



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOSÉ EVERALDO CHAVES DE BARROS JÚNIOR

Estudo comparativo de buscas aleatórias com distribuições de tamanhos de passos do tipo lei de potência, Lévy e exponenciais simples e dupla em uma e duas dimensões

Recife

2023

JOSÉ EVERALDO CHAVES DE BARROS JÚNIOR

Estudo comparativo de buscas aleatórias com distribuições de tamanhos de passos do tipo lei de potência, Lévy e exponenciais simples e dupla em uma e duas dimensões

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Coorientador: Hugo de Andrade Araújo

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

B277e Barros Júnior, José Everaldo Chaves de
Estudo comparativo de buscas aleatórias com distribuições de tamanhos de passos do tipo lei de potência, Lévy e exponenciais simples e dupla em uma e duas dimensões / José Everaldo Chaves de Barros Júnior. – 2022.
99 f.: il., fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2022.
Inclui referências.

1. Física teórica e computacional. 2. Caminhadas aleatórias. 3. Buscas aleatórias. 4. Distribuição de Lévy. 5. Distribuição exponencial. I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2023 - 003

JOSÉ EVERALDO CHAVES DE BARROS JUNIOR

**ESTUDO COMPARATIVO DE BUSCAS ALEATÓRIAS COM DISTRIBUIÇÕES DE
TAMANHOS DE PASSOS DO TIPO LEI DE POTÊNCIA, LÉVY E EXPONENCIAIS
SIMPLES E DUPLA EM UMA E DUAS DIMENSÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 13/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Hugo de Andrade Araújo
Co-Orientador
Basque Center of Applied Mathematics

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan
Examinador Externo
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dedico esse trabalho a todos os professores que passaram pela minha trajetória. Em especial minha mãe, minha primeira professora.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram desde do início da minha vida estudantil até hoje. Começando pela minha família, minha mãe Stella, meu pai Everaldo, minha avó Terezinha, meus irmãos José Antônio, Laura e Laiz, minha namorada Raiza, meus cunhados Frankelin e Stephanie, meus sogros Sr. Fernando e D. Lourdes e meu tio Fábio que me recebeu na sua casa no primeiro mês que morei em Recife.

Além da família não posso deixar de lembrar os diversos amigos e professores que conheci no antigo CEFET-AL (hoje IFAL), entre eles Prof. Carlos Argolo que foi minha inspiração para fazer física, os amigos como Manuel Felipe que me incentivou e insistiu para que eu fizesse o concurso para técnico da UFPE, Bruno Elias, Artur Eugênio, Kely Priscilla, Rafael Soriano e todos os demais que estudaram comigo nessa época.

Não posso esquecer também das pessoas que conheci na faculdade e sempre me ajudaram nos momentos difíceis da graduação entre eles o Prof. Kleber Serra que infelizmente não está mais entre nós, o Prof Gandhi que me apresentou a essa área de pesquisa, o Prof Adailson os amigos e colegas de curso Gentil e Cícero Julião (coca), Marcelo Felisberto que foi uma das pessoas que mais me incentivou a terminar a graduação de física, Frederico. E outros amigos que conheci nesse período como Orlando, Marcinha, Samara, Maritza, Sabrina, Evelyne. Além de todas as pessoas que conheci nessa época e são muitas para citar.

Também tenho que agradecer a todas as pessoas que conheci morando aqui em pernambuco como Márcio que me incentivou a andar de kart e também tem um ótimo gosto musical, Marcelo que sempre teve uma palavra de ânimo e de apoio, Rafael Campos, Peng, Rodrigo, Douglas que me ensina a tocar bateria com isso ajudando a me desestressar, ao pessoal do Pedal Caxangá com seus ótimos e sempre puxados passeios, Patrícia que me ajudou muito no curso de estatística e sempre foi uma amiga para todas as horas, os colegas de trabalho Ibson, Allyson, Everson e Joana, os diversos professores cursei as disciplinas do mestrado Padrón, Paulo Campos, Nadja e Shahram, aos demais professores que convive nesses 10 anos na UFPE, como Cláudia do departamento de estatística, Márcio, Apolinário, e os demais colegas de trabalho que conheci e convivi em todo esse período aqui na universidade.

Um agradecimento especial ao meu orientador professor Ernesto por ter me colocado em um projeto muito interessante, pela sua paciência, atenção e disponibilidade; ao meu coorientador Hugo pelas imprescindíveis sugestões para a dissertação e aos demais membros da

banca professores Gandhi, Maurício Coutinho, Marcos da Luz, Renê Filho e Fernando Santos pela disponibilidade.

RESUMO

Nesta dissertação analisamos o problema da busca aleatória em uma e duas dimensões, em que o caminhante aleatório tem os tamanhos de seus passos com distribuições do tipo lei de potência, Lévy e exponenciais simples e duplas. Em uma dimensão, consideramos um espaço finito de busca com extensão L , no qual o caminhante parte de uma posição $0 < x_0 \ll L$ na busca por sítios alvos localizados nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = L$. Em duas dimensões, em um espaço de busca $L \times L$, o caminhante parte de uma distância $x_0 \ll L$ do sítio mais próximo. Estudamos, então, a melhor estratégia para encontrar um desses alvos no regime de baixa densidade de sítios. O problema da otimização de buscas aleatórias possui várias aplicações, sendo uma das mais relevantes a busca de alimentos por animais ("animal foraging"). Nesse contexto, um novo impulso surgiu na década de 1990 pela aplicação da distribuição de Lévy para explicar a existência de longos passos, permitindo, assim, explorar diferentes regiões do espaço de busca de maneira mais eficiente, principalmente quando não se tem informações prévias sobre a localização dos sítios alvos. Observa-se, de fato, que quando o buscador não tem informações sobre o espaço de busca e inicia próximo a um sítio alvo a distribuição de Lévy com índice de estabilidade $\alpha \approx 1$ apresenta a maior eficiência. Contudo, alguns trabalhos recentes questionam se a distribuição de Lévy ainda é a mais eficiente quando o buscador possui informações específicas a respeito de comprimentos típicos relevantes do sistema, tais como o espaçamento médio entre os sítios e a dimensão do espaço de busca. Nesse contexto, a distribuição exponencial dupla com escolhas dos comprimentos característicos $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$ apresenta maior eficiência. No presente trabalho comparamos as eficiências de buscas uni e bidimensionais para distribuições de tamanhos de passos dos tipos exponencial simples, exponencial dupla, lei de potência (limite assintótico para grandes passos da distribuição de Lévy) e Lévy. Realizamos um estudo da eficiência máxima aumentando os valores de L (isto é, tornando o ambiente mais escasso em sítios), utilizando simulações computacionais via método de Monte Carlo. Obtivemos, de fato, uma maior eficiência da busca aleatória para a distribuição exponencial dupla (com $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$), seguida da lei de potência e por último a exponencial simples, tanto em uma quanto em duas dimensões. Verificamos que isso ocorre por causa da escolha específica de comprimentos característicos e pesos específicos para a exponencial dupla. No entanto, caso o buscador não tenha conhecimento prévio do espaço, tal escolha específica é muito pouco provável, e assim, na ausência de informações sobre o

espaço de busca, a distribuição de Lévy permanece como a mais eficiente em buscas aleatórias em uma e duas dimensões.

Palavras-chaves: caminhadas aleatórias; buscas aleatórias; distribuição de Lévy; eficiência; distribuição exponencial.

ABSTRACT

In this dissertation we analyze the problem of random searches in one and two dimensions, in which the random walker has its step sizes with power law, Lévy and single and double exponential distributions. In one dimension, we consider a finite search space with extension L , in which the walker starts from a position $0 < x_0 \ll L$ in the search for target sites located at the extremes of the interval, $x = 0$ and $x = L$. In two dimensions, in a search space $L \times L$, the walker starts from a distance $x_0 \ll L$ from the nearest target. We then studied the best strategy to find one of these targets in the low density regime of target sites. The problem of optimizing random searches has several applications, one of the most relevant being the search for food by animals ("animal foraging"). In this context, a new impulse emerged in the 1990s by the application of the Lévy distribution to explain the existence of long steps, thus allowing to explore different regions of the search space more efficiently, especially when there is no prior information about the search space. It is observed, in fact, that when the random searcher has no information about the search space and starts close to a target site, the Lévy distribution with stability index $\alpha \approx 1$ presents the highest efficiency. However, some recent works question whether the Lévy distribution is still the most efficient when the searcher has specific information about relevant typical lengths of the system, such as the average spacing between sites and the dimension of the search space. In this context, the double exponential distribution with choices of characteristic lengths $\tau_1 \gg L$ and $\tau_2 \ll L$ presents higher efficiency. In the present work we compare the one- and two-dimensional search efficiencies for single exponential, double exponential, power law (asymptotic limit of large steps of the Lévy distribution) and Lévy step size distributions. We carry out a study of maximum efficiency by increasing the values of L (i.e., making the environment more sparse in target sites), using Monte Carlo simulations. We actually obtained higher efficiency for the double exponential distribution (with $\tau_1 \gg L$ and $\tau_2 \ll L$), followed by the power law and finally the single exponential, both in one and two dimensions. We verify that this happens because of the specific choice of characteristic lengths and specific weights for the double exponential. However, if the searcher has no prior knowledge of the space, such a specific choice is very unlikely, and thus, in the absence of information about the search space, the Lévy distribution remains the most efficient one in random searches in one and two dimensions.

Keywords: random walks; random searches; Lévy distribution; efficiency; exponential distri-

bution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Densidade de probabilidade para se escolher um número entre $[0, 1]$, um exemplo claro de densidade de probabilidade uniforme.	23
Figura 2 – Histograma para 10000 amostras da distribuição de probabilidade uniforme dada pela densidade de probabilidade fornecida por Eq. 1.1	24
Figura 3 – Histograma gerado pela Eq. 1.2 com $n = 10000$	25
Figura 4 – Densidade de probabilidade para distribuição exponencial.	26
Figura 5 – Histograma com 10000 amostras para distribuição exponencial.	27
Figura 6 – Histograma para densidade de probabilidade gerada pela Eq. 1.3 com $n = 10000$	28
Figura 7 – Gráfico de várias gaussianas com diferentes médias μ e variâncias σ^2 . Con- vém destacar a curva preta, uma distribuição normal com média zero e variância 1	30
Figura 8 – Duas caminhadas aleatórias com 1000 passos e partindo da origem $[0, 0]$ cada: a esquerda uma distribuição α -estável de levy com $\mu = 3$ (distribuição gaussiana) e a direita com $\mu = 2$ (distribuição de Cauchy).	35
Figura 9 – Distribuição normal, $\alpha = 2$, $P(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ (preto) e Cauchy, $\alpha = 1$, $P(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$ (vermelho)	36
Figura 10 – Buscador, na posição x , dentro do intervalo $[0, \lambda]$ com alvos nas extremi- dades. O buscador tem raio d visão r_v , então se ele chegar a uma distância menor ou igual do que essa encontrará o alvo.	41
Figura 11 – Modelo de busca aleatória: (a) se um alvo, representado pelo círculo azul, estiver dentro do raio de visão r_v , o buscador se moverá de forma balística até ele. (b) se não tiver nenhum alvo dentro do raio de visão, o buscador escolherá uma direção aleatória e a partir de uma distribuição $P(l)$ um comprimento de passo l_j , repetindo isto até encontrar um alvo dentro de r_v ao longo de sua trajetória.	42
Figura 12 – Produto da eficiência (η) pela distância média entre os alvos λ em função de $\alpha = \mu - 1$ para a distribuição de Lévy com diferentes valores de λ para o caso unidimensional. Os valores foram obtidos a partir de simulação numérica e o raio de visão $r_v = 1$.	45

Figura 13 – Eficiência η da busca não-destrutiva em função de μ para distribuição de lei de potência, onde o parâmetro γ é o tamanho máximo do passo, $dx = 0.2, r_v = 1, l_0 = 1, L = 10^3$ e $x_0 = 2$. Os resultados em azul foram obtidos pelo método do operador integral para a distribuição não truncada e adicionados a imagem. Os símbolos pretos são resultados por simulação numérica e as linhas pretas obtidos pelo método do operador integral. Observamos que n limite $\gamma \rightarrow \infty$ os resultados conhecidem. 72

Figura 14 – Eficiência η em função de μ para distribuição de lei de potência, com $l_0 = 0.2, dx = 0.2, L = 10^3$ e o valor de x_0 variando. As linhas sólidas representam simulações pelo método de Monte Carlo e os símbolos foram obtidos pelo método do operador integral. 73

Figura 15 – Eficiência da exponencial simples em função de τ onde $l_0 = 0, x_0 = 1, L = 10^3$ e $dx = 0.2$, para o caso não-destrutivo $x_0 = 1$ (preto) e para o destrutivo $x_0 = 500$ (vermelho). Os círculos foram obtidos pelo método do operador integral e as linhas sólidas através do tempo médio de primeira passagem. Vemos uma boa concordância dos resultados. 74

Figura 16 – Distância média entre dois encontros consecutivos de alvos, $\langle T \rangle = \langle L \rangle$, em função do peso estatístico da primeira exponencial, w_1 , para a exponencial dupla, com $l_0 = 0, dx = 0.2, L = 10^3, \tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$ e $v = 1$. A posição inicial, x_0 , está indicada em cada gráfico, correspondendo para os menores valores de x_0/L , ao regime de buscas não-destrutivas. Os símbolos vermelhos representam os resultados obtidos pelo método do operador integral, a linha sólida preta é o resultado exato do tempo médio de primeira passagem, a linha pontilhada preta é o tempo médio de primeira passagem com a aproximação da Eq. 2.143 e os círculos azuis representam o método de Monte Carlo com 10^6 caminhadas. Também temos as linhas horizontais traço-pontilhada e a tracejada que são os resultados para lei de potência com $\mu = 2$ e $\mu \rightarrow 1$ respectivamente. Os círculos vermelhos foram adicionados a imagem pré-existente. Uma boa concordância entre os resultados é observada perto do valor mínimo de $\langle L \rangle$ 75

Figura 17 – Eficiência, para buscas não-destrutivas, para lei de potência em função de μ (vermelho), para exponencial simples em função de τ (verde) e para exponencial dupla com $\tau_1 = 10^6$ e $\tau_2 = 2$ em função de $\log w_1$ (azul). Os resultados foram obtidos através do método do operador integral, com $L = 10^3, x_0 = 2, l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$. Nota-se maior eficiência da exponencial dupla, seguida pela distribuição de lei de potência e pela exponencial simples.	77
Figura 18 – Eficiência ótima, para buscas não-destrutivas, em função de L para distribuição de lei de potência (vermelho), exponencial simples (verde) e exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$. Resultados obtidos pelo método do operador integral (símbolos coloridos), resultados teóricos (linhas coloridas) e equações aproximadas (símbolos pretos) com $x_0 = 2, l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$ (JÚNIOR, 2020). A exponencial dupla continua com maior eficiência.	78
Figura 19 – Gráfico da Fig. 18 em escala log-log. Nota-se que a eficiência ótima da exponencial dupla cai mais lentamente com L do que nas outras distribuições.	79
Figura 20 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5, x_0 = 1.4, r_v = 1$ e variando os valores de l_0	81
Figura 21 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5, x_0 = 1.0001, r_v = 1$ e variando os valores de l_0	82
Figura 22 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5, l_0 = 0.2, r_v = 1$ e variando os valores de x_0	83
Figura 23 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5, x_0 = 1.4, r_v = 1$ e variando os valores de l_0	84
Figura 24 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5, x_0 = 1.0001, r_v = 1$ e variando os valores de l_0	85
Figura 25 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5, l_0 = 0., r_v = 1$ e variando os valores de x_0	86
Figura 26 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5, x_0 = 1.0001, r_v = 1, \tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$ e variando os valores de l_0	87
Figura 27 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5, x_0 = 1.4, r_v = 1, \tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$ e variando os valores de l_0	88

