UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

ANAILDE FELIX MARQUES

# O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 5° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: explorando tarefas de valor omisso

Recife
2022

ANAILDE FELIX MARQUES

**O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 5° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL:**

**explorando tarefas de valor omisso**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

**Orientador**: Dr. Jadilson Ramos de Almeida

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

M357p Marques, Anailde Felix.

O pensamento algébrico no 5º ano do ensino fundamental: explorando tarefas de valor omisso. / Anailde Felix Marques. – Recife, 2022.

123 f.: il.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.

Inclui Referências.

1. Álgebra. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Anos iniciais. 4. Teoria da objetivação. I. Almeida, Jadilson Ramos de. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2023-016)

ANAILDE FELIX MARQUES

# O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 5° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL:

## explorando tarefas de valor omisso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Aprovada em: 30/08/2022

**BANCA EXAMINADORA**

________________________________________

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Orientador e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

________________________________________

Profa. Drª Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

________________________________________

Prof. Dr. Rodolfo Vergel Causado (Examinador Externo)
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

*Dedico este trabalho a Vovó Nevinha (In memoriam)! Às vezes, tenho dificuldade para aceitar que você se foi e me deixou a sensação de vazio todas as manhãs e que não nunca mais vou provar da raspa do doce de leite, do seu famoso bolo de batata doce e ver a senhora sentada na calçada todas as tardes com um dos seus vestidos floridos tomando uma xícara de café.*

## AGRADECIMENTOS

Esse trabalho não poderia ser realizado sem o apoio direto ou indiretamente de algumas pessoas, por isso gostaria de externar o meu sentimento de GRATIDÃO. Agradeço a Deus pelo dom da vida, força, coragem e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos que surgiram ao longo desses dois últimos anos.

Aos meus pais, irmão e avós que sempre fizeram "das tripas coração" para que eu consiga tornar todas as conquistas da minha vida pessoal e profissional realidade. E em especial a minha estrelinha (Vovó Nevinha) não é o doutorado ainda, mas é um degrau a menos para alcançar o nosso sonho de ser a sua primeira neta doutora. Ao meu namorado Alexandre Dantas por estar comigo desde o princípio e compreender e me ouvir em todas as vezes que necessitei.

Ao meu querido orientador Jadilson Ramos pela paciência, empatia e ensinamentos, agradeço o privilégio das suas orientações. Sempre esteve aberto e me ouviu atentamento, mesmo nos meus períodos mais difíceis.

Aos meus amigos que fiz durante o período do mestrado (Jaciele, Gabriel e Izabela) compartilhamos vários momentos juntos de forma virtual e nesse período compartilhamos momentos de alegria, angústia e a famosa frase: sempre dar certo.

Aos professores que participaram da qualificação e defesa da minha dissertação: Paula Baltar e Rodolfo Vergel. Agradeço pelas riquíssimas contribuições.

Agradeço equipe de gestão da escola que me deixou desenvolver a pesquisa, mesmo em um período tão difícil. As crianças que participaram do estudo piloto e final. A Secretária de Educação em especial aos meus queridos colegas de trabalho, com quem convívio diariamente de forma muito intensa nos últimos meses, pela troca de experiencias que me permitem um crescimento pessoal e profissional, em especial Fábio, Kedma, Danuza, Amanda, Mônica, Andreika e João.

Agradeço a Universidade Federal de Pernambuco e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) pela oportunidade e suporte para realização do trabalho, tal como pelo fornecimento de recursos pelo Programa de Apoio à Pós-Graduação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, sem o qual esse trabalho não poderia ter sido pelo financiamento da essencial bolsa de mestrado concedida para o atual estudo.

*“O otimista é um tolo. O pessimista, um chato.*
*Bom mesmo é ser realista esperançoso”.*

Ariano Suassuna

## RESUMO

A implementação da Base Nacional Comum Curricular proporcionou mudanças no cenário Brasileiro de pesquisas na área de Educação Matemática. Incluindo a álgebra como uma das suas unidades temáticas desde os primeiros anos escolares, de modo a enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico. No entanto, esta discussão já era proposta e estudada há alguns anos no cenário internacional e vem sendo crescente o quantitativo de investigações e a discussão ao redor do ensino-aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Na perspectiva da Teoria da Objetivação existem três elementos interligados que caracterizam o pensamento algébrico, sendo eles: a indeterminação, denotação e a analiticidade. Nessa perspectiva, este estudo objetiva caracterizar o pensamento algébrico revelado por estudantes do 5° ano do ensino fundamental ao resolverem tarefas que envolvem o valor omisso. Este estudo é de abordagem qualitativa, utilizando aspectos metodológicos da atividade de ensino-aprendizagem na perspectiva da Teoria da Objetivação e os elementos da análise multissemiótica ou multimodal descritos por Arzarello e seus colaboradores. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola particular localizada no interior do Rio Grande do Norte, na qual tivemos a participação de quatros estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental. Com relação ao desenvolvimento do estudo, os estudantes foram organizados em duas duplas. E como a discussão em torno do pensamento algébrico na Teoria da Objetivação pode ser mediado por componentes externos como os gestos, símbolos matemáticos, faz-se necessário utilizar aparelhos eletrônicos para as gravações de áudio e vídeo de todas as interações entre professora-estudantes e estudante-estudante no momento de resolução das tarefas (tarefa 1 – folhas de papel sulfite; tarefa 2 – receita culinária) que foram propostas. No momento da análise multissemiótica identificamos os mais diversos indícios dos elementos caracterizadores durante a resolução das tarefas de valor omisso como a percepção, os gestos e a linguagem natural, até mesmo a combinação deles, inclusive a dupla 1 evidencia os três elementos caracterizadores na resolução das duas tarefas. Para finalizar inferimos alguns apontamentos como: a dificuldade dos estudantes para trabalhar em dupla de forma colaborativa de modo a ouvir atentamente as ideias dos colegas e iniciar a busca por um consenso; a importância dos gestos; o uso do método de tentativa e erro demonstrando evidências do pensamento aritmético; e a não familiaridade com tarefas que exploram cinco ou seis problemas.

**Palavras-Chave**: Álgebra; ensino-aprendizagem; anos iniciais; teoria da objetivação.

## ABSTRACT

The implementation of the Common National Curriculum Base provided changes in the Brazilian scenery of research in the area of Mathematics Education. Including algebra as one of its thematic units from the early school years, in order to emphasize the development of algebraic thinking. However, this discussion had already been proposed and studied for some years in the international scenery and the number of investigations and discussion around the teaching and learning of algebra in the early years of Elementary School has been increasing. From the perspective of the Theory of Objectification, there are three interconnected elements that characterize algebraic thinking, namely: indeterminacy, denotation and analyticity. In this perspective, this study aims to characterize the algebraic thinking revealed by students of the 5th year of elementary school when solving tasks that involve the omitted value. his study has a qualitative approach, using methodological aspects of joint work from the perspective of the Theory of Objectification and the elements of multisemiotic or multimodal analysis described by Arzarello and his collaborators. The research was developed in a private school located in the interior of Rio Grande do Norte, in which we had the participation of four students from the 5th year of Elementary School. Regarding the development of the study, the students were organized into two pairs. And as the discussion around algebraic thinking in the Theory of Objectification can be mediated by external components such as gestures, mathematical symbols, it is necessary to use electronic devices for audio and video recordings of all interactions between teacher-students and students. -student at the time of solving the tasks (task 1 - sheets of bond paper; task 2 - cooking recipe) that were proposed. At the time of the multisemiotic analysis, we identified the most diverse indications of the characterizing elements during the resolution of tasks of missing value such as perception, gestures and natural language, even their combination, including double 1 evidences the three characterizing elements in the resolution of the two tasks. Finally, we infer some notes such as: the difficulty of students to work in pairs in a collaborative way in order to listen carefully to the ideas of colleagues and start the search for a consensus; the importance of gestures; the use of the trial and error method demonstrating evidence of arithmetical thinking; and unfamiliarity with tasks that explore five or six problems.



**Key words:** Algebra; teaching-learning; early years; objectification theory.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| CEP | Comitê de Ética e Pesquisa |
| EF | Ensino Fundamental |
| EM | Educação Matemática |
| ENEM | Encontro Nacional de Educação Matemática |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| IFES | Instituto Federal do Espírito Santo |
| LD | Livros Didáticos |
| MEC | Ministério da Educação |
| PA | Pensamento Algébrico |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PPP | Projetos Políticos Pedagógicos |
| SAEB | Sistema de Avaliação da Educação Básica |
| TALE | Termo de Assentimento para adolescentes |
| TCLE | Termo de Consentimento Livre e Esclarecido |
| TO | Teoria da Objetivação |

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sucedeu em 20 de dezembro de 2017 por meio da portaria n° 1.570 (BRASIL, 2017). O documento dispõe de um caráter normativo de modo a apresentar os direitos e objetivos da aprendizagem das etapas e modalidades da Educação Básica (EB) dos Estados e Municípios Brasileiros (BRASIL, 2018). A priori resgatando e ampliando os objetos propostos em documentos anteriores, modificando as discussões que eram realizadas no âmbito da EB. Passou a ser sugerido nos seguintes itens: currículos das escolas públicas; na formação inicial e continuada de professores; nos materiais didáticos; nas avaliações e exames nacionais que foram e/ou serão vistos a partir da BNCC; e objeto de pesquisa nos diversos níveis de formação.

Após homologação, a BNCC se tornou objeto de pesquisas brasileiras (PASSOS; NACARATO, 2018; PERTILE; JUSTO, 2020; SANTOS, 2021) justamente por incluir temas específicos, que já eram indicados e estudados há alguns anos no cenário internacional. Na Educação Matemática, por exemplo, aos poucos as discussões ao redor do ensino-aprendizagem de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF) estão se fortalecendo e ampliando o quantitativo de investigações (OLIVEIRA; PAULO, 2019; GOMES, 2020; PANOSSIAN, 2021). Por ser primordial no “[...] desenvolvimento das crianças, pois ela livra o pensamento da criança da prisão das relações numéricas e concretas e o eleva ao nível mais abstrato” (CEDRO, 2021, p. 199).

Desde a implementação a BNCC propõe a álgebra como uma das unidades temáticas. De modo a encorajar uma abordagem a partir dos primeiros anos, ou seja, com as crianças, enfatizando o não uso do simbolismo alfanumérico. Por outro lado, esta unidade tem como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico, visto como primordial na utilização de “[...] modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas [...]” (BRASIL, 2018, p. 270). E para que haja o desenvolvimento dessa forma de pensar recomenda-se o trabalho com: generalizações de padrões (numéricos e não numéricos), as propriedades de igualdade, o estudo de regularidades e a organização entre as diferentes grandezas, assim como criar, interpretar e transitar fazendo uso de inúmeros recursos (IDEM, 2018).

Neste contexto, o desenvolvimento do pensamento algébrico é fundamental tanto para estudantes, quanto para os professores (SOUZA, 2004; SANTOS; MORETTI, 2021) nas diversas etapas da EB, pois antes de revelar o pensamento algébrico dos estudantes, o professor precisa tê-lo desenvolvido (RADFORD, 2021).

E “a possibilidade de potencializar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico (PA) em meninos e meninas nos primeiros anos de escolaridade é um aspecto que gera cada vez mais interesse [...]” (VERGEL, 2015, p. 193, tradução nossa). Nessa perspectiva, buscamos por pesquisas que abordam a discussão do pensar algebricamente[1] nos anos iniciais do EF no cenário Brasileiro de Educação Matemática (EM). A exemplo, encontramos o estudo de Lima (2016) que desenvolveu um mapeamento dos trabalhos publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) durante o intervalo de 1998 a 2013, envolvendo a temática. No mapeamento, o pesquisador encontrou apenas quatros trabalhos, sendo eles dois posters e dois relatos de experiência. Com isso, foi possível verificar uma carência de pesquisas nesta área direcionadas a modalidade de EF anos iniciais, por outro lado, o autor supracitado encontrou mais pesquisas em outras modalidades de ensino como no EF anos finais, no médio e no ensino superior, porém a descrição destas não era o foco da nossa pesquisa.

Contudo, nas pesquisas analisadas por Lima (2016) havia pouquíssimas concepções/perspectivas sobre o pensamento em questão, demonstrando uma lacuna na compreensão deste conceito. Esta inferência corrobora com a análise realizada por Radford (2009), que encontrou um número significativo de pesquisas sobre o pensamento algébrico. Entretanto, o autor constatou que elas não o caracterizam, passando a impressão que está discussão caiu no gosto popular antes dos pesquisadores descobrirem o significado do seu conceito. Ao mesmo tempo, na literatura não existe um consenso sobre o que é pensamento algébrico (LINS; GIMENEZ, 2001; RADFORD, 2006; ALMEIDA; CÂMARA, 2017; FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2016, 2018).

Digamos apenas que os teóricos entram em consonância em pontos específicos acerca desta discussão, dentre eles: a possibilidade de produzir significados, relativa importância do processo de generalização e a notoriedade do seu desenvolvimento desde os primeiros da vida escolar (BLANTON; KAPUT, 2005; CANAVARRO, 2007; CARRAHER *et al.*, 2006; KIERAN, 2004; TRUJILLO; CASTRO; MOLINA, 2009). Inclusive, alguns teóricos têm um interesse específico na temática de tal modo a propor investigações sobre as particularidades; caso análogo ao estudo de Almeida e Câmara (2017), no qual apresentam uma descrição das três correntes históricas e filosóficas mais famosas no âmbito da EM. Apontando elementos de convergência e divergência entre as perspectivas dos teóricos James Kaput, Rômulo Lins e Luis Radford.

[1] Na literatura nos deparamos com textos que fazem menção a apenas um ou as duas formas i) pensamento algébrico ou ii) pensar algebricamente, no entanto iremos utilizar as duas formas.

De acordo com Kaput (1999 apud ALMEIDA; CÂMARA, 2017) o pensar algebricamente está associado à construção de significados. Em prática se propõe uma situação problema que envolve uma balança de dois pratos e se os estudantes compreendem a situação de modo a prevalecer uma relação de equivalência entre os lados tornando a igualdade verdadeira (ALMEIDA; CÂMARA, 2017); isso pode ser visto como uma mobilização do pensar em concordância com os dois teóricos.

Especificando um pouco a discussão Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução nossa), defendem que o pensamento algébrico é o "[...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" Em razão disso, quanto mais situações forem propostas aos estudantes, mais oportunidade eles terão para desenvolver o pensamento algébrico.

Ao mesmo tempo, acrescentam que a generalização do pensamento algébrico pode acontecer por meio de múltiplas formas da linguagem: corporal, gestual, simbólica ou numérica (BLANTON; KAPUT, 2005). Isso também é discutido por Radford (2009, p. 1, tradução nossa) quando pontua que o "[...] pensamento algébrico pode ser caracterizado de acordo com os meios semióticos a que os estudantes recorrem para expressar e lidar com a generalidade algébrica". Neste contexto, observamos vários aspectos pontuados por diferentes teóricos, porém para esta investigação selecionamos uma perspectiva específica, a proposta por Luis Radford (2009).

Luis Radford é o propulsor da Teoria da Objetivação (TO), uma teoria de ensino-aprendizagem inspirada no materialismo dialético de Marx, na educação transformadora e emancipadora de Paulo Freire, na perspectiva histórico-cultural de Vygotsky e entre outros pesquisadores. Isto significa que foi inspirada em grandes correntes teóricas fazendo com que alguns conceitos[2] educacionais sejam reformulados sob o ponto de vista de Radford. A priori, o conceito de EA segundo o autor supracitado é vista "[...] *como um esforço político, social, histórico e cultural que visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discurso e práticas matemáticas e culturalmente constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento* (RADFORD, 2021, p. 36, grifo do autor).

Neste viés se apresenta uma perspectiva sobre o pensamento algébrico, na qual difere um pouco da tradicional, de modo a argumentar que ele não ocorre de forma natural, ou seja, os professores têm a atribuição de propor inúmeras situações ao longo da vida escolar dos

[2]A discussão em torno desta teoria será apresentada de forma breve no segundo capítulo considerando os elementos essenciais para a nossa investigação.

estudantes e que isto deve acontecer desde os anos iniciais do EF. Para TO, a caracterização do pensamento algébrico "[...] não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de *raciocínio* que é feito com grandezas" (RADFORD, 2021, p. 173, grifo do autor).

Com isso, existem três elementos caracterizadores deste: a indeterminação (*objetos* do raciocínio, ou seja o trabalho com grandezas desconhecidas), denotação (objetos são *simbolizados*, sendo assim, os estudantes podem recorrer às mais diversas formas representar as grandezas desconhecidas seja a linguagem convencional, gestos, símbolos e entre outros) e por último a analiticidade (ao como se *raciocina* com os objetos, ou seja, *ao com* se trabalha com as grandezas desconhecidas de modo a se tornar conhecidas) (RADFORD, 2009, 2013, 2018, 2021).

Inclusive o último elemento mencionado é o principal responsável pela ruptura entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico; e isto facilmente pode ser observado na introdução algébrica com as crianças, argumentando que o professor dos anos iniciais precisa distingui-los justamente para não confundir os estudantes (RADFORD, 2013). Ao mesmo tempo sublinhando que o método de tentativa e erro não pode ser visto como uma mobilização do pensamento em questão.

Nesse sentindo, a partir do explanado, surge a primeira inquietação pessoal[3]: **como o pensamento algébrico pode ser abordado nos anos iniciais do EF?** Na literatura frequentemente encontramos artigos, dissertações e teses trazendo a generalização de padrões como objeto da investigação e corroborando com este argumento temos as pesquisas de Radford (2009, 2010, 2013, 2014, 2018), Vergel (2014, 2015, 2016), Santos e Moreira, (2016), Oliveira e Paula (2019), Silva e Almeida (2021). Acreditamos que "[...] a generalização de padrões tem sido considerada como uma das formas mais importantes de introduzir álgebra e pensamento algébrico na escola" (VERGEL, 2021, p. 79).

Todavia, nos dispomos a propor uma pesquisa mais contemporânea considerando as evidências encontradas na literatura e priorizando os novos pressupostos da BNCC no cenário brasileiro, como a discussão que a proporcionalidade pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico. Principalmente porque são situações que estão atreladas ao nosso dia a dia, seja na compra e venda, ampliação e redução de escalas de mapas, representações gráficas (BRASIL, 2018) e entre outras que podem vir a surgir.  Neste contexto, há trabalhos na literatura

[3] Este questionamento foi fundamental para o desenvolvimento da pesquisa. De antemão o pesquisador precisa se sentir instigado a elaborar uma dissertação por ser uma caminhada árdua e complexa.

que apresentam e argumentam os problemas de proporcionalidade que podem favorecer a mobilização deste pensamento (BUTTO; ROJANO, 2010; BURGOS; GODINO, 2019; TINOCO; PORTEL; SILVA, 2010; TINOCO *et al.*, 2008, 2011).

Inclusive Burgos e Godino (2019) acreditam que a proporcionalidade é a rota de acesso para o pensamento algébrico, e esta afirmação só foi possível depois de desenvolver uma investigação com tarefas de proporção com estudantes do quinto ano do primário da Espanha. Em sintonia, Tinoco, Portela e Silva (2010) acrescentam que durante o processo de introdução algébrica os estudantes demonstram dificuldades e argumentam que os problemas de proporção podem minimizar ou reduzir estas dificuldades. Os autores supracitados inferiram que os primeiros indícios da redução das dificuldades ocorrem quando: "[...] uma criança começa a raciocinar multiplicativamente, em problemas envolvendo preços, relação tempo-distância, etc., embora este aspecto não seja sempre explorado nas salas de aula" (p. 3).

Problemas ou situações que demandam observação, generalização de regularidades e o estabelecimento de relações em geral (BURGOS; GODINO, 2019; TINOCO, *et al*., 2008), abordagem relação parte-parte[4] e a relação parte-todo[5] (SPINILLO, 2003), aumento e diminuição, e esquema de comparação (VERGEL; ROJAS, 2018), são considerados essenciais para a sistematização dos conceitos de proporcionalidade e ajudam na mobilização do pensamento algébrico. Tinoco *et al*. (2011) especificaram quatro aspectos que defendem a importância da proporcionalidade na Educação Básica atrelado ao pensamento algébrico: aplicação no cotidiano, o conceito de função, as diversas formas de representação e as noções de pré-álgebra[6]. Neste sentido, nos próximos parágrafos sublinhamos estes aspectos e buscamos alinhar com outras pesquisas.

Inicialmente, usufruímos da acentuada correlação da proporcionalidade em nosso cotidiano, na qual existem várias situações que são orientadas pelos seus princípios, por exemplo: Um carro percorre 20 km com 1 litro de gasolina, quantos litros de gasolina ele precisa para percorrer 80 km? Outro exemplo seria: Para fazer um bolo são necessários os seguintes ingredientes: 500 mg de farinha de trigo, 4 colheres de manteiga, 5 colheres de açúcar, 1 colher de chá de fermento, 3 ovos, 300 ml de leite. Para fazer dois bolos, quanto de cada ingrediente

---

[4] Um exemplo pode ser utilizado: Duas jarras de bebidas são apresentadas: uma preparada com 3 copos de suco de laranja e 1 copo de água; e outra com 2 copos de suco de laranja e 2 de água. Qual das duas bebidas tem gosto mais forte de laranja, ou ambas têm o mesmo gosto? (SPINILLO, 2003). Na estratégia **parte-parte:** razão 3:1 três copos de suco concentrado, para um de água, ou então 2:2.

[5] Na estratégia **parte-todo**: utilizando o exemplo anterior, comparamos o total de copos em cada bebida, para a quantidade de suco de laranja, assim temos, a fração 3/4 ou 2/4.

[6] Os processos de generalização, equivalência e regularidade são denominados por pré-álgebra nos anos iniciais.

será necessário? E para fazer três bolos? Acreditamos que este tipo de situação facilmente pode ser implementado no contexto da sala de aula.

Outros autores corroboram com esta ideia do uso da proporção no dia a dia a exemplo de Burgos e Godino (2019); Mendes e Justulin (2020); Spinillo (2003); Sirilo *et al*. (2016); Soares (2016); Oliveira (2009, 2016); Vieira (2020). Eles ainda acrescentam que a proporção auxilia no desenvolvimento de conceitos mais elaborados, como é o caso do estudo desenvolvido por Sirilo *et al*. (2016), partindo da ideia de construir mosaicos utilizando conceitos de proporção onde promoveram vários momentos de reflexão sobre a aplicação dos conceitos abordados, principalmente sobre proporção áurea, além de sensibilizar os estudantes do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), campus Vitória-ES, sobre o conteúdo abordado *interdisciplinarizando* proporção com as áreas de arte, história, desenho e arquitetura, por meio de aulas prazerosas e naturais.

No segundo aspecto, descrito por Tinoco *et al.* (2011), utiliza-se a proporcionalidade para descrever e comparar várias situações, como a situação elucidada pela BNCC, que defende que a noção intuitiva de função pode ser explorada nos anos iniciais pela resolução de problemas que envolvem a variação entre duas grandezas (BRASIL, 2018). Por exemplo: Com três saquinhos de polpa de fruta, consigo fazer 2 litros de suco. Quantas saquinhos de polpa serão necessários para fazer 6 litros de suco? Estes dois primeiros aspectos vão ao encontro da discussão proposta por Radford e colaboradores sobre o pensamento algébrico.

Sobre o terceiro aspecto, temos uma reflexão sobre o leque de possibilidades que o ensino de proporção nos possibilita, sendo elas a facilidade de manusear as interpretações de quadros, tabelas, ilustrações através de desenhos, e também sua relação com grandezas, medidas, geometria, álgebra, probabilidade e estatística. Com isso, podemos observar que a proporção não se detém a uma única área específica, perpassando por todas as unidades temáticas e não se constituindo apenas em uma delas. No entanto, esta relação e as suas diversas formas de representações não vem sendo exploradas como deveriam, limitando-se apenas ao uso da regra de três, solicitando "[...] inicialmente, o estabelecimento das relações que existem entre as grandezas ou variáveis" (COSTA JÚNIOR, 2010, p. 86).

Por fim, no quarto aspecto, contamos com um trabalho desenvolvido por Post, Behr e Lesh (1994 apud TINOCO *et al*., 2011) descrevendo a proporcionalidade desde a pré-álgebra e justificando que isso deve ocorrer com as primeiras ideias de situações problemas, desde que sejam instantes de construção do conhecimento para elas, incluindo situações do dia a dia. Neste contexto, considerando todas as evidências teóricas apresentadas podemos deduzir que a proporcionalidade pode sim auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico, no entanto, entendemos que a nossa discussão em torno da proporcionalidade permanece muito abrangente[7], haja visto que estamos elaborando uma pesquisa a nível de mestrado. Por isso, optamos por restringir apenas a um conteúdo específico deste objeto, no caso, as tarefas de valor omisso.

Nas tarefas de valor omisso, são dados A, B, C, D e as proporções se estabelecem da seguinte forma A:B = C:D (POSH; LESH; BESH, 1988; VIANA; MIRANDA, 2016). Sendo assim os valores correspondentes A, B e C são dados no enunciado de cada tarefa, enquanto o D condiz com termo desconhecido, ou seja, o valor solicitado na tarefa. Neste contexto, adaptamos as tarefas de valor omisso porque frequentemente estas não são exploradas com problematizações extras, exemplificando: tarefa 1 e os problemas. ou seja, os problemas dispõem de um grau de dificuldade crescente, solicitamos a eles que encontrassem um termo próximo e assim sucessivamente até indagamos sobre o termo geral da tarefa, bem como uma descrição sobre a escolha/resolução.

Foram realizadas adaptações para que as tarefas encaixem na proposta de sequência (RADFORD, 2008, 2013, 2021); favorecendo o reconhecimento dos elementos caracterizadores: a indeterminação, denotação e a analiticidade, na perspectiva da TO. Acreditamos que as tarefas de valor omisso e o pensamento algébrico nos anos iniciais do EF no âmbito da Educação Brasileira é muito necessária, principalmente por ter o intuito de ampliar as discussões sobre este conhecimento e auxiliar os professores atuantes.

A partir do elucidado, emerge a nossa pergunta de pesquisa: *Quais características do pensamento algébrico são relevadas por estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas de valor omisso?* Nessa perspectiva, nosso objetivo geral é caracterizar o pensamento algébrico revelado por estudantes do 5° ano do ensino fundamental ao resolverem tarefas que envolvem o valor omisso. Para tal, foi necessário identificar as estratégias reveladas pelos estudantes ao se depararem com tarefas que explorem o valor omisso; descrever os meios semióticos revelados pelos estudantes durante a resolução das tarefas de valor omisso.

Apresentados nossos objetivos, delineamos nossa investigação em seis capítulos. No capítulo 1, inicialmente, apresentamos um panorama sobre álgebra escolar nos anos iniciais do EF. Posteriormente, observamos a álgebra nas orientações curriculares, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) anos iniciais (BRASIL, 1997) e da BNCC (BRASIL, 2018) e

[7] O tema proporcionalidade se faz muito complexo e amplo, sendo assim, temos que selecionar algo mais específico. Não organizamos a introdução descrevendo apenas sobre o pensamento algébrico e as tarefas de valor omisso porque encontramos pouquíssimas investigações que abordam eles.

contrapomos com a literatura encontrada, como os trabalhos de Silva (2017), de Medeiros (2021) e de Ferreira (2017).

No capítulo 2 apresentamos o pensamento algébrico e os elementos caracterizadores na perspectiva da TO e a sua influência na aprendizagem do pensamento algébrico por estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental. No capítulo 3 explicitamos algumas definições sobre a proporcionalidade a partir de uma revisão de literatura e seu papel como um elemento crucial para a compreensão da pesquisa. Também observamos a proporcionalidade no PCN e na BNCC. O percurso metodológico, universo de pesquisa e as demais variáveis consideradas na coleta e análise multimodal são apresentadas no capítulo 4, a descrição do estudo final realizado em uma escola particular no capítulo 5. Por fim, no capítulo 6, tecemos algumas considerações finais.

# 1 ÁLGEBRA

A álgebra é um dos ramos da matemática que acompanha a humanidade desde os primórdios, auxiliando na resolução de situações do cotidiano. Em virtude dessa conexão, este ramo transitou por períodos de ascensão e declínio, contribuindo para o surgimento e o desenvolvimento de adversidades relativas ao seu ensino e aprendizagem, como a "[...] ênfase que se dá a seus aspectos técnicos, deixando de lado [...]" (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 1) elementos fundamentais que precisam ser abordados ao longo da educação básica.

Optamos por restringir a discussão deste capítulo aos elementos fundamentais que fazem parte do contexto da álgebra escolar nos anos iniciais do EF; ressaltamos que refletir sobre álgebra escolar não é uma atribuição fácil (ALMEIDA, 2017). Desse modo, serão apresentados os elementos que compõem a discussão algébrica na referida etapa escolar, estabelecendo o diálogo com teóricos e pesquisadores da área (ALMEIDA, 2017; RADFORD, 2012, 2013, 2014; SANTOS; MORETTI, 2021; VERGEL; ROJAS, 2013, 2018; VERGEL, 2021).

Nessa perspectiva, observamos a temática nas orientações curriculares nacionais, por meio de um estudo comparativo entre os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2018) descrevendo as diferenças, semelhanças e as modificações que estão correlacionadas ao ensino de álgebra nos anos iniciais do EF. Tendo em vista que existe uma diferença de 20 anos entre os dois documentos, faz-se necessário refletir e compreender como eram e são propostas as orientações, dado que isso infere diretamente na Educação Básica.

## 1.1 ÁLGEBRA ESCOLAR NOS ANOS INICIAIS

Neste tópico são propostos dois questionamentos[8]: *quais são as características da álgebra escolar? E quais delas devem ser abordadas nos anos iniciais do EF*? Para respondê-las foram incluídos elementos teóricos e práticos presentes na literatura, estabelecendo um diálogo entre eles.

Segundo Almeida (2017) a álgebra escolar se caracteriza pela álgebra que é explorada ao longo da educação básica; o autor, na perspectiva de promover reflexões, fragmenta o artigo em três partes, sendo cada uma delas responsáveis por uma das características acerca da álgebra escolar. Na primeira, observa-se a distinção entre aritmética e álgebra, que depende de como os

[8]Essas indagações surgiram posteriormente à exploração do artigo de Almeida (2017).

estudantes interpretam as situações que foram propostas; a segunda consiste em uma linguagem que representa valores desconhecidos; e a terceira corresponde ao pensamento algébrico.

Dentre as três características descritas, a primeira e a terceira são os mais habituais nos anos iniciais do EF (ALMEIDA, 2017; RADFORD, 2013; VERGEL, 2015; VERGEL; ROJAS, 2018). Todavia, optamos por especificar neste tópico a argumentação em torno da primeira característica, ou seja, a distinção entre aritmética e álgebra. Sendo assim a "[...] aritmética seja um pré-requisito para a aprendizagem da álgebra pressupondo que esta deva ser ensinada somente nos anos finais do EF e os anos iniciais tenham que se limitar ao conhecimento aritmético por meio de uma perspectiva lógico-formal [...]" (SANTOS; MORETTI, 2021, p. 247).

Na perspectiva educacional essa diferença é muito importante, pois o trabalho com a aritmética pode ser confundido com o trabalho com a álgebra, ou vice-versa (RADFORD, 2013). Além disso, a diferença entre elas não pode acontecer em termos de notação, como se pensa muitas vezes (VERGEL, 2014). Nessa lógica faz-se necessário dispor de informações consideráveis sobre essa discussão, em especial os elementos que as cercam, principalmente nos anos iniciais, quando a confusão acontece com mais frequência.

A discussão algébrica está pautada em duas características, a primeira está ligada com objetos indeterminados, como as variáveis, parâmetros e incógnitas, enquanto a segunda consiste no tratamento desses objetos de forma analítica. Isso acontece quando se opera com as quantidades indeterminadas (ou seja, adicionando, subtraindo, dividindo, entre outras) como se fossem conhecidos, tratando como números específicos (RADFORD, 2010). Enquanto na aritmética observa-se a abordagem dos números, operações, relações e os respectivos significados destas (LINS; GIMENES, 1997).

Com a intenção de exemplificar tal situação no cenário dos anos iniciais, cabe apresentar um trecho do estudo de Vergel e Rojas (2018, p. 24-25, tradução e grifos nossa):

> *Usos do sinal de igual*. Confrontando com questões como 8 = 8? ou 3 + 4 = 5 + 2? alguns dos estudantes respondem que tais igualdades são "falsas" e afirmam que, no primeiro caso, "seria verdadeiro se 8 + 0 = 8 ou 8 x 1 = 8 fossem escritos" e, no segundo "3 + 4 é 7 e não 5, e ainda falta completado: 3 + 4 = 7 + 2 = 9". O que poderia explicar essas respostas? No primeiro caso, para alguns estudantes do 5° ano – 10/11 anos – o uso que eles fizeram da palavra "falso" não era como oposto da verdade, mas, sim, como "não utilizado", na medida em que interpretam o sinal de igual como "ordem para operar", ou como "separação" entre um processo e outro, não como uma relação de equivalência, que pode ser evidenciado no segundo caso, no qual também se observa que adicionam outro sinal de igual – Depois da operação 7 + 2 que eles construíram [...].

A partir da seguinte afirmação: “seria verdadeiro se 8 + 0 = 8 ou 8 x 1 = 8 fossem escritos” (VERGEL; ROJAS, 2018, p. 24-25) pode-se perceber que no primeiro caso os estudantes consideram o sinal de igual como o indicador da operação a ser efetuada, enquanto do lado direito o resultado da operação, devido ao processo. Isso pode ser observado quando os autores supracitados mencionam que os estudantes sugerem a inclusão do “0” e “1” do lado esquerdo. Na segunda parte do trecho, eles apresentam um raciocínio semelhante ao anterior, ao afirmar que “3 + 4 = 5 + 2” não é correto, e que o certo deveria ser “3 + 4 = 7 + 2 = 9”, ou seja, eles não compreenderam o sinal de igual como uma equivalência, assim, como não compreenderam a propriedade associativa da adição - a ordem das parcelas pode ser trocada sem alterar o resultado.

Com base nas respostas dos estudantes no estudo em análise, podemos afirmar que em ambos os casos eles se direcionam ao ramo da aritmética, devido ao foco nos números, nas operações e na busca pelo resultado. Ao mesmo tempo, eles estão presos às “[...] formas cristalizadas de algoritmos e procedimentos, buscando apenas a comparação entre casos particulares e a abstração de regras ligadas à aparência das operações e não à sua estrutura e leis e gerais de formação” (SANTOS; MORETTI, 2021, p. 248).

Caso as resoluções estivessem no ramo algébrico, os estudantes iriam observar o sinal de igual de outro ângulo, percebendo a equivalência em ambos os casos, conforme o seguinte trecho: “8 = 8? ou 3 + 4 = 5 + 2?” (VERGEL, ROJAS, 2018, p. 24-25). Dessa forma, usando o sinal de igual não apenas como um indicador da operação a ser efetuada, dado que o sinal de igual “[...] não indica diretamente uma operação a ser realizada e sim denota o sentido de equivalência” (GOMES, 2020, p. 121). A compreensão do sinal da igualdade favorece a identificação de relações em estabilidade ou instabilidade em situações de controle e manipulação de quantidades conhecidas ou desconhecidas (SANTOS; MORETTI, 2021).

Em síntese, observam-se argumentações presentes na literatura, nas quais são descritas a relevância no discernimento entre álgebra e aritmética, principalmente para os professores atuantes nos anos iniciais do EF, enfatizando a abordagem de situações que cercam padrões, problemas que envolvem operações com um dos termos desconhecido, problemas de balança, generalizações (podendo ser revelada por intermédio de ilustrações, tabelas, linguagem convencional e entre outras), a proporcionalidade e entre outras situações. Estas devem considerar que as crianças podem usar diferentes estratégias para elucidar os problemas propostas com a intenção de revelar o pensamento algébrico, pois isso, pode auxiliar na compreensão de conceitos mais complexos que serão abordados nos anos seguintes. Adiante, iremos descrever sobre como a álgebra escolar nos anos iniciais é apresentada nas orientações curriculares nacionais.

