



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

WESLLEN LINS DE ARAUJO

**PROJETO IDEAL DE SUSPENSÃO CONSIDERANDO MODELO DE UM
QUARTO DE VEÍCULO EMPREGANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Recife

2021

WESLLEN LINS DE ARAUJO

**PROJETO IDEAL DE SUSPENSÃO CONSIDERANDO MODELO DE UM
QUARTO DE VEÍCULO EMPREGANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Lima de Souza

Recife

2021

Catálogo na fonte:
Biblioteca Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

A663p Araújo, Wesllen Lins de.
Projeto ideal de suspensão considerando modelo de um quarto de veículo empregando algoritmos genéticos / Wesllen Lins de Araújo. – 2021.
68 f.: il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Lima de Souza.
TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Departamento de Engenharia Mecânica, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Engenharia mecânica. 2. Suspensão veicular. 3. Vibrações mecânicas. 4. Dinâmica veicular. 5. Conforto. 6. Otimização. I. Souza, Tiago Lima de (Orientador). II. Título.

UFPE

621 CDD (22. ed.) BCTG/2022-185

WESLLEN LINS DE ARAUJO

**PROJETO IDEAL DE SUSPENSÃO CONSIDERANDO MODELO DE UM QUARTO
DE VEÍCULO EMPREGANDO ALGORITMOS GENÉTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociência, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 11/12/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago Lima de Sousa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Maria Andrade Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Eng. Thiago da Silva (Examinador Externo)
Engenheiro da WEG S.A.

AGRADECIMENTOS

Agradeço sobre tudo e todos a Deus e pela intercessão de Nsa. De Fátima por ter me dado sabedoria, perseverança e disciplina em todos esses últimos anos para que eu prosseguisse firme na minha graduação em engenharia mecânica. Agradeço aos investimentos e crença que meus pais tiveram comigo, me resguardando de outros trabalhos para que houvesse dedicação integral aos meus estudos. Agradeço a minha noiva Juliane por ter estado ao meu lado me incentivando nos momentos difíceis desta graduação. No mais, agradeço a todos os professores que fizeram parte dessa trajetória e de modo muito particular, ao meu orientador Dr. Tiago de Sousa, que me ajudou a realizar este trabalho.

RESUMO

A indústria automotiva está sempre em evolução buscando aumentar a qualidade e a segurança de seus veículos, a fim de incrementar sua rentabilidade. Para isso acontecer, é necessário o desenvolvimento de pesquisas, simulações no ambiente computacional e testes de protótipos. Este trabalho de conclusão de curso, consiste no início de um aprofundamento do estudo da suspensão veicular, tendo como principal objetivo, otimizar os seus parâmetros para obter o melhor conforto dos ocupantes. Para tal, foi utilizado ferramentas de modelagem matemática de veículo, pista e conceitos de otimização. A validação desses modelos foi feita através de gráficos no domínio da frequência e do tempo gerados pelo software Matlab e do Simulink que comprovaram a melhoria do conforto para os ocupantes. O conceito de conforto neste trabalho será definido como a medida da aceleração vertical da carroceria do veículo, quanto menor está aceleração, mais confortável o veículo será. Futuros trabalhos para o estudo de estabilidade e suspensão ativa, poderão utilizar este TCC como base, contribuindo para o avanço tecnológico na indústria automotiva.

Palavras-chave: suspensão veicular; vibrações mecânicas; dinâmica veicular; conforto; otimização.

ABSTRACT

The automotive industry is always evolving, seeking to increase the quality and safety of its vehicles, in order to increase its profitability. For this to happen, it is necessary to develop research, simulations in the computational environment and prototype tests. This course conclusion work, consists of the beginning of an in-depth study of vehicle suspension, with the main objective of optimizing its parameters to obtain the best comfort for the occupants. For this purpose, mathematical modeling tools of vehicle, track and optimization concepts were used. The validation of these models was done through frequency and time domain graphics generated by Matlab and Simulink software, which proved the improvement in comfort for occupants. The concept of comfort in this work will be defined as the measure of the vertical acceleration of the vehicle body, the lower the acceleration, the more comfortable the vehicle will be. Future works for the study of stability and active suspension, may use this TCC as a basis, contributing to technological advancement in the automotive industry.

Keywords: vehicle suspension; mechanical vibrations; vehicle dynamics; comfort; optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Suspensão dependente	17
Figura 2 – Suspensão Semi-independente	17
Figura 3 – Suspensão Independente	18
Figura 4 – Suspensão Double Wishbonee	18
Figura 5 – Manga de eixo	19
Figura 6 – Cubo de roda	19
Figura 7 – Braço de suspensão	20
Figura 8 – Feixe de mola	21
Figura 9 – Mola helicoidal	21
Figura 10 – Amortecedor telescópico	22
Figura 11 – Barra estabilizadora	22
Figura 12 – Suspensão e seus componentes	23
Figura 13 – Modelagem lateral	24
Figura 14 – Modelo Bicycle Car	25
Figura 15 – Modelagem frontal	27
Figura 16 – Modelo Half Car	27
Figura 17 – Modelo um quarto de veículo	29
Figura 18 – Vibração contínua/aleatória	30
Figura 19 – Função autocorrelação	31
Figura 20 – Distribuição Gaussiana	32
Figura 21 – Função densidade espectral de frequência	35
Figura 22 – Banda de frequência	36
Figura 23 – Perfis de pista, classificação de A a G	42
Figura 24 – Classificação de A a G para as FDEP	43
Figura 25 – Nomeclatura dos algoritmos genéticos	44
Figura 26 – Fluxograma de um algoritmo genético	45
Figura 27 – Cruzamento em um único ponto	46
Figura 28 – Cruzamento em dois pontos	46
Figura 29 – Cruzamento em pontos aleatórios	47
Figura 30 – Modelo matematico	48

Figura 31 – Modelo Um Quarto de Veículo com pista	49
Figura 32 – Diagrama da modelagem	55
Figura 33 – Diagrama de otimização	56
Figura 34 – Modelo Um Quarto de Veículo no Simulink	57
Figura 35 – Comparação numérica dos resultados da corrente metodologia e dados da literatura.	59
Figura 36 – FRF receptância e FRF em termos do deslocamento da massa suspensa . .	60
Figura 37 – Funções Densidade Espectral de Potência para a massa suspensa em termos do deslocamento e da aceleração	60
Figura 38 – Pista gerada, classificação D	62
Figura 39 – Deslocamento vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink	63
Figura 40 – Zoom no deslocamento vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink	63
Figura 41 – Velocidade vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink	64
Figura 42 – Aceleração vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink.	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação de pista	41
Tabela 2 – Escala de desconforto para padrões europeus	54
Tabela 3 – Comparação entre as frequências naturais	61
Tabela 4 – Modos de vibração associados a cada frequência natural	61

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Tempo
v	Velocidade
ω	Frequência
m_s	Massa suspensa
m_p	Massa do pneu
k_s	Coefficiente de rigidez da suspensão
k_p	Coefficiente de rigidez do pneu
c_s	Coefficiente de amortecimento da suspensão
c_p	Coefficiente de amortecimento do pneu
ξ	representa a posição vertical na pista
x	Posição horizontal na pista
y_s	Posição vertical da massa suspensa
y_p	Posição vertical do pneu
\dot{y}_s	Velocidade vertical da massa suspensa
\dot{y}_p	Velocidade vertical do pneu
\ddot{y}_s	Aceleração vertical da massa suspensa
\ddot{y}_p	Aceleração vertical do pneu
Z_s	Curso da suspensão - Movimento relativo entre massa suspensa e pneu
Z_p	Curso do pneu - Movimento relativo entre pneu e pista
$\underline{\underline{Z}}$	Matriz do curso da suspensão
$\underline{\underline{\alpha}}$	Matriz Alpha
R_y	Função autocorrelação
σ_y	Desvio padrão
ψ_y^2	Valor quadrático médio
E	Valor esperado
S_y	Função densidade espectral de frequência
a_{ij}	Aceleração média quadrática
G_ξ	Função densidade espectral de potência unilateral

h	Perfil de pista
n	Frequência espacial
L	Comprimento de pista
B	Intervalo de amostragem
φ	Ângulo de fase
P	Probabilidade
H	Receptância

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	MOTIVAÇÃO	14
1.2	OBJETIVOS	14
2	REVISÃO TEÓRICA	16
2.1	SUSPENSÃO AUTOMOTIVA	16
2.1.1	Tipos de suspensão	16
2.1.2	Componentes da suspensão	18
2.2	MODELOS MATEMATICOS DE SUSPENSÃO	24
2.2.1	Modelo duas rodas com arfagem da carroceria	24
2.2.2	Modelo meio de veículo com rolagem de carroceria	26
2.2.3	Um quarto de veículo	28
2.3	VIBRAÇÕES RANDÔMICAS	29
2.3.1	Médias de conjuntos: processos randômicos estacionários	30
2.3.2	Medias temporais: valor médio, função autocorrelação. processos randômicos ergóticos	31
2.3.3	Processos randômicos gaussianos	32
2.3.4	Valor médio, desvio padrão e função autocorrelação	33
2.3.5	Propriedades Da Função Autocorrelação	33
2.3.6	Função Densidade Espectral De Potência	34
2.4	MODELAGEM DO PERFIL DE PISTA	38
2.4.1	Função Epectral de Potência dos Perfis de Pista	39
2.4.2	Perfil de Pista	41
2.5	ALGORITMOS GENÉTICOS	43
2.5.1	Parâmetros Iniciais	44
2.5.2	População Inicial	44
2.5.3	Função Objetivo	45
2.5.4	Seleção	45
2.5.5	Cruzamento	46
2.5.6	Mutação	47
3	METODOLOGIA	48

3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	49
3.1.1	Análise no domínio do tempo	49
3.1.2	Análise no domínio da frequência	50
3.2	FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DO MODELO	51
3.3	ACELERAÇÃO DA MASSA SUSPensa	53
3.4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	54
3.4.1	Definição dos parâmetros para implementação computacional	54
3.4.2	Otimização dos parâmetros para a mínima aceleração da massa suspensa	55
3.4.3	Modelo no SIMULINK	56
4	RESULTADOS	58
4.1	VARIÁVEIS DE PROJETO OTIMIZADAS	58
4.2	FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF) EM TERMOS DA RE- CEPTÂNCIA $H_{12}(\omega)$ E EM TERMOS DO DESLOCAMENTO DA MASSA SUSPensa $Y_s(\omega)$	59
4.3	FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR	60
4.4	MODELAGEM DA PISTA	61
4.5	RESULTADO DO DESLOCAMENTO VERTICAL DA MASSA SUSPensa	62
4.6	RESULTADO DA VELOCIDADE VERTICAL DA MASSA SUSPensa	63
4.7	ACELERAÇÃO VERTICAL DA MASSA SUSPensa	64
5	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico do automóvel ao longo dos anos vem englobando o desenvolvimento da suspensão veicular, focando em um primeiro momento apenas em manter o contato dos pneus ao solo, até os dias de hoje com os mais modernos sistemas de controle eletrônico proporcionando mais estabilidade e principalmente conforto aos passageiros. Os primeiros veículos fabricados em série eram compostos por uma suspensão de eixo rígido dependente, com molas de lâminas de aço, foram inspiradas em charretes e carruagens de tração animal da época. Em 1949, Earle S. MacPherson engenheiro americano desenvolveu uma suspensão simples, compacta e resistente para a Ford onde até hoje é bastante utilizada na grande maioria dos automóveis da linha com a patente registrada em 1949 (Patente dos EUA 2.660.449 para Ford).

1.1 MOTIVAÇÃO

O estudo contínuo desse importante componente, mesmo com grandes mudanças que ocorrem hoje na indústria automotiva, como a corrida pela troca dos motores a combustão por elétricos, levam ao aumento da competitividade em um mercado que tem cada vez mais clientes exigentes com relação ao conforto e segurança do veículo. Em um projeto de concepção de um novo modelo de automóvel. A suspensão deve se adequar as características que esse novo veículo vai ter, como limites de carga, comprimento do entre eixo, largura, tamanho dos pneus, entre outros. O tipo de suspensão é escolhido de acordo com essas características, mas os parâmetros do modelo da suspensão escolhida têm que ser otimizados para se obter mais eficiência e maior performance. Por isso é importante obter e desenvolver, de forma contínua, ferramentas matemáticas e testes mais exigentes para chegar nessa otimização de forma rápida e barata.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo a modelagem e simulação computacional de uma suspensão veicular, para a determinação ótima dos seus parâmetros visando melhorar o conforto dos ocupantes, ou seja, minimizar a aceleração vertical da carroceria. Este estudo se destaca

no que tange esse conteúdo, pelo fato de ser considerado uma modelagem das irregularidades do solo, através da ISO 8608. Esta norma modela a pista utilizando propriedades estatísticas através de vibrações randômicas. Desta forma, o modelo matemático do solo se torna mais realística pelo fato de gerar um perfil aleatório, diferentemente da utilização de uma função padrão como funções senoidais, onde é utilizado frequentemente neste tipo de estudo. Nos estudos de suspensão veicular, dificilmente vamos encontrar a consideração e modelagem da pista. Isso implica na obtenção de resultados mais confiáveis e próximos da realidade, ajudando a aprimorar os estudos de conforto de suspensão veicular agregando valor e competitividade na indústria automotiva. A otimização dos parâmetros da suspensão que foram encontrados para este presente trabalho, foram feitas partindo do conceito de obter uma mínima aceleração da massa suspensa, utilizando algoritmos genéticos. Esta aceleração pode ser considerada um ótimo medidor do nível de conforto, onde é possível classifica-lo de acordo com normas aplicáveis a esse tipo de análise.

2 REVISÃO TEÓRICA

Para a realização dos estudos sobre uma suspensão veicular, é necessário um adequado entendimento do seu funcionamento e base teórica para a modelagem matemática. Neste capítulo, será apresentado no primeiro momento os componentes e modelos de uma suspensão bem como suas características, detalhando as vantagens e desvantagens de cada tipo. No segundo momento, ainda neste capítulo, será abordado conceitos fundamentais para a modelagem matemática como conceitos básicos de estatística para a modelagem de pista, vibrações randômicas e modelagem matemática de um sistema de um grau de liberdade.

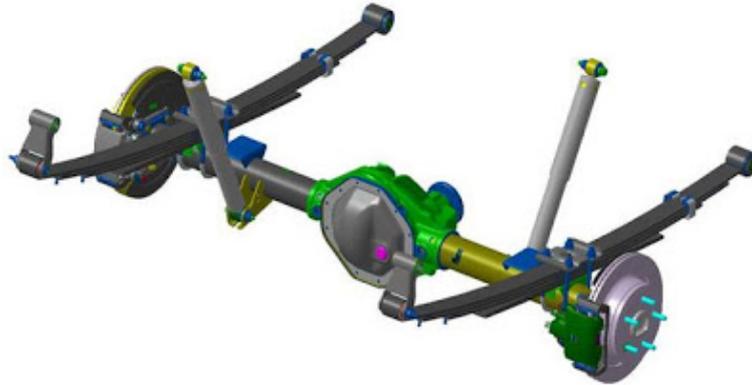
2.1 SUSPENSÃO AUTOMOTIVA

Diferentes modelos de suspensão são utilizados dependendo da sua aplicação para se alcançar melhor eficiência e maior performance, considerando conforto e estabilidade. Comumente os tipos de suspensão são determinados pelo modelo do veículo como por exemplo, Hatch, SUV, Pickup, Van, etc., isso se dá pelo fato do peso e altura do veículo influenciar nessa escolha. A suspensão automotiva está dividida em três grupos, dependente, semi-independente e independente, para cada tipo será discutido as vantagens, desvantagens e suas aplicações.

2.1.1 Tipos de suspensão

- Suspensão dependente: A suspensão dependente é formada por um eixo rígido que liga uma manga de eixo a outra, com isso, os movimentos de um pneu depende do outro diminuindo a autonomia e performance de cada um. A figura 1 mostra o esquemático de uma suspensão dependente. Ela é muito utilizada hoje em veículos pesados que requerem maior robustez, sendo necessário o uso de eixos rígidos como caminhões, caminhonetes, ônibus e etc..
- Suspensão semi-independente: A suspensão semi-independente consiste em um projeto onde cada manga de eixo possui o seu braço independente, cada um deles possui a sua mola e seu amortecedor trabalhando de forma quase que individual. Esse motivo se dá pelo fato de os braços serem conectados por uma barra de torção para fornecer mais rigidez ao conjunto de forma compacta, barata e de simples projeto. A figura 2 mostra

Figura 1 – Suspensão dependente.