Figura 28 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5, l_0 = 0.2, r_v = 1, \tau_1 = 10^3, \tau_2 = x_0$, e variando os valores de x_0 89

Figura 29 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$; função de α para distribuição de lei de potência (vermelho) e função de τ para exponencial simples (verde). Os outros parâmetros são $L = 10^5, l_0 = 0.5, r_v = 1$ e $x_0 = 1.4$ 90

Figura 30 – gráfico log-log de η em função de L para distribuição exponencial dupla (azul), distribuição de lei de potência (vermelho) e exponencial simples (verde), os parâmetros em comum são $l_0 = 0.2, r_v = 1$ e $x_0 = 1.1$ 91

Figura 31 – Fits para os valores da Fig. 30, os fits foram feitos para valores a partir de $L = 10^5$ até $L = 10^7$ 92

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	PANORAMA HISTÓRICO	18
1.2	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	22
1.2.1	Motivação	22
1.2.2	Demonstração	26
1.3	TEOREMA DO LIMITE CENTRAL GENERALIZADO	30
1.4	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY	32
1.5	DISTRIBUIÇÃO HIPEREXPONENCIAL	36
1.5.1	Lévy flight foraging hypothesis	38
2	FORMALISMO TEÓRICO	41
2.1	DESCRIÇÃO DO MODELO DE BUSCA	41
2.2	CÁLCULO DA DISTÂNCIA MÉDIA PERCORRIDA ENTRE DOIS ALVOS CONSECUTIVOS	47
2.2.1	Densidade de probabilidade	47
2.2.2	Definição do operador integral \mathcal{L}	48
2.2.3	Cálculo da expressão para $\langle L \rangle$	50
2.2.4	Simplificando a expressão para $\langle L \rangle$	51
2.3	DISCRETIZAÇÃO	52
2.4	CÁLCULO DE $\langle l \rangle$ E DOS ELEMENTOS L_{ij}	54
2.4.1	Distribuição Lei de potência	55
2.4.2	Exponencial simples	57
2.4.3	Exponencial dupla	58
2.5	CÁLCULOS ANALÍTICOS DA EFICIÊNCIA DA BUSCA ALEATÓRIA EM UMA DIMENSÃO	60
2.5.1	Lei de Potência	60
2.5.2	Exponencial simples	63
2.5.3	Exponencial dupla	66
3	RESULTADOS EM 1D	71
3.1	DISTRIBUIÇÃO DE LEI DE POTÊNCIA	71
3.2	EXPONENCIAL SIMPLES	73

3.3	EXPONENCIAL DUPLA	74
3.4	COMPARAÇÃO DAS EFICIÊNCIAS MÁXIMAS DE BUSCAS NÃO DES- TRUTIVAS	76
4	RESULTADOS EM 2D	81
4.1	DISTRIBUIÇÃO DE LEI DE POTÊNCIA	81
4.2	EXPONENCIAL SIMPLES	83
4.3	EXPONENCIAL DUPLA	87
4.4	COMPARAÇÃO DAS EFICIÊNCIAS MÁXIMAS DE BUSCAS NÃO DES- TRUTIVAS EM 2-D	89
5	CONCLUSÃO E PESPECTIVAS	93
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Qual a forma mais eficaz de buscar um conjunto de alvos aleatoriamente distribuídos os quais não conhecemos suas localizações e o buscador só tem informações acerca de sua proximidade? Qual seria a melhor maneira para aumentar a probabilidade de encontrar os alvos de maneira mais eficaz?

As buscas aleatórias são bem comuns, pois em vários casos a localização dos alvos não é conhecida atraindo o interesse de várias áreas de pesquisa. Além disso mesmo tendo várias aplicações diferentes os mecanismos físicos dessas buscas são os mesmos, o que permite utilizar os mesmos métodos e ferramentas no estudo de aplicações bem diversas, como busca de alimento por animais, recuperação de poços de petróleo em reservatórios maduros entre outras aplicações. (LUZ et al., 2009). Interessante observar que os resultados para a eficiência dessas buscas não dependem da distribuição dos alvos ser heterogênea ou homogênea (WOSNIACK et al., 2015). E verifica-se, desde de 1999, que a distribuição de Lévy (VISWANATHAN et al., 1999), (VISWANATHAN et al., 2011) é a que obtém maior eficiência para regimes com escassez de alimentos.

Entre as várias situações onde podemos contextualizar as buscas aleatórias. Uma das mais estudadas, um contexto biológico abordado nessa dissertação, é a busca de alimentos por animais, conhecido por "animal foraging" (VISWANATHAN et al., 1999). Porém, além dessa contextualização em modelos biológicos, os resultados obtidos nesse trabalho podem ser usados para diversos problemas de buscas aleatórias em geral. O objetivo dessa dissertação é comparar a eficiência da distribuição de lei de potência, que é um caso particular da distribuição de Lévy no limite assintótico da distribuição de Lévy para grandes passos, com as distribuições exponencial simples e exponencial dupla no caso bidimensional e comparar com os resultados para o caso unidimensional.

Nesse capítulo inicial apresentaremos um panorama histórico da utilização das buscas aleatórias e apresentaremos alguns conceitos importantes no âmbito da física estatística como: caminhada aleatórias, teorema central do limite (TCL) e teorema central do limite generalizado. Após isso falaremos das distribuições abordadas nesse trabalho (distribuição de Lévy, exponencial simples e exponencial dupla). E faremos uma breve discursão do artigo que introduziu as distribuições de Lévy no contexto de buscas aleatórias (VISWANATHAN et al., 1999).

Depois no capítulo seguinte apresentaremos o modelo do nosso problema, mostramos o

método do operador integral, que será utilizado para distância média percorrida e a eficiência das distribuições abordadas em uma dimensão. Além disso mostraremos os cálculos analíticos para a distância média percorrida e a eficiência para o caso unidimensional.

Já no capítulo 3, mostraremos os resultados obtidos para o caso unidimensional para as distribuições exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência. E compararemos as eficiências ótimas dessas distribuições.

No capítulo 4, além de mostrar os resultados para o caso bidimensional para as distribuições exponencial simples, exponencial dupla e de Lévy, faremos as comparações de suas eficiências ótimas e compararemos com os resultados em uma dimensão.

E para finalizar essa dissertação no último capítulo teremos as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

1.1 PANORAMA HISTÓRICO

Podemos definir o problema da busca aleatória como o problema de um caminhante aleatório (buscador) que se movimenta através de uma determinada distribuição com tamanho ou duração de passos para tentar encontrar um ou mais alvos. Elas são muito estudadas na física e na estatística, com diversas aplicações em várias áreas como computadores procurando informações aleatória em bancos de dados (PIROLI; CARD, 1995), criptografia (PIROLI; CARD, 1999), entre outros problemas que precisem otimizar buscas (VISWANATHAN et al., 2011).

Um dos marcos iniciais das pesquisas nessa área ocorreu quando Robert Brown, em 1827, observou grãos de pólen imersos numa solução aquosa (V.P.L.S., 1828). Brown verificou que mesmo que a água aparentasse estar em repouso os grãos se movimentavam com deslocamentos curtos em direções aleatórias. Hoje esse padrão de movimento é conhecido como movimento browniano.

Surgiram várias tentativas para explicar o movimento browniano, inicialmente o próprio Robert Brown descartou a possibilidade de algum mecanismo relacionado a vida causar esse movimento, pois ele também foi visto em partículas inorgânicas. E Louis Bachelier, na sua tese de doutorado "The theory of speculation" (BACHELIER, 1900) em 1900, elaborou um modelo matemático para explicar o movimento browniano e aplicou esse modelo para analisar problemas financeiros. Devido as suas contribuições importantes na área de dinâmica estocástica, Bachelier é considerado o pai da matemática financeira.

A explicação clássica para o movimento browniano surgiu apenas em 1905, quando Albert

Einstein explicou que os grãos de pólen não estavam ativos, ou seja, não realizavam nenhuma ação ou comportamento para se moverem. Na verdade, eles se moviam ao colidir com as moléculas de água, (EINSTEIN, 1905). Porém nesse período ainda não era totalmente reconhecida a existência de moléculas nem de átomos, entretanto mesmo assim Einstein afirmava a existência de moléculas e ainda calculou o provável tamanho das moléculas estudando o movimento browniano. Depois em 1908, Jean Baptiste Perrin verificou que as previsões de Einstein estavam corretas, comprovando a existência de moléculas e mostrando que o modelo atomístico molecular era real. Isso garantiu a Perrin, em 1926, o Prêmio Nobel de Física.

Nos anos 60, um ramo da ecologia comportamental, ou "behavioral ecology" começou o estudo da dinâmica da busca de alimentos por animais (SCHMITZ; BECKERMAN; O'BRIEN, 1997) e também surgiram as primeiras teorias para otimizar as buscas aleatórias, ou "optimal foraging theory" (VISWANATHAN et al., 2011), (MACARTHUR; PIANKA, 1966) as quais tinham como objetivo encontrar os parâmetros que definiam a estratégia mais eficiente para um animal buscar alimentos.

Na "optimal foraging theory", a dinâmica da busca de alimentos visa otimizar o ganho líquido de calorias (WERNER; HALL, 1974), assume-se que esses processos de busca estão sendo otimizados há milhões de anos e assim, os animais conseguem otimizar o ganho calórico ao desenvolver as melhores estratégias de busca através de um processo evolutivo de seleção natural (WERNER; HALL, 1974).

Para explicar a "optimal foraging theory", tentou-se inicialmente adotar um grande número de variáveis relacionadas a habilidade de caça, tipos de predadores, aspectos biológicos, entre outras características. E através dessas propriedades, fazer a melhor abordagem para identificar as características mais importantes e otimizar as buscas (BARNARD, 1985). Porém depois de várias tentativas e diversos trabalhos tentando identificar os parâmetros relevantes, essa abordagem foi abandonada devido a vários motivos, principalmente por causa do grande número de variáveis as quais dificultavam a validação dessas abordagens em estudos de laboratório e observações de campo (VISWANATHAN et al., 2011).

Na década de 90 uma abordagem multidisciplinar entre biologia e física tentou compreender melhor a "optimal foraging theory" com a utilização de ideias e métodos da física estatística (VISWANATHAN et al., 2011). Assim começou-se a observar padrões gerais de movimentos dos animais ao invés de características específicas de cada animal. Dessa forma reduziu-se bastante o número de variáveis, colocando o foco somente no comportamento estatístico global durante a busca, permitindo a análise de dados e aplicação da teoria (VISWANATHAN et al., 2011).

Muitos dos estudos de busca aleatória, nesse contexto de "animal foraging", assumem a hipótese que o animal não tem conhecimento prévio do ambiente e da localização da comida. Assim tornando-se semelhante ao problema de busca aleatória em física estatística. Entretanto em alguns casos o animal tem algum conhecimento prévio do ambiente e uma teoria que leve isso em consideração é um objetivo almejado. Nessa dissertação consideramos que o predador não possui nenhum conhecimento do espaço de busca e analisaremos a melhor estratégia de busca.

Os primeiros modelos matemáticos, para as buscas aleatórias no contexto de "animal foraging", consideravam que os passos não tinham nenhuma correlação entre si, dessa forma, direção e comprimento do passo atual não dependem de nenhum dos passos anteriores. Assim, a posição atual do caminhante só depende de sua posição anterior e a posição após o passo $i + 1$ só depende da posição após o passo i , fazendo o sistema ser markoviano (WEISS; WEISS, 1994).

Quando o caminhante não tem nenhuma tendência direcional, a direção de cada passo é escolhida aleatoriamente através de uma distribuição de ângulos uniformes entre $[0, 2\pi[$. Se a distribuição que rege o tamanho dos passos é bem comportada, com primeiro e segundo momento bem definidos, e tamanho de passos sem correlação (ou no máximo correlação de curto alcance), para um número grande de passos, a soma do tamanho dos passos é governada pelo teorema central do limite (TCL) e está associada à posição do caminhante. Assim esse caminhante segue um processo de difusão normal (ou usual) (WEISS; WEISS, 1994), se comportando como se fosse uma distribuição gaussiana de passos. Um dos problemas das distribuições governadas pelo TCL é que caso o caminhante não esteja mais perto de um dos alvos, ele revisita a mesma posição várias vezes e conseqüentemente não consegue explorar as regiões mais distantes do espaço de busca, o que diminui sua eficiência.

Entretanto, alguns animais apresentam uma tendência a seguir na mesma direção por determinado tempo (VISWANATHAN et al., 2011). Para explicar isso, inicialmente foi utilizada uma adaptação do movimento browniano, caminhadas aleatórias correlacionadas, ou "correlated random walks" (PATLAK, 1953). Uma variável chamada de persistência é introduzida para adaptar o modelo a essa tendência direcional.

A presença de persistência gera uma tendência, ou "bias", na mesma direção do movimento do predador. À medida que mais passos colineares são realizados, a probabilidade de se manter na mesma direção diminui. É importante observar que para as caminhadas aleatórias correlacionadas continua valendo o TCL caso as correlações entre os passos tenham extensão

(ou duração) muito menor que a caminhada e a soma dos passos continuam tendendo para uma distribuição normal.

Além disso, com a aplicação, nesse contexto, de vários conceitos de física estatística como superdifusão, geometria fractal entre outros. Notou-se a semelhança do padrão de movimentos dos animais gerados pelo caminhante aleatório e uma distribuição de tamanho de passos de Lévy. Dessa maneira no final da década de 90 iniciou-se uma aplicação mais sistemática de voos ou caminhadas de Lévy no problema de busca de alimentos por animais (VISWANATHAN et al., 1999), especialmente em ambientes escassos de alimentos.

Para ambientes com abundância de alimentos a distribuição normal explica bem o movimento dos animais (VISWANATHAN et al., 1999), (VISWANATHAN et al., 2011), (JAGER et al., 2011). Porém com poucos alimentos, a distribuição gaussiana não explica a existência de longos passos dos dados empíricos. Já o uso da distribuição de Lévy para o tamanho dos passos modela adequadamente o comportamento de vários animais, inclusive explicando a presença dos grandes passos (VISWANATHAN et al., 1999), (VISWANATHAN et al., 2011), (JAGER et al., 2011).

Uma característica primordial da distribuição de Lévy é não satisfazer o TCL, pois seu segundo momento diverge. E por isso a soma de seus passos não pode ser considerada uma distribuição gaussiana. Ela possui um carácter superdifusivo, com a distância média quadrática do caminhante crescendo em função do número de passos de maneira mais veloz que as distribuições que seguem o TCL. Mais adiante veremos que o teorema central do limite generalizado pode explicar a distribuição de uma soma de variáveis aleatórias nas quais o segundo momento diverge (VISWANATHAN et al., 2011).