## 1.2 ÁLGEBRA ESCOLAR NOS ANOS INICIAIS NAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS

De forma geral o PCN e a BNCC dispõem de um caráter normativo de modo a apresentar os direitos, objetivos da aprendizagem e o como devem ser abordados no decurso das etapas e modalidades da Educação Básica. E são essenciais na elaboração de currículos municipais e estaduais, na formação inicial e continuada de professores, nos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) escolares, no desenvolvimento e organização de coleções de Livros Didáticos (LD) para o ensino na Educação Básica, e em avaliações nacionais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no desenvolvimento de pesquisas no âmbito da Educação Matemática e entre outros (BRASIL, 1997, 2018).

Nesse sentido, especificamos neste tópico o processo investigativo realizado nas orientações curriculares nacionais, nas quais foi desenvolvido um estudo comparativo entre os PCN e a BNCC, observando as orientações que são direcionadas para o ensino de álgebra nos anos iniciais do EF, justificando que o propósito desta discussão consiste em compreender como era e como vem sendo proposta a abordagem algébrica nestas etapas escolares, visto que para o desenvolvimento de uma pesquisa no âmbito da EB faz-se necessário ter o discernimento sobre eles, e como os conteúdos podem ser trabalhados.

Primeiramente destacamos a modificação no Regime do EF. Em 2005, o Congresso Nacional aprovou a lei n° 144/2005 estipulando duração mínima de 9 anos para o EF (BRASIL, 2005). Neste contexto, os pais ou responsáveis legais passaram a efetuar matrícula das crianças a partir dos 6 anos de idade no EF; quantos aos Municípios, Estados e o Distrito Federal tinham até 2010 para implementá-la.

Sucintamente o Pré da Educação Infantil passou a integrar o Ensino Fundamental, tornando-se o 1° Ano do EF. Dessa forma, as crianças na faixa etária (prevista) de 6 a 10 anos fazem parte dos anos iniciais do EF com uma duração de cinco anos. Enquanto os adolescentes, na faixa etária (prevista) de 11 a 14 anos - anos finais do EF, duração de quatro anos. O quadro 1, a seguir, ilustra as modificações no Regime de 8 para 9 anos.

Quadro 1 – Adaptações no EF

| Série - Regime de 8 anos | Ano - Regime de 9 anos |
|---|---|
| Pré - Educação Infantil | 1° Ano |
| 1° Série | 2° Ano |
| 2° Série | 3° Ano |
| 3° Série | 4° Ano |
| 4° Série | 5° Ano |
| 5° Série | 6° Ano |
| 6° Série | 7° Ano |
| 7° Série | 8° Ano |
| 8° Série | 9° Ano |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

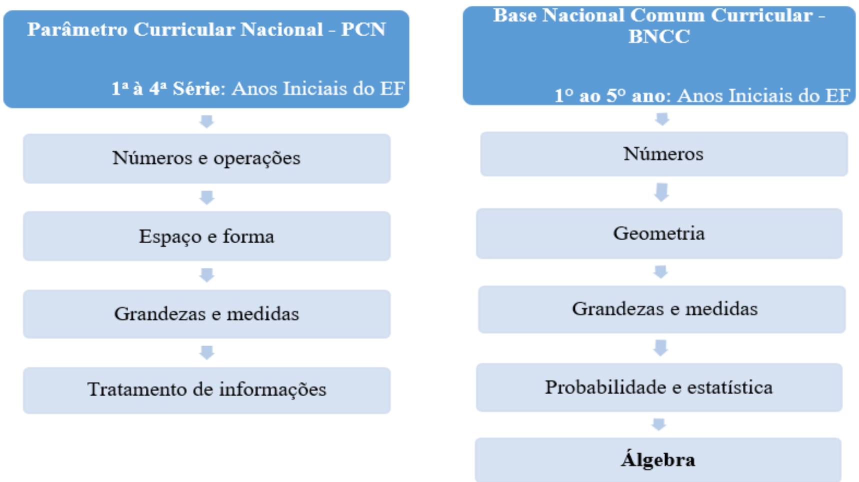
Para fins de sistematização, os próximos parágrafos serão apresentados na seguinte ordem: 1) a distribuição das séries/anos escolares; 2) divisão dos blocos de conteúdo/unidades temáticas; 3) realização de uma contextualização geral sobre a organização da matemática; 4) divisão dos documentos, enfatizando o contexto da álgebra em cada um deles; além de traçar um paralelo entre o PCN, BNCC e algumas pesquisas.

Inicialmente o PCN estabelece a distribuição dos anos escolares por ciclos: 1° ciclo abarca a 1ª e 2ª série e o 2° ciclo a 3ª e 4ª série, sendo assim os dois primeiros ciclos fazem parte dos anos iniciais do EF (BRASIL, 1997). Enquanto na BNCC essa divisão se dá da seguinte forma: do 1° ao 5° ano – anos iniciais do EF (BRASIL, 2018). Mesmo com a implementação da lei n° 144/2005 não houve nenhuma modificação no documento PCN (BRASIL, 1997), porém, o Ministério da Educação (MEC) disponibilizou outros documentos: o ***Programa Ampliação do Ensino Fundamental para Nove Anos*** (a disposição dos pais ou responsáveis legais, educadores e gestores), em outras palavras a nível de sociedade, e o ***Ensino***

***Fundamental de Nove Anos: Orientações para a Inclusão da Criança de Seis Anos de Idade***[9] (como leitura recomendada[10]) para quem busca maiores esclarecimentos.

Com relação aos conteúdos de matemática nos documentos, no PCN estão dispostos numa divisão por bloco de conteúdo: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação (BRASIL, 1997). Já na BNCC a matemática é composta por cinco unidades temáticas: números; geometria; grandezas e medidas; álgebra; probabilidade e estatística (BRASIL, 2018). Inclusive, as duas últimas unidades temáticas são novidade, porque antes surgiam apenas nos anos finais[11]. A figura 1 esclarece as novas divisões indicando modificações (ou não) na nomenclatura entre os dois documentos.

Figura 1 – Comparativo entre os blocos de conteúdo do PCN e as unidades temáticas da BNCC




Fonte: Elaborado pela autora baseado em Brasil (1997, 2018).

Em síntese, a BNCC expõe de modo mais simples quando os conteúdos devem ser trabalhados em cada ano do EF, por intermédio dos objetos de conhecimentos e habilidades a cada etapa escolar. Para Ferreira, Leal e Moreira (2020, p. 11) “essa organização representa, de fato, um ganho em termos de organização curricular, pois permite que professores que atuam

[9] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/ensifund9anobasefinal.pdf. Acesso em: 30 jun. 2021.

[10] Composto por nove capítulos: A infância e sua singularidade; A infância na escola e na vida: uma relação fundamental; O brincar como um modo de ser e estar no mundo; As diversas expressões e o desenvolvimento da criança na escola; As crianças de seis anos e as áreas do conhecimento; Letramento e alfabetização: pensando a prática pedagógica; A organização do trabalho pedagógico: alfabetização e letramento como eixos organizadores; Avaliação e aprendizagem na escola: a prática pedagógica como eixo da reflexão e Modalidades organizativas do trabalho pedagógico: uma possibilidade.

[11] Estamos cientes das mudanças nas outras blocos de conteúdos/unidades temáticas, porém neste capítulo enfatizamos apenas a discussão em torno da álgebra no PCN e na BNCC.

numa mesma série de uma mesma disciplina conheçam as habilidades que estão sendo desenvolvidas [...]" por professores e estudantes de outras escolas.

Por outro lado, observamos que a álgebra no PCN, está presente no bloco de número e operações de forma breve. Bem como nos conteúdos de representações algébricas utilizados para expressar as generalizações sobre propriedades aritméticas e regularidades de sequências numéricas, noção de variável e entre outros (BRASIL, 1997). A apresentação desse conteúdo só acontecia a partir do 7° ano e não tinha nenhuma discussão prévia ou posterior com desenvolvimento do pensamento algébrico (NOVA ESCOLA, 2017). Corroborando com as evidências teóricas de Ferreira (2017, p. 17) "[...] é uma das áreas da Matemática que ganha presença no currículo apenas no início dos Anos Finais do Ensino Fundamental"

Outro aspecto a ser mencionado, é o fato de no PCN não existe nenhuma referência explícita à álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, apenas a menção do termo pré-álgebra (FERREIRA, 2018; GOMES, 2020; GOMES; NORONHA, 2021; PANOSSIAN, 2021; ROMEIRO; MORETTI, 2021). O aparecimento desse termo nos PCN marca o início de uma possível abordagem de problemas que envolvem a percepção, regularidade e a generalização, destacando que ele surge apenas como um indicativo a ser desenvolvido no bloco de números e operações, ou seja, associado a aritmética.

O PCN ainda orienta que a abordagem algébrica deveria ser desenvolvida, como "[...] o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais [...]" (BRASIL, 1997, p. 17), a partir disso, podemos observar vestígios de que os trabalhos aritméticos eram realizados nos anos iniciais do EF, enquanto os algébricos eram destinados para os anos finais, em concordância com as orientações dos PCN.

Isto sucede-se porque a aritmética era predominante nos primeiros anos escolares, já a álgebra conduzida para os anos finais porque existia uma discussão que antes de um estudo tão complexo se fazia necessário o desenvolvimento do pensamento aritmético. Na época acreditava-se que o ensino de álgebra estava muito relacionado apenas às técnicas de manipulação, as generalizações de operações por meio de letras, muitas vezes sem compreender as relações existentes (ROMEIRO; MORETTI, 2021).

Já na BNCC a álgebra é apresentada como uma das cinco unidades temáticas que precisam ser abordadas desde o 1° ano dos anos iniciais do EF, ou seja, iniciando com as crianças de seis anos. Antes mesmo da implementação da BNCC, pesquisadores já discutiam sobre isso em pesquisas internacionais (BLANTON; KAPUT, 2005; CANAVARRO, 2007; KIERAN, 2004; RADFORD, 2009, 2013; VERGEL, 2014, 2016) relatando a importância da álgebra nos anos iniciais, com o intuito de desenvolver o pensamento algébrico nas crianças.

E nos últimos anos pesquisadores brasileiros também vêm discutindo sobre isso (SILVA; SAVIOLI, 2014; SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015; FERNANDES; SAVIOLI, 2016; ALMEIDA; CÂMARA, 2016; COELHO; AGUIAR, 2018; GOMES, 2020; MORAIS, 2021; ROMEIRO; MORETTI, 2021; GOMES; NORONHA, 2021). Considerando algumas das argumentações teóricas internacionais e nacionais sobre essa perspectiva, a BNCC relata que a unidade temática de álgebra tem como finalidade o:

> [...] desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 271).

A BNCC aponta que para que o pensar algebricamente seja instigado faz-se necessário a abordagem de problemas ou situações que envolvem a regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, sendo estes considerados como elementos cruciais para a mobilização do pensamento algébrico nos anos iniciais. No entanto, não se empregam letras ou a ênfase no simbolismo alfanumérico, dados que estes são atributos dos anos finais (BRASIL, 2018).

O documento da BNCC ainda acrescenta que as ideias fundamentais da matemática a serem trabalhadas na unidade temática de álgebra são a "**equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade**" (BRASIL, 2018, p. 269), visando uma articulação entre elas, no sentido de desenvolver o pensamento algébrico e os conhecimentos necessários a cada etapa escolar. Para exemplificar situações que compreendem algumas das ideias fundamentais e a relação com as outras unidades temáticas, têm-se que: no bloco de números há a construção de sequências recursivas e repetitivas, observando as regras pré-estabelecidas; na equivalência, é realizada por meio de exercícios como 2 + 2 = 4 e 3 + 1 = 4, que são estabelecidas pela igualdade. Além disso, as primeiras noções de função podem completar a variação proporcional direta de duas grandezas, não usando a regra de três (BRASIL, 2018).

Resumidamente, notamos mudanças relacionadas às orientações do ensino de álgebra entre a BNCC e os PCN, dado que no PCN tem-se o indicativo para a pré-álgebra; podendo ser visto como um avanço para a época. Já na BNCC a proposta se aproxima com a descrição de Ferreira (2017) ao esclarecer que "[...] há alguns anos estabeleceram em seus currículos o trabalho com a Álgebra nos Anos Iniciais, em nosso país sua abordagem como um dos eixos de trabalho da matemática está em fase embrionária" (FERREIRA, 2017, p. 32).

Há uma longa trajetória da busca pela compreensão de como e quando é possível revelar o pensamento algébrico, visto que esse assunto é recente, inovador e complexo na esfera da EB brasileira, principalmente para os profissionais que atuam nessa etapa escolar. Nesse tópico, apresentamos características acerca da álgebra escolar nos anos iniciais do EF, como a distinção entre álgebra e aritmética, a notoriedade do pensamento algébrico tanto por pesquisadores nacionais e internacionais, e as orientações da BNCC sobre essa temática. Ademais, nos próximos capítulos será ampliada a discussão nessa direção.

# 2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Na literatura não existe um consenso sobre o que seja pensamento algébrico, apenas "[...] uma diversidade de visões na comunidade de educadores matemáticos, no que se refere ao que se entende [...]" (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2016, p. 7) e a relativa seriedade do desenvolvimento deste, desde os anos iniciais do EF. Porém, a nossa intenção neste capítulo não consiste em detalhar o que os teóricos trazem sob a temática, mas sim, dedicar-se à perspectiva do pensamento algébrico proposta por Luis Radford na referida etapa escolar.

Neste contexto este capítulo foi organizado em duas partes: a primeira descrevemos alguns termos específicos para a TO e outros que passaram por uma ressignificação com base nas teorias e nos respectivos teóricos que inspiraram Radford; e atentos aos fatos que a TO orienta o itinerário teórico e o percurso metodológico desta investigação faz-se necessário expor aspectos que são fundamentais para a compreensão da teoria e que estão relacionados ao pensar algebricamente. Por isso, a perspectiva do pensamento algébrico surge na segunda parte do capítulo com a generalização algébrica e aritmética e na sequência os três elementos caracterizadores do pensar algebricamente.

## 2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS SOB À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Nesta seção são apresentados elementos imprescindíveis da TO a nível de desdobramento da pesquisa. Entretanto, antes contextualizamos de forma breve o teórico e seus respectivos interesses no campo de pesquisa. A TO segue em processo de elaboração pelo Prof. Dr. Luis Radford[12]; e desde a década 1990 se propõe a desenvolver investigações que perpassam os aspectos teóricos e práticos do pensamento de modo a especificar relação entre os traços culturais, a epistemologia, ontologia e semiótica da matemática (MORETTI; PANOSSIAN, RADFORD, 2018).

Para Radford um dos alicerces da TO consiste no materialismo dialético de Karl Marx, ao ponto de defender que o saber está atrelado aos processos históricos e culturais, distanciando-se da ideia da construção individual. Em outras palavras, auxiliando na formação "[...] de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente, refletindo sobre novas possibilidades de ação e

[12] Atualmente é professor titular na *Laurentian University*, em Ontário, no Canadá.

pensamento” (RADFORD, 2020, p. 16). Em vários textos ele descreve que a cultura é um elemento essencial, no entanto, existem inúmeras definições sobre essa especificidade, porém, a mais utilizada por ele na TO é a tradicional, a qual empenha-se em observar características em comum de um grupo social. O autor defende que a cultura não possui demarcação apenas nos pontos de convergência, sendo os pontos divergentes considerados como fundamentais (MORETTI; PANOSSIAN; RADFORD, 2018).

A Teoria da Objetivação “[...] se preocupa com aspectos referentes ao que, como e para que se educa” (GOMES, 2020, p. 71), ou seja, interessa-se por todo o processo de aprendizagem, não enfatizando apenas o produto ou então os resultados. Com isso, surge a seguinte indagação: *como ocorre o processo de aprendizagem à luz da TO?* Todavia, antes de esclarecer, se faz necessário descrever sobre dois conceitos, o de saber e de conhecimento, que se fazem presentes no processo em questão.

Segundo Radford (2021, p. 66, grifos do autor) “*O saber é um sistema de arquétipos de pensamento, ação e reflexão constituído histórica e culturalmente a partir de um labor coletivo material, corporificado e sensível*”. Nesse sentindo, podemos elucidar da seguinte forma, uma família que é produtora de grãos de café há algumas gerações e a herança é repassada de pais para filhos e assim por diante, na qual existe um modo singular de plantar, cultivar, colher e selecionar. Agora imagine outra família que cultiva grãos de café e dispõe de recursos financeiros, mão de obra terceirizada e equipamento de primeira linha.

Na primeira família todos os integrantes acompanham e se envolvem com todas as etapas de cultivo, já na segunda à cultura é outra, existem terceiros que fazem a maior parte do processo e consequentemente os saberes entre elas não são os mesmos, pois esta última é mais capitalista considerando todo o investimento que é realizado. Isto significa que as duas famílias produzem o mesmo produto, mas os saberes culturais entre elas são diferentes, assim, como o período histórico. Outro exemplo, a partir do nascimento cada indivíduo depara-se com formas culturais distintas de pensar e idealizar tudo à sua volta, como os sistemas de pensamento matemático, científico, entre outros (RADFORD, 2020). Por isso, o saber é potencialidade, e:

> [...] potencialidade é algo indefinido, sem forma, como o som antes de ser produzido ou como a capacidade do peixe antes de se deslocar na água: algo puramente potencial que, através do movimento, se materializa (mat[t]er-ializado) ou se atualiza (act-ualizado: transformado por um ato ou ação) (RADFORD, 2021, p. 67).

A materialização não se associa a alguma coisa rígida, longe disso, é algo tangível, sensível e concreto (RADFORD, 2020, 2021). Sendo assim, o saber faz parte da perspectiva histórico-cultural de modo a nos fazer refletir, já o conhecimento é visto como uma materialização ou atualização deste saber. Mas este processo sempre deve ser observado como algo fluído, possível de adaptações (RADFORD, 2021).

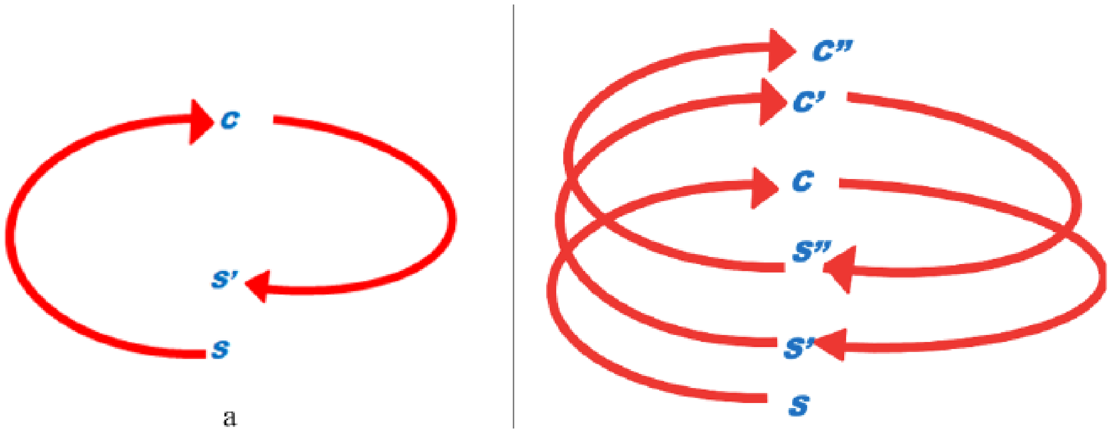
A fim de evitar interpretações de forma errônea, Radford (2017) apresenta três pontos sobre o conhecimento: 1) o saber como uma entidade *geral*; 2) o *processo* pelo qual o saber é atualizado ou materializado; 3) o conhecimento como *atualização* ou *materialização* do saber.

No primeiro deles o saber é algo geral, em outras palavras uma capacidade geradora de ação ou pensamento, por exemplo, o saber algébrico faz parte dos processos histórico-culturais da humanidade. Já o segundo ponto, é o *processo* que atualiza ou materializa o saber, denominado de atividade, mas para que isso surja o professor pode propor uma sequência de modo a realizar uma série de ações que levam os estudantes a encontrarem os saberes algébricos. Por exemplo, diante da sequência os termos mais remotos, ao mesmo faz-se relevante a colaboração entre professor-estudantes fazendo com que eles gradativamente observem as determinações sensíveis, inclui também a proposta da tarefa, as indagações, a cooperações, as discussões (RADFORD, 2021) e entre outros aspectos que serão apresentados mais adiante.

Já no último o autor supracitado descreve que “o conhecimento é o conteúdo conceitual concreto por meio do qual o saber é corporificado, ou materializado, ou atualizado” (p. 78). No entanto, isso só pode acontecer por meio de uma atividade humana. “Esta atividade atualiza o saber, atribui-lhe vida, assim como a atividade de tocar um violino dá vida às notas musicais. Isto significa que entre o saber e o conhecimento está a atividade” (p. 78). Portanto, a atividade se envolve em uma relação dialética com o saber e o conhecido. De modo a colocar o primeiro conceito em movimento e a partir disso surgem as determinações contextuais que nada mais é do que o conhecimento (RADFORD, 2020, 2021).

A figura 2, a seguir, ilustra e sistematiza a relação entre o saber (S), atividade (A) e o conhecimento (C). Sob a óptica da perspectiva histórico-cultural o saber é posto em movimento por intermédio de uma atividade (representados pelas setas) e com a atualização ou materialização revela-se o conhecimento (letra C). “Através da atividade, que é sempre movimento que é afetado por S e pelo C emergente, os indivíduos podem agora refinar, ajustar, expandir e transformar o saber S, dando como resultado um novo saber S” (RADFORD, 2021, p. 81).

Figura 2 – Relação dialética entre o saber e o conhecimento




Fonte: Radford (2021).

O "conhecimento como a materialização do saber é sempre uma forma singular (única) desenvolvida. A atualização não é capaz de capturar o saber em sua totalidade" (RADFORD, 2021, p. 83). Nesta perspectiva, envolve a aprendizagem que se divide em dois eixos: i) saber e conhecimento; e o ii) ser e tornar-se. Em i) temos os processos de objetivação, enquanto em ii) os processos de subjetivação (RADFORD, 2020, 2021).

O saber faz parte da nossa cultura e isso implica em encontros frequentes nas mais diversas circunstâncias da vida. Os encontros com os sistemas de pensamento histórico-culturais recebem uma denominação específica na TO, *objetivação* (RADFORD, 2017, 2020, 2021). "Como tal encontro não ocorre de repente, a objetivação é antes um processo" (RADFORD, 2021, p. 100).

Seguindo com a argumentação em torno da objetivação de modo a contemplar três aspectos: (1) o *indivíduo* envolvido com a aprendizagem; (2) o que deve ser aprendido (ou seja, o *saber*); e (3) o significado de objetivação. Estes três aspectos diferem das concepções teóricas que centralizam o processo de aprendizagem nos estudantes. Uma vez que a "[...] objetivação é um encontro; mas não é um simples encontro de um sujeito pronto com um saber histórico-cultural. O encontro é, acima de tudo, a constituição e a transformação do sujeito aprendiz como resultado desse encontro" (RADFORD, 2021, p. 102).

Em outras palavras, a objetivação é encontro com os processos históricos e culturais, os quais são carregados de significados, podendo acontecer por intermédio dos pensamentos e das ações corporais. Já a subjetivação relaciona-se com os componentes emocionais e afetivos destacando que é uma parte crucial na aprendizagem, considerando que todos nós estamos em constantes transformações do ser (RADFORD, 2020, 2021; SILVA, 2021). "É uma capacidade generativa geral, cultural, dinâmica (isto é, sempre em mudança) constituída de concepções culturais de viver no mundo: formas de conceber-se e de ser concebido; formas de se posicionar e de ser posicionado” (RADFORD, 2021, p. 245).

Por exemplo, os saberes algébricos já existem há alguns anos na nossa cultura, mas para os estudantes esta é apenas uma capacidade geradora, por enquanto pura potencialidade. Podendo se tornar parte do repertório de ação e reflexão dos estudantes depois de determinado período de aprendizagem, incluindo a intensa prática e observação, assim conseguindo revelar o pensamento algébrico. Mas para que isto ocorra seguindo os preceitos da TO, a ação e a percepção têm que ser colocados em movimento, por intermédio de uma atividade no contexto da sala de aula (RADFORD, 2021). Destacando que a intensa prática não está atrelada a mecanização do processo com o intuito de propor inúmeros exercícios envolvendo o mesmo conteúdo, envolve-se em outros aspectos que serão pontuados mais adiante.

Ainda de acordo com o Radford (2011, p.112), a

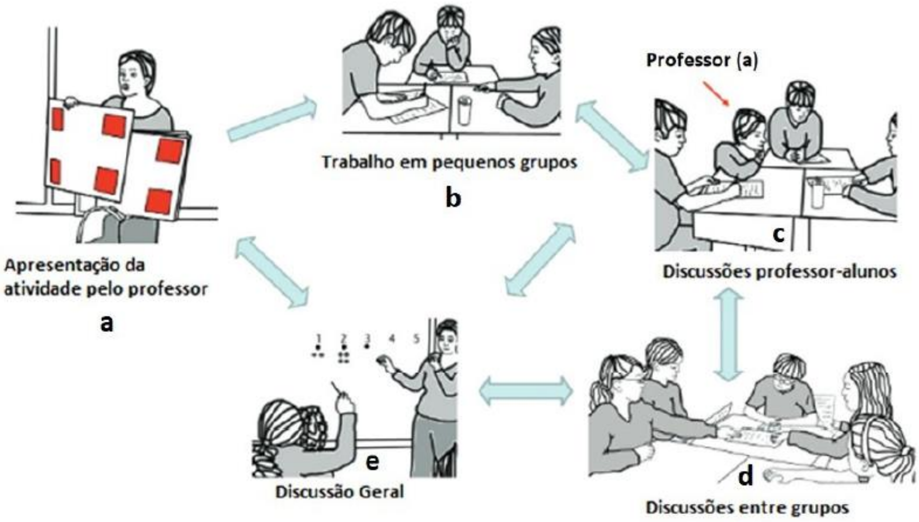
> aprendizagem/objetivação é um processo vinculado à atividade. Ele ocorre dentro do espaço criado pela atividade de ensino-aprendizagem que transforma o saber em conhecimento. E é dentro dos limites e possibilidades da maneira como, nesta atividade, o saber aparece como algo sensível, que a aprendizagem acontece.

Por essa circunstância, a atividade é vista como o elemento-chave da TO; porém ela dispõe de uma denominação ímpar – *labor conjunto* justamente para evitar equívocos com outras discussões teóricas. No *labor conjunto* não existe uma distinção entre o ensino e a aprendizagem na sala de aula, pois ocorre de forma singular e é desenvolvido por professor(es)-estudante(s), tendo em vista que eles trabalham ombro a ombro (RADFORD, 2020, 2021).

Acrescentando que isto “[...] implica em uma conceituação diferente da divisão do trabalho na atividade de sala de aula e uma conceituação diferente do professor e dos alunos” (p. 112). Considerando todos estes aspectos os estudantes tornam-se responsáveis no que se diz respeito à elaboração de estratégias, a possibilidade de um envolvimento de forma ativa e criativa, na produção das suas próprias opiniões e reflexões (RADFORD, 2020, 2021).

Nesta perspectiva Radford (2020, 2021) ilustra cinco momentos do *labor conjunto*: apresentação da atividade pela professora, trabalhos em pequenos grupos, discussões professora-estudante e a discussão geral (Figura 3). As setas bidirecionais indicam que em algumas situações podem ser realizadas retomadas de algum e/ou alguns momentos caso o professor ache necessário.

Figura 3 – A atividade e alguns de seus “momentos”




Fonte: Radford (2021).

Ressaltando que nem todas as atividades desenvolvidas no contexto da sala de aula podem ser vistas como instâncias do *labor conjunto.* Porque ele não se reduz a ações coordenadas ou então uma simples atividade realizada por grupos, vai além disto, assim o professor e os estudantes trabalham juntos sem necessariamente está fazendo a mesma coisa e se comprometem de forma responsável uns com os outros. Fazendo com que os componentes intelectuais, emocionais, afetivos, éticos e materiais sejam incorporados e surjam nas aulas de matemática (RADFORD, 2017, 2020, 2021), ou seja, os processos de objetivação e subjetivação.

Visualizando o *labor conjunto* entre a relação dialética do saber que se materializando em conhecimento e do ser em constantes transformações, neste contexto se apresenta dois eixos relacionados a esta argumentação: 1) o eixo das formas de colaboração humana (a interação uns com os outros, o relacionamento entre eles) trazendo para a discussão a responsabilidade, poder e a autonomia; e 2) o eixo das formas de produção de saberes e o eixo da colaboração humana (o saber que circula e que é produzido no contexto da sala de aula), neste momento a veracidade do saber são validadas ou contrariadas (RADFORD, 2020, 2021).

O segundo eixo possui uma designação específica na TO – *ética comunitária,* que por sua vez compreende três elementos: a) responsabilidade – o compromisso incondicional considerando a relação com os outros; b) compromisso – fazer o possível para trabalhar lado a lado com os colegas cooperando para o desenvolvimento de uma obra comum; e o c) cuidado com o outro – é uma forma de estar com o outro e de ser-para-o-outro, ou seja, moldando e orientando as relações com o outro (RADFORD, 2020, 2021). Em síntese, toda esta argumentação teórica servirá para identificação dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva TO a partir da resolução de duas tarefas de valor omisso.

## 2.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO NA PERSPECTIVA DA TO

De antemão, Radford (2009) estabelece uma descrição em torno do pensamento considerando alguns aspectos da perspectiva histórico-cultural e do materialismo dialético destacando o saber, o conhecimento e a aprendizagem especificados anteriormente; na sequência ele expõe a caracterização do pensamento algébrico na TO. Diante disso, seguimos esta ordem para evidenciar e apresentar os pressupostos teórico metodológicos da TO com o propósito de grifar todos os aspectos utilizados nesta pesquisa.

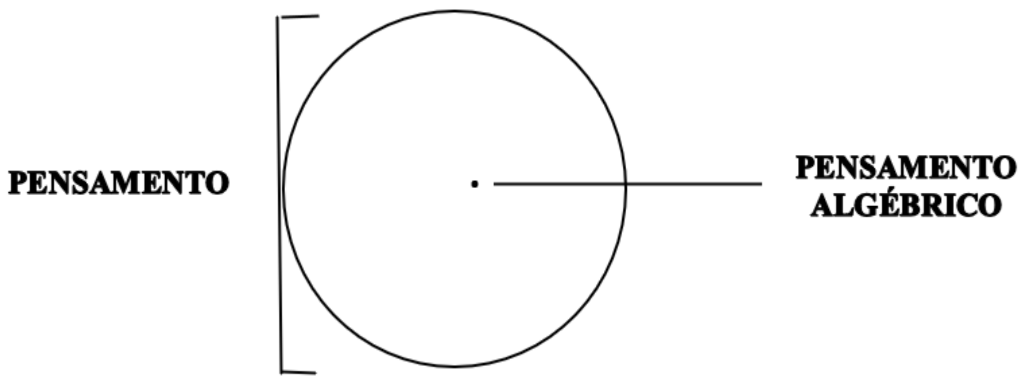
A priori Radford (2009) discorda dos pesquisadores da Educação Matemática recorrentes da década de 90, pois estes acreditavam que o pensamento era fundamentado apenas na atividade puramente mental - distinguindo as idealizações internas e externas. Com isso o teórico reconhece que “[...] *o pensamento é considerado sensorial é uma atividade reflexiva mediada por sinais incorporados na corporalidade de ações, signos e artefatos*” (p. 36, tradução nossa). Nos próximos parágrafos especificamos os aspectos que fazem parte desta discussão, no caso os signos e os artefatos.

Com base nos estudos de Lev Vygotsky, os pesquisadores Radford e Sabena (2015) esclarecem o conceito de signo. Para eles signo “[...] é um meio de auxiliar na organização do nosso comportamento. Os signos são vistos como ferramentas de reflexão que permitem aos indivíduos planejar ações” (p. 162, tradução nossa). Ou seja, compreendem o sentido mais amplo da linguagem verbal e não verbal, os símbolos matemáticos, gestos e entre outros; ao mesmo tempo, se enfatiza que eles não são ponderados com indicadores da atividade mental (RADFORD, 2009).

Enquanto os artefatos condizem com “[...] a capacidade em potencial de fazer alguma coisa, podendo ser natural ou adquirida” (XIMENES; GOBARA, 2020, p. 202), ou seja, estão envolvidos nas frequentes transformações a partir do contexto social. Exemplificando, um instrumento musical tem a potencialidade de produzir um bom ou um péssimo som. De forma breve, os signos e artefatos são vistos como parte integrante do pensamento e da atividade humana, também são vistos como elementos preciosos dentro da perspectiva histórico-cultural da TO, uma vez que eles circulam uma atividade de ensino-aprendizagem (RADFORD; SABENA, 2015; RADFORD, 2009, 2020, 2021).

Embora o pensamento possa ser desenvolvido por cada um de nós de modo singular, este inclui os elementos culturais, as diferentes formas de linguagem, os processos históricos, os signos e artefatos que foram moldados ao longo dos anos pela sociedade. Em outras palavras, é algo mais abrangente nessa perspectiva, enquanto o pensamento algébrico é mais específico dentro desta discussão, porém, compreendendo os mesmos aspectos. Considerando toda esta argumentação, agora vamos partir para o momento de visualização de todos estes conceitos, sendo assim, o pensamento pode ser representado por um círculo qualquer, já o pensamento algébrico é representado por um ponto dentro do círculo (Figura 4).

Figura 4 – Ilustração do pensamento e pensamento algébrico




Fonte: elaborado pela autora (2022).

O pensamento algébrico "[...] é uma forma particular de refletir matematicamente" (RADFORD, 2006, p. 2, tradução nossa). Ou seja, ele não surge de modo espontâneo, uma vez que "[...] é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual" (RADFORD, 2011, p. 319, tradução nossa); envolvidos nos processos históricos e culturais da humanidade. Outro aspecto, por muitos anos o pensar algebricamente esteve associado apenas ao uso de letras, no entanto, nos últimos anos observamos mudanças nesse âmbito, principalmente no que diz respeito à discussão das primeiras etapas escolares.

Com a intenção de caracterizar o pensamento algébrico, Radford (2006, 2010) apresenta três elementos[13] (ou vetores) interligados: (i) indeterminação - envolve os *objetos algébricos*, no caso: as incógnitas, as variáveis e os parâmetros; oposto a determinação numérica. Exemplificando: não existe justificativa para a substituição de um determinado número por ele próprio. No entanto, podemos substituir por objetos algébricos de modo a prevalecer certos

[13]Especificamos cada um destes elementos nos próximos tópicos.

requisitos; (ii) denotação – modo particular de designar *objetos algébricos* sem necessariamente recorrer ao simbolismo alfanumérico. Inclusive, Euclides conseguiu pensar sem recorrer ao simbolismo alfanumérico; (iii) analiticidade – consiste no tratamento do indeterminado de forma *analítica*. De modo a operar com o desconhecido como se fosse conhecido. Ainda sobre a analiticidade Vergel (2014 p. 73, tradução nossa) descreve que,

> [...] estão ligados entre si num esquema ou regra que permite aos estudantes lidar com qualquer figura da sequência, qualquer que seja o seu tamanho. É uma regra exemplificada em casos particulares (por exemplo, 12 mais 12, mais 1), em que os números são tratados não como meros números, mas como constituintes de algo mais geral (p. 73, tradução nossa).

Estes elementos caracterizadores fazem parte da distinção do pensamento algébrico para o pensamento aritmético. Contudo, (i) e (ii) fazem parte do pensamento aritmético e algébrico, isso significa que o último elemento é o principal responsável pela distinção entre o pensamento algébrico e o pensamento aritmético (RADFORD, 2006, 2009, 2010, 2021) e (VERGEL, 2014). Porque a distinção entre elas “[...] não pode ser dada em termos de notação, como muitas vezes se pensa” (VERGEL, 2021, p. 81). Porém, agora apresentamos uma breve contextualização acerca da generalização algébrica e aritmética considerando que na atividade de ensino-aprendizagem os estudantes revelam evidências da generalização com os respectivos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na Teoria da Objetivação.