Disponível em: maybach300c.blogspot.com (2020)

o esquemático desse tipo de suspensão. A sua grande desvantagem é a transmissão de movimento e de vibração de uma roda a outra. Esse tipo de suspensão é muito utilizado na traseira de veículos da linha leve com tração dianteira.

Figura 2 – Suspensão semi-independente.



Disponível em: quatorrodas.abril.com.br (2020)

- Suspensão independente: Esse tipo de suspensão possibilita mais conforto e estabilidade ao veículo devido ao movimento individual independente de cada pneu, sendo utilizado na grande maioria dos veículos de hoje. Há vários modelos de suspensão independente, entre os mais famosos são a suspensão do tipo McPherson e Duplo A (Double Wishbone). A figura 3 mostra o esquemático de uma suspensão do tipo McPherson e Duplo A

respectivamente. Esse TCC será focado nesses dois tipos de suspensão, onde a bancada

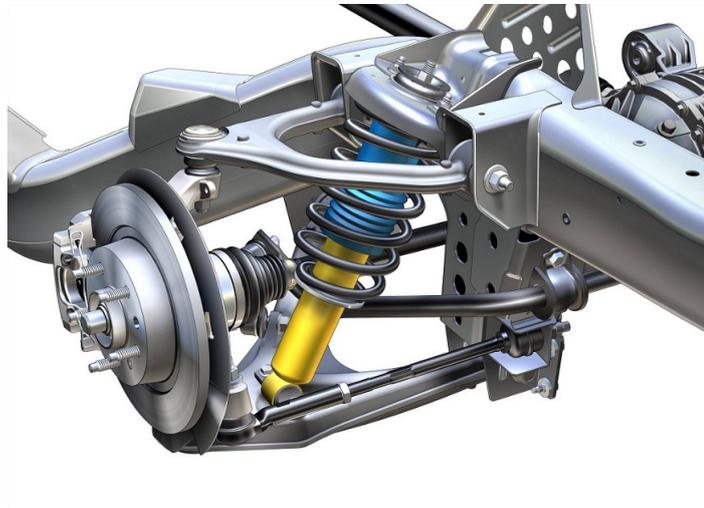
Figura 3 – Suspensão Independente.



Disponível em: info.3dmmotorsport.com (2020)

de teste é adaptável para ensaiar tanto o tipo McPherson como a Duplo A.

Figura 4 – Suspensão Double Wishbone .



Disponível em: medium.com (2020)

2.1.2 Componentes da suspensão

Os componentes mais fundamentais que compõem uma suspensão veicular serão apresentados a seguir:

- Manga de eixo (steering knuckle): A manga de eixo é responsável por abrigar o rolamento, pivotar o(s) braço(s) de suspensão ou o eixo rígido, pivotar o braço de direção e fixar o conjunto de freio. A figura 5 mostra uma manga de eixo para suspensão do tipo McPherson.

Figura 5 – Manga de eixo.



Disponível em: www.acciolygm.com.br (2020)

- Cubo de roda (Wheel Hub): O cubo de roda é acoplado no rolamento que por sua vez é fixado na jante que giram solidários. A figura 6 mostra um cubo da linha leve.

Figura 6 – Cubo de roda.



Disponível em: www.magazineluiza.com.br (2020)

- Braço de suspensão (Suspension Arm): O braço de suspensão ou a bandeja são responsáveis pela ligação do montante da suspensão a carroceria, eles devem ser projetados para receber impacto, forças de frenagem e de aceleração. A figura 7 mostra um modelo de bandeja inferior utilizada em uma caminhonete.

Figura 7 – Braço de suspensão.



Disponível em: canaldapeca.com.br (2020)

- Molas (Spring): As molas são responsáveis por manter os pneus aderentes no solo de forma contínua, absorver os impactos e as vibrações dando maior conforto e segurança aos ocupantes. As molas podem ser em feixes laminares, muito utilizado em veículos da linha média e pesada por suportar uma carga maior e ou molas helicoidais de compressão, utilizados na linha leve e média. As figuras 8 e 9 mostram um feixe de mola e uma mola helicoidal.
- Amortecedor (Shock Absorber): O amortecedor dissipa a energia da mola diminuindo as oscilações causadas por ela, além de ajudar a absorver os impactos sofridos pela suspensão. A figura 10 mostra um modelo de amortecedor telescópico utilizado em eixo traseiro de uma caminhonete.
- Barra estabilizadora (Anti-roll Bar): A barra estabilizadora consiste em uma barra que liga um pneu a outro com o propósito de gerar momentos de sentidos contrários nas suas extremidades fazendo com que ela sofra torção, gerando resistência de rolagem

Figura 8 – Feixe de mola.



Disponível em: localmotors.com.br (2020)

Figura 9 – Mola helicoidal.



Disponível em: produto.mercadolivre.com.br (2020)

na carroceria dando estabilidade ao veículo. A figura 11 mostra um modelo de barra estabilizadora utilizado em carros de corrida.

A junção de todos esses componentes forma a suspensão automotiva, conforme a figura 12. Além desses componentes temos o sistema de freio e do sistema de direção que não serão abordados aqui.

Figura 10 – Amortecedor telescópico.



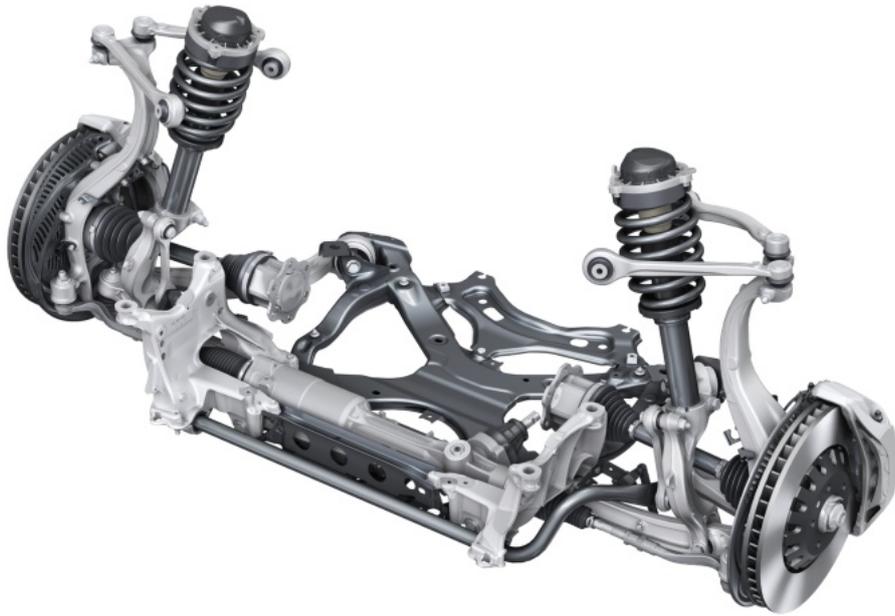
Disponível em: www.volvopecas.com.br (2020)

Figura 11 – Barra estabilizadora.



Disponível em: ladamoscow.com (2020)

Figura 12 – Suspensão e seus componentes.



Disponível em: www.torque.com.sg (2020)

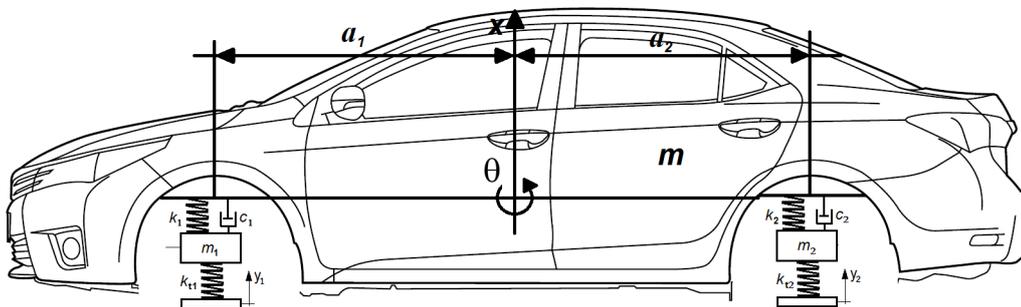
2.2 MODELOS MATEMATICOS DE SUSPENSÃO

Há vários tipos de modelos matemáticos que representam uma suspensão veicular, cada um tem as suas considerações e diferentes propósitos de análise. Esses modelos são pré-estabelecidos como Modelo duas rodas com arfagem da carroceria e o Modelo meio de veículo com rolagem de carroceria. A seguir, será pontuado os modelos de suspensão citados e suas respectivas equações do movimento baseados em Reza N. Jazar (2008).

2.2.1 Modelo duas rodas com arfagem da carroceria

Esse modelo matemático consiste em analisar de forma longitudinal o veículo, ou seja, uma modelagem lateral que inclui as rodas laterais, seus respectivos amortecedores e excitações como mostra a figura 13.

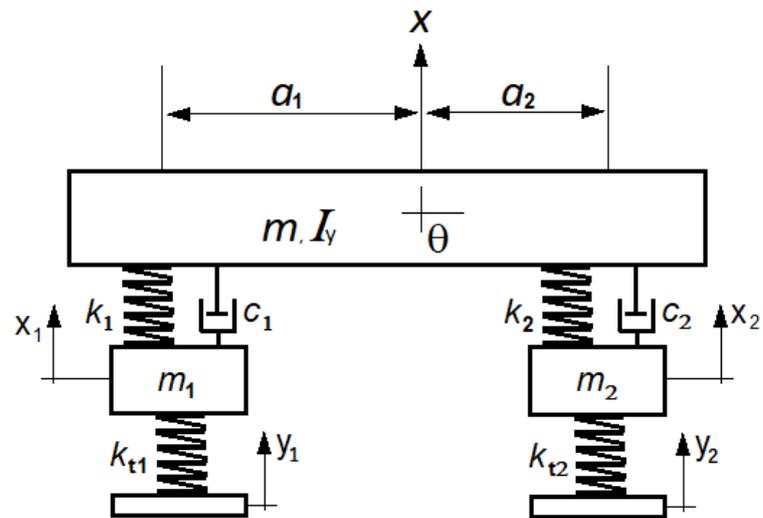
Figura 13 – Modelagem lateral.



Fonte: Adaptado de br.pinterest.com (2020)

A figura 14 mostra o modelo Bicycle Car, a carroceria é representada por uma barra de massa m que é a massa total do veículo e não metade junto com o momento de inercia lateral. Para simplificação dos cálculos não é considerado o amortecimento dos pneus. As excitações são dadas por y_1 e y_2 que são independentes, ao passo que x_1 e x_2 são as posições do centro do pneu onde consideramos o ponto de concentração de massa m_1 , m_2 e rigidez k_{t1} e k_{t2} . O conjunto da suspensão é dado pela rigidez k_1 , k_2 , amortecimento c_1 e c_2 . A posição da carroceria é dada pela translação vertical x e arfagem θ . O sistema possui quatro graus de liberdade.

Figura 14 – Modelo Bicycle Car.



Fonte: O autor (2021)

A equação do movimento é dada pela Eq. 2.1, onde:

$$[m]\ddot{\mathbf{x}} + [c]\dot{\mathbf{x}} + [k]\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$[m] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$[c] = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & a_2c_2 - a_1c_1 & -c_1 & -c_2 \\ a_2c_2 - a_1c_1 & c_1a_1^2 + c_2a_2^2 & a_1c_1 & -a_2c_2 \\ -c_1 & a_1c_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & -a_2c_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$[k] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & a_2 k_2 - a_1 k_1 & -k_1 & -k_2 \\ a_2 k_2 - a_1 k_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 & a_1 k_1 & -a_2 k_2 \\ -k_1 & a_1 k_1 & k_1 + k_{t_1} & 0 \\ -k_2 & -a_2 k_2 & 0 & k_2 + k_{t_2} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 k_{t_1} \\ y_2 k_{t_2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

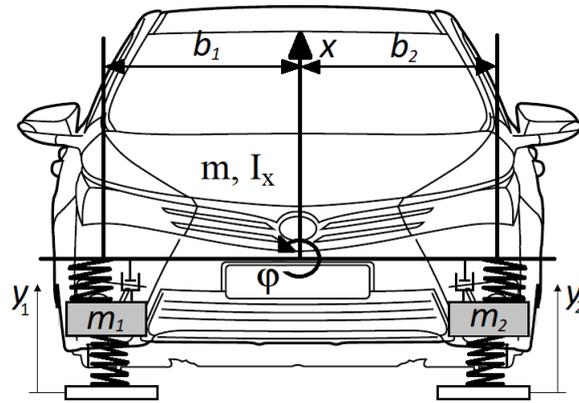
Essa modelagem é importante para o estudo do comportamento do sistema (veículo) em casos de frenagem e aceleração onde o movimento de arfagem e translação vertical são presentes.

2.2.2 Modelo meio de veículo com rolagem de carroceria

A modelagem Half Car consiste em analisar o veículo no plano frontal, ou seja, considerasse as duas rodas frontais ou traseiras onde é levado em conta não só o movimento da suspensão, mas também o de rolagem como mostra a figura 15. Esse modelo é muito utilizado para estudar o comportamento do veículo em curvas, onde a rolagem pode ser reproduzida. Para suspensão dependente em que o curso de uma roda influencia na outra, esse modelo tornasse bem conveniente uma vez que os outros métodos não podem ser aplicados por utilizar uma roda ou duas no plano lateral. A modelagem é feita considerando a metade da massa do veículo $m = M/2$ junto com o momento de inercia, as massas dos pneus m_1 e m_2 , os coeficientes de rigidez das molas junto com o coeficiente dos amortecedores k e c , a barra estabilizadora de rigidez k_r e a rigidez dos pneus k_t . A figura 16 mostra a modelagem Half Car.

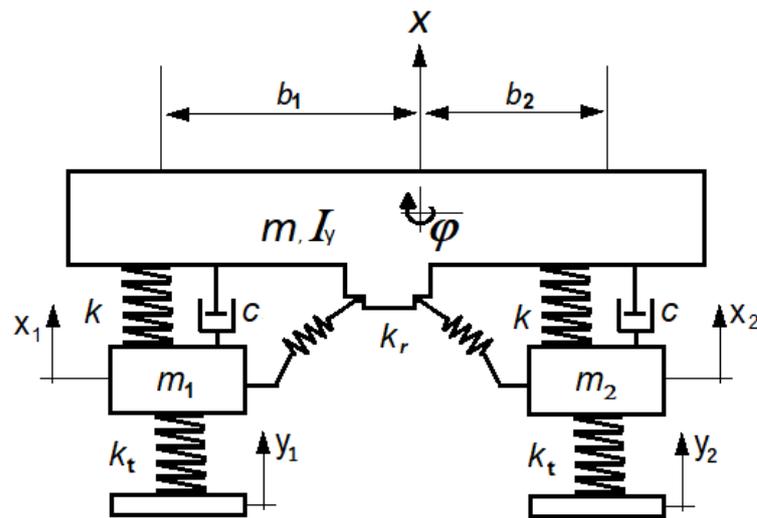
Mais uma vez a equação do movimento é dada pela equação 2.1 e suas matrizes obtidas pelo método de Lagrange, onde:

Figura 15 – Modelagem frontal.



Fonte: Adaptado de br.pinterest.com (2020)

Figura 16 – Modelo Half Car.



Fonte: O autor (2021)

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$[m] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$[c] = \begin{pmatrix} 2c & cb_1 - cb_2 & -c & -c \\ cb_1 - cb_2 & cb_1^2 + cb_2^2 & -cb_1 & cb_2 \\ -c & -cb_1 & c & 0 \\ -c & cb_2 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

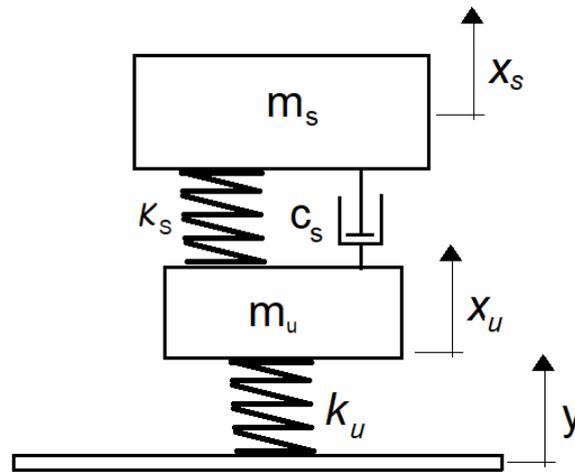
$$[k] = \begin{pmatrix} 2k & kb_1 - kb_2 & -k & -k \\ kb_1 - kb_2 & kb_1^2 + kb_2^2 + k_R & -kb_1 & kb_2 \\ -k & -kb_1 & k + k_t & 0 \\ -k & kb_2 & 0 & k + k_t \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 k_t \\ y_2 k_t \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.2.3 Um quarto de veículo

O modelo um quarto de veículo é o mais utilizado entre os modelos matemáticos que simulam uma suspensão veicular, pelo fato de ter uma análise simplificada, ou seja, ele isola e tem atenção apenas a uma das suspensões (conjunto formado por um pneu, uma mola e um amortecedor). A figura 17 mostra o modelo matemático que é idealizado. A massa m_s é $\frac{1}{4}$ da massa suspensa total do veículo como carroceria e peso do passageiro, acompanhado da mola k_s e do amortecedor c_s que simulam os componentes da suspensão do veículo. A massa m_u é a massa do pneu e a mola k_u sua rigidez, já que ela tem uma influência importante no estudo da vibração da suspensão. A equação do movimento é dada pela soma da matriz massa, amortecimento e rigidez multiplicado pelos vetores da aceleração, velocidade e posição

Figura 17 – Modelo um quarto de veículo.