Em 1999 descobriu-se que a distribuição com tamanho de passos de Lévy apresentou, para espaços com escassez de alimentos, maior eficiência na busca de alimentos (VISWANATHAN et al., 1999). Dando início a hipótese que a distribuição de Lévy foi resultado de processos evolutivos, devido as vantagens na busca de alimentos, o que ficou conhecido como "Lévy flight foraging hypothesis". Algum tempo depois surgiram outros modelos para busca aleatórias (VISWANATHAN et al., 2011), alguns até incorporando ideias do trabalho original de 1999.

Entre esses modelos temos as caminhadas aleatórias intermitentes, as quais dividem o movimento do animal em dois estados, uma busca e deslocamento entre estados de busca. Na busca o caminhante executaria um movimento browniano, dessa forma verificando detalhadamente os arredores de sua posição atual e esse é o único estado que pode se detectar um alvo. Já durante o deslocamento o caminhante se moveria de forma balística, porém não pode

detectar alvos nesse estado. Para otimizar esse modelo, o tempo em cada estado é o parâmetro usado. Entretanto esse modelo não se mostrou biologicamente realístico, por causa da adaptação responsável por encontrar os alvos ser "desativada" na fase de busca. Esse modelo segue o TCL e após um grande número de passos teríamos uma dinâmica de movimento com difusão normal, semelhante a distribuição gaussiana de tamanho de passos.

Ainda existem debates sobre a melhor estratégia de busca de alimentos, algumas estratégias consideradas são as caminhadas aleatórias correlacionadas, caminhadas aleatórias intermitentes e os vôos e caminhadas de Lévy. Parte considerável da comunidade científica considera que a estratégia mais eficiente é uma distribuição com tamanho de passos de Lévy (VISWANATHAN et al., 1999), porém isso não é unanimidade. Alguns trabalhos recentes mostram que a exponencial dupla pode apresentar maior eficiência para o caso unidimensional em condições muito específicas: o buscador conhecer anteriormente as escalas de comprimento do ambiente e desta forma escolher os parâmetros ideais para a exponencial dupla (JÚNIOR, 2020).

1.2 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

O teorema central do limite (TCL) é um dos mais importantes da estatística. De acordo com o TCL, a soma de uma grande quantidade de variáveis aleatórias, com primeiro momento (média) e segundo momento (variância) finitos, gera uma distribuição normal. Isso faz a distribuição normal ser tão estudada e aparecer em vários fenômenos, tornando-se uma das bases para inferência estatística e além disso utilizado para explicar vários fenômenos, como o caminhante aleatório browniano por exemplo (BELLHOUSE, 2012). Nesta seção vamos mostrar alguns conceitos básicos e demonstrar esse resultado conforme foi feito em (REIF, 1965).

1.2.1 Motivação

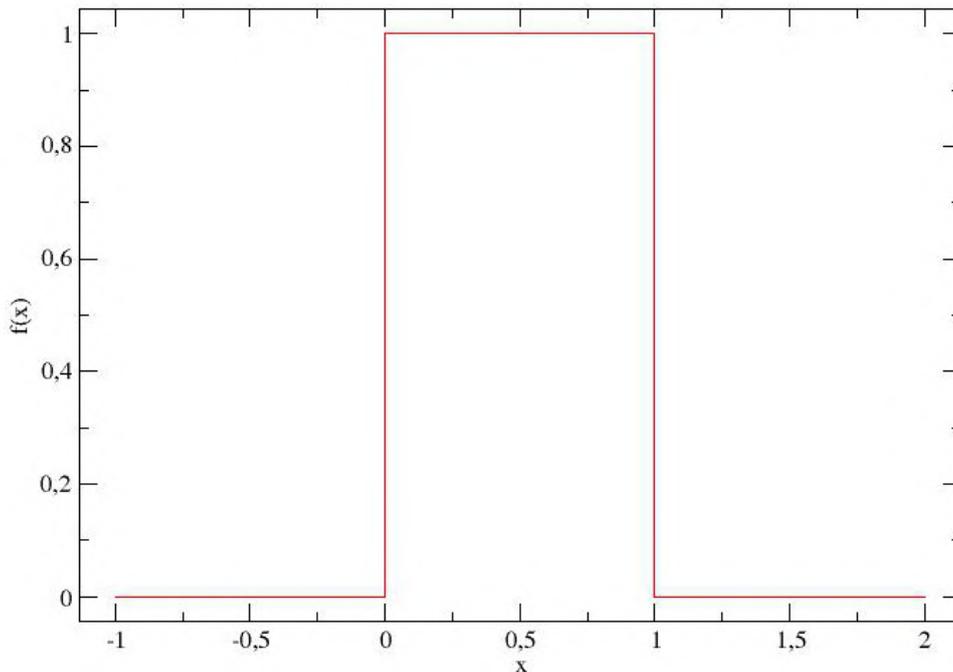
Suponha que eu tenha um intervalo entre $[0, 1]$ e dentro desse intervalo qual seria a probabilidade de escolher um número entre $[0.3, 0.6]$? Existem várias maneiras de escolher um número dentro desse intervalo ($[0, 1]$), para entendemos essas maneiras diferentes precisaremos do conceito de função de densidade de probabilidade (FDP).

A FDP nos mostra a probabilidade relativa de obter resultado a partir de uma variável aleatória. Sendo que uma variável aleatória x é uma variável quantitativa a qual é obtida através de fatores aleatórios, sua densidade de probabilidade é definida por $f(x)$ e a probabilidade de

termos um valor da variável aleatória dentro do intervalo $[x, x + dx]$ é $f(x)dx$, dessa maneira a probabilidade de x esta entre $[0.3, 0.6]$ é $p(0.3, 0.6) = \int_{0.3}^{0.6} f(x)dx$.

Podemos escolher diferentes densidades de probabilidades $f(x)$ desde que atendam algumas propriedades. Ela não pode ter valores negativos, pois não existe probabilidade negativa e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$, devido ao fato da probabilidade máxima permitida (100% de certeza que o evento vai acontecer) ter valor igual a 1, significando que sempre é impossível obter valores fora do intervalo definido com todos os valores dentro desse intervalo. E se $f(x)$ não satisfizer essas propriedades, ela não pode ser FDP. Abaixo vamos mostrar dois exemplos, distribuição uniforme e exponencial:

Figura 1 – Densidade de probabilidade para se escolher um número entre $[0, 1]$, um exemplo claro de densidade de probabilidade uniforme.



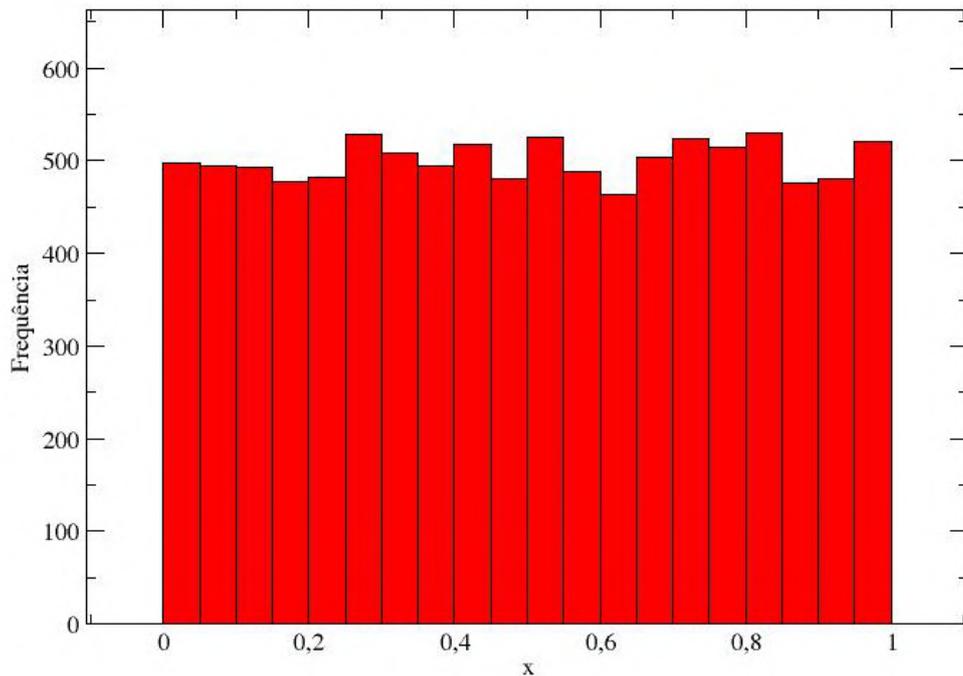
Fonte: O autor (2022).

Considerando a escolha de qualquer resultado, dentro do intervalo $[0, 1]$, equiprovável, temos uma distribuição uniforme onde,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & 0 < x < 1 \\ f(x) &= 0, & x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

e o gráfico de sua densidade de probabilidade na Fig. 1. Fazendo o histograma para um grande número de sorteios ($N \rightarrow \infty$), temos um gráfico igual ao da densidade de probabilidade correspondente, conforme vemos na Fig. 2 para $N = 10000$.

Figura 2 – Histograma para 10000 amostras da distribuição de probabilidade uniforme dada pela densidade de probabilidade fornecida por Eq. 1.1



Fonte: O autor (2022).

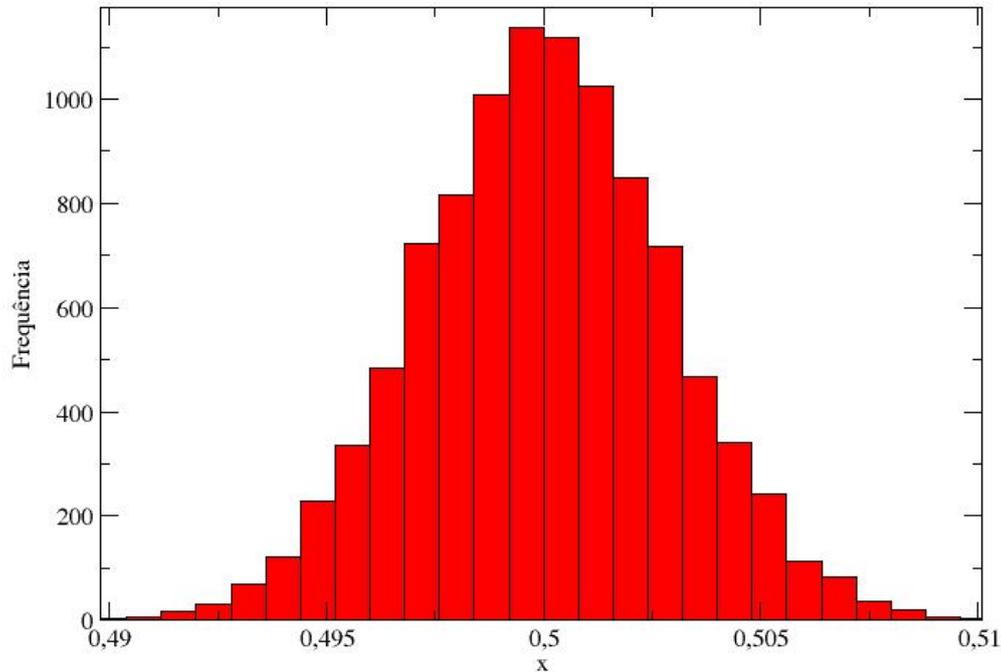
Agora se ao invés de consideramos uma única amostra dessa distribuição uniforme, utilizarmos como variável aleatória x a média de uma grande amostra onde cada x_i é determinada pela distribuição uniforme da Eq. 1.1. Ou colocando no contexto de caminhadas aleatórias x_i seria cada passo tamanho de i com FDP $f_i(x_i)$, x a soma de passos e n o número de passos. Dessa forma nova variável aleatória sera:

$$F(x) = \frac{\sum_{j=1}^n f(x_j)}{n}, \quad (1.2)$$

onde f_i é uma variável aleatória com distribuição uniforme e n é o número de variáveis somadas (nesse caso f_i FDP para passos com distribuição uniforme e n passos).

Plotando o histograma dessa média ou dessas posições do caminhante, vemos um comportamento diferente, chamado de gaussiana que tem formato de sino e essa curva também

Figura 3 – Histograma gerado pela Eq. 1.2 com $n = 10000$



Fonte: O autor (2022).

é gerada pela distribuição normal ou gaussiana. Verificamos isso na Fig. 3 onde temos o histograma com 10000 amostras obtidas de acordo com a Eq. 1.2. Vemos que ela possuiu o formato de sino característico da distribuição normal.

Mas por que isso ocorre? Será que isso acontece apenas para a distribuição normal ou ocorreria para outras distribuições? Para analisarmos isso vamos agora vamos trabalhar com outra densidade de probabilidade a exponencial.

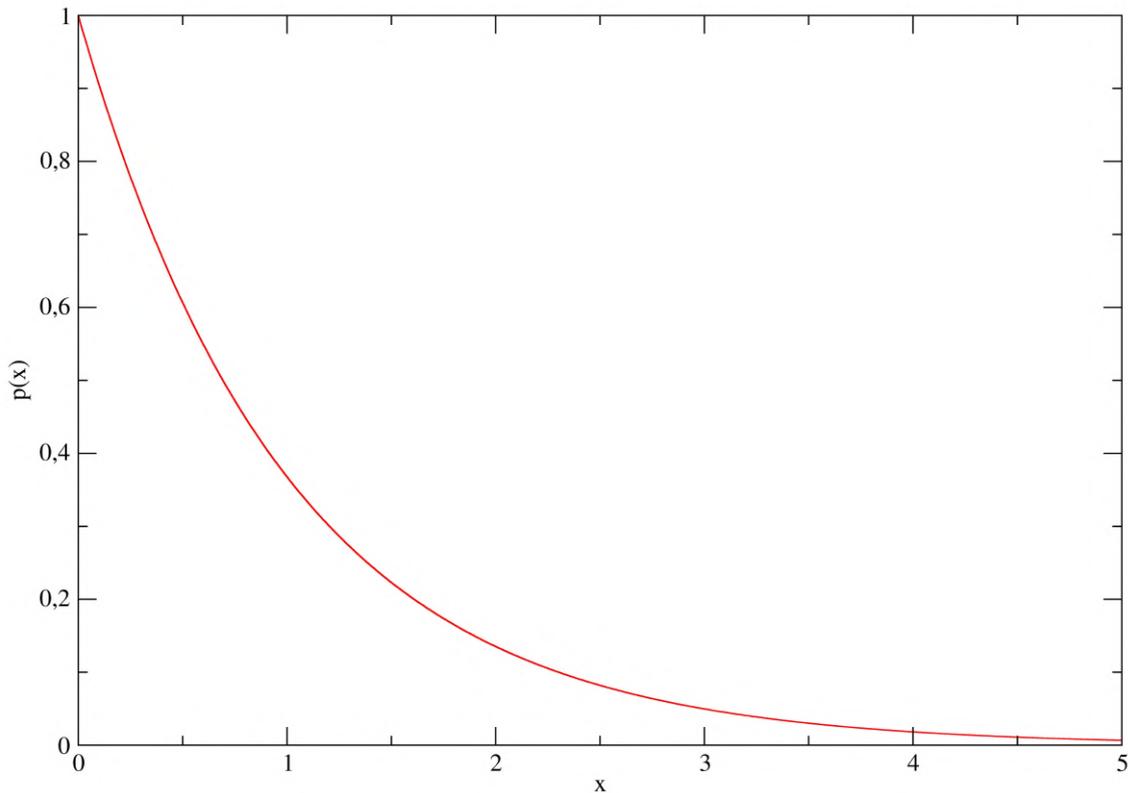
Considerando, $p(x) = e^{-x}$, a distribuição exponencial. Inicialmente vemos na Fig. 4 o gráfico da densidade de probabilidade para essa distribuição e na Fig. 5 o histograma da mesma com 10000 amostras.