### 2.2.1 Generalização algébrica e aritmética

Sabe-se que a generalização é uma das formas de introduzir a álgebra desde os primeiros anos escolares por intermédio de sequência (numéricas ou não numéricas), estabelecendo critérios matemáticos que prevalecem algumas relações com a de interdependência entre as grandezas nas diversas situações, assim como elaborar e fazer uso dos inúmeros modos de representar e simbolizar a resolução de um problemas entre outros (BRASIL, 2018). Uma vez que ela permite com que os estudantes se aproximem de “[...] situações de variação que são uma parte substancial do desenvolvimento do pensamento algébrico” (VERGEL, 2021, p. 83).

No entanto, não são todas as generalizações que pertencem ao campo algébrico, ou seja, existem generalizações aritméticas (RADFORD, 2010, 2013). A partir disso, surge a ruptura entre o pensamento algébrico e o pensamento aritmético respaldada pelos elementos caracterizadores; ao mesmo tempo, imergimos no seguinte questionamento: no contexto dos anos iniciais do EF como podemos diferenciá-las?

Na generalização aritmética os estudantes buscam elucidar uma tarefa realizando inúmeros testes (tentativa e erro) até determinar o valor correto. Por exemplo, ao propor uma tarefa que envolve um determinado número desconhecido e alguns casos os estudantes recorrem ao método de substituição, no qual vão atribuindo valores até tornar-se a igualdade verdadeira. Inclusive surgindo argumentações como essas: “encontramos por acidente” (RADFORD, 2018); “fui fazendo tudo ao contrário” (GOMES, 2020, p. 114); e entre outras.

Esta ideia satisfaz o (i) e o (ii) dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, mas não satisfaz o (iii), pois não foi um processo dedutível. Embora os estudantes tenham a possibilidade de resolver a tarefa proposta fazendo uso do método de tentativa e erro, observa-se apenas a recorrência de conceitos aritméticos, ou seja, uma generalização aritmética devido à ênfase dada à parte operatória. Outro aspecto é que o uso do simbolismo alfanumérico não garante a mobilização do pensamento algébrico, já que historicamente alguns matemáticos conseguiram pensar algebricamente sem utilizá-lo.

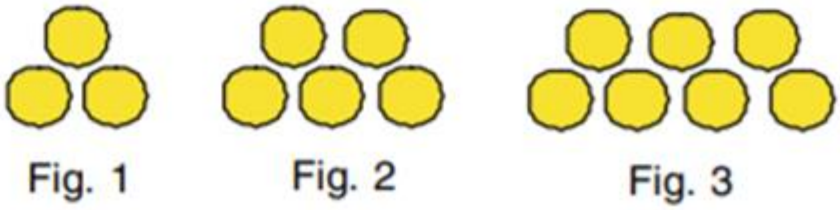
Na generalização algébrica “os estudantes têm que recorrer a uma ideia verdadeiramente algébrica: operar *dedutivamente* sobre as incógnitas” (RADFORD, 2021, p. 176). Assim a analiticidade se destaca de modo a conduzi-los a trabalhar com quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, e por consequência a dedução de uma fórmula (ou mensagem) centrada nos três pontos a seguir.

> A tomada de consciência de uma *propriedade comum* que se nota a partir de um trabalho no campo fenomenológico[14] de observação sobre certas termos particulares (por exemplo, $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$);
> a generalização dessa propriedade a todos os termos subsequentes da sequência ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, ...$);
> a capacidade de utilizar essa propriedade comum para *obter uma expressão direta* que permita calcular o valor de qualquer termo da sequência (RADFORD, 2013, p. 6, tradução nossa).

Com a pretensão de esclarecer os três pontos da generalização algébrica, apresentamos a seguir o estudo de Radford (2007). Nele, os estudantes tinham que continuar a sequência até a figura 5 (ilustrado pela imagem abaixo), na sequência determinar a quantidade de círculos das figuras 25 e 100, e por último escrever uma fórmula (ou mensagem) especificando o número de círculos de uma figura n.

Figura 5 – Sequência

[14] Um problema que envolve, entre outros, intuição, atenção, intenção e sensibilidade (RADFORD, 2013).




Fonte: Radford (2007).

Radford (2021) desenvolveu outro estudo utilizando a sequência acima, a princípio solicitando que os estudantes desenhassem as fig. 4 e 5. No entanto, eles se preocuparam apenas com a quantidade de círculos em cada figura (por exemplo fig. 1 – três círculos; fig. 2 – cinco círculos; fig. 3 – sete círculos e assim por diante), deste modo, ignoraram totalmente a estruturas das figuras (fig. 1 – um círculo na linha superior e dois na linha inferior; fig. 2 – dois na linha superior e três na linha inferior e etc.) e o acréscimos de dois círculos em cada uma delas.

Assim, para descobrir a quantidade de círculos das figuras 25 e 100 eles devem reconhecer a *relação de recorrência* proporcionada pela figura e a quantidade de círculos. Caso eles não reconheçam, dificilmente as crianças vão descobrir os termos remotos supracitados; fazendo com que eles desenvolvam a adição repetida de parcelas, ou seja, proporcionando uma generalização aritmética.

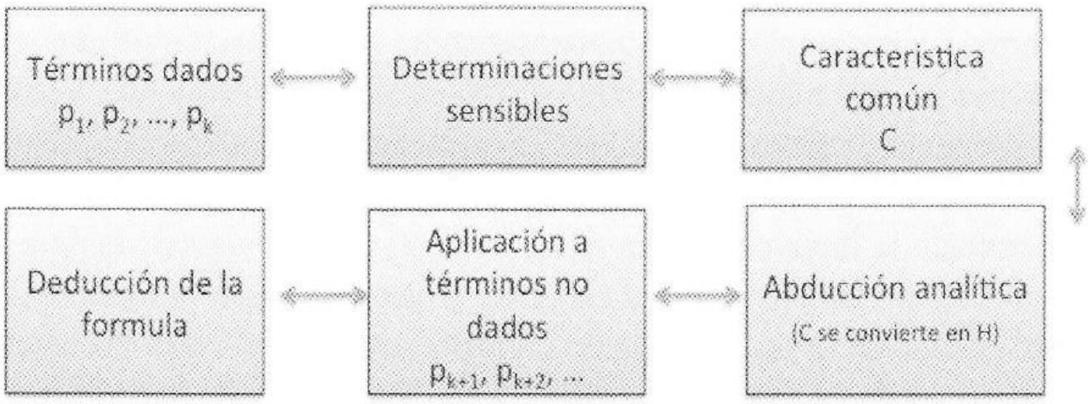
Retornando suscintamente para a discussão de generalização algébrica. Inicialmente conseguem determinar alguns termos da sequência descrevendo a propriedade comum, ao mesmo tempo "[...] este passo exige que se faça uma escolha entre o que conta como mesmo e o diferente" (RADFORD, 2007, p. 2, tradução nossa). Fazendo com que eles observem a (figura 5 - sequência) de outra forma, a título de exemplo identificando o acréscimo de dois círculos por figura, um na linha superior e o outro na linha inferior e assim por diante. Favorecendo o surgimento das determinações sensíveis que são oriundas da *relação de recorrência*, nas quais podem serem vistas de dois modos diferentes (RADFORD, 2021): observação das figuras seguintes (fig. 1 - três círculos, fig. 2 - cinco círculos, fig. 3 - nove círculos e etc) ou então notar as linhas de cada figura (por exemplo fig. 1- um círculo na superior e dois da inferior e assim por diante), mas não necessariamente precisam uso as palavras superior e inferior.

"No primeiro caso, a atenção está voltada para as quantidades; no segundo, a atenção está voltada para a forma" (RADFORD, 2021, p. 179) das figuras. Seguindo para algo mais específico, como a descrição do número de cada imagem, ou seja, a *característica comum* - adicionando o número da figura duas vezes e depois adicionando um. A título de exemplo na fig. 1: (1 + 1) + 1; na fig. 2: (2 + 2) + 1; na fig. 3: (3 + 3) + 1; na fig. 4: (4 + 4) + 1, na fig. 5: (5

+ 5) + 1. Se neste momento os estudantes utilizam o seguinte discurso a “cada figura adicionamos dois círculos”, “mais dois círculos” (RADFORD, 2021) e entre outras contextos que se assemelham, eles alcançaram uma generalização aritmética. Fazendo com que os estudantes não consigam calcular o número de círculo de qualquer figura.

Quando a *característica comum* é generalizada para outras figuras da sequência, passa a receber uma nova designação no caso *abdução (abduction)*. A abdução condiz com a fórmula, mas para isto os estudantes não podem realizar o método de tentativa e erro. Em outras palavras, a fórmula precisa ter passado por um processo de dedução de modo a submetê-la ao número significativo de testes, considerando alguns termos não dados. Porém, destacamos que parar que seja uma generalização algébrica tem que haver processo que se inicia na observação, passando pela *relação de recorrência, característica comum* e por último *abdução* de forma analítica (RADFORD, 2021).

Figura 6 – Estrutura da generalização de algébrica de sequência




Fonte: Radford (2013).

Nessa perspectiva, a seguir apresentamos, de forma mais detalhada, os elementos caracterizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e a analiticidade) que fazem parte do processo de generalização algébrica.

## 2.2.2 Indeterminação

A indeterminação é um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, responsável pela incorporação de variáveis, incógnitas e parâmetros em situações matemáticas (RADFORD, 2013, 2014). Por muitos anos, educadores e pesquisadores acreditaram que o uso do simbolismo alfanumérico (variáveis, incógnitas e parâmetros) era o ápice do pensamento algébrico e essa ideia reduziu quase todas as chances de as crianças revelarem o pensamento algébrico desde as primeiras etapas escolares (RADFORD, 2018).

No entanto, na perspectiva da TO o indeterminado não compreende apenas o simbolismo alfanumérico, mas, sim, o operar com o desconhecido como se fosse conhecido, ou seja, atribuindo significado. De acordo com Radford (2018, p. 8, tradução nossa):

> naturalmente, o simbolismo alfanumérico constitui um poderoso sistema semiótico. Com uma sintaxe muito precisa e um sistema extremamente condensado de significados, o simbolismo alfanumérico oferece uma enorme variedade de possibilidades para efetuar cálculos de forma eficiente - cálculos que podem ser difíceis, se não impossíveis, de efetuar com outros sistemas semióticos (gestos, por exemplo, ou mesmo linguagem natural).

No entanto, com a introdução algébrica mais cedo considera-se que os estudantes podem pensar algebricamente sem fazer uso do simbolismo alfanumérico, visto que a TO valoriza as múltiplas formas de pensamento e linguagem (GOMES, 2020). Em outras palavras, as duplas podem recorrer a métodos não tradicionais para representar quantidades indeterminadas e as respectivas operações. Dado que as crianças dos anos iniciais do EF não tiveram contato com o simbolismo alfanumérico, por isso, podem surgir diferentes modos para representar e significar o indeterminado.

Esse elemento caracterizador também faz parte do pensamento aritmético, no entanto nos valemos do entendimento do tratamento do desconhecido, como se fosse conhecido por meio do raciocínio analítico. “Quando nos referimos apenas ao indeterminado, este pode apresentar um caráter aritmético ao ser solucionado em equações por meio de tentativa e erro” (GOMES, 2020, p. 90), o discernimento consiste no ajuste com o indeterminado. Porém, ele vai além de solucionar problemas que envolvem incógnitas, variáveis, parâmetros de modo a compreender o senso do desconhecido em um determinado problema, como se fosse parte conhecida (RADFORD, 2013).

Com a intenção de facilitar a compreensão acerca deste elemento caracterizador apresentamos um relato da tese de Gomes (2020). No momento da análise das filmagens a pesquisadora destaca a explicação do estudante CC[15], o qual o *indeterminado* faz parte de seu discurso, quando relata: “fui fazendo tudo ao contrário” (GOMES, 2020, p. 112). Nesse trecho CC deixa explícito que o *fazer ao contrário* consiste no uso das operações inversas, tais como a multiplicação-divisão e a adição-subtração (Quadro 2).

[15] Nome fictício da participante do estudo.

Quadro 2 – Síntese das estratégias utilizadas pelo estudante CC

| Adição-subtração | Multiplicação-divisão |
|---|---|
| a + b = c → c – b = a<br>ou<br>c – a = b | a x b = c → = a<br>ou<br>= b |

Fonte: Adaptado de Gomes (2020).

E na perspectiva das operações inversas CC "[...] separou o desconhecido no primeiro membro da expressão e fez operações apenas no segundo membro para descobrir o valor do desconhecido, ou seja, ao fazer (? = 2590: 2 – 1125)" (GOMES, 2020, p. 113). É possível perceber que ele utilizou o sinal de igual apenas como o indicador da operação a ser efetuada durante a resolução da tarefa, ou seja, o ato de isolar o termo desconhecido de um lado e realizar operações inversas não condiz com premissa de operar com o indeterminado como se fosse conhecido, por isso, CC não mobilizou o pensamento algébrico na resolução desta tarefa.

Em síntese, para se identificar os elementos caracterizadores o pesquisador deve estar atento aos pequenos detalhes, como os trechos da fala que trazem algumas informações acerca do uso ou não do método de tentativa e erro.

### 2.2.3 Denotação

De acordo com Radford (2009, 2010, 2013, 2014) a denotação é um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico. E neste elemento observamos a necessidade da análise multimodal justamente por envolver-se nas mais diversas modalidades sensoriais, sendo elas: táteis, perceptivas, cinestésicas, de modo a se converter em componente essencial dos processos cognitivos (ARZARELLO, 2006). Podendo ser utilizados pelos estudantes através de gestos, símbolos matemáticos, a linguagem natural ou até mesmo a combinação destes com o intuito de nomear ou simbolizar o indeterminado (RADFORD, 2021).

Considerando que no processo de ensino aprendizagem o pensamento extrapola as atividades sintáticas e mentais, sendo mediado por componentes externos e corporais estabelecidos por meio das múltiplas formas (RADFORD, 2010). Em outras palavras, valorizando "[...] o papel das diferentes formas de manifestação da linguagem e aborda o pensamento como uma unidade dinâmica" (GOMES, 2020, p. 91). Com isto assume uma postura mediadora na solução dos problemas como é pontuado por Radford (2005, p. 143, tradução nossa), uma vez que:

> [...] fazem parte desses meios que permitem aos estudantes objetivar o saber – isto é, tomar consciência de aspectos conceituais que, por sua própria generalidade, não pode ser plenamente indicada no domínio do concreto. Além disso, os gestos, eles incluem sinais, gráficos, fórmulas, tabelas, desenhos, palavras, calculadoras, regras, e assim por diante. [...] são importantes porque, em ambientes de aprendizagem, cumprem uma função importante: são elementos importantes para os estudantes no processo de objetivação do saber. Os gestos ajudam os estudantes a tomar suas intenções aparentes, a perceber relações matemáticas e tomar consciência dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos.

De forma breve, os gestos fazem parte dos processos históricos e culturais da humanidade e se fazem presentes em vários contextos, seja falando sozinho, ao celular, estabelecendo um diálogo com amigos, familiares e entre outras situações. E em algumas destas situações não sabemos o porquê daquele gesto naquela determinada situação, entretanto se faz um recorte a esta discussão aos gestos no contexto das aulas de matemática (RADFORD, 2005).

Nesta perspectiva, os gestos podem ser vistos como signos algébricos tão genuínos como as incógnitas, variáveis e parâmetros. No entanto, isto não significa que eles são iguais, muito menos podem ser substituídos um pelo outro. O que os tornam especiais, únicos e insubstituíveis é a forma de significar (RADFORD, 2010). Também não podemos considerá-los apenas como ilustração dos objetos durante as discussões verbais (VERGEL, 2021).

Algumas coisas podemos atribuir significado por meio de gestos, já outras não é possível. Em outras palavras, os meios semióticos compõem o processo de objetivação devido à produção de significado aos objetos algébricos (VERGEL, 2014). Considerando que os "[...] recursos semióticos como gestos, movimento, ritmicidade, linguagem natural e atividade perceptiva são consubstanciais à manifestação e constituição do pensamento algébrico inicial" (VERGEL, 2015, tradução nossa).

Exemplificando tal situação apresentamos um recorte do estudo de Radford (2005). Foi proposta uma tarefa na qual duas crianças caminham em direções opostas, e a partir disso foi solicitado a elaboração de um gráfico para descrever a relação entre o tempo percorrido e a distância entre elas. Depois de muitas discussões entre os estudantes, um deles descreve que o gráfico deve ser algo parecido com uma curva decrescente, no entanto alguns detalhes não estão explícitos por ele (RADFORD, 2005).

E com o propósito de detalhar a solução da tarefa ele recorre a uma série de argumentos e gestos para objetivar a relação entre distância e tempo, Ron faz alguns desenhos na folha de atividade, porém surgem as limitações do papel e ele recorre às mãos, deslocando-as em direções opostas para relatar que a distância diminuiu, na sequência um gesto com a mão direita na vertical para descrever a relação *tempo x distância*. Porém, a colega Claudine não estava convencida da solução de Ron, o que o fez recomeçá-lo novamente desta vez utilizando um discurso mais coerente e coordenado de argumentos e gestos (RADFORD, 2005). Relatando a importância dos gestos no contexto da sala de matemática entre professor e estudantes.

### 2.2.4 Analiticidade

A analiticidade é a responsável pela distinção entre o pensamento algébrico e o pensamento. Este elemento caracterizador se envolve em dois vetores: “o raciocínio (I) inclui as grandezas determinadas e indeterminadas, e o (II) operar dedutivamente. [...] significa que ele estabelece *relações* entre estes dois tipos de grandezas. Isso também significa que ele trata grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas” (RADFORD, 2021). Mas antes de detalhar o elemento caracterizador faz-se necessário compreender acerca do segundo vetor, se questionando – o que é dedução no contexto dos anos iniciais?

No dicionário informal o significado de dedução condiz com: 1) ação de deduzir; conclusão, 2) enumeração minuciosa de fatos e argumentos. O significado corrobora com a discussão de Gomes (2020, p. 86) que segundo ele a dedução “[...] é uma estratégia de pensar a partir de premissas, desta forma, não faz uso da “tentativa e erro”, pois se fundamenta em uma sequência ou ordem de certezas”. Neste contexto, pode-se dizer que a premissa dispõem de uma sequência ou ordem certezas de modo a conduzir os estudantes até a conclusão. Por exemplo, se liga o que se conhece ao que é desconhecido, ou seja, permitindo a objetivação de novos saberes algébricos por parte dos estudantes.

Considerando a(s) premissa(s) no processo de dedução, partindo de algo específico e/ou particular para algo mais geral, exemplificando: i) se A é igual a B (fato geral ou premissa maior); ii) existe um X que é igual a A (caso particular ou premissa menor); iii) logo, este X é igual a B (conclusão). Quando os estudantes utilizam “[...] procedimentos intuitivos, sem um argumento lógico que justifique suas ações por meio de premissas, apenas mediado pela espontaneidade e instinto, não utiliza um processo de raciocínio dedutivo, visto que não é baseado em um pensamento analítico e sim aritmético” (GOMES, 2020, p. 86).

Com relação ao primeiro vetor, o caráter operatório da indeterminação não é um aspecto dominante, considerando que as crianças estão na fase da familiarização algébrica e não é necessário a imposição de termos desconhecidos, porém faz-se necessário a convivência com tarefas que envolvem o *sentido do indeterminado.* Por exemplo, as tarefas que envolvem a escrita de uma mensagem convidando-os a pensar no indeterminado de forma analítica (VERGEL, 2015).

E, para exemplificá-la, apresentamos uma das tarefas propostas por Vergel (2015) em sua pesquisa de doutorado (figura 7).

Figura 7 – Tarefa que envolve uma sequência


Fonte: Vergel (2015).

Com base na figura acima os estudantes tinham que calcular o número de círculos da fig. 7, sem construí-la. Na sequência, escrever uma mensagem a um colega de classe, que não participou da aula, na qual deveria explicar com clareza e em detalhes como proceder para calcular o número de círculos na figura 1000.

Assim, o quadro 3 foi elaborada com base nas mensagens escritas pelos estudantes Jimmy Stiven, Luis Felipe e Sunner. Ao mesmo tempo, eles apontaram, tocaram e deslizaram sobre as figuras 1, 2 e 3, explicando como calcular o número de círculos de uma figura qualquer, ou seja, combinando palavras a gestos (VERGEL, 2014, 2015).

Quadro 3 – Indícios da analiticidade na resolução dos estudantes

| ESTUDANTES | CARÁTER ANALÍTICO OU OPERATÓRIO DA INDETERMINAÇÃO |
|---|---|
| Jimmy Stiven | “você deve pegar esse número e multiplicá-lo por dois e o resultado que você obtém deve colocar esta torre sobre ela, por exemplo” |
| Luis Felipe | “à figura eu acrescento o mesmo número da figura e ao resultado que me dá, eu acrescento três” |

Fonte: Adaptado de Vergel (2015).

No caso de Jimmy Stiven a indeterminação surge por meio da frase: “o número que está dentro do cartão”. Observamos a denotação por meio dos recursos linguísticos utilizados, e o caráter operatório: “você tem que pegar esse número e multiplicá-lo por dois e o resultado que você obtém deve colocar esta torre de exemplo” (VERGEL, 2014, 2015, p. 210). Já Luis Felipe designa o indeterminado por meio da expressão “figura”, tratando de forma analítica: “à figura eu acrescento o mesmo número da figura e ao resultado que me dá, eu acrescento três” (VERGEL, 2014, p. 151). Em síntese, percebemos que os dois vetores da analiticidade viabilizam a descoberta de um esquema geral, no qual tratamos com qualquer figura de uma sequência, independentemente do tamanho dela.

O trabalho didático com a álgebra não se limita apenas à inclusão do termo desconhecido em uma expressão matemática, com a representação por meio de símbolos ou letras. Considerando que o aparecimento do desconhecido não garante o pensar algebricamente (GOMES, 2020). Nossa finalidade não consiste em estabelecer a fronteira entre pensamento algébrico e aritmética, ao invés disso, queremos observar os indícios ou traços do pensamento algébrico que emergem por meio das tarefas de valor omisso em estudantes do 5° do EF, e a partir disso, percebemos a influência da analiticidade nesse processo.

# 3 PROPORCIONALIDADE

Alguns questionamentos são pertinentes para o início deste capítulo: o que é uma grandeza? Por que proporcionalidade? Quais as principais diferenças entre diretamente ou inversamente proporcionais? Existe algum tipo de pensamento que é caracterizado pelas pesquisas que envolvem a proporção, se sim, quem é ele? Nesse sentido, buscamos encontrar respostas para essas inquietações na literatura.

As grandezas são utilizadas com frequência para mensurar e comparar medidas, como, por exemplo, na física: massa, comprimento, velocidade e tempo, as quais são empregadas diariamente em atividades simples. Enfatizando que não se pode equiparar grandezas de natureza diferente, a título de exemplo: um litro com um quilograma (MORAIS; TELES, 2014). São classificadas como diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Ex.:

I. Em uma panificadora, desejamos comprar pães que variam de acordo com a quantidade, tendo como exemplo: 3 pães por 1 real, 6 pães por 2 reais, e assim sucessivamente, com isso notamos que ao duplicar a quantidade de pães, duplicamos o preço.

II. Em uma viagem normal de ônibus da capital João Pessoa - PB a Recife - PE, o motorista gasta em média 2 horas, com uma velocidade constante de 80 km/h, no entanto nesse dia a estrada estava livre, sem trânsito ou caminhões que dificultam o acesso. A partir disso, o motorista conseguiu realizar o trajeto com a velocidade de 100 km/h, quanto tempo ele gastou para chegar no seu destino?

Em (I) temos que a quantidade de pães e o preço são grandezas diretamente proporcionais, enquanto em (II) observamos que com o aumento da velocidade ocorre uma diminuição no tempo da viagem, aspecto das grandezas inversamente proporcionais. Posto que esses conceitos são vistos como essenciais e de difícil aprendizagem pelos estudantes, faz-se necessário que os professores tenham conhecimento sobre o maior número possível de estratégias que podem ser utilizadas por eles, assim como as dificuldades habituais, para serem realizadas transformações no ensino deste (OLIVEIRA, 2009). Existem várias situações em que esses conceitos podem ser aplicados, como na:

> [...] agronomia, ao calcular o espaço a ser cultivado por diferentes tipos de lavoura; na arquitetura, na elaboração de projetos compatíveis com os diferentes ambientes; no direito, no cálculo proporcional de bens nas partilhas de heranças; na engenharia das diferentes áreas, na elaboração de diferentes tipos de plantas e protótipos (VIEIRA, 2020, p. 21).

A proporção consiste na representação da igualdade de duas razões (CRESPO, 2009), isto significa que a representação dos valores não é igual, no entanto, são divididas igualmente, tendo como exemplo:

$$\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

Nesse sentido, temos que: $\frac{12}{3}$ e $\frac{16}{4}$, ou seja, as duas frações dispõem de uma razão em comum. De acordo com a definição de Crespo (2009, p. 7) ao afirmar que “dados em uma certa ordem, quatro números (a, b, c e d) diferentes de zero, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão entre eles, os dois primeiros (a e b) é igual à razão entre os dois últimos (c e d)”.

Simbolicamente,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por consequência, temos a propriedade fundamental, permitindo o produto dos extremos (*a e d*), pelos meios (*b e c*) - em outras palavras, recorrente do vocabulário popular: o produto cruzado - resultando em:

$$a.b = c.d$$

No entanto, corrobora-se com o pensamento de Crespo (2009) e Porto (2015) ao discutirem que esse conceito não se reduz a definição e em seguida aplicação de fórmula; e isso não deveria acontecer em nenhuma área do conhecimento, porque estimula a acomodação dos estudantes a um ensino baseado em observação e técnicas reprodutivas, tendo como consequência a não mobilização do raciocínio.

Nesse contexto, Garcez (2015) traz o relato de uma professora atuante da Educação Básica, que encara inúmeros obstáculos no ensino de proporção, em especial a mecanização no uso apenas da regra de três. É válido ressaltar que,

> [...] na maioria das vezes as escolas têm limitado o ensino do algoritmo da regra de três como a forma de resolução dos problemas que envolvem proporcionalidade, o que transparece a ideia de que todos os problemas que envolvem proporcionalidade devem ser resolvidos utilizando tal algoritmo (PORTO, 2015, p. 39).

Por isso, por meio de pesquisas, formação de professores, ou qualquer outro contato com o corpo docente, deve-se enfatizar que o ensino e a aprendizagem de proporção não têm limite apenas nisso, tornando-se crucial que: “[...] os estudantes compreendam o conceito [...]

e as relações multiplicativas que se estabelecem na proporcionalidade" (PORTO, 2015, p. 39). Cabe ao professor buscar situações problemáticas e provocantes, no que diz respeito a aguçar as reflexões no contexto da sala de aula, favorecendo estratégias para elucidar as situações.

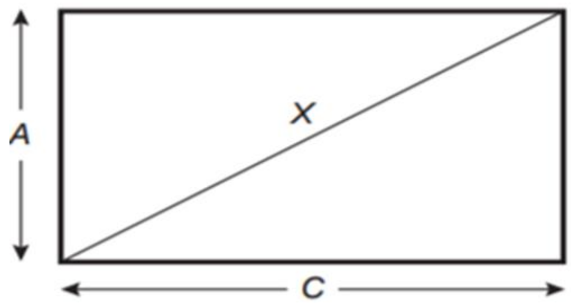
A proporcionalidade está presente nas atividades mais simples do cotidiano, como, por exemplo, na quantidade de ingredientes que se usa para realizar uma simples receita, na quantidade de água para fazer um suco ou vitamina, nos exames de rotina os quais dependem da faixa etária para se verificar a proporção das taxas normais a determinada idade ou não, entre outras situações (COSTA JÚNIOR, 2010; COSTA; ALLEVANTO, 2015; CRESPO, 2009; MACHADO; MARANHÃO, 2011; MENDES; JUSTULIN, 2020; OLIVEIRA, 2009; PORTO, 2015; SOARES, 2016; SPINILLO, 2003; TINOCO *et al*., 2011; VIEIRA, 2020).

Esse conceito é relevante em outras áreas como na Física, Matemática, Química, Biologia, Farmácia, Medicina, etc. É também um tema recorrente em avaliações nacionais, como o ENEM, por meio de questões que envolvem as proporções com essas áreas citadas ou outras, como no exemplo a seguir.

Ex.:

Questão[16] 143 - A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a 2,54 cm. Diferentemente do que muitos imaginam, dizer que a tela de uma TV tem X polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede X polegadas, conforme ilustração (figura 8).

Figura 8 – Representação de uma televisão




Fonte: ENEM (2019).

O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (C) pela altura (A) a proporção 4:3, e precisa calcular o

[16] Retirado do caderno cinza, do 2° dia do Enem 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 25 jan. 2021.

comprimento (C) dessa TV para colocá-la em uma estante para exposição. A tela dessa TV tem medida do comprimento C, em centímetro, igual a

A. 12,00.
B. 16,00.
C. 30,48.
D. 40,64.
E. 50,80

Nesse exemplo, observa-se a proporcionalidade em uma atividade simples do nosso dia a dia, como a medição em polegadas de uma TV. A resolução de problemas dessa natureza é realizada de modo inconsciente sem o estabelecimento ou a percepção da proporção. Concorda-se com a ideia de Porto (2015, p. 38) ao discutir sobre "[...] não ser característico o uso de símbolos matemáticos em grande parte das atividades cotidianas, talvez seja o que dificulta as pessoas perceberem que utilizam a noção de proporcionalidade".

Essa temática possui recorrência no âmbito da Educação matemática nos últimos anos em várias especialidades, e na Psicologia Cognitiva, principalmente, buscando compreender o pensamento proporcional ou raciocínio proporcional.

## 3.1 TIPOS DE PROBLEMAS

De acordo com Lesh, Post e Behr (1988) existem sete tipos de problemas que abrangem os conceitos de proporcionalidade e, em simultâneo, diferenciam cada um deles. Contudo, a seguir trazemos essa caracterização e exemplos para tornar cada um deles mais compreensível.

I. Problema de valor omisso: têm-se três valores e deseja-se determinar o quarto, e isso é possível por meio da relação de equivalência ou razão, exemplificando:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Exemplo[17]: Para fazer uma sopa que pode servir 16 pessoas, são necessários 4 litros de água. Quantos litros de água serão necessários para fazer uma sopa para 8 pessoas? Justifique sua resposta. Spinillo (1993) descreve que os problemas de valor omisso e comparação são frequentes no ensino de proporção, tendo em vista que a principal finalidade é fazer com que os estudantes examinem os problemas apresentados.

[17]Retirado do livro de Dante (2012).

II. Problemas de comparação: dispõe-se de quatro valores, o objetivo é compará-los, verificando qual das sentenças é verdadeira:

$$\frac{A}{B} \text{ e } \frac{C}{D} \rightarrow \ \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ ou } \frac{A}{B} < \frac{C}{D} \text{ ou } \frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$

Exemplo[18]: Para encher um aquário foram necessárias 12 vasilhas com capacidade de 4 L cada uma. Se forem usadas vasilhas com capacidade de 2 L, a quantidade de vasilhas para encher o aquário será maior, menor ou igual? Justifique sua resposta.

III. Problema de transformação:

a) Alteração de raciocínio: dada a equivalência $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

Na sequência, deseja-se modificar adicionando ou diminuindo um ou mais valores de A, B, C e D; a partir dessa imposição a equivalência passa por uma alteração, e a partir disso têm-se uma sentença maior, menor ou igual (<, > ou =).

Exemplo: Um pintor deseja pintar um painel com uma tonalidade rosa; o mesmo deve misturar 2 galões de tinta vermelha com 3 de tinta branca, contudo, o painel é grande, por isso ele misturou 10 galões de vermelho com 15 de branca, obtendo a mesma razão. Ao acrescentar 3 galões de tinta vermelha com 4 de branca, a tonalidade permanecerá, aumentará ou diminuirá? (PORTO, 2015).

b) Transformação para obter uma igualdade: diferente da anterior, temos uma desigualdade do tipo: $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ . Em seguida, faz-se necessário determinar o valor de *x*, a um dos quatro valores A, B, C e D, assim:

$$\frac{(A + x)}{B} = \frac{C}{D}$$

Exemplo: uma distribuidora de combustível mistura gasolina e álcool em quantidades proporcionais a 8 e 5, mas ao realizar uma mistura para uma encomenda o funcionário misturou erroneamente 6.800 litros de gasolina com 4.000 litros de álcool. Quantos litros de álcool devem ser adicionados para corrigir o erro? (PORTO, 2015).

IV. Problemas de valor médio: dados dois valores, por consequência precisa encontrar o terceiro:

---

[18] Adaptado do livro de Silveira (2015).

*a.* Média geométrica: $\frac{A}{x} = \frac{x}{B}$

Exemplo[19]: Roberto e Pedro passeiam cada um com seu cachorro. Roberto tem massa de 120kg, Pedro, por sua vez, tem 48 kg de massa. Qual é a média de massa entre Roberto e Pedro?

*b.* Média harmônica: $\frac{A}{B} = \frac{(A-x)}{(x-B)}$

Exemplo[20]: um carro realiza um percurso duas vezes. Na ida, ele faz o percurso com uma velocidade $v_1$= 80 km/h. Na volta, ele realiza o mesmo percurso com velocidade de $v_2$= 120 km/h. Qual foi a velocidade média ao juntar-se ida e volta?

V. Proporções que envolvem a conversão entre razão, taxas e frações:

Exemplo: Maria tem 40 anos, enquanto seu marido José tem 60 anos. Qual é a razão entre as idades do casal?

VI. Proporções que envolvem unidades de medida, assim como números:

$$\frac{5\ pés}{1\ segundo} = \frac{x\ milhas}{1\ hora}$$

Exemplo[21]: Um carro desenvolve uma distância de 90 km em uma hora. Quantos metros esse carro desenvolverá em 1 segundo?

VII. Problemas de conversão entre sistemas de representação:

Solicitam uma alteração na hora da representação da razão, de uma fração, quociente ou uma taxa em outra ilustração.

Exemplo: numa sala de aula há 30 estudantes, dos quais 12 são meninas:

a) Qual a razão do número de meninos para o total de estudantes da turma?

b) Qual é a razão do número de meninos para o total de estudantes da turma?

c) Qual é a razão do número de meninas para o número de meninos?

Dentre os setes tipos de problemas apresentados optamos por trabalhar com o *problema de valor omisso,* e com a intenção de justificar a escolha relatamos os três motivos: 1) Lesh,

---

[19] Retirado site Mundo da Educação. Disponível em: Média harmônica: o que é, fórmula, quando usar - Mundo Educação (uol.com.br). Acesso em 03 mar. 2021.
[20] Adaptado do livro de Silveira (2015).
[21] Retirado do livro de Porto (2015).

Posh e Besh (1988) expõem que os problemas de valor omisso, problemas de comparação e os problemas de transformação fazem parte do ramo algébrico; 2) a BNCC orienta a exploração de grandezas diretamente proporcionais, a partir disso considera-se que os problemas de valor omisso possibilitam e favorecem as alterações; 3) acreditamos que o problema de valor omisso pode auxiliar na mobilização dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da TO.

No próximo tópico foram explorados a proporcionalidade em uma das primeiras orientações curriculares nacionais, no caso o PCN (BRASIL, 1997), na sequência, repetimos a mesma investigação na BNCC (BRASIL, 2017), desenvolvendo um comparativo entre os dois, atentando-se à possibilidade de revelar o pensamento algébrico em tarefas de valor omisso. Esta discussão é semelhante ao que foi realizado no capítulo da álgebra, por isso, não foi detalhado nenhum aspecto de organização, estrutura ou qualquer outro elemento incluído nessa categoria.

## 3.2 A PROPORCIONALIDADE NAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS

A relação da proporcionalidade com o cotidiano é um dos primeiros componentes explorados pelo PCN, contudo observamos também a funcionalidade nas áreas de conhecimento. Por exemplo, a proporção associa-se a outros conteúdos, como a semelhança de figuras, estudo de funções, análise de tabelas, variação de perímetros, entre outras; de certo modo, abrange conceitos primordiais que precisam ser desenvolvidos pelos estudantes no transcorrer das etapas escolares.