Fonte: O autor (2021)

respectivamente. As matrizes são obtidas aplicando o método de Lagrange. Esse somatório é igualado ao vetor força como mostra a Eq. 2.12:

$$[m]\ddot{\mathbf{x}} + [c]\dot{\mathbf{x}} + [k]\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.12)$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_u y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

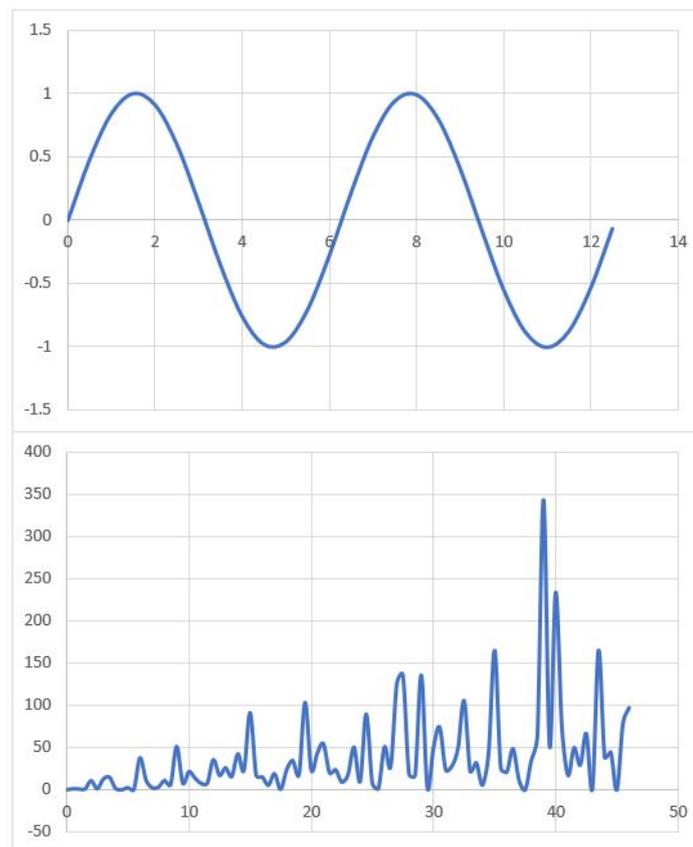
2.3 VIBRAÇÕES RANDÔMICAS

Para o estudo da suspensão veicular ser mais próximo da realidade, será utilizado um perfil de pista utilizando conceitos de vibrações randômicas, um campo aleatório que descreve a superfície da pista, como é sugerido em outros trabalhos com essa temática de estudo. Assim fazem Agostinacchio (2013) e Olita (2013), Gomes (2009), González (2008) e Sun et al (2007). Nesta seção este conceito será abordado para mais a frente ser aplicado ao estudo da modelagem da pista.

2.3.1 Médias de conjuntos: processos randômicos estacionários

Nem sempre a vibração de um determinado corpo pode ser descrita por uma única função ao longo do tempo de forma previsível. Na realidade o comportamento de um sistema mecânico sob vibração em um dado tempo é imprevisível e aleatória. Desta forma, é necessário encontrar uma forma de prever o comportamento desses sistemas e descreve-los matematicamente. Tem-se então o estudo chamado vibrações randômicas. A diferença entre um sistema sob vibração determinísticas e um sistema sob vibrações randômicas é mostrada na figura 18: Quando

Figura 18 – Vibração contínua/aleatória.



Fonte: O autor (2021)

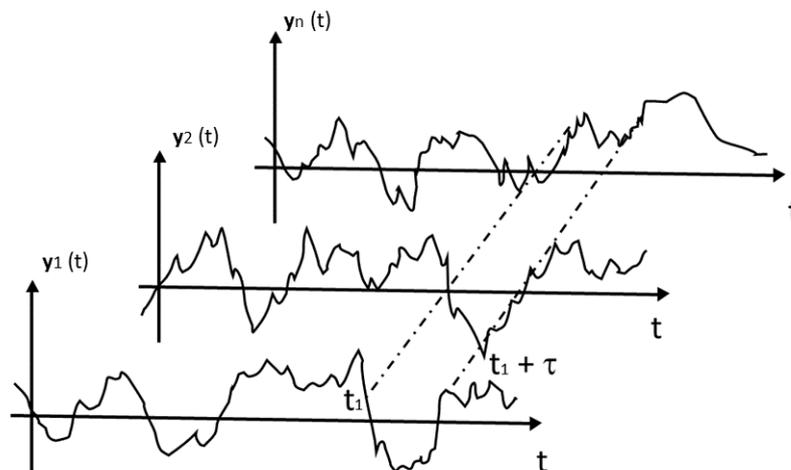
realizamos um estudo de vibrações usando o conceito randômico, se faz necessário utilizar os fundamentos da estatística uma vez que o sistema é aleatório e pode ser descrito por um conjunto de funções. A ideia é pegar uma amostra de várias funções que descrevem o comportamento do sistema em vibração e tirar a sua média μ . Dado uma amostra de n funções $y(t) = y_1(t), y_1(t), y_1(t), \dots, y_k(t), \dots, y_n(t)$, a média dessa amostra será:

$$\mu_y(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k(t_1) \right) \quad (2.14)$$

Um outro parâmetro importante para o desenvolvimento estatístico do estudo randômico é a função autocorrelação. Considerando a figura 19, temos os tempos $t = t_1$ e $t = t_1 + \tau$ para cada função y_k , onde a função autocorrelação é o produto entre esses dois tempos para cada função y_k . Somando todas essas funções. Na equação seguinte temos a sua representação:

$$R_y(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_k(t_1)y_k(t_1 + \tau)] \right) \quad (2.15)$$

Figura 19 – Função autocorrelação.



Fonte: O autor (2021)

Em geral, a média das amostras μ desses parâmetros e a função autocorrelação R_y dependem do tempo t_1 , quando isso ocorre, dizemos que o processo randômico é não estacionário, caso contrário, quando a média e a função autocorrelação não dependem do tempo t_1 é dito processo randômico estacionário e a função autocorrelação se resume a

$$R_y(t_1, t_1 + \tau) = R_y(\tau) \quad (2.16)$$

2.3.2 Médias temporais: valor médio, função autocorrelação. processos randômicos ergóticos

Para o cálculo da média e da função autocorrelação se faz necessário uma grande quantidade de funções como foi visto. Existe uma forma de representar essas funções através de uma única função representativa y_k , onde a média e a função autocorrelação passam a ser representadas da seguinte forma respectivamente:

$$\mu_y(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_k(t) dt \quad (2.17)$$

$$R_y(k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_k(t) y_k(t + \tau) dt \quad (2.18)$$

Se a amostra $y(t)$ é estacionária e a média temporal é igual a função autocorrelação, dizemos que o tratasse de um processo ergótico, ou seja, se a media $\mu_y(k)$ for a mesma que $R_y(k, \tau)$, seja para um tempo $-T/2 \leq t \leq T/2$ ou para $-\infty \leq t \leq \infty$.

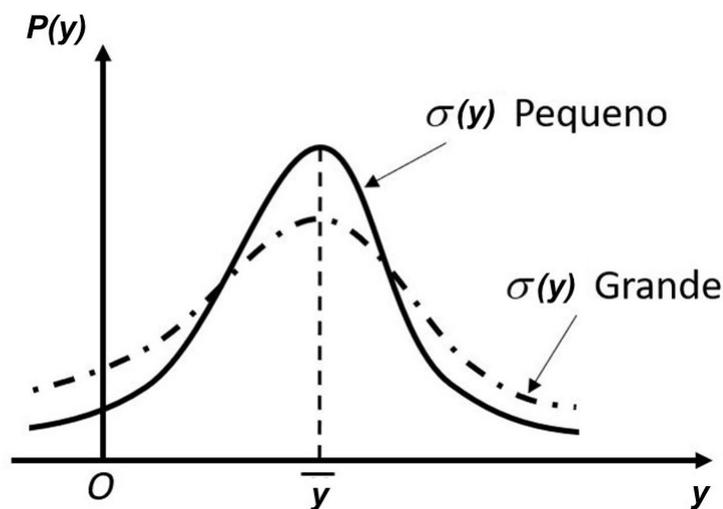
2.3.3 Processos randômicos gaussianos

O estudo dos processos randômicos é facilitado através da aplicação da distribuição Gaussiana. Dada uma amostra $y(t)$, usamos a função distribuição de probabilidade fdp, para retirarmos outros parâmetros estatísticos, como a média e o desvio padrão. Utilizando a gaussiana, a fdp é descrita por (RAO, SINGIRESU S, 2008):

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} \right]} \quad (2.19)$$

A média e o desvio padrão variam no tempo t para processos não estacionários, mas são constantes para processos estacionários. A fdp Gaussiana, se comporta como uma curva de distribuição normal (sino) como é mostrado na figura 20.

Figura 20 – Distribuição Gaussiana.



Fonte: O autor (2021)

2.3.4 Valor médio, desvio padrão e função autocorrelação

Considerando uma função aleatória contínua $y(t)$, com função distribuição de probabilidade $f(y)$, o valor esperado médio é a área abaixo da curva do gráfico da fdp, ou seja:

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy \quad (2.20)$$

Se caso o processo ser estacionário e ergótico, o valor esperado não depende do tempo se resume a:

$$E[y(t)] = \mu_y = cte \quad (2.21)$$

O valor esperado com uma fdp ao quadrado $(y(t))^2$ corresponde ao valor quadrático médio, isto é:

$$\psi_y^2 = E[(y(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y((t))^2 f(y)dy \quad (2.22)$$

No processo randômico ergótico, o maior interesse é o cálculo do valor médio quadrático em torno da média que é chamado de variância, ou seja, como estão distribuídas as funções em torno da média. Esse cálculo é dado por:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y(t) - \mu_y)^2 f(y)dy \quad (2.23)$$

Desenvolvendo a equação temos:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y((t))^2 f(y)dy - 2\mu_y \int_{-\infty}^{\infty} y((t))f(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_y)^2 f(y)dy \quad (2.24) \\ &= E[(y(t))^2] - 2\mu_y E[(y(t))] + \mu_y^2 \\ &= \psi_y^2 - 2\mu_y^2 + \mu_y^2 \\ &= \psi_y^2 - \mu_y^2 \end{aligned}$$

Ou seja, em um processo randômico ergótico, o valor da variância é a diferença entre o valor da média quadrática e a média ao quadrado. Se a média for nula, a variância se resume no valor médio quadrático como é mostrado da seguinte equação.

$$\sigma_y^2 = E[(y(t))^2] = \psi_y^2 \quad (2.25)$$

2.3.5 Propriedades Da Função Autocorrelação

A função autocorrelação que já foi definida, pode ser escrita utilizando o valor da esperança, ou seja:

$$R_y(t, t + \tau) = E[y(t)y(t + \tau)] \quad (2.26)$$

Se for um processo randômico estacionário, onde a função independe de t , a função autocorrelação vai ser resumida da seguinte forma:

$$E[y(t)y(t + \tau)] = R_y(t, t + \tau) = R_y(\tau) \quad (2.27)$$

Considerando agora um tempo anterior, ou seja, $R_y(-\tau)$, temos: Em um processo randômico estacionário temos:

$$E[y(t)y(t - \tau)] = E[y(t)y(t + \tau)] \quad (2.28)$$

Ou seja, $R_y(-\tau) = R_y(\tau)$, logo $R_y(-\tau)$ é uma função uniforme de τ . Quando $\tau = 0$, a função autocorrelação é igual ao valor médio quadrático e conseqüentemente a variância quando a média for nula.

$$R_Y(0) = E[(y(t))_2] = \psi_y^2 \quad (2.29)$$

2.3.6 Função Densidade Espectral De Potência

A função autocorrelação fornece informações sobre processo randômico, já a função densidade espectral de potência vai nos trazer informações similares, mas a diferença é que será no domínio da frequência. A função autocorrelação em um processo randômico ergótico, considerando $y(t)$ como a representação de uma amostra de funções $y(t)$, é dada por:

$$R_y(k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2 + \tau} y_k(t)y_k(t + \tau)dt \quad (2.30)$$

Para fazermos essa função ser representada no domínio de frequência, basta aplicar a transformada de Fourier na função autocorrelação. Assim teremos a função densidade espectral de potência representada por $S_y(\omega)$.

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.31)$$

Para que exista uma função espectral de potência, é preciso que essa integral exista e seja convergente. Conseqüentemente, para obter a função autocorrelação basta aplicar a transformada inversa de $S_y(\omega)$ como é mostrado abaixo:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.32)$$

As propriedades da função espectral de potência serão abordadas a seguir:

1 Considerando $\tau = 0$, ou seja, quando a função autocorrelação for igual ao valor quadrático médio, como foi visto, podemos rescrever a equação utilizando a função espectral de potência:

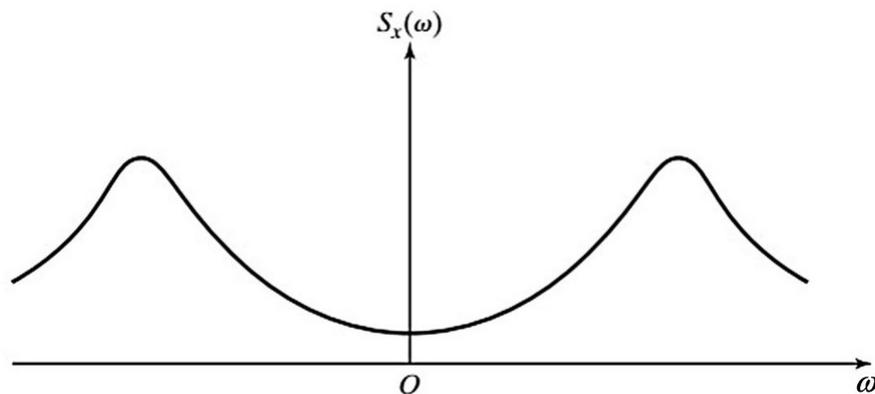
$$R_y(0) = E[(y(t))^2] = \psi_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega \quad (2.33)$$

Se a média for nula, $\mu_y = 0$, a variância vai ser obtida da seguinte forma:

$$\sigma_y^2 = E[(y(t))^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega \quad (2.34)$$

2 Como $R_y(\tau) = R_y(-\tau)$, ou seja, uma função par real, então $S_y(\omega) = S_y(-\omega)$, o gráfico abaixo mostra uma função densidade espectral de frequência: Pelo gráfico mostrado,

Figura 21 – Função densidade espectral de frequência.