Agora se definirmos uma nova variável aleatória como:

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^n p(x_i)}{n}, \quad (1.3)$$

quase igual a Eq. 1.2 com a diferença $P(x)$ é obtido pela posição após uma grande amostra de $p(x_i)$ deslocamentos. Ao mostramos o histograma da Eq. 1.3 com 10000 amostras, surpreendentemente, temos a mesma forma de boca de sino da Fig. 6.

Figura 4 – Densidade de probabilidade para distribuição exponencial.



Fonte: O autor (2022).

Isso indica algo permite que as duas distribuições apresentem o mesmo resultado. Na verdade, elas apresentam esses resultados pois as duas seguem o TCL que vamos demonstrar na subseção abaixo.

1.2.2 Demonstração

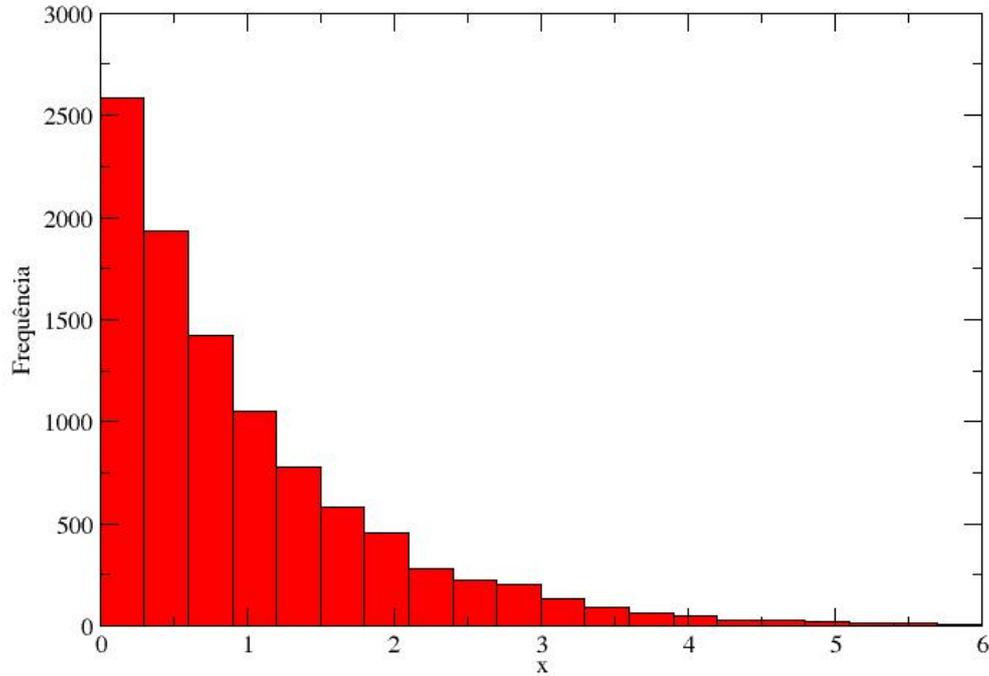
Considere x a soma de um conjunto de variáveis aleatórias s_i , regidas pela distribuição de probabilidade $w(s)$. Queremos descobrir a distribuição de probabilidade, $P(x)$, a qual rege x . Considerando cada variável estatisticamente independente das outras, a probabilidade de ocorrer uma sequência de N valores delas, cada uma dentro do intervalo $[s_i, s_i + ds_i]$ é

$$w(s_1)ds_1w(s_2)ds_2w(s_3)ds_3\dots w(s_N)ds_N \quad (1.4)$$

E a probabilidade de x estar no intervalo $[x, x + dx]$ será

$$P(x) = \iint \dots \int_{x \in [x, x+dx]} w(s_1)w(s_2)w(s_3)\dots w(s_N)ds_1ds_2ds_3\dots ds_N \quad (1.5)$$

Figura 5 – Histograma com 10000 amostras para distribuição exponencial.



Fonte: O autor (2022).

Utilizando a função delta de Dirac podemos retirar os limites de integração.

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)w(s_2)w(s_3)\dots w(s_N) \left[\delta \left(\sum_{i=1}^N s_i - x \right) dx \right] ds_1 ds_2 ds_3 \dots ds_N \quad (1.6)$$

Sabendo que a função Delta é

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk \quad (1.7)$$

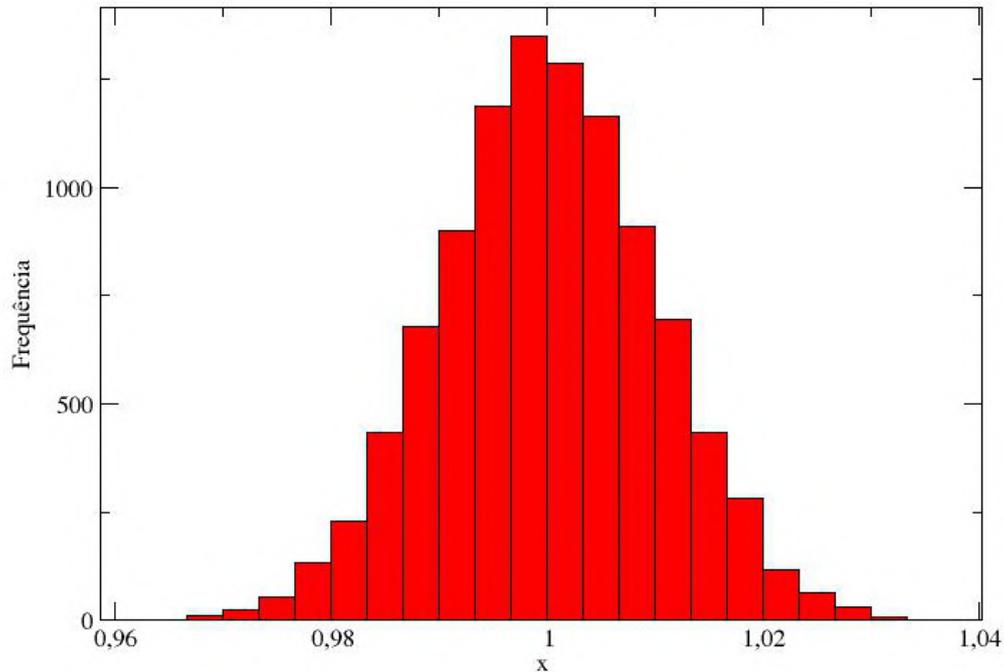
assim

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)w(s_2)w(s_3)\dots w(s_N) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \left(\sum_{i=1}^N s_i - x \right)} dk ds_1 ds_2 ds_3 \dots ds_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1) e^{iks_1} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(s_2) e^{iks_2} ds_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_N) e^{iks_N} ds_N, \end{aligned} \quad (1.8)$$

devido ao fato da variável de integração ser muda e as variáveis s_i serem idênticamente distribuídas podemos dizer que cada uma das N últimas integrais são equivalentes e iguais a:

$$\hat{Q}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) e^{iks} ds \quad (1.9)$$

Figura 6 – Histograma para densidade de probabilidade gerada pela Eq. 1.3 com $n = 10000$



Fonte: O autor (2022).

Como $\hat{Q}(k)$ é a transformada de Fourier de $w(s)$, $P(x)$ fica

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \hat{Q}^N(k) dk \quad (1.10)$$

onde,

$$\hat{Q}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iks)^n}{n!} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} w(s) s^n ds \quad (1.11)$$

mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(s) s^n ds = \langle s^n \rangle \quad (1.12)$$

então

$$\hat{Q}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle s^n \rangle = 1 + ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2 \rangle + \dots \quad (1.13)$$

Agora vamos estudar o comportamento da integral que determina $\hat{Q}(k)$. Escolhendo um intervalo $[a, b]$ em que w varia lentamente, assim $\left| \frac{dw}{ds} \right| (b - a) \ll w$, com várias oscilações,

fazendo que, $(b - a) \gg 1$, assim

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b w(s) e^{iks} ds \right| = \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{e^{iks}}{ik} \left(-\frac{dw}{ds} \right) ds \right| \\
 & \leq \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \int_a^b \frac{e^{iks}}{ik} \left(-\frac{dw}{ds} \right) ds \right| \leq \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \int_a^b \left| \frac{e^{iks}}{ik} \right| \left| \left(-\frac{dw}{ds} \right) \right| ds \quad (1.14) \\
 & \ll \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \frac{w(a)}{(b-a)} \right| \int_a^b \left| \frac{e^{iks}}{ik} \right| ds = \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \frac{w(a)}{k} \right|
 \end{aligned}$$

Conseguimos estender o intervalo $[a, b]$ para $(-\infty, \infty)$ fazendo $k \gg 1$ e assim $\hat{Q}(k) \xrightarrow{k \gg 1} 0$.

Para o caso de $k \ll 1$ e $N \gg 1$, considerando a média e a variância finitas, precisamos antes saber que

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots \quad \langle (\Delta s)^2 \rangle = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2 \quad (1.15)$$

dessa forma, teremos

$$\ln \hat{Q}^N(k) \simeq N \left[ik \langle s \rangle - \frac{k^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle}{2} \right] \quad (1.16)$$

e

$$\hat{Q}^N(k) = e^{N \left[ik \langle s \rangle - \frac{k^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle}{2} \right]} \quad (1.17)$$

desse modo $P(x)$ será

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(N\langle s \rangle - x) - \frac{Nk^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle}{2}} dk \quad (1.18)$$

porém, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (1.19)$$

e dessa forma

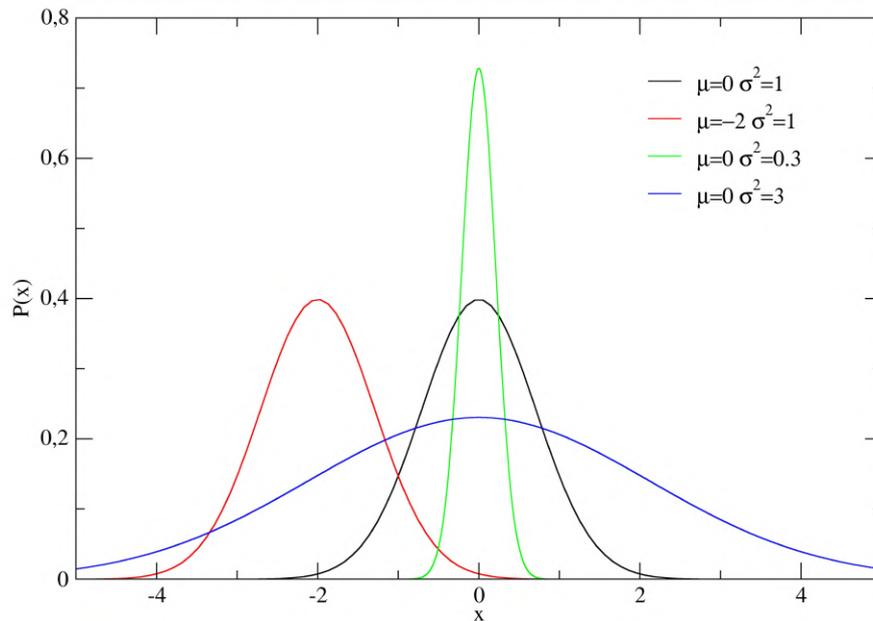
$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{N \langle (\Delta s)^2 \rangle}} e^{\frac{-(N\langle s \rangle - x)^2}{2N \langle (\Delta s)^2 \rangle}} \quad (1.20)$$

Com isso o TLC garante que a variável x é regida pela distribuição normal $P(x)$, com média m e variância σ^2

$$m = N \langle s \rangle \quad \sigma^2 = N \langle (\Delta s)^2 \rangle \quad (1.21)$$

onde os valores da média e variância dependem das distribuições $w(s)$ iniciais. E na Fig. [7](#) temos os gráficos de várias gaussianas com diferentes médias μ e variâncias σ^2 , onde a curva preta é a normal padrão com média zero e variância unitária

Figura 7 – Gráfico de várias gaussianas com diferentes médias μ e variâncias σ^2 . Convém destacar a curva preta, uma distribuição normal com média zero e variância $\sigma^2 = 1$



Fonte: O autor (2022).

1.3 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL GENERALIZADO

Na seção acima falamos do TCL, porém para o utilizarmos é necessário que a média e a variância sejam finitas. O que aconteceria se a média e ou a variância da distribuição de probabilidades da seção anterior não fossem finitas? Será que a soma dessas distribuições convergiriam para alguma distribuição e com quais propriedades? Existe sim uma versão do TLC que retira essa exigência, o teorema do limite central generalizado (INOLAN, 2018), a qual vamos estudar logo abaixo.

Se consideramos uma densidade de probabilidade $P(x)$ formada pela soma de n passos $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, quando essa distribuição será igual a distribuição $p(x)$ de cada um dos passos x individuais, a menos de um fator de escala? Esse questionamento foi feito por Paul Lévy (KLAFTER; ZUMOFEN, 1996) e define os fractais (quando o todo se parece com as partes fundamentais). A primeira resposta que pensamos é que $p(x)$ deveria ser gaussiana, porém vemos abaixo que existem outras possibilidades.

Para nos auxiliar nessa discussão precisamos inicialmente definir uma maneira de escre-

ver uma função $P(x)$ através da transformada de Fourier e fazemos isso através da função característica $\phi(k)$

$$\phi(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx \quad (1.22)$$

A primeira pessoa a notar que existiam outras soluções para o problema de uma densidade de probabilidade formada pela soma de distribuições de probabilidades que não precisam obrigatoriamente ter o primeiro, e ou segundo momento finitos foi Augustine Cauchy, em 1853 (KLAFTER; ZUMOFEN, 1996) e uma dessas soluções tem a função característica:

$$\phi(k) = e^{-n|k|^\alpha} \quad (1.23)$$

E para $\alpha = 1$, ao se transformar a função característica para o espaço x , temos a conhecida distribuição de Cauchy (KLAFTER; ZUMOFEN, 1996).

$$P(x) = \frac{1}{\pi n} \frac{1}{1 + (x/n)^2} = \frac{1}{n} p(x/n). \quad (1.24)$$

Depois, na década de 30, Paul Lévy em seus trabalhos generalizou os resultados de Cauchy, conseguindo as distribuições α -estáveis de Lévy, que para serem não negativas em todo x têm α com valores entre 0 e 2.

Dessa forma, definimos distribuição estável quando, a distribuição de um dos elementos x é igual, a menos de um fator de escala, a uma sequência de variáveis aleatórias regida por ela x_i (KLAFTER; ZUMOFEN, 1996).

$$c_n x + d_n \stackrel{d}{=} x_1 + x_2 + \dots x_n \quad (1.25)$$

e o símbolo $\stackrel{d}{=}$ indica que os dois lados são regidos pela mesma distribuição de probabilidade. A palavra estável indica que a forma da distribuição permanece a mesma para as somas definidas acima. Os casos que temos expressões fechadas para distribuições estáveis são as distribuições gaussianas, de Cauchy e de Lévy.