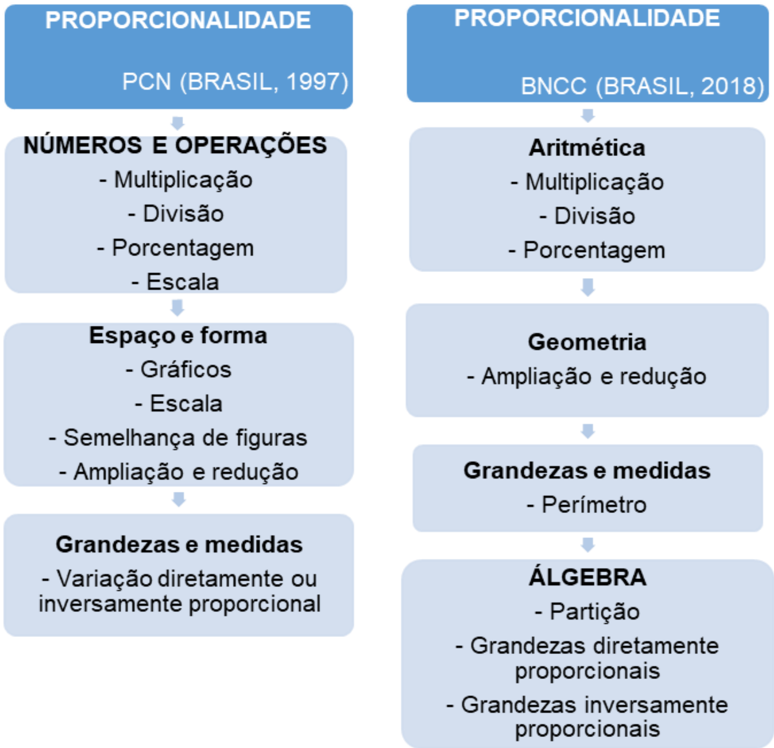
A proporção percorre quase todos os blocos de conteúdos dispostos, ao longo do documento (SOARES, 2016), podendo ser vista em alguns episódios com mais frequência, como nos “[...] problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções” (BRASIL, 1997, p. 38). A interpretação de problemas de proporcionalidade envolve a essência qualitativa e/ou quantitativa e isso pode auxiliar na mobilização do pensamento, exercendo um papel fundamental na vida humana e na percepção de mundo de modo geral.

Semelhante ao PCN, a BNCC também relata a aproximação da proporcionalidade com o cotidiano dos estudantes. Contudo, no primeiro documento observamos ela em três dos quatro blocos de conteúdo, a saber: números e operações; espaço e forma; e grandezas e medidas (BRASIL, 1997), enquanto no segundo documento ela perpassa por quatro das cinco unidades temáticas: aritmética; álgebra; geometria; e grandezas e medidas (BRASIL, 2018). Nessa perspectiva, a BNCC destaca os conteúdos que possuem relação com a proporcionalidade:

> [...] operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc (BRASIL, 2018, 269).

Com base nas orientações propostas pelos dois documentos, foi elaborada a Figura 9, em que são indicados os conteúdos que possuem ligação com a proporcionalidade que estão inclusos nos blocos de conteúdo do PCN e nas unidades temáticas da BNCC nos anos iniciais do ensino fundamental.

Figura 9 – Disposição da proporcionalidade nos blocos de conteúdo do PCN e nas unidades temáticas da BNCC




Fonte: Elaborado pela autora baseado no PCN e na BNCC (2022).

De forma geral podemos observar a relação de dependência das diversas áreas e seus respectivos conteúdos com a proporcionalidade, no entanto, o olhar foi delimitado apenas ao bloco de conteúdo números e operações do PCN e a unidade temática álgebra da BNCC em evidência na figura acima. Considerando que a investigação tem por base o ramo da álgebra com foco no campo da proporcionalidade, com o objetivo de observar se os problemas que envolvem a proporcionalidade direta podem revelar o pensamento algébrico em crianças, faz-se necessário observar as orientações curriculares nacionais propostas para a Educação Básica.

Assim, no PCN notamos um destaque nas operações, tendo em mente que a proporção aparece nos problemas que exploram a multiplicação, divisão, porcentagem e escala. Nesse sentido, Vieira (2020, p. 133) acrescenta que a "[...] proporcionalidade surge como uma das ideias do grupo de situações associadas à comparação entre razões no trabalho de problemas que exploram a multiplicação e divisão, sendo esse o foco dado para proporcionalidade, nessa etapa de ensino".

A proporção no bloco de números e operações está associada ao ramo aritmético – considerando a argumentação do capítulo 1 – no qual tem-se apenas o indicativo para a pré-álgebra no PCN dos anos iniciais. Assim, a discussão entre álgebra e proporcionalidade é guiada para os anos finais do EF, estabelecendo relações com os outros blocos de conteúdos de modo interdisciplinar.

Já na BNCC a proporcionalidade é apresentada com uma das ideias fundamentais que são favoráveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais do EF, envolvendo a percepção, interpretação e exploração de grandezas, assim "[...] como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam" (BRASIL, 2018, p. 270). Nessa etapa fica clara a importância da compreensão de situações por meio de diferentes contextos, "[...] bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas [...]" (BRASIL, 2018, p. 270).

O conceito de função, por exemplo, pode ser explorado nessa fase, por meio de problemas que envolvem a proporcionalidade direta, como é o caso desse exemplo retirado da BNCC: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018, p. 270). Ou seja, podemos elaborar problemas dessa natureza buscando revelar o pensamento algébrico dos estudantes.

Além disso, foi observado que na unidade temática de álgebra, especificamente no 5° ano do EF, que a BNCC apresenta a proporcionalidade por meio de objetos de conhecimentos e habilidades, conforme ilustra a Figura 10 adiante.

Figura 10 – Habilidades da BNCC para o 5° ano do ensino fundamental

| **Unidade temática** | **Objetos de conhecimento** | **Habilidades** |
| --- | --- | --- |
| Álgebra | Grandezas diretamente proporcionais | (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. |
| | Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais | (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo. |

Fonte: Elaborado pela autora com base na BNCC (BRASIL, 2018)

Pontuando que se deve construir novos trajetos para o ensino de proporcionalidade, especialmente a partir do estabelecimento de uma relação com o cotidiano dos estudantes por intermédio de situações desafiadoras (COSTA; ALLEVATO, 2015), corroboramos com a argumentação dos pesquisadores. Ademais, acreditamos que esse conteúdo pode ser a ponte para a construção de conceitos mais complexos que são abordados no decorrer da Educação Básica.

Inferimos que ao comparar os dois documentos, constatou-se que a BNCC apresenta uma natureza mais aberta, flexível e explícita acerca da possibilidade/favorecimento da abordagem de problemas de proporcionalidade direta, com a pretensão de revelar o pensar algebricamente com os estudantes do 5° ano do EF. Até aqui foi proposto uma reflexão sobre a proporcionalidade e os diferentes tipos de problemas. Adiante, é descrito o percurso metodológico que aponta os caminhos percorridos durante esta investigação.

# 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos tópicos do procedimento metodológico desde as especificações da escola, o local específico do desenvolvimento da pesquisa, os participantes, a composição dos dados e as especificidades da análise multimodal. Organizado a partir dos estudos de Vergel (2014, 2016) e Gomes (2020) delineados pela Teoria da Objetivação proposta por Luís Radford (2006, 2009, 2018, 2020, 2021).

Nesse sentido esta pesquisa se enquadra como qualitativa em virtude da exploração, descrição e a interpretação (BOGAN; BIKLEN, 1994) das tarefas que foram propostas aos estudantes. Atentamos cinco vertentes que podem ser vistos nesta pesquisa, tais como: i) parte da observação de um determinado grupo seja ele qual for, e a partir disso extrair os dados de uma determinada situação imposta a esse grupo; ii) o pesquisador tem por finalidade explicar o "porquê e/ou os porquês" dessa determinada situação; iii) o pesquisador exerce duas funções ao mesmo tempo, tanto como sujeito, quanto objeto de investigação; iv) a amostra escolhida tem por objetivo retratar dados, independentemente do tamanho da amostra, entretanto deve trazer informações relevantes sobre a referida temática; v) por fim, esse tipo de pesquisa preza pela compreensão de todo o processo, e não apenas a redução dos resultados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para mais que a pergunta de pesquisa e os objetivos tenham sidos apresentados na introdução, estes serão recapitulados a seguir. *Quais características do pensamento algébrico são reveladas por estudantes do 5° ano do ensino fundamental ao resolverem tarefas de valor omisso?*

***Objetivo geral:***

- *Caracterizar o pensamento algébrico reveladas por estudantes do 5° ano do ensino fundamental ao resolverem tarefas que envolvem o valor omisso.*

***Objetivos específicos:***

- *Identificar as estratégias reveladas pelos estudantes ao se depararem com tarefas que explorem o valor omisso;*
- *Descrever os meios semióticos reveladas pelos estudantes durante a resolução das tarefas de valor omisso.*

Embora o pensamento seja desenvolvido por cada indivíduo, ele está inserido na cultura pela produção de significados que dispõem de conceitos históricos que foram produzidos pela sociedade ao longo dos anos e o pensamento algébrico é um aspecto específico dentro desta discussão (RADFORD, 2009). Por isso, o pensamento algébrico na perspectiva da TO sucede na dimensão multimodal, isto significa que se recorre – à linguagem verbal ou não verbal, às anotações escritas, sentimentos, gestos, à relação entre estudante-estudante e estudante-professora, até mesmo à combinação de alguns destes elementos (RADFORD, 2014). Nessa dinâmica, buscamos entender todo o processo de resolução das tarefas, atentos ao como e quando os estudantes manuseiam a(s) estratégia(s), assim como a recorrência dos diferentes meios semióticos para se expressar durante a atividade de ensino-aprendizagem.

Na análise multimodal não se pode analisar de forma isolada apenas registros escritos, ou trechos da fala, ou então gestos dos estudantes, longe disso, “[...] essas formas de expressão e produção de significados foram estudadas como o produto de processos de interação social. Esses processos são permeados pelo objeto da atividade e pela cultura a qual os estudantes pertencem” (VERGEL, 2014, p.119, tradução nossa). Com base nessa análise somos capazes de caracterizar o pensamento algébrico na perspectiva da TO observando os indícios dos três elementos: indeterminação, denotação e a analiticidade.

## 4.1 O PERFIL DA ESCOLA E DOS PARTICIPANTES

Organizamos e desenvolvemos a pesquisa durante a Pandemia do (covid-19). Isto favoreceu o surgimento de alguns empecilhos como: dificuldade para entrar em contato com as escolas considerando as inúmeras demandas que os profissionais da educação tinham que cumprir, ou seja, este contato se transformou em algo muito complexo; além da impossibilidade de deslocamento até as escolas porque elas permaneceram fechadas por aproximadamente um ano e meio com o propósito de evitar e conter a propagação do vírus, todavia, elas funcionaram nesse período na modalidade do ensino remoto emergencial.

Realizamos inúmeras tentativas de contato com escolas de três estados diferentes (Pernambuco - PE, Paraíba - PB e Rio Grande do Norte - RN). A priori apresentamos o objeto da pesquisa, especificando algumas particularidades acerca da TO, em que se faz necessário filmar e gravar áudios de todas as interações entre professora-estudantes e estudantes-estudantes. Também destacamos que seria fundamental o apoio da escola para o desenvolvimento da pesquisa, permitindo o contato com os pais ou responsáveis legais dos estudantes e empréstimo de uma sala de aula para o desenvolvimento desta investigação.

Depois de alguns meses, uma coordenadora pedagógica de uma escola situada no município de Santa Cruz – RN, aceitou a proposta da nossa pesquisa. E com auxílio dela entramos em contato com os pais dos estudantes, estabelecendo uma conversa informal questionando se eles autorizaram a participação dos seus filhos na pesquisa, posteriormente, marcamos uma conversa com os estudantes de modo a questionar se eles aceitariam participar do estudo. Antes do desenvolvimento, elaboramos alguns termos empregando uma linguagem informal com o intuito de facilitar a compreensão da direção da escola, dos pais ou responsáveis legais e estudantes.

Ao que se refere aos aspectos éticos de pesquisa, inicialmente foi estabelecida a anuência para a realização dessa investigação por parte da escola em seu espaço físico. Assim, como submetemos o projeto no Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) pelo parecer n° 5.024.406 (APÊNDICE A), respeitando assim, os aspectos legais de pesquisas com seres humanos. Ainda é valido ressaltar que antes de iniciarmos a nossa investigação na prática foi apresentado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para que pais e/ou responsáveis pelos menores de idade pudessem concordar com a participação das crianças; nesse momento também foi apresentado e assinado outros termos como o Termo de Assentimento para adolescentes com idade de 7 a 18 anos (TALE); Termo de Confidencialidade; Declaração de Autorização de Uso de Dados; Autorização Uso Imagens/Depoimentos; Declaração de Anuência com Autorização de Uso de Dados.

### 4.1.1 Local da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola particular e o seu público é recorrente da população do município de Santa Cruz – RN e das cidades próximas. A escola atende as modalidades da Educação Infantil até o Ensino Médio, por isso, dispõe de uma infraestrutura significativa, sendo composta por três blocos: Bloco 1 - Setor administrativo e Educação Infantil (creche e o pré-escola); Bloco 2 - Ensino Fundamental e o Bloco 3 - Ensino Médio.

A escola foi criada em 2006 com a perspectiva básica de preparar os seus estudantes a prosseguirem nos estudos na universidade, ou seja, na época o vestibular era o alvo. Desde então, vem-se acompanhando e analisando as mudanças que acontecem na sociedade, com intuito de adequar da melhor forma possível o projeto educativo. Para mais preocupa-se com as normas gerais e os critérios básicos estabelecidos pelo Estatuto da Pessoa com Deficiência[22] na Lei 13.146 de 6 de julho de 2015. Sendo assim, toda estrutura respeita normas de acessibilidade, dentre elas, rampas, corrimão, piso tátil, sinalização e entre outros. Garantindo

---

[22] Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/513623/001042393.pdf.

os critérios contidos nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Nacional, de modo a garantir uma educação transformadora, inovadora e de qualidade para todos.

Destacando que a escola desenvolve projetos[23], como: Ação cidadã, ações circenses, feira do empreendedor, ações sociais, natal feliz, robótica e o bilíngue. Destacamos o desenvolvimento do projeto bilíngue em toda a escola, ou seja, aulas bilíngues com intuito de promover o desenvolvimento linguísticos dos estudantes, por meio de uma proposta bilíngue de aprendizagem, na qual, o mesmo conhecimento ocorre em duas línguas de forma simultânea, mediante aulas interdisciplinares inclusas no contexto sócio acadêmico do estudantes projetando-o, assim, em direção a uma visão maior da língua inglesa.

Haja vista a Pandemia do (SARS-CoV-2) que assola o país, a escola estava funcionando no formato híbrido (aulas presenciais e online do modo simultâneo) até o final do ano de 2021, ou seja, retornaram para escola apenas os estudantes que se sentiram confortáveis. Entretanto, sublinhamos que estão sendo seguidas à risca todas as orientações do Ministério da Saúde; como aferição de temperatura, uso de máscara em todas as dependências da escola, alguns lavatórios foram instalados na escola, além de alguns pontos com álcool em gel 70%, a fim de evitar a propagação do vírus entre estudantes, professores e os respectivos funcionários.

### 4.1.2 Participantes do Estudo

No ano de 2021 as turmas do 5° ano eram compostas por 26 estudantes em cada uma delas, ou seja, 5° ano A - 26 estudantes (matutino) e 5° ano B - 26 estudantes (vespertino); na faixa etária de 10 a 11 anos. E tínhamos a intenção de realizar os dois estudos (o piloto e o final) com as duas turmas da escola, porém, isto não foi possível devido os desdobramentos da Pandemia do covid-19 que viabilizaram as adversidades na forma de funcionamento da escola.

No período do estudo piloto[24] em meados de julho de 2021; fazia uma semana que a escola tinha aberto os portões para o retorno das aulas presenciais, mesmo assim, um número significado de pais e responsáveis não autorizou a volta dos filhos(as). Isto interferiu diretamente no quantitativo de participantes porque dentre as duas turmas apenas três estudantes estavam frequentando a escola de forma presencial e a grande maioria estavam acompanhando

[23] Os projetos são voltados para o desenvolvimento integral dos estudantes, visando sempre uma boa prática interativa e educacional. Também são baseados nas metodologias ativas, fazendo com que eles descubram e compreendam conceitos por meio da realidade.

[24] Este estudo no consta na versão final da pesquisa, porém foi extremamente relevante no desenvolvimento do estudo final.

as aulas de forma remota. Por isso, tivemos a participação de apenas três estudantes do 5° ano A no estudo piloto, sendo eles: duas meninas e um menino.

Com relação ao desenvolvimento do estudo final[25]. Anteriormente ao desenvolvimento o Estado do Rio Grande do Norte (RN) estava passado pela segunda onda[26] do (SARS-CoV-2), fazendo com que muitos estudantes da escola particular retornassem as aulas remotas impactando novamente no quantitativo de participantes do nosso estudo. Neste contexto, desenvolvemos o estudo final no início do mês de novembro de 2021 com a participação de quatro estudantes do 5° ano A (duas meninas e dois meninos) e todos na faixa etária de 10 anos de idades.

## 4.2 ATIVIDADE

Antes de expor os critérios teóricos-metodológicos associados a escolha das tarefas, se faz necessário apresentar aspectos que abrangem a discussão em torno do termo atividade – "[...] é algo que vai além das pessoas interagirem com o propósito de fazer algo" (ALMEIDA; MARTINS, 2022, p. 5). O presente termo pode ser empregado constantemente para representar diversas circunstâncias e distintos significados, porém Radford (2009, 2013, 2014, 2021, 2022) proporciona uma argumentação ímpar para ele na Teoria da Objetivação.

A atividade na TO, "[...] refere-se a um *sistema dinâmico* onde os indivíduos interagem coletivamente com um *forte* sentido social, o que torna os produtos da atividade também coletivos" (RADFORD, 2021, p. 52). Por essa razão a atividade na perspectiva da TO não pode ser vista como algo a ser feito, além do mais, por meio dela "[...] os indivíduos acionam o saber e o colocam em movimento, tornando assim concretos certos tipos de ação e reflexão" (p. 67), ou seja, envolve-se nos processos de objetivação e subjetivação.

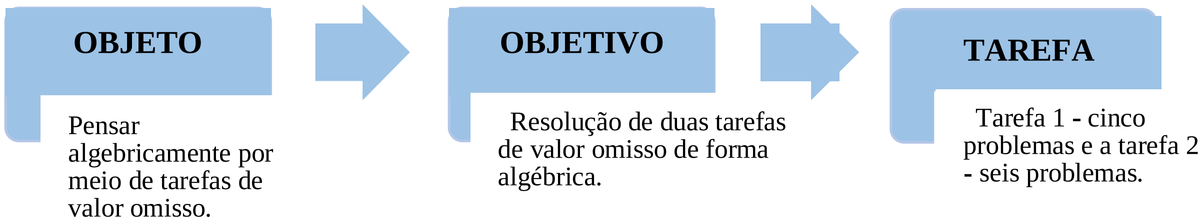
Entretanto agora voltamos a discussão em torno deste termo aos saber algébricos no contexto sala de aula de matemática. Inicialmente destacamos que a atividade dispõe de um objeto, em razão disso faz parte do projeto didático elaborado pelo professor (RADFORD, 2017a, 2021). Nessa dinâmica, o nosso objeto consiste em pensar algebricamente por meio de tarefas de valor omisso. E com o intuito de caminhar em direção ao objeto "um ou mais objetivos podem ser identificados" (RADFORD, 2021, p.123); neste caso, propomos a

---

[25] Seguindo um das orientações da banca de qualificação incluímos os três participantes do estudo piloto no estudo final.
[26] Disponível em: http://www.tribunadonorte.com.br/noticia/casos-de-covid-no-rio-grande-do-norte-voltam-a-crescer-sesap-nega-2a-onda/495770.

resolução de duas tarefas de valor omisso de forma algébrica. Por fim, para alcançar o(s) objetivo(s) da atividade indica-se o desenvolvimento de tarefas específicas. Essas tarefas segundo o autor supracitado compreendem problemas guarnecidos com um grau de dificuldade gradativo; nesse sentido, propomos na pesquisa duas tarefas: tarefa 1 – cinco problemas e a tarefa 2 – seis problemas (Figura 11).

Figura 11 – Estrutura da atividade




Fonte: Adaptado de Radford (2021)

Sucintamente a atividade pode ser modificada pelo projeto didático, porém, o professor e os pesquisadores não conseguem prever tudo o que pode acontecer durante o desenvolvimento, porque tudo depende de como e quando os estudantes e professor vão se envolver, quais questionamentos e ações, isto implica diretamente no diálogo com outro, etc. Por isso, Radford (2015 p. 554-555, tradução nossa) apresenta aspectos que precisam ser colocados em prática no decorrer da elaboração da tarefa (s) e dos respectivos problemas:

> a) Levar em consideração o que os alunos já sabem; b) Ser interessante do ponto de vista dos alunos; c) Abrir um espaço de reflexão crítica, interação e discussões em pequenos grupos e discussões gerais; d) Tornar significativos os conceitos alvo em níveis conceituais profundos; e) Oferecer aos alunos a oportunidade de refletir de diferentes maneiras (não apenas por meio do conteúdo dominante); f) Ser organizados de tal forma que haja um fio conceitual orientado para as tarefas aumentarem as dificuldades.

Neste contexto a atividade de ensino-aprendizagem[27] foi desenvolvida em três grandes momentos, como ilustramos na figura 12:

[27] De modo geral como os dois eixos do *labor conjunto*: o da colaboração humana, e da produção de saberes e o da colaboração humana, não estiveram de forma explicita na nossa pesquisa, optamos por utilizar o conceito de atividade de ensino-aprendizagem, afim de evitar confusões teóricas.

*1° momento*: esclarecemos como seria o desenvolvimento da atividade, deixando claro que eles deveriam trabalhar em dupla. Logo em seguida distribuímos a folha da tarefa, realizamos a leitura e a explicação delas, o ilustrado pela figura 12;

*2° momento*: elas iniciaram o trabalho de forma colaborativa, realizando uma nova leitura da tarefa e dos seus respectivos problemas;

*3° momento*: e em paralelo tínhamos alguns instantes compostos por discussões entre professora-estudantes.

**Figura 12** – Momentos do estudo final


Fonte: Adaptação de Radford (2021)

Destacando que as indagações podem surgir dos dois lados, tanto pelo professor, como pelos estudantes. No entanto, a presença das setas bidirecionais apontando para todos os lados, favorece um leque de possibilidades, assim, em determinados momentos, caso seja necessário, retornamos para algum momento e em alguns instantes da nossa pesquisa isto aconteceu. "[...] não significa que professores e alunos façam a *mesma* coisa. Há uma divisão do trabalho, mas esta divisão não impede que professores e alunos trabalhem *juntos*, de mãos dadas" (RADFORD, 2021, p. 280). Pensando sobre a elaboração da obra comum na sala de aula e como professores e estudantes se comprometem, surge a ética que está associada ao engajamento, cuidado, engajamento e o relacionamento uns com os outros.

*4.2.1.1 Composição dos dados e especificidades da análise*

A análise multimodal é empregada para referir-se às múltiplas funções cognitivas, sensíveis e físicas, exemplificando por meio do tátil ou perceptivo, e esses elementos desempenham um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, especificando o processo de significados matemáticos: incluindo os gestos, os desenhos, o corporal e a linguagem (RADFORD, 2017). Esse tipo de análise multimodal leva em consideração que, na atividade de ensino-aprendizagem, os estudantes recorrem aos distintos recursos semióticos, com isso, eles são aplicados para representar os pensamentos, reflexões e ações. Por essa circunstância, o pesquisador(a) ou professor(a) deve estar atento a: como e quando os estudantes empregam os meios semióticos, porque eles estão repletos de significados.

Neste contexto o nosso estudo final foi produzido durante o desenvolvimento das duas tarefas de valor omisso com os quatro estudantes do 5° ano A do EF da escola particular. Sobre o desenvolvimento do estudo final sucedeu ao longo de uma semana, na qual foram necessárias quatro aulas de matemática em dias alternados.

E com o intuito de capturar todas as interações durante o desenvolvimento das tarefas, utilizamos três celulares: dois celulares que ficaram presos em tripés, sendo posicionados nas diagonais da sala de aula, de modo a capturar os registros orais e gestuais das duas duplas, e o terceiro estava na mão da pesquisadora (para registrar algumas imagens, vídeos isolados, gravação de voz próximo aos estudantes e com uma melhor qualidade de áudio). Não tivemos suporte técnico para as gravações do estudo final porque a escola não estava permitindo o acesso de terceiros por causa do aumento de casos de (SARS-CoV-2), inclusive, isto adiou o desenvolvimento do estudo final.

No primeiro momento esclarecendo como seria o desenvolvimento da atividade deixando claro que eles deveriam escolher um(a) colega para trabalhar em dupla, nisso eles se agruparam da seguinte forma: Dupla A (Beatriz e Sofia) e a Dupla B (Enzo e Gustavo), utilizamos nomes fictícios para preservar os participantes do estudo. Após a organização das duplas disponibilizamos uma folha de tarefa para cada uma, com o propósito de incentivar o trabalho de forma colaborativa; realizamos da leitura das tarefas para as duplas. No segundo, as duplas iniciaram a resolução da tarefa, e, no último, discussões entre professora-estudantes e estudante-estudante. Realizamos adaptações em alguns dos momentos da atividade de ensino-aprendizagem (RADFORD, 2021) ilustrado na figura anterior.

E com a finalização do estudo final na escola, iniciamos o processo de análise dos dados, no qual organizamos por fase especificas descritas Vergel (2016) e adaptadas por Gomes (2020).

- Fase 1: Gravação em vídeo de todas as aulas.
- Fase 2: Transcrição de todos os vídeos e áudios.
- Fase 3: Análise dos vídeos.

Realizamos a transcrição na integra de todos os vídeos e áudios, porém os momentos que existem conversas paralelas e outros diálogos que não nos diz respeito foram destacados (Quadro 4). A partir disso, buscamos identificar as estratégias que foram utilizadas pelos estudantes durante a resolução das tarefas, sempre assistindo quantas vezes fossem necessárias, realizamos a transição das falas dos participantes e a separação de imagens apenas dos trechos e elementos que condizem com os objetivos desta pesquisa.

Quadro 4 – Modelo organizador da transcrição

| **Símbolo** | **Significado** |
|---|---|
| *(itálico)* | Descrição de movimentos relevantes para o estudo |
| [] | Comentários e/ou descrição da situação |
| [00:00 - 00:00] | Intervalo de tempo com desenvolvimento de movimentos relevantes |
| ... | Qualquer pausa |
| Professora | Professora |

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Nas análises exibimos apenas trechos das transcrições que possam indicar a presença do indeterminado e a referência a ele por meio da expressão semiótica, com isso, verificamos, nas tarefas xerografadas, o registro escrito discutido naquele turno de fala e descrito na transcrição. Assim, tentamos verificar por meio da imagem, da fala do aluno e do registro escrito o modo que ele utilizou os meios semióticos, a fim de investigar a presença ou não da analiticidade.

## 4.3 CARACTERIZAÇÃO DAS TAREFAS

Nesta pesquisa propomos uma articulação entre o desenvolvimento do pensamento algébrico e as grandezas diretamente proporcionais seguindo as orientações da BNCC. Considerando que o documento foi homologado em dezembro de 2017 e a implementação estava prevista para o ano letivo de 2020 em escolas públicas e privadas, logo podemos garantir que esta articulação é contemporânea. Inicialmente selecionamos uma habilidade apresentada na BNCC que fazem parte da articulação e os apresentamos mediante o quadro 5. Depois a justificativa para as escolhas e a estrutura das tarefas seguindo os aspectos teóricos metodológicos da Teoria da Objetivação.

Quadro 5 – Articulação entre pensamento algébrico e as grandezas diretamente proporcionais

| | **Objeto de conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Álgebra** | Grandezas diretamente proporcionais | (EF05MA121): Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. |

Fonte: Brasil (2018).

As grandezas diretamente proporcionais estão correlacionadas ao nosso cotidiano como: compra e venda, aumento e diminuição, quantidade de ingredientes em uma receita e etc. Isto significa que tarefas que fazem parte deste contexto podem auxiliar na mobilização do pensamento algébrico (BUTTO; ROJANO, 2010; BURGOS; GODINO, 2019). Entretanto, existem inúmeras tarefas que abordam essa articulação, por exemplo Posh, Lesh e Besh (1988) apresentam sete tipos, e dentre elas optamos pela *tarefa de valor omisso* por compreender os saberes algébricos - equivalência, variável e transformação.

Selecionamos duas tarefas[28] de valor omisso: tarefa 1 – folhas de papel sulfite e a tarefa 2 – receita culinária. Porém, realizamos modificações para que se adequassem à estrutura da atividade ilustrada pela (figura 1), de modo a incluir nas tarefas os problemas (*a, b, c, d, e, f*). Porque nas tarefas de valor omisso convencionais "são dados A, B e C da proporção A:B = C:X, e é solicitado o valor do termo desconhecido x" (VIANA; MIRANDA, 2016, p. 196).

As tarefas foram adaptadas de modo a se encaixar na proposta de sequências apresentada por Radford (2008, 2013, 2021). Disponibilizando três valores, e o quarto consistia no termo desconhecido, depois solicitamos a eles que encontrassem o próximo termo desconhecido, que estava sendo problematizado no problema *a*, seguidamente termos remotos nos problemas (*b, c, d*), e por último questionamos sobre o termo geral da tarefa de valor omisso, assim como uma justificativa que explique esta escolha. A partir de uma narrativa, formulamos as tarefas e os problemas de modo que todos estejam inter-relacionados. Oferecendo "um contexto para dotar os problemas de sentido, e permitir uma inter-relação da dimensão conceitual dos problemas" (RADFORD, 2021, p. 176). Ao mesmo tempo, possibilitamos o contato com vários objetos matemáticos para que possam estabelecer suas próprias conexões com as grandezas e suas variações.

**TAREFA 1 – FOLHAS DE PAPEL SULFITE**

Para cada 10 estudantes da turma de Cláudia, a professora reservou 30 folhas de papel sulfite para uma tarefa.

a) Com uma turma de 20 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta.

[28] Tarefa 1 - retirada do livro didático de Dante (2012, p. 48).
Tarefa 2 - retirada do material didático - Rutas hacia el álgebra: actividades en Excel y logo.

b) Para 50 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta.
c) Para 150 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta.
d) Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite para 250 estudantes.
e) Escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite que serão necessárias para o desenvolvimento dessa tarefa para um número desconhecido de estudantes.

**TAREFA 2 - RECEITA CULINÁRIA**

Para fazer uma sopa que pode servir 16 pessoas, são necessários 4 litros de água.

a) Quantos litros de água serão necessários para fazer uma sopa para 8 pessoas? Justifique sua resposta.
b) Quantos litros de água serão necessários para fazer uma sopa para 4 pessoas? Justifique sua resposta.
c) Quantos litros de água serão necessários para fazer uma sopa para 40 pessoas? Como você fez para descobrir esta quantidade.
d) Quantos litros de água serão necessários para fazer uma sopa para 120 pessoas? Descreva como você fez para descobrir esta quantidade.
e) Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de água necessária para fazer uma sopa para 200 pessoas.
f) Imagine que você tem que fazer uma sopa, mas não sabe quantas pessoas irão comer. Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de água necessária para fazer uma sopa para um número desconhecido de pessoas.

As tarefas que foram entregues aos estudantes eram coloridas dentro da proposta, continham algumas ilustrações associadas aos problemas (tarefa 1 – uma professora segurando um livro no canto esquerdo da folha e algumas folhas no canto direito, já na tarefa 2 – um recipiente com sopa no canto esquerdo e uma senhora olhando para um livro de receitas e mexendo em uma panela no canto direito), além dos retângulos em branco abaixo de cada problema com espaço suficiente para resolvê-los. A seguir, é descrito a análise multimodal ou multissemiótica de nossa investigação.

## 5 ANÁLISE MULTIMODAL OU MULTISSEMIÓTICA

Neste capítulo nos dispomos a responder à seguinte pergunta de pesquisa: *quais características do pensamento algébrico são mobilizadas por estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas de valor omisso?* Para isto, nos debruçamos sobre a transcrição de vídeos e áudios, dos registros escritos e algumas situações foi necessário retornar para a observação das filmagens afim de identificar gestos isolados, indícios e/ou evidências acerca dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.

Considerando que "[...] a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se *raciocínio*), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas" (RADFORD, 2021, p. 173). Nessa mesma lógica, o teórico apresenta três elementos interligados: indeterminação (*objetos do raciocínio*), denotação (*o modo com o objeto é representado*) e a analiticidade (*como se raciocina por meio dos objetos de raciocínio*).

Recapitulando que o último elemento é o principal responsável pela distinção entre o pensamento aritmético e o algébrico, por isso, requer mais atenção no processo de análise. E ele se fundamenta em dois vetores: "1) inclui as grandezas determinadas e indeterminadas; e o 2) operar dedutivamente" (RADFORD, 2021, p. 173). Destacando que é necessário observar se houve um movimento de dedução ou apenas o uso do método de tentativa e erro, justamente por ser o mais utilizado pelos estudantes (RADFORD, 2009, 2010, 2021). Mesmo que os estudantes demonstrem um conhecimento acerca da aritmética generalizada ou sofisticada, baseado no método de tentativa e erro, isso não é considerado como uma mobilização do pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.

Neste contexto identificamos as estratégias que foram utilizadas pelas duplas (A e B) na resolução das tarefas (tarefa 1 – folhas de papel sulfite; tarefa 2 – receita culinária). Para a resolução da tarefa de valor omisso as duplas tiveram o contato com três valores: A, B e C, e o D refere-se ao termo desconhecido, e a partir disso organizamos a proporção A:B = C: D. Inicialmente, estabelecemos a relação de primeira ordem com o primeiro par (A: B), depois o estabelecimento de uma relação de ordem com o segundo par (C:D) possui uma elo com o anterior (SPINILLO, 1992; VIANA; MIRANDA, 2016).

A proposta de duas tarefas que estão envolvidas no cotidiano dos estudantes com proposito de favorecer o convívio e familiarização com várias situações que envolvem o número desconhecido com um nível de dificuldade gradativo. A partir disso, buscamos por indícios dos elementos caracterizadores durante a resolução das duas tarefas e com isso selecionamos três episódios: episódio 1 – dupla A (resolução da tarefa 1), episódio 2 – dupla A (resolução da tarefa 2); episódio 3 – dupla B (resolução da tarefa 1). Destacando que optamos por descartar o episódio 4 da dupla B justamente porque os estudantes recorrem a uma estratégia semelhante a tarefa anterior, para não tornar a nossa análise de dados repetitiva no contexto da argumentação.

Com a finalização de análise multimodal de cada episódio retomamos para a observação das estratégias utilizadas pelas duplas com o objetivo de identificar se houve ou não a mobilização do pensamento algébrico na perspectiva da TO durante resolução de cada uma das tarefas pelas duplas. Apresentamos alguns recortes da atividade de ensino-aprendizagem, primeiro identificamos as estratégias utilizadas, segundo percebemos evidência(s) dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da TO: indeterminação, denotação e a analiticidade.

## 5.1 EPISÓDIO 1 – DUPLA A

Este episódio condiz com a resolução da tarefa 1 (folhas de papel sulfite) e os seus respectivos cinco problemas. Retiramos a tarefa 1 da Coleção de Livro Didático - Projeto Teláris elaborada por Luís Roberto Dante. No entanto, realizamos algumas adaptações porque nela encontramos apenas um questionamento e a nossa proposta condiz com a argumentação de Radford (2008, 2013, 2021) acerca das sequências algébricas.

