos a partir do grupo de homologia de uma função e seus pontos críticos isolados. Para a boa estruturação deste trabalho, dedicaremos esse tópico às principais definições e resultados no que tange ao estudo dos grupos de homologia, a fim de que no próximo capítulo possamos introduzir o conceito de grupos críticos.

Definição 2.49. Um *grupo diferenciável* C consiste de um grupo abeliano e um endomorfismo $\partial : C \rightarrow C$ tal que $\partial\partial = 0$. O endomorfismo $\partial : C \rightarrow C$ é chamado de diferencial ou operador de fronteira de C .

Há uma categoria cujos objetos são grupos diferenciais e cujos morfismos são os homeomorfismos que comutam com os diferenciais.

Para um grupo diferenciável C há um subgrupo cíclico $\mathcal{Z}(C) = \ker(\partial)$ e um subgrupo de limites $\mathcal{B}(C) = \text{im}(\partial)$. Queremos definir o grupo de homologia como sendo um grupo quociente, isto é, $\mathcal{Z}(C) / \mathcal{B}(C)$. Para boa definição do mesmo, se faz necessário o resultado abaixo.

Proposição 2.50. $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{Z}(C)$

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathcal{B}(C)$, isto é, $\alpha = \partial(u)$ para algum $u \in C$. Para mostrarmos que $\alpha \in \mathcal{Z}(C)$, devemos mostrar que $\partial(\alpha) = 0$, mas $\partial(\alpha) = \partial(\partial(u)) = 0$, pois $\partial\partial = 0$. Portanto, segue o resultado. ■

Definição 2.51. O *grupo de homologia* $H(C)$ é definido como o grupo quociente

$$H(C) = \mathcal{Z}(C) / \mathcal{B}(C).$$

Os elementos de $H(C)$ são chamados de classes de homologia. Acima, definimos o que são os grupos de homologia de um grupo abeliano. Nosso objetivo agora, será definir os grupos

de homologia de um par (A, B) , onde A e B são espaços topológicos. Para finalizarmos esta seção, definiremos o que vem a ser uma sequência exata.

Definição 2.52. Seja $\{G_i\}$ uma sequência de grupos abelianos e (α_i) uma sequência de homomorfismos. Dizemos que a sequência

$$\cdots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} G_i \xrightarrow{\alpha_i} G_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é *exata* em G_i se $\ker(\alpha_i) = \text{im}(\alpha_{i-1})$. Além disso, a sequência é dita *exata*, se for exata para todo G_i .

2.4.1 Homologia Singular

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de homologia singular de um par (A, B) de espaços topológicos. A teoria de homologia a ser considerada aqui, consiste em associar a cada par de espaços topológicos (A, B) uma sequência de grupo abeliano. Esta associação permite estudarmos mais detalhadamente a topologia e caracterização destes espaços em subníveis de pontos críticos, como veremos mais a frente. Para compreendermos a definição desses grupos, necessitamos de alguns resultados básicos da topologia algébrica, que serão abordados como segue.

Definição 2.53. Definimos o *simplexo padrão* como sendo o conjunto

$$\Delta_q = \left\{ \sum_{j=0}^q \lambda_j e_j \mid \lambda_j \geq 0, \sum_{j=0}^q \lambda_j = 1 \right\},$$

onde para cada $q = 0, 1, 2, \dots$ tem-se que

$$e_0 = (0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e_q = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

são vetores em $\mathbb{R}^\infty$.

De maneira intuitiva, um simplexo padrão representa o menor conjunto convexo contido em $\mathbb{R}^\infty$. O que faremos nesta seção é partir de um conjunto convexo, abordar alguns conceitos importantes da topologia algébrica para concluir a construção dos grupos de homologia.

Definição 2.54. Seja A um espaço topológico. Um q -simplexo singular é definido como um mapa contínuo $\varphi : \Delta_q \rightarrow A$. Vamos denotar por Σ_q o conjunto de todos os q -simplexos singulares.

Definição 2.55. Seja G um grupo abeliano, vamos definir a combinação formal linear como sendo

$$\sigma = \sum g_i \sigma_i, \quad \text{tal que } g_i \in G \text{ e } \sigma_i \in \Sigma_q.$$

Esta soma é chamada de q -cadeia singular. O conjunto de todas as q -cadeias singulares será denotado por $C_q(A, G)$.

Definição 2.56. Seja A um espaço topológico. Definimos o *operador de fronteira ou de bordo* como sendo

$$\partial(\sigma) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma^{(j)},$$

onde $\sigma^{(j)} = \varphi[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_q]$. A notação $[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_q]$ indica o $(q-1)$ -simplexo gerado pelos vetores $e_0, \dots, e_q$, exceto e_j . Este operador satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\partial : C_q(A, G) \rightarrow C_{q-1}(A, G)$ é um homomorfismo;
- ii) $\partial^2(c) = \partial(\partial(c)) = 0$, para todo $c \in C_q(A, G)$.

Seja (A, B) um par de espaços topológicos com $B \subset A$, o qual chamaremos par topológico. Uma vez que

$$\partial : C_q(A, G) \rightarrow C_{q-1}(A, G)$$

restringindo a aplicação ∂ à B , temos que

$$\partial : C_q(B, G) \rightarrow C_{q-1}(B, G)$$

O homomorfismo de fronteira ∂ induz um homomorfismo $\bar{\partial}$, que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} C_q(A, G) & \longrightarrow & C_q(A, G) / C_q(B, G) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \bar{\partial} \\ C_{q-1}(A, G) & \longrightarrow & C_{q-1}(A, G) / C_{q-1}(B, G) \end{array}$$

Observe que $\overline{\partial\partial} = 0$.

Definição 2.57. O espaço quociente

$$C_q(A, B; Q) = C_q(A, G) / C_q(B, G)$$

recebe o nome de *cadeia de módulo q -relativa*.

Com base na construção acima, podemos definir os seguintes espaços:

Definição 2.58. $Z_q(A, B, G) = \ker(\overline{\partial})$.

Definição 2.59. $B_q(A, B, G) = \text{im}(\overline{\partial})$.

Definição 2.60. Desta forma, para cada q inteiro, definimos o q -ésimo grupo de homologia singular como sendo

$$H_q(A, B, G) = Z_q(A, B, G) / B_q(A, B, G), \quad (2.7)$$

ou simplesmente, $H_q(A, B)$. Observe que se $q < 0$, então $H_q(A, B, G) = \{0\}$. Além disso, se $B = \emptyset$, usamos a notação $H_q(A, \emptyset)$ ou simplesmente $H_q(A)$.

2.4.2 Axiomas de Eilenberg-Steenrod para homologia singular

Nesta seção, vamos introduzir alguns axiomas e exemplos referentes a homologia singular. Para mais detalhes, sugerimos que o leitor consulte (CHANG, 1993) e (MAWHIN; WILLEM, 1989).

Seja então (A, B) um par topológico. Uma *aplicação entre pares* é uma aplicação $f : (A, B) \rightarrow (A', B')$, de modo que $f : A \rightarrow A'$ é contínua e $f(B) \subset B'$. Para cada aplicação entre pares, temos um homomorfismo:

$$f_{q*} : H_q(A, B) \rightarrow H_{q-1}(A', B')$$

chamado de homomorfismo induzido. Seja $C \subset B$, o homomorfismo

$$\partial_q : H_q(A, B) \rightarrow H_{q-1}(B, C)$$

é chamado de homomorfismo de fronteira. É frequente denotarmos apenas por f_* e ∂ os homomorfismos acima, omitindo o subíndice. Os seguintes axiomas são satisfeitos:

Axioma 2.61. Seja $Id : X \rightarrow X$, a aplicação identidade e $Id_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$, a aplicação induzida. Então $Id_* = Id$.

Axioma 2.62. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Axioma 2.63. Se A é um espaço topológico. Então,

$$H_q(A, A) = \{0\}.$$

Axioma 2.64. Se A é conexo por caminhos, então

$$H_0(A) \cong \mathbb{Z}$$

Axioma 2.65. O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} H_q(A, B) & \xrightarrow{f_*} & H_q(A', B') \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ H_{q-1}(A, B) & \xrightarrow{(f|_B)_*} & H_{q-1}(B', C') \end{array}$$

isto é, $\partial \circ f_* = (f|_B)_* \circ \partial$.

Axioma 2.66 (Exatidão). Seja $i : (B, C) \rightarrow (A, C)$ e $j : (A, C) \rightarrow (A, B)$ as aplicações inclusão. Então, a sequência

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(A, B) \xrightarrow{\partial} H_q(B, C) \xrightarrow{i_*} H_q(A, C) \xrightarrow{j_*} H_q(A, B) \rightarrow \cdots$$

é exata.

Axioma 2.67 (Invariância por homotopia). Se f e g são homotópicas, então $f_* = g_*$.

Axioma 2.68 (Excisão). Suponha que C é um subconjunto aberto de A tal que $\overline{C} \subset \text{int}(B)$. Seja $i : (A \setminus C, B \setminus C) \rightarrow (A, B)$, o mapa inclusão. Então, a aplicação induzida $i_* : H_q(A \setminus C, B \setminus C) \rightarrow H_q(A, B)$ é um isomorfismo. Em outras palavras, temos que

$$H_q(A \setminus C, B \setminus C) \simeq H_q(A, B).$$

Axioma 2.69 (Decomposição). Se $(A, B) = \bigcup_{i=1}^j (A_i, B_i)$, com A_i fechado e disjuntos, então

$$H_q(A, B) = \bigoplus_{i=1}^j H_q(A_i, B_i).$$

Axioma 2.70 (Retrato de deformação). Se A é um retrato de deformação forte de A' então

$$H_q(A, C) \simeq H_q(A', C).$$

O mesmo vale para C . Em particular, se $C = A'$, temos que

$$H_q(A, C) \simeq H_q(A', A') \simeq \{0\}.$$

Proposição 2.71 ((MAWHIN; WILLEM, 1989) - p. 171). *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto contendo $\{0\}$ e B^k uma k -bola. Então, para todo $k \leq 1$, temos que*

$$H_q(B^k \times A, (B^k \times A) \setminus \{0\}) \simeq H_{q-k}(A, A \setminus \{0\}).$$

2.4.2.1 Exemplos de grupos de homologia

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de grupos de homologia que são frequentemente utilizados e que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

Exemplo 2.72. Se o espaço X consta de apenas 1 ponto, então:

$$H_q(X, \emptyset) \cong \begin{cases} G, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.73. Seja S^k a esfera de dimensão $k + 1$. Então,

$$H_q(S^k, \emptyset) \cong \begin{cases} G^2, & q = k = 0, \\ G, & q = k \leq 1 \text{ e } q = 0, k \geq 1, \\ 0, & q \neq k \text{ com } q, k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.74. Seja B^k uma k -bola e $\partial B^k = S^{k-1}$ sua esfera. Então,

$$H_q(B^k, S^{k-1}) \cong \begin{cases} G, & q = k, \\ 0, & q \neq k. \end{cases}$$

Exemplo 2.75. Seja $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, o Toro bidimensional. Então,

$$H_q(\mathbb{T}^2, \emptyset) \cong \begin{cases} G, & q = 0, 2, \\ G \times G, & q = 1, \\ 0, & q \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Observação 2.76. Note que, se $A = \{0\}$, na Proposição 2.71 temos que

$$H_q(B^k, B^k \setminus \{0\}) \cong H_q(B^k \times \{0\}, (B^k \times \{0\}) \setminus \{0\}) \cong H_q(\{0\}, \emptyset) = \delta_{n,k}G,$$

No exemplo 2.74, vimos que $H_q(B^k, S^{k-1}) \cong \delta_{n,k}G$. Portanto, podemos concluir que

$$H_q(B^k, B^k \setminus \{0\}) \cong H_q(B^k, S^{k-1}).$$

2.5 OPERADORES DE FREDHOLM

Nesta seção apresentaremos os principais conceitos e propriedades acerca dos operadores de Fredholm. Essa classe de operadores desempenham um papel fundamental em nosso trabalho, pois para esta classe adicionada algumas hipóteses, poderemos garantir a existência e multiplicidade de pontos críticos.

Definição 2.77. Seja $L : V \rightarrow V'$ uma aplicação linear. Definimos o *núcleo* de L como sendo o subespaço de V dado por $\ker(V) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$.

Definição 2.78. Seja $L : V \rightarrow V'$ uma aplicação linear. Definimos o *conúcleo* de L como o subespaço $\frac{V}{\overline{\operatorname{im}(L)}}$.

Definição 2.79. Um operador $L : V \rightarrow V'$ é dito um *operador de Fredholm* se este tiver núcleo e conúcleo de dimensão finita.

Definição 2.80. Sejam V e V' espaços de Banach e $L : V \rightarrow V'$ um operador linear. Dizemos que L é um *operador compacto* se dado H um conjunto limitado em V então $L(H)$ é um conjunto pré-compacto em V' , isto é, se para todo $H \subset V$ limitado implicar que $\overline{L(H)} \subset V'$ for compacto. De forma equivalente, L é uma aplicação compacta se para toda sequência limitada $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, possuir uma subsequência tal que $(L(u_{m_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ for uma sequência convergente.

No caso em que $V = V'$, os operadores da forma $Id - L$, onde L um operador compacto, são operadores de Fredholm.

Proposição 2.81 (Alternativa de Fredholm - (BREZIS, 2010), p. 160). *Sejam V um espaço de Banach e $L : V \rightarrow V$ um operador compacto. Então*

- i) $\ker(Id - L)$ tem dimensão finita;
- ii) $\operatorname{im}(Id - L)$ é fechado em V e $\operatorname{im}(Id - T) = \ker(Id - T^*)^\perp$;
- iii) $\ker(Id - T) = \{0\}$ se, e somente se, $\operatorname{im}(Id - T) = E$;
- iv) $\dim(\ker(Id - T)) = \dim(\ker(Id - T^*))$.

3 TEORIA DE MORSE

Neste capítulo, abordaremos resultados gerais da Teoria de Morse em espaços de dimensão finita e infinita, buscando relacionar a topologia do espaço com a existência de pontos críticos. Para tal, utilizamos como referência principalmente (MAWHIN; WILLEM, 1989), (CHANG, 1993) e (DAMASCELLI; PACELLA, 2010).

3.1 TEORIA DE MORSE EM DIMENSÃO FINITA

A Teoria de Morse a qual apresentaremos nessa seção visa estabelecer a relação entre os pontos críticos de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e a topologia da variedade diferenciável M . Embora nosso trabalho e suas aplicações estejam consolidados na Teoria de Morse em dimensão infinita, apresentaremos este primeiro tópico com objetivo de promover uma ideia intuitiva dos conceitos abordados no caso de dimensão infinita. Desta forma, os primeiros conceitos a serem apresentados a seguir, buscam elencar os primeiros tópicos da Teoria de Morse em dimensão finita.

Definição 3.1. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão N e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional $\mathcal{C}^\infty$. Um ponto $\bar{x} \in M$ é dito *ponto crítico* de f se existe um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_N)$ em uma vizinhança U de $\bar{x}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0$$

para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Em outras palavras, isto significa que o mapa derivada

$$f' : T_{\bar{x}}M \rightarrow T_{f(\bar{x})}\mathbb{R}$$

do espaço tangente no ponto $\bar{x}$ é zero.

Associada a definição de ponto crítico, podemos apresentar abaixo a definição de valor crítico e valor regular da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 3.2. Um número $c \in \mathbb{R}$ é dito um *valor crítico* de f se $f^{-1}(c)$ contém ao menos um ponto crítico. Caso contrário, dizemos que c é um valor regular.

Exemplo 3.3. Como exemplo dos conceitos apresentados acima, considere $M = \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Note que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, o

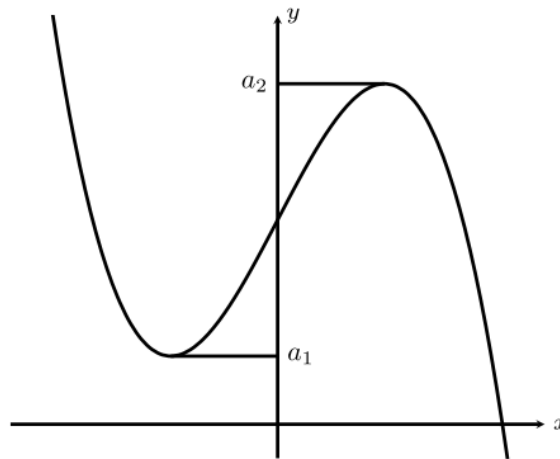
que implica dizer que $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é o único ponto crítico de f . Além disso, para cada $c \in \mathbb{R}$, temos que $f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$. Portanto,

- Se $c < 0$ temos que $f^{-1}(c) = \emptyset$;
- Se $c = 0$, temos que $f^{-1}(c) = \{(0, 0)\}$, o que implica dizer que $c = 0$ é valor crítico de f ;
- Se $c > 0$, $f^{-1}(c)$ é o círculo de raio c centrado na origem, além disso, neste caso temos que c é um valor regular de f .

Abaixo, apresentaremos alguns exemplos de como os pontos críticos influenciam na topologia do espaço M .

Exemplo 3.4. Considere $M = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com apenas dois valores críticos, digamos $a_1 < a_2$, correspondentes a um mínimo e um máximo local, respectivamente.

Figura 1 — Representação gráfica de uma função com dois pontos críticos.



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Considere o subnível:

$$f^a = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$$

Note que,

- Se $a \leq a_1$, então f^a é uma semirreta;
- Se $a \in (a_1, a_2)$, então f^a é a união de segmentos e é uma semirreta;

- Se $a > a_2$, então f^a também é uma semirreta.

Isto quer dizer que a topologia de f^a muda ao cruzarmos valores críticos.

Outro exemplo mais explícito da mudança de topologia, ocorrerá abaixo.

Exemplo 3.5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$. Note que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, isto implica dizer que $P = (0, 0)$ é o único ponto crítico de f , associado ao valor crítico $f(P) = 0$. Seja então $\varepsilon > 0$, consideremos então os subníveis

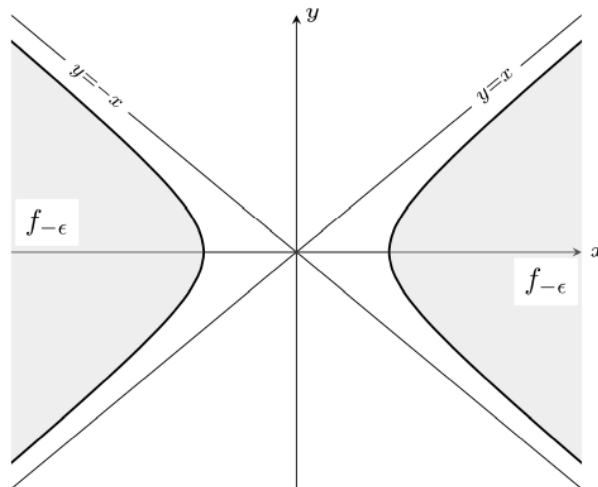
$$f^{-\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq -\varepsilon\}$$

e

$$f^{\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq \varepsilon\}$$

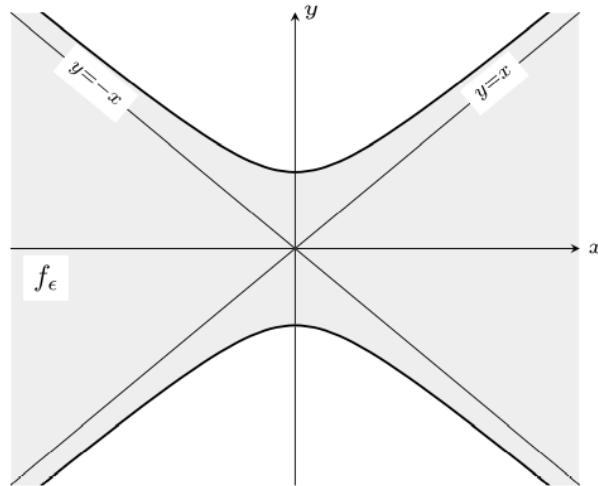
A representação geométrica destes conjuntos em $\mathbb{R}^2$, é dada por

Figura 2 – Subnível $f^{-\varepsilon}$ de $f(x, y) = y^2 - x^2$



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Figura 3 – Subnível f^ε de $f(x, y) = y^2 - x^2$

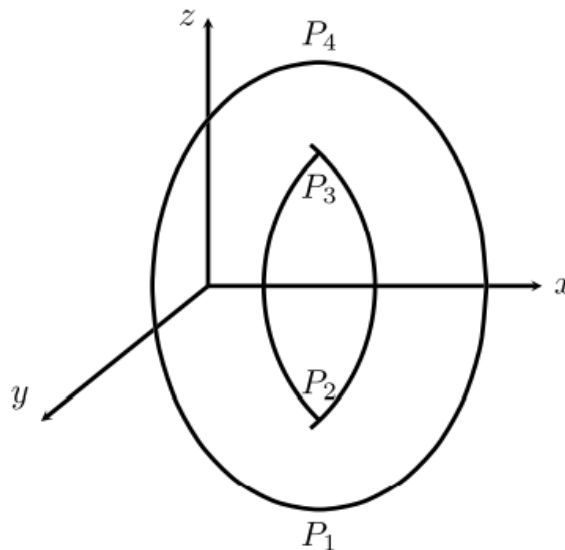


Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Observe que estes subníveis possuem diferentes propriedades topológicas, uma vez que $f^{-\varepsilon}$ não é conexo, enquanto f^ε é conexo. Neste caso, o valor crítico $0 = f(0, 0)$ é tal que $0 \in f^\varepsilon$ e $0 \notin f^{-\varepsilon}$. O que mais uma vez destaca a diferença nas propriedades topológicas que ocorre nos subníveis sob a presença ou não de valores críticos.

Exemplo 3.6. Seja $T \subset \mathbb{R}^3$ o Toro sobre plano (x, y) , usando (x, y, z) como sistema de coordenadas. Consideremos a função $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z$, que possui 4 pontos críticos P_1, P_2, P_3 e P_4 correspondente aos valores críticos $0 = z_1 < z_2 < z_3 < z_4$.

Figura 4 – Pontos críticos de $f(x, y, z) = z$, no Toro



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Consideremos então os subníveis

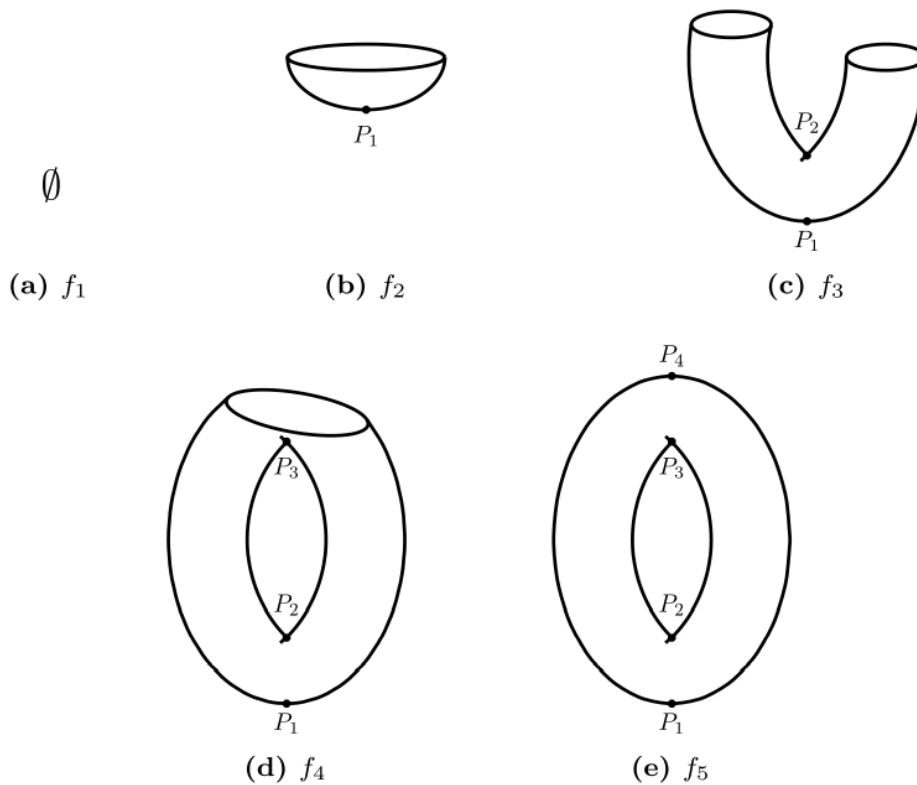
$$f^i = \{(x, y, z) \in T \mid z \leq a < z_i, i = 1, 2, 3, 4\}$$

e

$$f^5 = \{(x, y, z) \in T \mid z \leq a, a > z_4\},$$

descritos nas figuras abaixo

Figura 5 – Subníveis no Toro



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

É claro que estes conjuntos não possuem o mesmo tipo de homotopia. De fato, f^1 é o conjunto vazio, f^2 é homeomorfo a um disco, f^3 é homeomorfo a um cilindro, f^4 é homeomorfo a uma variedade compacta possuindo um círculo como fronteira e, por fim, f^5 é o toro completo. Isto ressalta mais uma vez que, a topologia dos subníveis muda a depender dos pontos críticos da função f .

3.1.1 Lema de Morse e teoremas de deformação

Nesta seção introduziremos os primeiros resultados da Teoria de Morse neste trabalho que são: o Lema de Morse e teoremas de deformação. Para boa compreensão do leitor acerca dos

resultados a serem apresentados, se faz necessário elencar os conceitos preliminares abaixo.

Definição 3.7. Um ponto crítico $\bar{x}$ de f em uma variedade M é dito *não degenerado* se a matriz Hessiana

$$Hess(\bar{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad i, j = 1, \dots, N$$

em um sistema local de coordenadas é não singular (isto é, $\det(Hess(\bar{x})) \neq 0$). Esta definição não depende do sistema de coordenadas, e portanto podemos definir o Hessiano da função f como a seguinte forma bilinear:

$$f_{**}(v, w) = V(w(f)) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$$

para todos $v, w \in T_{\bar{x}}M$ e o sistema de coordenadas $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{x}), w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{x})$.

Associada a definição da forma bilinear acima, podemos apresentar o seguinte conceito

Definição 3.8. Seja $\bar{x}$ um ponto crítico da função f . O *índice de Morse* de $\bar{x}$ é a dimensão do subespaço de $T_{\bar{x}}M$ tal que a forma bilinear f_{**} é negativa definida, isto é, o número de autovalores negativos da matriz $Hess(\bar{x})$.