Fonte: SINGIRESU RAO (2008, p. 994)

são registradas frequências tanto positivas como negativas, por interesse é apenas considerada um lado, ou seja, vamos definir uma função espectral equivalente unilateral $W_y(f)$. O espectro $W_y(f)$ é definido em termos de ciclos por unidade de tempo, ou seja, sempre teremos resultados positivos. A relação entre $W_y(f)$ e $S_y(\omega)$ pode ser visto na figura posterior e para representar matematicamente essa relação, utiliza-se a seguinte demonstração:

$$\omega = 2\pi f \quad (2.35)$$

Através dessa equação podemos escrever:

$$df = \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.36)$$

Como $W_y(f)$ pega apenas valores positivos temos:

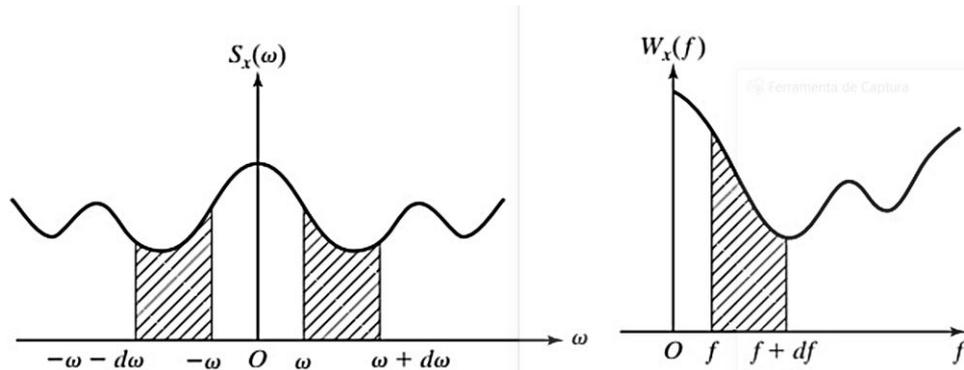
$$E[(y(t))^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) df \quad (2.37)$$

Para obter-se os mesmos valores quadráticos tanto de $S_y(\omega)$ como de $W_y(f)$, a banda de frequência df tem que ser igual a banda de $d\omega$ como mostra a figura 22, logo: c Reorganizando,

$$W_y(f) = 2S_y(\omega) \frac{d\omega}{df} \quad (2.38)$$

Como $d\omega = 2\pi df$, temos:

Figura 22 – Banda de frequência.



Fonte: SINGIRESU RAO (2008, p. 995)

$$W_y(f) = 4\pi S_y(\omega) \quad (2.39)$$

3 A densidade espectral de frequência foi descrita em termos de deslocamento, mas há situações que é necessário descrever em termos de velocidade e aceleração. Para isso basta encontrar a primeira e a segunda derivada do espectral de frequência que será demonstrado a seguir. Considerando a função autocorrelação:

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t - \tau)] \quad (2.40)$$

Onde pode ser escrita considerando todas as funções do conjunto $y(t)$:

$$R_y(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_k(t_1)y_k(t_1 + \tau)] \right) \quad (2.41)$$

Vamos agora derivar cada temos $y(t)$ em relação a τ

$$\frac{d\{y_k(t)y_k(t + \tau)\}}{d\tau} = y_k(t) \frac{dy_k(t + \tau)}{d\tau} \quad (2.42)$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d\{y_k(t)y_k(t + \tau)\}}{d\tau} &= y_k(t) \frac{dy_k(t + \tau)}{d(t + \tau)} \frac{d(t + \tau)}{d\tau} \\ &= y_k(t) \dot{y}_k(t + \tau) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Combinando as duas últimas equações obtemos:

$$\frac{d\{R_y(\tau)\}}{d\tau} = E\{y_k(t)y_k(t+\tau)\} \quad (2.44)$$

Para processos estacionarias as medias conjuntas são independentes do tempo t , logo temos:

$$E\{y(t)y_k(t+\tau)\} = E\{y(t-\tau)\dot{y}(t)\} \quad (2.45)$$

$$\frac{d\{R_y(\tau)\}}{d\tau} = E\{y(t-\tau)\dot{y}(t)\} \quad (2.46)$$

Diferenciando essa equação agora em relação a τ ,

$$\frac{d^2\{R_y(\tau)\}}{d\tau^2} = -E\{\dot{y}(t-\tau)\dot{y}(t)\} \quad (2.47)$$

Essa equação corresponde a função correlação em termos da velocidade $\dot{y}(t)$, assim escrevemos:

$$\frac{d^2\{R_y(\tau)\}}{d\tau^2} = -R_{\dot{y}}(\tau) = -E\{\dot{y}(t-\tau)\dot{y}(t)\} \quad (2.48)$$

Onde $R_{\dot{y}}(\tau)$ é a autocorrelação em termos do processo estacionário $\{\dot{y}(t)\}$. Aplicando a integral de Fourier temos:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.49)$$

Derivando essa expressão em termos de ω , considerando τ constante, obtemos:

$$\frac{d(R_y(\tau))}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.50)$$

Derivando novamente:

$$\frac{d^2(R_y(\tau))}{d\tau^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.51)$$

Combinando as Eq. 2.48 e 2.51:

$$R_{\dot{y}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.52)$$

A função autocorrelação da velocidade também pode ser escrita em termos da transformada inversa da densidade espectral da velocidade $\dot{S}_y(\omega)$:

$$R_{\dot{y}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.53)$$

Juntando as duas equações, Eqs. 2.52 e 2.53:

$$S_{\dot{y}}(\omega) = \omega^2 S_y(\omega) \quad (2.54)$$

Logo, a densidade espectral em termos da velocidade é apenas ω^2 vezes a densidade espectral em termos da densidade espectral do deslocamento, o que possibilita calcular a velocidade média quadrática $E[\dot{y}^2(t)]$ através de S_y .

Quando $\tau = 0$, na Eq. 2.53 e considerando a Eq 2.54, a velocidade média quadrática pode ser obtida como:

$$R_{\dot{y}}(0) = E[\dot{y}^2(t)] = \psi_{\dot{y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{y}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \quad (2.55)$$

Analogamente a aceleração media quadrática pode ser escrita da seguinte forma:

$$E[\ddot{y}^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{y}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega \quad (2.56)$$

Logo,

$$S_{\ddot{y}}(\omega) = \omega^4 S_y(\omega) \quad (2.57)$$

Conforme Bendat e Piersol (2010) e Rao (2018), a integração unilateral dessa função é o equivalente a integrar entre 0 a ∞ ou entre $-\infty$ a 0. Como essas integrações possuem o mesmo resultado, a equação 2.56 fica:

$$E[\ddot{y}^2(t)] = 2\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega\right) \Rightarrow E[\ddot{y}^2(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega \quad (2.58)$$

Com essa expressão podemos encontrar a raiz quadrática da aceleração média ou a chamada aceleração *rms*. Para tal, basta tirar a raiz da aceleração media quadrática da seguinte forma (MEIROVITCH, 2001):

$$a_{\ddot{y}} = \sqrt{E[\ddot{y}^2(t)]} = \sqrt{\psi_{\ddot{y}}^2} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega} \quad (2.59)$$

2.4 MODELAGEM DO PERFIL DE PISTA

Para deixar o modelo mais próximo da realidade, é importante haver uma modelagem refinada da pista para se obter valores aceitáveis.

2.4.1 Função Epectral de Potência dos Perfis de Pista

Como foi abordado na seção anterior, segundo RAO (2018), em vibrações randômicas basicamente há duas funções importantes para o estudo deste tema, que são a função autocorrelação que fornece informações sobre processo randômico e a FDEP (função densidade espectral de potência), que traz as mesmas informações, mas no domínio da frequência. Para obter a aceleração vertical do sistema mais na frente, será preciso encontrar a FDEP da massa suspensa e não-suspensa que será obtida nesta seção. A função autocorrelação como é definido por RAO (2018) é dada por:

$$R_{\xi}(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega X} d\omega \quad (2.60)$$

Aplicando a transformada de Fourier nesta equação, chega-se à função densidade espectral de potência:

$$S_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(X) e^{-i\omega X} dX \quad (2.61)$$

No estudo deste trabalho o domínio da frequência se dá em *rad/s*, mas as equações demonstradas aqui serão desenvolvidas utilizando também a unidade *ciclos/m* denominado pela letra *n* chamado de frequência espacial. Isto se dá pelo fato de adiante ser utilizado a norma para perfil de pista que usa esta unidade. Sabendo disto a FDEP pode ser escrita de forma similar:

$$S_{\xi}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(X) e^{-inX} dX \quad (2.62)$$

A função autocorrelação também pode ser escrita como:

$$R_{\xi}(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(n) e^{inX} dn \quad (2.63)$$

Olhando para o limite de integração, percebe-se que será contabilizada as frequências positivas e negativas, mas que fisicamente só é interessante utilizar o espaço positivo das frequências. Sabendo disso pode ser definido uma nova função densidade espectral de potência unilateral $G_{\xi}(\omega)$, dada por:

$$G_{\xi}(\omega) d\omega = \begin{cases} 2S_{\xi}(\omega) d\omega & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

De forma análoga para *n*:

$$G_{\xi}(n) dn = \begin{cases} 2S_{\xi}(n) dn & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Substituindo as equações 2.64 e 2.65 nas funções autocorrelação 2.60 e 2.63, as suas frequências estarão definidas no campo positivo. Tem-se para ω :

$$\begin{aligned} R_{\xi}(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_{\xi}(\omega)}{2} e^{i\omega X} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\xi}(\omega) e^{i\omega X} d\omega \end{aligned} \quad (2.66)$$

E para frequência espacial n :

$$\begin{aligned} R_{\xi}(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_{\xi}(n)}{2} e^{inX} dn \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\xi}(n) e^{inX} dn \end{aligned} \quad (2.67)$$

Considerando um processo estacionário e ergótico, podemos realizar as devidas alterações para a função autocorrelação ser igual ao valor quadrático médio como mostra RAO (2018), logo tem-se:

$$R_{\xi}(0) = \Psi_{\xi}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega \quad (2.68)$$

$$R_{\xi}(0) = \Psi_{\xi}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} G_{\xi}(n) dn \quad (2.69)$$

Agora pode-se igualar as equações 2.68 e 2.69 para encontrar a relação entre a FDEP unilateral em termos de n e a FDEP em ω . Considerando a mudança de variável $d\omega = 2\pi v dn$, onde v é a velocidade do veículo tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G_{\xi}(n) dn &= \int_0^{\infty} G_{\xi}(\omega) d(2\pi vn) \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi v G_{\xi}(\omega) dn \end{aligned} \quad (2.70)$$

Logo,

$$G_{\xi}(n) = 2\pi v G_{\xi}(\omega) \quad (2.71)$$

Como foi visto na equação 2.64, $G_{\xi}(\omega) d\omega = 2S_{\xi}(\omega) d\omega$ para o espaço positivo das frequências, substitui-se na equação 2.71 para obter a seguinte expressão:

$$G_{\xi}(n) = 4\pi v S_{\xi}(\omega) \quad (2.72)$$

Isolando $S_{\xi}(\omega)$:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{G_{\xi}(n)}{4\pi v} \quad (2.73)$$

A FDEP unilateral G_{ξ} é definida pela norma ISO 8608 que aborda a modelagem do perfil de pista através de métodos randômicos, onde foram utilizados pelos autores Agostinacchio

e Olita (2013), Gomes (2009), González (2008) e Sun (2007). Segundo esta norma a FDEP $G_\xi(n)$ é definida utilizando as seguintes equações para n (ciclo/m):

$$G_\xi(n) = G_d(n_0) \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w} \quad (2.74)$$

Onde n é a frequência espacial dado em ciclo/m, n_0 é a frequência espacial padrão definido pela norma ISO 8608, w é a inclinação da curvatura definida pela norma ISO 8608 como sendo igual a 2. A norma ISO 8608 exibe uma tabela onde classifica os níveis de rugosidade dos perfis de pista através da FDEP G_ξ como é mostrado a seguir:

Tabela 1 – Classificação de pista

Categoria	$G_d(n_0)$ em $10^{-6}m^3$		
	Classificação da pista	Limite mínimo	Limite máximo
A	Excelente	-	32
B	Ótima	32	128
C	Boa	128	512
D	Regular	512	2048
E	Ruim	2048	8192
F	Muito ruim	8192	32768
G	Péssima	32768	131072
H	Horrível	131072	-

Fonte: Adaptado da ISO 8608 (2016)

2.4.2 Perfil de Pista

O perfil de pista é reproduzido através de uma representação estocástica, em função da densidade espectral de potência dos deslocamentos verticais segundo Agostinacchio (2013). A função que descreve o perfil da pista é definida por esse autor através de uma harmônica dada por:

$$h(x) = A_i \cos(2\pi n_i x + \varphi) \quad (2.75)$$

O sinal do perfil são pontos discretizados e espaçados uniformemente representados pela letra i , onde n_i é a frequência espacial desses pontos dada em *ciclo/m*. A_i são as amplitudes de cada ponto, x é a sua posição horizontal e φ é o ângulo de fase. Se Δn é a banda de frequência, n_i pode ser escrito como $i\Delta n$, logo a equação 2.75 fica:

$$h(x) = A_i \cos(2\pi i \Delta n x + \varphi) \quad (2.76)$$

Agostinacchio (2013) mostra que a amplitude A_i se relaciona com a função densidade espectral de frequência da seguinte forma:

$$G_d(n_i) = \frac{\Psi_x^2(n_i)}{\Delta n} = \frac{A_i^2}{2\Delta n} \quad (2.77)$$

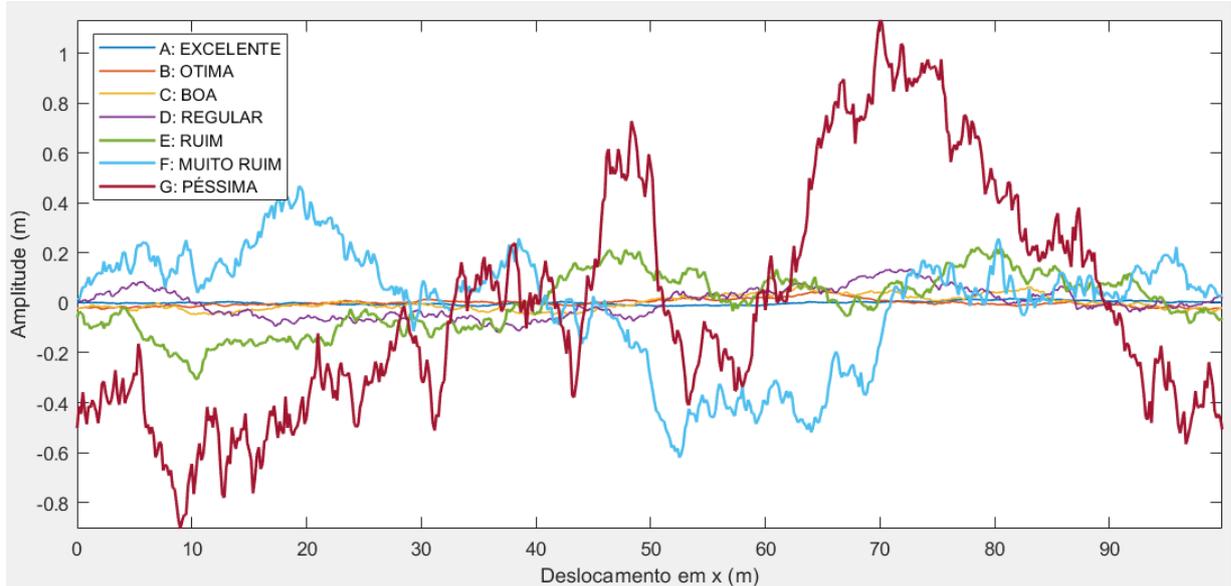
Como foi definido a FDEP unilateral na equação 2.74, sabendo da equação 2.77 e substituindo na 2.76 tem-se:

$$h(x) = \sum_{i=0}^N A_i \cos(2\pi n_i x + \varphi_i) = \sum_{i=0}^N \sqrt{2\Delta n G_d(i\Delta n)} \cos(2\pi i \Delta n x + \varphi_i) \quad (2.78)$$

A equação 2.78 então é a representação do perfil de pista, onde x vai de 0 a L que é o comprimento da pista.

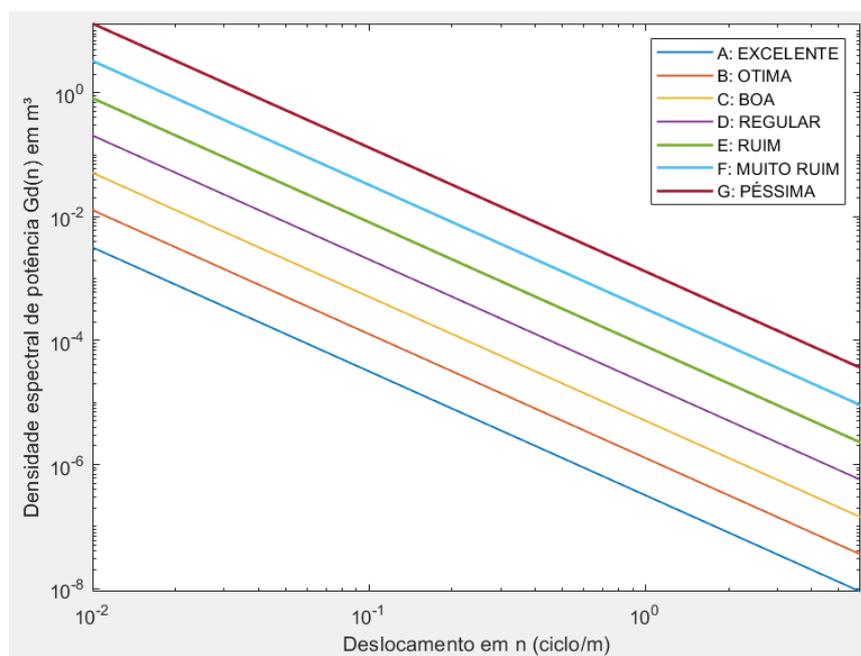
A figura 23 a seguir mostra a aplicação da equação 2.78 em meio computacional, para cada classe de pista segundo a ISO 8608. Aqui foi definido uma pista de comprimento $L = 100\text{m}$ e uma velocidade do veículo $V = 60 \text{ km/h}$, para gerar os perfis. A figura 24 mostra função densidade espectral de potência unilateral para cada nível de rugosidade de A a G.