Inicialmente apresentamos a tarefa e realizamos a leitura para as duplas. Depois disso esperamos em torno de três minutos para estabelecer a primeira intervenção com a dupla A, justamente para que elas pudessem ler o enunciado da tarefa e dos problemas novamente, debater sobre os dados e assim traçar a(s) estratégia(s) para elucidá-los. Observamos a dupla por mais trinta segundos e na sequência questionamos sobre o *problema a* (Figura 13, ver adiante), como mostra o trecho da transcrição a seguir:

> ***PROFESSORA****: Como vocês estão pensando?*
>
> ***SOFIA****: Eu acho que são trinta folhas para cada dez estudantes, aí vai aumentando (movimentos circulares com o lápis no ar). Aí tipo, vai aumentando a quantidade de estudantes [a dupla está se referindo ao enunciado da tarefa 1 e ao problema a].*

> ***BEATRIZ**: Ah! É tipo assim... Por exemplo, dez estudantes têm que receber trinta folhas, então se foram vinte, sessenta. Você pensou assim? (olhando para sua colega, no caso, a Sofia).*
>
> ***SOFIA**: Aham [Expressão utilizada para confirmar um fato].*
> ***BEATRIZ**: É!*
>
> ***SOFIA:** Desde quando ela começou a ler, tenho pensado assim.*
>
> ***BEATRIZ**: É, então, acho que é isso. Vinte é. No caso, vinte corresponde a sessenta, porque dez corresponde a trinta.*

Nesse momento a dupla A explicou que: dez estudantes correspondem a trinta folhas, então vinte estudantes correspondem a sessenta folhas, ou seja, elas perceberam que com o aumento no número de estudantes, consequentemente, aumenta-se o quantitativo de folhas para o desenvolvimento da tarefa proposta pela professora Cláudia. A partir deste trecho *"dez estudantes têm que receber trinta folhas, então se foram vinte, sessenta"* observamos o estabelecimento da relação de primeira ordem por meio do primeiro par (Quadro 6).

Quadro 6 – Relação de primeira ordem

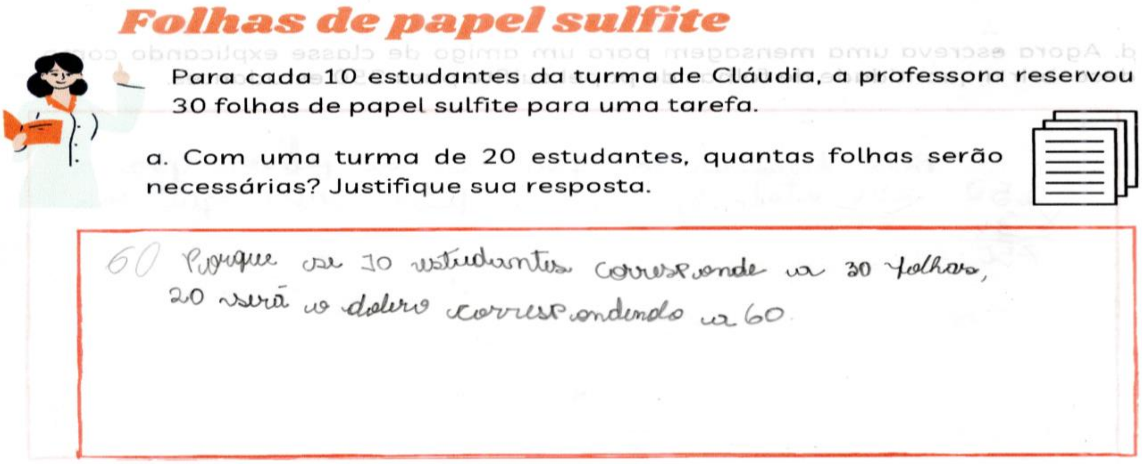
| |
|---|
| A corresponde a B reescrito da forma (A:B) |

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Deste modo o A – representa a quantidade de estudantes e o B – a quantidade de folhas de papel sulfite referente aos valores disponibilizados no enunciado da tarefa 1. Elas estabeleceram o primeiro par e marcaram o início da elaboração de um plano para buscar o segundo par no qual o C – representa a quantidade de estudantes do problema, e o D – o termo desconhecido solicitado no mesmo problema. Ressaltando que a dupla não fez uso dessas "letras" para resolver os problemas porque nos anos iniciais do EF o simbolismo alfanumérico não é habitual. Todavia, utilizamos as incógnitas (A, B, C e D) para facilitar a nomenclatura dos dados da tarefa 1, a discussão e análise dos nossos dados.

E com a continuidade das discussões entre estudantes-professora e estudante-estudante surge outro aspecto que justifica e favorece a análise multimodal acerca da resolução do problema *a*, como ilustramos na figura 13 e o trecho da transcrição a seguir.

Figura 13 – Resolução de Beatriz e Sofia para o problema *a*




Fonte: dados da pesquisa (2022).

> ***SOFIA****: Já sei. Sessenta folhas porque a cada dez estudantes aumenta trinta folhas.*
>
> ***BEATRIZ****: É, só a gente colocar. Porque dez estudantes correspondem a trinta folhas e a vinte seria o dobro de dez, sessenta.*

Na transição das falas e na observação dos registros escritos fica evidente que a dupla percebeu que vinte estudantes se referem ao dobro de dez e então aplicaram a multiplicação para determinar a quantidade de folhas necessárias, encontrando um total de sessenta. Fazendo uma pequena pausa na discussão das estratégias, para sublinhar um aspecto teórico da TO de um termo presente na fala das estudantes. O termo *"dobro"* intitula-se como "*dêiticos espacial*, ou seja, palavras com as quais descrevemos, de forma contextual, objetos no espaço" (RADFORD, 2009, p. 16, tradução nossa). Exemplificando palavras como vezes dois e/ou vezes três são substituídas por dobro e triplo e entre outras palavras que dispõem de uma representatividade.

O que era apenas um indicativo se transformou em estratégia baseada no trecho a seguir: *"sessenta folhas porque a cada dez estudantes aumenta trinta folhas"* e *"porque dez estudantes correspondem a trinta folhas e a vinte seria o dobro de dez, sessenta"*. Marcando o estabelecimento da relação de primeira (A:B) e segunda ordem (C:D). Inclusive, as estudantes fazem uso de estratégias multiplicativas diretamente relacionadas a mesma grandeza, corroborando com os resultados da pesquisa de Viana e Miranda (2016). Nessa dinâmica, elaboramos o quadro 7 para ilustrar tal situação.

Quadro 7 – Esboço da estratégia utilizada por Beatriz e Sofia para o problema *a*

| DOBRO | **Quantidade de estudantes** | **Quantidade de folhas** | DOBRO |
|---|---|---|---|
| | 10 | 30 | |
| | 20 | **60** | |

Fonte: Dados de pesquisa (2022).

Beatriz e Sofia identificaram a relação entre os valores no qual existe uma divisão de grupos, para cada 10 estudantes são necessárias 30 folhas de papel sulfite. Baseado nisso, elas reconheceram e demonstram noções de proporção (A: B) de modo a estabelecer a relação de primeira ordem, depois perceberam um aumento no quantitativo de estudantes disponibilizado no problema a. Nesta ocasião descobriram a relação de segunda ordem (C:D), desfrutando da relação com a anterior. Pontuando que em caso de variação na relação de primeira ordem, consequentemente altera-se a segunda.

Inclusive Viana e Miranda (2016, p. 197) descrevem que o primeiro passo na resolução das tarefas de valor é o "[...] estabelecida uma relação interna (*within relation*) dentro do mesmo espaço de medida, ou seja, entre os elementos da mesma grandeza, e utiliza-se o raciocínio escalar". Além disso, revelam conhecimentos acerca da multiplicação com o número dois rapidamente foi substituído pela palavra dobro (dêitico espacial na perspectiva da TO).

Com a finalização da resolução do *problema a*, buscamos identificar as estratégias e indícios dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico na transcrição das falas e nos registros escritos. Enxergamos as relações de primeira e segunda ordem estabelecidas, que foram fundamentais na elaboração da estratégia que – *há cada dez estudantes temos a correspondência de trinta folhas de papel sulfite, então para vinte estudantes que é o dobro de dez, são necessárias sessenta folhas.* De acordo com Silvestre e Ponte (2009) no contexto da proporcionalidade a multiplicação por dois (ou dobro) condiz com a covariação de grandezas, ou seja, o uso das relações multiplicativas dentro das variáveis. Em outras palavras, perceberam um aumento de 100% na quantidade de folhas disponibilizadas no enunciado da tarefa 1 e utilizaram isso a seu favor para solucioná-lo.

O indeterminado surge durante o desenvolvimento dos diálogos, principalmente durante a manipulação das proporções, ou seja, o mesmo valor, no caso o número dois que foi manuseado do lado esquerdo, manuseou-se do lado direito (Quadro 7), se assemelha ao conceito de uma balança de dois pratos. Além disso, tornou-se evidente que Beatriz e Sofia não utilizaram o método de tentativa e erro para resolver o problema a. Por fim, salientamos que

Beatriz e Sofia perceberam uma regularidade entre o quantitativo de estudantes e os números de folhas de papel sulfite. No entanto, isto não é um indício suficiente para validar a compreensão da generalização pelos estudantes (RADFORD, 2009) na tarefa proposta.

Na sequência tínhamos a proposta da resolução do *problema b* - Para 50 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta. Com o início da resolução, Beatriz e Sofia permaneceram com a estratégia que foi elaborada no *problema a*, na qual recorreram a covariação de grandezas; assim, como notamos o surgimento de um elemento caracterizador do pensamento algébrico, como podemos observar no trecho da transcrição a seguir.

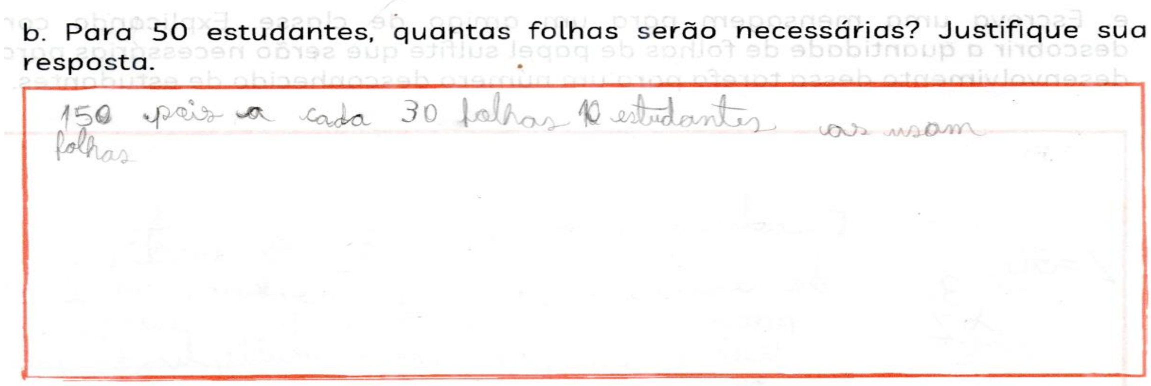
> ***SOFIA**: Trinta, sessenta, noventa, cento e vinte, cento e cinquenta [a estudante começou a contar de trinta em trinta utilizando os dedos da mão direita, iniciando pelo dedo mínimo – trinta, anelar – sessenta, médio – noventa, indicador – cento e vinte e o polegar – cento e cinquenta].*
>
> ***BEATRIZ**: É cento e cinquenta. Porque se a gente for contando de trinta em trinta vai acrescentar o resultado de cento e cinquenta.*

Figura 14 – Sequência de gestos desenvolvidos por Sofia

Fonte: Dados de pesquisa (2022).

O recorte da fala acima chamou a nossa atenção. Justamente por apresentar indícios da indeterminação mediante a identificação, reconhecimento e a manipulação com os números. À medida que Sofia pronuncia um número, ergue um dedo da mão direita para representá-lo (Figura 14), adequando os recursos semióticos da expressão linguística, numérica e gestos com os dedos da mão direita para argumentar a soma de trinta em trinta. Em outras palavras, Sofia reconhece o termo desconhecido e lida com ele durante todo o processo, ao mesmo tempo recorre aos recursos semióticos para argumentar a realização das operações de adição. Alertamos que todos os gestos foram realizados de forma rápida.

Figura 15 – Resolução do problema b por Beatriz e Sofia


b. Para 50 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta.

150 pois a cada 30 folhas 10 estudantes os usam folhas

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Na figura 15 notamos indicativos da estratégia preliminar utilizada nos problemas anteriores (*a*, *b*). Enquanto estávamos no decorrer do 1° momento, especificamente durante/realizando a leitura da tarefa 1, a estudante Sofia fez a seguinte afirmação: "*eu já descobri o padrão*", porém, propormos uma indagação associada ao problema justamente para identificar e compreender as estratégias.

A discussão teórica da TO descreve a importância de identificar o método analítico-dedutivo e como ocorre durante todo o desenvolvimento da atividade e a partir disso podemos identificar como os estudantes lidam como o desconhecido, de modo como se ele fosse conhecido ou não, ou seja, observa-se "[...] todo o processo e não apenas na busca do seu resultado, mas na sua manipulação como a representação de uma quantidade" (GOMES, 2020, p. 126).

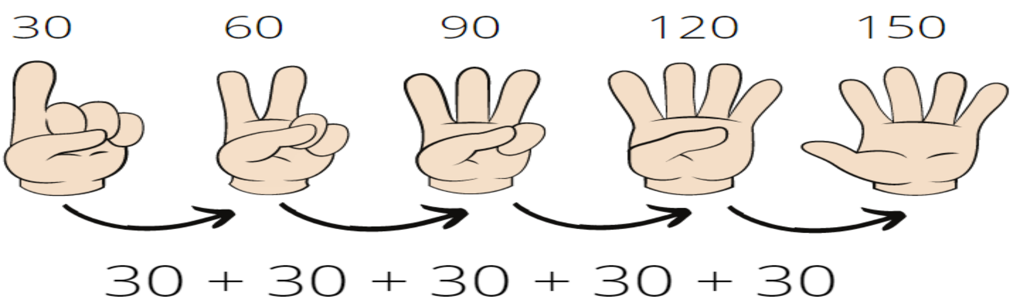
Beatriz e Sofia descobriram e manipularam a relação proporcional do primeiro par (A: B). Indiretamente a dupla resolveu os problemas *a* e *b* a partir da observação da relação de primeira ordem de (A:B), que infere diretamente na segunda relação (C:D). Essa inferência está ligada com a relação de segunda ordem, na qual se relaciona ambas as relações de primeira ordem (SPINILLO, 1993; VIANA; MIRANDA, 2016, LORENZUTTI, 2019). Este embasamento teórico vai de encontro a estratégia adotada – de contar de trinta em trinta, porém para realizar as operações Sofia recorre aos recursos semióticos para materializar suas ideias.

O trecho da fala a seguir traz outros indícios do indeterminado, bem como a materialização das ideias de Sofia acerca das operações que foram realizadas.

> ***PROFESSORA**: De trinta em trinta até chegar em cento e cinquenta? [apontando para as anotações das estudantes]. Mas porque vocês fizeram dessa forma?*
>
> ***BEATRIZ**: É, até chegar em cento e cinquenta. Até em cinquenta, no caso. Até em cinco, porque a gente acrescentou de dez em dez, então na mão seria cinco, o que equivale a cinquenta [A estudante tenta explicar o seu pensamento e o porquê de utilizar os dedos da mão para contar].*

Notamos a presença do indeterminado e dos recursos semióticos para justificar as operações. A partir da observação e a organização da proporção – de que para cada grupo de 10 estudantes são necessárias 30 trinta folhas de papel sulfite (Figura 16). A dupla permaneceu com a mesma estratégia, no entanto, tiveram que realizar adaptações porque a quantidade de estudantes solicitado do problema *b* é maior. *"[...] Na mão seriam cinco, que equivale a cinquenta*" reconheceram que para calcular a quantidade de folhas basta utilizar os cinco dedos da mão direita de modo que cada dedo representa um grupo de trinta de folhas.

Figura 16 – Agrupamento de trinta folhas para dez estudantes




Fonte: dados de pesquisa (2022).

Durante o desenvolvimento da atividade Sofia realiza gestos com os dedos da mão direita que auxiliaram na resolução do problema (Figura 16). Enquanto pronunciava um dos números, erguia o dedo correspondente da mão direita. Em outras palavras, número *trinta erguendo o dedo mínimo; sessenta erguendo o dedo anelar; noventa folhas erguendo o dedo médio; cento e vinte erguendo o dedo indicador; e o cento e cinquenta erguendo o dedo polegar*, ilustrado na figura 16. Para a TO os elementos caracterizadores do pensamento algébrico não se restringem "[...] apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de *raciocínio* que é feito com grandezas" (RADFORD, 2021, p. 173).

Observando os trechos da fala e a folha de registro da dupla (Figura 15) reconhecemos o senso do indeterminado e a denotação neste momento da atividade. O primeiro elemento citado se faz presente em dois instantes: i) a partir do estabelecimento do primeiro par (A:B) no qual a cada grupo de dez estudantes são necessárias trinta folhas de papel sulfite; ii) no agrupamento de *"essa letra b foi só adicionando trinta"* e "*trinta em trinta vai acrescentar o resultado"* para determinar o termo desconhecido solicitado no problema b. À medida que a dupla justifica a soma de trinta em trinta, recorrem a denotação para nomear e representar as quantidades indeterminadas por meio da linguagem natural (a pronúncia dos números – trinta, sessenta, noventa, cento e vinte e o cento e cinquenta) e os gestos (erguendo os dedos da mão direita um de cada vez) de modo a combiná-los. Segundo Radford (2021, p. 173) isto "pode ser realizado de várias maneiras. Signos alfanuméricos podem ser usados, mas não necessariamente".

Resolução dos dois últimos problemas proposto na tarefa 1. No problema *c* – para 150 estudantes, quantas folhas serão necessárias. Como você fez para descobrir esta quantidade. Enquanto no problema *d* – agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobri a quantidade de folhas de papel sulfite para 250 estudantes. Logo abaixo incluímos uma pergunta próxima ao problema *b* com intuito de observar se os estudantes continuaram ou não com a mesma estratégia para resolver os dois últimos problemas, como mostra o trecho da fala abaixo.

> ***PROFESSORA:*** *Deixa-me entender. Cinquenta. Aqui foi cinquenta (apontando para o resolução do problema b), aí, vocês encontraram cento e cinquenta folhas.*
>
> ***BEATRIZ E SOFIA:*** *Sim (em coro).*
>
> ***PROFESSORA****: Porque cento e cinquenta folhas, mais cento e cinquenta, mais cento e cinquenta? (apontando para a resolução do problema c. [A dupla registros duas formas de resolução para o problema c, no primeiro 150 + 150 + 150 e o segundo 150 x 3]. Vocês foram testando até encontrar esse valor?*
>
> ***SOFIA****: A gente partiu desse resultado aqui (apontando para os resultados obtidos no problema b).*
>
> ***BEATRIZ:*** *Porque aqui está dizendo para 150 estudantes, quantas folhas serão necessárias? (Refere-se ao enunciado do problema c)*
>
> ***PROFESSORA****: Vocês partiram do resultado anterior?*

> ***BEATRIZ E SOFIA:*** *Sim (em coro).*
>
> ***PROFESSORA****: Vocês encontraram que para cinquenta estudantes são necessárias cento e cinquenta folhas e para cento e cinquenta estudantes são necessárias quatrocentos e cinquenta folhas?*
>
> ***BEATRIZ****: Isso. Porque é. Tipo, se você tem 10 estudantes, são trinta folhas.*

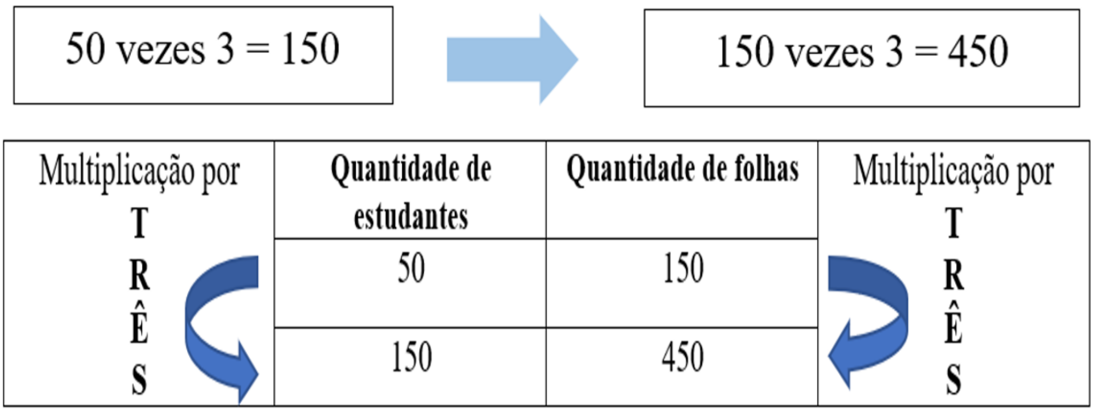
Considerando os trechos acima conseguimos identificar o rompimento da estratégia anterior. Na qual recorreram aos recursos semióticos, de forma a levantar um dedo da mão direita por vez em sincronia com a pronúncia do trinta, sessenta, noventa, cento e vinte e o cento e cinquenta, isto significa contar de trinta em trinta. Entretanto, agora torna-se inviável realizar as operações com os números que foram solicitados; sendo assim, os estudantes foram convidados a entrar em um nível mais profundo de objetivação do que aquele da ação e percepção dos anteriores (RADFORD, 2009).

Inicialmente, Sofia e Beatriz fizeram um comentário acerca dos dados disponibilizados na tarefa e dos resultados obtidos nos problemas *b* e *c* que chamou a nossa atenção. "*A gente faz pela resposta da letra b para fazer a letra c (apontando os resultados obtidos no problema b).* O quantitativo solicitado no problema *b* (50 estudantes) e no *c* (150 estudantes) resolvendo o primeiro encontram o total de 150 folhas de papel sulfite, que por sua vez, coincide com valor solicitado no problema. Isto foi rapidamente identificado e manipulado. Com base nos trechos descritos acima, esta estratégia torna-se explícita.

> ***SOFIA:*** *Aqui é cinquenta vezes três. No caso, aqui o resultado daqui que vai dar cento e cinquenta [apontando para os dados do problema b depois para o resultado dele]. Aí, a gente pega o cento e cinquenta e multiplica por três (com a mão direita levemente curvada realiza o movimento de um semicírculo, uma pequena pausa). A gente pegou o resultado daqui e multiplicou por três (agora com a mão reta, realiza o mesmo movimento) [13:47; 13:58].*
>
> ***BEATRIZ****: que no caso dá 450.*
>
> ***PROFESSORA:*** *Entendi o raciocínio de vocês. E vocês descrevem isso aqui (Apontando para a resolução do problema c).*
>
> ***BEATRIZ:*** *Que chega ao resultado de quatrocentos e cinquenta, ou seja, para 150 estudantes são necessárias quatrocentas e cinquenta folhas.*

“*Aqui é cinquenta vezes três, no caso aqui o resultado daqui que vai dar cento e cinquenta. Aí, a gente pega o cinquenta e multiplica por três. A gente pegou o resultado daqui e multiplicou por três”* (Figura 17), ao mesmo tempo Sofia recorre a mão direita para realizar alguns movimentos. Em virtude da covariação de grandezas que foi estabelecida no início da resolução do problema e que permanece sendo utilizada pela dupla nos demais problemas.

Figura 17 – Esboço da estratégia utilizada por Beatriz e Sofia para o problema *c*




Fonte: dados da pesquisa (2022).

A partir da observação da covariação Sofia multiplica o cinquenta (quantidade de estudantes disponibilizada no enunciado) por três, encontrando o resultado de cento e cinquenta folhas, como já foi mencionei o último valor coincide, como a quantitativo solicitado no problema *c*. Com isso, Sofia multiplicou o cento e cinquenta por três também, porque se multiplicarmos o cinquenta por três obtemos o valor de cento e cinquenta, ou seja, basta multiplicar o cento e cinquenta por três encontrando o valor de quatrocentos e cinquenta. Demonstrando conhecimento acerca das operações aritméticas[29]. Na figura acima ilustramos a estratégia utilizada pela dupla de meninas para resolução do problema.

Outro trecho da fala que também chamou a nossa atenção foi: “*cento e cinquenta, mais cento e cinquenta, mais cento e cinquenta (em coro) [nesse período as estudantes realizam movimentos distintos para representar a mesma operação: Beatriz bate a ponta do lápis três vezes na folha, enquanto Sofia realiza o movimento de contar com os três dedos da mão esquerda, o mínimo, anelar e médio]”* [13:05; 13:09]. Parecido com o movimento utilizado para contar de trinta em trinta no problema *b*, porém, neste momento Sofia utilizou a mão esquerda para contar de cento e cinquenta em cento e cinquenta.

[29] É uma operação aritmética que permite somar um número, chamado multiplicando, tantas vezes como parcela quantas são as unidades de um outro número chamado multiplicador.

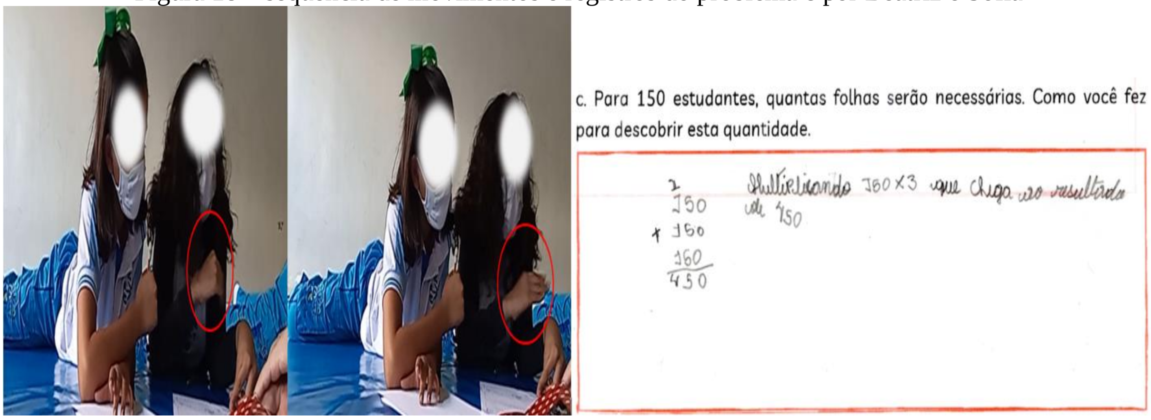
Com a finalização da resolução do problema *c*, buscamos identificar estratégias e indícios dos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico na transcrição das falas, nos registros escritos, nos gestos e nas expressões corporais. Depois de reconhecer a aplicação da operação aritmética da multiplicação e em decorrência do resultado encontrado pelas estudantes, observamos a referência ao indeterminado durante um trecho da fala supracitado, bem como na análise dos registros escritos (Figura 18 - lado direito). Interpretando os recortes: "*cento e cinquenta, mais cento e cinquenta, mais cento e cinquenta (em coro)*" e *"[...] a gente pega o cento e cinquenta e multiplica por três*", conferimos indícios do indeterminado a partir das operações aritméticas:

$$a + a + a = b \;\; \therefore \;\; a = 50 \; e \; b = 150$$
$$\text{logo } 3a = b$$

Elas reconhecem duas formas para resolver o problema: I) a adição de parcelas iguais 150 + 150 + 150, encontrando o total de quatrocentos e cinquenta; II) a multiplicação do 150 x 3, encontrando o mesmo valor. Sofia e Beatriz demonstram domínio sobre as operações de adição e multiplicação, e isto facilmente pode ser observado durante o desenvolvimento da atividade. Simultaneamente, elas recorrem aos meios semióticos, neste caso foram os recursos linguísticos para justificar a adição de parcelas iguais, ou então, a multiplicação por três e os gestos realizados por Beatriz (bate a ponta do lápis três vezes na folha) e Sofia (contando com o auxílio dos três dedos da mão esquerda, o mínimo, anelar e médio*)* (Figura 18 - lado esquerdo).

Para nomear ou simbolizar a adição de parcelas iguais, as estudantes realizam movimentos diferentes. Beatriz bate a ponta do lápis três vezes na folha, enquanto Sofia conta com os três dedos da mão esquerda, pronunciando cento cinquenta enquanto ergue o dedo mínimo, mais cento e cinquenta erguendo o dedo anelar, mais cento e cinquenta erguendo o dedo médio; semelhante ao movimento realizado no problema anterior, porém, com valores de correspondência diferente. Em contrapartida, para simbolizar a multiplicação por três, Sofia realiza semicírculos com a mão direita no ar, na sequência, uma pequena pausa e, por último, outro semicírculo (Figura 18 - lado esquerdo), e o recurso linguístico "*a gente pegou o resultado daqui e multiplicou por três*". Baseia-se em "[...] mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma coordenação rítmica sofística de gestos, palavras e símbolos" (RADFORD, 2009, p. 9, tradução nossa).

Figura 18 – sequência de movimentos e registros do problema c por Beatriz e Sofia




Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Até o momento identificamos a presença de dois elementos caracterizadores do pensamento algébrico: a indeterminação, denotação e alguns indícios do processo dedutível. Quando as quantidades indeterminadas foram simbolizadas por intermédio da linguagem natural, movimentos, signos, de modo a combiná-los. Mesmo observando que elas não fizeram uso do método de tentativa e erro, não temos uma garantia da mobilização do pensamento algébrico na perspectiva da TO. Nesse sentido, Radford (2009, 2010, 2013, 2020, 2021) descreve que a analiticidade é a responsável pela distinção entre pensamento aritmético e o algébrico. E, este elemento se baseia em dois vetores: “1) inclui as grandezas determinadas e indeterminadas; e o 2) operar dedutivamente” (RADFORD, 2021, p. 173).

Diante das situações, a dupla identificou A, B, C, D, as relações de primeira e segunda ordem, e em decorrência da correspondência, as variações entre eles; que foram fundamentais para os surgimentos de dêiticos espaciais, assim como, a recorrência aos recursos semióticos para simbolizar as quantidades indeterminadas ao longo da atividade. Nesse sentido, acreditamos que as estudantes estão lidando com grandezas desconhecidas, como se fossem conhecidas, considerando os aspectos pontuados acima, porém elas ainda não conseguiram deduzir de forma explícita. O que era, de certo modo, esperando no problema *c*, primeiro questionando como descobrir a quantidade de folhas necessárias para 150 estudantes e como fizeram para descobrir esta quantidade.

Para resolver o problema *d*, a dupla deixou de lado a adição de parcelas iguais e permaneceu apenas com a última estratégia do problema anterior. Multiplicando por três a quantidade de estudantes disponibilizada no enunciado, no caso duzentos e cinquenta vezes três. Tanto que esta discussão se sucedeu de forma breve e as problemáticas rodearam a ideia de como escrever uma mensagem para um amigo de classe.

> ***BEATRIZ**: Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite para 250 estudantes (leitura do problema d).*
>
> ***SOFIA**: Já saquei.*
>
> ***SOFIA:** Vezes três.*
>
> ***SOFIA**: Ah! Vezes três.*
>
> ***SOFIA:** Oh. É vezes três desde sempre.*

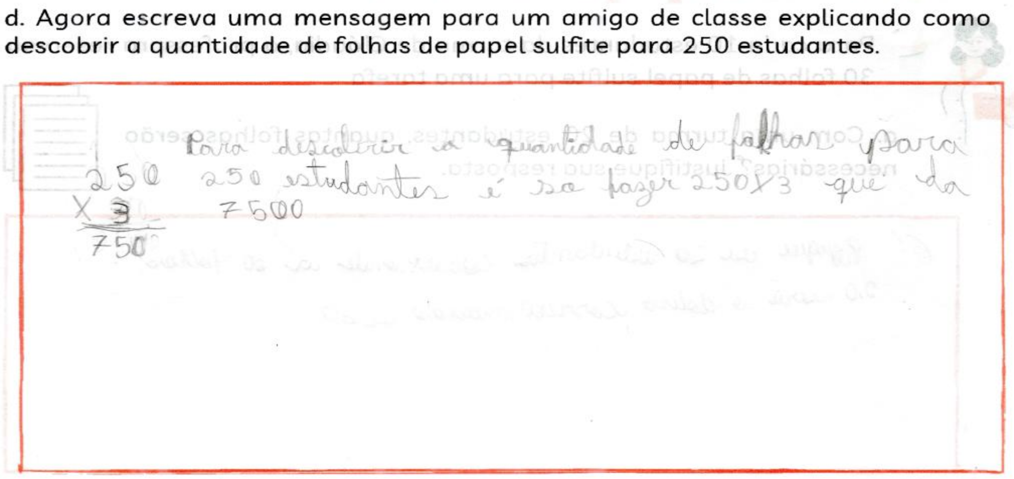
Um trecho da fala da estudante Sofia chamou a nossa atenção *"É vezes três desde sempre"*, notamos a presença de outro dêitico também durante a resolução da tarefa 1. O dêitico "*desde sempre*" está associado a estrutura numérica dos problemas (VERGEL, 2021), ou seja, Sofia percebeu que sempre tem que multiplicar por três o número de estudantes disponibilizado no enunciado, por exemplo: cinquenta vezes três, cento e cinquenta vezes três, duzentos e cinquenta vezes três para encontrar o total de folhas necessárias. Neste momento observamos que elas revelam os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico. A denotação de quantidade indeterminadas simbolizada pelos recursos linguísticos "*é vezes três desde sempre",* os gestos com a mão direita no ar; e a dupla de baseou-se uma sequência ou ordem de certezas para resolver os problemas até agora, ou seja, o processo dedutível de uma fórmula sem o simbolismo alfanumérico.

Em outro momento da discussão Beatriz relata que percebeu um aumento de cem em cem, no que diz respeito a quantidade de estudantes disponibilizada nos problemas ($b$ – 50 estudantes, $c$ – 150 estudantes e no $d$ – 250 estudantes), mas a Sofia tenta convencer a sua colega que esta lógica não funciona para todos os problemas propostos na tarefa 1. Com a continuação desse diálogo, Sofia argumenta que para encontrar o número de folhas basta multiplicar por três. Nesse sentido, elas continuam com a mesma estratégia desde o problema $c$.

> ***PROFESSORA**: Vocês perceberam alguma relação ou alguma coisa entre os problemas ?*
>
> ***BEATRIZ**: Que sempre tem que multiplicar por três.*
>
> ***PROFESSORA**: Por quê?*
>
> ***BEATRIZ**: Porque é a quantidade de folhas. O três sempre aparece.*

Conseguimos identificar a última relação estabelecida a partir do trecho “*porque é a quantidade de folhas. O três sempre aparece*”. Inferimos que Sofia percebeu a relação entre a quantidade de folhas e de estudantes, na qual para cada 10 estudantes são necessárias 30 folhas de papel sulfite, ou seja, cada estudante deve receber três folhas para o desenvolvimento da atividade proposta pela professora Cláudia. Esta relação não foi registrada de imediato, aos poucos elas estabeleceram as correspondências entre os valores disponibilizados em cada problema, simultaneamente recorrendo aos recursos semióticos: os recursos linguísticos – “*[...] o três sempre aparece”* e os gestos com a mão direita.

Figura 19 – resolução do problema d pela dupla Beatriz e Sofia




Fonte: dados da pesquisa (2022).

Sobre os elementos caracterizadores do pensamento algébrico: indeterminação (*objetos* do raciocínio), denotação (*objetos* são simbolizados) e a analiticidade (*raciocina* sobre objetos do raciocínio). Conferimos evidências da analiticidade a partir das operações que foram realizadas e dos recursos linguísticos, no caso “*vezes três*”, “*o três sempre aparece*”, surgindo durante a resolução do problema *d*.

Nesse sentido, acreditamos que as estudantes estão lidando com grandezas desconhecidas, como se fossem conhecidas considerando os aspectos pontuados acima, no problema *d*, Sofia conseguiu operar dedutivamente a partir do trecho “*porque é a quantidade de folhas. O três sempre aparece*”, estabelecendo a relação entre as quantidades apresentadas anteriormente. Sem recorrer ao simbolismo alfanumérico porque estamos trabalhando nos anos iniciais do EF.