O próximo resultado, conhecido como Lema de Morse, busca descrever f como um polinômio quadrático em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado $\bar{x}$, através do seu índice de Morse.

Lema 3.9. (*Lema de Morse*) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão N e seja $\bar{x}$ um ponto crítico não degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, funcional diferenciável. Se k é o índice de Morse de $\bar{x}$, então existe um sistema de coordenadas local $(y_1, \dots, y_N)$ em uma vizinhança U de $\bar{x}$, isto é, uma carta local $\varphi : U \rightarrow V$, onde V é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^N$, tal que*

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(0) = \bar{x} \\ f(\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_N)) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^N y_i^2. \end{cases}$$

Demonstração: Sem perda de generalidade vamos assumir que $f(\bar{x}) = 0$, pois do contrário poderíamos definir $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p = 0$. Considere agora a função $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ definida por $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_N)$, onde $(x_1, \dots, x_N)$ é fixado. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_0^1 (f \circ \gamma(t))' dt = (f \circ \gamma(1)) = f(x_1, \dots, x_N).$$

Além disso, note que

$$(f \circ \gamma(t))' = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_N) x_i. \quad (3.1)$$

Aplicando essa mesma ideia às funções $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, seguem as igualdades

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_N) x_i \\ &= \sum \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) x_i x_j \right] x_i x_j \\ &= \sum h_{ij}(\bar{x}) x_i x_j. \end{aligned}$$

Supondo que $h_{ij} = h_{ji}$, pois do contrário basta definir $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}[h_{ij} + h_{ji}]$, temos que Usando a diagonalização da forma quadrática e o fato da matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(0)$ ser não singular, pois $\bar{x}$ é não degenerado, vamos construir um novo sistema de coordenadas não singular que satisfaça o resultado desejado. Diagonalizando a matriz $Hess(0)$, sendo esta não degenerada, vamos assumir que $h_{11}(0) \neq 0$, de forma que em uma vizinhança da origem, tenhamos

$$f(x) = h_{11} \left[x_1^2 + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \frac{h_{ij}(x)}{h_{11}} x_i x_j \right].$$

Vamos então introduzir as coordenadas,

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}|} \left[x_1 + \sum_{r \neq 1} \frac{h_{1r}}{h_{11}} x_r \right], \quad y_r = x_r \text{ para } r \neq 1.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, este é um sistema regular de coordenadas e

$$f = y_1^2 + \sum_{i,j > 1} y_i y_j H'_{i,j}(y_1, \dots, y_n).$$

Repetindo o processo indutivamente, chegamos ao resultado desejado. ■

Como consequência do Lema de Morse, temos que os pontos críticos não degenerados de uma função f de classe $\mathcal{C}^2$, são isolados, como segue o resultado abaixo

Corolário 3.10. *Os pontos críticos não degenerados de uma função $f \in \mathcal{C}^2(M)$ são isolados no conjunto $K = \{\bar{x} \in M \mid \bar{x} \text{ é ponto crítico de } f\}$.*

Demonstração: Seja $\bar{x}$ um ponto crítico não degenerado. Para mostrarmos que $\bar{x}$ é isolado em K , devemos mostrar que existe uma vizinhança X de $\bar{x}$ tal que $X \cap K = \{\bar{x}\}$.

Pelo Lema de Morse, sabemos que existe uma carta local $\varphi : U \rightarrow V$, de forma que

$$(f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_N) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^N y_i^2.$$

Observe que, sendo $f = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$, pela regra da cadeia, temos que $df|_{\bar{x}} = d(f \circ \varphi^{-1})d\varphi$. Desta forma, como $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo, basta determinarmos os pontos críticos de $f \circ \varphi^{-1}$. Seja então $y = (y_1, \dots, y_N) \in V$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y_i} &= 2y_i, \text{ se } 1 \leq i \leq k \\ \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y_i} &= -2y_i, \text{ se } k+1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Assim, se y é ponto crítico de $f \circ \varphi^{-1}$, devemos ter que $y_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, isto é, $y = 0$. A condição $\varphi^{-1}(0) = \bar{x}$, nos diz que $\varphi^{-1}(V) \cap K = \{\bar{x}\}$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 3.11. As funções de classe $\mathcal{C}^2(M)$ que possuem apenas pontos críticos não degenerados são chamadas de *funções de Morse*.

Pode-se mostrar ainda que o conjunto das funções de Morse forma um conjunto aberto e denso em $\mathcal{C}^2(M)$ com respeito a topologia induzida pela métrica.

Agora, vamos introduzir dois teoremas de deformação cujo objetivo é estudarmos as propriedades dos subníveis de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para tal, vamos apresentar a seguinte definição:

Definição 3.12. Um *grupo de difeomorfismo 1-parâmetro* em uma variedade M é um mapa $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que

- i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, o mapa $\varphi_t : M \rightarrow M$ dado por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ é um difeomorfismo de M em si mesmo;
- ii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$.

Lembremos que um campo vetorial em M é um campo $v : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ v : M \rightarrow M$ é a identidade, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção do fibrado tangente TM .

Para um dado campo v em M , considere a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v(\eta(t)) \tag{3.2}$$

com a condição inicial $\eta(0) = x$, para todo $x \in M$. Aplicando a teoria de equações diferenciais ordinárias, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.13. *Um campo vetorial de classe C^1 que se anula fora de um compacto contido em M , gera um único grupo de difeomorfismo 1-parâmetro $\varphi_t(x)$ em M , tal que $\varphi_t(x)$ é solução de (3.2) com a condição inicial $\eta(0) = x$, para todo $x \in M$, no tempo t .*

A demonstração do resultado acima será omitida no corpo deste trabalho por se tratar que algo que foge o objetivo do mesmo. Porém, este será necessário para demonstrar o Primeiro Teorema de Deformação a seguir.

Teorema 3.14. *[Primeiro Teorema de Deformação] Seja f uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Se $f^{-1}([a, b]) \subset M$ é compacto e não contém nenhum ponto crítico de f , então o subnível f^a é um retrato de deformação de f^b .*

Demonstração: Primeiramente, note que $f^a \subset f^b$, pois como $a < b$ temos que se $x \in f^a$ então $f(x) \leq a < b$ o que implica dizer que $x \in f^b$. Portanto, faz sentido considerar a aplicação inclusão $i : f^a \rightarrow f^b$. Além disso, sabemos que usando uma partição de unidade é possível construir em cada variedade diferenciável compacta uma métrica Riemanniana, ou seja, uma forma bilinear simétrica positiva definida diferenciável nos vetores tangentes. Isto introduz a noção de produto escalar em $T_x M$. Para todo $x \in M$ vamos usar a notação $\langle v, w \rangle$ para dois vetores tangentes v e w .

Vamos considerar o campo vetorial $\text{grad}(f)$ em M caracterizado pela identidade:

$$\langle v, \text{grad}(f) \rangle,$$

isto é, a derivada direcional na direção do vetor v . É óbvio que este campo vetorial é nulo apenas nos pontos críticos de f . Vamos então definir o mapa $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}, & \text{em } f^{-1}([a, b]), \\ 0, & \text{fora de } f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Observe que este mapa está bem definido, pois $f^{-1}([a, b])$ não contém pontos críticos de f . Vamos definir então o campo $v = \rho \cdot \text{grad}(f)$. Note que v satisfaz as hipóteses do Teorema 3.14, pois v se anula fora do compacto $f^{-1}([a, b])$, pela definição de ρ e portanto, gera um grupo de difeomorfismos 1-parâmetro $\varphi_t : M \rightarrow M$. Como φ_t é solução da equação (3.2), temos que $\frac{d(\varphi_t)}{dt} = v(\varphi_t)$.

Seja então $f \circ \varphi_t : M \rightarrow \mathbb{R}$. Note que $f(\varphi_t(x)) = f(\varphi(t, x))$. Portanto, temos que

$$\frac{df}{dt}(\varphi_t) = \left\langle \frac{d(\varphi_t)}{dt}, \text{grad}(f) \right\rangle = \langle v(\varphi_t(x), \text{grad}(f)) \rangle = \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle} = 1$$

em $f^{-1}([a, b])$. Daí, o mapa $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ é linear, pois integrando $\frac{df}{dt}(\varphi_t) = 1$, obtemos $f(\varphi_t(x)) = t + c$. Além disso, o difeomorfismo $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ leva f^a em f^b . Assim, a família de mapas $r_t : f^b \rightarrow f^a$ definidos por

$$r_t(x) = \begin{cases} x, & \text{se } f(x) \leq a, \\ \varphi_{t \cdot (a-f(x))}(x), & \text{se } f(x) \in [a, b], \end{cases}$$

é um retrato de deformação de f^b em f^a , uma vez que r_0 é a identidade e $r_1 = f^a$. ■

Nosso objetivo agora é elencar os pré-requisitos necessários para compreensão do segundo Teorema de deformação, como segue abaixo.

Vamos denotar por B_k a bola k -dimensional centrada na origem, isto é, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 < 1 \text{ e } x_{k+1} = \dots = x_N = 0\}$, e no contexto dessa seção iremos chamar B_k de k -célula. A operação de anexar a k -célula a um espaço topológico Y será descrita abaixo: Vamos considerar a função $g : \overline{\partial B_k} \rightarrow X$ que é um homeomorfismo em sua imagem. O espaço topológico obtido pela união de Y com a k -célula fechada $\overline{B_k}$ é uma relação de equivalência identificada da seguinte forma: para cada $x \in \overline{\partial B_k}$ sua imagem $g(x) \in Y$ e vamos denotar por $Y \cup_g B_k$ (Y está anexada a k -célula B_k).

O próximo teorema descreve a topologia dos subníveis de f enquanto atravessa um ponto crítico não degenerado.

Teorema 3.15. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional diferenciável e $\bar{x}$ um ponto crítico não degenerado correspondente ao valor crítico $c = f(\bar{x})$. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ é compacto e não tem pontos críticos além de $\bar{x}$, então $f^{c+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $f^{c-\varepsilon}$ com uma k -célula anexada.*

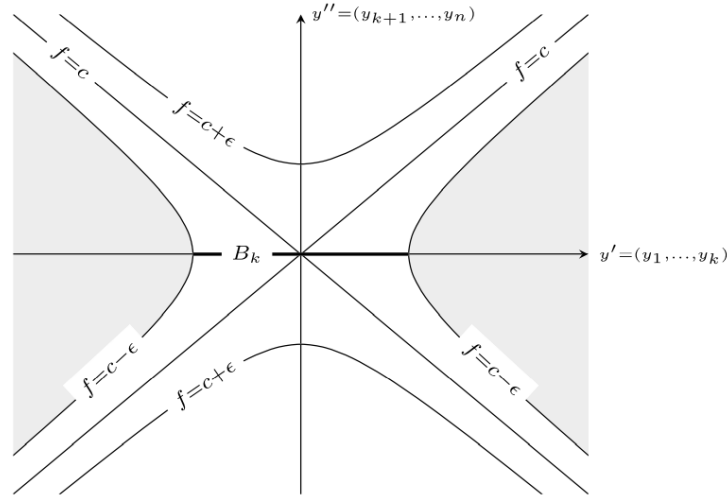
Demonstração: Pelo Lema de Morse, temos que existe uma vizinhança U de $\bar{x}$ e um sistema de coordenadas local $(y_1, \dots, y_N)$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^N y_i^2 \quad (3.3)$$

para todo $x \in U$, e $y_1(\bar{x}) = \dots = y_N(\bar{x}) = 0$. Por hipótese, temos que existe $\varepsilon > 0$, tal que $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ é compacto e contém apenas o ponto crítico $\bar{x}$. Observe também, que

$\varepsilon > 0$, pode ser tomado de forma que U é difeomorfo a uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^N$ e contém a bola $B[0, \varepsilon] = \left\{ (y_1, \dots, y_N) \mid \sum_{i=1}^k y_i^2 \leq \varepsilon \text{ e } y_{k+1} = \dots = y_N = 0 \right\}$. Para tal, basta tomar este $\varepsilon > 0$, como sendo o menor entre o $\varepsilon > 0$ da hipótese e o do Lema de Morse. A ilustração desta situação é dada por:

Figura 6 – K-célula



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Observe então que a interseção $B_k \cap f^{c-\varepsilon}$ é justamente ∂B_k , de forma que $f^{c-\varepsilon}$ é uma k -célula atratora.

Gostaríamos de provar que $f^{c-\varepsilon} \cup_g B_k$, onde g é o mapa de colagem, é um retrato de deformação de $f^{c+\varepsilon}$. Para isto, vamos construir uma nova função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ que coincida com f na vizinhança de U e fora de U é definida por

$$F = f - \mu \left(\sum_{i=1}^k y_i^2 + 2 \sum_{i=k+1}^N y_i^2 \right), \quad (3.4)$$

onde $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função diferenciável, tal que

$$\mu(0) > \varepsilon, \quad \mu(r) = 0, \quad \text{se } r \geq 2\varepsilon \quad \text{e} \quad -1 < \mu'(r) \leq 0, \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar então que os subníveis $f^{c+\varepsilon}$ e $F^{c+\varepsilon}$ são os mesmos. Para tal, observe que fora do elipsoide $E = \left\{ \sum_{i=1}^k y_i^2 + 2 \sum_{i=k+1}^N y_i^2 \leq 2\varepsilon \right\}$, temos que $F = f$, pois $\mu(r) = 0$, para todo $r \geq 2\varepsilon$. Basta analisarmos então dentro do elipsoide E , neste caso observe que, como μ

é positiva, segue que $F \leq f$, além disso, pelo Lema de Morse, sendo $c = f(\bar{x})$, temos que

$$\begin{aligned} F &\leq f = c - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^N y_i^2 \\ &\leq c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^N y_i^2 \\ &\leq c + \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto nos diz que, dentro do elipsoide E , tanto a f quanto a F são limitadas superiormente por $c + \varepsilon$, ou seja, $F^{c+\varepsilon} \cap E = f^{c+\varepsilon} \cap E$. Como fora do elipsoide E , as funções F e f coincidem, temos que $F^{c+\varepsilon} \cap E^c = f^{c+\varepsilon} \cap E^c$, desta forma, temos que $F^{c+\varepsilon} = f^{c+\varepsilon}$.

Além disso, a função f e F possui os mesmos pontos críticos. De fato, tomando $\xi = \sum_{i=1}^k y_i^2$ e $\eta = \sum_{i=k+1}^N y_i^2$, temos que $f = c - \xi + \eta$. Derivando F com relação a ξ , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi}. \quad (3.5)$$

Porém, note que

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial(c - \xi + \eta)}{\partial \xi} = -1. \quad (3.6)$$

E, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi} = \mu'(\xi + 2\eta) \frac{\partial(\xi + 2\eta)}{\partial \xi} = \mu'(\xi + 2\eta) \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = \mu'(\xi + 2\eta). \quad (3.7)$$

Por, (3.5), (3.6) e (3.7), e sendo $\mu'(r) \leq 0$, para todo $r \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0. \quad (3.8)$$

Sendo $\mu'(r) > -1$, temos que $-2\mu'(r) < 2$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Desta forma, um argumento análogo ao utilizado acima, nos diz que

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1, \quad (3.9)$$

ou seja, as derivadas parciais de F com relação a ξ e a η nunca se anulam. Mas, pela regra da cadeia, observe que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta. \quad (3.10)$$

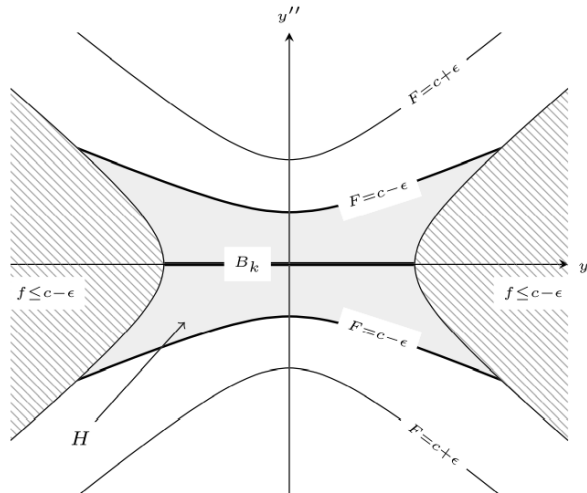
Isto nos diz que $dF = 0$, quando $d\xi = d\eta = 0$, o que só acontece na origem. Logo, temos que F não contém pontos críticos em U diferentes de $\bar{x}$. Além disso, sabemos que $f^{c+\varepsilon} = F^{c+\varepsilon}$ e que

$F \leq f$, portanto $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Consequentemente, $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ é fechado, por ser imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, dentro de um compacto, logo este é compacto. Ainda, note que $F(\bar{x}) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$, portanto $\bar{x} \notin F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Concluimos então que $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ é um compacto que não contém pontos críticos de F , logo pelo Teorema 3.14, temos que $F^{c-\varepsilon}$ é um retrato de deformação de $F^{c+\varepsilon} = f^{c+\varepsilon}$.

De forma intuitiva, observe que não poderíamos aplicar o Teorema 3.14 diretamente a f , pois $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ contém o ponto crítico $\bar{x}$. Assim, o que fizemos foi construir uma função F de modo que ela tenha os mesmos pontos críticos de f , $f^{c+\varepsilon} = F^{c+\varepsilon}$ e, além disso, a função atende as hipóteses do Teorema 3.14.

Para finalizar, vamos mostrar que $F^{c-\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $f^{c-\varepsilon} \cup_g B_k$. Para tal, observe que, $F^{c-\varepsilon} = f^{c-\varepsilon} \cup H$, onde $H = \overline{F^{c-\varepsilon}} \setminus f^{c-\varepsilon}$. Esta situação está ilustrada na figura abaixo:

Figura 7 – Anexando uma K-célula ao subnível



Fonte: (DAMASCELLI; PACELLA 2010)

Vamos definir então a retração r_t de $f^{c-\varepsilon} \cup H$ em $f^{c-\varepsilon} \cup_g B_k$ da seguinte forma:

i) $r_t(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_k, ty_{k+1}, \dots, ty_N)$, se $\xi \leq \varepsilon$. Daí, observe que se $t = 1$, então $r_1 \equiv Id$, r_0 mapeia o conjunto $\{\xi \leq \varepsilon\}$ em B_k e $r_t(F^{c-\varepsilon}) \subset F^{c-\varepsilon}$;

ii) $r_t(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_k, s_t y_{k+1}, \dots, s_t y_N)$, se $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$, onde

$$s_t = t + (1 - t) \left(\frac{\xi - \varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, observe que se $t = 1$, então $s_1 = 1$, portanto $r_1 \equiv Id$. Além disso, r_0 mapeia o conjunto $\{\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon\}$ no conjunto $f^{-1}(c - \varepsilon)$, e para $\varepsilon = \xi$, basta definir r_t como em i);

iii) $r_t(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_N)$, se $\xi \leq \eta + \varepsilon$. Além disso, se $\xi = \eta + \varepsilon$, temos que r_t é como em ii).

Assim, por definição, temos que r_t mapeia o conjunto $F^{c-\varepsilon} = f^{c-\varepsilon} \cup H$ em $f^{c-\varepsilon} \cup_g B_k$, como queríamos demonstrar. ■

3.1.2 Polinômio de Morse

Nesta seção, introduziremos o polinômio de Morse e as desigualdades de Morse.

Definição 3.16. Seja (A, B) um par topológico. Definimos o *número de Betti* de (A, B) como

$$B_q(A, B) = \text{rank} H_q(A, B), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Dado um par topológico (A, B) podemos associar a este par um polinômio, conhecido como polinômio de Poincaré como vemos abaixo.

Definição 3.17. O *polinômio de Poincaré* do par (A, B) é definido como

$$\mathcal{P}_t(A, B) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(A, B) \cdot t^i.$$

Vamos considerar agora a série formal dada por:

$$q_t(X, Y, Z) = \sum_{i \geq 1} d_i(X, Y, Z) \cdot t_i,$$

onde $d_i(X, Y, Z)$ denota o *rank* da imagem do operador de fronteira ∂_i . Podemos relacionar estes polinômios da seguinte forma:

Lema 3.18. *Seja $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$, uma sequência de $n + 1$ espaços topológicos compactos. Então,*

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{P}_t(X_j, X_{j-1}) = \mathcal{P}_t(X_n, X_0) + (1+t)Q(t),$$

onde $Q_t = \sum_{j=2}^n q_t(X_j, X_{j-1}, X_0)$, é um polinômio com coeficientes inteiros não negativos.

Demonstração: Para fixarmos as ideias, consideremos o caso em que $n = 2$. Seja então $X_0 \subset X_1 \subset X_2$. Vamos considerar as aplicações inclusão $i : (X_0, X_2) \rightarrow (X_1, X_2)$ e $j : (X_0, X_1) \rightarrow (X_0, X_2)$, bem como suas aplicações induzidas i_* e j_* . Seja $d_q(X_0, X_1, X_2)$ o *rank* da imagem de ∂_q . Pela propriedade da exatidão (2.66), temos que

$$\begin{aligned} B_q(X_0, X_1) &= \text{rank}(\text{im}(j_q^*)) + d_q(X_0, X_1, X_2) \\ B_q(X_1, X_2) &= d_{q+1}(X_0, X_1, X_2) + \text{rank}(\text{im}(i_q^*)) \\ B_q(X_0, X_2) &= \text{rank}(\text{im}(j_q^*)) + \text{rank}(\text{im}(i_q^*)). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$B_q(X_0, X_1) + B_q(X_1, X_2) = B_q(X_0, X_2) + d_q(X_0, X_1, X_2) + d_{q+1}(X_0, X_1, X_2). \quad (3.11)$$

Multiplicando a equação (3.11) por t^r e somando para todo r , obtemos que

$$\mathcal{P}_t(X_0, X_1) + \mathcal{P}_t(X_1, X_2) = \mathcal{P}_t(X_0, X_2) + (1+t)Q_t, \quad (3.12)$$

uma vez que $d_0(X_0, X_1, X_2) = 0$.

Para o caso geral, consideremos uma tripla da forma (X_j, X_{j-1}, X_0) , $j \geq 2$. Desta forma, temos que

$$\mathcal{P}_t(X_j, X_{j-1}) + \mathcal{P}_t(X_{j-1}, X_0) = \mathcal{P}_t(X_j, X_0) + (1+t)q_t(X_j, X_{j-1}, X_0). \quad (3.13)$$

Somando para $j \geq 2$, obtemos o resultado. ■

Para o próximo resultado, precisamos de uma propriedade de homologia do par (X, Y) que o relaciona com a homologia do espaço quociente X/Y obtido identificando Y apenas com um ponto $y_0 \in Y$. Mais precisamente

Proposição 3.19. *Assuma que o par (X, Y) satisfaz:*

i) X é um espaço de Hausdorff;

ii) Y é fechado em X ;

iii) Para todo $x \in X/Y$ existem conjuntos abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $Y \subset V$;

iv) Existe uma vizinhança aberta I de Y tal que Y é um retrato de deformação de I e $I \neq Y$.

Então $H_q(X, Y) \simeq H_q(X/Y) = H_q(X/Y, \emptyset)$ para todo $q > 0$ e $H_0(X, Y) = H_0^\#(X, Y)$, onde:

$$H_0^\#(X, Y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } X/Y \text{ é conexo;} \\ \text{É um grupo abeliano livre com } (r-1) \text{ geradores de } X/Y \\ \text{se este tem } r \text{ componentes conexas.} \end{cases}$$

Exemplo 3.20. Como exemplo de um par topológico satisfazendo as condições i) – iv) temos o par $(B_k, \partial B_k)$, onde $B_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$. Para ver isto, note primeiramente que B_k é um espaço de Hausdorff pois é um espaço métrico. Agora, observe que ∂B_k é fechado em B_k pois $(\partial B_k)^c$ em B_k é a bola aberta $B(0, 1)$, portanto a condição ii) é satisfeita. Para vermos iii), seja $x \in B_k / \partial B_k$, isto quer dizer que $x \in \text{int}(B_k) = B(0, 1)$, e sendo este um conjunto aberto, existe $0 < r < 1$, tal que $B(x, r) \subset B(0, 1)$. Tome então δ , tal que, $0 < r < \delta < 1$ e observe que $B(x, \delta) \supset B(x, r)$. Considere então $V = (B(x, \delta))^c$, sendo $B = B[x, \delta] \subset \mathbb{R}^k$, temos que B é fechada e, além disso, $V \cap B(x, r) = \emptyset$. O item iv) é imediato da definição.

Vamos considerar agora uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, onde M é uma variedade compacta. Sejam $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, números reais de forma que $f^{a_0} = \emptyset$, $f^{a_n} = M$ e f^{a_i} contenha exatamente i pontos críticos, cada um sendo o único no conjunto $f^{a_i} \setminus f^{a_{i-1}}$. Pelo Teorema 3.15 e pela observação 2.76, temos que

$$H_q(f^{a_i}, f^{a_{i-1}}) \cong H_q(f^{a_{i-1}} \cup_g B_{\lambda_i}, f^{a_i}) \cong H_q(B_{\lambda_i}, \partial B_{\lambda_i}) \simeq \delta_{q, \lambda_i} \mathbb{Z},$$

onde λ_i é o índice de Morse do único ponto crítico em $f^{a_i} \setminus f^{a_{i-1}}$. Portanto, temos que o polinômio de Poincaré do par $(f^a, f^{a_{i-1}})$ é dado por

$$\mathcal{P}_t(f^a, f^{a_{i-1}}) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(f^a, f^{a_{i-1}}) t^i = t^{\lambda_i}, \quad (3.14)$$

pois $B_i(f^a, f^{a_{i-1}}) = \text{rank } H_q(f^a, f^{a_{i-1}}) = 0$, se $i \neq \lambda_i$ e $B_i(f^a, f^{a_{i-1}}) = 1$, quando $i = \lambda_i$. Aplicando o Lema 3.18 a sequência $\emptyset = f^{a_0} \subset \dots \subset f^{a_n} = M$, obtemos que

$$\sum_{i=1}^n t^{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_t(f^{a_i}, f^{a_{i-1}}) = \mathcal{P}_t(M, \emptyset) + (1+t)Q_t.$$

Generalizando este processo para o caso de mais de um ponto crítico correspondente ao mesmo valor crítico, obtemos que

$$\mathcal{P}_t(M) = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i = \sum_{i=0}^m B_i(M) t^i + (1+t)Q_t,$$

onde α_i é o número de pontos críticos de f com índice de Morse i .

Definição 3.21. O polinômio

$$\mathcal{P}_t(M) = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$$

é chamado de *polinômio de Morse de f* .