Figura 23 – Perfis de pista, classificação de A a G.



Fonte: O autor (2021)

Figura 24 – Classificação de A a G para as FDEP.

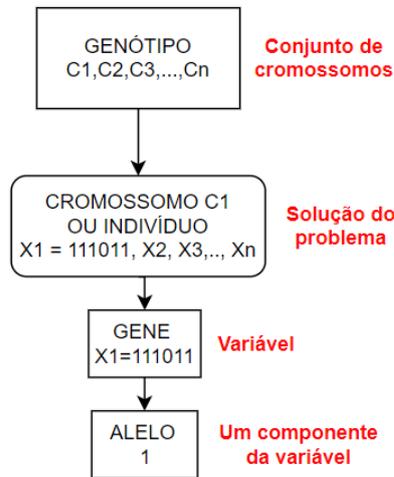


Fonte: O autor (2021)

2.5 ALGORITMOS GENÉTICOS

A otimização realizada neste trabalho utiliza os algoritmos genéticos que foram criados por John Henry em meados da década de 70, com o objetivo de modelar uma implementação computacional de seleção baseado na adaptação da natureza, onde foi descrita pela teoria da evolução das espécies de Darwin. Esses algoritmos foram desenvolvidos no passar dos anos, sendo utilizados em diversas áreas científicas, até que Goldberg em 1989 utiliza essa teoria como ferramenta de otimização. Por ser criado inserido na área da biologia, os algoritmos genéticos possuem nomenclaturas dessa área, como cromossomos, genes, mutação, genótipo, alelos, etc. A ferramenta funciona inicialmente com uma geração de indivíduos que são os cromossomos, o conjunto desses cromossomos é chamado de genótipo. Cada cromossomo ou indivíduo, carrega consigo uma solução formada por valores atribuídos a cada variável que são chamadas de genes e uma componente dos seus valores de alelos. A figura 25 mostra essas nomenclaturas. Basicamente o algoritmo genético funciona através de ciclos implementados, onde cada implementação é formada uma nova geração. A figura 26 mostra o seu funcionamento, inicialmente temos a primeira implementação ($i = 0$) onde é criado uma população inicial de indivíduos (conjunto de cromossomos), através da função objetivo do problema cada indivíduo recebe uma nota de avaliação onde o resultado vai convergir ou não dependendo

Figura 25 – Nomeclatura dos algoritmos genéticos.



Fonte: O autor (2021)

dos critérios pré-estabelecidos. Não convergindo, ocorre a primeira seleção desses indivíduos na qual os escolhidos serão cruzados entre si, os indivíduos resultantes desse cruzamento sofreram mutações ou não, e os piores indivíduos serão dizimados criando assim uma nova geração, não convergindo repetimos o ciclo indo para $i = 1$ (SILVA, 2005).

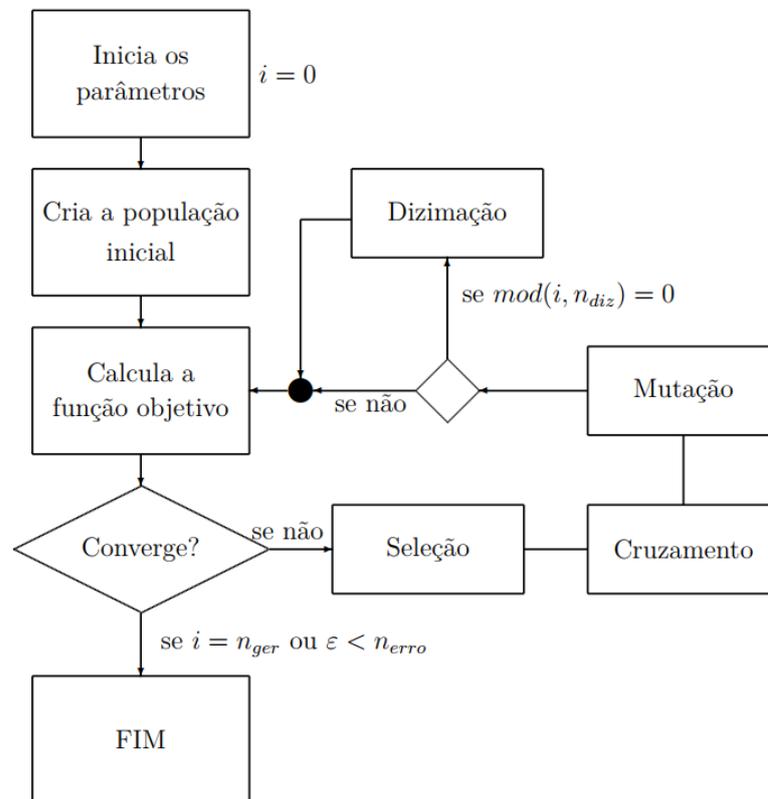
2.5.1 Parâmetros Iniciais

Alguns parâmetros iniciais são necessários para rodar o algoritmo como o tipo da codificação sendo binária ou real, os critérios adotados para limitar os cromossomos, as estratégias evolutivas como cruzamento, mutação, elitismo, dizimação e por último o tamanho da população e número de gerações ou definir um erro para interromper as implementações.

2.5.2 População Inicial

Após a definição dos parâmetros iniciais, é criada uma população para ser a primeira geração, onde será formado por indivíduos (cromossomos) com valores aleatórios, podendo ser escolhidos de forma a criar maior aptidão ao problema, ou seja, valores não discrepantes da real modelagem do problema.

Figura 26 – Fluxograma de um algoritmo genético.



Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/21832>

2.5.3 Função Objetivo

A função objetivo atribuirá notas aos cromossomos para sabermos qual tem a maior aptidão para o nosso problema, onde os que tiverem a pior aptidão serão eliminados. A função objetivo é importantíssima para o algoritmo rodar de forma correta, além de assertividade no resultado final.

2.5.4 Seleção

Após a função objetivo atribuir notas aos indivíduos, o próximo passo é a seleção, onde se tem diferentes métodos (MITCHELL, 1998):

- Método da roleta.
- Seleção por classificação.
- Seleção por Torneio.

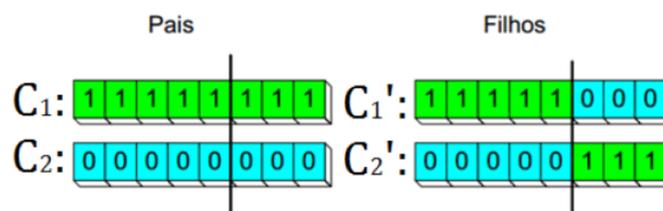
- Elitismo e dizimação.

2.5.5 Cruzamento

Após a etapa de seleção, teremos o cruzamento entre os cromossomos, onde dois indivíduos selecionados trocam os seus genes entre si, formando novos cromossomos. Esse cruzamento ocorre de diferentes maneiras, algumas dessas serão apresentadas a seguir:

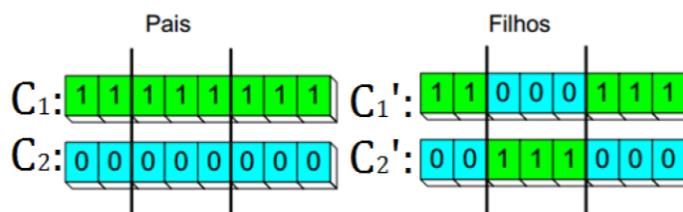
Cruzamento em codificação binária : Neste tipo de cruzamento cada cromossomo do par é dividido em uma ou várias partes trocando entre si os seus genes de forma aleatória gerando os filhos do cromossomo como mostram as figuras de MOGNON (2004), figura 27 para um único ponto, figura 28 para dois pontos e a figura 29 de pontos aleatórios.

Figura 27 – Cruzamento em um único ponto.



Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/651>

Figura 28 – Cruzamento em dois pontos.

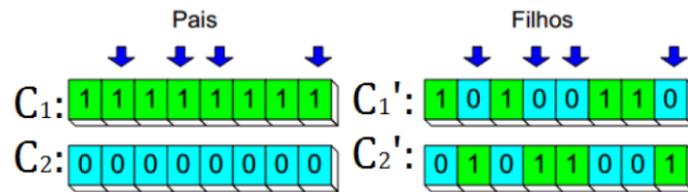


Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/651>

Cruzamento aritmético : Neste cruzamento temos a formação dos descendentes a partir de uma expressão aritmética que define o valor dos seus genes, esse tipo de cruzamento foi proposto por Michalewicz e Janikow em 1991 onde segue a seguinte equação 2.79, em que z é o gene resultante, y e x o gene dos cromossomos cruzantes e β um valor aleatório entre 0 e 1.

$$z = y + \beta(x - y) \quad (2.79)$$

Figura 29 – Cruzamento em pontos aleatórios.



Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/651>

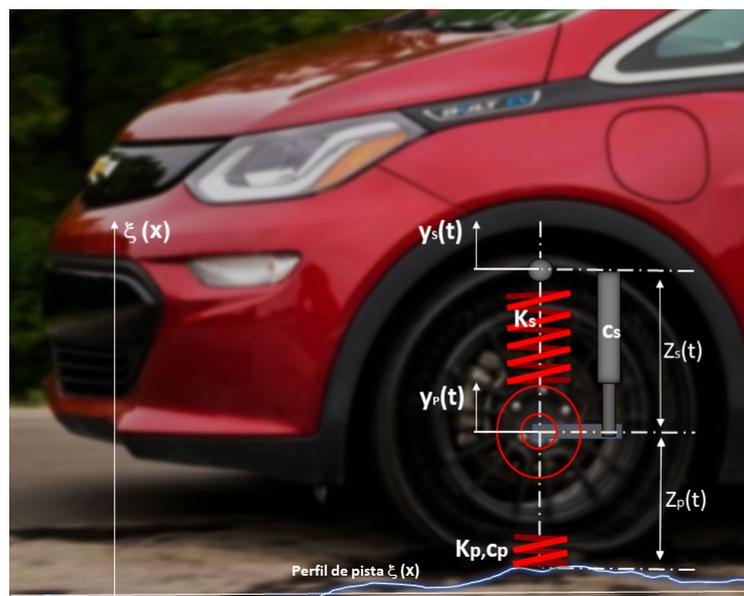
2.5.6 Mutação

A mutação é importante para os valores se aproximarem dos ótimos globais, fugindo dos locais. Essa operação atribui novas informações aos genes reforçando os casos em que houve perdas no processo de interação através de novas informações inseridas segundo Gino Bertolluci (2016, p.18). A mutação ocorre através de uma taxa de mutação P_m em percentual.

3 METODOLOGIA

Este trabalho foi realizado através de simulação numérica com o software Matlab. Aplicando conhecimento teórico revisado nas seções anteriores, a ideia proposta foi através de um código desenvolvido por autoria própria, aplicar neste software o modelo um quarto de veículo dado alguns parâmetros fixos como a rigidez da suspensão k_s , coeficiente de amortecimento da suspensão c_s , rigidez do pneu k_p e o coeficiente de amortecimento do pneu c_p . Posteriormente esses parâmetros foram otimizados com o intuito de encontrar a menor aceleração da massa suspensa, o que conseqüentemente implica no melhor conforto para o motorista. A figura 30 mostra o modelo matemático que é dividido em duas partes importantes, a modelagem da suspensão e a modelagem da pista. Na primeira parte, a modelagem da suspensão envolve o pneu com sua constante de amortecimento e rigidez elástica, que define o seu comportamento diante das irregularidades da pista. Ainda na primeira parte é composta pela suspensão que inclui o amortecedor e a mola sustentando a massa suspensa, que é considerado aqui como sendo 1/4 da massa do veículo. Na segunda parte que consiste na modelagem da pista, foi utilizado a função densidade espectral de potência, que é definida pela norma ISO 8608 como foi visto nas seções anteriores. Essas duas partes formam o conjunto do modelo matemático que foi implementado computacionalmente para encontrar a aceleração da massa suspensa mínima que implica no melhor conforto para os ocupantes do veículo.

Figura 30 – Modelo matemático.

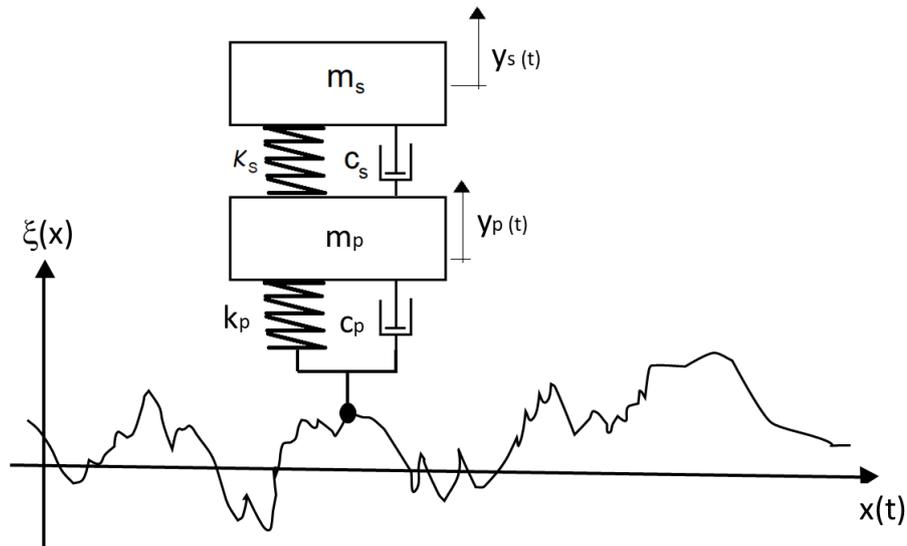


Fonte: Adaptado de planetcarsz.com (2021)

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Como foi definido, o modelo matemático do sistema para otimização da suspensão, será o modelo um quarto de veículo com uma pista seguindo a norma ISO 8608 como mostra a figura 31.

Figura 31 – Modelo Um Quarto de Veículo com pista.



Fonte: O autor (2021)

3.1.1 Análise no domínio do tempo

Com o modelo definido como mostra a figura 31, será desenvolvido a resposta em frequência FRF para esta modelagem. Começando com a equação de movimento do sistema dado por

$$m_p \ddot{y}_P + c_S (\dot{y}_P - \dot{y}_S) - c_P (\dot{\xi} - \dot{y}_P) + k_S (y_P - y_S) + k_P (y_P - \xi) = 0 \quad (3.1)$$

$$m_S \ddot{y}_S + c_S (\dot{y}_P - \dot{y}_S) - k_S (y_P - y_S) = 0 \quad (3.2)$$

Onde

m_P - Massa do pneu

m_S - Massa suspensa (Carroceria mais a massa dos ocupantes)

c_S - Coeficiente de amortecimento do amortecedor do veículo

c_P - Coeficiente de amortecimento do pneu

k_P – Coeficiente de elasticidade do pneu

k_S – Coeficiente de elasticidade da mola do veículo

y_P – Posição do pneu e suas derivadas

y_S – Posição da massa suspensa e suas derivadas

O parâmetro ξ representa a posição de uma pista em campo randômico unidimensional dado por $\xi(x(t)) = \xi(t)$. Essa pista será desenvolvida de forma mais detalhada mais à frente.

Passando para o formato matricial a equação 3.1, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_P & 0 \\ 0 & m_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_P \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_S + c_P & -c_S \\ -c_S & c_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_P \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S + k_P & -k_S \\ -k_S & k_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_P \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_P \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\xi} + \begin{bmatrix} k_P \\ 0 \end{bmatrix} \xi \quad (3.3)$$

O lado direito da equação representa um vetor de forças na direção de ξ .

$$\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \underline{C}_p^T \dot{\xi} + \underline{K}_p^T \xi \quad (3.4)$$

Onde $\underline{C}_p^T = \begin{bmatrix} c_p & 0 \end{bmatrix}$ e $\underline{K}_p^T = \begin{bmatrix} k_p & 0 \end{bmatrix}$. Substituindo a equação 3.4 na equação 3.3 tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_P & 0 \\ 0 & m_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_P \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_S + c_P & -c_S \\ -c_S & c_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_P \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S + k_P & -k_S \\ -k_S & k_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_P \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A solução dessa equação pode ser facilmente encontrada através da modelagem no software simulink, como será visto na seção de resultados.