### 5.1.1 Síntese do Episódio 1

Agora vamos recapitular as estratégias utilizadas pelos estudantes, de modo a observar se elas coincidem com a estrutura da generalização algébrica das sequências - Figura 6 (RADFORD, 2021). Atentado ao fato que propomos tarefas de valor omisso que possibilitam o convívio e familiarização com vários problemas que envolvem o número desconhecido com um nível de dificuldade gradativo.

Segundo a estrutura da generalização apresentada por Radford (2013, 2021) os estudantes iniciam pelo campo perceptivo, ou seja, tudo o que está no campo visual e a partir disso selecionam alguns elementos. Isto favorece as *determinações sensíveis, "[...]* por exemplo, deter-se na *relação de recorrência* entre termos consecutivos ou deter-se nas *linhas* dos termos, são duas determinações sensíveis diferentes; são duas formas de ver os termos da sequência" (RADFORD, 2021, p. 179). A priori o cerne concentra-se nas quantidades, depois passa a ser as formas dos termos. Ainda conforme o autor supracitado considerando as duas formas diferentes de *determinações sensíveis*, extrai-se uma *característica comum* que é percebida a partir de um número finito de termos. Mais adiante a *característica comum* é *generalizada aos* outros termos da sequência.

Agora retomamos as estratégias utilizadas pelas estudantes com o propósito de identificar a estrutura da generalização durante a atividade de ensino-aprendizagem. Durante a realização da tarefa a dupla identificou que dez estudantes correspondem a trinta folhas, então, quando questionados sobre quantas folhas são necessárias para vinte estudantes, respondem rapidamente: sessenta, considerando a relação entre as grandezas estabelecidas (A:B) e (C:D). Por meio da observação e percepção das relações entre as grandezas, o modo como variam e a inferência que elas proporcionam aos termos, nestes momentos as estudantes estavam nas *determinações sensíveis.*

Com base nas *determinações sensíveis* – dez estudantes correspondem a trinta folhas, então para vinte estudantes dobramos a quantidade de folhas, elas estabelecem as determinações de uma *característica comum* que está atrelada à problemática dos problemas seguintes. *"[...] Na mão seriam cinco, que equivale a cinquenta*" reconheceram que para calcular a quantidade de folhas basta utilizar os cinco dedos da mão direita de modo que cada dedo representa um grupo de trinta folhas. Durante o desenvolvimento da atividade realizaram gestos com os dedos da mão direita que auxiliaram na resolução do problema. A *característica comum* surgiu na pronúncia dos números trinta, sessenta, noventa, cento e vinte e o cento e cinquenta, ao mesmo tempo erguia o dedo correspondente da mão direita.

Por intermédio da observação do quantitativo dos problemas, Beatriz e Sofia notam uma semelhança e a partir disso multiplica o cinquenta (quantidade de estudantes disponibilizada no enunciado) por três, encontrando o resultado de cento e cinquenta folhas, como já foi mencionando, o último valor coincide, como a quantitativo solicitado no problema c. Com isso, Sofia e Beatriz multiplicaram o cento e cinquenta por três também, porque se multiplicarmos o cinquenta por três obtemos o valor de cento e cinquenta, ou seja, basta multiplicar o cento e cinquenta por três encontrando o valor de quatrocentos e cinquenta. No problema seguinte, as estudantes continuam com a mesma estratégia de multiplicar por três e acrescenta "*é vezes três desde sempre"*.

"A abdução nos permite gerar um procedimento, mas não uma expressão direta, em outras palavras, uma fórmula" (RADFORD, 2021, p. 180). Elas não recorreram ao método de tentativa e erro, mas, sim, submeteram os números a algumas provas, por exemplo: "*aumentou aqui, aqui aumentou, aumentou aqui. Aqui não aumentou vinte para trinta".* Neste recorte da fala as estudantes estavam observando o aumento no quantitativo de estudantes disponibilizado nos problemas *b*, *c*, *d*. Inclusive, elas conseguiram iniciar o processo de dedução da fórmula considerando as assertivas – *"é vezes três desde sempre", "que sempre tem que multiplicar por três",* porém, não utilizam o simbolismo alfanumérico porque esta atribuição não pertence a etapa dos anos iniciais do EF. De certo modo elas não dispõem de recursos suficientes para escrever uma mensagem para um amigo especificando por meio de uma "fórmula", mas conseguem identificar que qualquer número multiplicado por três favorece a descoberta do quantitativo de folhas de papel sulfite.

Ao longo da tarefa 1 de forma gradativa Beatriz e Sofia alguns indícios. Inicialmente estabelecem os pares ordenados (A:B) e (C:X) em virtude da observação o quantitativo de estudantes disponibilizado no enunciado da tarefa 1 ao que foi questionando no problema *a* descobrindo o aumento de trinta em trinta. Ao mesmo tempo recorrendo aos dedos da mão direita para simbolizar as quantidades indeterminadas, no caso a soma de trinta em trinta. Porém esta estratégia não pode ser utilizada para todos os problemas, porque nos problemas (*c* e *d*) questionávamos sobre números mais distantes. Fazendo com que as estudantes buscassem por outras estratégias, sendo a estratégia de é *"vezes três desde sempre"*, revelando o processo dedutível, em outras palavras a analiticidade.

Sofia e Beatriz já estavam recorrendo a denotação para simbolizar as quantidades indeterminadas, no entanto o desafio dos problemas com valores distantes fez com que elas buscassem por uma forma de resolvesse de forma mais rápida, ou seja, revelando o opera dedutivamente, uma vez que elas não fizeram uso do método de tentativa e erro. Sendo assim acreditamos que Beatriz e Sofia revelaram os elementos caracterizadores. Por isso, acreditamos que elas revelaram os elementos caracterizadores durante a resolução da tarefa 1.

Por fim com relação a tarefa de valor omisso que foi proposta as duplas acreditamos que as nossas evidências vão de encontro a discussão de Costa e Ponte (2008), Viana e Miranda (2016) descrevendo o uso frequente dos pares ordenados, a análise das relações entre quantidades, covariação entre grandezas, assim como a recorrendo de estratégias de estruturas aditivas e multiplicativas.

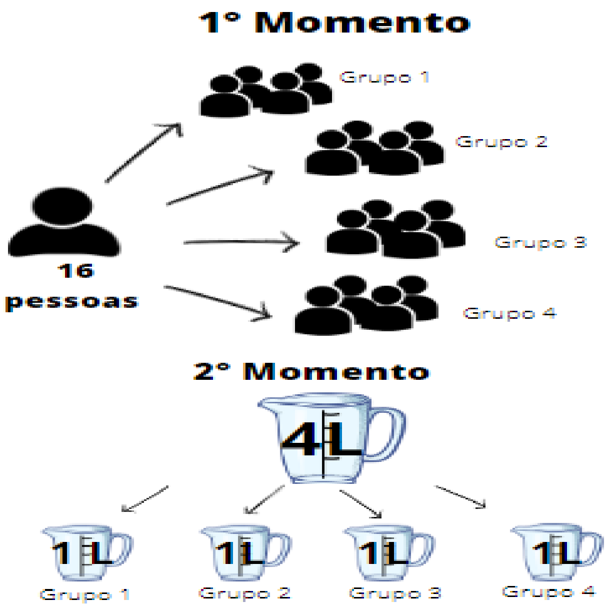
## 5.2 EPISÓDIO 2 – DUPLA A

Com uma estrutura parecida com a tarefa anterior, no entanto as grandezas foram diferentes quantidade de pessoas e os litros de água para se fazer uma sopa. Envolvemos aos estudantes em variações de grandezas e a seguir apresentamos alguns recortes da atividade de ensino-aprendizagem. Na tarefa 2 apresentamos que para fazer uma sopa que pode servir 16 pessoas, são necessários 4 litros de água. No primeiro problema, questionamos, quantos litros são necessários para fazer uma sopa para 8 pessoas? Depois de alguns minutos, Sofia relata que fez uma descoberta sobre um padrão conforme o trecho a seguir.

> ***SOFIA:*** *Eu já descobri um padrão.*
>
> ***PROFESSORA:*** *Qual é o padrão, Sofia?*
>
> ***SOFIA****: é um litro para cada quatro pessoas.*
>
> ***PROFESSORA****: Por quê?*
>
> ***SOFIA****: Ó. Quatro, oito, doze, dezesseis [contando de quatro em quatro usando os dedos da mão direita, iniciando pelo quatro - erguendo o dedo mínimo, oito - dedo anelar, doze - dedo médio e o dezesseis - dedo indicador]. Aí, essa é quatro litros [apontando para os dados da tarefa 2] um litro, dois litros, três litros, quatro litros [com os quatro dedos da mão direita erguidos, começou a contagem convencional de um em um, recorrendo aos mesmos dedos da mão direita, porém, à medida que pronuncia um número, torcer a ponta do dedo correspondente].*

Podemos perceber a elaboração de uma estratégia que auxiliou na resolução do problema com base nos dados fornecidos. Por consequência, Beatriz e Sofia fracionaram a estratégia em dois grandes momentos: i) a partilha das dezesseis pessoas em quatros grupos e cada um deles contém quatro pessoas, ou, então, simbolicamente (16/4 = 4); ii) para que a sopa seja feita para os grupos, dividiram os quatros litros de água para os quatros grupos (organizado no primeiro momento), assim, cada grupo recebeu o equivalente a um litro de água, simbolicamente (4/4 = 1) sintetizados na Figura 20. À medida que apresentava os dois grandes momentos, Sofia realizava alguns gestos com os dedos da mão direita. A priori a contagem de quatro em quatro para argumentar o primeiro momento, depois a contagem convencional e torcendo a ponta do dedo correspondente, resultando em um litro de água para cada grupo. Desse modo, podemos observar a presença dos recursos semióticos: a expressão linguística, a numérica e os gestos para argumentar e confirmar todas as operações que vinham sendo desenvolvidas.

Figura 20 – Ilustração da estratégia desenvolvida por Sofia



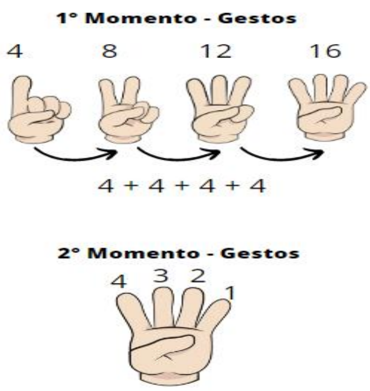

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Durante o desenvolvimento da atividade Sofia realizou alguns gestos com os dedos da mão direita que auxiliaram na resolução do problema em questão. Gradualmente, Sofia pronunciava um dos números de modo a erguer o dedo correspondente, *quatro erguendo o dedo mínimo, oito erguendo o dedo anelar, doze erguendo o dedo médio, dezesseis erguendo o dedo indicador*, contando de quatro em quatro (Figura 21 - parte superior). Elas organizaram dezesseis pessoas em grupos e cada uma delas incluía quatro pessoas; depois ergue os dedos da mão direita e inicia a contagem novamente de modo a torcer a ponta do dedo: *um erguendo o dedo mínimo, dois erguendo o dedo anelar, três erguendo o dedo médio, e o quatro erguendo o dedo indicador*, distribuindo os quatros litros de água para os respectivos grupos (Figura 21-

parte inferior). Os elementos caracterizadores do pensamento algébrico não se restringem “[...] apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de *raciocínio* que é feito com grandezas” (RADFORD, 2021, p. 173).

As estudantes reconhecem a relação entre os valores disponibilizados, no caso as dezesseis pessoas e os quatro litros de água que são necessários para fazer a sopa. Demonstrando noções de proporção de modo a estabelecer a relação de primeira ordem (16:4), além do conhecimento acerca das quatro operações considerando a forma que elas trabalham com a relação de primeira ordem; agrupando as dezesseis pessoas em quatro grupos com quatros pessoas. Posteriormente à descoberta da relação de segunda ordem (4:D[30]) considerando o agrupamento anterior distribuem os quatros litros de água do problema à para os grupos, ou seja, cada um recebe um litro de água. Pontuando que em caso de variação na relação de primeira ordem consequentemente altera-se a segunda.

Figura 21 – Ilustração dos gestos




Fonte: Dados da pesquisa (2022).

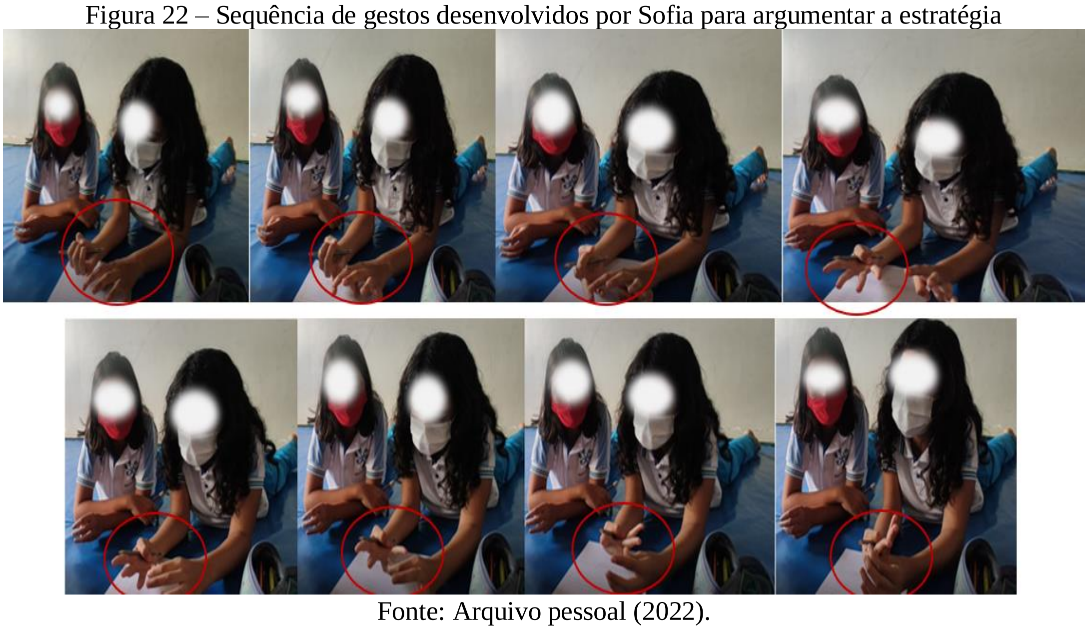
Com a observação dos trechos da fala, reconhecemos a combinação do senso de indeterminação e denotação, para revelar a inferência ao processo dedutível, pela forma como elas organizam os grupos e a quantidade de água distribuída para cada um deles. No primeiro momento, à medida que elas justificam a soma de quatro em quatro, elas recorrem a simbolização dos *objetos* do raciocínio para nomear e representar as quantidades indeterminadas por meio da linguagem natural (a pronúncia dos números – quatro, oito, doze, dezesseis) e os gestos (erguendo os dedos da mão direita um de cada vez) ilustrado na figura 22 - parte superior; no segundo momento, recorrem a contagem convencional de um até quatro, e os gestos (erguendo os dedos da mão direita e torcendo a ponta deles) de modo a combiná-

[30] O D representa o termo desconhecido como já foi mencionado anteriormente.

los, ilustrado na figura 22 - parte inferior. Segundo Radford (2021, p. 173) isto “pode ser realizado de várias maneiras. Signos alfanuméricos podem ser usados, mas não necessariamente”.

Ao mesmo tempo, outros indícios podem ser observados como o trabalho com grandezas determinadas e indeterminadas considerando por meio do fracionamento da estratégia, em que as operações estavam presentes: i) 16/4 = 4 e o ii) 4/4 = 1. Isto significa que elas estabeleceram relações entre os dois tipos de grandezas que foram propostas (RADFORD, 2021), no caso o quantitativo de pessoas e a quantidade de litros de água para fazer a sopa. Assim, como trabalham com o desconhecido de modo a tornar-se conhecido pelo fato de distribuir as dezesseis pessoas em quatro grupos, ou seja, grupos com quatro pessoas; e na sequência a partilha de um litro de água para os respectivos. Ou seja, manuseando com grandezas indeterminadas como se fossem números específicos (RADFORD, 2009, 2021), revelando a analiticidade.

Figura 22 – Sequência de gestos desenvolvidos por Sofia para argumentar a estratégia



Fonte: Arquivo pessoal (2022).

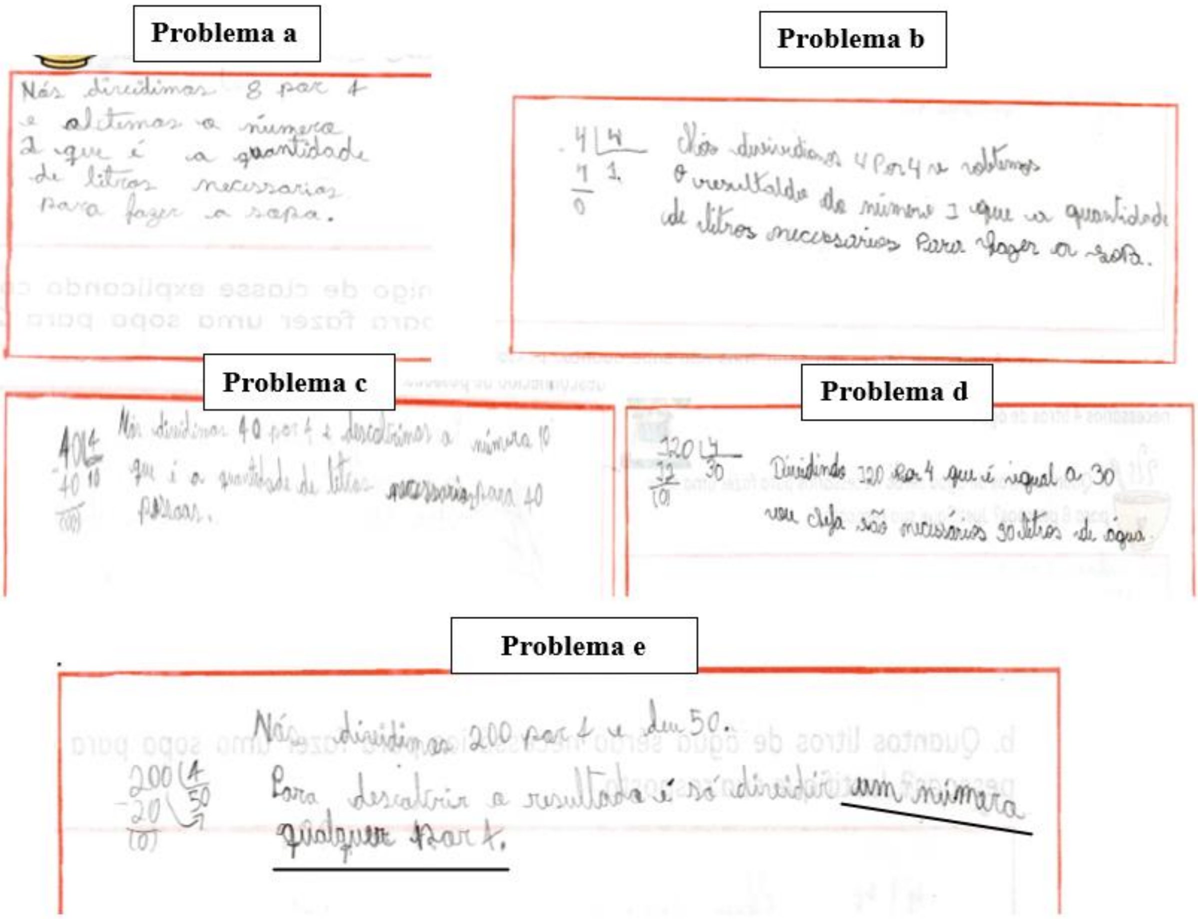
> ***SOFIA****: É praticamente o mesmo raciocínio desses dois [referindo-se a tarefa 2 e o problema a] quatro dividido por quatro que deu um litro para cada pessoa.*
>
> ***BEATRIZ****: A gente meio que tem que dividir a quantidade de pessoas por quatro, entendeu?*
>
> ***PROFESSORA:*** *E o quatro corresponde ao que?*
>
> ***BEATRIZ****: a quatro litros de água que está no enunciado da questão. A gente sempre tá dividido por quatro e tá chegando ao resultado, entendeu?*

Este recorte chamou a nossa atenção justamente por confirmar a discussão anterior, na qual a dupla já percebeu o estabelecimento de relações entre as grandezas, assim como a continuação da estratégia anterior, de modo a dividir a quantidade de pessoas disponibilizada em cada problema por quatro, exemplificando: problema *a* (oito por quatro encontrando o resultado de dois litros de água); problema *b* (quatro por quatro encontrando o resultado de um litro de água); problema *c* (quarenta por quatro encontrando o resultado de dez litros de água); problema *d* (cento e vinte por quatro encontrando o resultado de trinta litros de água) e assim sucessivamente. Destacando que o nosso objeto não era analisar se as operações estavam corretas, mas, compreender quais foram as estratégias adotadas e em que momento foram utilizadas, e a partir disso identificar ou não os elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.

Com base nos recortes da fala "*A gente sempre tá dividido por quatro e tá chegando ao resultado*", "[...] *tá usando a mesma estratégia dos outros já que são quarenta pessoas, quarenta dividido por quatro. É porque é assim quando você descobre a estratégia de usar aí fica moleza [...]*". Considerando as observações perceptivas realizadas durante a leitura e resolução da tarefa 2, Beatriz e Sofia foram capazes de objetivar uma *regularidade* entre os dados no qual todos são múltiplos de quatro, para isto acontecer recorreram a combinação de gestos, palavras e símbolos matemáticos para argumentar (Figura 22). No entanto, isto não é um argumento suficiente para garantir a generalização das estudantes (RADFORD, 2009).

Em outro momento, analisando os registros escritos da dupla, identificamos a presença da mesma estratégia em todos os problemas propostos (Figura 23). E no problema e notamos o seguinte trecho "[...] *é só dividir um número qualquer por 4*" (Figura 23 - última imagem), ou seja, recursos linguísticos que indicam a descrição de um termo geral. Ressaltando que nos anos iniciais os estudantes não estão habituados com o simbolismo alfanumérico, podem demonstrar ideia/noção de relações que correspondem ao convencional que é guiado/utilizado para os anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 23 – Registros escritos da tarefa 2 pela dupla de meninas




Fonte: Arquivo da pesquisa (2022).

Sublinhamos na figura acima o trecho que corresponde a descrição de um termo geral utilizado pelas estudantes – *“Para descobrir o resultado é só dividir um número qualquer por 4”.* Radford (2014) defende que o uso de letras não é uma condição necessária para pensar algebricamente. Apesar da descrição do termo não ser algébrica, justamente porque os estudantes do 5° ano do EF não tiveram ainda contato com alguns conceitos como variável, incógnita, parâmetros e entre outros. Mas, estamos considerando que elas não fizeram uso do método de tentativa e erro, ou seja, se baseiam em uma ordem de certezas retomando que a estratégia foi fracionada em dois grandes momentos apresentados anteriormente. “O fato de que ao pensar algebricamente o estudante inclui em seu raciocínio tantas grandezas determinadas e indeterminadas significa que ele estabelece relações entre estes dois tipos de grandezas” (RADFORD, 2021, p. 173-174) e o operar dedutivamente, tudo isso foi visto durante a resolução da tarefa 2.

### 5.2.1 Síntese do 2° Episódio

Durante o desenvolvimento da tarefa 1, Beatriz e Sofia demoram um pouco mais para elaborar a(s) estratégia(s), bem como na observação de alguns aspectos, acreditamos que isto ocorreu pela falta de familiarização com tarefas de valor omisso[31] e os respectivos problemas que envolvem o número desconhecido com um grau de dificuldade crescente. Diante a tarefa 2, a dupla traçou algumas estratégias de forma imediata, inclusive, comparado com a tarefa do dia anterior; presume-se que isto facilitou o desenvolvimento desta.

Agora vamos sintetizar as estratégias utilizadas pelas estudantes para resolver a tarefa 2 de forma a observar se elas coincidem ou não com a estrutura da generalização algébrica das sequências (Figura 6). Recordando a estrutura iniciando pelos termos dados (p1, p2,..., p3), depois as determinações sensíveis, característica comum, abdução analítica (C se converte em H), aplicação a termos não dados (pk+1, pk+2, …) e pôr a fim a dedução da fórmula (RADFORD, 2013).

Rapidamente Sofia pensou em uma estratégia de modo a dividi-la em dois momentos. Primeiro, partilhando as dezesseis pessoas em grupos com quatro pessoas. Já no segundo, a divisão dos quatro litros de água para os respectivos grupos, cada um recebeu o equivalente a um litro de água. E a partir da observação conseguiram estabelecer as relações de primeira ordem (16:4) e depois de segunda ordem (4:D). Nesse sentido, por meio das observações selecionaram e organizaram as relações entre grandezas, neste momento a dupla estava nas *determinações sensíveis.*

O trecho a seguir marca o início da *característica comum: "a gente meio que tem que dividir a quantidade de pessoas por quatro [...]"*, isto facilitou a resolução dos problemas b, c, d. Uma vez que é "[...] percebida a partir de um número finito de termos" (RADFORD, 2021, p. 179) e que posteriormente é generalizada aos outros termos por meio da abdução analítica. Inclusive, quando a dupla foi questionada sobre como escrever uma mensagem para um amigo de classe descrevendo a quantidade de água necessária, afirmam que "*para descobrir o resultado é só dividir um número qualquer por 4".* Neste momento, as estudantes já submeteram o número quatro a finita prova e recorrem ao recurso linguístico número qualquer para argumentar isto.

Em síntese semelhante ao episódio anterior, Beatriz e Sofia recorrer à denotação para simbolizar as quantidades indeterminadas, porém neste episódio elaboraram as estratégias de

---

[31]Inclusive o professor da turma relatou posteriormente que não tinha proposto nenhum tipo de tarefa desta forma.

forma mais rápida. Por exemplo no problema a observamos a resolução em dois grandes momentos: i) a partilha das dezesseis pessoas em quatros grupos e cada um deles contém quatro pessoas, ou, então, simbolicamente (16/4 = 4); ii) para que a sopa seja feita para os grupos, dividiram os quatros litros de água para os quatros grupos (organizado no primeiro momento), assim, cada grupo recebeu o equivalente a um litro de água, simbolicamente (4/4 = 1).

Ao mesmo tempo realizaram gestos com a mão para simbolizar as quantidades indeterminadas e os recursos linguísticos para descrever um padrão para todos os problemas “[...] *é só dividir um número qualquer por 4*”. Neste contexto acreditamos que Beatriz e Sofia pensamento algebricamente porque revelaram os três elementos caracterizadores durante a resolução da tarefa 2.

Semelhante ao que foi descrito na síntese do episódio anterior a dupla não dispõe de meios suficientes para descrever uma “fórmula” porque elas ainda não conhecem o simbolismo alfanumérico que é usual para este tipo de situação. Porém conseguiram reconhecer que para fazer uma sopa envolvendo um número desconhecido de pessoas basta dividir um qualquer número por quatro. Com isso finalizamos que a dupla mobilizou o pensamento algébrico, uma vez que conseguimos identificar os três elementos caracterizadores: indeterminação, denotação e a analiticidade.

## 5.3 EPISÓDIO 3 – DUPLA B

O desenvolvimento da tarefa 1 – folhas de papel sulfite ocorreu com intuito de: a) identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes ao se depararem com tarefas que explorem o valor omisso e b) descrever os meios semióticos mobilizados pelos estudantes durante a resolução de tarefas de valor omisso e a partir disso caracterizar o pensamento algébrico mobilizado pelos quatro estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental.

Na TO, “a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do *objeto* sobre o qual se *raciocínio*), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas” (RADFORD, 2021, p. 173). Nessa mesma lógica, o teórico apresenta três elementos caracterizadores do pensamento algébrico: indeterminação (objetos do raciocínio), denotação (o modo com o objeto é representado) e a analiticidade (como o se raciocina através dos objetos de raciocínio).

Recapitulando que o último elemento é o principal responsável pela distinção entre o pensamento aritmético e algébrico, por isso requer mais atenção no processo de análise. Destacando que é necessário observar se houve um movimento de dedução ou apenas o uso do método de tentativa e erro, justamente por ser o mais utilizado pelos estudantes (RADFORD, 2009, 2010, 2021). Mesmo que demonstrem um conhecimento acerca da aritmética generalizada ou sofisticada baseado no método de tentativa e erro, isso não é considerado como uma mobilização do pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.

A princípio tivemos dificuldades para iniciar o momento de discussão com Gustavo e Enzo porque surgiram assertivas como: *"nada não"*, "*nada, nem estamos pensando*". Mesmo com o estabelecimento de uma conversa informal durante o estudo piloto (em meados de junho de 2021) e o retorno à escola para o desenvolvimento do estudo final (no fim do ano passado) no qual tivemos outra conversa informal com o mesmo propósito, contudo a dupla permaneceu com receio quanto à intervenção juntos a eles. Não sabemos ao certo o que ocasionou isto, apenas supomos alguns fatores como a exposição às câmeras dos celulares[32], a nossa presença destacando a natureza da intervenção pedagógica, a dificuldade para trabalhar de forma colaborativa com o colega ou então qualquer outra coisa de origem desconhecida. Entretanto, depois de algumas tentativas e consequentemente alguns minutos, questionamos a respeito do problema *a*.

- Tarefa 1: Para cada 10 estudantes da turma de Cláudia, a professora reservou 30 folhas de papel sulfite para uma tarefa. A) com uma turma de 20 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta.

> ***PROFESSORA:*** *Para cada dez estudantes, quantas folhas são necessárias?*
>
> ***GUSTAVO:*** *Bom. Para dez estudantes são trinta, e se a gente aumentar o valor para vinte, que a gente dobra, tem que ser dobrado de folhas, né!? (virando a mão direita).*

Neste caso, Gustavo percebeu um aumento porque comparou o quantitativo de estudantes atribuídos no enunciado da tarefa 1 ao que foi questionado no problema *a*, considerando o trecho a seguir: "*para dez estudantes são trinta, e se a gente aumentar o valor para vinte, que a gente dobra, tem que ser dobrado de folhas* [...]". Com isto, observamos o estabelecimento da relação de primeira ordem[33] no A:B. Ou seja, eles perceberam que para cada

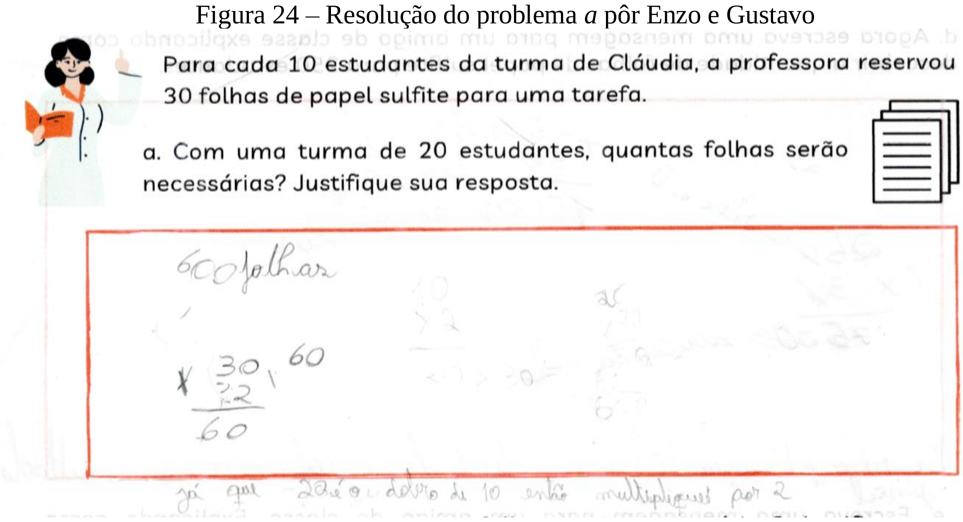
[32] Mesmo o corpo docente reforçando que eles estão acostumados com a presença destes aparelhos eletrônicos e a exposição nas redes sociais da escola.

[33] A - Representa a quantidade de estudantes e o B – a quantidade de folhas de papel sulfite referente aos valores disponibilizados no enunciado da tarefa 1.

dez estudantes são necessárias trinta folhas de papel sulfite, com o aumento no quantitativo de estudantes por consequência dobra-se a quantidade de folhas de papel sulfite. Assim, como na análise da dupla de meninas, os meninos também fazem uso do termo *"dobro"* para argumentar a resolução do problema *a*. Para TO o termo é considerado um *dêitico espacial* sendo utilizado para representar algo, neste caso a multiplicação por dois ou até mesmo o vezes dois.

Isto auxiliou na elaboração da estratégia de multiplicar trinta por dois totalizando sessenta folhas de papel sulfite (Figura 24). E a partir das observações dos dados eles estabeleceram o primeiro par A:B e por consequência o segundo C:D os respectivos valores dos pares correspondem aos apresentados no primeiro tópico da análise. Ao mesmo tempo, a dupla de meninos também recorreu às estratégias multiplicativas descritas por Viana e Miranda (2016).

Figura 24 – Resolução do problema *a* pôr Enzo e Gustavo




Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por intermédio da figura acima não conseguimos enxergar que algumas operações foram realizadas, porém durante a análise do registro original[34] identificamos: (10 x 2) e (20 x 30), no entanto, eles não deixaram estas operações nos registros por escritos. Logo abaixo do retângulo destinado para as resoluções escreveram a seguinte frase: *já que 20 é o dobro de 10 então multipliquei por 2.* Outro aspecto que também chamou a nossa atenção foi a presença do número *600 folhas* logo no canto esquerdo acima da operação (30 x 2 = 60) e na transição da fala, assim como durante os diálogos estudantes-professora ficou claro que a dupla estava tendo um conflito de estratégias, um acreditava que seria *trinta vezes* dois em virtude da observação e

[34] Todos os registros escritos das duplas foram escaneados e possivelmente em algumas ocasiões não conseguimos visualizar todas as anotações e operações que foram realizadas, mas observando os registros originais podemos identificar outros aspectos, como na situação acima.

estabelecimento dos pares ordenados, já o outro acreditava que multiplicando trinta *vezes vinte* seria suficiente para resolver. O que prevaleceu foi a estratégia do Gustavo[35] porque estava responsável por realizar todos os cálculos e enquanto o outro estava encarregado de escrever as respostas, isto foi acordado entre eles sem a nossa intervenção[36].

A priori identificamos a presença de um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na transição da fala e nos registros escritos durante a resolução do problema a. O indeterminado surge durante a argumentação da relação entre os dados: *já que 20 é o dobro de 10 então multipliquei por 2* - pelo reconhecimento e manipulação com as proporções. Ao mesmo tempo, ainda não temos evidências suficientes para garantir uma mobilização do pensamento algébrico porque observando apenas para os registros escritos fica claro que eles recorreram ao método de tentativa e, principalmente, quando apagaram as operações.

Para a resolução do problema *b* - Para 50 estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta. A dupla permaneceu com a estratégia utilizada no problema a, mas desenvolveram adaptações para facilitar as operações, como apresentamos no trecho a seguir:

> ***PROFESSORA**: Como vocês estão pensando para essa? [apontando para o problema b].*
>
> ***GUSTAVO**: Olha, temos cinquenta estudantes [mostrando o enunciado do problema b], certo?*
>
> ***PROFESSORA**: Certo.*
>
> ***GUSTAVO:** Então já temos trinta folhas [mostrando com o lápis os dados do enunciado da tarefa 1], então, simulei cinco vezes três, quinze, então adicionei um zero no final. Aí, foi cento e cinquenta folhas.*
>
> ***PROFESSORA**: Mas porque cinco?*
>
> ***GUSTAVO**: O cinco do número de estudantes e o três de trinta, aí eu fiz cinco vezes três e coloquei um zero no final.*

[35] Durante o desenvolvimento das tarefas Gustavo e Enzo quase não discutiram entre si. Com isso não conseguimos observar o eixo da colaboração humana e o eixo da produção de saberes; aspectos que fazem parte da atividade de ensino-aprendizagem na sala de aula. A dupla não trabalhou de forma colaborativa, engajando-se e se comprometendo junto ao outro para a produção de uma obra comum. Considerando que Gustavo assumiu a responsabilidade de elaborar as estratégias para resolver as tarefas e queria que Enzo fizesse responsável pela justificativa das tarefas.