Além disso, observemos que $\alpha_i \geq B_i(M)$, isto é, em uma variedade compacta M , a função f possui pelo menos $B_i(M)$ pontos críticos. O que estabelece a *desigualdade de Morse*.

3.2 TEORIA DE MORSE EM DIMENSÃO INFINITA

Nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos e ferramentas da Teoria de Morse em variedades de dimensão infinita. Alguns dos resultados e definições aqui apresentadas, nada mais são, que generalizações de certos resultados vistos no caso de dimensão finita, outros são novidades que dimensões infinitas podem nos proporcionar. Desta forma, vamos iniciar nossa trajetória abordando o conceito de índice de Morse e grupos críticos, como segue abaixo.

3.2.1 Índice de Morse e Grupos críticos

A Teoria de Morse básica para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, onde M é uma variedade de Hilbert $\mathcal{C}^2$, está baseada em duas vertentes:

- i) Um estudo local do comportamento da função f em uma vizinhança de seus pontos críticos, através dos grupos críticos;

- ii) Um estudo global que se concentra na relação entre alguns números (números de Morse) relacionados ao número de pontos críticos de f e às propriedades topológicas da variedade subjacente.

O que faremos então, será abordar um pouco dessas duas vertentes no decorrer deste capítulo. Em analogia ao caso de dimensão finita, temos a seguinte definição para o índice de Morse:

Definição 3.22. O *índice de Morse* de um ponto crítico u de f é a dimensão máxima do subespaço V de H tal que a forma bilinear

$$B(v, w) = (f \circ x^{-1})''(x(u))(v, w)$$

é negativa definida, isto é, $B(v, v) < 0$, para todo $v \in V$, onde x é uma carta de u . Se M é todo o espaço de Hilbert, então o índice de Morse de u é apenas a dimensão máxima de um subespaço de H em que $f''(u)$ é negativa definida.

Observe que para cada ponto crítico u de f temos um índice de Morse, ou seja, o índice de Morse está intimamente ligado a existência de pontos críticos.

Definição 3.23. A *nulidade* de um ponto crítico u é definida como

$$\sup\{\dim(A) \mid A \subset M \text{ e } B|_A = 0\},$$

isto é, a dimensão máxima do subespaço A de M tal que $B(v, v) = 0$ para todo $v \in A$.

Definição 3.24. Um ponto crítico u é dito *não degenerado* se o operador linear auto-adjunto

$$L : H \rightarrow H^* \simeq H \text{ (representação de Riesz),}$$

definido por

$$B(v, w) = \langle L(v), w \rangle_H$$

para todo $v, w \in H$, for invertível. Note que pela regra da cadeia, a definição acima independe da escolha da carta x . Além disso, pelo Teorema da Função Implícita, todo ponto crítico não degenerado é isolado. Frequentemente, identifica-se $L = f''(u)$.

Agora, vamos definir os grupos críticos de um ponto crítico isolado e mostraremos sua relação com o índice de Morse.

Definição 3.25. Seja u um ponto crítico isolado de f e seja $c = f(u)$. Vamos definir

$$C_q(f, u) = H_q(f^c \cap U, f^c \cap U \setminus \{u\}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

o q -th grupo crítico de f em u , onde U é uma vizinhança que não contém outros pontos críticos e $H_q(,)$ denota o q -ésimo grupo de homologia sobre um campo G .

Proposição 3.26. O grupo crítico independe da escolha da vizinhança de u .

Demonstração: De fato, sejam U e V duas vizinhanças fechadas de u , que não contém outros pontos críticos de f . Pela propriedade da excisão 2.68, temos que

$$\begin{aligned} H_q(f^c \cap U, f^c \cap U \setminus \{u\}) &= H_q(f^c \setminus U^c, (f^c \setminus U^c) \setminus \{u\}) \\ &\simeq H_q(f^c, f^c \setminus \{u\}) \\ &\simeq H_q(f^c \setminus V^c, (f^c \setminus V^c) \setminus \{u\}) \\ &= H_q(f^c \cap V, f^c \cap V \setminus \{u\}) \end{aligned}$$

no que segue o resultado. ■

Mostremos que para um ponto crítico não degenerado os grupos críticos dependem apenas do índice de Morse de u .

Teorema 3.27. Seja u um ponto crítico isolado de $f \in \mathcal{C}^2(M)$.

i) Se u é um ponto mínimo de f , então

$$C_q(f, u) \cong \begin{cases} G, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

ii) Se u é um ponto crítico não degenerado de índice de Morse $m(u) = k \geq 1$, então

$$C_q(f, u) \cong \begin{cases} G, & q = k, \\ 0, & q \neq k. \end{cases}$$

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que u é um ponto de mínimo local isolado de f , isto é, existe $\rho > 0$ tal que $f(u) < f(v)$, para todo $v \in B[u, \rho] \setminus \{u\}$, e defina $f(u) = c$. Note que $f^c \cap B[u, \rho] \setminus \{u\} = \emptyset$. De fato, se existisse $v \in f^c \cap B[u, \rho] \setminus \{u\}$, teríamos que

$f(v) \leq c$ e $f(v) > c$, o que é um absurdo. Além disso, é claro que $u \in f^c \cap B[u, \rho]$, pois $f(u) = c$. Assim, temos que

$$C_q(f, u) = H_q(f^c \cap B[u, \rho], f^c \cap B[u, \rho] \setminus \{u\}) = H_q(\{u\}, \emptyset) \cong \begin{cases} G, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Para o caso *ii*), seja u um ponto crítico não degenerado de f , seja x uma carta de u e B uma vizinhança fechada de u , contida no domínio de x . Por definição de grupo crítico, temos que para $c = f(u)$,

$$C_q(f, u) = H_q(f^c \cap B, f^c \cap B \setminus \{u\}),$$

e é suficiente considerar o caso em que M é um subconjunto aberto do espaço de Hilbert H .

Sabe-se do estudo da topologia algébrica que, em geral, é uma tarefa bastante complicada calcular o grupo crítico de um ponto crítico u , utilizando apenas a definição. Nosso objetivo então será deformar o par $(f^c \cap B, f^c \cap B \setminus \{u\})$, até um ambiente o qual seja possível se calcular os grupos de homologia sem tantas dificuldades. Para tal, utilizaremos o fato de que u é um ponto crítico não degenerado e, portanto, poderemos decompor o espaço de Hilbert H como a soma direta de dois subespaços convenientes.

Por simplicidade, vamos assumir que $u = f(u) = 0$. O caso em que $u \neq 0$, é análogo. Seja $L : H \rightarrow H$ o operador auto-adjunto definido por

$$\langle L(v), w \rangle = f''(0)(v, w),$$

para todo $v, w \in H$. Como $u = 0$ é um ponto crítico não degenerado, temos que L é invertível e, portanto, $H = H^+ \oplus H^-$, onde H^+ denota o espaço em que L é positivo definido e H^- denota o espaço em que L é negativo definido. Seja B uma bola de centro 0 e raio ε tão pequeno de forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$B \cap H^- \subset f^0, \quad (3.15)$$

$$B \cap H^+ \cap f^0 = \{0\}, \quad (3.16)$$

$$f''(v)(w, w) \geq 0, \quad \forall v \in B \text{ e } w \in H^+. \quad (3.17)$$

Vamos definir então:

$$\begin{aligned} \eta : [0, 1] \times B &\longrightarrow B \\ (t, v) &\longmapsto (1 - t)v + tP(v), \end{aligned}$$

onde $P : H \rightarrow H^-$, é a projeção ortogonal em H^- . Por definição, temos que para cada $v \in H^+ \oplus H^-$, existem $v^+ \in H^+$ e $v^- \in H^-$, ortogonais, tais que $v = v^+ + v^-$. Isto implica dizer que $P(v) = v^-$. Portanto, para cada $v \in B \subset H$, com $v = v^+ + v^-$, tem-se que

$$\begin{aligned}\eta(t, v) &= (1-t)v + tP(v) \\ &= (1-t)v^+ + (1-t)v^- + tv^- \\ &= (1-t)v^+ + v^- - tv^- + tv^- \\ &= (1-t)v^+ + v^-.\end{aligned}$$

Além disso, uma vez que $t \in [0, 1]$, temos que $|1-t| \leq 1$. Portanto, segue que para cada $v \in B$ e $t \in [0, 1]$

$$\|\eta(t, v)\| = \|(1-t)v^+ + v^-\| \leq |1-t| \|v^+\| + \|v^-\| \leq \|v^+\| + \|v^-\| = \|v\|.$$

Isto mostra que $\eta(t, v) \in B$ sempre que $v \in B$, ou seja, a aplicação η está bem definida. Para cada $v \in f^0 \cap B$, considere $g(t) = f(\eta(t, v))$, onde $t \in [0, 1]$. Pela regra da cadeia e por (3.17), temos que

$$g''(t) = f''((1-t)v + tP(v))((I-P)v)^2 \geq 0.$$

Como $f \in \mathcal{C}^2$, temos que g é convexa, para todo $t \in [0, 1]$. Observe também que, $g(0) = f((1-0)v + 0P(v)) = f(v) \leq 0$, se $v \in f^0$. Além disso, $g(1) = f((1-1)v + 1P(v)) = f(P(v))$. Note ainda que $P(v) = \eta(1, v) \in B$, pela boa definição de η . Portanto, como P é a projeção sobre H^- , temos que $P(v) \in B \cap H^-$, o que implica dizer, por (3.15), que $f(P(v)) \leq 0$. Concluimos então que $g(0) \leq 0$ e $g(1) \leq 0$. Desta forma, seja $t \in [0, 1]$, arbitrário. Podemos escrever $t = (1-t)0 + t1$, para todo $t \in [0, 1]$. A convexidade de g nos diz que

$$g(t) = g((1-t).0 + t.1) \leq (1-t).g(0) + tg(1) \leq 0.$$

Logo $g(t) \leq 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Isto mostra que $\eta(t, v) \in f^0$, para todo $t \in [0, 1]$, ou seja, $\eta(t, v) \in f^0 \cap B$. Além disso, se $\eta(t_0, v) = 0$ para algum $t_0 \in [0, 1]$, temos que $\eta(t_0, v) = (1-t_0)v + t_0P(v) = (1-t_0)v^+ + v^- = 0$. Como a soma é direta, $P(v) = 0$ e portanto, por (3.16) temos que $v = 0$.

Isto nos mostra que $f^0 \cap B \setminus \{0\}$ é um retrato de deformação de $H^- \cap B \setminus \{0\}$ e $f^0 \cap B$ é um retrato de deformação de $H^- \cap B$. Portanto, pela propriedade (2.70), sendo $\dim(H^-) = k$,

segue que

$$\begin{aligned}
 C_q(f, 0) &= H_q(f^0 \cap B, f^0 \cap B \setminus \{0\}) \\
 &\simeq H_q(H^- \cap B, H^- \cap B \setminus \{0\}) \\
 &\simeq H_q(B^k, S^{k-1}) \\
 &\simeq \delta_{q,k} G
 \end{aligned}$$

Onde B^k denota a k -bola e S^{k-1} sua respectiva esfera, em virtude da observação (2.76). ■

3.2.2 Desigualdade de Morse

No decorrer deste trabalho, vimos que dado um par de espaços topológicos (A, B) podemos associar a ele um q -ésimo grupo de homologia, a qual denotamos por $H_q(A, B)$. Em particular, a um par do tipo (X^b, X^a) também é possível associar tal grupo de homologia. Vimos também que dado um ponto crítico isolado de uma aplicação f , digamos u , é possível associar um grupo crítico a este ponto crítico, a qual denotamos por $C_q(f, u)$, e como bem vimos, este grupo crítico na realidade é um grupo de homologia de um par de espaços topológicos específico. De maneira geral, nota-se que um grupo crítico depende da aplicação f e do seu ponto crítico, enquanto um grupo de homologia geral, depende apenas do par de espaços a qual iremos considerar. Desta forma, nesta seção nosso objetivo será apresentar uma relação entre a dimensão do grupo de homologia de um par da forma (X^b, X^a) com a dimensão dos grupos críticos associados aos pontos críticos pertencentes a $f^{-1}([a, b]) \cap X$. Estas relações nos fornecem algumas desigualdades, que são conhecidas como desigualdades de Morse. Vamos formalizar a discussão acima com a definição abaixo.

Definição 3.28. Seja G um grupo abeliano. Dado um par de espaços (A, B) definimos o q -ésimo número de Betti de (A, B) como sendo

$$B_q(A, B) = \text{rank } H_q(A, B).$$

Quando G for um espaço vetorial, $\text{rank } H_q(A, B) = \dim H_q(A, B)$.

A partir daqui, para simplificar notações, iremos sempre supor que G é um espaço vetorial. Vale ressaltar que os resultados no caso em que G não for um espaço vetorial, seguem de forma análoga trocando $\dim$ por rank . Vamos introduzir agora, o conceito de número de Morse.

Definição 3.29. Seja $a < b$. Vamos supor que $f^{-1}([a, b]) \cap X$ possui um número finito de pontos críticos de f , o qual denotaremos por $u_1, \dots, u_j$. O *número de Morse* do par (X^b, X^a) é definido como

$$M_q(X^b, X^a) = \sum_{i=1}^j \dim C_q(f, u_i), \quad q = 0, 1, \dots$$

O próximo resultado estabelece a relação entre os números de Betti e de Morse, além disso, a partir deste podemos instaurar as desigualdades de Morse.

Teorema 3.30. *Vamos assumir que as condições do Lema 2.44 são satisfeitas. Se todo ponto crítico em $f^{-1}([a, b]) \cap X$, corresponde a um mesmo valor crítico $c \in (a, b)$, então*

$$M_q(X^b, X^a) = B_q(X^b, X^a), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração: Seja $K_c = \{u_1, \dots, u_j\}$ o conjunto dos pontos críticos de f em $f^{-1}([a, b]) \cap X$, correspondentes ao valor crítico c . Pelo Lema 2.44, temos que

$$H_q(X^b, X^a) \simeq H_q(X^c, X^a) \simeq H_q(X^c, X^c \setminus K_c). \quad (3.18)$$

Por hipótese, temos que K_c é um conjunto discreto cujo interior está contido em $f^{-1}([a, b]) \cap X$. Sendo K_c discreto, temos que para cada $u_i \in K_c$ existe uma vizinhança fechada U_i de u_i , tal que se $i \neq n$ então $U_i \cap U_n = \emptyset$. Observe também que como K_c está contido no interior de $f^{-1}([a, b]) \cap X$, temos que a vizinhança U_i pode ser tomada de forma que $U_i \subset f^{-1}([a, b]) \cap X$, para todo $i \in \{1, \dots, j\}$. Desta forma, segue que

$$U = \bigcup_{i=1}^j U_i \subset f^{-1}([a, b]) \cap X.$$

Assim, pela propriedade da excisão, da decomposição e da definição de grupos críticos, temos que

$$\begin{aligned} H_q(X^c, X^c \setminus K_c) &\simeq H_q(X^c \cap U, (X^c \setminus K_c) \cap U) \\ &= H_q(f^c \cap U, (f^c \setminus K_c) \cap U) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^j H_q(f^c \cap U_i, (f^c \setminus K_c) \cap U_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^j C_q(f, u_i). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$B_q(X^b, X^a) = \dim(H_q(X^c, X^c \setminus K_c)) = \sum_{i=1}^j \dim(C_q(f, u_i)) = M_q(X^b, X^a).$$



Corolário 3.31 (Desigualdade de Morse). *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.30 são satisfeitas. Então,*

$$M_q(X^b, X^a) \geq B_q(X^b, X^a), \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

3.2.3 O Lema de Morse Generalizado

O Lema de Morse Generalizado, também conhecido como Teorema de Splitting, é uma ferramenta básica e importante para se calcular grupos críticos. O Lema de Morse em dimensão infinita, será apresentado aqui como um corolário do Lema de Splitting. Relembremos que um ponto crítico u é dito não degenerado quando o operador linear $L : H \rightarrow H$, definido em (3.24) for invertível. O Lema de Morse generalizado, nos descreverá então uma forma de escrever f em função de L .

Teorema 3.32 (Splitting). *Seja U uma vizinhança de u em um espaço de Hilbert H e $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Suponha que u é um ponto crítico de f com nulidade positiva e que $L = f''(u)$ é um operador de Fredholm, e portanto $H = \ker(L) \oplus \operatorname{im}(L)$. Seja $w + v$ a decomposição de u em H , isto é, $u = w + v$. Então existe uma vizinhança aberta A de 0 em H , uma vizinhança aberta B de 0 em $\ker(L)$, um homeomorfismo local $h : A \rightarrow U$ e uma função $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(B, \mathbb{R})$, tal que $h(0) = u$, $\hat{f}(0) = u$, $\hat{f}'(0) = 0$ e $\hat{f}''(0) = 0$. Além disso,*

$$f(h(u)) = \frac{1}{2} \langle L(v), v \rangle + \hat{f}(w).$$

Demonstração: Por simplicidade, iremos supor $u = 0$. Seja $Q : H \rightarrow H$ a projeção ortogonal sobre $\operatorname{im}(L)$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe $r_1 > 0$ e uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $g : B(0, r_1) \cap \ker(L) \rightarrow \operatorname{im}(L)$, tal que $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ e

$$Q \nabla f(w + g(w)) = 0.$$

Vamos definir então $\hat{f}$ em $B = B(0, r_1) \cap \ker(L)$, por:

$$\hat{f}(w) = f(w + g(w)).$$

Isto implica dizer que $\nabla \hat{f}(w) = \nabla f(w + g(w))$. Como $Q \nabla f(w + g(w)) = 0$, temos que

$$\nabla \hat{f}(w) = \nabla f(w + g(w)) - 0 = \nabla f(w + g(w)) - Q \nabla f(w + g(w)) = (I - Q) \nabla f(w + g(w)),$$

e

$$\hat{f}''(w) = (I - Q) f''(w + g(w)) (I - g'(w)).$$

Aplicando em 0, temos que

$$\nabla \hat{f}(0) = (I - Q)\nabla f(0 + g(0)) = (I - Q)\nabla f(0) = 0,$$

pois $Q\nabla f(0 + g(0)) = 0$ e $\hat{f}''(0) = (I - Q)f''(0) = (I - Q)L = 0$. Vamos definir agora a função

$$\varphi(t, v, w) = (1 - t) \left(\hat{f}(w) + \frac{1}{2} \langle L(v), v \rangle \right) + tf(v + w + g(w)).$$

Considere o campo de vetores dado por

$$J(t, v, w) = \begin{cases} -\frac{\varphi_t(t, v, w)\varphi_v(t, v, w)}{|\varphi_v(t, v, w)|^2} & \text{se } v \neq 0, \\ 0 & \text{se } v = 0. \end{cases}$$

Note que se $\eta(t) = \eta(t, v, w)$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta'(t) = J(t, \eta(t), w) \\ \eta(0) = v, \end{cases} \quad (3.20)$$

então $\eta'(t) = J(t, \eta(t), w)$. Portanto, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t, \eta(t), w) &= \varphi_t(t, \eta(t), w) + \langle \varphi_v(t, \eta(t), w), \eta'(t) \rangle \\ &= \varphi_t(t, \eta(t), w) + \langle \varphi_v(t, \eta(t), w), J(t, \eta(t), w) \rangle \\ &= \varphi_t(t, \eta(t), w) + \left\langle \varphi_v(t, \eta(t), w), -\frac{\varphi_t(t, \eta(t), w)\varphi_v(t, \eta(t), w)}{|\varphi_v(t, \eta(t), w)|^2} \right\rangle \\ &= \varphi_t(t, \eta(t), w) - \varphi_t(t, \eta(t), w) \frac{\langle \varphi_v(t, \eta(t), w), \varphi_v(t, \eta(t), w) \rangle}{|\varphi_v(t, \eta(t), w)|^2} \\ &= \varphi_t(t, \eta(t), w) - \varphi_t(t, \eta(t), w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Integrando com relação a t em $[0, 1]$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(t, \eta(t), w) dt = \varphi(1, \eta(1), w) - \varphi(0, \eta(0), w) = 0.$$

Isto nos diz que $\varphi(1, \eta(1), w) = \varphi(0, \eta(0), w)$. Além disso, pela definição de φ , temos que

$$\begin{aligned} \varphi(0, \eta(0), w) &= \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \langle L(v), v \rangle, \\ \varphi(1, \eta(1, v, w), w) &= f(\eta(1, v, w) + w + g(w)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{f}(w) + \frac{1}{2} \langle L(v), v \rangle = f(\eta(1, v, w) + w + g(w)).$$

Vamos assumir que $\eta(t, v, w)$ está bem definida e é contínua em $[0, 1] \times A$, onde A é uma vizinhança aberta de 0 em H . Então, o homeomorfismo local h é dado por:

$$h(u) = h(v, w) = w + g(w) + \eta(1, v, w).$$

O fato de h ser localmente invertível, deve-se ao fato de que $\eta(1, v, w)$ é localmente invertível.

Agora, vamos mostrar que η está bem definida e é contínua. Para tal, vamos definir

$$\Psi(v, w) = f(v + w + g(w)) - \hat{f}(w) - \frac{1}{2} \langle L(v), v \rangle.$$

Note que $\Psi(0, v) = f(w + g(w)) - \hat{f}(w) = 0$, de acordo com a definição de $\tilde{f}$. Seguindo os passos do que foi feito anteriormente, temos que $\Psi_v(0, w) = \Psi_v''(0, w) = 0$. Assim, podemos escrever

$$\Psi(v, w) = \int_0^1 (1-s) \langle \Psi''(sv, w)v, v \rangle ds, \quad (3.21)$$

e

$$\Psi_v(v, w) = \int_0^1 \Psi''(sv, w)v ds. \quad (3.22)$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < r_1$, tal que se $|v + w| < \delta$ $|\Psi(v, w)| \leq \varepsilon|v|^2$ e $|\Psi_v(v, w)| \leq \varepsilon|v|$. Como $L : im(L) \rightarrow im(L)$ é um operador linear contínuo e invertível, temos que dado $v \in im(L)$ existe $c > 0$, tal que

$$c^{-1}|v| \leq |Lv| \leq c|v|. \quad (3.23)$$

Assim, para $v \neq 0$, temos que

$$J(t, v, w) = -\Psi(v, w) |Lv + t\Psi_v(v, w)|^{-2} (Lv + t\Psi_v(v, w)).$$

Desta forma, segue que

$$|J(t, v, w)| = |\Psi(v, w)| |Lv + t\Psi_v(v, w)|^{-1}.$$

Pela desigualdade triangular e sendo $t \in [0, 1]$, temos que

$$|Lv + t\Psi_v(v, w)| \geq |Lv| - |t\Psi_v(v, w)| \geq c^{-1}|v| - \varepsilon|v|.$$

Além disso, sendo $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, temos que $c^{-1}|v| - \varepsilon|v| = \frac{|v|}{2c} > 0$. Portanto, temos que para $|v + w| < \delta$,

$$\begin{aligned}
 |J(t, v, w)| &\leq \frac{|\Psi(v, w)|}{|Lv + t\Psi_v(v, w)|} \\
 &\leq \frac{|\Psi(v, w)|}{|Lv| - |\Psi_v(v, w)|} \\
 &\leq \frac{\varepsilon|v|^2}{c^{-1}|v| - \varepsilon|v|} \\
 &= 2c \varepsilon |v| \\
 &\leq 2c (c + \varepsilon) \varepsilon |v|.
 \end{aligned}$$

Uma vez que, por definição, $J(t, 0, w) = 0$, J é contínua. Seja então $\rho \in (0, \delta)$, tal que $|\Psi_v''(v, w)| \leq 1$, para $|v + w| \leq \rho$ e $v \neq 0$. Usando as desigualdades acima, obtemos que existe $c_1 > 0$, tal que $|J_v(t, v, w)| \leq c_1$, para $|v + w| \leq \rho$ e $v \neq 0$. Isto nos diz que a derivada parcial de J com relação a v é limitada, portanto, pelo Teorema do Valor Médio, J é Lipschitziana com respeito a segunda variável, isto é, existe $c_2 > 0$, tal que para $|v_i + w| \leq \rho$, onde $i = 1, 2$, tem-se que

$$|J(t, v_1, w) - J(t, v_2, w)| \leq c_2 |v_1 - v_2|.$$

Segue então da teoria para equações diferenciais ordinárias, que, uma vez que η é solução do problema de Cauchy, temos que η está localmente bem definida e é contínua. Além disso, como $\eta(t, 0, w) = 0$, segue que η está bem definida em $[0, 1] \times A$, onde A é uma vizinhança aberta de 0 em V . ■

O resultado abaixo, conhecido como Lema de Morse, pode ser visto como uma consequência do resultado anterior. A diferença sutil está no fato do ponto crítico ser não degenerado e portanto o homomorfismo local, obtido no Teorema 3.32 no caso em que o ponto crítico é não degenerado, é um difeomorfismo.

Corolário 3.33 (Lema de Morse em dimensão infinita - (CHANG, 1993), pág. 33 e 46). *Seja U uma vizinhança aberta de 0 em um espaço de Hilbert H , $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ e u um ponto crítico não degenerado de f . Então existe uma vizinhança A de u em V e um difeomorfismo local $h : A \rightarrow U$, com $h(u) = 0$, tal que*

$$f(h(v)) = f(u) + \frac{1}{2} \langle f''(u)v, v \rangle.$$

Os próximos resultados, que utilizarão como ferramenta principal o Lema de Morse generalizado, nos fornecerá ferramentas para descrever os grupos críticos de pontos críticos em algumas situações específicas.

Lema 3.34. *Seja U uma vizinhança de u em um espaço de Hilbert H e $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Se u é o único ponto crítico de f , e a condição de Palais-Smale é satisfeita sobre a bola fechada $B[u, r] \subset U$, então existem $\varepsilon > 0$ e $X \subset U$ tais que*

- i) X é uma vizinhança de u , fechada em U ;*
- ii) X é positivamente invariante com relação ao fluxo σ ;*
- iii) $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ é completo, onde $c = f(u)$;*
- iv) A condição de Palais-Smale é satisfeita sobre $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ como no Lema 2.48 aplicado a $A = B[u, r]$ e seja X o fecho em U do conjunto $Y = \{\sigma(t, v) \mid v \in B, 0 \leq t < w_+(v)\}$. Por construção, temos que X satisfaz *i)* e *ii)*. Como consequência do Lema 2.48, temos que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap Y \subset B[u, r]$. Uma vez que $B[u, r]$ é fechado em U , temos que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X \subset B[u, r]$, além disso, $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ é fechado em U , pois X é fechado em U e $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ é a imagem inversa de um conjunto fechado de $\mathbb{R}$ por uma aplicação contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, como $B[u, r]$ é fechado em U , temos que o fecho relativo de $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ com relação a $B[u, r]$ coincide com o fecho deste mesmo conjunto com relação a U , e sendo $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ fechado em U , decorre então que este é fechado em $B[u, r]$ e portanto, completo.