Porém essa definição não permite parametrizar todas as $P(x)$ distribuições estáveis. Podemos fazer isso com a ajuda da função característica $\phi(k)$ definida em Eq. 1.22

$$\phi(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx = \begin{cases} \exp(-|k|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sgn}(k)]) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-|k|^\alpha [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(k) \log(|k|)]) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

com $0 < \alpha \leq 2$, $-1 < \beta \leq 1$ e $\operatorname{sgn}(k)$ é a função sinal. O parâmetro β controla a simetria da função, então se ele for nulo

$$\phi(k) = e^{-|k|^\alpha} \quad (1.27)$$

a equação acima define a distribuição de Lévy.

A vantagem de trabalhar com o teorema do limite central generalizado é eliminar a necessidade da média e variância finitas, assim obtendo uma abrangência maior de casos. E para uma soma normalizada de termos independentes o resultado são distribuições estáveis, as quais todas apresentam a propriedade de escala.

Para um grande número de passos N , em uma distribuição estável $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ temos (ZASLAVSKY, 1994) (METZLER; KLAFTER, 2000) (METZLER; NONNENMACHER, 2002).

$$P(x)_x \sim \frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}}} P_y \left(x/N^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad (1.28)$$

e variância

$$\sigma^2 = \left(N^{\frac{1}{\alpha}} \right)^2 \quad (1.29)$$

dessa forma as trajetórias na distribuição de Lévy são facilmente distinguíveis do movimento browniano. Além disso para o caso particular de $\alpha = 2$ voltamos para a distribuição normal.

1.4 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY

A distribuição de Lévy pode ser usada para modelar diversos problemas como o intervalo de tempo entre duas batidas do coração humano (PENG et al., 1993), intervalo de tempo necessário para memorizar palavras de determinadas categorias (RHODES; TURVEY, 2007), entre outros problemas.

A Eq. (1.10) mostra que podemos calcular $P(l)$, onde l é formado por uma soma de deslocamentos x_i realizados em N passos de um caminhante aleatório. Dessa forma cada passo tem uma função característica, ϕ_i , idêntica para todos os passos.

$$P(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \sum_{i=1}^N x_i} [\phi(k)]^N dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikl} [\phi(k)]^N dk. \quad (1.30)$$

A função característica da distribuição de Lévy, de acordo com a Eq. (1.26)

$$\phi(k) = \begin{cases} \exp(-|k|^\alpha [1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sgn}(k)]) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-|k|^\alpha [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sgn}(k) \log(|k|)]) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.31)$$

Considerando a distribuição simétrica sem nenhuma preferência de direção, $\beta = 0$, de acordo com a Eq. (1.27) temos

$$\phi(k) = e^{-l_0^\alpha |k|^\alpha} \quad (1.32)$$

onde l_0 é uma constante com dimensão de comprimento.

Assim:

$$P(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikl} e^{-Nl_0^\alpha |k|^\alpha} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kl) e^{-Nl_0^\alpha |k|^\alpha} dk \quad (1.33)$$

onde a parte imaginária deixou de existir por causa da paridade ímpar de seu integrando.

Considerando $\mu = \alpha + 1$ e $1 < \mu < 3$, podemos expandir o integrando em série de Taylor, dessa forma

$$P(l) = \frac{N\Gamma(\mu) \sin(\pi(\mu - 1)/2)}{\pi l_0} \left(\frac{l_0}{l}\right)^\mu + O(l^{-2\mu+1}) \quad (1.34)$$

sendo $\Gamma(\mu)$ a função gama. E dessa forma temos um decaimento do tipo lei de potência para l grande.

Como as distribuições do tipo lei de potência são o limite assintótico da distribuição de Lévy para l grandes e é bem mais simples trabalhar com elas, do que com distribuições de Lévy, utilizaremos a distribuição de lei de potência para o tamanho dos passos do caminhante aleatório, assim, quando citamos a distribuição de Lévy, estamos utilizando a distribuição

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{A_l}{|l|^\mu} \quad |l| > l_0, \\ P(l) &= 0 \quad |l| < l_0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde A_l é a constante de normalização. E sabendo que $P(l)$ é normalizado temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(l) dl = A_l \left(\int_{-\infty}^{l_0} \frac{dl}{|l|^\mu} + \int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{|l|^\mu} \right) \quad (1.36)$$

Substituindo $u = -l \rightarrow du = -dl$ na primeira integral depois da igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(l) dl = A_l \left(\int_{\infty}^{l_0} \frac{-dl}{|-l|^\mu} + \int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{|l|^\mu} \right) = 2A_l \int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{|l|^\mu} \quad (1.37)$$

Para a normalização não divergir, precisamos de $\mu > 1$

$$\frac{l_0^{1-\mu}}{\mu - 1} = \frac{1}{2A_l} \therefore A_l = \frac{(\mu - 1)l_0^{1-\mu}}{2} \quad (1.38)$$

Reescrevendo as Eq. [1.35](#):

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{(\mu-1)l_0^{1-\mu}}{2|l|^\mu} \quad |l| > l_0, \\ P(l) &= 0 \quad |l| < l_0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para verificar se a distribuição segue o TCL, calculamos os primeiros momentos de Eq.

[1.39](#):

$$\langle l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} lP(l) dl = \frac{(\mu - 1)l_0^{\mu-1}}{2} \left[\int_{-\infty}^{-l_0} \frac{l}{|l|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} \frac{l}{|l|^\mu} dl \right] \quad (1.40)$$

Substituindo $u = -l \rightarrow du = -dl$ na primeira integral depois da segunda igualdade

$$\begin{aligned} \langle l \rangle &= \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \left[\int_{-\infty}^{l_0} \frac{(-u)}{|-u|^\mu} (-du) + \int_{l_0}^{\infty} \frac{l}{|l|^\mu} dl \right] \\ &= \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \left[- \int_{l_0}^{\infty} \frac{u}{|u|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} \frac{l}{|l|^\mu} dl \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Considerando $\mu \neq 2$ temos

$$\int_{l_0}^{\infty} \frac{l}{|l|^\mu} dl = l^{2-\mu} \Big|_{l_0}^{\infty} \quad (1.42)$$

E para $\mu = 2$

$$\int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{l} = \ln l_0 \Big|_{l_0}^{\infty} \quad (1.43)$$

Dessa forma, primeiro momento é nulo e converge apenas para $\mu > 2$, neste caso a distribuição não tem nenhuma preferência de direção.

Agora calculando a variância:

$$\langle l^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} l^2 P(l) dl = \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \left[\int_{-\infty}^{-l_0} \frac{l^2}{|l|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{|l|^\mu} dl \right] \quad (1.44)$$

Substituindo $u = -l \rightarrow du = -dl$ na primeira integral depois da segunda igualdade

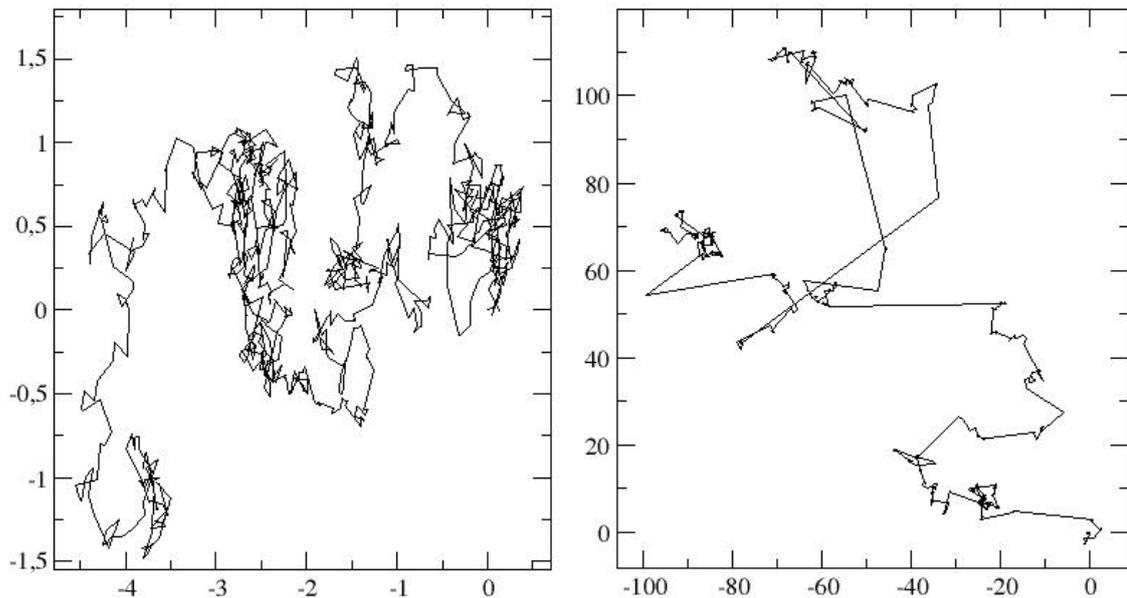
$$\begin{aligned} \langle l^2 \rangle &= \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \left[\int_{-\infty}^{l_0} \frac{(-u)^2}{|-u|^\mu} (-du) + \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{|l|^\mu} dl \right] = (\mu-1)l_0^{\mu-1} \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{|l|^\mu} dl \\ &= (\mu-1)l_0^{\mu-1} \frac{l^{3-\mu}}{3-\mu} \Big|_{l_0}^{\infty} = (\mu-1)l_0^{\mu-1} \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l^{3-\mu} - l_0^{3-\mu}}{3-\mu} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

onde $\mu \neq 3$ e olhando a equação acima verifica-se que para $1 < \mu < 3$ a integral diverge e para $\mu > 3$ converge. Assim para $1 < \mu < 3$ o segundo momento não é finito, esse caso não segue o TCL, apenas a sua versão generalizada, porém se $\mu > 3$ a média e a variância são finitas indicando seguir o TCL e após um número grande de sorteios segue a distribuição gaussiana.

Interessante observar que a distribuição de Lévy é adequada para lidar com fenômenos estatísticos raros, por causa do decaimento assintótico tipo lei de potência, com $0 < \alpha < 2$, no lugar de um exponencial. Essa característica de decaimento tipo lei de potência é conhecida como cauda pesada ou cauda longa (FOSS; KORSHUNOV; ZACHARY, 2013).

Na Fig. 8 mostramos duas caminhadas aleatórias com 1000 passo e partindo da origem $[0, 0]$ cada: a esquerda uma distribuição α -estável de Lévy com $\mu = 3$ (distribuição gaussiana) e a direita com $\mu = 2$ (distribuição de Cauchy). Observamos facilmente grandes saltos na imagem da direita comparando com a outra imagem, isso mostra a diferença de comportamento para a o movimento browniano que faz a busca mais próximo da origem e a distribuição de Cauchy que realiza longos passos.

Figura 8 – Duas caminhadas aleatórias com 1000 passos e partindo da origem $[0,0]$ cada: a esquerda uma distribuição α -estável de Levy com $\mu = 3$ (distribuição gaussiana) e a direita com $\mu = 2$ (distribuição de Cauchy).

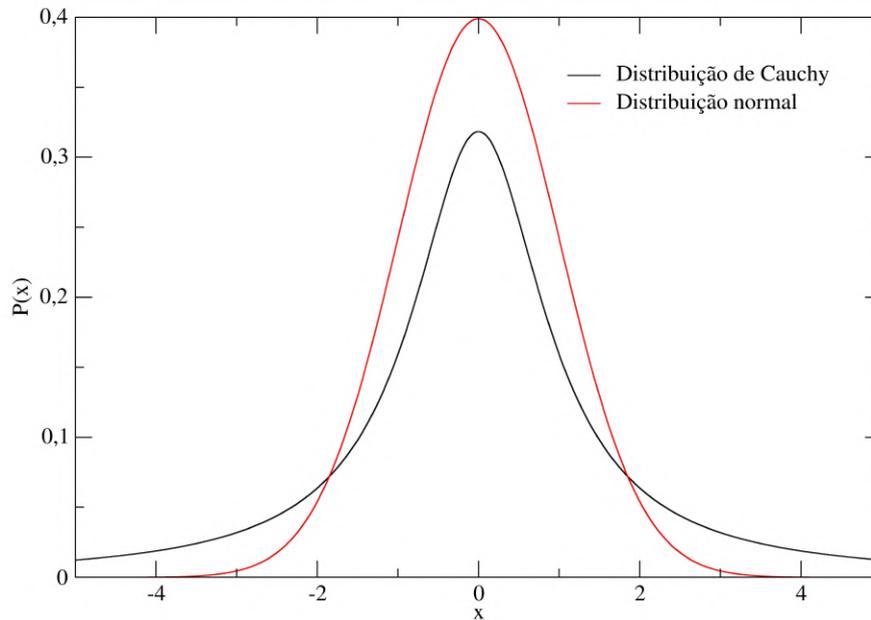


Fonte: O autor (2022).

Para alguns valores de α a distribuição de Lévy coincide com outras distribuições, por exemplo com $\alpha = 1$ ela coincide com a distribuição Cauchy e com $\alpha = 2$ com a distribuição normal, onde ela perde a cauda longa. Na Fig. 9 temos a comparação entre a distribuição normal e a de Cauchy, na qual observamos que a normal decai bem mais rápido.

Outros fatores importantes a se considerar são que $\beta = 0$ pois o caminhante não tem nenhuma direção preferida para se mover, l_0 o tamanho mínimo do passo do caminhante e o truncamento para $|l| < l_0$ é necessário para normalizar a distribuição.

Figura 9 – Distribuição normal, $\alpha = 2$, $P(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ (preto) e Cauchy, $\alpha = 1$, $P(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$ (vermelho)



Fonte: O autor (2022).

1.5 DISTRIBUIÇÃO HIPEREXPONENCIAL

Na década de 80 foi descoberto que as distribuições de Lévy poderiam ser obtidas através da composição de infinitas distribuições que seguem o TLC (HUGHES; SHLESINGER; MONTROLL, 1981). E também podemos gerar caminhadas de Lévy através da escolha adequada de parâmetros das caminhadas de Weierstrass. As caminhadas de Weierstrass são formadas pela soma de infinitas FDP nas quais o tamanho dos passos do caminhante que são governados pelo TLC. (HUGHES; SHLESINGER; MONTROLL, 1981). Interessante é que as caminhadas de Weierstrass em si não seguem obrigatoriamente o TCL, de forma diferente das funções que a geram (REICHL, 1980).

A distribuição hiperexponencial é uma das FDP que podem gerar as caminhadas de Weierstrass

$$P(l) = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} \quad (1.46)$$

onde τ_i são os comprimentos característicos relacionados à tendência do caminhante continuar na mesma direção (persistência) e w_i são os pesos estatísticos correspondentes a cada expo-

nencial de maneira que $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ (CAMPOS et al., 2015b). Dessa forma essa caminhada de Weierstrass é formada por $N \rightarrow \infty$ escalas, cada uma com seu comprimento característico τ_i . Fazendo $N \rightarrow \infty$ temos a rigorosamente a distribuição de Lévy, o que consistente com as caminhadas de Lévy e de Weierstrass terem infinitas escalas de comprimento.