[36] Foi possível observar que eles estavam com dificuldade para trabalhar de forma colaborativa.

Os estudantes persistem utilizando o número trinta vezes a quantidade de estudantes disponibilizada em cada problema. Entretanto, em um dos recortes da fala referente ao problema b temos a seguinte afirmação "[...] *simulei cinco vezes três, quinze, então adicionei um zero no final*". Eles reconhecem que a multiplicação de qualquer número por zero equivale a zero. Nesta situação fazem uso disto ao seu favor, de modo a simplificar o zero do final do número cinquenta (quantitativo de estudantes solicitados no problema em questão) e do trinta (dado disponibilizado no enunciado da tarefa 1), na sequência organizaram os fatores (5 x 3) encontrando o resultado (15) e por fim adicionam apenas um zero no final (150), como ilustramos no quadro 8.

Quadro 8 – Método utilizado para resolução do problema *b*

| |
|---|
| 50 x 30<br>5~~0~~ x 3~~0~~ →5 x 3 = 15<br><br>Depois acrescentaram um zero no final<br>**150**<br><br>No entanto deveriam ter acrescentado dois zeros seguindo o método:<br>**50 x 30 = 1500** |

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Mesmo eliminando a mesma quantidade de zero de cada fator, realizando a multiplicação (5 x 3) e seguindo a lógica do método escolhido por eles no qual não conseguiram fazer uso de forma correta porque eliminaram um zero de cada fator e depois acrescentaram apenas um zero, necessariamente dois zeros precisavam ter sido adicionados após a finalização da multiplicação. Contudo, o objetivo da pesquisa não consiste em analisar se os estudantes acertaram ou erraram as operações, mas, sim, identificar as estratégias utilizadas e os meios semióticos com a pretensão de caracterizar o pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação.

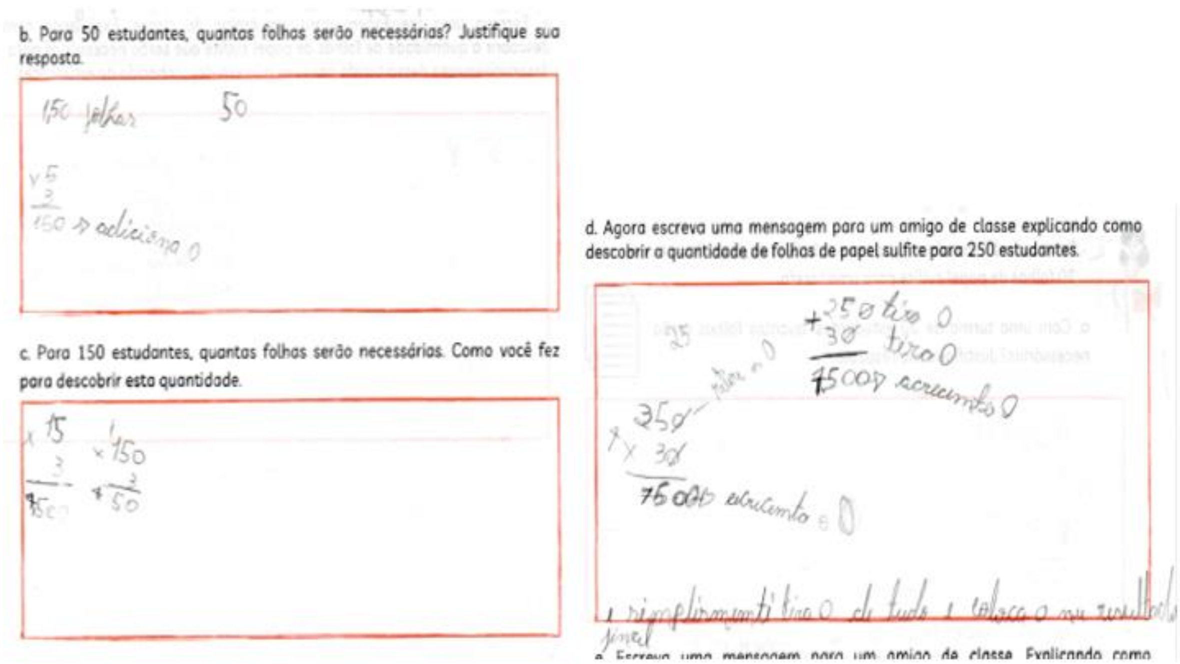
Enfatizamos que neste momento os estudantes deixaram de lado os pares[37] ordenados A:B e C:D, no qual o A - 10 estudantes; B - 30 folhas de papel sulfite; C - 50 estudantes e o D - o termo desconhecido solicitado no problema em questão. Passando a utilizar o número trinta como um valor fixo de modo a multiplicá-los pela quantidade de estudantes disponibilizada em

---

[37] A - Representa a quantidade de estudantes e o B – a quantidade de folhas de papel sulfite referente aos valores disponibilizados no enunciado da tarefa 1 e o C – representa a quantidade de estudantes do problema.

cada problema, sempre recorrendo ao método de eliminar o (s) zero e adicioná-los depois, isto aconteceu nos problemas *b*, *c*, *d* como mostra a figura abaixo.

Figura 25 – Recorte da resolução dos problemas por Enzo e Gustavo




Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nos outros problemas, a dupla permanece com a mesma estratégia. O que chamou a nossa atenção para repetição de alguns trechos de falas, tais como: "*eu simulei na minha cabeça assim, se a gente colocar quinze vezes três e a gente adicionar um zero provavelmente a gente vai achar o resultado, e aí eu vou fazendo na minha cabeça o resultado real*"; "[...] *então simulei"; "depois fiz a prova real para ver realmente se dava esse valor*". Conseguimos identificar que durante a resolução da tarefa 1, Gustavo e Enzo vão atribuindo valores aos problemas até encontrar uma solução plausível para a "prova real". Esta prova não mais é do que a realização da operação inversas com os valores encontrados, ou seja, conseguimos identificar recursos linguísticos que nos remete ao método de tentativa e erro, assim como o indicativo de operações ilustradas no quadro 8.

Inicialmente Enzo e Gustavo perceberam um aumento no quantitativo de estudantes disponibilizado no enunciado da tarefa 1 ao que foi questionado no problema a; e a partir disso iniciaram estabelecendo do primeiro par (A: B) e por consequência do segundo par (C:D). Rapidamente descreveram que para vinte estudantes seriam necessárias sessenta folhas, justamente porque dobramos a quantidade de estudantes então dobra-se o quantitativo de folhas. Porém, no problema seguinte abandonaram a estratégia dos pares ordenados e recorreram apenas a multiplicação do número trinta vezes a quantidade de estudantes disponibilizada em cada problema, a título de exemplo: problema b - 50 x 30; problema *c* - 150 x 30 e o problema d - 250 x 30.

De modo a considerar o trinta como um valor fixo e o que varia condiz com o quantitativo de estudantes indagado em cada problema, ou seja, eles já compreendem o conceito de variável e que podem assumir diferentes valores com base no que foi proposto. Ao mesmo tempo, acreditamos que a dupla conseguiu descrever uma "fórmula" para a tarefa, considerando o senso de variável apresentado por eles. No entanto, ainda não formalizaram esta ideia e isso é normal porque a proposta do estudo se desenvolveu com estudantes que estavam no 5° ano do EF e os conceitos de incógnita, variável e parâmetros são apresentados a partir dos anos finais.

Em síntese, reconhecemos a indeterminação *(objetos do raciocínio)* graças ao reconhecimento, manipulação com as proporções e do senso de variável de modo a descrever uma fórmula sem recorrer ao simbolismo alfanumérico, destacando também que não identificamos indícios da denotação (*o modo com o objeto é representado*) e da analiticidade (*como se raciocina através dos objetos de raciocínio*) e alguns trechos da fala fica nítido que utilizaram o método de tentativa e erro, ou seja, testando alguns valores e simulando algumas operações.

Para Radford (2021) apenas o senso da indeterminação não satisfaz as condições do pensamento algébrico na perspectiva da TO. Justamente por não existir evidência dos outros dois elementos caracterizadores: a denotação e a analiticidade (inclui as grandezas determinadas e indeterminadas; e o operar dedutivamente). Podemos concluir que a dupla B não revelou o pensamento algébrico na perspectiva da TO durante a resolução da tarefa 1. A seguir, tecemos algumas considerações finais.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente nos dispomos do estudo das Orientações Curriculares Nacionais como a grande maioria das pesquisas de pós-graduação, e a partir disso verificamos as novas demandas propostas pela BNCC. Dentre as várias orientações que são apresentadas ao longo do documento, nos interessamos sobre a discussão algébrica direcionada aos anos iniciais do EF; principalmente por ser uma discussão contemporânea no cenário Brasileiro de Educação Matemática (SILVA; SAVIOLI, 2014; SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015; GOMES, 2020; GOMES; NORONHA, 2021).

Com relação a isso, foi inferido que a BNCC relata que a unidade temática de álgebra tem por finalidade desenvolver o pensar algebricamente desde o 1° ano do EF. Destacando o não uso do simbolismo alfanumérico nesta etapa escolar, como normalmente estávamos habituados com a introdução algébrica de forma mais tardia. Pontuando que o pensamento algébrico é primordial justamente por auxiliar na interpretação de situações do nosso dia a dia, sejam elas durante a observação e investigação de grandezas, na identificação e representação de modelos matemáticos e entre outras situações que podem surgir.

Com este fundamento surge o seguinte questionamento: como o pensamento algébrico pode ser abordado nos anos iniciais do EF? A própria BNCC menciona algumas ideias fundamentais como ordem, variação, equivalência, proporcionalidade e interdependência, porém para esta pesquisa optamos pela proporcionalidade. Ao mesmo tempo reconhecemos que a discussão em torno tanto do pensamento algébrico como da proporcionalidade é algo amplo e abrangente, e por se tratar de uma pesquisa a nível de mestrado faz-se necessário o aprofundamento no tema proposto. De forma que nos limitamos a caracterizar o pensamento algébrico revelado por estudantes do 5° ano do ensino fundamental ao resolverem tarefas que envolvem o valor omisso.

Para isso, a pesquisa teve embasamento teórico na caracterização do pensamento algébrico apresentada na perspectiva da TO. De acordo com essa perspectiva, o pensamento não se reduz apenas à atividade puramente mental, sendo assim, possui uma “[...] natureza multimodal, possuindo sua parte material (gestos, ritmos, desenhos, palavras faladas e escritas, entre outros) e a parte ideacional (imaginação e fala interior)” (MORAIS, 2021, p. 119). Isto significa que o pensar algebricamente não se limita apenas ao simbolismo alfanumérico, uma vez que, Radford (2013, 2014, 2017, 2021) argumenta que as crianças podem revelá-lo cada Para isso, a pesquisa teve embasamento teórico na caracterização do pensamento algébrico apresentada na perspectiva da TO. De acordo com essa perspectiva, o pensamento não se reduz

apenas à atividade puramente mental, sendo assim, possui uma “[...] natureza multimodal, possuindo sua parte material (gestos, ritmos, desenhos, palavras faladas e escritas, entre outros) e a parte ideacional (imaginação e fala interior)” (MORAIS, 2021, p. 119). Isto significa que o pensar algebricamente não se limita apenas ao simbolismo alfanumérico, uma vez que, Radford (2013, 2014, 2017, 2021) argumenta que as crianças podem revelá-lo cada vez mais cedo a partir do uso de diversas linguagens, como a falada, a gestual, a alfanumérica, entre outras. Inclusive observação isso durante o desenvolvimento do estudo final e no momento da análise.

Na nossa fundamentação teórica apresentamos os elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da TO de Radford (2021), a indeterminação (*objetos* do raciocínio), denotação (simbolização dos objetos) e a analiticidade (o *raciocínio* acerca dos objetos do raciocínio). Tendo a finalidade de identificar quais destes elementos caracterizadores são revelados pelos quatro estudantes do 5° ano ao resolverem as duas tarefas de valor omisso (tarefa 1 - folhas de papel sulfite; tarefa 2 - receita culinária). Destacando que tínhamos um quantitativo de problemas diferentes, por exemplo na tarefa 1 - cinco problemas, já na tarefa 2 - seis problemas.

Algumas pesquisas descrevem que as tarefas relacionadas ao valor omisso podem auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais (POSH; LESH; BESH, 1988; TINOCO *et al*., 2011; VIANA; MIRANDA, 2016; VIEGAS, 2018), porém, não encontramos um número significativo de pesquisas que apresentem diferentes situações envolvendo o valor omisso, que possibilitam o convívio e familiarização com vários problemas que envolvem o número desconhecido com um nível de dificuldade gradativo (RADFORD, 2008, 2013, 2021) e assim favorecer a identificação dos elementos caracterizadores na perspectiva da Teoria da Objetivação.

Os dados da pesquisa foram obtidos por meio dos registros escritos das duplas A e B e das gravações de áudios e vídeos que aconteceram durante o desenvolvimento da atividade. Com posse de todos estes dados, realizamos a análise multissemiótica ou multimodal (VERGEL, 2016; GOMES, 2020) considerando as mais diversas estratégias que foram utilizadas, como: a combinação dos gestos aos recursos linguísticos pela dupla A para resolver as tarefas. E a partir dos dados, selecionamos três episódios com indícios dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na perspectiva da TO, no entanto, antes pormenorizar cada um deles destacamos as adversidades que fizeram parte do processo.

Com relação ao desenvolvimento do estudo final, a Pandemia do (SARS-CoV-2) impactou diretamente no desdobramento desta. Tivemos dificuldade para encontrar uma escola que estivesse funcionando de forma regular com aulas presenciais, que aceitasse a proposta da nossa pesquisa e que os pais ou responsáveis legais estivessem de acordo. Neste contexto, quando finalmente encontramos uma escola particular no estado do RN para o desenvolvimento do estudo piloto em meados de junho de 2021, apenas três estudantes estavam frequentando a escola de forma regular. Já para o desenvolvimento do estudo final tivemos dificuldade para retornar à escola, pois a turma do 5° ano A (participantes do estudo) passaram pela mudança de professor pouco tempo depois do estudo piloto e a turma passou cerca de duas semanas sem aulas, por isso, o calendário dela estava apertado para o nosso estudo final. Com relação ao desenvolvimento estudo final e no momento de análises observamos que as tarefas de valor omisso, podem sim revelar os elementos caracterizadores, e consequente identificar as estratégias que conduziram as duplas.

No episódio 1 - dupla A (Beatriz e Sofia), percebeu um aumento no número de estudantes, consequentemente, aumenta-se o quantitativo de folhas para o desenvolvimento da tarefa, ou seja, estabelecendo os pares ordenados que foram mencionados no capítulo da análise, inclusive recorrem às estratégias aditivas (*"dez estudantes aumenta trinta")* e multiplicativas (*"dez estudantes correspondem a trinta folhas e a vinte seria o dobro de dez"*) de uma mesma grandeza, corroborando com os resultados encontrados por (SPINILLO, 1993; VIANA; MIRANDA, 2016; VIEGAS, 2018). Ao mesmo tempo, Sofia recorre a combinação dos recursos linguísticos e os gestos com os dedos da mão direita para simbolizar as quantidades desconhecidas, mas adianta da resolução dos problemas deixa de lado a estratégia de somar de trinta em trinta e assume a argumentação que *"é vezes três desde sempre"*, revelando indícios do processo dedutível, ou seja, a analiticidade. Sabemos que nos anos iniciais do EF não se utiliza o simbolismo alfanumérico, no entanto, o recorte da fala acima *"é vezes três desde sempre"* nos faz acreditar na descrição de uma *fórmula (3 x n),* na qual n representa um número qualquer, com isso elas conseguem calcular o quantitativo de folhas para uma turma qualquer.

No episódio 2 - dupla A (Beatriz e Sofia). Diante da tarefa 2 a dupla aproveita as estratégias utilizadas na resolução da tarefa 1 e em questão de alguns minutos, Sofia relata que descobriu um padrão para resolver todos os problemas. Inclusive elaboraram uma estratégia de dividir a resolução do problema em dois momentos: primeiro dividindo as dezesseis em quatro grupos de quatro pessoas, depois dividindo os quatros litros de água para os quatro grupos, ou seja, um litro para cada grupo. Recorrendo também à combinação dos recursos linguísticos e os gestos com os dedos da mão direita para simbolizar as quantidades indeterminadas, revelando também a analiticidade "[...] *é só dividir um número qualquer por 4*", descrição da *fórmula (n/4).*

Desse modo, deduzimos que a dupla A conseguiu pensar algebricamente diante da resolução das duas tarefas. No entanto, foi difícil identificar indícios da analiticidade nas tarefas, justamente por estar habituada a encontrar evidências mais concretas nos estudos longitudinais de Radford (2009, 2013, 2014, 2017, 2020). E por ser difícil identificar elementos que vão ao encontro da discussão do teórico em curto período com a dupla A. Ao mesmo tempo, destacamos que conseguimos visualizar os aspectos da atividade, trabalharam de forma colaborativa, uma ouvindo a outra, retornando à explicação em alguns momentos quando a colega não tinha compreendido.

A análise do episódio 3 - dupla B (Enzo e Gustavo), sucedeu de forma breve, inclusive foi muito difícil trabalhar com eles, uma vez que quando realizava a aproximação, consequentemente a intervenção e alguns questionamentos eles fugiam das respostas, mencionando *"nada não", "nem estamos pensando"* e entre outras coisas. No entanto, depois de muito tempo, Gustavo começou a responder alguns questionamentos, mas sempre enfatizando que estava atribuindo valores até descobrir, recorrendo ao método de tentativa e erro. Outra evidência disto é a prova real na qual Gustavo realizava as operações inversas para descobrir se os valores encontrados estavam corretos.

Além disso, estabeleceram uma divisão de trabalho na dupla, com isso, Gustavo se intitulou o responsável por responder todas as tarefas de forma oral, enquanto o colega deveria registrar todos os cálculos, e em algumas situações não ouvia o que o colega estava falando. Mesmo estabelecendo o diálogo com a dupla B descrevendo a importância do trabalho colaborativo para a produção de uma obra comum entre elas, sendo assim os eixos do colaboração humana e produção de saber foram deixados de lado por eles.

Defendemos que a proposta de tarefas de valor omisso pode desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes dos anos iniciais do EF. No entanto, estas pesquisas não devem ser desenvolvidas em um curto intervalo de tempo, argumentamos que se tivéssemos mais tempo com estes estudantes e uma variedade maior de tarefas e problemas poderíamos ter observado os elementos caracterizadores do pensamento algébrico na TO de forma mais nítida. Durante o desenvolvimento do estudo final identificamos que os estudantes e o professor da turma não estão habituados com tarefas que disponibilizam três valores, e o quarto consistia no termo desconhecido. E nos respectivos problemas solicitamos que eles buscassem o próximo termo desconhecido, que estava sendo problematizado no problema *a*, seguidamente, termos remotos nos problemas (*b*, *c*, *d*), ou seja, formulamos as tarefas e os problemas de modo que todos estejam inter-relacionados e com um grau de dificuldade gradativo.

A BNCC deveria incentivar a abordagem de tarefas que explorem o valor omisso de modo a facilitar a abordagem do número desconhecido e consequentemente favorecer a mobilização do pensamento do algébrico no 5° ano do EF. Considerando que as tarefas de valor omisso possibilitam o encontro com a generalização e o pensar algebricamente (BURGOS; GODINO; 2019; TINOCO, *et al*., 2008).

Concluímos esta pesquisa descrevendo que os nossos objetivos foram alcançados, assim como conseguimos: identificar as estratégias reveladas pelos estudantes ao se depararem com tarefas que explorem o valor omisso; descrever os meios semióticos reveladas pelos estudantes durante a resolução das tarefas de valor omisso. Argumentamos que esta dissertação enriquece a discussão em torno das tarefas de valor omisso que podem auxiliar no desenvolvimento do pensamento que revelam os elementos caracterizadores do pensamento algébrico na TO, ao mesmo tempo, por ser pioneira nesta discussão esperamos que surjam outras pesquisas a temática, que busquem responder questões como: será que a proposta de tarefas de valor omisso em diferentes contextos poderia revelar de forma mais explícita os elementos caracterizadores? outras tarefas que estão envolvidas no contexto da proporcionalidade podem revelar indícios acerca dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico na TO?

# REFERÊNCIAS


ALMEIDA, J. R. de. Álgebra escolar na contemporaneidade: uma discussão necessária. **EM TEIA**: Recife – PE, v. 8, n. 1, p. 1-15, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/12004. Acesso em 28 jun. 2021.

ALMEIDA, J. R. de; CÂMARA, M. dos S. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **RPEM**: Campo Mourão - PR, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/download/1124/972. Acesso em 19 dez. 2020.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking** (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), 2006, p. 267-299.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-443, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (mec.gov.br). Acesso em: 29 dez. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Ensino fundamental de nove anos**: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/ensifund9anobasefinal.pdf. Acesso em: 30 jun. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Alfabetização. **Política Nacional de Alfabetização**. Brasília, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/images/banners/caderno_pna_final.pdf. Acesso em 28 jan. 2021.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Ensino de primeira à quarta série. Brasília, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 29 dez. 2020.

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidade en estudiantes de primaria. **Educación Matemática**, México, v. 31, n. 3, dez. 2019. Disponível: Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria (scielo.org.mx). Acesso em: 1 jan. 2021.

BUTTO, C. Z; ROJANO, T. C. Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno logo. **Educación Matemática**, v. 22, n. 3, 2010, p. 55-86, 2010.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**. Portugual, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, D. W. *et al.* Arithmetic and algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 37, p. 87-115, mar. 2006.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da algebra e o pensamento algébrico: correlações com o Ensino. **Estudos avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

COSTA JÚNIOR, J. R. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade**: contribuições da História da Matemática. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN.

COSTA, M. dos S.; ALLEVANTO, N. S. G. Proporcionalidade: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos. **EM TEIA**, Recife – PE, v. 6, n.1, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/download/2263/1830. Acesso em 15 set. 2020.

CRESPO, A. A. **Matemática comercial e financeira fácil**. Saraiva: São Paulo, 2009.

FERNANDES, R. K.; SAVIOLI, A. M. P. das D. Características de pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental. **RPEM**, Campo Mourão, v.5, n.8, p.131-151, 2016.

FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise dos documentos curriculares nacionais. **REnCiMa**, v. 8, n. 5, p. 16-34, 2018.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: investigando a compreensão de professores acerca do pensamento algébrico. **Revista Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 11, n. 25, 2018.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões á luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras On-Line**, Dourados – MS, v. 6, n. 17, p. 34-47, 2016.

GARCEZ, T. I. G. M. **O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico**: uma experiência de ensino no 6.º ano. 2016. 159f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa.

GARCEZ, W. R. **Todos estudam proporção**: o que aprendem? Rio de Janeiro: Clube de autores, 2015.

GOMES, L. P. da S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Teoria da Objetivação. 2020. 182 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Raciocínio proporcional. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number Concepts and operations in the Middle grandes**. Tradução de Ana Isabel Silvestre, p. 93-118, 1988.

LIMA, J. R. de C. Mapeamento de trabalhos sobre o pensamento algébrico nos anos iniciais apresentados nos ENEM (1998-2013). **In**: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2016, São Paulo - SP. *Anais* [...]. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7327_4156_ID.pdf. Acesso em: 10 mar. 2021.

LINS, R. C.; GIMENIZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas-SP: Papirus, 1997.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para século XXI**, Campinas, SP: Papirus, 2001.

LORENZUTTI, A. de O. F. **Formação continuada de professores dos anos iniciais**: um estudo coletivo do conceito de proporcionalidade. 2019.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**: Curitiba, n.1, p. 141-156, 2011.

MENDES, B. A.; JUSTULIN, A. M. Um estudo sobre a resolução de problemas proporcionais e a criatividade. **In**: X SEMINÁRIO DE EXTENSÃO E INOVAÇÃO XXV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTIFICA E TECNOLÓGICA, 2020, Toledo – PR. *Anais* [...]. Disponível em: https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2020/paper/viewFile/5817/2900. Acesso em 20 mar. 2021.

MORAIS, M. das D.; TELES, R. A. de. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. **Salto para o Futuro**. p. 10-17, 2014.

MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L.; RADFORD, L. Entrevista Luis Radford: Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie**: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica, Uberlândia – MG, v. 2, n. 1, 2018, p. 230-251.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. da S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 3. ed. Belo horizonte: Autêntica editora, 2018.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. **Bolema**, Rio Claro – SP, n. 34, p. 57-80, 2009. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3299/2790. Acesso em 15 jan. 2021.

OLIVEIRA, L. M. C. P. de. Raciocinio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM. **In**: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo – SP.

OLIVEIRA, V. de.; PAULO, R. M. Entendendo e discutindo as possibilidades do ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.21, n.3, pp. 75-95, 2019.

PERTILE, K.; JUSTO, J. C. R. O desafio dos professores dos Anos Iniciais para o ensino da Matemática conforme a BNCC. **Ensino Em Re-Vista**, Uberlândia, v.27, n.2, p.612 - 636.

PORTO, E. R. S. A. **Raciocínio proporcional**: a resolução de problemas por estudantes da EJA. 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva).

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education**. v. 12, n.1, p. 1-19, 2010. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 10 jan. 2021.

RADFORD, L. Elementos de una teoria cultural de la objetivación. **Relime**, p. 103-129, 2006. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 10 jan. 2021.

RADFORD, L. Em torno problemas de la generalización. In: RICO, L; CAÑADAS, M.C; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEVOVIA, I.; (Eds.). **Investigación em Didática de la Matemática**. Granada: Editorial Comares, 2013.

RADFORD, L. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **The International Journal on Mathematics Education,** p. 1-14, 2007. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 1 jun. 2021.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, 2015. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 03 mar. 2021.

RADFORD, L. On the development of early algebraic thinking. **PNA**, *v.6, n.* 4, p. 117-133, 2012. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 30 jun. 2021.

RADFORD, L. **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. MORETTI, V. D.; RADFORD, L (org). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

RADFORD, L. Semiótica y educación matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking**, 2006, p. 7-21. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 28 jan. 2021.

RADFORD, L. **Signs, gestures, meanings**: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Lyon, França, 2009.

RADFORD, L. **Signs, gestures, meanings**: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Lyon, França, 2009.

RADFORD, L. **Teoria da objetivação**: uma perspectiva Vygotskiana sobre o conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. MOREY, B.; GOBARA, S. T. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

RADFORD, L. The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. **In**: KIERAN, C. (Ed.). Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, p. 3-25, 2018.

RADFORD, L. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Group of Australasia**, p. 257-277, 2013. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 03 mar. 2021.

RADFORD, L. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Math Ed Res J**. 2014. Disponível em: http//luisradford.ca. Acesso em 10 jan. 2021.

RADFORD, L. Um recorrido a través de la teoria de objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (org.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

RADFORD, L.; SABENA, C. The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In: **Approaches to qualitative research in mathematics education**. Springer, Dordrecht, 2015. p. 157-182.

RADFORD, Luís. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education.** v. 12, n. 1, 2010.

RADFORD, Luís. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, 2015.

RADFORD, Luís. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Math Ed Res J**, 2013.

SANTOS, Carla Cristiane Silva; MOREIRA, Kátia Gabriela. O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 12, p. 1-7, 2016.

SILVA, D. P. da; SAVIOLI, A. M. P. D. Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v.3, n.5, jul.-dez. 2014. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/921> Acesso em: 14 out. 2021.

SILVA, D. P. da; SAVIOLI, A. M. P. D.; PASSOS, M. M. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Algebra. In: **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, 2015. Disponível em: <http:// https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1340> Acesso em: 14 out. 2021.

SILVA, R. de M. da. **Pensamento algébrico em tarefa com padrões**: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. 2021. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, 2021.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. P. da. Resolução de problemas de valor omisso: análise das estratégias dos alunos. **Encontro de Investigação em Educação**, v. 19, p. 2009.

SIRILO, G. A. *et al.* A construção de um mosaico a partir do conceito de proporção. **In**: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo – SP.

SOARES, M. A. da S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática**: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica. 2016. 250 f. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) –Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Unijuí.

SPINILLO, A. G. Ensinando proporção a crianças: alternativa pedagógica em sala de aula. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro – RJ, n. 43, p. 11-23, 2003.

SPINILLO, A. G. Ensinando proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. **Boletim Gepem**, n. 43, 2003.

TINOCO, L, A de A. **Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade**. p. 1-7, 2008. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/14/2.htm. Acesso em 21 jan. 2021.

TINOCO, L. A. de A. *et al*. Ensino de álgebra - experiência de reflexão sobre a prática. **In**: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife - PE. Disponível em:http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1429_397_ID.pdf. Acesso em: 25 fev. 2021.

TINOCO, L. A. de A. *et al*. Ensino de álgebra - experiência de reflexão sobre a prática. **In**: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife - PE. Disponível em:http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1429_397_ID.pdf. Acesso em: 25 fev. 2021.

TINOCO, L. A. de A.; PORTELA, G. M. Q.; SILVA, M. P. da C. A proporcionalidade e o pensamento algébrico. **In**: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador – BA.

TRUJILLO, P. A.; CASTRO, E.; MOLINA, M. **El proceso de generalización**: un estudio con futuros maestros de primaria. Indivisa, 73-90, p. 2009. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/1587/1/TrujilloINDIVISA2008.pdf. Acesso em 30 jun. 2021.

VERGEL, R. **Como emerge el pensamento algebraico?** Revista de Didáctica de las Matemáticas, n. 68, p. 9-17, 2015.

VERGEL, R. **Formas de pensamiento algebraico temprano em alunos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)**. 2014. 335 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidad Distrital Francisco José Caldas. Bogotá.

VERGEL, R. **Sobre la emergência del pensamento algebraico temprano y su desarrollo em la educación primária**. Bogotá: Editora Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

VERGEL, R.; ROJAS, P. J. Álgebra temprana, pensamiento y pensamento algebraico. **In**: R. Vergel; P. J. Rojas. Álgebra escolar y pensamento algebraico: aportes para el trabajo en aula. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018. p. 41-74.

VERGEL, Rodolfo; ROJAS, Pedro Javier. **Álgebra escolar y pensamento algebraico:** aportes para el trabajo em el aula. Bogotá: Editora Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018.

VIANA, O. A.; MIRANDA, J. A. O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, n.1, p-194-213, 2016.

VIEIRA, M. S. L. M. **Estudo da ecologia do saber proporcionalidade no ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2020. 240 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

## APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DOS VÍDEOS

**SOFIA**: Eu já descobri o padrão.
**PROFESSORA**: Já? (*Expressão de surpresa*).
**SOFIA**: Humrum *[expressão utilizada para afirmar ou confirmar]* (*Balançando a cabeça confirmando o questionamento, ao mesmo tempo realiza movimentos com os dois dedos da mão direita).*

*[Depois desta afirmação acerca da descoberta do padrão esperei alguns minutos antes de iniciar a intervenção com a dupla].*

**PROFESSORA**: Vamos começar pelo primeiro problema [*tarefa 1: problema a*]. Como vocês estão pensando?
**SOFIA**: Ó eu. Só eu estou pensando.
**BEATRIZ**: Calma aí.
**PROFESSORA**: Vocês são uma dupla e a ideia é trabalhar de forma colaborativa, ou seja, ouvindo as ideias uma da outra, discutindo e tentando chegar a um consenso. Podem explicar como vocês estão pensando, e a partir disso, nós vamos discutindo [*nesse momento o intuito foi de deixar claro para as estudantes que eles deveriam trabalhar juntas durante o desenvolvimento das tarefas*].
**SOFIA**: Eu acho que é trinta folhas para cada dez estudantes, aí vai aumentando *(Movimentos circulares com o lápis no ar).* Aí, tipo vai aumentando a quantidade de estudantes.
**BEATRIZ**: Ah é tipo assim... Por exemplo dez estudantes têm que receber trinta folhas, então se foram vinte, sessenta [*o vinte corresponde à quantidade de estudantes disponibilizados no enunciado do problema a e o sessenta refere-se à quantidade de folhas que serão necessárias para o desenvolvimento da atividade na turma da professora Cláudia*].
Você pensou assim? *(Olhando para sua colega, no caso Sofia).*
**SOFIA**: Aham! *[Expressão utilizada para confirmar um fato].*
**BEATRIZ**: É.
**SOFIA:** Desde quando ela começou a ler tenho pensado assim.
**BEATRIZ**: É então, acho que é isso. Vinte é. No caso vinte corresponde a sessenta, porque dez corresponde a trinta *[vinte corresponde ao número de estudantes do problema a e o sessenta consiste na quantidade de folhas que serão necessárias para o desenvolvimento da tarefa*]. E a gente tem que fazer como?
**PROFESSORA**: Pronto. Vocês escrevem como pensaram para obter esse resultado.
**BEATRIZ**: Ah, está bom.
**PROFESSORA**: Entendeu?
**BEATRIZ**: A gente pode colocar assim...
**SOFIA**: Já sei. Sessenta folhas porque a cada dez estudantes aumenta trinta folhas.
**BEATRIZ**: É, só a gente colocar. Porque dez estudantes correspondem a trinta folhas e a vinte seria o dobro de dez, sessenta.
**SOFIA**: Tá mais Beatriz, como a gente vai fazer responder... *[inaudível]*
**BEATRIZ**: Como isso? Tipo eu escrevi tudo o que você escreveu – [3,37- vídeo 1].

*[Conversas paralelas]*

**BEATRIZ**: Olha, Sofia vou colocar assim, porque se dez estudantes correspondem a trinta folhas, vinte será o dobro, correspondendo a sessenta.
**SOFIA**: Basicamente o que eu pensei, só que um pouquinho mais complicado *(Risos).*

**BEATRIZ**: Pronto, eu acho que deu para entender.
**SOFIA**: Só precisa ler *[para compreender a resolução do problema a].*
**BEATRIZ**: É.

*[Inaudível]*

**BEATRIZ**: Para cinquenta estudantes, quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta *[leitura do enunciado do problema b].* É só a gente fazer...
**SOFIA**: Trinta, sessenta, noventa, cento e vinte, cento e cinquenta *[a estudante começou a contar de trinta em trinta utilizando os dedos da mão direita, iniciando pelo dedo mínimo – trinta, anelar – sessenta, médio – noventa, indicador – cento e vinte e o polegar – cento e cinquenta]*.
**BEATRIZ**: É, é, cento e cinquenta. Porque se a gente for contando de trinta em trinta vai acrescentar o resultado de cento e cinquenta. É fácil essa.
**SOFIA**: Todas são fáceis.
**BEATRIZ**: A outra estava mais difícil, eu achei. *[comparando a tarefa 1 proposta no estudo piloto em junho de 2021, pois ela foi uma das participantes].*
**SOFIA**: Essa cento e cinquenta, cento e cinquenta estudantes *(Apontando para o problema c com o dedo indicador, na sequência ergue o dedo com uma expressão de admiração).*
**BEATRIZ**: Ah. No caso foi cinquenta, agora são cento e cinquenta.

*(Inaudível)*

**BEATRIZ**: São cento e cinquenta alunos?
**SOFIA**: Aham *[Expressão utilizada para confirmar o questionamento]*.
**BEATRIZ**: Meu Deus! E agora? A gente vai ter que fazer para cinquenta, depois para cem.
**SOFIA**: A gente faz esse aqui *[apontando para o resultado do problema b]* vezes três.
**BEATRIZ**: Pode ser.

*[Conversas paralelas]*

**BEATRIZ**: Você consegue entender minha letra?
**PROFESSORA**: Consigo. Como foi que vocês resolverem o problema *b*?
**SOFIA**: Bom.
**BEATRIZ**: Essa letra b foi só adicionando trinta.
**SOFIA**: Trinta, trinta, trinta, trinta, trinta até chegar *[Realiza movimentos de contar com os cinco dedos da mão direita, igual a movimento que ela fez quando estava resolvendo o problema com a colega]*.
**PROFESSORA**: De trinta em trinta até chegar em cento e cinquenta? *(Apontando para as anotações das estudantes).* Mas porque vocês fizeram dessa forma?
**BEATRIZ**: É, até chegar em cento e cinquenta. Até em cinquenta no caso. Até em cinco, porque a gente acrescentou de dez em dez, então na mão seria cinco, que equivale a cinquenta *[A estudante tenta explicar o seu pensamento e o porquê de utilizar os dedos da mão para contar]*.
**BEATRIZ**: Eles justificaram a resposta? *(Apontando para a dupla de meninos ao lado).*
**SOFIA**: Sei lá.
**BEATRIZ**: Eles só colocaram os cálculos.
**SOFIA**: E nós aqui escrevendo tudo.