Por fim, vamos mostrar que a condição *iv)* decorre da condição *iii)*. Para tal, seja $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Palais-Smale em $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$, isto é, $f(u_m) \rightarrow c$ e $f'(u_m) \rightarrow 0$. Vamos mostrar que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$. Como vimos acima, $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X \subset B[u, r]$, desta forma, $u_m \in B[u, r]$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como, por hipótese, a condição de Palais-Smale é satisfeita sobre a bola fechada $B[u, r]$, temos que existe uma subsequência $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $u_0 \in B[u, r]$ tal que $u_{m_k} \rightarrow u_0$, em $B[u, r]$. Por *iii)*, temos que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ é completo, portanto $u_0 \in f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$, o que implica dizer que, $u_{m_k} \rightarrow u_0$ em $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$. Portanto, a condição de Palais-Smale é satisfeita sobre $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$, como queríamos demonstrar. ■

O próximo resultado estabelece uma relação entre os grupos críticos da aplicação f e da função $\hat{f}$ definida em (3.32). Observe que a versão apresentada neste trabalho é uma versão mais geral que a apresentada em (MAWHIN; WILLEM, 1989). A versão que escolhemos apresentar foi a versão do (BARTSCH; CHANG; WANG, 2000), em que o ponto crítico de f não necessariamente é 0.

Teorema 3.35 (Teorema de Shifting). *Suponha que as condições do Teorema 3.32 sejam satisfeitas. Se u é o único ponto crítico de f e o índice de Morse de u , a qual denotaremos por $k = m(u)$ é finito, então*

$$C_q(f, u) \simeq C_{q-k}(\hat{f}, 0), \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Demonstração: Por conveniência, vamos supor que $u = 0$. Se $u \neq 0$, o argumento é o mesmo a menos de translação. Com as notações do Teorema 3.32, seja $C \subset A$ uma vizinhança fechada de 0. Sendo, $c = f(0) = \hat{f}(0)$ e $\psi(u) = \psi(v + w) \left(\frac{1}{2} \right) \langle L(v), v \rangle + \hat{f}(w)$, obtemos que

$$\begin{aligned} C_q(f, 0) &= H_q(f^c \cap h(C), f^c \cap h(C) \setminus \{0\}) \\ &\simeq H_q(\psi^c \cap C, \psi^c \cap C \setminus \{0\}) = C_q(\psi, 0). \end{aligned}$$

Nosso objetivo então será garantir que $C_q(\psi, 0) \simeq C_{q-k}(\hat{f}, 0)$. Para tal, suponhamos que $0 \in \ker(L)$ é o único ponto crítico de $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(B, \mathbb{R})$. Como $L = f''(0)$ é um operador de Fredholm, temos que $\ker(L)$ tem dimensão finita e, portanto, a condição de Palais-Smale é satisfeita para toda bola $B[0, r] \subset B$. Seja então $\varepsilon > 0$, como no Lema 3.34 aplicado a $\hat{f}$. O Lema 2.44, implica que X^c é um retrato de deformação forte de $X^{c+\varepsilon}$. Além disso, $\hat{f}$ é não crescente no decorrer da deformação correspondente η . Vamos definir a deformação H em $D = \text{im}(L) \times X^{c+\varepsilon}$ por $H(t, v, w) = v^- + (1 - t)v^+ + \eta(t, w)$. Argumentos semelhantes ao utilizado na demonstração do Teorema 3.27, nos garantem que $V^- \times X^c$ é um retrato de deformação forte de $\psi^c \cap D$ e que $(V^- \times X^c) \setminus \{0\}$ é um retrato de deformação forte de $\psi^c \cap D \setminus \{0\}$, onde V^- denota o subespaço tal que $k = \dim(V^-)$. Desta forma, obtemos que

$$\begin{aligned} C_q(\psi, 0) &= H_q(\psi^c \cap D, \psi^c \cap D \setminus \{0\}) \\ &\simeq H_q(V^- \times X^c, (V^- \times X^c) \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Assim, se $k = 0$, pelo que mostramos acima, segue que

$$\begin{aligned}
 C_q(\psi, 0) &= H_q(\psi^c \cap D, \psi^c \cap D \setminus \{0\}) \\
 &= H_q(X^c, X^c \setminus \{0\}) \\
 &= H_q(\hat{f}^c \cap X, \hat{f}^c \cap X \setminus \{0\}) \\
 &= C_q(\hat{f}, 0).
 \end{aligned}$$

Se $k \geq 1$, por (2.71), temos que

$$\begin{aligned}
 C_q(\psi, 0) &= H_q(R^k \times X^c, (R^k \times X^c \setminus \{0\})) \\
 &= H_q(B^k \times X^c, (B^k \times X^c) \setminus \{0\}) \\
 &= H_{q-k}(X^c, X^c \setminus \{0\}) \\
 &= C_{q-k}(\hat{f}, 0).
 \end{aligned}$$

Desta forma, por transitividade, temos que $C_q(f, 0) \simeq C_{q-k}(\hat{f}, 0)$. ■

Lema 3.36. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja u o único ponto crítico de $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Então, para todo $\rho > 0$, existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ que satisfaz as seguintes condições:*

- i) $\tilde{f}$ admite no máximo, uma quantidade finita de pontos críticos e quando existem, estes são não degenerados;*
- ii) Se $|v - u| \geq \rho$, então $\tilde{f}(v) = f(v)$, isto é, fora da bola $B[u, \rho]$ as funções coincidem;*
- iii) Se $v \in U$, então:*

$$|\tilde{f}(v) - f(v)| + |\tilde{f}'(v) - f'(v)| + |\tilde{f}''(v) - f''(v)| \leq \rho.$$

Demonstração: Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $B[u, \rho] \subset U$. Vamos mostrar que a condição b) é satisfeita. De fato, seja $w \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ definida por

$$w(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \in B[u, \frac{\rho}{2}], \\ 0, & \text{se } v \notin B[u, \rho], \end{cases}$$

e seja $e \in \mathbb{R}^N$. Vamos definir então

$$\tilde{f}(v) = f(v) - w(v)(v, e).$$

Note primeiramente que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, pois w e f pertencem a $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Em seguida, observemos que, se $v \notin B[u, \rho]$, então $w(v) = 0$, portanto $\tilde{f}(v) = f(v)$. Logo, a condição b)

é satisfeita. Por outro lado, por estimativas diretas, obtemos $\alpha > 0$, tal que se $|e| \leq \alpha$, então $c)$ é satisfeita para todo $|e| \leq \alpha$. Agora, notemos que

$$\nabla \tilde{f}(v) = \nabla f(v) - w(v)e - \nabla w(v)(v, e). \quad (3.24)$$

Assim, pela desigualdade triangular, temos que

$$|\nabla \tilde{f}(v)| \geq |\nabla f(v)| - |w(v)| |e| - |\nabla w(v)| |v| |e|. \quad (3.25)$$

Seja então $\delta = \inf\{|\nabla f(v)| \mid \frac{\rho}{2} \leq |u - v| \leq \rho\}$. Consideremos então o conjunto $C = \{v \in U \mid \frac{\rho}{2} \leq |u - v| \leq \rho\}$. Note que $u \notin C$ e como u é o único ponto crítico de f , segue que C não contém pontos críticos de f , portanto, pela condição de Palais-Smale, temos que $\delta > 0$. Por (3.25), podemos tomar $\beta \in (0, \alpha]$, de forma que, se $|e| \leq \beta$ então:

$$\inf\left\{|\nabla \tilde{f}(v)| \mid \frac{\rho}{2} \leq |u - v| \leq \rho\right\} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Pelo Teorema de Sard¹, podemos assumir que e é valor regular de ∇f , para $|e| \leq \beta$. Observe então que se $|u - v| \geq \rho$, então $\tilde{f}(v) = f(v)$, portanto $\nabla \tilde{f}(v) \neq 0$ em $|u - v| \geq \rho$, pois u é o único ponto crítico de f e $|u - u| < \rho$. Se $v \in C$, então $|\nabla \tilde{f}(v)| \leq \frac{\delta}{2}$, e portanto, $\nabla \tilde{f}(v) \neq 0$, em C . Por fim, observe que se $v \in B(u, \rho)$, então por (3.24) e pela definição de w , temos que $w(v) = 1$, $\nabla w(v) = 0$ e $\nabla \tilde{f}(v) = \nabla f(v) - e$. Portanto, $\nabla \tilde{f}(v) = 0$ se, e somente se, $\nabla f(v) = e$. Sendo e valor regular de $\nabla f(v)$, temos que os pontos críticos de $\tilde{f}$ são não degenerados e consequentemente isolados, uma vez que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Além disso, os pontos críticos de $\tilde{f}$ estão em $B\left[u, \frac{\rho}{2}\right]$ e portanto, em quantidade finita. ■

Teorema 3.37. *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e u um ponto crítico isolado de $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Então, $\dim C_q(f, u)$ é finita para todo q e é zero para $q \geq N + 1$.*

Demonstração: Suponhamos que u é um ponto crítico isolado de f . Assim, podemos escolher U de forma que u seja o único ponto crítico de f em U . Além disso, como $\dim \mathbb{R}^N < +\infty$ e $U \subset \mathbb{R}^N$, temos que para toda bola fechada $B[u, r] \subset U$ a condição de Palais-Smale é satisfeita. Assim, temos que as hipóteses do Lema 3.34 são satisfeitas. Seja então $X \subset U$ e $\varepsilon > 0$, como no Lema 3.34. Por definição de número de Morse, temos que

$$M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = \sum_{i=1}^j \dim C_q(f, u_i),$$

¹ O teorema de Sard ((MAWHIN; WILLEM, 1989), p. 114) afirma que se $U \subset \mathbb{R}^p$ é um conjunto aberto e $f \in \mathcal{C}^m(U, \mathbb{R}^q)$, com $m > \max\{0, p - q\}$ então todo ponto de $\mathbb{R}^q$ é valor regular de f . Neste caso, como $\nabla f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^N)$, temos que $m = 1$ e $p - q = 0$.

onde $u_i, i \in \{1, \dots, j\}$ são os pontos críticos de f . Como u é o único ponto crítico de f em U , temos que $j = 1$ e, portanto, $M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = \dim C_q(f, u)$. Ainda, de acordo com o Teorema 3.30, temos que $M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = B_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon})$. Assim, segue que

$$\dim C_q(f, u) = M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = B_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}), \quad (3.26)$$

onde $c = f(u)$. Como X é uma vizinhança de u , temos que existe $\rho_1 > 0$, tal que $B(u, \rho_1) \subset X$. Além disso, como f é contínua em u , temos que existe uma bola de centro u e raio $\rho_2 > 0$, tal que $f(B(u, \rho_2)) \subset \left[c - \frac{\varepsilon}{3}, c + \frac{\varepsilon}{3}\right]$. Seja então $\rho > 0$ tal que $2\rho < \min\left\{\rho_1, \rho_2, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, desta forma, temos que

$$B[u, 2\rho] \subset f^{-1}\left(\left[c - \frac{\varepsilon}{3}, c + \frac{\varepsilon}{3}\right]\right) \cap X.$$

Seja então $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, como no Lema 3.34 As propriedades *b)* e *c)* implicam dizer que $\tilde{f}^{c+\varepsilon} = f^{c+\varepsilon}$. De fato, para todo $\rho > 0$, temos que fora da bola $B[u, \rho]$ as funções f e $\tilde{f}$ coincidem. Seja então $v \in B[u, \rho]$, de acordo com a propriedade *c)*, temos que $|f(v) - \tilde{f}(v)| \leq \rho$. Como ρ é arbitrário, fazendo $\rho \rightarrow 0$, obtemos o resultado desejado. Utilizando uma ideia análoga, obtemos que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X = \tilde{f}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$. Segue então do Lema 3.34, item *iii)* e *iv)* que $\tilde{f}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X$ é completo e f satisfaz a condição de Palais-Smale neste conjunto. Além disso, de acordo com o Lema 3.36, temos que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2$ admite uma quantidade finita de pontos críticos não degenerados, digamos $u_1, \dots, u_j$. O objetivo de se trabalhar com a $\tilde{f}$ e não com a f na computação dos grupos críticos, deve-se principalmente ao fato de que os pontos críticos da $\tilde{f}$ são não degenerados, podendo invocar assim o item *ii)* do Teorema 3.27. Observe também que,

$$B[u, \rho] \subset \text{int}(B[u, 2\rho]) \subset \text{int}(\tilde{f}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X),$$

o que implica dizer que $B[u, \rho] \subset \text{int}(\tilde{f}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X)$.

O item *ii)* do Lema 3.36 nos garante que $u_i \in B[u, \rho]$ para todo $i \in \{1, \dots, j\}$. De fato, se $u = u_i$, para algum i é claro que $u \in B[u, \rho]$. Suponhamos então que $u_j \neq u$, isto implica dizer que u_j não é ponto crítico de f , pois, por hipótese, u é único ponto crítico de f em U e $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ além disso, por definição de ponto crítico, necessariamente temos $u_i \in U$ para todo $i \in \{1, \dots, j\}$. Como fora de $B[u, \rho]$, $f \equiv \tilde{f}$, e u_j não pode ser ponto crítico de f , então $u_j \in B[u, \rho]$, para todo u_j ponto crítico de $\tilde{f}$, em particular, estes pontos críticos estão em $\text{int}(\tilde{f}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap X)$.

Seja agora $k_i \in \{1, \dots, N\}$ o índice de Morse de u_i , $i \in \{1, \dots, j\}$. Vamos denotar por $\tilde{M}_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon})$ os números de Morse correspondentes a $\tilde{f}$. O Teorema 3.27 implica dizer que

$$\tilde{M}_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = \sum_{i=1}^j \delta_{q, k_i},$$

isto é, $\tilde{M}_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon})$ é finito e é zero para todo $q \geq N + 1$. Das desigualdades de Morse e de (3.26) segue que

$$\tilde{M}_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) \geq B_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}) = M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon}).$$

Portanto, $M_q(X^{c+\varepsilon}, X^{c-\varepsilon})$ é finito para todo q e é zero para todo $q \geq N + 1$. ■

Teorema 3.38. *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e u um ponto crítico isolado de $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Se u não é um máximo e nem um mínimo local de f então*

$$C_0(f, u) = C_N(f, u) = 0.$$

Demonstração: Como u é um ponto crítico isolado, podemos escolher U de forma que u seja o único ponto crítico de f em U . Além disso, como estamos em dimensão finita, temos que toda bola $B[u, r] \subset U$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Seja então $\varepsilon > 0$ e $X \subset U$ como no Lema 3.34. Pelo Lema 2.44 temos que X^c é um retrato de deformação forte de $X^{c+\varepsilon}$, então

$$C_q(f, u) = H_q(X^c, X^c \setminus \{u\}) = H_q(X^{c+\varepsilon}, X^c \setminus \{u\}).$$

Seja então $\eta \in \mathcal{C}([0, 1] \times X^{c+\varepsilon}, X^{c+\varepsilon})$ a deformação correspondente. Para mostrarmos que $H_0(X^{c+\varepsilon}, X^c \setminus \{u\}) = \{0\}$ é suficiente garantirmos que para todo ponto $v \in X^{c+\varepsilon}$ existe um caminho contínuo contido em $X^{c+\varepsilon}$ que liga v a um ponto de $X^c \setminus \{u\}$. Seja $\rho > 0$ tal que $B[v, \rho] \subset X^{c+\varepsilon}$, a existência de tal $\rho > 0$ é garantida pelo fato de X ser vizinhança de v . Uma vez que u não é ponto de mínimo local, existe $w \in B[u, \rho]$ tal que $f(w) < c = f(u)$. Isto nos diz que u está conectado com o ponto $w \in X^c \setminus \{u\}$ por um mapa contínuo contido em $X^{c+\varepsilon}$. Agora, todo ponto $v \in X^{c+\varepsilon}$ está ligado por um mapa contínuo contido em $X^{c+\varepsilon}$ para $\eta(1, v)$ qualquer que seja o ponto em $X^c \setminus \{u\}$. Consideremos agora qualquer mapa contínuo $\varphi : S^{N-1} \rightarrow B[u, \rho] \cap f^c \setminus \{u\}$, o qual possui uma extensão contínua $g_1 : B^N \rightarrow B[u, \rho]$. Pelo Lema 3.30 e pelo Lema 3.34 temos que φ tem uma extensão contínua $g_2 : B^N \rightarrow f^c$. Uma vez que u não é máximo local, temos que, u não é um

ponto interior de $g_2(B^N)$. Desta forma, temos que φ possui uma terceira extensão contínua $g_3 : B^N \rightarrow f^c \cup S(u, \delta) \setminus B(u, \delta)$, onde $\delta > 0$ é pequeno. Usando um argumento análogo ao Lema 2.43 temos que existe uma extensão contínua $g_4 : B^N \rightarrow f^c \setminus \{u\}$ de φ . Desta forma, concluímos que $H_{N-1}(f^c \cap B[u, \rho] \setminus \{u\}) \simeq 0$, uma vez que $H_N(f^c \cap B[u, \rho]) \simeq 0$, pela propriedade da exatidão (2.66), segue que $C_N(f, u) \simeq 0$. ■

Exemplo 3.39. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Note que f é de classe $\mathcal{C}^2$ e $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6y)$. Portanto, $u = (0, 0)$ é ponto crítico de f . Desta forma, temos que $C_0(f, u) = C_2(f, u) = 0$.

O Teorema 3.27 nos forneceu uma descrição completa dos grupos críticos de uma função $f \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$, nos casos em que o ponto crítico é isolado e um ponto de mínimo local ou não degenerado. O resultado abaixo, que é consequência de todos os resultados abordados nessa subseção, embora não descreva completamente os grupos críticos de uma aplicação $f \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$, no caso em que u é, possivelmente, um ponto crítico degenerado, nos fornece algumas ferramentas que auxiliarão na computação destes, desde que acrescida a condição do operador $f''(u)$ ser de Fredholm. Alguns dos resultados apresentados acima, tem como hipótese principal a necessidade da dimensão do espaço ser finita e esta é de grande importância nas demonstrações, pois a partir dela é possível garantir que a bola fechada $B[u, r]$ satisfaz a condição de Palais-Smale, por exemplo. Porém, aqui o domínio da função $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, não é necessariamente um espaço de dimensão finita, mas apenas um espaço de Hilbert. Surge então, mais uma vez a necessidade do operador $f''(u)$ ser de Fredholm, uma vez que isto garante que $\ker(f''(u))$ tem dimensão finita e a existência, por meio do Teorema 3.32, de uma função $\hat{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$, definida em uma vizinhança em $\ker(f''(u))$, e portanto, o domínio desta função, tem dimensão finita. Nosso objetivo portanto, será aplicar alguns dos resultados acima a esta função e estabelecer a relação entre os grupos críticos de f e $\hat{f}$.

Teorema 3.40. *Suponha que as condições do Teorema 3.32 sejam satisfeitas. Se u é um ponto crítico isolado de f com índice de Morse finito k e nulidade v , então as seguintes afirmações são válidas:*

- i) $\dim(C_q(f, u))$ é finita para todo q e é igual a zero se $q \notin \{k, k+1, \dots, k+v\}$;
- ii) Se 0 é um mínimo local de $\hat{f}$ então

$$C_q(f, u) = \delta_{q,k} G;$$

iii) Se 0 é um máximo local de $\hat{f}$ então

$$C_q(f, u) = \delta_{q, k+v} G;$$

iv) Se 0 não é nem máximo e nem mínimo local de $\hat{f}$ então

$$C_k(f, u) = C_{k+v}(f, u) = 0.$$

Demonstração: Suponhamos que as condições do Teorema 3.32 sejam satisfeitas. Assim, temos que existe uma aplicação $\hat{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, definida em $B \subset \ker(f''(u))$, onde B é uma vizinhança de u . Pelo Teorema de Shifting 3.35, temos que $C_q(f, u) = C_{q-k}(\hat{f}, 0)$, onde $k = m(u)$ denota o índice de Morse de u . Por definição de nulidade, concluímos que $\dim(B) \leq v$, ou seja, estamos em espaços de dimensão finita. Para sermos mais exatos, o espaço ambiente a qual estamos trabalhando é $\ker(f''(u))$ o qual tem dimensão v .

Vejamus que *i*) é satisfeita. De fato, pelo Teorema 3.37, temos que $C_q(f, u)$ é finito para todo q e, é igual a zero $q - k \geq v + 1$, e portanto, para todo $q \geq v + k + 1$. Observe também o seguinte, se $q < k$, então $q - k < 0$, o que implica dizer que $C_{q-k}(\hat{f}, 0) = \{0\}$, por definição de grupo de homologia. Logo, se $q \notin \{k, k + 1, \dots, k + v\}$, então $\dim(C_q(f, u)) = 0$.

O item *ii*) basta procedermos igual ao item *i*) do Teorema 3.27 aplicado a $\hat{f}$ e observar que $q - k = 0$, implica dizer que $q = k$.

Para vermos *iii*), suponhamos que 0 seja máximo local de $\hat{f}$, isto implica dizer que existe uma bola B^v tal que $\hat{f}(v) \leq \hat{f}(0)$, para todo $v \in B^v$. Assim, temos que $\hat{f}^c \cap B^v = B^v$. Desta forma, por definição de grupo crítico e pela observação (2.76), temos que

$$\begin{aligned} C_q(\hat{f}, 0) &= H_q(\hat{f}^c \cap B^v, \hat{f}^c \cap B^v \setminus \{0\}) \\ &= H_q(B^v, B^v \setminus \{0\}) \\ &\simeq H_q(B^v, S^{v-1}) \\ &\simeq \delta_{q,v} G. \end{aligned}$$

Daí, como $q - k = v$ implica dizer que $q = v + k$, segue o resultado. O item *iv*) é consequência do Teorema 3.38, observando o mesmo que na demonstração dos itens *ii*) e *iii*). ■

4 TEOREMAS DE PONTOS CRÍTICOS VIA TEORIA DE MORSE

Neste capítulo, seguindo os passos de (SILVA, 1996) abordaremos os principais resultados sobre a existência e multiplicidade de pontos críticos para uma classe de funcionais $I : H \rightarrow \mathbb{R}$, pertencentes a $\mathcal{C}^2$ definido em um espaço de Hilbert. Na maioria das vezes, a hipótese do funcional pertencer à $\mathcal{C}^2$, não pode ser enfraquecida, uma vez que, como vimos no capítulo anterior, a maioria dos resultados envolvendo teoria de Morse e descrição de grupos críticos dependem do Lema de Morse e do Lema de Morse generalizado, que por sua vez recorrem aos teorema da função implícita e inversa em sua demonstração, bem como a continuidade da transformação $I''(u) : H \rightarrow H$, sendo u um ponto crítico. Além disso, no capítulo anterior, construímos a teoria de Morse considerando um campo de coeficientes G , grupo abeliano, não necessariamente um espaço vetorial. Aqui, iremos considerar $G = \mathbb{Z}$, a única diferença notada até então nessa escolha, foi necessariamente que os grupos de Homologia não serão espaços vetoriais.

4.1 PRIMEIROS RESULTADOS ABSTRATOS

O próximo resultado estabelece uma versão de um Lema de deformação para um funcional I que satisfaz a condição (Ce) .

Lema 4.1 ((SILVA, 1994)). *Suponha que $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ e satisfaz a condição (Ce) . Vamos assumir que c é o único valor crítico de I no intervalo $[c, b)$, com $K_c = \{u_j\}_{j=1}^m$. Então, I^c é um retrato de deformação forte de $I^b \setminus K_b$.*

Observação 4.2. Se $b = \infty$, no Lema anterior, então I^c é um retrato de deformação forte de H .

O resultado abaixo estabelece uma relação entre o grupo de homologia do par topológico $(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon})$ e os grupos críticos de um valor crítico c com base nos pontos críticos u_j de I , tal que $I(u_j) = c$. Esta propriedade é muito interessante no sentido de que ela estabelece uma decomposição em soma direta do grupo de homologia deste par.

Proposição 4.3. *Suponha que $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ e satisfaz (Ce) . Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico isolado de $I(u)$, com $K_c = \{u_j\}_{j=1}^m$, então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que*

$$H_q(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) \cong \bigoplus_{1 \leq j \leq m} C_q(I, u_j).$$

Demonstração: Primeiramente, do Lema 4.1 e da propriedade (2.70), temos que

$$H_q(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) \cong H_q(I^c, I^{c-\varepsilon}) \cong H_q(I^c, I^c \setminus K_c). \quad (4.1)$$

Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, considere U_j uma vizinhança fechada de u_j , tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Definindo $U = \bigcup_{j=1}^j U_j$, pela propriedade da excisão aplicada ao aberto U^c , temos que

$$H_q(I^c, I^c \setminus K_c) \cong H_q(I^c \setminus U^c, (I^c \setminus K_c) \setminus U^c). \quad (4.2)$$

Mas, observe que

$$I^c \setminus U^c = I^c \cap U^c(I^c \setminus K_c) \setminus U^c = (I^c \setminus K_c) \cap U = (I^c \cap (K_c)^c) \cap U = (I^c \cap U) \setminus K_c.$$

Portanto, (4.2) implica que

$$H_q(I^c, I^c \setminus K_c) \cong H_q(I^c \cap U, (I^c \cap U) \setminus K_c). \quad (4.3)$$

Por outro lado, pela propriedade (2.69) e da definição de grupos críticos, segue que

$$H_q(I^c \cap U, (I^c \cap U) \setminus K_c) \cong \bigoplus_{j=1}^m H_q(I^c \cap U_j, (I^c \cap U_j) \setminus \{u_j\}) = \bigoplus_{j=1}^m C_q(I, u_j). \quad (4.4)$$

Por (4.3) e (4.4), temos que

$$H_q(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) \cong \bigoplus_{j=1}^m C_q(I, u_j),$$

como queríamos demonstrar. ■

Embora possamos considerar outros casos, por questão de simplicidade, iremos supor, neste capítulo que a origem é um ponto crítico isolado de I com grupos críticos associados bem definidos, isto é,

(I_0) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0$, e existe $i \in \{0, 1, \dots\}$, tal que

$$C_q(I, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = i, \\ 0, & q \neq i. \end{cases}$$

O próximo Lema estabelece a estrutura de I^d , para $d < 0$ e $|d|$ suficientemente grande.