Estudos sobre movimentos de mexilhões feitos em 2011 (JAGER et al., 2011) seguíam a distribuição de Lévy. Porém estudos posteriores (REYNOLDS, 2014) (JANSEN; MASHANOVA; PETROVSKII, 2012) questionam esse resultado, sugerido que a distribuição hiperexponencial com 3 escalas se adequa melhor ao problema.

Mesmo assim boa parte dos pesquisadores acredita que várias espécies apresentam movimentos com comportamentos próximos a distribuição de Lévy (REYNOLDS, 2014) (JAGER et al., 2012) (BENHAMOU, 2007). Porém nota-se que rigorosamente distribuições de Lévy para tamanho de passos com variância infinita não são viáveis realisticamente, então costuma-se empregar o termo "Lévy-like". O que acontece é que a movimentação dos animais é descrita pela distribuição de Lévy ou lei de potência até determinada escala máxima de comprimento, que seria o limite biológico da espécie.

Neste trabalho abordaremos a exponencial simples, que é uma distribuição hiperexponencial com uma escala ($N = 1$)

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{1}{\tau} e^{-\frac{|l|}{\tau}}, \quad |l| > l_0, \\ P(l) &= 0, \quad |l| < l_0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

E a exponencial dupla, uma distribuição hiperexponencial com duas escalas ($N = 2$)

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{w_1}{\tau_1} e^{-\frac{|l|}{\tau_1}} + \frac{w_2}{\tau_2} e^{-\frac{|l|}{\tau_2}}, \quad |l| > l_0, \\ P(l) &= 0, \quad |l| < l_0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Precisamos verificar se as distribuições hiperexponenciais seguem o TCL, para isso calculamos o primeiro e o segundo momento das distribuições. Começando com a média:

$$\langle l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} l P(l) dl = \int_{-\infty}^{l_0} l \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl + \int_{l_0}^{\infty} l \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl \quad (1.49)$$

Fazendo $u = -l \rightarrow du = -dl$ e substituindo na primeira integral do lado direito.

$$\begin{aligned} \langle l \rangle &= \int_{l_0}^{\infty} -u \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|-u|}{\tau_i}} (-du) + \int_{-\infty}^{l_0} l \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl \\ &= - \int_{l_0}^{\infty} u \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|-u|}{\tau_i}} du + \int_{-\infty}^{l_0} l \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Assim a média é zero indicando que não existe nenhuma direção preferida de movimento. Agora calculando a variância:

$$\langle l^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} l^2 P(l) dl = \int_{-\infty}^{\infty} l^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl = \int_{-\infty}^{-l_0} l^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl + \int_{l_0}^{\infty} l^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl \quad (1.51)$$

Fazendo $u = -l \rightarrow du = -dl$ e substituindo na primeira integral do lado direito.

$$\begin{aligned} \langle l^2 \rangle &= \int_{l_0}^{\infty} (-u)^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|-u|}{\tau_i}} (-du) + \int_{l_0}^{\infty} l^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl \\ &= \int_{l_0}^{\infty} u^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|-u|}{\tau_i}} du + \int_{l_0}^{\infty} l^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\tau_i} e^{-\frac{|l|}{\tau_i}} dl \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{2w_i l_0^2}{\tau_i^2} + \frac{4w_i l_0}{\tau_i^4} + \frac{4w_i}{\tau_i^4} \right) e^{-\frac{l_0}{\tau_i}} \right] = \sum_{i=1}^N \left[\frac{2w_i}{\tau_i^4} (\tau_i^2 l_0^2 + 2l_0 + 2) e^{-\frac{l_0}{\tau_i}} \right] \end{aligned} \quad (1.52)$$

Desta forma a variância é finita, garantindo que a distribuição segue o TCL. Para a exponencial simples a variância é:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{2}{\tau^4} (\tau^2 l_0^2 + 2l_0 + 2) e^{-\frac{l_0}{\tau}} \quad (1.53)$$

E para exponencial dupla:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{2w_1}{\tau_1^4} (\tau_1^2 l_0^2 + 2l_0 + 2) e^{-\frac{l_0}{\tau_1}} + \frac{2w_2}{\tau_2^4} (\tau_2^2 l_0^2 + 2l_0 + 2) e^{-\frac{l_0}{\tau_2}} \quad (1.54)$$

É importante observar que estudos recentes (JÚNIOR, 2020) mostram que, em uma dimensão, a distribuição exponencial dupla apresenta maior eficiência do que a distribuição de Lévy quando $x_0 \ll L$. Entretanto para isso acontecer é necessária a escolha de comprimentos característicos e pesos estatísticos relacionados às escalas relevantes x_0 e L .

Geralmente um animal não possui conhecimento prévio do espaço de busca, e por isso na maioria dos casos a distribuição de Lévy permanece mais eficiente. Porém nos casos em que se conhece o espaço e busca e existe a possibilidade de escolher os comprimentos característicos e pesos estatísticos adequados a maior eficiência da distribuição exponencial dupla é interessante.

Nesta dissertação faremos a comparação da eficiência máxima da distribuição de lei de potência (limite assintótico para grandes passos da distribuição de Lévy), da exponencial dupla e da exponencial simples em duas dimensões.

1.5.1 Lévy flight foraging hypothesis

Por causa do sucesso da aplicação das caminhadas de Lévy nos modelos de diversos sistemas, surgiu a hipótese que os processos evolucionários adaptativos fizeram os animais se movimentar

da forma mais eficiente possível, a qual seria baseada em distribuições com tamanhos de passos de Lévy (VISWANATHAN et al., 2011). Isso é a base da "Lévy flight foraging hypothesis".

Para ambientes com escassez de alimentos o regime não-destrutivo é definido quando podemos obter alimento revisitando um sítio alvo que foi visitado anteriormente. Isso traz uma vantagem na eficiência da busca, que é definida como a quantidade de sítios alvos encontrados dividido pelo tamanho total da caminhada. Na prática para as buscas não-destrutivas o caminhante reinicia a busca próximo a um alvo anteriormente visitado. E as buscas não-destrutivas são situações em que as distâncias iniciais entre o predador e os alvos são bastante assimétricas, estando bem mais próximo de um alvo em relação aos outros. No artigo (VISWANATHAN et al., 1999) foi mostrado que para buscas não-destrutivas em ambientes unidimensionais e bidimensionais nos quais o caminhante não possui quaisquer informações sobre o espaço de busca a maior eficiência é obtida com a distribuição de Lévy com $\alpha \approx 1$, ou de forma equivalente uma lei de potência com $\mu = \alpha + 1 \approx 2$. De acordo com a "Lévy flight foraging hypothesis", essa estratégia de $\alpha \approx 1$ ocorre por causa de diversas adaptações dos animais, que surgiram ao longo dos anos, visando buscar alimentos de maneira mais eficiente (VISWANATHAN et al., 2011).

Entretanto, se considerarmos que o animal está equidistante dos alvos, após visitar um sítio alvo ele é destruído e outro alvo é criado em local aleatório para manter a densidade de alvos constante. Nesse caso não existe vantagens em visitar sítios nos quais tenha encontrado um alvo anteriormente e a melhor estratégia de busca seria se movimentar de forma balística, o equivalente a distribuição de Lévy com $\alpha \rightarrow 0$ ou $\mu \rightarrow 1$.

Agora se tivermos abundância de alimentos, o caminhante geralmente não precisa percorrer grandes distâncias, encontrando o alvo nos arredores do ponto de origem. Por isso as distribuições de Lévy não mostram vantagens significativas em comparação com o movimento browniano com $\alpha = 2$ ou $\mu = 3$ (VISWANATHAN et al., 2011).

Se a revisita a um sítio alvo for permitida depois de determinado tempo finito, o ambiente for escasso de alimentos e o caminhante não possuir informações prévias do ambiente a busca aleatória deve apresentar $1 < \mu < 2$ ou $0 < \alpha < 1$ para terem a maior eficiência possível. (RAPOSO et al., 2003).

Mesmo assim esses resultados foram questionados para dimensões maiores que um (LEVERNIER et al., 2020), trazendo à tona um debate sobre para quais condições a distribuição de Lévy apresenta maior eficiência ou não (BULDYREV et al., 2021), (LEVERNIER et al., 2021). E como já citado anteriormente na seção 1.1, a distribuição exponencial dupla pode em alguns

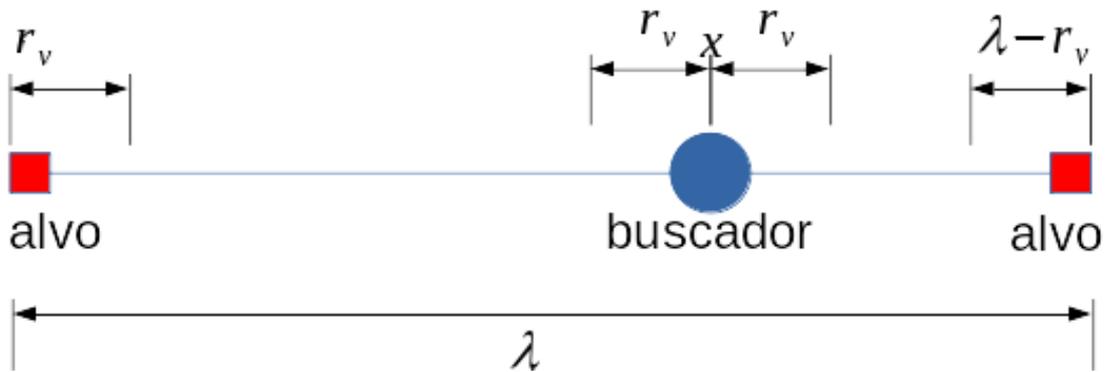
casos apresentar maior eficiência do que a distribuição de Lévy com $\mu = 2$. Porém para isso acontecer é preciso escolher de forma precisa os parâmetros da exponencial dupla, o que sugere que o caminhante tenha conhecimento prévio do espaço de busca (JÚNIOR, 2020), (CAMPOS et al., 2015b). Então nesse trabalho iremos comparar as eficiências máximas das distribuições de tamanhos de passos dos tipos exponencial simples, exponencial dupla e Lévy no regime de escassez de alimentos, aumentando progressivamente a distância L entre os alvos para o caso bidimensional. No próximo capítulo será apresentado o formalismo teórico usado nesse trabalho.

2 FORMALISMO TEÓRICO

Neste capítulo descrevemos o modelo de busca aleatória utilizado nessa dissertação (VISWANATHAN et al., 1999), após isso introduziremos o método do operador integral e a discretização do espaço de busca para calcular o deslocamento médio $\langle L \rangle$ e a eficiência η . E finalmente faremos os cálculos analíticos para o deslocamento médio e a eficiência no caso unidimensional.

2.1 DESCRIÇÃO DO MODELO DE BUSCA

Figura 10 – Buscador, na posição x , dentro do intervalo $[0, \lambda]$ com alvos nas extremidades. O buscador tem raio de visão r_v , então se ele chegar a uma distância menor ou igual do que essa encontrará o alvo.



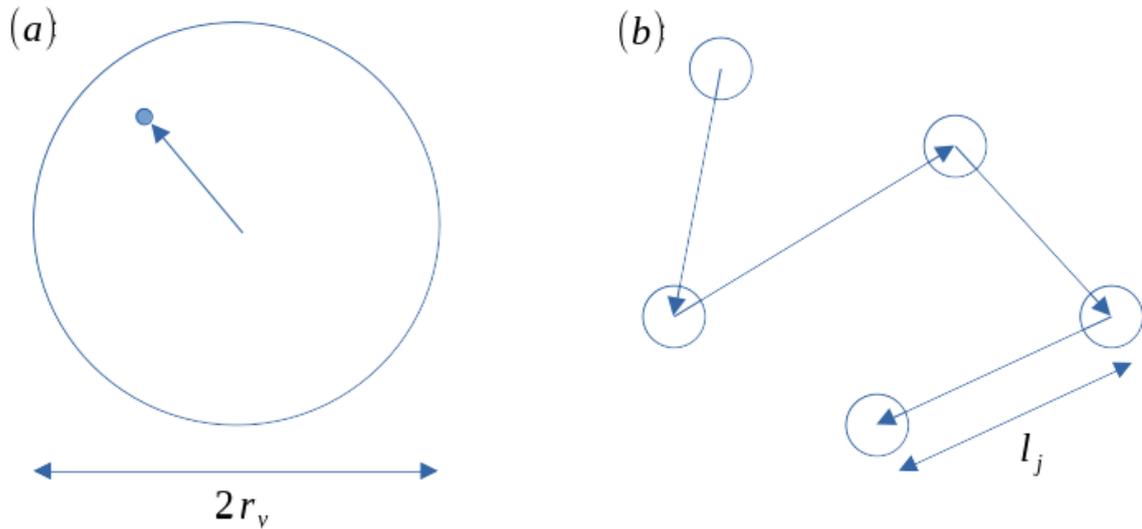
Fonte: O autor (2022).

Consideremos um caminhante, Fig. 10, começando sua busca em uma posição x , dentro do intervalo $[0, \lambda]$ e os alvos se encontrando nas extremidades deste intervalo. O λ é a distância média entre os alvos e no caso unidimensional torna-se o próprio espaço de busca. Quando o buscador tem um raio de visão r_v , não nulo, finito, no qual consegue detectar alvos dentro desse raio e assim o caminhante só precisa chegar as distâncias r_v e $\lambda - r_v$ do alvo para encontrá-lo e assim começar uma nova busca. Podemos considerar todas as distâncias entre alvos vizinhos iguais a λ e mapear a busca no intervalo $0 \leq x \leq \lambda$.

Até o presente momento falamos do modelo unidimensional, mas para transformar esse modelo em um modelo bidimensional é bem simples. Basta antes de cada passo sortear com uma distribuição uniforme o ângulo do deslocamento dentro do intervalo $[0, 2\pi[$.

Agora passando para o modelo em um espaço d -dimensional na Fig. 11. Com r_v sendo o raio de visão do caminhante, assim ele consegue detectar alvos dentro deste raio da mesma forma do caso unidimensional e o caminhante "varre" uma área ao longo de um corredor com seção transversal proporcional a r_v^{d-1} . O λ pode ser visto como comprimento médio desse

Figura 11 – Modelo de busca aleatória: (a) se um alvo, representado pelo círculo azul, estiver dentro do raio de visão r_v , o buscador se moverá de forma balística até ele. (b) se não tiver nenhum alvo dentro do raio de visão, o buscador escolherá uma direção aleatória e a partir de uma distribuição $P(l)$ um comprimento de passo l_j , repetindo isto até encontrar um alvo dentro de r_v ao longo de sua trajetória.



Fonte: O autor (2022).

corredor entre dois alvos aleatórios, com ρ sendo a densidade de sítios alvos (quantidade de sítios alvos sobre o espaço de busca), assim (RAPOSO et al., 2003):

$$\lambda \sim \frac{1}{\rho r_v^{d-1}} \quad (2.1)$$

O modelo de busca segue duas regras, válidas tanto para o caso unidimensional ou em d-dimensões:

1. Se um alvo estiver a uma distância menor ou igual a r_v , o buscador se dirigirá de maneira balística até o alvo;
2. Caso não encontre um alvo o buscador escolherá aleatoriamente uma direção e um tamanho de passo l através de uma distribuição de probabilidade $P(l)$ se movendo nessa direção, sempre procurando alvos a uma distância r_v de si ao longo da caminhada. Se nesse percurso encontrar um alvo ele trunca o passo e se desloca até o alvo de acordo com a regra 1, caso não encontre uma nova direção e distância são sorteadas.