**BEATRIZ**: Pois é. Pois a cada trinta folhas. Não Sofia, pois a cada, pois a cada a trinta folhas *(barulho externo - inaudível)* ... Aí você vai ter que ver o que vai colocar. Pois a cada dez estudantes aumenta trinta folhas, não era não!?
**BEATRIZ**: Essa aqui foi a mais fácil de todas *[mostrando o problema a].*
**SOFIA**: Não. Ainda tem mais fácil.
**BEATRIZ**: Mas eu não estou dizendo tipo assim...
**SOFIA**: Olha essas duas daqui são muitos fáceis. *[virando a folha da tarefa e mostrando os últimos problemas].*
**BEATRIZ**: Essa daqui também. *(Apontando para o problema a).* A primeira foi difícil?
**SOFIA**: Não.
**BEATRIZ**: Então!? Todas foram fáceis resumindo *[esse diálogo ocorreu antes das estudantes resolverem os problemas c, d, e].*
**SOFIA**: Pronto agora é cento e cinquenta *[referindo-se ao problema c].* Aqui *[apontando para o resultado do problema b]* vezes três.
**BEATRIZ**: Então vamos fazer cinquenta vezes três.
**SOFIA**: Não, Beatriz. Vê isso direito [(*Baixa a cabeça e une as mãos em posição de oração, mantém a posição das mãos levando-as para o rosto*) – *demonstrando-se impaciência para explicar como resolver o problema c. Acima a estudante Sofia mencionou que para resolver o problema c, bastava multiplicar o resultado do problema b por três, portanto seria cento e cinquenta vezes três. No entanto Beatriz pensou que era para multiplicar os dados disponibilizados no problema b no caso cinquenta vezes três].*
**BEATRIZ**: Ah. Ou Sofia, eu não sei muito a tabuada.
**SOFIA**: Quatrocentos e cinquenta.
**BEATRIZ**: Deixa-me ver. É só a gente fazer assim *(pegando a tarefa para observar as anotações feitas pela colega).*
**SOFIA**: Acabei de fazer o cálculo, menina.
**BEATRIZ**: Né vezes três!? Então a gente fazer cinco aqui que fica mais fácil. Eu sei que o resultado é esse, mas... Não! Quatrocentos e cinquenta?
**SOFIA**: É sim. Ó cento e cinquenta mais cento e cinquenta, trezentos *(erguendo o dedo mínimo e depois o dedo anelar para representar a soma de cento e cinquenta mais cento e cinquenta resultando em trezentos).*
**BEATRIZ**: Hum.
**SOFIA**: Mais cento e cinquenta? [(*girando a mão direita e erguendo o dedo o médio) – ao mesmo tempo olhando para a colega*]
**BEATRIZ**: Humrum.

*[Pequena pausa*]

**BEATRIZ**: Quatrocentos e cinquenta *[À medida que Sofia apresenta toda a argumentação acerca da resolução problema c; Beatriz ouve tudo atentamente e faz os registros no papel]*
**SOFIA**: Então. É isso vezes três.
**SOFIA**: Isso é um cinco?
**BEATRIZ**: é.
**SOFIA**: Valha-a parece um seis.

*(Risos)*

**BEATRIZ**: É, não Sofia.
**SOFIA**: Então. Isso aqui, isso aqui *(Apontando para o número cinco escrito pela colega na resolução do problema c).*

**BEATRIZ**: Ah, tá. Aí aqui quatrocentos e cinquenta. Aí como você fez para descobrir esta quantidade?
**SOFIA**: A gente fez cento e cinquenta vezes três.
**BEATRIZ**: É que no caso eu fiz mais cento e cinquenta, no caso cento e cinquenta vezes três.

*[Conversas paralelas]*

**BEATRIZ**: Agora vamos para essa *(virando a folha e mostrando o problema d para a colega).*
**SOFIA:** Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite para duzentos e cinquenta estudantes *[leitura do enunciado do problema d].* Só fazer por duzentos e cinquenta estudantes.
**BEATRIZ:** Se para cento e cinquenta estudantes...
**SOFIA:** Não Beatriz.
**BEATRIZ:** Tá é muito fácil.
**SOFIA:** É só escrever uma mensagem para o amigo.
**PROFESSORA:** E aí?
**BEATRIZ:** Ah! Então vai dar quinhentos.
**PROFESSORA**: Vocês podem me explicar como resolveram problema c?
**BEATRIZ**: Sim.
**SOFIA**: A gente faz pela resposta da letra b para fazer a letra c *(batendo com a ponta do lápis nos registros por escrito do problema b)*.
**PROFESSORA:** Certo. Mas como foi que vocês fizeram?
**BEATRIZ**: Aí daí na letra c a gente faz cento e cinquenta vezes três.
**SOFIA**: Que no caso aqui eu vou explicar *(mostrando a resolução do problema c).* Tipo assim por causa que cento e cinquenta vezes três e a mesma coisa de fazer...
**BEATRIZ E SOFIA:** cento e cinquenta, mais cento e cinquenta, mais cento e cinquenta (*em coro) [nesse período as estudantes realizam movimentos distintos para representar a mesma operação: a estudante Beatriz bate a ponta do lápis três vezes na folha, enquanto Sofia realiza o movimento de contar com os três dedos (mínimo, anelar e médio) da mão esquerda].*
**BEATRIZ**: Então a gente fez assim que era mais fácil.
**PROFESSORA:** Deixa-me entender. Cinquenta. Aqui foi cinquenta *(apontando para o resolução do problema b),* aí vocês encontraram cento e cinquenta folhas.
**BEATRIZ E SOFIA:** Sim (*em coro).*
**PROFESSORA**: Aí porque cento e cinquenta folhas, mais cento e cinquenta, mais cento e cinquenta? *(apontando para o resolução do problema b)*. Vocês partiram de que?
**SOFIA**: A gente partiu desse resultado aqui *(apontando os resultados obtidos no problema b).*
**BEATRIZ:** Porque aqui tá dizendo para 150 estudantes quantas folhas serão necessárias.
**PROFESSORA**: Vocês partiram do resultado anterior?
**BEATRIZ E SOFIA:** Sim (*em coro).*
**PROFESSORA**: Vocês encontraram que para cinquenta estudantes são necessárias cento e cinquenta folhas e para cento e cinquenta estudantes são necessárias quatrocentos e cinquenta folhas.
**BEATRIZ**: Isso. Porque ééé. Tipo se você tem 10 estudantes é trintas folhas.
**SOFIA:** Aqui é cinquenta vezes três, no caso aqui o resultado daqui que vai dar cento e cinquenta. Ai a gente pega o cinquenta e multiplica por três. A gente pegou o resultado daqui e multiplicou por três ***(realiza gestos com as mãos – ver depois e descrevê-los)***
**BEATRIZ**: que no caso dá 450.
**PROFESSORA:** Entendi o raciocínio de vocês. E vocês descrevem isso aqui *(Apontando para a resolução do problema c).*

**BEATRIZ:** Que chega ao resultado de quatrocentos e cinquenta, ou seja, para 150 estudantes são necessárias quatrocentas e cinquentas folhas.
**PROFESSORA**: Certo.
**BEATRIZ**: Agora escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite para 250 estudantes *(leitura do problema d).*
***SOFIA:*** Já saquei.
**BEATRIZ**: No caso você vai saber. São quinhentas né!?
**SOFIA:** Vezes três.
**SOFIA**: Ah! Vezes três.
**BEATRIZ**: Porque se fosse vezes dois. Aí que daria cinquentas.
**SOFIA:** Oh. É vezes três desde sempre.
**BEATRIZ**: Não sei.
**SOFIA:** É sim.
**BEATRIZ**: Então faça vezes três.
**BEATRIZ:** Setecentos e cinquenta. Então coloca assim, é, se você quiser, calma aí. É, tem que ser para um amigo. Você coloca assim, é...
**SOFIA:** Já comecei a escrever...
**BEATRIZ**: Já? Você colocou como? Para descobrir a quantidade de folhas que duzentos e cinquenta estudantes precisam podemos fazer duzentos e cinquenta vezes três chegando ao resultado de setecentos e cinquenta.
**BEATRIZ**: Por que você não coloca preciso?
**SOFIA**: Porque eu falo com um amigo meu desse jeito.
**BEATRIZ**: É só fazer duzentos e cinquenta vezes três que chega ao resultado de setecentos e cinquenta, porém essa última vai ter que fazer eu e você *(referindo-se ao problema e).*
**SOFIA**: Escreva uma mensagem para um amigo de classe blábláblá.
**BEATRIZ**: Escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas para um número desconhecido de estudantes *(leitura do enunciado do problema e).*
**SOFIA**: Para um número indeterminado de estudantes.
**BEATRIZ**: A gente tem que focar, a gente pode tentar.
**SOFIA**: A gente tem que encontrar um número para produzir baseado no que a gente viu aqui, mas que possa dividir.
**BEATRIZ**: Ah, então! Vamos ver, eu já sei. Ó ilusionista. É nessa lógica que a gente vai ter que fazer, aumentando de cem em cem *[observando o aumento de cem em cem na quantidade de estudantes, pois no problema b questionamos quantas folhas seriam necessárias para o desenvolvimento de uma tarefa para cinquenta estudantes, no problema c - cento e cinquenta e no problema d - duzentos e cinquenta estudantes].*
**SOFIA**: Essa lógica na última deu errado.
**BEATRIZ**: Aumentou aqui, aqui aumentou, aumentou aqui. Aqui não aumentou vinte para trinta *[mostrando o aumento na quantidade de estudantes do problema a para o b].*
**SOFIA**: Foi trinta.
**BEATRIZ:** Não. Cento e cinquenta. Cinquenta mais trinta dá cento e cinquenta?
**SOFIA**: Cinquenta mais trinta?
**BEATRIZ**: É.
**SOFIA:** Cinquenta mais trinta não vai dar cento e cinquenta *[percebendo que não existe uma lógica no aumento de cem em cem].*
**BEATRIZ**: Então! Como é que aumentou? Trinta.
*[inaudível]*

**BEATRIZ:** Aqui aumentou de trinta para trinta, mas para cá não aumentou.

**SOFIA**: Presta atenção. Cinquenta vezes três dá quanto?
**BEATRIZ**: Quatrocentos e cinquenta.
**SOFIA**: Cinquenta vezes três?
**BEATRIZ**: Ah não. Cinquenta vezes três dá duzentos. Ah não, espere aí! É cinquenta vezes três?
**SOFIA**: Hunrum.
**BEATRIZ**: Dá cento e cinquenta.
**SOFIA**: Então. A gente foi pegou o resultado daqui *[apontando para os dados do problema b]* e multiplicou por três.
**BEATRIZ**: Aí vamos lá *[virando a folha]*. Cinquenta vezes três, ou não! Cento e cinquenta vezes três?
**SOFIA**: Cinquenta vezes três.
**BEATRIZ e SOFIA**: Quatrocentos e cinquenta *(em coro)*.
**BEATRIZ**: Aí quatrocentos e cinquenta vezes três? *[nesse momento as estudantes estão fazendo alguns cálculos aleatórios envolvendo a multiplicação por três]*.
**SOFIA**: Novecentos *[a estudante errou nos cálculos, no entanto este não é o foco da nossa pesquisa]*.
**BEATRIZ**: Aí duzentos e cinquenta vezes três? Setecentos e cinquenta.
**PROFESSORA**: Vocês perceberam alguma coisa entre os problemas?
**SOFIA**: Que todas a gente vai ter que utilizar o vezes três.
**BEATRIZ**: No caso aqui a gente vai fazer... só o que eu estou em dúvida é a gente vai pegar do resultado para multiplicar por três para chegar aqui *(apontando para o enunciado do problema e)* ou por esse número?
**PROFESSORA:** Vamos pensar um pouquinho no que vocês acabaram falar. O três está em que?
**BEATRIZ**: Na quantidade que a gente tem que multiplicar.
**PROFESSORA**: Vocês perceberam alguma relação ou alguma coisa entre os problemas?
**BEATRIZ**: Que sempre tem que multiplicar por três.
**PROFESSORA**: Por quê?
**BEATRIZ**: Por que a quantidade de folhas na unidade.
**PROFESSORA**: Então o três é fixo.

**PROFESSORA**: Vocês disseram que aumenta de trinta em trinta, mas isso vale para todas as mesmas? E o está variando a cada problema? Isso pode ajudar no pensamento de vocês.

**TAREFA 1 – DUPLA GUSTAVO E ENZO**

**ENZO**: Calma aí, Gustavo!
**GUSTAVO**: Sessenta vezes trinta *[mão direita de forma reta mostrando a resolução do problema a]*.
**ENZO**: Cento e cinquenta folhas *[escrevendo no espaço destinado a resolução do problema b]*.
**GUSTAVO**: Sessenta vezes trinta *[mão direita de forma reta mostrando a resolução do problema a]*.
**ENZO**: Sessenta vezes trinta?
**GUSTAVO**: Pode fazer aqui *[apontando com o dedo médio da mão direita para a resolução do problema a]*.
**PROFESSORA:** Como é que vocês estão pensando? Podem me explicar.
**ENZO**: Nada não.
**GUSTAVO**: Nada. Nem estamos pensando

*[risos]*

**PROFESSORA:** Para cada dez estudantes, quantas folhas são necessárias?
**GUSTAVO:** Bom. Para dez estudantes são trinta, e se gente aumenta o valor para vinte, que a gente dobra, tem que ser dobrado de folhas, né!? *(virando a mão direita).*
**PROFESSORA**: Certo.
**ENZO:** No caso trinta vezes dois.
**GUSTAVO:** Para cinquenta estudantes quantas folhas serão necessárias? Justifique sua resposta *[leitura do enunciado do problema b]*. Ah! É é se dez é trinta folhas, a gente aumenta cinco, então cinco vezes trinta *[pequena pausa]* ou cinquenta vezes trinta, cento e cinquenta folhas.
**PROFESSORA**: Como vocês estão pensando para essa? *[apontando para o problema b].*
**GUSTAVO:** Bom é simplesmente assim. Se para cinquenta estudantes quantas folhas serão necessárias? Simplesmente simulei cinco vezes trinta, cem e cinquenta ou quinze aí eu adicionei um zero.
**PROFESSORA**: Podem me explicar novamente?
**GUSTAVO**: Olha temos cinquenta estudantes *[mostrando o enunciado do problema b],* certo?
**PROFESSORA**: Certo.
**GUSTAVO:** Então já temos trinta folhas *[mostrando com o lápis os dados do enunciado da tarefa 1]*, então simulei cinco vezes três, quinze então adicionei um zero no final. Aí foi cento e cinquenta folhas.
**PROFESSORA**: Mas porque cinco?
**GUSTAVO**: O cinco do número de estudantes e o três de trinta, aí eu fiz cinco vezes três e coloquei um zero no final.

*[conversas paralelas]*

**GUSTAVO:** Para 150 estudantes quantas folhas serão necessárias? *[Leitura do problema c].* É quinze vezes três.
**ENZO:** Quinze vezes três, Gustavo? (expressões de surpresa).
**GUSTAVO:** Sim. Foi a mesma coisa daqui *[mostrando a resolução do problema b]* só que quinze vezes três, entendeu? Não tem cinquenta, certo né? Cinquenta a gente fez vezes três, então já que fez cinquenta vezes três.
**ENZO**: Aqui é cinquenta folhas, né? *[problema b].*
**GUSTAVO:** Eu sei. Mais aí a gente vai falar assim: pegar o cento e cinquenta tirar o zero vezes três, que vai dar o resultado.
**GUSTAVO:** Observe com atenção.
**ENZO:** Você faz as contas e eu vou escrevendo. Não vai escrever a resposta não?
**GUSTAVO:** Não num vou escrever a resposta não, tu que escreve.
**ENZO:** Eu que vou escrever, Gustavo?
**GUSTAVO:** Escreve
**ENZO**: Não, não. Vou que tá falando.
**PROFESSORA**: E essa *[mostrando o problema c]*, como foi que vocês pensaram?
**GUSTAVO E ENZO**: Mesmo coisa que o cinquenta *[em coro] [referindo-se ao problema b].*
**GUSTAVO:** Quinze vezes três, quatrocentos e cinquenta aí eu tirei a prova. Porque cento e cinquenta vezes três é quatrocentos e cinquenta.
**ENZO:** Quinze vezes três é quarenta e cinco.
**PROFESSORA**: E como vocês podem justificar isso?

**GUSTAVO:** Bom, foi basicamente assim *[pequena pausa]*. Agora meu cérebro tá processando isso, bom. Eu simulei na minha cabeça assim, se a gente colocar quinze vezes três e a gente adicionar um zero provavelmente a gente vai achar o resultado e aí eu vou fazendo na minha cabeça o resultado real. O que aconteceria se eu colocasse um valor real sobre o três, por exemplo eu tenho quinze aí eu fiz a conta, aí depois eu fui fazer cento e cinquenta vezes três.
**PROFESSORA**: Para tirar a prova?
**GUSTAVO:** Sim.
**PROFESSORA**: E você? [se referindo ao outro estudante].
**GUSTAVO:** Ele tá escrevendo as respostas.
**ENZO:** Eu?
**GUSTAVO:** Ele tá justificando os resultados.
**PROFESSORA**: A ideia é que vocês trabalhem de forma colaborativa como uma dupla. Então como você pode justificar esse resultado? *[apontando para as anotações do problema c]*.
**ENZO:** Eu não entendi foi nada do pensamento dele.
**PROFESSORA:** Não entendeu?
**GUSTAVO:** Ah, meu Deus!
**ENZO:** Na verdade eu não entendi o pensamento dele. A primeira *(batendo o lápis no problema a)* eu entendi as últimas duas *[se referindo aos problemas b e c]* não.
**GUSTAVO:** Difícil né!?
**PROFESSORA:** Para cada dez estudantes são necessárias trinta folhas, e para vinte estudantes quantas folhas são necessárias?
**ENZO:** Sessenta.
**PROFESSORA:** E para cinquenta estudantes?
**GUSTAVO:** Aí eu já fiz assim, pequei 5 multipliquei por 3 e adicionei 0.
**PROFESSORA:** Por que você fez assim?
**GUSTAVO:** Usei os números da primeira questão. Aí 5 vezes 3, fiz a mesma coisa na outra *[apontando para o problema c]* e depois adicionei o zero. Depois fiz a prova real para ver realmente se dava esse valor.
**PROFESSORA**: Você entendeu?
**ENZO:** Sim.
**PROFESSORA:** Consegue justificar essas duas?
**ENZO:** Consigo. É porque a gente está fazendo para depois justificar.
**PROFESSORA**: Ah tá, certo então.
**GUSTAVO:** Enquanto isso. Agora escreva uma mensagem para um amigo da classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite para duzentos e cinquenta estudantes *[leitura do problema d]*. Faça você...
**ENZO:** Você que justifica nessa página e na outra.
**PROFESSORA:** Vocês são uma dupla é ideia é trabalhar juntos. Lembram que nesse problema vocês devem explicar como fazer.
**ENZO:** Ah tá.
**GUSTAVO**: Deixa-me pegar Enzo. Eu vou citar assim ó duzentos e cinquenta tira o zero.
**ENZO**: Cadê o dois?
**GUSTAVO**: Coloca o trinta, tira o zero e multiplica. Quanto é vinte e cinco vezes três mesmo? *[pequena pausa]* setenta e cinco, setenta e cinco, setenta e cinco *[escrevendo no espaço destinado a resolução do problema d],* acrescentando o...

*[conversas paralelas]*

**ENZO:** Pronto, assim está bom.

**GUSTAVO:** Escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite que serão necessárias para o desenvolvimento desta tarefa para um número desconhecido de estudantes *[leitura do problema e].* Eu já entendi mais nada [balançando o lápis].
**ENZO:** Escreva uma mensagem para um amigo de classe explicando como descobrir a quantidade de folhas de papel sulfite que serão necessárias para o desenvolvimento desta tarefa para um número desconhecido de estudantes *[leitura do problema e]*.
**ENZO:** Tia. Estou com uma dúvida!
**GUSTAVO:** Tia?
**ENZO:** A gente não está entendendo essa *[batendo o lápis no problema e].*
**PROFESSORA:** Existe alguma relação entre os problemas?
**ENZO:** Sim.
**PROFESSORA:** Qual?
**GUSTAVO:** No caso vai aumentando de, de... acho que trinta em trinta, opa. Vai dobrando trinta, aí depois de trinta, vai para sessenta.
**PROFESSORA:** Como assim?
**GUSTAVO**: Por exemplo, nessa primeira aqui *[apontando para os dados fornecidos no enunciado da tarefa 1]* opa pera aí nessa daqui. Nessa daqui primeiro foi vinte *[problema a],* certo?
**PROFESSORA:** Certo.
**GUSTAVO**: Aí depois foi para cinquenta, aí aumento trinta. Aí depois foi para cento e cinquenta.
**PROFESSORA:** Aumentou quanto?
**GUSTAVO**: Aí, aumentou cem. Aí, eu notei que foi aumentando de cem em cem nas duas últimas questões *[problemas c e d*] só que no primeiro aumentou dez, aí acrescentaram um zero para ir para cem.
**PROFESSORA**: Isso que você descreveu agora te ajuda a responder o problema *d*?
**GUSTAVO**: Sim.
**PROFESSORA**: Como?
**GUSTAVO**: Por exemplo, eu peguei o vinte e cinco tirei o zero, peguei o trinta tirei o zero, multipliquei deu setenta e cinco depois eu acrescentei o zero.
**PROFESSORA**: Agora como você pode escrever uma mensagem explicando isso?
**ENZO:** Tu, escreve mais rápido?
**GUSTAVO:** Escrevo nada.
**ENZO:** Escrevo não. Termina um texto de trinta linhas em dois minutos.
**GUSTAVO:** Oxi. Vinte e cinco tira o zero, mais trinta tira o zero, aí fica setenta e cinco eu acho e acrescenta o zero.
**ENZO**: Mesma coisa que está ali *[apontando para o canto esquerdo das anotações do problema d].*
**PROFESSORA**: Você apenas reescreveu, vale lembrar que é uma mensagem para um amigo de classe.
**GUSTAVO:** Eu sei. Eu simplesmente tirei o zero do final e acrescentar o zero no final do resultado.
**PROFESSORA:** Mas esse trinta veio de que?
**GUSTAVO**: Veio daqui *[enunciado da tarefa 1].* Simplesmente tira o 0 de os resultados o duzentos tira zero, o trinta tira o zero, aí vinte e cinco vezes trinta, opa vinte e cinco vezes três, aí dá setenta e cinco aí a gente no final acrescenta o zero.
**PROFESSORA:** Como você pode escrever? *[questionamento direcionado ao outro estudante].*
**ENZO**: Da mesma forma de essas daqui *[virando a folha e mostrando os problemas a, b, c].*

**GUSTAVO**: Eu só tou simplificando.
**ENZO**: Pega o número completo retira os zeros do multiplicador, enfim do de baixo e do de cima aí depois multiplica os que sobraram e no resultado a gente acrescenta o zero.
**PROFESSORA**: Certo. Mas como vocês escreveriam uma mensagem para um colega? Por exemplo se esse colega pegue apenas essa questão e saiba resolver.
**ENZO**: O Pietro escreve logo é tua vez.
**GUSTAVO**: É simples tirar o zero de tudo e colocar o zero no resultado final.
**PROFESSORA**: Como vocês escreveram?
**GUSTAVO**: é simplesmente tirar o zero da parcela de cima e da debaixo e no resultado final colocar um zero.

*[intervalo]*
[intervalo de 30 min para o horário do lanche]
**PROFESSORA**: Vamos retomar. No problema e temos que escrever uma mensagem explicando
**ENZO**: Eu não entendi nada da letra e.
**PROFESSORA**: Vocês perceberam alguma relação entre os problemas?
**GUSTAVO**: Enzo coloca um trilhão aí. A é pode ser qualquer número?
**ENZO**: Por que cada grupo de 10 é 30 pessoas.
**PROFESSORA**: Vai escrevendo isso aí.

**TAREFA 2 – BEATRIZ E SOFIA**

**SOFIA:** Eu já descobri um padrão.
**PROFESSORA:** Qual é o padrão Sofia?
**SOFIA**: é um litro para cada quatro pessoas.
**PROFESSORA**: Por quê?
**SOFIA**: Ó. Quatro, oito, doze, dezesseis [*contando de quatro em quatro usando os dedos da mão direita, iniciando pelo dedo mínimo – quatro, anelar – oito, médio – doze, indicador – dezesseis]* Aí essa é quatro litros *[apontando os dados da tarefa 2]* um litro, dois litros, três litros, quatros litros *[com os quatro dedos da mão direita erguidos, começa a contar de um em um, iniciando pelo dedo mínimo, anelar, médio e o indicador a medida que pronuncia um dos número torce a ponta do dedo correspondente].*
**PROFESSORA:** Certo.
**BEATRIZ**: Não entendi nada.
**SOFIA**: Ó, aqui não tem quatro *[apontando para o enunciado da tarefa 2*]. Se a gente dividir isso por quatro [*apontando para a quantidade de pessoas, no caso 16*] vai ficar quatro em cada grupo né!?
**PROFESSORA:** Sim, quatro pessoas em quatro grupo.
**SOFIA**: Aí, é um litro para cada grupo.
**PROFESSORA**: Certo. Você está querendo dizer que dividiu as dezesseis pessoas por quatro?
**SOFIA**: Humrum.
**PROFESSORA**: Aí, você ficou com quatro grupos de quatros pessoas e cada grupo de quatro pessoas corresponde a um litro. É isso?
**SOFIA**: hamram.
**PROFESSORA**: E aqui para o problema a?
**BEATRIZ**: para oito pessoas?
**SOFIA**: Aí, a gente pode dividir o resultado daqui *[apontando para o enunciado da tarefa 2]* por dois. No caso dezesseis por dois.
**BEATRIZ**: Não, mas aí vai ser oito litros para oito pessoas?

**SOFIA**: dois [erguendo dois dedos da mão direito]
**BEATRIZ**: Se for para dividir por dois.
**SOFIA:** Não, o resultado daqui *[apontando para os dados da tarefa 1]* porque eu não olhei para cá *[apontando para o problema a]*. Aí dezesseis, dezesseis dividido por dois dão quanto?
**BEATRIZ**: Oito.
**SOFIA**: Então aí aqui é quatro litros dividido por dois, no caso é dois [mostrando o problema a].
**BEATRIZ**: Ah entendi. Tá fácil. Posso fazer?
**PROFESSORA**: Sofia você pode escrever o raciocínio do dezesseis por quatro?
**SOFIA**: humrum.
**PROFESSORA**: faz essa primeira parte e Beatriz faz a segunda.
**BEATRIZ**: Calma aí Sofia. A gente diz que dividiu o dezesseis por quatro, né isso?
**SOFIA**: Humrum. Também fiz o mesmo processo aqui e deu dois *[apontando para o problema a]*.
**BEATRIZ:** E esse daqui Sofia? [problema b].
**SOFIA**: Faz quatro e divide por quatro que vai dar um.
**BEATRIZ**: Ah. Então vai botando mais para o lado.
**BEATRIZ**: Aí agora precisa explicar ou não? *[pequena pausa]*. Tia *[pequena pausa]*. Pois vai ser assim por enquanto. Pronto então eu acho que se a gente dividir por... Eu entendi a gente vai dividir todos por quatro?
**PROFESSORA**: Voltei.
**BEATRIZ**: Essa aqui pode deixar assim *[mostrando as anotações do problema a*] ou precisamos fazer os cálculos?
**PROFESSORA:** Pode deixar assim.
**BEATRIZ**: Nós dividimos o oito por quatro e obtemos o número dois que a quantidade de litros necessários para fazer uma sopa. Aí aqui a gente pensou assim *[apontando com o lápis para o problema b]*. Quantos litros de água são necessários para fazer uma sopa para quatro pessoas. Se para dezesseis pessoas são quatro litros de água, aí a gente fez quatro dividido para quatro.
**PROFESSORA:** Não deu para ouvir, vocês podem falar um pouco mais alto?
**BEATRIZ**: É mais ou menos, explica aí Sofia.
**SOFIA**: É praticamente o mesmo raciocínio desses dois [referindo-se a tarefa 2 e o problema a] quatro dividido por quatro que deu um litro para cada pessoa.
**BEATRIZ**: A gente meio que tem que dividir a quantidade de pessoas por quatro, entendeu?
**PROFESSORA:** E o quatro corresponde ao que?
**BEATRIZ**: a quatro litros de água que está no enunciado da questão. A gente sempre tá dividido por quatro e tá chegando ao resultado, entendeu?
**PROFESSORA:** Certo. Qualquer dúvida pode chamar.
**BEATRIZ**: Certo.

**BEATRIZ**: Agora é a sua vez *(risos)*. Uma sopa para quarenta pessoas... quarenta dividido por quatro?
**SOFIA**: É.
**PROFESSORA**: Como vocês estão fazendo o problema c?
**BEATRIZ**: Muito fácil. A gente tá usando a mesma estratégia dos outros já que são quarenta pessoas, quarenta dividido por quatro. É muito fácil essa. É porque é assim quando você descobre a estratégia de usar aí fica moleza, só que o problema é descobrir, só que essa aqui foi mais fácil porque o enunciado tá mais fácil.
**BEATRIZ**: Deixa-me ver. Quantos litros de água serão necessários para cento e vinte pessoas. Stefanny, cento e vinte dividido por quatro igual a trinta.

*[conversas paralelas]*

**SOFIA:** Beatriz olha a marca do teu lápis. Beatriz, Beatriz toma.
**BEATRIZ:** Imaginei que você tem que fazer uma sopa, mas não sabe. Sofia agora também é como você, essa daqui é difícil [batendo o lápis no problema f]. A gente utilizou a estratégia do quatro, está bom!?
**SOFIA:** Nossa! A estratégia do quatro.
**BEATRIZ:** Tia Anailde vem cá.
**SOFIA:** Usamos a mesma estratégia. Dividimos o duzentos por quatro e deu cinquenta e para descobrir o resultado o número pessoas por quatro.
**PROFESSORA:** Certo. Vocês estavam com dúvida se poderiam escrever assim?
**BEATRIZ:** Era isso.
**SOFIA:** Ah me lembrei a gente não precisa fazer o cálculo é só escrever uma mensagem.
**BEATRIZ:** Então a gente escreve como? Para o que Sofia?
**PROFESSORA:** Como vocês escreveram a mensagem para um número desconhecido?
**SOFIA:** Para descobrir a quantidade de litros é só multiplicar uma letra por 4.
**PROFESSORA:** Mas por que essa letra? O que ela representa?
**BEATRIZ:** Representa um número desconhecido. Anota que ela representa um número desconhecido, porque quando a gente não tem o número tem que usar ela para multiplicar e auxiliar a quem vai fazer o cálculo.

## PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 5° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL:EXPLORANDO TAREFAS DE PROPORCIONALIDADE DIRETA

**Pesquisador:** Anailde Felix Marques

**Área Temática:**

**Versão:** 1

**CAAE:** 51821721.0.0000.5208

**Instituição Proponente:** Centro de Educação

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 5.024.406

**Apresentação do Projeto:**

Trata-se de projeto de dissertação vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (CE/UFPE), sob orientação do Prof. Jadilson Ramos de Almeida. Baseada na Teoria da Objetivação e na metodologia educacional do labor conjunto, a pesquisa busca investigar os meios semióticos, tais como linguagem, gestos e expressão corporal, empregados por estudantes no processo de resolução de tarefas de álgebra. A amostra de participantes é composta de estudantes matriculados em duas turmas do 5° ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de Santa Cruz (RN), podendo alcançar até 52 participantes. Serão excluídos os estudantes que estiverem participando das aulas remotas. Como instrumentos de coleta de dados, serão aplicadas duas tarefas de valor omisso, em pequenos grupos, com duração de quatro aulas, e captação de imagem e áudio, por meio de três celulares e um microfone. Os dados serão submetidos à análise multimodal, que inclui gestos, desenhos, expressão corporal e a linguagem oral e escrita.

**Objetivo da Pesquisa:**

Geral: Caracterizar o pensamento algébrico mobilizado por estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas que envolvem o valor omisso.

Específicos:

- Identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes ao se depararem com tarefas que explorem o valor omisso.

- Reconhecer os meios semióticos mobilizados pelos estudantes durante a resolução das tarefas de valor omisso.

**Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Riscos - a pesquisadora considera o incômodo dos participantes com sua presença e com o uso de aparelhos de captação de som e imagem, bem como possíveis conflitos entre grupos e integrantes dos grupos. Para reduzir esses riscos, propõe o diálogo constante.

Benefícios - a pesquisadora considera que as tarefas irão possibilitar a mobilização do pensamento algébrico, incentivar o trabalho de forma coletiva, considerar o ponto de vista do outro, debater e justificar ideias.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

A pesquisa está bem fundamentada e justificada. Os procedimentos metodológicos estão descritos com clareza e coerentes com os objetivos. Os instrumentos de coleta de dados foram anexados. Todos os aspectos éticos foram contemplados.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Os termos obrigatórios foram apresentados e estão em conformidade com as exigências do CEP.

**Recomendações:**

Sem recomendações.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Protocolo Aprovado.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

O Protocolo foi avaliado na reunião do CEP e está APROVADO para iniciar a coleta de dados. Informamos que a APROVAÇÃO DEFINITIVA do projeto só será dada após o envio da Notificação com o Relatório Final da pesquisa. O pesquisador deverá fazer o download do modelo de Relatório Final para enviá-lo via "Notificação", pela Plataforma Brasil. Siga as instruções do link "Para enviar Relatório Final", disponível no site do CEP/UFPE. Após apreciação desse relatório, o CEP emitirá novo Parecer Consubstanciado definitivo pelo sistema Plataforma Brasil.

Informamos, ainda, que o (a) pesquisador (a) deve desenvolver a pesquisa conforme delineada neste protocolo aprovado, exceto quando perceber risco ou dano não previsto ao voluntário participante (item V.3., da Resolução CNS/MS Nº 466/12). Eventuais modificações nesta pesquisa devem ser solicitadas através de EMENDA ao projeto, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas.

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

| Tipo Documento | Arquivo | Postagem | Autor | Situação |
|---|---|---|---|---|
| Informações Básicas do Projeto | PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1822578.pdf | 16/09/2021 11:21:33 | | Aceito |
| Projeto Detalhado / Brochura Investigador | ProjetoDetalhado.doc | 16/09/2021 11:19:54 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | TALEMenor7a18.doc | 16/09/2021 11:00:43 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | TCLEParaPaisResponsaveis.doc | 16/09/2021 11:00:25 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | DeclaracaoDeAutorizacaoUsodeImagem.doc | 15/09/2021 09:39:47 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | DeclaracaoDeVinculoComCurso.pdf | 15/09/2021 09:37:47 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | CurriculoOrientador.pdf | 15/09/2021 09:30:13 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | CurriculoLattesPesquisadora.pdf | 15/09/2021 09:28:28 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | TermoCompromissoEConfidencialidade.jpg | 15/09/2021 09:27:34 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Outros | CartaDeAnuencia.pdf | 15/09/2021 09:24:27 | Anailde Felix Marques | Aceito |
| Folha de Rosto | FolhaDeRosto.pdf | 15/09/2021 09:16:51 | Anailde Felix Marques | Aceito |

**Situação do Parecer:**
Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**
Não

RECIFE, 07 de Outubro de 2021

---

**Assinado por:**
**LUCIANO TAVARES MONTENEGRO**
**(Coordenador(a))**

**Endereço:** Av. das Engenhasria, s/n, 1º andar, sala 4 - Prédio do Centro de Ciências da Saúde
**Bairro:** Cidade Universitária **CEP:** 50.740-600
**UF:** PE **Município:** RECIFE
**Telefone:** (81)2126-8588 **E-mail:** cephumanos.ufpe@ufpe.br