Lema 4.4. *Sejam $I \in C^1(H, \mathbb{R})$, com $I(0) = 0$. Suponha que I satisfaz as seguintes condições:*

(I_1) *Existe $d_1 < 0$ tal que $I'(u)(u) < 0$, para todo $u \in I^{d_1}$;*

(I_2) O conjunto $S^- = \{u \in \partial B(0, 1) \mid I(tu) \rightarrow -\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ é um subconjunto não vazio de $\partial B(0, 1)$ homotopicamente equivalente a um ponto;

(I_3) Existe $d_2 < 0$, tal que $I(tu) \geq d_2$, para todo $t \geq 0$ e $u \in \partial B(0, 1) \setminus S^-$.

Então existe $d_0 < 0$ tal que, para todo $d \leq d_0$, I^d é homotopicamente equivalente a um ponto.

Demonstração: Vamos mostrar que a afirmação é válida para $d_0 < \min\{d_1, d_2\}$. Seja $d \leq d_0$, $u \in \partial B(0, 1)$ e $t \geq 0$. Vamos mostrar que $I(tu) \leq d$ se, e somente se, $u \in S^-$.

De fato, inicialmente suponhamos por absurdo, que $u \notin S^-$, isto implica dizer que $u \in \partial B(0, 1) \setminus S^-$. A condição (I_3) nos diz que $I(tu) \geq d_2 > d$, ou seja, $d \geq I(tu) > d$, o que é um absurdo, portanto $u \in S^-$. Reciprocamente, seja $u \in S^-$, por definição de S^- , temos que $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Segue então, diretamente da definição de limite, que $I(tu) \leq d$.

Agora, seja $v \in I^d$, isto é, $I(v) \leq d$. Observe primeiramente que $v \neq 0$, pois se $v = 0$, sendo $I(0) = 0$, teríamos que $0 = I(0) \leq d < d_1 < 0$, o que é um absurdo. Portanto, como $v \neq 0$, podemos escrever $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$. Definindo $t_0 = \|v\| > 0$ e $u_0 = \frac{v}{\|v\|}$, temos $u_0 \in \partial B(0, 1)$, além disso, como $I(t_0 u_0) = I(v) \leq d$, pelo que mostramos acima, temos que $u_0 \in S^-$. Acabamos de mostrar então, que dado qualquer $v \in I^d$, podemos escrever $v = tu$, $t > 0$ e $u \in S^-$, isto nos diz que existe $\rho > 0$, tal que $I^d \subset C^- = \{w = tu \mid t \geq \rho \text{ e } u \in \partial B(0, 1)\}$.

Observe então que $I^d \subset I^{d_1}$, portanto, por (I_1), temos que

$$\frac{d}{dt} I(tu) = I'(tu)(u) < 0, \text{ para todo } tu \in I^d, u \in S^- \text{ e } t \geq 0. \quad (4.5)$$

Note então que se $u \in S^-$ então existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0 u) \leq d < 0 = I(0u)$. Desta forma, como I é contínua, pelo teorema do valor intermediário aplicado ao intervalo $[0, t_0]$, temos que para cada $u \in S^-$, existe $t(u)$, tal que $I(t(u)u) = d$. Além disso, pelo teorema da função implícita, temos que $t(u) \in \mathcal{C}(S^-, \mathbb{R})$. Nosso objetivo a partir de agora será garantir que I^d é homotopicamente equivalente a C^- . Para tal vamos definir $h : [0, 1] \times C^- \rightarrow C^-$ dada por

$$h(s, w) = (1 - s)w + st \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \frac{w}{\|w\|}.$$

Pelo que vimos acima, h está bem definida, além disso é uma função contínua. Além disso, observe que $h(s, w)$ é um retrato de deformação de C^- para I^d . De fato, observemos que, por construção

a) $h(0, w) = w$, para todo $w \in C^-$;

b) $h(1, w) = t\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \frac{w}{\|w\|} \in C^-$, para todo $w \in C^-$.

Por fim, a condição (4.5) implica dizer que o segmento ligando w à $t\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \frac{w}{\|w\|}$ está contido em I^d . Portanto, segue que C^- é homotopicamente equivalente a I^d . Uma vez que C^- é homotopicamente equivalente a S^- e este, devido a (I_2) é homotopicamente equivalente a um ponto, segue que I^d é homotopicamente equivalente à um ponto, como queríamos demonstrar. ■

Uma consequência imediata do Lema acima é o seguinte resultado, que descreve completamente os grupos de homologia do par topológico $(I^d, \emptyset)$, sempre que $d \leq d_0$.

Corolário 4.5. *Suponha que I satisfaz as hipóteses do Lema 4.4. Então, para todo $d \leq d_0$, tem-se que*

$$H_q(I^d, \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $d \leq d_0$, arbitrário. Do Lema 4.4, temos que I^d é homotopicamente equivalente a um ponto, a qual denotaremos por $\{p\}$. Isto implica dizer que

$$H_q(I^d, \emptyset) \cong H_q(\{p\}, \emptyset).$$

De acordo com a propriedade (2.72) temos que

$$H_q(\{p\}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Assim, por transitividade, temos que

$$H_q(I^d, \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Como queríamos demonstrar. ■

O próximo resultado estabelece a existência de pelo menos um ponto crítico não trivial para o funcional I .

Teorema 4.6. *Suponha que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e satisfaz (Ce) , $(I_0) - (I_3)$. Então, I possui pelo menos um ponto crítico $u \neq 0$ em H .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $u = 0$ é o único ponto crítico de I em H . Sabemos que $I(0) = 0$, logo para todo $d_1 > 0$, não temos valores críticos de I no intervalo $[d_1, +\infty)$. Portanto, pela observação do Lema 4.1, temos que $I^{d_1} \simeq H$. Seja então $d_0 < 0$ como no Lema 4.4. E vamos considerar o par (I^{d_1}, I^{d_0}) , que está bem definido pois $I^{d_0} \subset I^{d_1}$. Note que $H_q(I^{d_1}, I^{d_0}) \cong H_q(H, I^{d_0})$, pois $I^{d_1} \simeq H$.

Vamos considerar agora a aplicação inclusão entre pares, dada por

$$i : (H, I^{d_0}) \rightarrow (H, H)$$

e sua aplicação induzida $i_* : H_q(H, I^{d_0}) \rightarrow H_q(H, H)$. Considere a seguinte parte da sequência exata definida no Axioma 2.68,

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(H, H) \xrightarrow{\partial} H_q(H, I^{d_0}) \xrightarrow{i_*} H_q(H, H) \longrightarrow \cdots$$

Pelo Axioma 2.63, temos que $H_q(H, H) = \{0\}$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Desta forma,

$$H_q(I^{d_1}, I^{d_0}) \cong \{0\}, \text{ para todo } q \geq 0. \quad (4.6)$$

Por outro lado, observe que $K_0 = \{0\}$, assim pela Proposição 4.3 e pela condição (I_0) , temos que

$$H_q(I^{d_1}, I^{d_0}) \cong C_q(I, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = i, \\ 0, & q \neq i. \end{cases} \quad (4.7)$$

Comparando (4.6) com (4.7), chegamos a um absurdo. Logo existe $u \neq 0$, tal que u é ponto crítico de I . ■

Observação 4.7. Se a origem for um mínimo local de I e $S^- \neq \emptyset$, podemos aplicar um argumento do tipo passo da montanha para obter a existência de uma solução não trivial.

4.2 MULTIPLICIDADE DE PONTOS CRÍTICOS

Nesta seção, vamos mostrar a existência de pelo menos quatro pontos críticos sob as condições do Teorema 4.6, para uma classe específica de funcionais I pertencentes a $C^2(H, \mathbb{R})$, desde que tais funcionais admitam um mínimo local $u_0 \neq 0$. Para obtermos estes resultados, vamos precisar de algumas informações preliminares a respeito dos grupos críticos de um ponto crítico do tipo passo da montanha. Para tal, mostraremos inicialmente a existência de três pontos críticos de um funcional de classe C^1 supondo que o primeiro grupo crítico na origem é zero. Seja então $I \in C^1(H, \mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes condições:

(I_4) Existem $u_0 \in H$ e $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq I(u_0) + \alpha, \text{ para todo } u \in \partial B(0, \rho);$$

(I_5) Existe $e \notin B(u_0, \rho)$ tal que $I(e) < I(u_0) + \alpha$.

Vamos definir então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(h(t)), \quad (4.8)$$

onde

$$\Gamma = \{h \in \mathcal{C}([0, 1], H) \mid h(0) = u_0 \text{ e } h(1) = e\}. \quad (4.9)$$

Geometricamente, temos que Γ é o conjunto de todos os caminhos que ligam os pontos u_0 e e . Note ainda que $c \geq I(u_0) + \alpha$ é um valor crítico de I se I satisfaz $(Ce)_c$.

O próximo Lema visa estabelecer a existência de um ponto crítico, tal que seu primeiro grupo crítico seja não trivial.

Lema 4.8. *Suponha que $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ e satisfaz (I_4) , (I_5) , e (Ce) . Se c , definido como em (4.8), é um valor crítico isolado e K_c possui um número finito de pontos críticos, então existe $u \in K_c$ tal que $C_1(I, u) \neq 0$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, tal que $c - \varepsilon > \max\{I(0), I(e)\}$, de forma que c seja o único valor crítico de I no intervalo $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Observe que a obtenção de tal $\varepsilon > 0$ é possível graças ao fato de c ser um valor crítico isolado. Vamos então considerar a seguinte parte da sequência exata de homologia

$$\dots \longrightarrow H_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) \xrightarrow{\partial} H_0(I^{c-\varepsilon}, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_0(I^{c+\varepsilon}, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

onde i_* é induzido pelo mapa inclusão $i : (I^{c-\varepsilon}, \emptyset) \rightarrow (I^{c+\varepsilon}, \emptyset)$. Pela definição de c , temos que existe um caminho ligando u_0 e e em $I^{c+\varepsilon}$, porém não existe algum caminho em $I^{c-\varepsilon}$, ligando tais pontos. Observe inicialmente que, $H_0(I^{c-\varepsilon}) \neq \{0\}$, pois $I^{c-\varepsilon}$ possui mais de uma componente conexa por caminhos. Nosso objetivo então, será garantir que $\ker\{i_*\} \neq \{0\}$, pois da definição da sequência, temos que $H_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) \neq \{0\}$. Para tal, suponhamos por absurdo que $\ker\{i_*\} = \{0\}$, isto implica dizer que i_* é um isomorfismo sobre sua imagem $\text{im}(i_*) \subset H_0(I^{c+\varepsilon})$. Como $I^{c+\varepsilon}$ é conexo por caminhos, temos que $\text{rank}(H_0(I^{c+\varepsilon})) = 1$, em virtude da propriedade (2.64). Desta forma, temos que

$$\text{rank}(H_0(I^{c+\varepsilon})) = 1 \geq \text{rank}(\text{Im}(i_*)) \geq 2,$$

o que é um absurdo. Logo $\ker\{i_*\} \neq \{0\}$. Do Teorema 3.30, temos que

$$M_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) = B_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) = \text{rank}(H_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon})) \geq 1.$$

Mas, por definição de número de Morse, segue que

$$M_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) = \sum_j \text{rank}(C_1(I, u_j)),$$

onde u_j denotam os pontos críticos de I em $I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Desta forma, convém observarmos dois fatos:

O primeiro é que existe u_{j_0} tal que $\text{rank } C_1(I, u_{j_0}) \geq 1$, pois do contrário, teríamos que $M_1(I^{c+\varepsilon}, I^{c-\varepsilon}) = 0$, o que é um absurdo. O segundo fato a ser observado é que $u_{j_0} \in K_c$, pois $I(u_{j_0})$ é um valor crítico de I e sendo c o único valor crítico de I em $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, temos que $I(u_{j_0}) = c$, como queríamos demonstrar. ■

Observação 4.9. Observe que no Lema anterior não foi necessário que o funcional I fosse de classe $\mathcal{C}^2$.

Agora, vamos considerar que $I \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$ tal que $I''(u)$ é um operador de Fredholm para todo $u \in K$ e vamos assumir a seguinte condição:

$$(I_6) \quad \dim[\text{Ker}(I''(u))] \leq 1, \text{ para todo } u \in K \text{ tal que o índice de Morse de } u \text{ é zero.}$$

Desta forma, somos capazes de descrever completamente os grupos críticos de um funcional I e do seu ponto crítico obtido no Lema 4.8. A necessidade das hipóteses no Lema abaixo, deve-se ao fato que em sua demonstração, utilizaremos fortemente o Teorema 3.40.

Lema 4.10. *Suponha que $I \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$ e que $I''(u)$ é um operador de Fredholm para todo $u \in K$. Vamos assumir que I satisfaz $(I_4) - (I_6)$ e (Ce) . Se c , definido em (4.8) é um valor crítico isolado de I e K_c possui um número finito de pontos, então existe $u \in K_c$ tal que*

$$C_q(I, u) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração: Primeiramente, note que, o funcional I atende as hipóteses do Lema 4.8, assim, temos que existe $u \in K_c$ tal que $C_1(I, u) \neq 0$. Isto é, o possível candidato para tal ponto, teve sua existência estabelecida no Lema anterior. Vamos mostrar então que u é tal que

$$C_q(I, u) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Seja $k = m(u)$ o índice de Morse de u e $v = \dim(\ker(I''(u)))$. Como $\dim(C_q(I, u))$ é finita para todo q , e é igual a zero se $q \notin \{k, k+1, \dots, k+v\}$, temos que $k \leq 1$, pois do contrário $C_1(I, u) = 0$. Além disso, se $k = 0$, então $v \geq 1$, pois se $v = 0$, quando $k = 0$ teríamos que $C_1(I, u) = 0$. A hipótese (I_6) nos diz que se $k = 0$ então $v \leq 1$, portanto, se $k = 0$, temos que $v = 1$.

Vamos mostrar então que se $k = 0$ e $v = 1$, então 0 é máximo local de $\hat{I}$, onde $\hat{I}$ é a aplicação definida no Teorema 3.32. Para tal, suponha, por absurdo, que 0 não é um máximo local de $\hat{I}$, então as seguintes condições ocorrem:

- i) 0 é mínimo local;
- ii) 0 não é nem máximo e nem mínimo local.

Se i) acontece, então

$$C_q(I, u) \cong C_q(\hat{I}, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases}$$

o que é um absurdo pois $C_1(I, u) \neq 0$.

Se ii) ocorrer, então:

$$C_0(I, u) = C_1(I, u) = 0,$$

o que é um absurdo pois $C_1(I, u) \neq 0$. Logo 0 é máximo local de $\hat{I}$.

Sendo 0 um máximo local de $\hat{I}$, temos que

$$C_q(I, u) \cong C_q(\hat{I}, 0) = \delta_{q,1} \mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Logo, o resultado está provado para $k = 0$ e $v = 1$.

Como $k \leq 1$, falta então analisarmos o caso em que $k = 1$. Desta forma, observe que se $k = 1$, então $v = 0$ ou 0 é mínimo local de $\hat{I}$. De fato, suponha por absurdo, que $v > 0$ e 0 não é mínimo local de $\hat{I}$. Assim, temos dois casos a considerar:

- i) $v > 0$ e 0 é máximo local;
- ii) $v > 0$ e 0 não é nem máximo e nem mínimo local.

Observe então que se $i)$ ocorre então

$$C_q(I, u) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = k + v, \\ 0, & q \neq k + v. \end{cases}$$

Neste caso, como $k = 1$ e $v > 0$, segue que $k + v > 1$, o que implica dizer que $C_1(I, u) = 0$, o que é um absurdo.

Se $ii)$ ocorre então

$$C_1(I, 0) = C_{1+v}(I, 0) = 0,$$

o que é um absurdo pois $C_1(I, 0) \neq 0$. Assim, $v = 0$ ou 0 é mínimo local, quando $k = 1$.

Se $k = 1$ e $v = 0$, utilizando o mesmo argumento do caso $k = 0$ e $v = 1$, obtemos que 0 é máximo local, portanto

$$C_q(I, u) \cong C_q(\hat{I}, 0) = \delta_{q,1}\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Se 0 for mínimo local, então

$$C_q(I, u) \cong C_q(\hat{I}, 0) = \delta_{q,1}\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Como consequência do Lema 4.8 temos o seguinte resultado que garante a existência de um terceiro ponto crítico para I .

Teorema 4.11. *Suponha que $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ não é limitado inferiormente e satisfaz (Ce) . Vamos assumir que a origem é um ponto crítico isolado de I em H satisfazendo $C_1(I, 0) = 0$, e que I possui um mínimo local $u_0 \neq 0$. Então, I possui pelo menos três pontos críticos em H .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que a origem e u_0 são os únicos pontos críticos de I . Como 0 é um ponto crítico isolado, temos que u_0 também é um ponto crítico isolado. Afirmamos então que I satisfaz a condição (I_4) .

De fato, sendo u_0 um mínimo local isolado de I , podemos obter $\rho_1 > 0$ tal que $B(u_0, \rho_1) \cap K \setminus \{u_0\} = \emptyset$ e

$$I(u_0) \leq I(u), \text{ para todo } u \in B(u_0, \rho_1). \quad (4.10)$$

Seja então $\rho \in (0, \rho_1)$, podemos então encontrar $\alpha > 0$, tal que (I_4) é satisfeita. Para ver isto, suponha que (I_4) não acontece, isto é, existe $u_\alpha \in \partial B(u_0, \rho)$ tal que $I(u_\alpha) < I(u_0) + \alpha$, para todo $\alpha > 0$. Desta forma, utilizando a condição (Ce) e um argumento de deformação, como em (SILVA, 1991), obtemos $\varepsilon > 0$ e um homeomorfismo $\eta : H \rightarrow H$, tal que

$$(\eta_1) \quad \eta(u) = u, \text{ para todo } u \in \overline{H \setminus B(u_0, \rho)};$$

$$(\eta_2) \quad I(\eta(u)) < c_0 - \varepsilon, \text{ para todo } u \in I^{c_0+\varepsilon} \cap \partial B(u_0, \rho), \text{ onde } c_0 = I(u_0).$$

Tomemos então $\alpha = \varepsilon$ e note que, existe $u_\varepsilon \in \partial B(u_0, \rho)$ tal que $I(u_\varepsilon) < I(u_0) + \varepsilon$, isto nos diz que, $u_\varepsilon \in I^{c_0+\varepsilon} \cap \partial B(u_0, \rho)$. Além disso, $u_\varepsilon \in \overline{H \setminus B(u_0, \rho)}$. Observe também que $\partial B(u_0, \rho) \subset B(u_0, \rho_1)$, de fato, se $u \in \partial B(u_0, \rho)$, implica dizer que $\|u - u_0\| = \rho < \rho_1$, pela definição de ρ .

Assim, por (η_1) e (η_2) , temos que $\eta(u_\varepsilon) = u_\varepsilon$ e $I(u_\varepsilon) < c_0 - \varepsilon < c_0$, isto é,

$$I(u_\varepsilon) < c_0 = I(u_0),$$

para algum $u_\varepsilon \in \overline{H \setminus B(u_0, \rho)} \cap \partial B(u_0, \rho) \cap B(u_0, \rho_1)$. O que é um absurdo, pois, por (4.10) temos que $I(u_0) \leq I(u_\varepsilon)$. Assim, temos que (I_4) é satisfeita.

Observe que a condição (I_5) decorre imediatamente do fato de I não ser limitado inferiormente. De fato, primeiramente observe que I é limitado inferiormente na bola $B(u_0, \rho)$, pois $B(u_0, \rho) \subset B(u_0, \rho_1)$. Suponha então, por absurdo que, para todo $e \notin B(u_0, \rho)$, tem-se que $I(u_0) + \alpha \leq I(e)$. Como $I(u_0)$ e $\alpha > 0$ são fixados, temos que I é limitado inferiormente em H , o que é um absurdo. Logo (I_5) é satisfeita.

Desta forma, pelo Lema 4.8, temos que existe $u \in K_c$, tal que $I(u) > I(u_0)$ e $C_1(I, u) \neq 0$. Desde que, $C_1(I, 0) = 0$, segue que $u \neq 0$ e $u \neq u_0$, o que conclui a demonstração. ■

O próximo resultado garante a existência de mais um ponto crítico sob a condição (I_6) .

Teorema 4.12. *Suponha que $I \in C^2(H, \mathbb{R})$ e que $I''(u)$ é um operador de Fredholm, para todo $u \in K$. Vamos assumir que I satisfaz (I_0) , para $i \neq 1$, $(I_1) - (I_3)$, (I_6) e (Ce) . Então I possui pelo menos quatro pontos críticos em H , desde que possua um mínimo local $u_0 \neq 0$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que I possui apenas três pontos críticos em H , a saber $\{0, u_0, u_1\}$. De acordo com o Teorema 4.11, temos que u_0 é um ponto crítico isolado

em H e consequentemente,

$$C_q(I, u_0) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Como consequência do Lema 4.10, obtemos a existência de $u_1 \notin \{0, u_0\}$, tal que $I(u_1) > I(u_0)$ e

$$C_q(I, u_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Suponhamos agora que $I(u_0) < 0$, o caso em que $I(u_0) > 0$ é análogo a este caso. Pelo Lema 4.4, temos que existe d_0 , tal que para todo $d \leq d_0$, I^d é homotopicamente equivalente a um ponto. Sem perda de generalidade, vamos supor que $d_0 < I(u_0)$.

Seja então $I(u_0) < d_1 < \min\{0, I(u_1)\}$. Primeiramente, observe que $I^{d_0} \subset I^{d_1}$, pois $d_0 < I(u_0) < d_1$, portanto está bem definida as aplicações inclusão $i : I^{d_0} \rightarrow I^{d_1}$ e $j : (I^{d_1}, \emptyset) \rightarrow (I^{d_1}, I^{d_0})$. Pela definição da sequência exata do par topológico (I^{d_0}, I^{d_1}) , obtemos que

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_q(I^{d_0}, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_q(I^{d_1}, \emptyset) \xrightarrow{j_*} H_q(I^{d_0}, I^{d_1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(I^{d_0}, \emptyset) \longrightarrow \cdots$$

Além disso, acordo com a definição da d_0 , temos que

$$H_q(I^{d_0}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Portanto, de (4.11), (4.13) e da definição de sequência exata, obtemos que

$$H_q(I^{d_1}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

O argumento acima, utilizando a definição da sequência exata, será empregado recursivamente nesta demonstração. Por analogia, posteriormente, faremos apenas uma menção à utilização da definição da mesma.

Observe agora que, se $d_3 > \max\{0, I(u_1)\}$, sabemos o seguinte com respeito aos valores críticos de I , $0 = I(0)$ e $I(u_0) < I(u_1)$. Isto nos diz que no intervalo $[d_3, \infty)$, não há valores críticos de I . Portanto, pela observação 4.2, temos que I^{d_3} é um retrato de deformação de

H. Logo,

$$H_q(I^{d_3}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Vamos então estudar os possíveis casos para o valor de $I(u_1)$, isto é, quando $I(u_1) > 0$, $I(u_1) = 0$ ou quando $I(u_1) < 0$.

Primeiramente, consideremos o caso em que $I(u_1) < 0$. Seja $I(u_1) < d_2 < 0$. Note que $K_{I(u_1)} = \{u_1\}$ e, por construção, $d_1 < I(u_1)$. Assim, pela Proposição 4.3, temos que

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq C_q(I, u_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Da definição de sequência exata do par topológico (I^{d_2}, I^{d_1}) , (4.14) e (4.16), obtemos as seguintes possibilidades:

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

ou,

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Por outro lado, utilizando a definição de sequência exata do par topológico (I^{d_3}, I^{d_2}) , (4.15), (I_0) e pela Proposição 4.3, mais um argumento análogo ao utilizado para se calcular (4.16), obtemos as seguintes possíveis configurações para o grupo de homologia de $(I^{d_2}, \emptyset)$:

Se $i = 0$, na condição (I_0) , então

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) \simeq 0, \text{ para todo } q \geq 0. \quad (4.19)$$

Se $i = 1$, então

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Por fim, se $i \geq 2$, então

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = i - 1 \\ 0, & q \neq 0, i - 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Comparando (4.17) e (4.18) com (4.19), (4.20) e (4.21), obtemos configurações diferentes para os grupos de homologia de um mesmo par, o que é uma contradição.

Suponhamos agora que $I(u_1) > 0$. Neste caso, seja $0 < d_2 < I(u_1)$. Utilizando os argumentos anteriores, obtemos

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq C_q(I, 0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = i, \\ 0, & q \neq i, \end{cases} \quad (4.22)$$

e,

$$H_q(I^{d_3}, I^{d_2}) \simeq C_q(I, u_1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases} \quad (4.23)$$

Utilizando a sequência exata de homologia do par topológico (I^{d_3}, I^{d_2}) , (4.15) e (4.23) obtemos

$$H_q(I^{d_2}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

Vamos agora considerar a sequência de homologia do par topológico (I^{d_2}, I^{d_1}) e usando (4.14) e (4.24), temos as seguintes possibilidades:

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) = 0, \text{ para todo } q \geq 0, \quad (4.25)$$

ou,

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

Comparando (4.25) e (4.26) com (4.22), obtemos uma contradição.

Por fim, vamos analisar o caso em que $I(u_1) = 0$. Note que, neste caso, o valor crítico 0 está associado a dois pontos críticos $\{0, u_1\}$, pela Proposição 4.3, temos que

$$H_q(I^{d_3}, I^{d_1}) = C_q(I, 0) \oplus C_q(I, u_1). \quad (4.27)$$

Por (I_0) , temos que existe $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, tal que

$$C_q(I, 0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = i, \\ 0, & q \neq i. \end{cases} \quad (4.28)$$

Assim, por (4.12), (4.27) e (4.28), temos que

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus 0, & q = 1, \\ \mathbb{Z} \oplus 0, & q = i, \\ 0, & q \neq 0, i. \end{cases} \quad (4.29)$$

Por outro lado, utilizando a sequência exata do par topológico (I^{d_3}, I^{d_1}) e usando (4.14) e (4.15), obtemos as seguintes possibilidades:

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 1, \end{cases} \quad (4.30)$$

ou,

$$H_q(I^{d_2}, I^{d_1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (4.31)$$

Comparando (4.29) com (4.30) e (4.31), chegamos a um absurdo. Logo, I possui outro ponto crítico u_2 diferente de $0, u_0, u_1$. ■

5 EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS VIA TEORIA DE MORSE

Neste capítulo, seguindo os passos de (SILVA, 1996), estudaremos a existência e multiplicidade de soluções não triviais para uma classe de problemas elíptico semilinear via teoria de Morse. Aqui, não provaremos nenhum resultado específico envolvendo teoria de Morse, uma vez que estes já foram demonstrados nos capítulos 2 e 3. Neste momento nosso objetivo será garantir que o funcional associado ao problema abaixo satisfaz as hipóteses dos resultados envolvendo existência e multiplicidade de pontos críticos, abordados no capítulo 3. Considere então

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x, 0) \equiv 0$, e

(f₁) Existem $a_1, a_2 > 0$ e $0 < \sigma < \infty$ ($\sigma < \frac{4N}{(N-2)}$, se $N \geq 3$), tais que

$$|f_s(x, s)| \leq a_1 |s|^\sigma + a_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Neste capítulo, H denotará o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ cuja norma provém do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

5.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Nosso objetivo é encontrar soluções fracas de (5.1), isto é, determinar funções $u \in H$ tal que, para toda $v \in H$, temos a seguinte relação

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u(x))v \, dx.$$

Para tal, iremos definir um funcional associado ao problema (5.1) e garantir a existência de múltiplos pontos críticos não triviais desse funcional, e tais pontos críticos serão justamente as soluções que estamos buscando.