Importante lembrar que para a segunda regra entrar em vigor $\lambda > r_v$, caso contrário a quantidade de alvos será abundante e praticamente não teremos eventos do segundo tipo. E para o caso de $\lambda \gg r_v$ a segunda regra será muito usada. Além disso este modelo descarta o efeito memória, relações do tipo presa-predador, balanço energético ao longo da busca ou outros fatores que pudessem dificultar nossa análise.

Na segunda regra observamos que o buscador trunca seu percurso se encontrar um alvo. Esse truncamento faz a distribuição efetiva corresponder a uma *distribuição de Lévy truncada* (VISWANATHAN et al., 1999) com comprimento de corte característico associado λ , que possui momentos finitos, com a convergência para comportamento gaussiano ocorrendo após um número muito grande de passos (MANTEGNA; STANLEY, 1994). Isso acontece naturalmente em buscas reais por causa dos seus tamanhos finitos ou restrições biológicas que podem por exemplo levar um animal a morrer de fome caso não encontre comida a uma distância máxima. Assim na natureza encontramos apenas *distribuições de Lévy truncadas*.

A partir do modelo inicial feito para estudar mecanismo predatório de animais (VISWANATHAN et al., 1999) foram feitas várias adaptações. Entre elas temos a **busca destrutiva**, quando o buscador encontra o alvo, este se torna indisponível para as próximas buscas e para manter a densidade de sítios ρ igual um novo alvo é aleatoriamente adicionado. E a **busca não-destrutiva**, onde o alvo não deixa de existir ao ser encontrado, permitindo que possa ser revisitado várias vezes, desde que esteja dentro do raio de visão do buscador, o que gera um interessante mecanismo de competição, sair em busca de outros alvos mais distantes ou ficar próximo ao alvo utilizando passos pequenos?

Interessante verificar que através do ponto de partida do caminhante podemos identificar os limites para as buscas destrutivas e não-destrutivas. Considerando o caminhante da Fig. 10, o limite para busca destrutiva é $x_0 \gg r_v$, pois como após o encontro o sítio é destruído, a nova busca se inicia de uma posição equidistante dos alvos. E para a busca não-destrutiva, este limite é $x_0 = r_v + \epsilon$, pois após encontrar o alvo, o caminhante se encontra bem próximo a ele podendo até revisitá-lo.

As estratégias ótimas para cada uma dessas buscas são distintas, assim para quantificá-las definimos a função eficiência η .

$$\eta = \frac{\text{número de alvos encontrados}}{\text{distância total percorrida}} \quad (2.2)$$

dessa forma quanto maior a quantidade de sítios-alvos encontrados ao longo do menor percurso deslocado, maior a eficiência.

Podemos descrever a distância total percorrida como o produto do número de alvos encontrados pela distância média entre o encontro de dois alvos consecutivos $\langle L \rangle$, assim

$$\eta = \frac{\text{número de alvos encontrados}}{\text{número de alvos encontrados} \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle} \quad (2.3)$$

com isso calculamos uma expressão para $\langle L \rangle$ como função de $P(l)$ para encontrar a eficiência das buscas.

Podemos tentar como primeira aproximação $\langle L \rangle \approx N \langle l \rangle$, com N sendo o número médio de passos entre o encontro de dois alvos consecutivos e $\langle l \rangle$ o tamanho médio do passo individual, assim

$$\eta \cong \frac{1}{N \langle l \rangle} \quad (2.4)$$

Para a distribuição de Lévy, no limite assintótico ($P(l) \sim l^{-\mu}$), podemos calcular $\langle l \rangle$ com a ajuda de Eq. [1.40](#)

$$\langle l \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} l^{1-\mu} dl + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} l^{-\mu} dl}{\int_{r_v}^{\infty} l^{-\mu} dl} = \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \quad (2.5)$$

Importante observar que a segunda integral do numerador é aproximada, pois considera que todos os passos iguais ou maiores que λ são truncados pelo encontro de um alvo.

Observamos que valores de N ou $\langle l \rangle$ grandes podem gerar η pequenos. Entretanto valores de μ grandes obrigam o buscador a dar vários saltos de pequeno comprimento para encontrar um alvo. Por outro lado, valores de μ pequenos geram trajetórias com grandes saltos, sendo o limite inferior correspondendo a uma trajetória indefinidamente em linha reta, balística. Podemos encontrar situações nas quais existam máximos de η para valores intermediários de μ .

O número médio de vôos N_d entre dois alvos consecutivos para buscas destrutivas escala com [\(VISWANATHAN et al., 1999\)](#)

$$N_d \sim (\lambda/r_v)^{\mu-1}, \quad \text{para } 1 < \mu \leq 3 \text{ e} \quad (2.6)$$

$$N_d \sim (\lambda/r_v)^2, \quad \text{para } \mu \geq 3. \quad (2.7)$$

Já para as buscas não-destrutivas o número médio de voos entre dois alvos consecutivos N_n é [\(VISWANATHAN et al., 1999\)](#)

$$N_n \sim N_d^{1/2} \sim (\lambda/r_v)^{(\mu-1)/2}, \quad \text{para } 1 < \mu \leq 3 \text{ e} \quad (2.8)$$

$$N_n \sim N_d^{1/2} \sim \lambda/r_v, \quad \text{para } \mu \geq 3. \quad (2.9)$$

Considerando inicialmente que os alvos são abundantes ($\lambda \leq r_v$), então $\langle l \rangle \approx \lambda$ e $N_d \approx N_n \approx 1$. Assim η se torna independente de μ e este comportamento não corresponde a distribuição de Lévy, já que deslocamentos longos ($l \gg r_v$) praticamente não existem.

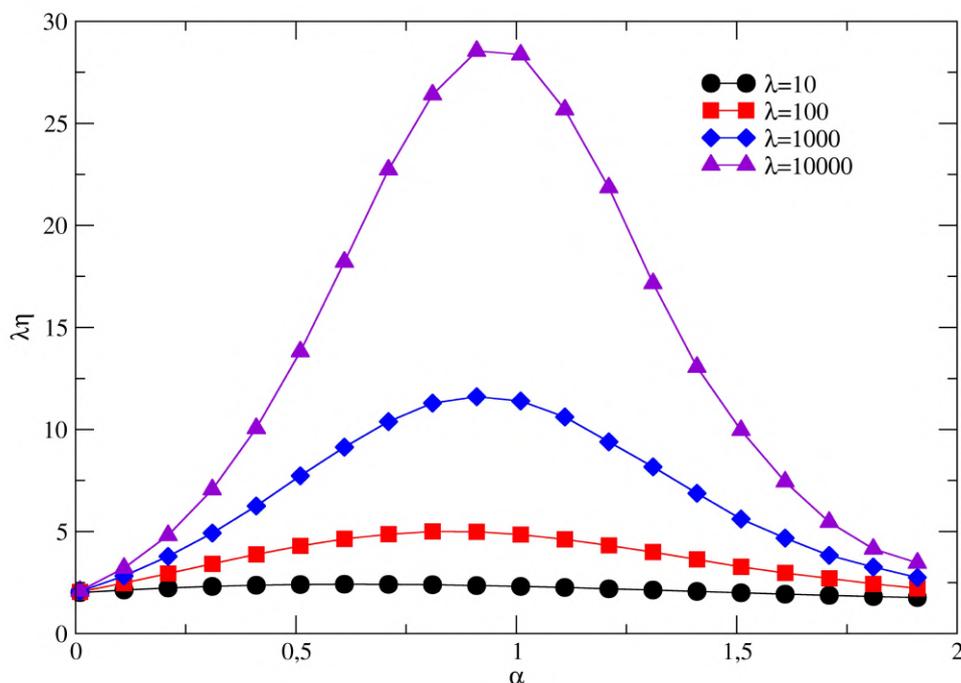
Quando os alvos estão espaçadamente distribuídos ($\lambda \gg r_v$), que é o caso de nosso interesse, e considerando o caso destrutivo, ao substituir as expressões das Eqs. [2.5](#) e [2.6](#) na

Eq. 2.4 encontramos uma expressão aproximada para eficiência, derivando essa expressão em função de μ e igualando a zero descobrimos que a eficiência máxima é $\mu \rightarrow 1^+$, com menores valores de μ garantindo buscas mais eficientes (VISWANATHAN et al., 1999). Observamos que quando $\mu = 1 + \varepsilon$, com ε , a fração de deslocamentos com $l < \lambda$ se torna irrisória, desta forma o buscador se move balisticamente até encontrar um alvo. Já para buscas não-destrutivas, se $\lambda \gg r_v$, substituindo a expressão para N_n (Eq. 2.8) e para $\langle l \rangle$ (Eq. 2.5) em η (Eq. 2.4) encontramos novamente uma equação aproximada para a eficiência, derivando em relação a μ e igualando a zero, descobrimos que a eficiência ótima é (VISWANATHAN et al., 1999)

$$\mu_{opt} = 2 - \delta, \quad (2.10)$$

com $\delta \approx 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$. Desta maneira, caso não tenha nenhum conhecimento anterior da distribuição dos alvos, uma estratégia ótima é $\mu_{opt} \cong 2$ para λ/r_v grande, porém não exatamente conhecido.

Figura 12 – Produto da eficiência (η) pela distância média entre os alvos λ em função de $\alpha = \mu - 1$ para a distribuição de Lévy com diferentes valores de λ para o caso unidimensional. Os valores foram obtidos a partir de simulação numérica e o raio de visão $r_v = 1$.



Fonte: O autor (2022).

A fig 12 mostra como o produto da eficiência (η) pela distância média entre os alvos (λ)

em função de $\alpha = \mu - 1$. Dessa maneira podemos ver como a simulação coincide com o resultado da eficiência máxima dado pela Eq. 2.10.

Nas simulações numéricas deste modelo para uma e duas dimensões (VISWANATHAN et al., 1999) mostram que os resultados acima são robustos, para $\mu_{opt} \cong 2$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$ no caso não-destrutivo, e para o caso destrutivo $\mu \rightarrow 1$. Já para alvos densamente distribuídos com $\lambda \approx r_v$, não há efeitos significativos em η ao se alterar o expoente μ , conforme esperado. É bom citarmos que as simulações numéricas destes resultados não sofreram das aproximações feitas no cálculo acima.

De acordo com vimos acima, os resultados da eficiência ótima para distribuição de Lévy aparentam ser válidos em qualquer dimensão do espaço de busca.

Porém, não é trivial demonstrar que os resultados da eficiência ótima para distribuição de Lévy são válidos em qualquer dimensão do espaço de busca. Por exemplo, em caminhadas autoexcluídas ("self-avoiding random walks") (RAPOSO et al., 1991), nas quais o buscador não pode visitar o mesmo local mais de uma vez, a raiz quadrada do deslocamento total médio quadrático satisfaz a relação $\langle (\Delta x)^2 \rangle^{1/2} \sim N^\nu$, com N sendo o número de passos e ν depende da dimensão, assim $\nu \equiv \nu(d)$ para $d < 4$.

$$\nu = \begin{cases} 3/4, & \text{para } d = 2; \\ 0.59\dots, & \text{para } d = 3; \\ 1/2, & \text{para } d \geq d_c 4. \end{cases} \quad (2.11)$$

Isto ocorre porque não revisitar pontos anteriores junto com o confinamento dimensional cria um comportamento anômalo superdifusivo. Porém para uma dimensão acima da dimensão crítica $d_c = 4$, torna-se pouco provável revisitar pontos antigos, pois o espaço disponível para deslocamento se torna muito grande e esta restrição fica irrelevante. No entanto nesse trabalho essas preocupações podem ser relaxadas, devido a resultados anteriores bem estabelecidos (VISWANATHAN et al., 1999).

Além disso, os resultados numéricos mostram que as propriedades de escala são corretamente descritas mesmo na presença de correlações de curto alcance e comprimento dos deslocamentos. Dessa forma, pelo menos para o parâmetro μ , estes efeitos são macroscopicamente desprezíveis. Entretanto, outras quantidades como o valor da eficiência máxima dependem dos ingredientes do modelo. No limite de longos tempos e longas distâncias; fatores como aprendizado, relações presa-alvo e outros efeitos de memória de curto alcance se tornam desprezíveis, por isso não serão considerados. Neste trabalho estamos interessados em

obter $P(l)$ que maximiza a busca, independente do seu valor. E os fatores como relações de presa-predador, aprendizado e outros efeitos de memória de curto alcance são desprezíveis no limite de longos tempos e longas distâncias.

Vamos trabalhar com distribuições de probabilidade modulares, sem nenhuma preferência de direção, e com comprimento de corte inferior l_0 . Este comprimento de corte está associado a um tamanho mínimo do passo realizado pelo caminhante e tem a finalidade de deixar $P(l)$ normalizável. Também é de se esperar um truncamento superior devido ao confinamento de $P(l)$.

Vamos agora calcular $\langle L \rangle$ para este modelo, fazendo uma generalização dos resultados encontrados na distribuição de Lévy (BULDYREV et al., 2001b), (BULDYREV et al., 2001a) para qualquer $P(l)$.

2.2 CÁLCULO DA DISTÂNCIA MÉDIA PERCORRIDA ENTRE DOIS ALVOS CONSECUTIVOS

2.2.1 Densidade de probabilidade

Se definirmos a posição inicial do buscador como $x_0 = \kappa$ no início da busca, a densidade de probabilidade $\rho_0(x_0)$ será uma função delta de Dirac $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - \kappa)$. Já para calcular a densidade de probabilidade com o caminhante entre x_1 e $x_1 + dx_1$, após o primeiro passo, $\rho_1(x_1)$, podemos fazer uma convolução entre $P(l)$ e $\rho_0(x_0)$, assim

$$\rho_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1 - x_0)\delta(x_0 - \kappa)dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1 - x_0)\rho_0(x_0)dx_0. \quad (2.12)$$

A densidade de probabilidade após os dois primeiros passos

$$\rho_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2 - x_1)P(x_1 - x_0)\delta(x_0 - \kappa)dx_0dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2 - x_1)\rho_1(x_1)dx_1. \quad (2.13)$$

E a forma geral após $n + 1$ passos, $\rho_{n+1}(x_{n+1})$ é

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(x_{n+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_{n+1} - x_n)P(x_n - x_{n-1})\dots P(x_1 - x_0)\delta(x_0 - \kappa)dx_n \dots dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x_{n+1} - x_n)\rho_n(x_n)dx_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

Outro detalhe importante é garantir que em x_{n+1} nenhum alvo foi encontrado ainda e assim termos pelo menos o próximo passo. Dessa forma para $\rho_{n+1}(x_{n+1}), \rho_n(x_n) \neq 0$, precisamos

modificar os limites de integração na expressão geral para $\rho_{n+1}(x_{n+1})$, garantindo que $r_v < x_n < \lambda - r_v$, assim

$$\rho_{n+1}(x_n + 1) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} P(x_{n+1} - x_n) \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.15)$$

Com estes resultados podemos responder algumas questões sobre a dinâmica de busca:

- Qual a probabilidade do caminhante não encontrar nenhum alvo depois de n passos, \tilde{P}_n ? É a probabilidade do buscador ainda está no intervalo $[r_v, \lambda - r_v]$ no n -ésimo passo,

$$\tilde{P}_n = \int_{r_n}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n \quad (2.16)$$

onde $\rho_n(x_n) \equiv \vartheta_n$ é a densidade de probabilidade de encontrar o buscador em x_n , depois de n passos, sabendo que o alvo ainda não foi encontrado.