3.1.2 Análise no domínio da frequência

Para obter a equação de movimento no domínio da frequência, basta aplicar a transformada de Fourier, onde a equação 3.5 fica

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_P & 0 \\ 0 & m_S \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} c_S + c_P & -c_S \\ -c_S & c_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S + k_P & -k_S \\ -k_S & k_S \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} Y_P(\omega) \\ Y_S(\omega) \end{bmatrix} = \underline{F}(\omega) \quad (3.6)$$

A equação do movimento no domínio da frequência, está dividida em matriz massa, amortecimento, rigidez, deslocamento e de força respectivamente, onde pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\{-\omega^2 \underline{m} + i\omega \underline{c} + \underline{k}\} \{Y(\omega)\} = \underline{F}(\omega) \quad (3.7)$$

Isolando o vetor deslocamento temos:

$$\underline{Y}(\omega) = \{-\omega^2 \underline{m} + i\omega \underline{c} + \underline{k}\}^{-1} \underline{F}(\omega) \quad (3.8)$$

Onde o termo elevado a potência negativa, será definido como função resposta em frequência da receptância $H(\omega)$.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\{-\omega^2 \underline{m} + i\omega \underline{c} + \underline{k}\}} \quad (3.9)$$

Logo, as FRFs das massas suspensa $Y_s(\omega)$ e não suspensa $Y_p(\omega)$ é definida como:

$$\underline{Y}(\omega) = \{\underline{H}(\omega)\} \underline{F}(\omega) \quad (3.10)$$

3.2 FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DO MODELO

Seguindo a teoria apresentada por Meirovitch (2001) e Rao (2018), pode-se obter a função densidade espectral de potência em termos dos GLs de interesse na forma

$$\underline{S}_Y(\omega) = | \underline{H}(\omega) | | \underline{S}_F(\omega) | | \underline{H}^*(\omega) | \quad (3.11)$$

onde $\underline{H}^*(\omega)$ é o complexo conjugado de $\underline{H}(\omega)$ e $\underline{S}_F(\omega)$ é a função densidade espectral de potência do vetor de forças de excitação, o qual envolve o cálculo da função autocorrelação $\underline{R}_F(\tau)$. A obtenção dessa função envolve o cálculo do valor esperado $E[\bullet]$ da função $\underline{F}(t)$ que representa as forças de excitação e um tempo incremental τ . Assim, o cálculo da função autocorrelação da função $\underline{F}(t)$ é dada por.

$$\underline{R}_F(\tau) = E[[\underline{F}(t)][\underline{F}(t + \tau)]^T] \quad (3.12)$$

Da equação 3.4, tem-se

$$\begin{aligned} \underline{R}_F(\tau) = & \underline{K}_p E[\xi(t)[\xi(t + \tau)]^T] \underline{K}_p^T + \underline{C}_p E[\dot{\xi}(t)[\xi(t + \tau)]^T] \underline{K}_p^T + \dots \\ & \dots + \underline{K}_p E[\xi(t)[\dot{\xi}(t + \tau)]^T] \underline{C}_p^T + \underline{C}_p E[\dot{\xi}(t)[\dot{\xi}(t + \tau)]^T] \underline{C}_p^T \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considerando que o processo $\zeta(t)$ seja ergótico e estacionário, tem-se as seguintes funções autocorrelação (BENDAT et al., 2010)

$$R_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi}(\tau) = E[\xi(t)[\xi(t + \tau)]^T] \quad (3.14)$$

$$R_{\xi\dot{\xi}}(\tau) = R_{\dot{\xi}\xi}(\tau) = E[\xi(t)[\dot{\xi}(t + \tau)]^T]$$

$$R_{\dot{\xi}\dot{\xi}}(\tau) = R_{\dot{\xi}}(\tau) = E[\dot{\xi}(t)[\dot{\xi}(t + \tau)]^T]$$

Substituindo a equação 2.81 na equação 2.80, resulta em

$$\underline{R}_F(\tau) = \underline{K}_p R_\xi(\tau) \underline{K}_p^T + \underline{C}_p R_{\dot{\xi}\xi}(\tau) \underline{K}_p^T + \underline{K}_p R_{\dot{\xi}\zeta}(\tau) \underline{C}_p^T + \underline{C}_p R_{\dot{\xi}}(\tau) \underline{C}_p^T \quad (3.15)$$

Considerando que as matrizes de rigidez e de amortecimentos são simétricas, toma-se a teoria de álgebra linear de Anton e Busby (2002) e reescreve-se a equação 3.15 na forma

$$\underline{R}_F(\tau) = \underline{K}_p R_\xi(\tau) \underline{K}_p^T + 2\underline{C}_p R_{\dot{\xi}\xi}(\tau) \underline{K}_p^T + \underline{C}_p R_{\dot{\xi}}(\tau) \underline{C}_p^T \quad (3.16)$$

Conforme Bendat e Piersol (2010), tem-se

$$R_{\dot{\xi}\xi}(\tau) = \frac{dR_{\xi\xi}(\tau)}{d\tau} = R'_{\xi\xi}(\tau) \quad (3.17)$$

onde $R'_{\xi\xi}(\tau)$ é a derivada de $R_{\xi\xi}(\tau)$. Assim, a transformada de Fourier de $R'_{\xi\xi}(\tau)$ resulta em

$$S_{\dot{\xi}\xi}(\omega) = S_{\xi\xi}(\omega) = i\omega S_\xi(\omega) \quad (3.18)$$

onde $S_\xi(\omega)$ é a função densidade espectral de potência em termos dos deslocamentos do perfil de pista.

Nesse contexto, aplicando a transformada de Fourier à equação 3.15, tem-se

$$\underline{S}_F(\omega) = \underline{K}_p S_\xi(\omega) \underline{K}_p^T + \underline{C}_p S_{\dot{\xi}\xi}(\omega) \underline{K}_p^T + \underline{K}_p S_{\dot{\xi}\zeta}(\omega) \underline{C}_p^T + \underline{C}_p S_{\dot{\xi}}(\omega) \underline{C}_p^T \quad (3.19)$$

onde $S_{\dot{\xi}}(\omega) = \Omega^2 S_\xi(\omega)$ é a função densidade espectral de potência em termos de velocidade dos deslocamentos do perfil de pista. A função $S_\xi(\omega)$ é obtida pela norma ISO 8608 (2016) conforme já discutido anteriormente.

Portanto, o resultado da equação 3.11 é uma matriz 2x2 podendo ser expressa na forma

$$\underline{S}_Y(\omega) = \begin{bmatrix} S_{y_p}(\omega) & S_{y_{ps}}(\omega) \\ S_{y_{sp}}(\omega) & S_{y_s}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Nessa equação, os elementos da diagonal principal representam as funções densidade espectral de potência em termos dos GLs de interesse (FDEP das massas suspensa e não suspensa). Ademais, os elementos fora da diagonal principal representam as funções densidade espectrais cruzadas entre os graus de liberdade correspondentes. As funções $S_{y_s}(\omega)$ e $S_{y_p}(\omega)$ são empregadas no cálculo das variâncias e das raízes quadráticas da aceleração média (ou aceleração rms, do inglês root mean square) das massas suspensa e não suspensa.

3.3 ACELERAÇÃO DA MASSA SUSPENSA

As funções de densidade espectral em termos das acelerações das massas suspensas e não suspensas podem ser obtidas fazendo (BENDAT e PIERSOL, 2010), também como foi mostrado na equação 2.57

$$\underline{S}_{\ddot{Y}}(\omega) = \omega^4 \underline{S}_Y(\omega) \quad (3.21)$$

Por fim, analogamente à equação 2.59, a aceleração quadrática média pode ser obtida como (MEIROVITCH, 2001)

$$\Psi_{\ddot{Y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{\ddot{Y}}(\omega) d\omega \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. 2.88 na 2.89, tem-se

$$\underline{\Psi}_{\ddot{Y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \underline{S}_Y(\omega) d\omega \quad (3.23)$$

Analogamente a obtenção da Eq. 2.58, a solução dessa integral pode ser resolvida como

$$\underline{\Psi}_{\ddot{Y}}^2 = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 \underline{S}_Y(\omega) d\omega \right) \quad (3.24)$$

Considerando que o processo é ergótico estacionário e que possui regularidade estatística, o intervalo de integração da equação 3.24 pode ser reescrito considerando ω dentro do intervalo entre ω_{Min} e $\omega_{Máx}$

$$\underline{\Psi}_{\ddot{Y}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{Min}}^{\omega_{Máx}} \omega^4 \underline{S}_Y(\omega) d\omega \quad (3.25)$$

A partir dessa expressão obtém-se a raiz quadrática da aceleração média (ou aceleração rms, do inglês root mean square) como

$$\underline{a}_{\ddot{Y}} = \sqrt{\underline{\Psi}_{\ddot{Y}}^2} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_{Min}}^{\omega_{Máx}} \omega^4 \underline{S}_Y(\omega) d\omega} \quad (3.26)$$

A equação 3.26 é a matriz de acelerações de todo modelo, onde vai ser útil para o objetivo deste trabalho a aceleração vertical da massa suspensa que fica na segunda linha segunda coluna. Para verificar se a suspensão é confortável, esta aceleração deve estar dentro da classificação de confortável como mostra tabela 2 da ISO 2631-1, onde acelerações abaixo de $0,315m/s^2$ no ser humano é considerado confortável segundo esta norma.

$$\underline{a}_{\ddot{Y}}(\omega) = \begin{bmatrix} a_{yp}(\omega) & a_{y_{ps}}(\omega) \\ a_{y_{sp}}(\omega) & a_{y_s}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Tabela 2 – Escala de desconforto para padrões europeus

Índice de Desconforto	Escala
Menor do que $0,315 m/s^2$	Confortável
Entre $0,315$ a $0,63m/s^2$	Levemente confortável
Entre $0,5$ a $1,0m/s^2$	pouco confortável
Entre $0,8$ a $1,6m/s^2$	Desconfortável
Entre $1,25$ a $2,5m/s^2$	Muito desconfortável
Maior do que $2m/s^2$	Extremamente desconfortável

Fonte: Adaptado da ISO 2631-1: 1997 / AMD 1: 2010

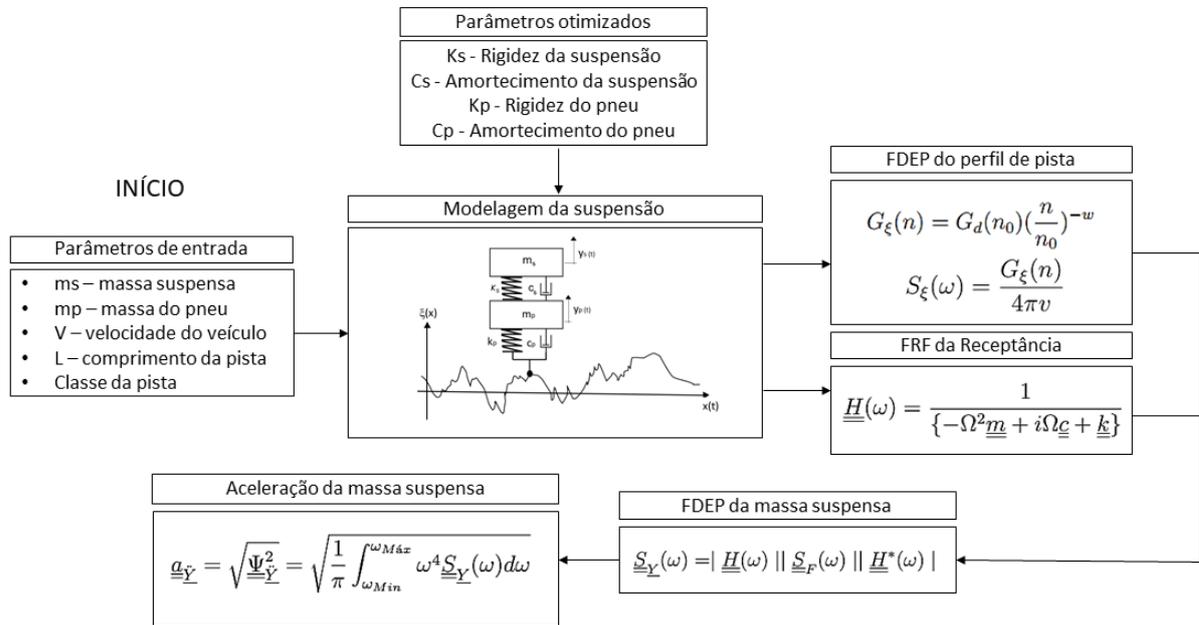
3.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Utilizando toda teoria vista nas seções anteriores, foi implementado no software MATLAB o modelo matemático, onde para gerar o código foi seguido o esquema mostrado no diagrama da figura 32. Primeiro foi definido os parâmetros do veículo como a massa suspensa, massa do pneu e posteriormente os dados da pista como o comprimento, a classificação segundo a norma ISO 8608(2016) e a velocidade do veículo. Na segunda etapa foi definido o modelo matemático da suspensão (quarto de veículo), e suas respectivas nomenclaturas. Na terceira etapa foi encontrada a função densidade espectral de potência da pista através da equação 2.73, juntamente com a função resposta em frequência da receptância pela equação 3.9. Na quarta etapa é gerado a função densidade espectral de potência da massa suspensa através da equação 3.20 e posteriormente a aceleração da massa suspensa na quinta etapa, que envolve todos esses resultados pela equação 3.26, onde foi utilizado a função 'trapz.m' do MATLAB para o cálculo desta integral.

3.4.1 Definição dos parâmetros para implementação computacional

Os trabalhos da literatura revisados, não detalham os perfis de estradas empregados, tais como intervalo do número de onda e os intervalos de integração das funções densidade espectral. Na simulação feita, para o parâmetro de irregularidade da pista, foi escolhido a classificação D , onde dentro do intervalo que a norma estabelece, atribui-se $G_d(n_0) = 1024 \times 10^{-6} m^3$. Também recomendado pela norma ISO 8608 (2016) adota-se $n_0 = 0,1 \text{ ciclos}/m$, $w = 2$ e para a frequência espacial foi considerado o limite máximo como sendo $n_{m\acute{a}x} = 4$. O comprimento da pista é $L = 1000m$, onde a frequência espacial foi considerada no intervalo entre

Figura 32 – Diagrama da modelagem.



Fonte: Autor (2021)

$4E - 3 \leq n \leq n_{máx}$, em que $\Delta n = 1/L$. Para a comparação com alguns trabalhos da literatura, os valores das massas suspensa e não suspensa, respectivamente foram os seguintes, $m_s = 4450\text{kg}$, $m_p = 550\text{kg}$ e a velocidade do veículo $v = 20\text{m/s}$ os quais são utilizados nos trabalhos de Sun et al. (2007) e de Drehmer (2012). Além desses parâmetros fixos, foram atribuídos valores para os parâmetros de projeto $k_s = 6,22 \times 10^5 \text{N/m}$, $c_s = 2,65 \times 10^4 \text{Ns/m}$, $k_t = 1,7 \times 10^6 \text{N/m}$ e $c_t = 0 \text{Ns/m}$ que foram utilizados no trabalho do Sun et al (2007). Desta forma foi possível fazer um comparativo no próximo capítulo entre os resultados, mostrando a diferença entre os parâmetros otimizados e os utilizados pelo Sun et al (2007).

3.4.2 Otimização dos parâmetros para a mínima aceleração da massa suspensa

Neste trabalho foi utilizada a biblioteca *Genetic Algorithms Toolbox* do software MATLAB, onde alguns parâmetros são necessários para a geração do código e serão definidas a seguir.

- Número de variáveis a serem otimizadas. Como foi definido no objetivo principal deste trabalho, foram otimizadas 4 variáveis de projeto, k_s , k_t , c_s e c_t .
- Limite das variáveis.