Definição 5.1. Considere o funcional não linear $I : H \rightarrow \mathbb{R}$, associado ao problema (5.1) definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, s) \, dx,$$

em que $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) \, dt$.

Observe que, para todo $u, v \in H$ temos

$$I'(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f(x, s) \, dx.$$

Portanto se $u \in H$ for ponto crítico de I , teremos que u é solução fraca de I . Além disso, em virtude da condição (f_1) , $I \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$.

Seja agora $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$, a sequência de autovalores do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Os grupos críticos de I serão estabelecidos a partir da relação entre $f(x, s)$ e a sequência de autovalores do problema (5.2). Para isto, serão necessárias as seguintes hipóteses adicionais sobre a $f(x, s)$:

(f_2) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f_s(x, 0) \equiv \lambda$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso, se λ é um autovalor do problema (5.2), isto é, $\lambda = \lambda_j$ para algum j , então existe $r > 0$ tal que, apenas uma das situações abaixo ocorre:

i) $f(x, s)s - \lambda s^2 \geq 0$, para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq r$, ou,

ii) $f(x, s)s - \lambda s^2 \leq 0$, para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq r$.

Nosso objetivo é estudar o problema (5.1) quando $f(x, s)$ possui um crescimento superlinear para $s \leq 0$. Vamos supor ainda que $F(x, s)$ é limitada superiormente por $\frac{\lambda_1 s^2}{2}$, quando $s \leq 0$. Desta forma, vamos assumir que

(f_3) $\frac{F(x, s)}{s^2} \rightarrow \infty$, quando $s \rightarrow +\infty$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$.

(f_4) Existem $a_3 > 0$ e $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida de Lebesgue positiva, tais que

i) $\frac{1}{2} \lambda_1 s^2 - F(x, s) \geq -a_3$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $s \leq 0$;

ii) $\frac{1}{2} \lambda_1 s^2 - F(x, s) \rightarrow \infty$, quando $s \rightarrow -\infty$ e para todo $x \in \Omega_0$.

(f_5) Existe $a_4 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}f(x, s)s - F(x, s) \geq -a_4, \quad \forall s < 0 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Por fim, no caso em que s é não negativo, afim de utilizarmos a condição generalizada de Cerami, vamos considerar a versão superquadrática empregada por Ambrosetti-Rabinowitz descrita abaixo.

(f_6) Existem $\theta > 2$, $2 \leq p < \infty$, $p - 2 < \mu$ ($\mu > \frac{N(p-2)}{2}$, se $N \geq 3$) e constantes positivas a_5, a_6, a_7 e a_8 , tais que

- i) $F(x, s) - \frac{1}{\theta}f(x, s)s \leq a_5|s|^p + a_6$, e
- ii) $\frac{1}{2}f(x, s)s - F(x, s) \geq a_7|s|^\mu - a_8$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $s \geq 0$.

Nós podemos sempre supor que $\mu \leq p$. Além disso, se $N \geq 3$, sem perda de generalidade, temos que $p < \frac{2N}{(N-2)}$. Note que a condição superquadrática em (AMBROSETTI; RABINOWITZ, 1973) implica (f_3) e (f_6) com $\mu = p = 2$.

5.2 EXISTÊNCIA AO MENOS UMA SOLUÇÃO NÃO NULA

Nesta seção, nosso objetivo central será demonstrar o Teorema abaixo, que estabelece que mediante as condições (f_1) – (f_6), o problema (5.1) possui ao menos uma solução não nula.

Teorema 5.2. *Suponha que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x, 0) \equiv 0$ e f satisfaz (f_1) – (f_6). Então, o problema (5.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

No capítulo anterior, provamos um resultado geral que garante que se um funcional $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e satisfaz as condições (Ce), (I_0) – (I_3) então I possui ao menos um ponto crítico diferente de zero em H . Então, para demonstramos o Teorema 5.2 é suficiente mostrar que o funcional associado ao problema (5.1) satisfaz tais condições. O qual o faremos nesta seção.

Lema 5.3. *Suponha que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz (f_1), (f_4) e (f_6). Então, o funcional I , associado ao problema (5.1), satisfaz a condição de Cerami (Ce).*

Demonstração: Seja $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset H$ uma sequência satisfazendo as seguintes condições:

- i) $I(u_m) \rightarrow c$, quando $m \rightarrow \infty$;

ii) $\|I'(u_m)\|(1 + \|u_m\|) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Queremos mostrar que esta sequência possui uma subsequência convergente, para tal, mostremos inicialmente que esta é limitada. Nosso objetivo então será garantir que as sequências $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(u_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$ são limitadas em H .

Mostremos primeiramente que $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Por i), tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_m) \leq |I(u_m)| < \frac{1}{2} + c, \quad \forall m \geq m_0.$$

Por ii), tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $m'_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_m)\|(1 + \|u_m\|) < 1, \quad \forall m \geq m'_0.$$

Desta forma, tomando $m''_0 = \max\{m_0, m'_0\}$, usando a desigualdade triangular e o fato de que, por definição $I'(u_m)$ é uma transformação linear e, portanto, $|I'(u_m)(u_m^+)| \leq \|I'(u_m)\| \|u_m^+\|$ segue que se $m \geq m''_0$, então

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) &\leq \left| I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) \right| \\ &\leq |I(u_m)| + \left| \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) \right| \\ &\leq |I(u_m)| + \frac{1}{2}\|I'(u_m)\| \|u_m^+\| \\ &\leq |I(u_m)| + \frac{1}{2}\|I'(u_m)\| \|u_m\| \\ &< \frac{1}{2} + c + \frac{1}{2} \\ &= c + 1. \end{aligned}$$

No que segue a seguinte desigualdade

$$I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) \leq c + 1. \quad (5.3)$$

Por outro lado, pela definição de I , temos que

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) &= \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m) \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla u_m^+ \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m^+ \, dx. \end{aligned}$$

Além disso, como u_m^+ e u_m^- são ortogonais, segue que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_m \cdot \nabla u_m^+ &= \nabla(u_m^+ + u_m^-) \cdot \nabla u_m^+ \\
 &= (\nabla u_m^+ + \nabla u_m^-) \cdot \nabla u_m^+ \\
 &= \nabla u_m^+ \cdot \nabla u_m^+ + \nabla u_m^- \cdot \nabla u_m^+ \\
 &= \nabla u_m^+ \cdot \nabla u_m^+ \\
 &= |\nabla u_m^+|^2.
 \end{aligned}$$

Escreva $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, onde $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u_m(x) \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u_m(x) < 0\}$.

Como Ω^+ e Ω^- são disjuntos, $u_m^+ \equiv 0$ em Ω^- e $u_m^- \equiv 0$ em Ω^+ e $f(x, 0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m^+ dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} f(x, u_m) u_m^+ dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-} f(x, u_m) u_m^+ dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} f(x, u_m^+) u_m^+ dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-} f(x, u_m^-) u_m^+ dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} f(x, u_m^+) u_m^+ dx + 0 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} f(x, u_m^+) u_m^+ dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-} f(x, u_m^+) u_m^+ dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_m^+) u_m^+ dx.
 \end{aligned}$$

Ainda, por um argumento análogo ao construído acima, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} F(x, u_m) dx = \int_{\Omega} F(x, u_m^+) dx + \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx.$$

Usando a definição da norma em H , temos que

$$\begin{aligned}
 \|u_m\|^2 &= \langle u_m, u_m \rangle \\
 &= \langle u_m^+ + u_m^-, u_m^+ + u_m^- \rangle \\
 &= \|u_m^+\|^2 + 2\langle u_m^+, u_m^- \rangle + \|u_m^-\|^2 \\
 &= \|u_m^+\|^2 + \|u_m^-\|^2.
 \end{aligned}$$

Das igualdades acima,

$$\begin{aligned}
 I(u_m) - \frac{1}{2} I'(u_m)(u_m^+) &= \frac{1}{2} \|u_m^+\|^2 + \frac{1}{2} \|u_m^-\|^2 \\
 &\quad - \int_{\Omega} F(x, u_m^+) dx - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \|u_m^+\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_m^+) u_m^+ dx.
 \end{aligned}$$

Portanto, por $(f_6)(ii)$, segue que

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) &= \frac{1}{2}\|u_m^-\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, u_m^+)u_m^+ - F(x, u_m^+) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_m^-\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\ &\quad + a_7 \int_{\Omega} |u_m^+|^{\mu} dx - a_8|\Omega|. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) &\geq \frac{1}{2}\|u_m^-\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\ &\quad + a_7 \int_{\Omega} |u_m^+|^{\mu} dx - a_{10}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por (5.2) e (5.4) concluímos que

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq I(u_m) - \frac{1}{2}I'(u_m)(u_m^+) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_m^-\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7|u_m^+|^{\mu} - a_{10}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$c + 1 + a_{10} \geq \frac{1}{2}\|u_m^-\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7|u_m^+|^{\mu}. \quad (5.5)$$

Neste momento, nosso objetivo será escrever $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ de forma conveniente como a soma de duas sequências limitadas em H . Para tal, seja φ_1 a autofunção positiva e normalizada associada a λ_1 . Consideremos agora o subespaço de H gerado por φ_1 , o qual denotaremos por $\langle \varphi_1 \rangle$. Tal subespaço é fechado, pois dada $\zeta \in \overline{\langle \varphi_1 \rangle}$, temos que $\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m$, onde $h_m \in \langle \varphi_1 \rangle$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Uma vez que $h_m \in \langle \varphi_1 \rangle$, temos que existe $\alpha_m \in \mathbb{R}$ tal que $h_m = \alpha_m \varphi_1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Denotando por $\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$, temos que, $\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \varphi_1 = \alpha \varphi_1$, uma vez que φ_1 não depende de m . Portanto $\zeta \in \langle \varphi_1 \rangle$, o que implica dizer que $\langle \varphi_1 \rangle$ é fechado. Sendo H um espaço de Hilbert e $\langle \varphi_1 \rangle$ um subespaço fechado, temos que $H = \langle \varphi_1 \rangle \oplus \langle \varphi_1 \rangle^{\perp}$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos escrever $u_m^- = t_m \varphi_1 + w_m$, $w_m \in \langle \varphi_1 \rangle^{\perp}$ e $t_m \in \mathbb{R}$. Mostremos então que $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ são sequências limitadas. Pela caracterização variacional dos autovalores do problema (5.2), temos que

$$\lambda_1 = \inf_{u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_2 = \inf_{v \in \langle \varphi_1 \rangle^{\perp}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}. \quad (5.7)$$

Portanto, de (5.6) e (5.7) seguem as desigualdades

$$\lambda_1 |u|_2^2 \leq \|u\|^2, \quad \forall u \neq 0; \quad (5.8)$$

e,

$$\lambda_2 |v|_2^2 \leq \|v\|^2, \quad \forall v \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp. \quad (5.9)$$

De (5.5) e da igualdade $u_m^- = t_m \varphi_1 + w_m$, temos que

$$c + 1 + a_{10} \geq \frac{1}{2} \|t_m \varphi_1 + w_m\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu}.$$

Como φ_1 e w_m são ortogonais, a seguinte igualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} \|t_m \varphi_1 + w_m\|^2 &= \langle t_m \varphi_1 + w_m, t_m \varphi_1 + w_m \rangle \\ &= \langle t_m \varphi_1, t_m \varphi_1 \rangle + 2 \langle t_m \varphi_1, w_m \rangle + \langle w_m, w_m \rangle \\ &= \|t_m \varphi_1\|^2 + \|w_m\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \|t_m \varphi_1 + w_m\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{2} \|t_m \varphi_1\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu}. \quad (5.10)$$

De (5.8) para $u = t_m \varphi_1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|t_m \varphi_1\|^2 &\geq \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} |t_m \varphi_1|^2 dx \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} |u_m^- - w_m|^2 dx \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u_m^-)^2 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} u_m^- w_m dx + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (w_m)^2 dx \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u_m^-)^2 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} (t_m \varphi_1 + w_m) w_m dx + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (w_m)^2 dx \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u_m^-)^2 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} t_m \varphi_1 w_m dx - \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (w_m)^2 dx. \end{aligned}$$

Observe ainda que, uma vez que φ_1 é solução do problema (5.2) e φ_1 é ortogonal a w_m , temos que

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla (t_m w_m) dx = \int_{\Omega} \lambda_1 \varphi_1 (t_m w_m) dx. \quad (5.11)$$

Segue de (5.9) aplicada a $w_m \in \langle \varphi_1 \rangle^\perp$ e de (5.11), que

$$\frac{1}{2} \|t_m \varphi_1\|^2 \geq \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u_m^-)^2 dx - \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (w_m)^2 dx \geq \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u_m^-)^2 dx - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \|w_m\|^2. \quad (5.12)$$

Desta forma, concluímos por (5.10) e por (5.12) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|t_m \varphi_1 + w_m\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu} &\geq \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_2} \|w_m\|^2 + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu} \\ &+ \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_1}{2} (u_m^-)^2 - F(x, u_m^-) \right] dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Por (5.5) e (5.13), temos

$$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_2} \|w_m\|^2 + a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu} + \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_1}{2} (u_m^-)^2 - F(x, u_m^-) \right] dx \leq c + 1 + a_{10} = a_{11}. \quad (5.14)$$

Por $(f_4)(i)$,

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_1}{2} (u_m^-)^2 - F(x, u_m^-) \right] dx \geq \int_{\Omega} a_6 dx = a_6 |\Omega|. \quad (5.15)$$

Por (5.14), (5.15) e sendo $a_7 |u_m^+|_{\mu}^{\mu}, a_6 |\Omega| \geq 0$, temos que

$$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_2} \|w_m\|^2 \leq a_{11},$$

o que implica dizer que $\|w_m\|^2 \leq a_{11} \frac{2\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} = M$, ou seja, $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em H . Uma vez que $H \hookrightarrow L^q(\Omega)$ compactamente, para todo $q \in [1, 2^*)$, temos que, a menos de subsequência, existe $w \in \langle \varphi_1 \rangle^{\perp}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_m \rightharpoonup w, & \text{fraco em } H_0^1(\Omega), \\ w_m \rightarrow w, & \text{forte em } L^q(\Omega), \\ w_m(x) \rightarrow w(x), & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |w_m(x)| \leq h_q(x), & \text{q.t.p em } \Omega, h_q \in L^q(\Omega), \end{array} \right. \quad (5.16)$$

em que, $1 \leq q < \infty$ e $q < \frac{2N}{(N-2)}$ se $N \geq 3$. Mostremos então que $(t_m)_{m \in \mathbb{R}}$ é uma sequência limitada. Para tal, suponhamos por absurdo, que $t_m \rightarrow +\infty$ ou $t_m \rightarrow -\infty$, quando $m \rightarrow \infty$. Se $t_m \rightarrow +\infty$, quando $m \rightarrow +\infty$, fixado $x_0 \in \Omega$, por (5.16) temos que existe $h_q \in L^q(\Omega)$, que não depende de m , tal que

$$-h_q(x_0) \leq w_m(x_0) \leq h_q(x_0). \quad (5.17)$$

Somando $t_m \phi_1(x_0)$ na desigualdade (5.17), obtemos

$$-h_q(x_0) + t_m \phi_1(x_0) \leq t_m \phi_1(x_0) + w_m(x_0) \leq h_q(x_0) + t_m \phi_1(x_0).$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, segue que

$$u_m^-(x_0) = t_m \phi_1(x_0) + w_m(x_0) \rightarrow +\infty,$$

uma vez que $\varphi_1(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. O que é um absurdo, uma vez que $u_m^-(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$, logo o caso $t_m \rightarrow +\infty$, quando $m \rightarrow +\infty$, não ocorre.

Por outro lado, se $t_m \rightarrow -\infty$, quando $m \rightarrow +\infty$, então $u_m^- = t_m \varphi + w_m \rightarrow -\infty$. A condição $(f_4)(ii)$ nos diz que existe Ω_0 com medida de Lebesgue positiva tal que

$$\frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-)^2 - F(x, u_m^-) \rightarrow +\infty, \quad (5.18)$$

para todo $x \in \Omega_0$. A condição (5.18) nos diz que dado $\varepsilon = 1$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$, então $\frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-)^2 - F(x, u_m^-) > 1$, para todo $x \in \Omega_0$. Isto nos diz que, a sequência de funções $h_m : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h_m(x) = \frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-(x))^2 - F(x, u_m^-(x))$ é não negativa para $m \geq m_0$. Além disso, de (5.14), segue que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-(x))^2 - F(x, u_m^-(x)) \right] dx \leq a_{11}. \quad (5.19)$$

O que implica dizer que

$$\sup_m \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-(x))^2 - F(x, u_m^-(x)) \right] dx \leq a_{11}.$$

Escrevendo $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_0^c$, por $(f_4)(i)$, temos que para $m \geq m_0$

$$\int_{\Omega} h_m(x) dx = \int_{\Omega_0} h_m(x) dx + \int_{\Omega_0^c} h_m(x) dx \geq \int_{\Omega_0^c} h_m(x) dx - a_6 |\Omega_0^c|. \quad (5.20)$$

Por (5.20) e pelo Lema de Fatou, para $m \geq m_0$ temos

$$\liminf \int_{\Omega} h_m(x) dx + a_6 |\Omega_0^c| \geq \liminf \int_{\Omega_0} h_m(x) dx \geq \int_{\Omega_0} \liminf h_m(x) dx. \quad (5.21)$$

A condição (5.18) e a desigualdade (5.21) nos diz que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\lambda_1(u_m^-(x))^2 - F(x, u_m^-(x)) \right] dx \rightarrow +\infty, \quad (5.22)$$

quando $m \rightarrow +\infty$, o que é um absurdo, por (5.19). Logo $(t_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada e, consequentemente, temos que $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em H .

Mostremos então que $(u_m^+)_{m \in \mathbb{M}}$ é limitada em H . Para tal, seja $N \geq 3$ e $s \in [0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{s}{\mu} + \frac{(1-s)}{2^*}. \quad (5.23)$$

Isto implica dizer que

$$1 = \frac{ps}{\mu} + \frac{p(1-s)}{2^*} = \frac{1}{\frac{\mu}{ps}} + \frac{1}{\frac{2^*}{p(1-s)}}.$$

Escrevendo $p = ps + p(1 - s)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
 |u_m^+|_p^p &= \int_{\Omega} (u_m)^p dx = \int_{\Omega} (u_m)^{ps+p(1-s)} dx = \int_{\Omega} (u_m)^{ps} (u_m)^{p(1-s)} dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} (u_m)^{ps \frac{\mu}{ps}} dx \right)^{\frac{ps}{\mu}} \left(\int_{\Omega} (u_m)^{p(1-s) \frac{2^*}{p(1-s)}} dx \right)^{\frac{p(1-s)}{2^*}} \\
 &\leq \left[\left(\int_{\Omega} (u_m)^{\mu} dx \right)^{\frac{1}{\mu}} \right]^{ps} \left[\left(\int_{\Omega} (u_m)^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \right]^{p(1-s)} \\
 &= |u_m^+|_{\mu}^{ps} |u_m^+|_{2^*}^{p(1-s)}.
 \end{aligned}$$

Extraindo a raiz p -ésima na desigualdade acima, obtemos

$$|u_m^+|_p \leq |u_m^+|_{\mu}^s |u_m^+|_{2^*}^{(1-s)}. \quad (5.24)$$

Uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, decorre que $|u_m^+|_{2^*}^{(1-s)} \leq a_{13} \|u_m^+\|^{(1-s)}$, assim (5.24) implica que

$$|u_m^+|_p \leq |u_m^+|_{\mu}^s |u_m^+|_{2^*}^{(1-s)} \leq a_{13} \|u_m^+\|^{(1-s)} |u_m^+|_{\mu}^s. \quad (5.25)$$

Além disso, de (5.5) temos que $|u_m^+|_{\mu}^s \leq c$, para alguma constante $c > 0$. Portanto, de (5.25), concluímos a desigualdade

$$|u_m^+|_p \leq a_{14} \|u_m^+\|^{(1-s)}. \quad (5.26)$$

Por outro lado, segue da condição (f_1) , que existem constantes $a_1, a_2 > 0$, de modo que

$$|f_s(x, s)| \leq a_1 |s|^{\sigma} + a_2. \quad (5.27)$$

Integrando (5.27) duas vezes com relação à s , obtemos que para certas constantes positivas c_1 e c_2 , a desigualdade a seguir é satisfeita:

$$F(x, s) \leq |F(x, s)| \leq c_1 |s|^{\sigma+2} + c_2 |s|^2. \quad (5.28)$$

A condição $(f_6)(ii)$, nos diz que existe $\theta > 2$, $2 \leq p < \infty$, $p - 2 < \mu$ e constantes $a_5, a_6 > 0$ tal que

$$F(x, s) - \frac{1}{\theta} f(x, s) s \leq a_5 |s|^p + a_6, \quad (5.29)$$

para todo $s \geq 0$. Reescrevendo (5.29), temos

$$-F(x, s) \geq -a_5 |s|^p - a_6 - \frac{1}{\theta} f(x, s) s, \quad (5.30)$$

para todo $s \geq 0$. Observe agora que pela definição de I e por (5.30), segue

$$\begin{aligned}
I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^+) u_m^+ dx + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^-) u_m^- dx \\
&\quad - \int_{\Omega} F(x, u_m^+) dx - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^+) u_m^+ dx + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^-) u_m^- dx \\
&\quad - a_5 |u_m^+|_p^p - a_6 - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^+) u_m^+ dx - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^-) u_m^- dx - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
&\quad - a_5 |u_m^+|_p^p - a_6 |\Omega|.
\end{aligned}$$

Por (f_1) , temos que existem constantes positivas b_1 e b_2 , tais que

$$f(x, u_m^-) \leq b_1 |u_m^-|^{\sigma+1} + b_2 |u_m^-|. \quad (5.31)$$

Como $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada, decorre de (5.31) que $f(x, u_m^-) \leq k$, onde $k > 0$ é uma constante. Uma vez que $u_m^-(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$, e $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada, e portanto limitada inferiormente, temos que

$$f(x, u_m^-) u_m^- \geq k u_m^- \geq d_1, \quad (5.32)$$

onde d_1 é uma constante possivelmente negativa. Desta forma, (5.32) implica que

$$\begin{aligned}
I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_m^-) u_m^- dx - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 + \frac{d_1 |\Omega|}{\theta} - \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx \\
&\quad - a_5 |u_m^+|_p^p - a_6 |\Omega|.
\end{aligned} \quad (5.33)$$

Reescrevendo (5.33), usando (5.2) e o fato de que $(u_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_m\|^2 &\leq I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) - \frac{d_1 |\Omega|}{\theta} + \int_{\Omega} F(x, u_m^-) dx + a_5 |u_m^+|_p^p + a_6 |\Omega| \\
&\leq I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) - \frac{d_1 |\Omega|}{\theta} + \int_{\Omega} [c_1 |u_m^-|^{\sigma+2} + c_2 |u_m^-|^2] dx \\
&\quad + a_5 |u_m^+|_p^p + a_6 |\Omega| \\
&\leq I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) - \frac{d_1 |\Omega|}{\theta} + k_2 |\Omega| + a_5 |u_m^+|_p^p + a_6 |\Omega|.
\end{aligned} \quad (5.34)$$

Por um argumento similar ao utilizado em (5.2), temos que existe uma constante c_4 , tal que

$$I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m)(u_m) \leq c_4. \quad (5.35)$$

De (5.34) e (5.35), temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_m^+\|^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_m\|^2 \leq a_5 |u_m|_p^p + k_1, \quad (5.36)$$

onde $k_1 > 0$ é uma constante. Portanto, de (5.26) e (5.36) podemos concluir que

$$\|u_m^+\|^2 \leq h_2 \|u_m^+\|^{p(1-s)} + k_3, \quad (5.37)$$

onde $k_3 > 0$ é uma constante. Da relação (5.23), temos que $\frac{1}{p} \leq \frac{s}{\mu}$, o que implica dizer que $\mu \leq ps$. De (f_6) , temos que $\mu > p-2$, portanto $p-2 < ps$, ou seja, $p(1-s) < 2$. Isto mostra que a sequência $(u_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em H . De fato, suponha por absurdo, que $(u_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$ não é limitada. Isto implica dizer que $\|u_m\| \rightarrow +\infty$, quando $m \rightarrow \infty$. De (5.37), temos que

$$\|u_m^+\|^{2-p(1-s)} \leq h_2 + \frac{h_3}{\|u_m^+\|^{p(1-s)}},$$

isto é,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m^+\|^{2-p(1-s)} \leq h_2.$$

Portanto, temos que $\|u_m^+\| \leq h_2^{\frac{1}{2-p(1-s)}}$, para m suficientemente grande. Isto nos diz que $\|u_m^+\| \leq C$, para alguma constante $C > 0$. Segue então que $(u_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em H e, por fim, obtemos que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em H , como queríamos demonstrar.

Mostremos então que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Como H é um espaço de Banach, e portanto reflexivo, temos que existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ a qual denotaremos por $(u_{m_j})_{m_j \in \mathbb{N}}$ e $u \in H$, tal que $u_{m_j} \rightharpoonup u$ em H . Nosso objetivo então será mostrar que $u_{m_j} \rightarrow u$ em H , ou de forma equivalente, $\|u_{m_j} - u\| \rightarrow 0$. Pela imersão de Sobolev, temos que $H \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < 2^*$, assim temos que $|u_{m_j} - u|_q^q \rightarrow 0$ em $L^q(\Omega)$. Desta forma, note primeiramente que

$$I'(u_{m_j})(u_{m_j}) = \|u_{m_j}\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_{m_j}) u_{m_j} \, dx. \quad (5.38)$$

Reescrevendo (5.38), obtemos

$$\|u_{m_j}\|^2 = I'(u_{m_j})(u_{m_j}) + \int_{\Omega} f(x, u_{m_j}) u_{m_j} \, dx. \quad (5.39)$$

Analogamente

$$I'(u_{m_j})(u) = \langle u_{m_j}, u \rangle - \int_{\Omega} f(x, u_{m_j}) u \, dx. \quad (5.40)$$

Portanto, de (5.40), temos

$$\langle u_{m_j}, u \rangle = I'(u_{m_j})(u) + \int_{\Omega} f(x, u_{m_j})u \, dx. \quad (5.41)$$

Por outro lado, temos que

$$\|u_{m_j} - u\|^2 = \|u_{m_j}\|^2 - \langle u_{m_j}, u \rangle - \langle u, u_{m_j} \rangle + \|u\|^2. \quad (5.42)$$

Como $I'(u_{m_j})$ é uma transformação linear, segue que

$$\|u_{m_j} - u\|^2 = I'(u_{m_j})(u_{m_j} - u) + \int_{\Omega} f(x, u_{m_j})(u_{m_j} - u) \, dx - \langle u, u_{m_j} \rangle + \|u\|^2. \quad (5.43)$$

Nosso objetivo então será mostrar que

- $I'(u_{m_j})(u_{m_j} - u) \rightarrow 0$;
- $\int_{\Omega} f(x, u_{m_j})(u_{m_j} - u) \, dx \rightarrow 0$;
- $\|u\|^2 - \langle u, u_{m_j} \rangle \rightarrow 0$, quando $m_j \rightarrow +\infty$.

De fato, primeiramente, observe que, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, por (5.16) e por (f_1) , temos que

$$\int_{\Omega} f(x, u_{m_j})(u_{m_j} - u) \, dx \rightarrow 0.$$

Ainda, sendo H um espaço de Hilbert e $u_{m_j} \rightharpoonup u$, temos que $\langle u_{m_j}, u \rangle \rightarrow \langle u, u \rangle = \|u\|^2$, ou de forma equivalente, $\|u\|^2 - \langle u_{m_j}, u \rangle \rightarrow 0$, quando $m_j \rightarrow +\infty$. Por fim, observe que

$$|I'(u_{m_j})(u_{m_j})| \leq \|I'(u_{m_j})\| \|u_{m_j}\| \leq \|I'(u_{m_j})\|(1 + \|u_{m_j}\|).$$

Da condição de Cerami, temos que $\|I'(u_{m_j})\|(1 + \|u_{m_j}\|) \rightarrow 0$, quando $m_j \rightarrow +\infty$, portanto $I'(u_{m_j})(u_{m_j}) \rightarrow 0$. Observe também que $\|I'(u_{m_j})\| \rightarrow 0$, pois

$$\|I'(u_{m_j})\| \leq \|I'(u_{m_j})\|(1 + \|u_{m_j}\|).$$

Uma vez que $\|I'(u_{m_j})\|(1 + \|u_{m_j}\|) \rightarrow 0$ então $\|I'(u_{m_j})\| \rightarrow 0$, quando $m_j \rightarrow \infty$ o que implica dizer que

$$|I'(u_{m_j})(u)| \leq \|I'(u_{m_j})\| \|u\|.$$

Desta forma, $I'(u_{m_j})(u) \rightarrow 0$, quando $m_j \rightarrow +\infty$. Isto mostra que

$$I'(u_{m_j})(u_{m_j} - u) = I'(u_{m_j})(u_{m_j}) - I'(u_{m_j})(u) \rightarrow 0,$$

quando $m_j \rightarrow +\infty$. Logo $\lim_{m_j \rightarrow +\infty} \|u_{m_j} - u\| = 0$, como queríamos demonstrar. Portanto, o funcional I satisfaz a condição de Cerami. ■

O próximo resultado estabelece que o funcional I satisfaz a condição (I_0) .

Lema 5.4. *Suponha que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x, 0) \equiv 0$, e satisfaz (f_1) e (f_2) . Então,*

$$C_q(I, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = i, \\ 0, & q \neq i, \end{cases}$$

em que

i) $i = j$ se $\lambda_j < \lambda_{j+1}$, $\lambda_j \leq \lambda \leq \lambda_{j+1}$ e $f(x, s)$ satisfaz $(f_2)(i)$ $[(f_2)(ii)]$ quando $\lambda = \lambda_j$ $[\lambda = \lambda_{j+1}]$;

ii) Se $-\infty < \lambda \leq \lambda_1$ e $f(x, s)$ satisfaz $(f_2)(ii)$ para $\lambda = \lambda_1$, então $i = 0$.

Demonstração: Suponha que (f_2) é satisfeita. Assim, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que, $f_s(x, 0) \equiv \lambda$, para todo $x \in \Omega$. Observe então que existem duas possibilidades para λ , isto é, ou λ é um autovalor do problema (5.2) ou $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Desta forma, a demonstração será dividida em dois casos.

No primeiro caso, vamos supor que $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. É suficiente mostrarmos então que 0 é um ponto critico não degenerado de I em H , pois se isso ocorrer, em virtude do Lema de Morse temos que 0 é um ponto crítico isolado de I , portanto se 0 for um ponto critico não degenerado, segue de (3.27) que

$$C_q(I, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = m(0), \\ 0, & q \neq m(0), \end{cases}$$

em que, $m(0)$ denota o índice de Morse de 0. De acordo com a definição 3.24, devemos mostrar que o operador linear $L : H \rightarrow H$ definido por $I''(0)(v, w) = \langle L(v), w \rangle$ é invertível. Para tal, mostremos que L é injetivo e sobrejetivo. Seja então $u_0 \in \ker(L)$, isto é, $L(u_0) = 0$. Assim, para todo $w \in H$, temos que $I''(0)(u_0, w) = 0$. Mas por definição, temos que

$$I''(0)(u_0, w) = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Omega} f_s(x, 0) u_0 w \, dx = 0, \quad (5.44)$$

para todo $w \in H$. Por (f_2) , temos que existe λ , que neste caso não é autovalor do problema (5.2), tal que $f_s(x, 0) = \lambda$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Reescrevendo (5.44) obtemos

$$\int_{\Omega} [\nabla u_0 \cdot \nabla w - \lambda u_0 w] \, dx = 0, \quad (5.45)$$

para todo $w \in H$. Por definição, isto implica dizer que u_0 é uma solução fraca do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u_0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.46)$$

Mas, como λ não é autovalor do Laplaciano, temos que $u_0 \equiv 0$, ou seja, L é injetiva. Vamos mostrar agora que $L = I''(0) : H \rightarrow H$, pode ser expresso da forma $L = Id - K$, onde K é um operador compacto. Isto nos garantirá a sobrejetividade de L , pois sendo L injetivo, pela Alternativa de Fredholm 2.81, teremos que L será sobrejetivo. Para tal, primeiramente note que pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existe uma aplicação linear e contínua $K : H \rightarrow H$, tal que

$$\langle K(v), w \rangle = \int_{\Omega} f_s(x, 0)vw \, dx. \quad (5.47)$$

Assim, temos que para todo $v, w \in H$

$$I''(0)(v, w) = \langle L(v), w \rangle = \langle I(v), w \rangle - \langle K(v), w \rangle = \langle (I - K)(v), w \rangle. \quad (5.48)$$

Desta forma, concluímos que para todo $v, w \in H$ $\langle (L - I + K)(v), w \rangle = 0$. Tomando então $w = (L - I + K)(v)$, temos que $\langle (L - I + K)(v), (L - I + K)(v) \rangle = 0$, isto é, $L = I - K$. Basta mostrarmos então que K é um operador compacto, pois até então o mesmo é somente linear, contínuo e bijetivo. Seja então $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em H . Sendo H um espaço reflexivo e $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ limitada, temos que existe $v \in H$ tal que, a menos de subsequência, $v_m \rightharpoonup v$ em H .

Como $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $v_m \rightarrow v$, quando $m \rightarrow +\infty$ em $L^2(\Omega)$. Vamos mostrar então que $K(v_m) \rightarrow K(v)$ em H . De fato, por (5.47) e sendo $f_s(x, 0) = \lambda$, temos

$$\begin{aligned} \|K(v_m) - K(v)\|^2 &= \langle K(v_m) - K(v), K(v_m) - K(v) \rangle \\ &= \langle K(v_m), K(v_m) - K(v) \rangle - \langle K(v), K(v_m) - K(v) \rangle \\ &= \int_{\Omega} \lambda v_m (K(v_m) - K(v)) \, dx - \int_{\Omega} \lambda v (K(v_m) - K(v)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda (v_m - v) (K(v_m) - K(v)) \, dx. \end{aligned}$$

Seja $p = 2$ e $q = 2$ seu expoente conjugado. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\|K(v_m) - K(v)\|^2 \leq |\lambda| \|v_m - v\|_2 \|K(v_m) - K(v)\|_2. \quad (5.49)$$

Pela caracterização variacional do primeiro autovalor do Laplaciano (5.6) aplicada ao operador $K(v_m) - K(v)$ temos que

$$\|K(v_m) - K(v)\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|K(v_m) - K(v)\|. \quad (5.50)$$

Por (5.49) e (5.50), temos que

$$\|K(v_m) - K(v)\| \leq \frac{|\lambda|}{\lambda_1} |v_m - v|_2. \quad (5.51)$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$ em (5.51), temos que

$$\|K(v_m) - K(v)\| \rightarrow 0, \text{ em } H.$$

Portanto, K é compacto. Segue então que L é bijetiva e portanto 0 é um ponto crítico não degenerado de I , como queríamos demonstrar.

No segundo caso, vamos supor que $\lambda = \lambda_j$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ e $(f_2)(i)$ é satisfeita. Seja $a > 0$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) + au, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.52)$$

e o seu funcional associado dado por $I_a(u) = I(u) - \frac{1}{2}a|u|_2^2 \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$. Vamos mostrar que existe $a_0 > 0$ e $\rho > 0$ tais que para todo $a \leq a_0$, a origem é a única solução de (5.52) em $B(0, \rho)$. De fato, suponhamos por absurdo que, dados $\rho > 0$ e $a > 0$, exista $u \neq 0$, tal que $u \in B(0, \rho)$ e $I'_a(u) = 0$. Seja então $a \leq 1$, pela teoria de regularidade para equações elípticas, podemos encontrar $\rho > 0$ tal que se $I'_a(u) = 0$ e $\|u\| \leq \rho$, então $|u|_\infty \leq r$, onde r é definido na condição (f_2) .

Vamos definir então

$$m_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x, u(x))}{u(x)} + a, & u(x) \neq 0 \\ \lambda_j + a, & u(x) = 0. \end{cases} \quad (5.53)$$

Mostremos então que existe $a_0 > 0$, tal que

$$\lambda_j < m_a(x) < \lambda_{j+1}, \quad \text{para todo } a \leq a_0. \quad (5.54)$$

De fato, por um lado note que se $u(x) \neq 0$, por $(f_2)(i)$, existe $r > 0$ tal que se $|s| \leq r$, então

$$f(x, s)s - \lambda_j s^2 \geq 0.$$

Por definição da norma em L^∞ , temos que $|u(x)| \leq \|u\|_\infty \leq r$, assim para $s = u(x)$, temos que

$$f(x, u(x))u(x) - \lambda_j u^2(x) \geq 0.$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{u^2(x)} > 0$, obtemos

$$\frac{f(x, u(x))}{u(x)} \geq \lambda_j.$$

Somando $a > 0$ na desigualdade acima, sabemos que $a + \lambda_j > a$, assim

$$\frac{f(x, u(x))}{u(x)} + a \geq \lambda_j + a > \lambda_j.$$

Por outro lado, por definição de derivada, temos que $f_s(x, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} = \lambda_j$, uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$. Além disso, sabemos que $\lambda_j < \lambda_{j+1}$, o que implica dizer que $\lambda_{j+1} - \lambda_j > 0$. Fixemos $a_0 \in (0, \lambda_{j+1} - \lambda_j)$ que é infinito e não enumerável. Assim, temos que se $a \leq a_0$, então $\lambda_j + a < \lambda_{j+1}$, pois $a_0 \in (0, \lambda_{j+1} - \lambda_j)$ implica dizer que $a_0 < \lambda_{j+1} - \lambda_j$, portanto $a + \lambda_j \leq a_0 + \lambda_j < \lambda_{j+1}$. Assim, temos que para todo $0 < a \leq a_0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} + a = \lambda_j + a < \lambda_{j+1}, \quad (5.55)$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$. Tomando $\varepsilon = \lambda_{j+1} - \lambda_j > 0$ na definição de limite, obtemos que existe $r > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |s| < r, \text{ então } \frac{f(x, s)}{s} + a \leq \left| \frac{f(x, s)}{s} + a \right| < \lambda_{j+1}.$$

Isto nos diz que se $0 < |s| \leq r$, então $\frac{f(x, s)}{s} + a < \lambda_{j+1}$. Desta forma, como $|u(x)| \leq r$, então:

$$\frac{f(x, u(x))}{u(x)} + a < \lambda_{j+1}.$$

Portanto, se $u(x) \neq 0$, então $\lambda_j < m_a(x) < \lambda_{j+1}$, para todo $0 < a \leq a_0$. Se $u(x) = 0$, então $m_a(x) = \lambda_j + a > \lambda_j$, pois $a > 0$ e $m_a(x) = \lambda_j + a < \lambda_{j+1}$, sempre que $0 < a \leq a_0$, como queríamos demonstrar. Observe que neste caso a u está fixada. Agora, vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu m_a(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.56)$$

Por hipótese, temos que u é solução de (5.52). Além disso, pela definição de $m_a(x)$, temos que

$$\nu m_a(x)u(x) = \nu f(x, u(x)) + a(x).$$

Portanto, por (5.52) temos que $\nu = 1$ é um autovalor do problema (5.56) associado a autofunção u . Porém, pela monotonicidade estrita dos autovalores do laplaciano e por (5.54), temos que

$$1 = \lambda_{j+1}(\lambda_{j+1}) < \lambda_{j+1}(m_a) < \lambda_{j+1}(\lambda_j),$$

e

$$\lambda_j(\lambda_{j+1}) < \lambda_j(m_a) < \lambda_j(\lambda_j) = 1.$$

Isto nos diz que

$$\lambda_j(m_a) < 1 < \lambda_{j+1}(m_a).$$

De onde concluímos que 1 está entre dois autovalores consecutivos. Portanto $\nu = 1$, não pode ser autovalor do problema (5.56), o que é um absurdo. Logo, existe $\rho > 0$, tal que a origem é a única solução de (5.52) na bola $B(0, \rho) \subset H$. Assim,

$$C_q(I_a, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = \lambda_i, \\ 0, & q \neq \lambda_i. \end{cases}$$

Pela invariância por homotopia 2.67, temos que $C_q(I, 0) \cong C_q(I_a, 0)$. Concluímos portanto que

$$C_q(I, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = \lambda_i, \\ 0, & q \neq \lambda_i. \end{cases}$$

■

5.2.1 Demonstração do Teorema 5.2

Nosso objetivo é garantir que o funcional I satisfaz as condições (Ce) , (I_0) , (I_1) , (I_2) e (I_3) . Note que a condição (Ce) foi mostrada no Lema 5.3 e a condição (I_0) foi mostrada no Lema 5.4.

Mostremos então que (I_1) é satisfeita. Para tal, observe inicialmente que, por definição de I , temos que dado $u \in H$

$$\begin{aligned} I(u) - \frac{1}{2}I'(u)(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx - \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u)u \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u)u \, dx - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Escrevendo $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, onde $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) < 0\}$, segue que uma vez que Ω^+ e Ω^- são disjuntos, $u^+ \equiv 0$ em Ω^- e $u^- \equiv 0$ em Ω^+ e $f(x, 0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u) u \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u) (u^+ + u^-) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u) u^+ \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u) u^- \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} f(x, u^+) u^+ \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-} f(x, u^-) u^- \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u^+) u^+ \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u^-) u^- \, dx. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\int_{\Omega} F(x, u) \, dx = \int_{\Omega} F(x, u^+) \, dx + \int_{\Omega} F(x, u^-) \, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u) u \, dx - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} f(x, u^+) u^+ - F(x, u^+) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2} f(x, u^-) u^- - F(x, u^-) \, dx. \end{aligned} \quad (5.58)$$

De (f_5) , segue que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} f(x, u^-) u^- - F(x, u^-) \right] dx \geq -a_4 |\Omega|. \quad (5.59)$$

De $(f_6)(ii)$, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} f(x, u^+) u^+ - F(x, u^+) \, dx \geq a_7 |u^+|_{\mu}^{\mu} - a_8 |\Omega| \geq -a_8 |\Omega|. \quad (5.60)$$

Tomando $k > \max\{a_4 |\Omega|, a_8 |\Omega|\}$, temos que

$$I(u) - \frac{1}{2} I'(u)(u) > -k.$$

Definindo então $d_1 = -k$, temos que se $u \in I^{d_1}$ então $I(u) \leq d_1$. Logo

$$d_1 - \frac{1}{2} I'(u)(u) \geq I(u) - \frac{1}{2} I'(u)(u) > d_1.$$

Assim, se $u \in I^{d_1}$, então

$$-\frac{1}{2} I'(u)(u) > 0.$$

No que segue

$$I'(u)(u) < 0,$$

para todo $u \in I_{d_1}$. Portanto (I_1) é satisfeita.

Definamos o conjunto

$$S^- = \{u \in \partial B(0, 1) \mid I(tu) \rightarrow -\infty, \text{ se } t \rightarrow +\infty\}.$$

De modo a provar que (I_2) é satisfeita, mostraremos que

$$S^- = \partial B(0, 1)^+ = \{u \in \partial B(0, 1) \mid u^+ \not\equiv 0\}.$$

Primeiramente, afirmamos que $\partial B(0, 1)^+ \subset S^-$. De fato, seja $u \in \partial B(0, 1)^+$, isto é, $u \in \partial B(0, 1)$ e $u^+ \not\equiv 0$. Note que

$$I(tu) = \frac{1}{2}\|tu\|^2 - \int_{\Omega} F(x, tu)dx.$$

Por (f_3) , temos que $\frac{F(x, s)}{s^2} \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$, uniformemente para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Note que $\|u\| \neq 0$ e $|u|_2^2 \neq 0$, pois $u^+ \not\equiv 0$. Assim, por definição de limite, temos que dado $M > \frac{\|u\|^2}{2|u^+|_2^2}$ existe $C_M > 0$ tal que

$$\text{se } s > C_M \text{ então } \frac{F(x, s)}{s^2} > M,$$

isto é, $F(x, s) > Ms^2$. Consequentemente,

$$-\int_{\Omega} F(x, s) dx \leq \int_{\Omega} -Ms^2 dx, \quad \forall s > C_M.$$

Observe também que, como $u^+ \not\equiv 0$, então $tu^+ \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, como $\Omega^+ \subset \Omega$, temos que

$$I(tu) \leq t^2 \left(\frac{\|u\|^2}{2} - M|u^+|_2^2 \right).$$

Sendo $M > \frac{\|u\|^2}{2|u^+|_2^2}$, temos que $\left(\frac{\|u\|^2}{2} - M|u^+|_2^2 \right) < 0$. Logo, $t^2 \left(\frac{\|u\|^2}{2} - M|u^+|_2^2 \right) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$I(tu) \leq t^2 \left(\frac{\|u\|^2}{2} - M|u^+|_2^2 \right) \rightarrow -\infty.$$

Isto significa que $u \in S^-$, no que segue a inclusão.

Mostremos agora que $S^- \subset \partial B(0, 1)^+$, para tal mostraremos que se $u \in \partial B(0, 1) \setminus \partial B(0, 1)^+$ então $u \notin S^-$. De fato, se $u \in \partial B(0, 1) \setminus \partial B(0, 1)^+$, temos que $u^+ \equiv 0$, isto implica dizer que $tu \leq 0$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $\|u\| = 1$. A condição $(f_4)(i)$, nos diz que

$$-F(x, tu) \geq -a_3 - \frac{1}{2}\lambda_1(tu)^2. \quad (5.61)$$

Portanto, de (5.61), definição de I , caracterização variacional do primeiro autovalor (5.6) e de $\|u\| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
 I(tu) &= \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, tu) \, dx \\
 &= \frac{t^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, tu) \, dx \\
 &\geq \frac{t^2}{2} - \int_{\Omega} \left[a_3 + \frac{1}{2} \lambda_1 (tu)^2 \right] \, dx \\
 &= \frac{t^2}{2} - a_3 |\Omega| - \frac{1}{2} \lambda_1 t^2 \|u\|_2^2 \\
 &\geq \frac{t^2}{2} - a_3 |\Omega| - \frac{t^2}{2} \|u\| \\
 &= \frac{t^2}{2} - a_3 |\Omega| - \frac{t^2}{2} \\
 &= -a_3 |\Omega|.
 \end{aligned}$$

Deste forma, concluímos que, $I(tu)$ é limitado inferiormente, para todo $t \geq 0$. Consequentemente $u \notin S^-$, pois do contrário $I(tu) \rightarrow -\infty$, quando $t \rightarrow \infty$. Decorre então a inclusão $S^- \subset \partial B(0, 1)^+$. Portanto $S^- = \partial B(0, 1)^+$.

Falta mostrarmos então que $\partial B(0, 1)^+$ homotopicamente equivalente a um ponto. Para tal, seja $u \in \partial B(0, 1)^+$ e $t \in [0, 1]$, vamos definir $u_t(x) = (1 - t)u(x) + t\phi_1(x)$. Note que, para todo $x \in \Omega_+$, tem-se que $u_t > 0$, pois $\phi_1 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Vamos definir então o mapa $\tau : [0, 1] \times \partial B(0, 1)^+ \rightarrow \partial B(0, 1)^+$, dado por $\tau(t, u) = u_t \|u_t\|_B^{-1}$. Este mapa está bem definido, pois $u_t \|u_t\|_B^{-1} \in \partial B(0, 1)^+$. Além disso, $\tau(0, u) = [(1 - 0)u_0 + 0 \cdot \phi_1] \|u_0\|_B^{-1} = u$, para toda $u \in \partial B(0, 1)^+$ e $\tau(1, u) = (1 - 1)u + 1\phi_1 = \phi_1$, uma vez que $\|\phi_1\| = 1$. Observe que, neste caso, a aplicação τ independe de x , isto significa dizer que $\tau(1, u)$ é constante. Logo, $\partial B(0, 1)^+$ é homotopicamente equivalente a um ponto.

Por fim, a condição (I_3) é uma consequência direta da desigualdade (5.62), uma vez que dela decorre que para todo $u \in \partial B(0, 1) \setminus S^-$, para $d_2 = -a_3 |\Omega| < 0$, vale que $I(tu) \geq d_2$.

Portanto, pelo Teorema 4.6, temos que o problema (5.1) possui pelo menos uma solução não trivial.

5.3 MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES

Vamos agora estudar a existência e multiplicidade de soluções para o problema (5.1), onde $f(x, s)$ satisfaz as condições (f_1) , (f_2) , (f_3) , (f_6) , e

$$(f_7) \quad \frac{f(x, s)}{s} \rightarrow -\infty, \text{ se } s \rightarrow -\infty, \text{ uniformemente para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

De maneira geral, temos que as hipóteses (f_4) e (f_5) podem ser dispensadas, desde que a $f(x, s)$ satisfaça (f_7) . Para tal, nós definiremos uma função auxiliar, mostraremos que esta nova função satisfaz as condições (f_4) e (f_5) e invocaremos o Teorema 5.2 para garantir que o problema associado a essa nova função auxiliar possui uma solução não trivial e em seguida mostraremos que esta solução ainda é solução de (5.1). Além disso, para existência de solução não trivial, tal existência independerá do fato de λ , obtido pela hipótese (f_2) ser ou não ser autovalor do problema (5.2), diferentemente do que ocorrerá com a multiplicidade, que uma das hipóteses fundamentais será que a função $f(x, s)$ satisfaça a condição (f_2) para $\lambda = \lambda_2$. Esta condição é imposta para que o funcional associado ao problema auxiliar satisfaça a condição (I_0) para $i \neq 1$, condição esta necessária para recorremos ao Teorema 4.12, afim de garantirmos a multiplicidade de pontos críticos do funcional e, portanto, multiplicidade de soluções. Observe ainda que esta configuração para os grupos críticos de I é decorrência do Lema 5.4, sem mais delongas, podemos enunciar de forma precisa o resultado a seguir.

Teorema 5.5. *Suponha que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x, 0) \equiv 0$ e satisfaz (f_1) , (f_2) , (f_3) , (f_6) e (f_7) . Então, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema (5.1) possui pelo menos uma solução não trivial. Além disso, se $\lambda \in [\lambda_2, \infty)$, com $f(x, s)$ satisfazendo $(f_2)(i)$ para $\lambda = \lambda_2$, então o problema (5.1) possui pelo menos três soluções não triviais.*

Demonstração: Suponha que (f_7) seja satisfeita. Por definição de limite, temos que para $A = -1$, existe $s_0 < 0$, tal que se $s \leq s_0$ então $\frac{f(x, s)}{s} < -1$, ou seja $f(x, s) > -s \geq -s_0$. Uma vez que $s_0 < 0$, temos que $-s_0 > 0$, portanto, $f(x, s) > 0$ para todo $s \leq s_0$.

Vamos definir então

$$\overline{f}(x, s) = f(x, s)\chi(s) + f(x, s_0)(1 - \chi(s)),$$

em que $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \in C^\infty$ é tal que $\chi(s) = 1$, para $s \geq s_0$ e $\chi(s) = 0$, para $s \leq s_0 - 1$. Mostremos então que $\overline{f}(x, s)$ satisfaz as condições $(f_1) - (f_6)$.

- Vejamos que $\overline{f}$ satisfaz (f_1) .

De fato, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que $\overline{f}_s(x, s) = f_s(x, s)\chi(s) + [f(x, s) - f(x, s_0)]\chi'(s)$. Vamos dividir a demonstração em 3 casos, o primeiro deles é o caso em que $s \geq s_0$. Neste caso, segue da definição de $\overline{f}$, que $\overline{f}(x, s) = f(x, s)$, portanto a condição é imediata para $s \geq s_0$.