Para cada variável, as populações foram geradas dentro de seus respectivos limites que foram adotados empiricamente. São eles:

$$1,3 \times 10^4 \leq k_s \leq 7,00 \times 10^5 N/m$$

$$1,00 \times 10^4 \leq c_s \leq 5,00 \times 10^4 Ns/m$$

$$1,50 \times 10^6 \leq k_p \leq 2,00 \times 10^6 N/m$$

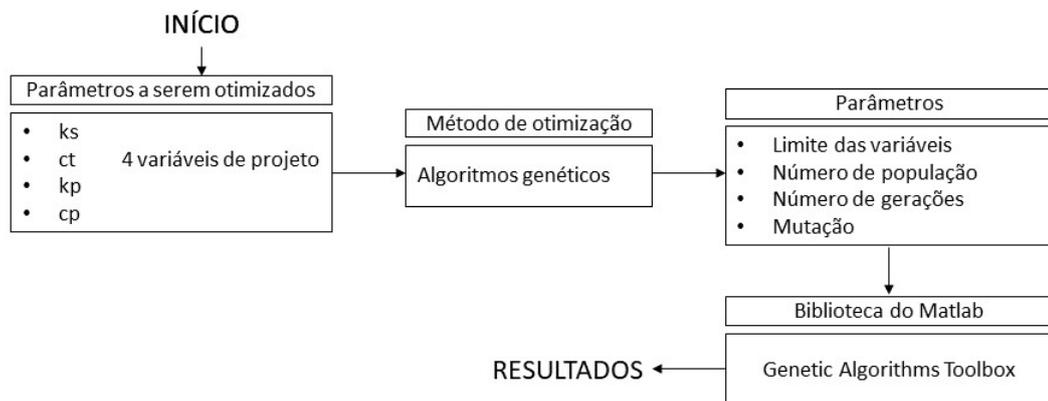
$$1,00 \times 10^2 \leq c_p \leq 1,50 \times 10^3 Ns/m$$

O número da população, geração e da mutação, foram determinados também empiricamente até obter o mais provável ótimo global, onde a diferença entre o mínimo anterior e o próximo fica na ordem de 1×10^{-11} .

- Número da população. Foi definido a população de tamanho 100.
- Número de geração. Foi definido como 500 o número de gerações.
- Mutação. Foi definido 9% de mutação.

A figura 33 mostra o fluxograma para a otimização dos parâmetros de projeto.

Figura 33 – Diagrama de otimização.



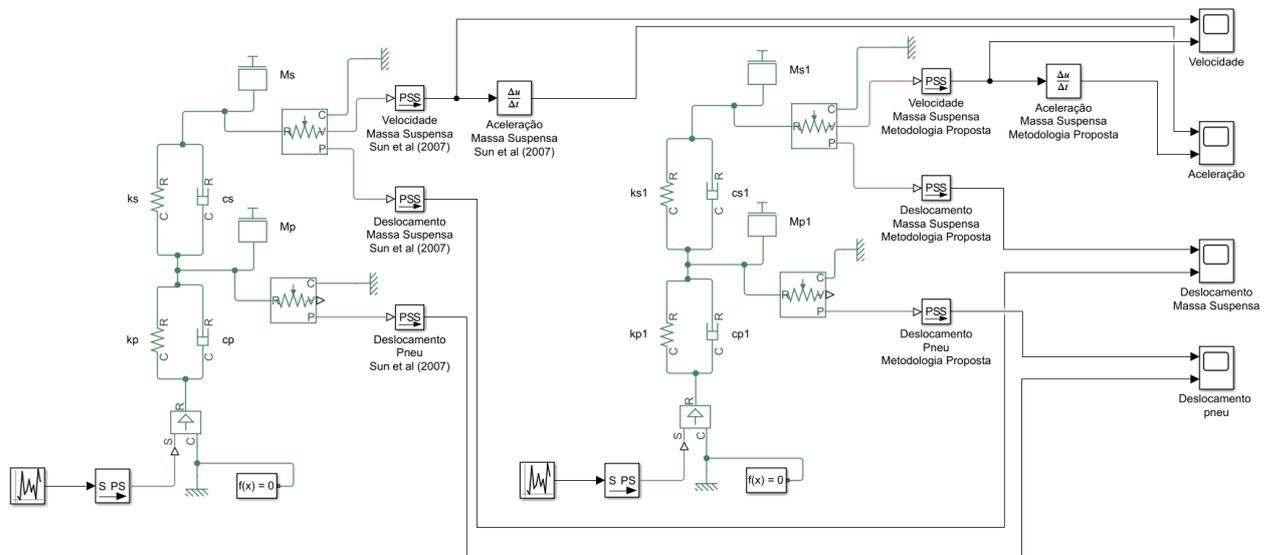
Fonte: O autor (2021)

3.4.3 Modelo no SIMULINK

Para mostrar graficamente o comportamento da aceleração da massa suspensa, foi utilizado a ferramenta SIMULINK de modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos do software Matlab, onde foi simulado o modelo um quarto de veículo no ambiente computacional do

programa através de blocos pré-determinados como massa, mola e amortecedor. A figura 34 mostra essa montagem onde pode-se observar dois sistemas em que foram atribuídos para um, as variáveis de projeto de Sun et al (2007) e em outro as variáveis de projeto otimizadas neste trabalho. O perfil de pista foi simulado através do bloco *Uniform Random Number*, onde emite um sinal randômico com amplitude similar a classificação D de pista que foi escolhido neste trabalho.

Figura 34 – Modelo um quarto de veículo no Simulink.



Fonte: Autor (2021)

4 RESULTADOS

Empregando a metodologia descrita no capítulo anterior, foram implementados os parâmetros descritos na seção 3.4.1 no código desenvolvido pelo autor onde foram obtidos os seguintes resultados:

- Variáveis de projeto otimizadas - k_s, c_s, k_p, c_p ;
- Função Resposta em Frequência (FRF) em termos da receptância $H_{12}(\omega)$ e em termos do deslocamento da massa suspensa $Y_s(\omega)$.
- Aceleração da massa suspensa.

Os dois últimos itens foram obtidos tanto para as variáveis de projeto atribuídas empiricamente, como para as otimizadas, realizando a comparação entre os dois resultados que são mostrados a seguir.

4.1 VARIÁVEIS DE PROJETO OTIMIZADAS

Os resultados obtidos de cada parâmetro otimizado é mostrado na figura 35, onde pode ser observado que na corrente proposta, a otimização por AG é suficiente para atingir o projeto ótimo, a qual resulta em parâmetros ótimos para aceleração vertical da massa suspensa de $0,1617m/s^2$ considerando o amortecimento do pneu e $0,1984m/s^2$, não considerando o amortecimento do pneu. Se nota que a metodologia proposta apresenta parâmetros cuja aceleração é levemente menor em relação à aceleração vertical da massa suspensa de Sun et al (2007). Com a metodologia deste autor, é obtida uma aceleração vertical da massa suspensa de $0,4445m/s^2$, que segundo a tabela 2 configura-se uma condução levemente confortável ou desconfortável. Por sua vez, na corrente proposta, o projeto com os parâmetros ótimos encontrados onde confrontando esse resultado com os níveis de vibração da tabela 2, nota-se que a vibração da massa suspensa fica dentro de um intervalo onde configura nível confortável de vibração, apesar do perfil de pista D.

Figura 35 – Comparação numérica dos resultados da corrente metodologia e dados da literatura.

Variável de projeto	Sun et al (2007)	Valores Otimizados		Unidade
		Com Amort.	Sem Amort.	
Rigidez da suspensão	$6,22 \times 10^5$	$1,30 \times 10^4$	$1,30 \times 10^4$	$k_s [N/m]$
Amortecimento da suspensão	$2,65 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$c_s [Ns/m]$
Rigidez do pneu	$1,70 \times 10^6$	$1,50 \times 10^6$	$1,50 \times 10^6$	$k_p [N/m]$
Amortecimento do pneu	0	$5,50 \times 10^3$	0	$c_p [Ns/m]$
Aceleração vertical da massa suspensa	0.4445	0.1617	0.1984	$a_y [m/s^2]$

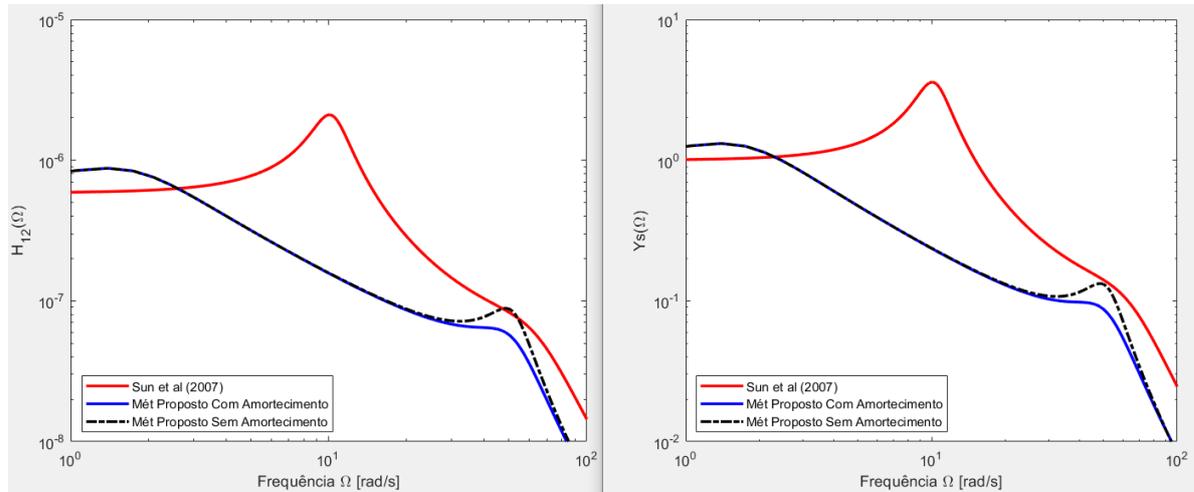
Fonte: O autor (2021)

4.2 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF) EM TERMOS DA RECEPTÂNCIA $H_{12}(\omega)$ E EM TERMOS DO DESLOCAMENTO DA MASSA SUSPensa $Y_s(\omega)$

Para a obtenção das FRFs tipo receptância, $H_{12}(\omega)$ e FRFs em termos do deslocamento da massa suspensa, $Y_s(\omega)$, bem como funções densidade espectral de potência em termos de deslocamento, $S_y(\omega)$, e aceleração, $S_{\ddot{y}}(\omega)$, foram gerados os gráficos dessas funções com os dados de Sun et al (2007), juntamente com os dados obtidos. Comparativamente, esses gráficos são apresentados na Figura 37 e na Figura 36. É comparado também os dados otimizados por essa metodologia proposta sem o amortecimento do pneu, para análise da influência deste parâmetro no comportamento do sistema já que o Sun et al (2007) não o considera.

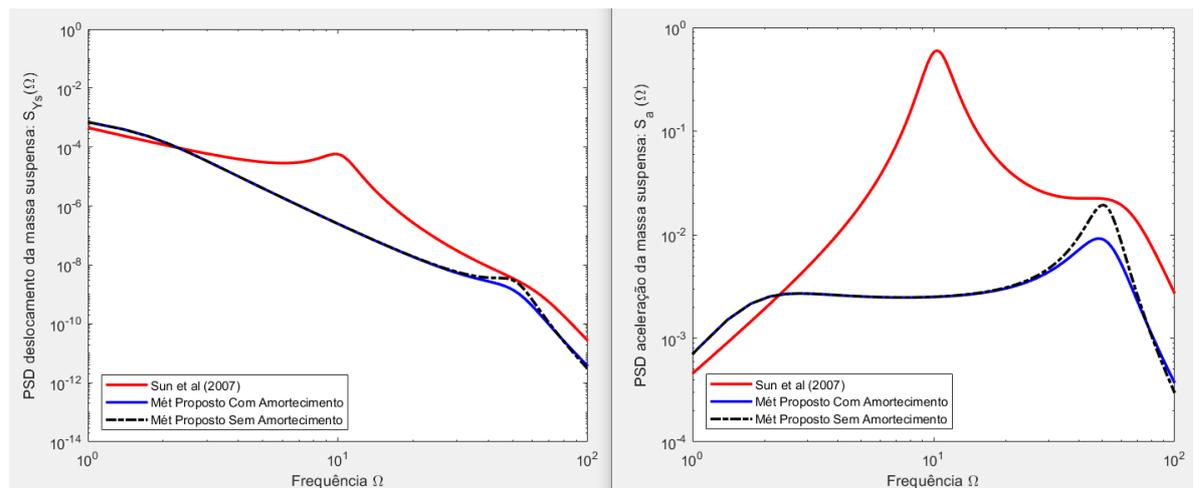
Analisando os gráficos com relação aos dados do trabalho de Sun et al (2007), é possível identificar que ocorrem pequenos picos de vibração nas frequências naturais. Em paralelo a esses resultados, é gerado o gráfico com os parâmetros otimizados pela metodologia deste presente trabalho, onde se notam em todas as FRFs reduções significativas dos níveis de amplitudes de vibração, provando uma maior otimização dos valores de projeto. É possível observar também que a tendência do gráfico com os dados que foram otimizados é a mesma do gerado por Sun et al (2007, isto mostra que os resultados estão coerentes com o esperado. Com relação a não consideração do amortecimento do pneu, percebe-se um pico de vibração maior, porém ainda há um resultado melhor que o do Sun et al (2007).

Figura 36 – FRF receptância e FRF em termos do deslocamento da massa suspensa.



Fonte: O autor (2021)

Figura 37 – Funções Densidade Espectral de Potência para a massa suspensa em termos do deslocamento e da aceleração.



Fonte: O autor (2021)

4.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAR

As frequências naturais e os modos de vibração do modelo considerando os parâmetros de Sun et al. (2007) e os parâmetros obtidos pela metodologia aqui proposta estão apresentados na tabela 3. Comparando os dados dessa tabela, é possível perceber reduções das frequências naturais com a proposta de otimização do sistema de suspensão do modelo veicular, em que na primeira frequência foi obtido uma redução de 54,41% e 17,34% na segunda. Esta redução ocorre especialmente na primeira frequência natural, a qual excita o primeiro grau de liberdade relativo à massa suspensa do modelo. A tabela 4 apresenta resultados comparativos entre os

modos de vibrar da corrente proposta para quando o amortecimento é não nula, onde se observam que foram mantidos os padrões de vibração.

Tabela 3 – Comparação entre as frequências naturais

Frequências naturais (rad/s)	Sun et al (2007)	Metodologia proposta	Redução percentual (%)
Ω_1	10.07	4.59	54,41
Ω_2	65.27	53.95	17,34

Fonte: O autor (2021)

Tabela 4 – Modos de vibração associados a cada frequência natural

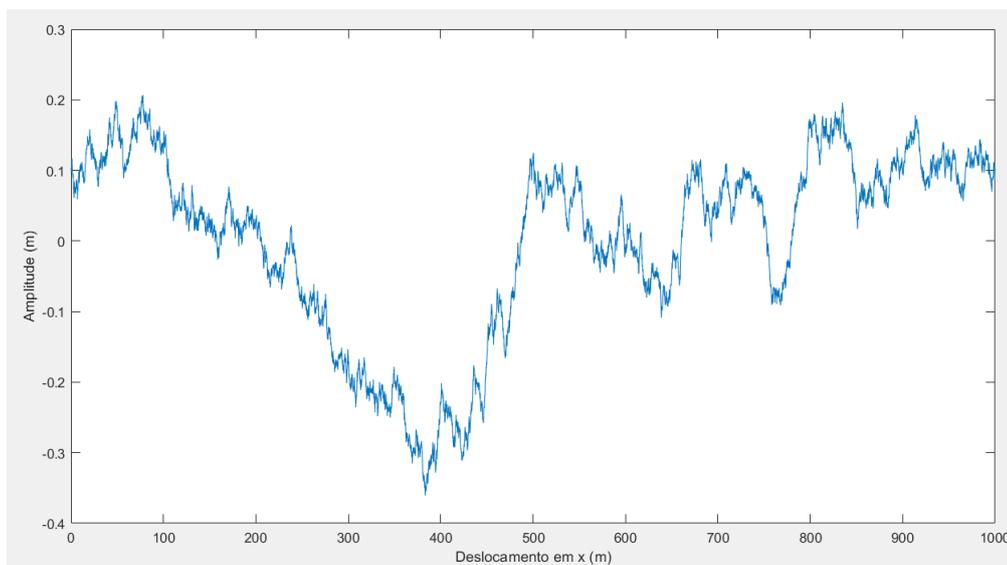
Primeiro modo		Segundo modo	
Sun et al (2007)	Metodologia proposta	Sun et al (2007)	Metodologia proposta
-0.2647	-0.0628	-0.9994	-1.0000
-0.9643	-0.9980	0.0339	0.0078

Fonte: O autor (2021)

4.4 MODELAGEM DA PISTA

A figura 38 mostra a pista modelada para a implementação computacional deste estudo, onde foi utilizado uma classificação D com $G_d(n_0) = 1024 \times 10^{-6} m^3$, um comprimento de $1000m$, velocidade de $20m/s$ e com uma banda de frequência $\Delta n = 0,001m^{-1}$. Segundo a ISO 8608, norma utilizada para modelagem desta pista, a classificação dela é do nível de conforto regular como mostra a tabela 1.