O segundo caso a considerarmos, será o caso em que $s \in [s_0 - 1, s_0]$. Observe que neste caso, como $[s_0 - 1, s_0]$ é compacto e $\chi \in \mathcal{C}^\infty$, segue que $\chi|_{[s_0-1, s_0]}$ é limitada. Além disso, aplicando a condição (f_1) para f , temos que $|f(x, s)| \leq g_1|s|^{\sigma+1} + g_2|s|$. Para todo $\alpha > 0$ fixado, considere a aplicação $s \mapsto |s|^\alpha$. É claro que esta aplicação é contínua e portanto limitada no compacto $[s_0 - 1, s_0]$, o que nos diz que $|f(x, s)| \leq k_1$, onde $k_1 > 0$ é uma constante que não depende de $s \in [s_0 - 1, s_0]$. Analogamente, mostra-se que $|f_s(x, s)| \leq k_2$, onde $k_2 > 0$ é uma constante. Portanto, temos que para todo $s \in [s_0 - 1, s_0]$

$$\begin{aligned} |\overline{f}_s(x, s)| &\leq |f_s(x, s)| |\chi(s)| + |f(x, s)| |\chi'(s)| + |f(x, s_0)| |\chi'(s)| \\ &\leq k_2 + 2k_1k_3 \\ &\leq |s|^\sigma + k_2 + 2k_1k_3. \end{aligned}$$

Logo $\overline{f}$ satisfaz (f_1) , para $s \in [s_0 - 1, s_0]$. Se $s \leq s_0 - 1$, implica dizer que $\overline{f}(x, s) = f(x, s_0)$, ou seja, $\overline{f}$ é constante com relação a s e portanto, sua derivada $|\overline{f}_s(x, s)| = 0 \leq a_1|s|^\sigma + a_2$, para quaisquer $a_1, a_2 > 0$. Portanto, $\overline{f}$ satisfaz (f_1) .

- Mostremos então que $\overline{f}$ satisfaz (f_2) .

Suponhamos que a condição (f_2) seja válida para f , isto nos diz que $f_s(x, 0) = \lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostremos então que para este mesmo λ , tem-se que $\overline{f}(x, 0) = \lambda$. De fato, por definição de derivada, temos que para h suficientemente pequeno de modo que, $h > s_0$, vale que

$$\begin{aligned} \overline{f}_s(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f}(x, 0+h) - \overline{f}(x, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0+h) - f(x, 0)}{h} \\ &= f_s(x, 0) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Além disso, se $\lambda = \lambda_j$, onde λ_j é um autovalor do problema (5.2), temos que tomando $r = \frac{-s_0}{2}$, temos que se $|s| \leq r$, implica dizer que $\frac{s_0}{2} \leq s$, o que implica dizer que $f(x, s) = \overline{f}(x, s)$, portanto, neste caso, a condição (f_2) para $\overline{f}$ decorre do fato de que f satisfaz (f_2) .

- Mostremos agora que $\bar{f}$ satisfaz (f_3) .

Suponha que $f(x, s)$ satisfaz (f_3) . Por definição de limite, temos que dado $A > 0$, existe $s_1(A) > 0$, tal que se $s \geq s_1(A)$ então $\frac{F(x, s)}{s^2} > A$. Observe então que se $s \geq s_1$ então $f(x, s) = \bar{f}(x, s)$. Portanto, dado $A > 0$ arbitrário, temos que para todo $s \geq s_1(A)$ vale que $\frac{\bar{F}(x, s)}{s^2} = \frac{F(x, s)}{s^2} > A$, isto é, $\frac{\bar{F}(x, s)}{s^2} \rightarrow +\infty$, quando $s \rightarrow +\infty$. Intuitivamente, estamos preocupados com o comportamento de $\frac{\bar{F}(x, s)}{s^2}$ para s suficientemente grande, porém, de acordo com a definição de $\bar{f}$, temos que para $s \geq s_0$, $f(x, s) = \bar{f}(x, s)$, isto nos diz que a condição (f_3) para $\bar{f}$, decorre imediatamente da condição (f_3) para f .

- Vejamos agora que $\bar{f}$ satisfaz (f_4) .

Antes de iniciarmos a demonstração, uma observação que devemos notar é que, diferentemente do que foi feito nos casos anteriores, aqui a aplicação f não necessariamente satisfaz a condição (f_4) . Aqui, dividiremos a demonstração em 2 casos, o primeiro caso a ser analisado é o caso em que $s \in [s_0, 0]$. Seja $s_0 \leq s \leq 0$, ou de forma equivalente $0 \leq -s \leq -s_0$. Note que $|f(x, s)\chi(s)| = |f(x, s)| |\chi(s)| \leq |f(x, s)|$, assim, por (f_1) , temos que para todo s no compacto $[s_0, 0]$,

$$|f(x, s)| \leq k_1. \quad (5.62)$$

Isto implica dizer que

$$-k_1 \leq f(x, s)\chi(s) \leq k_1.$$

Integrando, obtemos que

$$-\int_s^0 k_1 dt \leq \int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt \leq \int_s^0 k_1 dt.$$

O que implica dizer que

$$k_1 s \leq \int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt \leq -k_1 s.$$

Por sua vez, temos que $k_1 s \geq k_1 s_0$, para todo $s \in [s_0, 0]$. Definindo então $c_1 := k_1 s_0 < 0$, temos que $\int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt \geq c_1$, para todo $s \in [s_0, 0]$. Um argumento análogo, garante que existe $c_2 < 0$, tal que para todo $s \in [s_0, 0]$,

$$\int_{s_0}^0 f(x, t) dt \geq c_2. \quad (5.63)$$

Assim, para cada $s \in [s_0, 0]$, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_1}{2}s^2 - \overline{F}(x, s) &= \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_s^0 \overline{f}(x, t) dt \\
 &= \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt + \underbrace{\int_s^0 f(x, s_0)(1 - \chi(t)) dt}_{=0} \\
 &\geq \int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt \\
 &\geq c_1.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{f}$ satisfaz (f_4) , para todo $s \in [s_0, 0]$. Além disso, note que, neste caso, não faz sentido analisar o caso em que $s \rightarrow -\infty$, pois s pertence a um conjunto compacto. Uma observação a ser feita é que, a escolha do s_0 como extremo do intervalo, deve-se ao fato de f não ter sinal definido em $[s_0, 0]$, diferentemente do que ocorre quando $s \leq s_0$, pois neste caso f é não negativa e portanto, $\overline{f}$ é não negativa e desta forma, a partir de certo momento, as integrais a qual estaremos trabalhando serão positivas. Seja $s \leq s_0$, arbitrário. Note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_1}{2}s^2 - \overline{F}(x, s) &= \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_s^0 \overline{f}(x, t) dt \\
 &= \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_s^0 f(x, t)\chi(t) dt + \int_s^0 f(x, s_0)(1 - \chi(t)) dt \\
 &= \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_{s_0}^0 f(x, t)\chi(t) dt + \underbrace{\int_s^{s_0} f(x, t)\chi(t) dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_s^{s_0} f(x, s_0)(1 - \chi(t)) dt}_{\geq 0} \\
 &\geq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \int_{s_0}^0 f(x, t)\chi(t) dt \\
 &\geq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + c_1 \\
 &\geq c_1.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\overline{f}$ satisfaz $(f_2)(i)$. Da penúltima desigualdade acima, fazendo $s \rightarrow -\infty$ temos que para todo $x \in \Omega$,

$$\frac{\lambda_1}{2}s^2 - \overline{F}(x, s) \rightarrow +\infty.$$

Ficando assim estabelecida a condição (f_4) para $\overline{f}$.

- Vamos mostrar então que $\overline{f}$ satisfaz (f_5) , embora f não necessariamente satisfaça tal condição.

Para tal, vamos dividir a demonstração em 2 casos, o primeiro será quando $s \in [s_0 - 1, 0]$, ou de forma equivalente, $-s \in [0, 1 - s_0]$. Para tal, observe primeiramente que, neste caso por (f_1) aplicada a $\bar{f}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s \right| &\leq e_1 |s|^{\sigma+2} + e_2 |s|^2 \\ &\leq e_1 (1 - s_0)^{\sigma+2} + e_2 (1 - s_0)^2. \end{aligned}$$

Definindo $k_3 := e_1 (1 - s_0)^{\sigma+2} + e_2 (1 - s_0)^2$, vemos que $\left| \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s \right| \leq k_3$, ou seja, $-k_3 \leq \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s \leq k_3$, para todo $s \in [s_0 - 1, 0]$. Com um argumento análogo à (5.63), vemos que para todo $s \in [s_0 - 1, 0]$, tem-se que existe $j_1 > 0$, tal que

$$\int_s^0 \bar{f}(x, t) dt \geq -j_1. \quad (5.64)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s - \bar{F}(x, s) &= \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s + \int_s^0 \bar{f}(x, t) dt \\ &= -k_3 - j_1. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{f}$ satisfaz a condição (f_5) , quando $s \in [s_0 - 1, 0]$. A escolha de $s_0 - 1$ como extremo do intervalo, deve-se ao fato de que $\bar{f}(x, s)$ é constante com relação à s , quando $s \leq s_0 - 1$ e não negativa neste mesmo domínio. Seja então $s \leq s_0 - 1$. Utilizando a definição de $\bar{f}$, as desigualdades (5.62) e (5.64) e o fato de $\bar{f}$ ser não negativa para todo $s \leq s_0$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s - \bar{F}(x, s) &= \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s + \int_s^0 \bar{f}(x, t) dt \\ &= \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s + \int_{s_0}^0 \bar{f}(x, t) dt + \int_{s_0}^{s_0-1} \bar{f}(x, t) dt + \int_s^{s_0-1} \bar{f}(x, t) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \bar{f}(x, s) s - j_1 + \int_s^{s_0-1} f(x, s_0) dt \\ &= \frac{1}{2} f(x, s_0) s + f(x, s_0)(s_0 - 1) - f(x, s_0) s - j_1 \\ &= -\frac{1}{2} f(x, s_0) s + f(x, s_0)(s_0 - 1) - j_1 \\ &\geq -j_1 + k_1(s_0 - 1). \end{aligned}$$

Portanto, tomando $a_4 = \min\{-(-k_3 - j_1), -(-j_1 + k_1(s_0 - 1))\}$, vemos que $\bar{f}$ satisfaz (f_5) , para todo $s \leq 0$.

- Por fim, vamos verificar a condição (f_6) para $\bar{f}$.

A condição (f_6) é imediata, pois f satisfaz (f_6) e para todo $s \geq 0$, $f(x, s) = \bar{f}(x, s)$. Uma vez que esta função satisfaz as condições $(f_1) - (f_6)$, pelo Teorema 5.2, temos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{f}(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.65)$$

possui pelo menos uma solução u não trivial. Mostremos então que u é solução de (5.1), para tal, devemos mostrar inicialmente que $u \geq s_0$ para todo $x \in \Omega$. Defina $u_{s_0} = u - s_0$, nosso objetivo então é garantir que $u_{s_0} \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Escrevendo $u_{s_0}^+ = \max\{u - s_0, 0\}$ e $u_{s_0}^- = u_{s_0} - u_{s_0}^+$, vemos que $u_{s_0} \geq 0$ se, e somente se, $u_{s_0}^- \equiv 0$.

Afirmamos então que $u_{s_0}^- = 0$, para todo $x \in \Omega$.

De fato, como u é solução fraca de (5.65), temos que para toda $v \in H$,

$$\bar{I}'(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \bar{f}(x, u)v \, dx = 0.$$

Para $v = u_{s_0}^-$, temos que

$$\bar{I}'(u)(u_{s_0}^-) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_{s_0}^- \, dx - \int_{\Omega} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx = 0.$$

Uma vez que $u_{s_0}^+ + u_{s_0}^- = u_{s_0} = u - s_0$, temos que $u_{s_0}^- + u_{s_0}^+ + s_0 = u$. Assim,

$$\nabla u \cdot \nabla u_{s_0}^- = \nabla(u_{s_0}^- + u_{s_0}^+ + s_0) \cdot \nabla u_{s_0}^- = \nabla u_{s_0}^- \cdot \nabla u_{s_0}^+ + \nabla u_{s_0}^- \cdot \nabla u_{s_0}^- = |\nabla u_{s_0}^-|^2.$$

Logo,

$$\bar{I}'(u)(u_{s_0}^-) = \int_{\Omega} |\nabla u_{s_0}^-|^2 \, dx - \int_{\Omega} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx. \quad (5.66)$$

Por fim, escrevendo $\Omega = \Omega_{s_0}^+ \cup \Omega_{s_0}^-$, como uma decomposição disjunta de subconjuntos, onde $\Omega_{s_0}^+ = \{x \in \Omega \mid u_{s_0}(x) \geq 0\}$ e $\Omega_{s_0}^- = \{x \in \Omega \mid u_{s_0}(x) < 0\}$ temos que, se $x \in \Omega_{s_0}^-$ então $u_{s_0}(x) < 0$ e, portanto, $u(x) < s_0$. Desta última desigualdade, temos que $\bar{f}(x, u(x)) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_{s_0}^-$. Assim, uma vez que $u_{s_0}^- \equiv 0$ em $\Omega_{s_0}^+$ e $u_{s_0}^+ \equiv 0$ em $\Omega_{s_0}^-$ temos,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx &= - \int_{\Omega_{s_0}^+} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx - \int_{\Omega_{s_0}^-} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx \\ &= - \int_{\Omega_{s_0}^-} \bar{f}(x, u)u_{s_0}^- \, dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Assim, de (5.66) temos que $0 \geq \|u_{s_0}^-\|$ e, portanto $u_{s_0}^- \equiv 0$ em Ω . De onde concluímos que $u \geq s_0$, para todo $x \in \Omega$.

Vamos mostrar agora que u é solução fraca de (5.1). Note que, como $u \geq s_0$, para todo $x \in \Omega$, então $\bar{f}(x, u) = f(x, u)$ e portanto, para toda $v \in H$,

$$\begin{aligned} I'(u)(v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f(x, u)v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \bar{f}(x, u)v \, dx \\ &= \bar{I}'(u)(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, u é ponto crítico do funcional I . Além disso, como u é não trivial, temos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, u é uma solução não trivial de (5.1).

Agora, suponha que $\lambda \in [\lambda_2, \infty)$ e $f(x, s)$ satisfaz $(f_4)(i)$ para $\lambda = \lambda_2$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que existe um número finito de soluções do problema (5.65), pois do contrário, o resultado já estaria demonstrado. Vamos mostrar então que o funcional $\bar{I}$, definido por

$$\bar{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} \bar{F}(x, s) \, dx,$$

onde $\bar{F}(x, s) = \int_0^s \bar{f}(x, t) \, dt$, associado ao problema, (5.65) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.12. Primeiramente, mostremos que $\bar{I}$ possui um mínimo local $u_0 \neq 0$. Para tal, vamos definir

$$\hat{f}(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq 0, \\ \bar{f}(x, s), & \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

Consideremos agora o funcional,

$$\hat{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} \hat{F}(x, u) \, dx, \text{ para todo } u \in H,$$

onde $\hat{F}(x, s) = \int_0^s \hat{f}(x, t) \, dt$, de classe $\mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$. Vamos mostrar que $\hat{I}$ é limitado inferiormente, para todo $u \in H$. De fato, primeiramente note que $\hat{I}(u) \geq - \int_{\Omega} \hat{F}(x, u) \, dx$, para todo $u \in H$. Além disso, note que para todo $s \geq 0$, $\hat{F}(x, s) = 0$. Basta então nos preocuparmos com o caso $s \leq 0$.

Note ainda que, se $s \leq 0$, então $-\hat{F}(x, s) = \int_s^0 \bar{f}(x, t) \, dt$. Outro fato importante a se notar é que $\bar{f}(x, s) \geq 0$, para todo $s \leq s_0$. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \int_s^0 \bar{f}(x, t) \, dt &= \int_{s_0}^0 \bar{f}(x, t) \, dt + \int_s^{s_0} \bar{f}(x, t) \, dt \\ &\geq \int_{s_0}^0 \bar{f}(x, t) \, dt \\ &\geq c_2. \end{aligned}$$

Isto implica dizer que para todo $u \in H$, $\hat{I}(u) \geq c_2|\Omega|$. Logo $\hat{I}$ é limitado inferiormente. Assim existe m_0 tal que $m_0 = \inf_{u \in H} \hat{I}(u)$. Como $0 \in H$ e $\hat{I}(0) = 0$, temos que, pela definição de ínfimo, $m_0 \leq \hat{I}(0) = 0$, logo $m_0 \leq 0$. Portanto, existe $u_0 \neq 0$, tal que u_0 é mínimo local de $\hat{I}(u)$. Mostremos então que u_0 é uma solução negativa de (5.65). Para tal, devemos mostrar que $u_0^+(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Observe que, como u_0 é mínimo de $\hat{I}$, temos que u_0 é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \hat{f}(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.67)$$

Por definição de solução fraca e usando u_0^+ como função teste, temos que

$$\begin{aligned} \hat{I}(u_0)(v) &= \|u_0^+\|^2 - \int_{\Omega} \hat{f}(x, u_0) u_0^+ dx \\ &= \|u_0^+\|^2 - \int_{\Omega} \hat{f}(x, u_0^+) u_0^+ dx \\ &= \|u_0^+\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $u_0 \leq 0$. Além disso, pelo princípio do máximo, temos que $u_0 < 0$. Portanto, como em (FIGUEIREDO, 1987), temos que $\bar{I}$ possui um mínimo local $u_0 \neq 0$.

Como $\bar{f}$ satisfaz $(f_1) - (f_6)$, argumentos iguais aos utilizados nos Lemas 5.3 e 5.4 mostram que o funcional $\bar{I}$ satisfaz (Ce) e (I_0) para $i \neq 1$. Além disso, seguindo os passos da demonstração do Teorema 5.2, segue que $\bar{I}$ satisfaz $(I_1) - (I_3)$.

Mostremos então que o funcional $\bar{I}$ satisfaz a condição (I_6) . Para tal, devemos mostrar que se u é tal que, $m(u) = 0$, então $\dim(\ker(\bar{I}''(u))) \leq 1$. Para tal, seja $u \in K$, tal que $m(u) = 0$, por definição temos que a forma bilinear, definida por

$$B(v, w) = \langle \bar{I}''(u)(v), w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{f}_s(x, u) v w dx \quad (5.68)$$

é tal que $B(v, v) \geq 0$, para todo $v \in H$, pois $m(u)$ é definido como a dimensão máxima do subespaço de H tal que B é negativa definida. Identificando então $L = \bar{I}''(u)$, seja então $v_0 \in \ker(L)$, tal que $v_0 \neq 0$ isto é, $L(v_0) = 0$. Isto nos diz que

$$\langle L(v_0), w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{f}_s(x, u) v_0 w dx = 0,$$

para todo $w \in H$. Isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla w dx = \int_{\Omega} \bar{f}_s(x, u) v_0 w dx.$$

Desta forma, temos que v_0 é uma solução fraca do problema de autovalor com peso $m(x) = \bar{f}_s(x, u)$, dado por

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = m(x)v_0, & x \in \Omega, \\ v_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.69)$$

para $\lambda = 1$, ou seja, $v_0 \in \ker(L)$ se, e somente se, $v_0 \in \ker(-\Delta - m)$.

Basta então mostrarmos que $\dim(-\Delta - m) = 1$. Para tal, observe inicialmente que, como $\bar{f} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ temos que $m \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Desta forma, pelo Teorema de Hess-kato (2.22), temos que existe $\lambda_1(m) > 0$ e uma autofunção $\phi_1 > 0$ tal que $\dim(-\Delta - \lambda_1 m) = 1$. Nosso objetivo então, será garantir que $\lambda_1(m) = 1$.

Primeiramente, sabemos que, ϕ_1 é solução fraca do problema de autovalor com peso para $\lambda = \lambda_1 := \lambda_1(m)$, desta forma temos que,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_1 \nabla v - \lambda_1 \int_{\Omega} m \phi_1 v \, dx = 0,$$

para toda $v \in H$. Tomando $v = \phi_1$, vemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 \, dx - \lambda_1 \int_{\Omega} m \phi_1^2 \, dx = 0. \quad (5.70)$$

A equação (5.70), nos fornece duas informações:

i) Sendo $\lambda_1 > 0$ e $\|\phi_1\| > 0$, uma vez que $\phi_1 > 0$, temos que

$$\int_{\Omega} m \phi_1^2 \, dx > 0$$

ii)

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 \, dx}{\int_{\Omega} m \phi_1^2 \, dx}.$$

Tomando $v = \phi_1$ em (5.68), como $m(u) = 0$, temos que $B(\phi_1, \phi_1) \geq 0$, assim

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 \, dx \geq \int_{\Omega} m \phi_1^2 \, dx,$$

isto é,

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 \, dx}{\int_{\Omega} m \phi_1^2 \, dx} \geq 1.$$

Por outro lado, (5.69) nos diz que $\lambda = 1$, também é autovalor do problema (2.6). Como $Re(1) > 0$, pelo item i) do Teorema 2.22, temos que $1 \geq \lambda_1(m)$, portanto, temos que

$\lambda_1(m) = 1$, como queríamos demonstrar. Outro fato a ser notado é que tomamos $v_0 \neq 0$, pois se $\ker(\bar{I}''(u)) = \{0\}$, a condição (I_6) , seria imediata. Portanto, $\bar{I}$ satisfaz (I_6) . Por fim, note que, um argumento análogo ao utilizado no Lema 5.4 garante que para cada $u \in \bar{K}$ tem-se $\bar{I}''(u) : H \rightarrow H$ pode ser expresso da forma $\bar{I}''(u) = Id - T$, onde Id é o operador identidade e T é um operador compacto. A maior diferença que podemos encontrar na demonstração deste fato, é que no caso do (5.4), $f_s(x, 0) = \lambda$, constante. Para o caso $u \in \bar{K}$, na desigualdade (5.49), devemos utilizar que $\bar{f}_s(x, u(x))$ é contínua no compacto $\bar{\Omega}$, portanto, $|\bar{f}_s(x, u(x))| \leq C$, onde $C > 0$ é uma constante. Isto garante que $\bar{I}''(u)$ é um operador de Fredholm, para cada $u \in \bar{K}$. Assim, pelo Teorema 4.12, temos que I possui pelo menos quatro soluções, como queríamos demonstrar. ■

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, utilizamos ferramentas da análise matemática e topologia algébrica para garantir a existência e multiplicidade de pontos críticos para uma classe de funcionais $I : H \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ definidos em um espaço de Hilbert H , que satisfazem as condições $(I_0) - (I_6)$, apresentadas no decorrer do capítulo 3, além da condição de compacidade de Cerami (Ce) .

Para isto, recorremos a artifícios da Teoria de Morse que foram abordados no capítulo 2. Neste capítulo, apresentamos alguns resultados gerais da teoria de Morse, dentre estes o Teorema 3.27, que permitiu descrever precisamente os grupos críticos de pontos críticos isolados de uma aplicação $f \in \mathcal{C}^2$, no caso em que este é de mínimo local ou não degenerado. Logo em seguida, apresentamos o Teorema de Splitting, também conhecido como Lema de Morse generalizado que como consequência, permitiu descrever alguns grupos críticos de pontos críticos possivelmente degenerados, como foi visto no Teorema 3.40. Neste mesmo Teorema, vimos que a hipótese do funcional ser de classe $\mathcal{C}^2$ é fundamental, uma vez que este recorre em sua demonstração ao Teorema da Função Implícita.

Tais resultados de descrição de grupos críticos, foram úteis principalmente na demonstração do Teorema 4.12, que permitiu garantir a multiplicidade de pontos críticos. Por este motivo, neste resultado o funcional teve que ser de classe $\mathcal{C}^2$ e de Fredholm. Por outro lado, para garantir a existência de um ponto crítico não trivial, apresentada no Teorema 4.6, foi necessário apenas que o funcional fosse de classe $\mathcal{C}^1$. Isto acontece pois em sua demonstração, utilizamos apenas resultados que não careciam do Teorema de Splitting.

Finalmente, no último capítulo, vimos como a Teoria de Morse pode ser empregada para garantir a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de Problemas Elípticos Semilineares. Neste momento, trabalhamos com o operador Laplaciano e com uma função $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições $(f_1) - (f_6)$, em um domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Estas condições sobre a f permitiram garantir que o funcional $I \in \mathcal{C}^2$ e satisfizesse $(I_0) - (I_6)$, além de (Ce) , necessárias para utilizar os resultados do capítulo anterior. Neste cenário, atingimos nosso objetivo garantindo a existência de ao menos 4 pontos críticos.

REFERÊNCIAS

- AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 349–381, 1973.
- BARTSCH, T.; CHANG, K.-C.; WANG, Z.-Q. On the morse indices of sign changing solutions of nonlinear elliptic problems. *Mathematische Zeitschrift*, v. 3, n. 3, p. 655–677, 2000. Available at: <<https://doi.org/10.1007/BF01195917>>.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2010.
- CHANG, K.-C. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. [S.l.]: Birkhäuser Boston, 1993.
- DAMASCELLI, L.; PACELLA, F. *Morse Index of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*. [S.l.]: De Gruyter, 2010.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998.
- FIGUEIREDO, D. G. D. Positive solutions of semilinear elliptic problems. In: *Differential equations*. [S.l.]: Springer, 1982. p. 34–87.
- FIGUEIREDO, D. G. de. On the existence of multiple ordered solutions of nonlinear eigenvalue problems. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications*, v. 11, p. 481–492, 1987.
- GROMOLL, D.; MEYER, W. On differentiable functions with isolated critical points. *Topology*, v. 8, p. 361–369, 1969.
- HESS, P.; KATO, T. On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. *Communications in Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, v. 5, n. 10, p. 999–1030, 1980.
- MANES, A.; MICHELETTI, A. M. Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine. 1973.
- MAWHIN, J.; WILLEM, M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. [S.l.]: Springer-Verlag New York Inc., 1989.
- SILVA, E. A. B. Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic system. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, v. 1, n. 1, p. 339–363, 1994. Available at: <<https://doi.org/10.1007/BF01194985>>.
- SILVA, E. A. B. Critical point theorems and applications to a semilinear elliptic problem. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, v. 3, n. 3, p. 245–261, 1996. Available at: <<https://doi.org/10.1007/BF01195917>>.
- SILVA, E. A. de barros e. Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications*, v. 16, p. 455–477, 1991.
- SPANIER, E. *Algebraic Topology*. Springer New York, 2012. ISBN 9781468493221. Available at: <<https://books.google.com.br/books?id=iKx3BQAAQBAJ>>.
- TU, L. W. *An Introduction to Manifolds*. Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9781441973993. Available at: <<https://books.google.com.br/books?id=br1KngEACAAJ>>.