Figura 38 – Pista gerada, classificação D.



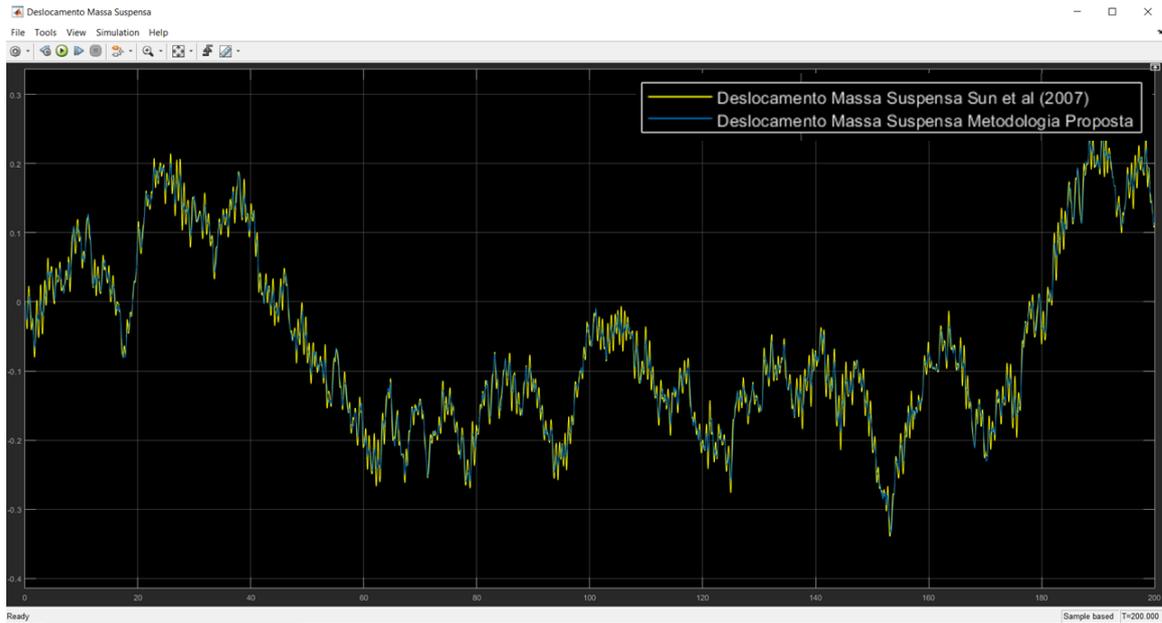
Fonte: O autor (2021)

4.5 RESULTADO DO DESLOCAMENTO VERTICAL DA MASSA SUSPENSA

Os gráficos da figura 39 mostram o movimento da massa suspensa do veículo, onde em amarelo foi utilizado os parâmetros de projeto do Sun et al (2007) e em azul os parâmetros otimizados neste trabalho. Analisando a figura, percebe-se uma variação menor de amplitude do deslocamento da massa suspensa no gráfico que utiliza os parâmetros otimizados neste trabalho. Este fato vai implicar em uma menor aceleração vertical como será mostrado na figura 42, que vai gerar um melhor conforto aos ocupantes.

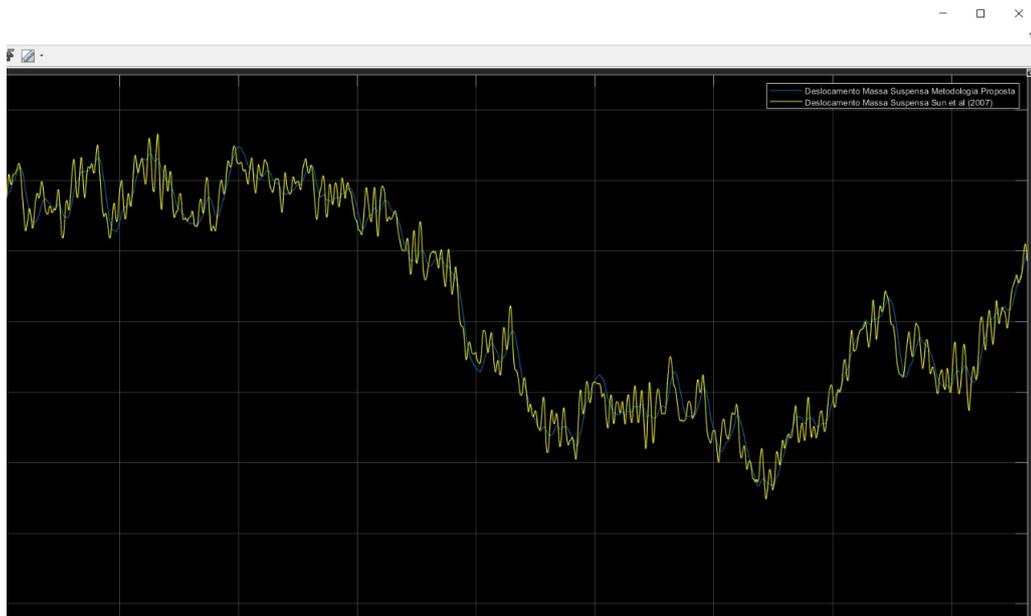
Analisando o gráfico do deslocamento da massa suspensa sob um zoom em um determinado tempo como mostra a figura 40, fica mais claro que os picos de vibração são menores na metodologia proposta. Onde mais uma vez em azul é o gráfico gerado com os parâmetros desta metodologia e em amarelo com os parâmetros do Sun et al (2007).

Figura 39 – Deslocamento vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink.



Fonte: O autor (2021)

Figura 40 – Zoom no deslocamento vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink.



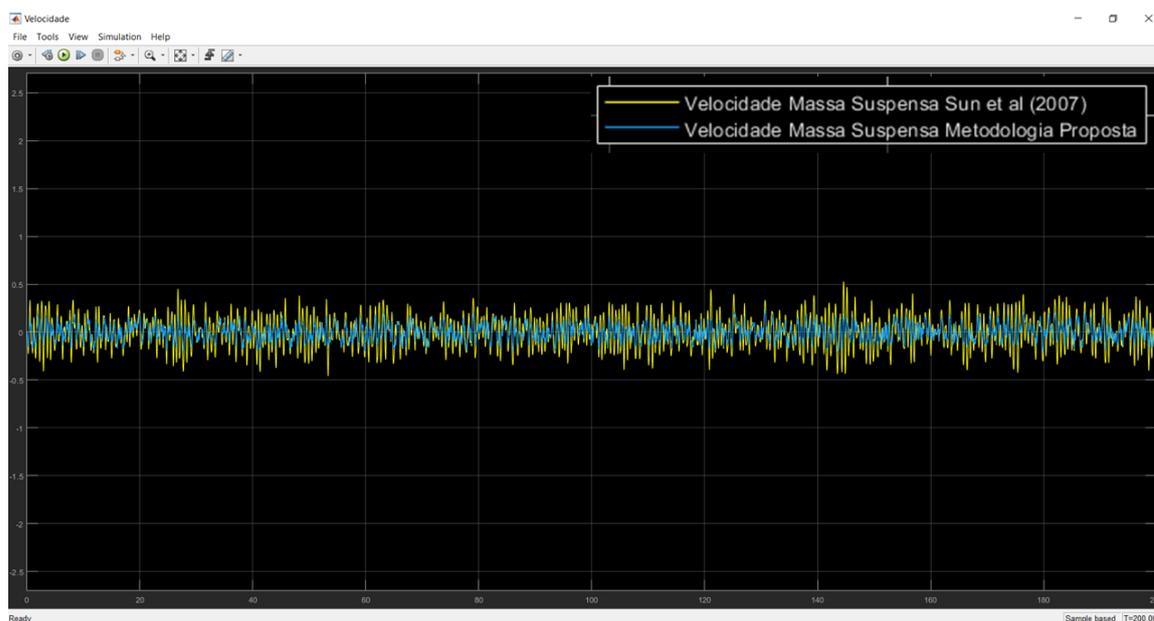
Fonte: O autor (2021)

4.6 RESULTADO DA VELOCIDADE VERTICAL DA MASSA SUSPensa

A figura 41 mostra a velocidade vertical da massa suspensa utilizando as variáveis de projeto de Sun et al (2007) em amarelo e em azul com as variáveis otimizadas deste trabalho. Assim como o deslocamento vertical, foi obtido valores menores na otimização proposta deste

trabalho em relação ao outro autor conseguindo assim uma estabilização maior da massa suspensa, com relação aos movimentos abruptos do pneu em decorrência da pista irregular como mostra a figura 41.

Figura 41 – Velocidade vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink.

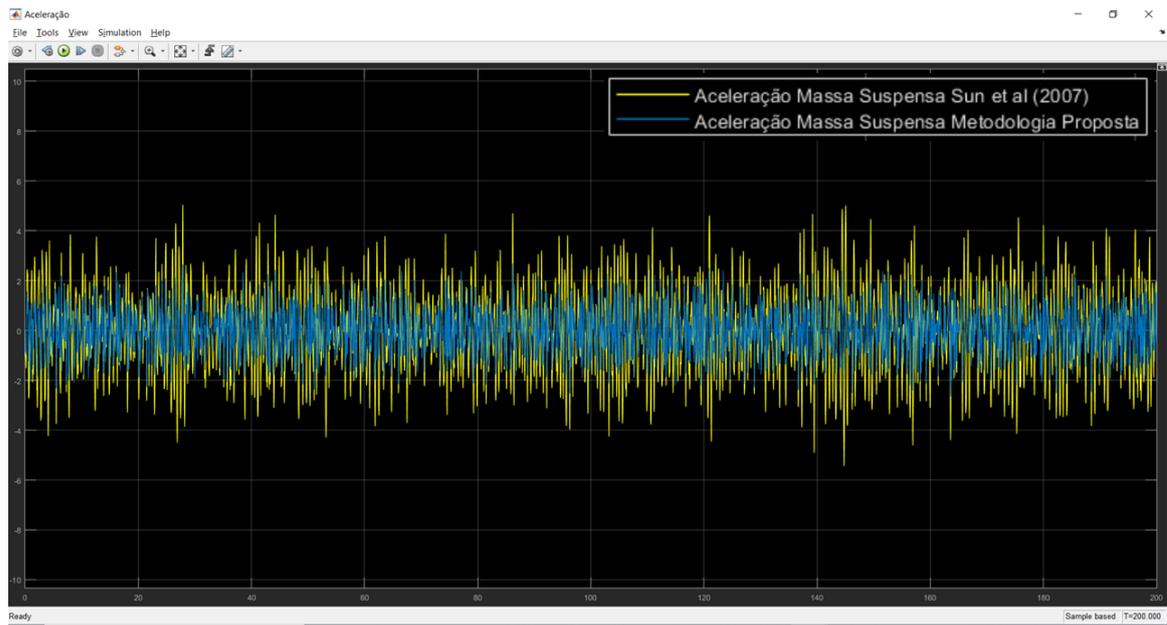


Fonte: O autor (2021)

4.7 ACELERAÇÃO VERTICAL DA MASSA SUSPensa

Através do bloco *Ideal Translational Motion Sensor* é extraído tanto a posição como a velocidade da massa em que está acoplado como mostra a figura 34. Na saída que retorna à velocidade da massa foi adicionado um bloco *derivative* para transformar o sinal em aceleração. A figura 42 mostra essa aceleração da massa suspensa, onde em amarelo é utilizada as variáveis de projeto de Sun et al (2007) e em azul com as variáveis otimizadas deste trabalho. Analisando essas acelerações, notam-se reduções acentuadas em regime permanente nos níveis de aceleração da massa suspensa ao longo do comprimento da pista da metodologia proposta em relação ao Sun et al (2007). Com acelerações menores, foi conquistado consequentemente um conforto melhor para os ocupantes. Nesse contexto, a metodologia aqui proposta e aplicada se mostra eficiente para melhoria do conforto através da minimização da aceleração.

Figura 42 – Aceleração vertical da massa suspensa reproduzida no Simulink..



Fonte: O autor (2021)

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma revisão bibliográfica sobre suspensão automotiva, onde são descritos alguns componentes principais do sistema de suspensão. Tendo em vista que em projeto de engenharia é muito importante a modelagem matemática para fins de projeto, apresentam-se os principais modelos matemáticos de suspensão, dentre os quais este trabalho se dedica ao modelo de um quarto de veículo. A modelagem da suspensão foi enriquecida com a implementação do modelo de pista segundo a norma ISO 8608, utilizando vibrações randômica, o que aproximou os resultados ainda mais da realidade.

O trabalho propõe uma metodologia de projeto ótimo dos parâmetros de amortecimento e rigidez de suspensão e do pneu. Para tanto, empregou-se algoritmo genético. Como resultados, apresentam-se gráficos, inicialmente, no domínio da frequência tais como FRF em termos da receptância, bem como FRFs em termos do deslocamento da massa suspensa e finalmente, as FRFs da densidade espectral das massas suspensa e não suspensa em termos de deslocamento e velocidade. Também foi apresentado gráficos no domínio do tempo, como o deslocamento da massa suspensa, velocidade vertical da massa suspensa e a aceleração vertical da massa suspensa. Esses gráficos nos domínios da frequência e do tempo demonstram uma redução das amplitudes de vibração, o que torna a metodologia aqui proposta confiável e com potencial de aplicação na engenharia veicular. Em geral, a modelagem utilizada neste trabalho para otimizar os parâmetros da suspensão, proporcionou resultados mais satisfatórios que no artigo do Sun et al (2007), na qual este trabalho foi comparado.

Para ser aprofundado o estudo da otimização dos parâmetros de uma suspensão automotiva, pode ser feito trabalhos futuros utilizando esta modelagem para desenvolver uma suspensão ativa, em que trará resultados ainda melhores de conforto. Esta metodologia apresentada também pode ser utilizada para teste de bancada, com o objetivo de simular uma suspensão e otimizar a sua geometria no que se refere a estabilidade do veículo. Esses resultados podem ser testados no software Adams Car, para além dos parâmetros otimizados neste trabalho, serem alterados também a geometria da suspensão para chegar em um melhor conforto e estabilidade.

REFERÊNCIAS

- A. GONZÁLEZ A, E.J. O'BRIEN A, Y.-Y. LI A & K. CASHELL. The use of vehicle acceleration measurements to estimate road roughness. **Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, Dublin, v. 46, n. 6, p. 483-499, 2008.
- AGOSTINACCHIO, M., CIAMPA, D. & OLITA, S. The vibrations induced by surface irregularities in road pavements – a Matlab® approach. **European Transport Research Review**, Italy, v. 6, p. 267–275, 2014.
- ANTON, H.; BUSBY. R.. **Contemporary Linear Algebra**. John Wiley & Sons, 2002.
- BENDAT, J.; PIERSOL, A. **Random Data: Analysis and Measurement Procedures**. WILEY, 2010.
- COLHERINHAS, GINO B. **Ferramenta de otimização via algoritmos genéticos com aplicações em engenharia**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016.
- DREHMER, L. R. C. **Otimização de Parâmetro Concentrados de Suspensão para Conforto e Segurança Veicular**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- GOMES, H. M. A swarm Optimization Algorithm for Optimum Vehicle Suspension Design. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 20., 2009, Gramado. **Proceedings...**Rio de Janeiro: ABCM, 2009. 1 CD-ROM.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 2631-1**: Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements. Europe, 1997.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO-8606**: Mechanical Vibration: Road Surface Profile. Europe, 2016.
- JAY L. DEVORE. **Probabilidade e estatística**: para engenharia e ciências. São Paulo: Cengage Learning, 2006.
- MEIROVITCH, L.. **Fundamentals of Vibrations Analysis**. Boston: McGraw-Hill, 2001.
- MITCHELL, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. Bradford Books, 1998.

MOGNON, V. R. **Algoritmos genéticos aplicados na otimização de antenas**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

RAO, SINGIRESU S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

REZA N. JAZAR. **Vehicle Dynamics: Theory and Application**. 1. ed. New York: Springer, 2008.

SILVA, A. J. M. **Implementação de um algoritmo genético utilizando o modelo de ilhas**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SUN, L.; CAI, X.; YANG, J.. Genetic algorithm-based optimum vehicle suspension design using minimum dynamic pavement load as a design criterion. **Journal of Sound and Vibration**, United States, v. 301, p. 18-27, 2007.