- Qual a probabilidade $P_{>n}$ de encontrar o alvo depois de n passos? A probabilidade do buscador encontrar o alvo após o primeiro passo é 1, pois ele só para de buscar quando o encontra, assim.

$$P_{>n} = 1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.17)$$

- E a probabilidade de encontrar um alvo exatamente após n passos, P_n ?

$$P_n = \left[1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x) \right] - \left[1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_{n-1}(x) \right] \quad (2.18)$$

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \vartheta_n(x) dx \quad (2.19)$$

2.2.2 Definição do operador integral \mathcal{L}

Para nos ajudar com o tratamento analítico das próximas expressões, definimos o operador integral \mathcal{L}

$$\mathcal{L}[f(x)](\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\kappa - x) [f(x)] dx. \quad (2.20)$$

O operador acima faz uma convolução da função de entrada com a distribuição de probabilidade $P(l)$. Podemos aplicar este operador em uma função de probabilidade $\rho_n(x_n)$:

$$\mathcal{L}[\rho_n(x_n)](\kappa) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} P(\kappa - x_n) [\rho_n(x_n)] dx_n = \rho_{n+1}(\kappa) \quad (2.21)$$

lembrando que os limites de integração precisam de ajustes para garantir que $\rho_n(x_n) \neq 0$, assim $r_v < x_n < \lambda - r_v$ de forma que o passo $n + 1$ só existirá se o buscador não encontrar nenhum alvo até o n -ésimo passo.

Podemos usar o operador integral para deixar $\rho_n(x_n)$ mais compacta. Para $n = 0$

$$\rho_1(x_1) = \mathcal{L}[\rho_0(x_0)](x_1) = \int_{r_v}^{\lambda-r_x} P(x_1 - x_0)[\rho_0(x_0)]dx_0, \quad (2.22)$$

para $n = 1$

$$\rho_2(x_2) = \mathcal{L}[\rho_1(x_1)](x_2) = \mathcal{L}[\mathcal{L}[\rho_0(x_0)]] \equiv \mathcal{L}^2[\rho_0(x_0)] \quad (2.23)$$

e a forma geral

$$\rho_n(x_n) \equiv \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)]. \quad (2.24)$$

O operador \mathcal{L} é auto-adjunto com respeito ao produto escalar $(f, g) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)g(x)dx$, ou seja, ele é adjunto de si mesmo (tem o mesmo valor de sua transposta conjugada), isso acontece pois não temos nenhuma tendência direcional em $P(l)$, de forma que $P(l) = P(-l) = P(|l|)$. E usando o teorema do valor máximo, o qual garante que uma função contínua dentro de um intervalo ($[0, 1]$ para a função densidade de probabilidade) apresenta seu valor máximo e seu valor mínimo dentro desse intervalo, mostramos que o operador \mathcal{L} tem norma menor que um (BULDYREV et al., 2001b), (BULDYREV et al., 2001a). Para qualquer função contínua f temos

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} |\mathcal{L}f|dx \leq |\mathcal{L}^*| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f|dx \quad (2.25)$$

com $|\mathcal{L}^*|$ significando $|\mathcal{L}[1](x')|$ calculado onde x' gera seu valor máximo. Como a função não tem nenhuma tendência direcional o valor máximo é obtido para $x' = \lambda/2$, dessa forma

$$\mathcal{L}[1](x' = \lambda/2) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(\lambda/2 - x).1.dx = P(x - \lambda/2)dx, \quad (2.26)$$

e substituindo $l = x - \lambda/2$

$$\mathcal{L}[1](x' = \lambda/2) = 2 \int_{l_0}^{(\lambda-2r_v)/2} P(l)dl \equiv \mathcal{N} < 1, \quad (2.27)$$

como $P(l)$ é normalizada, podemos escrever

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} |\mathcal{L}f| \leq \mathcal{N} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f|dx. \quad (2.28)$$

\mathcal{N} pode ser definido como a norma de \mathcal{L} e tem significado físico relacionado à probabilidade de sobrevivência em um deslocamento que se inicia em $\lambda/2$, ou seja, a probabilidade de um salto que se inicia no centro do intervalo permanecer não absorvido (\tilde{P}_1). E a probabilidade do buscador permanecer não absorvido após n passos

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n P_0](x)dx < \mathcal{N}^n. \quad (2.29)$$

Se tomarmos o logaritmo dos dois lados,

$$\ln(\tilde{P}_n) < n \cdot \ln(\mathcal{N}) \quad (2.30)$$

Sabendo que $\mathcal{N} < 1$, então $\ln(\mathcal{N}) < 0$ e assim $\gamma = |\ln(\mathcal{N})|$, dessa forma escrevemos

$$\tilde{P}_n < \exp(-\gamma n). \quad (2.31)$$

Portanto a probabilidade do buscador permanecer não absorvido depois de n passos decai exponencialmente com n (BULDYREV et al., 2001b), (BULDYREV et al., 2001a).

2.2.3 Cálculo da expressão para $\langle L \rangle$

Com os resultados anteriores podemos calcular a média do caminho total percorrido entre dois alvos consecutivos $\langle L \rangle$ (BULDYREV et al., 2001b), (BULDYREV et al., 2001a). Se definirmos $\langle L_m \rangle$ como a distância média percorrida até encontrar o alvo mais próximo após n passos, exatamente, assim

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \vartheta_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx, \quad (2.32)$$

lembrando que $\vartheta_n(x)$ é a densidade de probabilidade do buscador encontrar um alvo após n passos exatamente, em função da posição de partida x do n -ésimo passo. Substituindo o resultado de Eq. 2.19 na equação acima temos

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \vartheta_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} (\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)) \langle L_n \rangle (x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle (x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_{n+1} \rangle (x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle (x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) (\langle L_{n+1} \rangle (x) - \langle L_n \rangle (x)) dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde definimos $\langle L_0 \rangle \equiv 0$.

Para uma sequência de n passos, a distância total percorrida L_n é

$$L_n = |l_1| + |l_2| + |l_3| + \dots + |l_n| \therefore \langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |l_i| \rangle. \quad (2.34)$$

Assim,

$$\langle L_{n+1} \rangle (x) - \langle L_n \rangle (x) = (\langle |l_{n+1}| \rangle + \langle |l_n| \rangle + \dots) - (\langle |l_n| \rangle + \langle |l_{n-1}| \rangle + \dots) = \langle |l_{n+1}| \rangle. \quad (2.35)$$

Então a expressão geral para $\langle L \rangle$ é:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle |l_{n+1}| \rangle (x) dx \quad (2.36)$$

Porém, $\langle |l_{n+1}| \rangle$ é a média do módulo da distância l , percorrida após um único passo, então não dependem da ordem $(n + 1)$, somente da posição de partida x . Dessa forma:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle |l| \rangle (x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(x) \right) \langle |l| \rangle (x) dx \quad (2.37)$$

Substituindo o valor de $\rho_n(x)$ de acordo com a Eq.

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\rho_0] \right) (x) \langle |l| \rangle (x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\delta(x_0 - \kappa)] \right) (x) \langle |l| \rangle (x) dx. \quad (2.38)$$

2.2.4 Simplificando a expressão para $\langle L \rangle$

Através do resultado obtido em Eq. [2.38](#) podemos considerar o somatório dos \mathcal{L}^n como um único operador atuando em δ e assim

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\delta(x_0 - \kappa)] \langle |l| \rangle (x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \right) [\delta(x_0 - \kappa)] \langle |l| \rangle (x) dx. \quad (2.39)$$

Como a norma de \mathcal{L} é menor do que um, a soma infinita acima converge

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \right) [f(x)] = (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1} [f(x)] \quad (2.40)$$

$(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso em relação a $(\mathbb{I} - \mathcal{L})$ e \mathbb{I} é o operador identidade. Como \mathcal{L} é auto-adjunto em relação ao produto escalar, $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ também é. Então podemos escrever $\langle L \rangle$ de forma mais simples

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1} [\delta(x_0 - \kappa)] (x) \langle |l| \rangle (x) dx. \quad (2.41)$$

Escrevendo o operador $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ na forma integral e representando seu núcleo por K

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \kappa) \langle |l| \rangle (x) dx dx_0 = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \kappa) \langle |l| \rangle (x) dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(\kappa, x) \langle |l| \rangle (x) dx = (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1} [\langle |l| \rangle](\kappa), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde podemos afirmar que $K(\kappa, x) = K(x, \kappa)$, encontrando assim uma expressão para $\langle L \rangle$ em função de κ ao invés de ser em função de x , isso ocorre devido ao fato de $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ ser auto adjunto. Então a expressão final para $\langle L \rangle$ é

$$\langle L \rangle (\kappa) = (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1} [\langle |l| \rangle](\kappa). \quad (2.43)$$

Aplicando o operador $(\mathbb{I} - \mathcal{L})$ em ambos os membros pela esquerda,

$$(\mathbb{I} - \mathcal{L}) \{ \langle L \rangle \} (x) = (\mathbb{I} - \mathcal{L}) (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1} \{ \langle |l| \rangle \} \therefore \langle L \rangle (x) = \mathcal{L} \{ \langle L \rangle \} (x) + \langle |l| \rangle (x). \quad (2.44)$$

Colocando o operador \mathcal{L} em notação integral

$$\langle L \rangle (x) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} P(x - \kappa) \langle L \rangle (\kappa) d\kappa + \langle |l| \rangle (x). \quad (2.45)$$

A equação acima é uma integral de Fredholm do segundo tipo (BULDYREV et al., 2001b), (BULDYREV et al., 2001a), cuja a solução é descrita por Eq. 2.43. As soluções analíticas para essa classe de funções podem ser obtidas através do formalismo resolvente, sendo denominadas *séries de Neumann*, as quais são escritas como:

$$\langle L \rangle (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle L_n \rangle (x), \quad (2.46)$$

com

$$\langle L_n \rangle = \mathcal{L}^n[\langle |l| \rangle](x). \quad (2.47)$$

Infelizmente o operador $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ não possui solução matemática explícita (BULDYREV et al., 2001b) e ele é chamado de resolvente de \mathcal{L} , capturando analiticamente suas propriedades espectrais. Por exemplo, se ω for um autovalor do espectro \mathcal{L} , então $\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n$ é autovalor do resolvente. Com esta propriedade podemos obter informações sobre a decomposição espectral de $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ usando o operador \mathcal{L} . Porém ainda precisamos expressar o valor de $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ e para contornar essa dificuldade iremos seguir uma nova abordagem para calcular $\langle L \rangle$.

2.3 DISCRETIZAÇÃO

A expressão obtida na Eq. 2.43 nos diz pouco sobre como $\langle L \rangle$ e a eficiência η variam com a distribuição $P(l)$. Então vamos discretizar o domínio $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$ para tratar o problema numericamente. Subdividimos o domínio em $\lambda/\Delta x$, intervalos com comprimento Δx , que faremos muito pequenos computacionalmente, assim podemos reescrever a ação do operador $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ como

$$\langle L \rangle (x_j) = (\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}[\langle |l| \rangle](x_j) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(x_j, x) \langle |l| \rangle (x) dx \Rightarrow \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |l| \rangle (x_i) \Delta x_i \quad (2.48)$$

com $r_v \leq x_i, x_j \leq \lambda - r_v$

Podemos escrever a expressão acima em forma matricial, com $K(x_j, x_i)\Delta x$ sendo uma matriz discreta $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$, $\langle L \rangle (x_j) \equiv \langle L_j \rangle$ e $\langle |l| \rangle (x_i) \equiv \langle |l_i| \rangle$ correspondendo a $\langle L \rangle$ e $\langle |l| \rangle$. Dessa forma:

$$\langle L \rangle \equiv (\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}) \langle |l| \rangle \quad (2.49)$$

explicitamente,

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \langle L_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(x_1, x_1)\Delta x_1 & K(x_1, x_2)\Delta x_2 & \cdots & K(x_1, x_i)\Delta x_i \\ K(x_2, x_1)\Delta x_1 & K(x_2, x_2)\Delta x_2 & \cdots & K(x_2, x_i)\Delta x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_j, x_1)\Delta x_1 & K(x_j, x_2)\Delta x_2 & \cdots & K(x_j, x_i)\Delta x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |l_1| \rangle \\ \langle |l_2| \rangle \\ \vdots \\ \langle |l_i| \rangle \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Observamos que a j -ésima linha nos da $\langle L \rangle$ para o caminhante saindo de $x = x_j$. $\langle L \rangle$ nos fornece a variação da eficiência com a posição inicial para um determinado $P(l)$ e assim podemos obter os gráficos da eficiência em função da posição inicial.

Se particionarmos o intervalo de forma igual, $\Delta x_i \equiv \Delta x$, simplificamos ainda mais a matrix $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$.

Porém, precisamos discretizar o operador $(\mathbb{I} - \mathcal{L})^{-1}$ para obter a matrix \mathbf{K} . Entretanto não temos expressão analítica para calcular o núcleo deste operador, assim, discretizamos \mathcal{L} , cujo núcleo é $P(x_i - x_j)\Delta x_i$. Através da matrix discretizada \mathbf{L} e operações matriciais de subtração e inversão necessárias para calcular $(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}$ obtermos a matrix \mathbf{K} .

Os elementos da matrix \mathbf{L} , L_{ij} , são calculados integrando a distribuição $P(l)$ no intervalo $[x_j - x_i, x_j - x_i + \Delta x_i]$:

$$L_{ij} = L_{ji} = \int_{(x_j - x_i)}^{(x_j - x_i) + \Delta x_i} P(l) dl, \text{ se } |x_j - x_i| \geq l_0. \quad (2.51)$$

Consideramos $L_{ij} = L_{ji}$ pelo fato do operador \mathcal{L} ser auto adjunto. Além disso \mathbf{L} é simétrica, $P(l) = 0$ para $l < l_0$ e $L_{ij} \equiv 0$ quando $|x_j - x_i| < l_0$. \mathcal{L} é denominada de matrix de Toplitz simétrica (PERRIN, 1997), pois todos os termos ao longo de uma mesma diagonal são iguais e para \mathbf{L} de ordem $M \times M$ temos M graus de liberdade. Algoritmos computacionais como a regressão de Levinson, que é um algoritmo o qual permite resolver sistemas lineares com matrizes de Toplitz (PERRIN, 1997), tiram vantagens destas propriedades facilitando as operações em \mathbf{K} , utilizaremos as propriedades da matrix de Toeplitz e esse algoritmo em um programa de computador escrito em matlab para efetuar os cálculos do método do operador integral de maneira mais rápida. E finalmente completamos o cálculo de Eq. 2.49 ao verificamos que precisamos calcular $\langle |l| \rangle (x)$ em função da posição x e aplicar o resultado em x_j , para assim obter $\langle |l| \rangle$. Este é o último passo necessário para calcular computacionalmente a eficiência η .

2.4 CÁLCULO DE $\langle |l| \rangle$ E DOS ELEMENTOS L_{ij}

A maneira de calcular o valor médio do comprimento de um passo isolado, $\langle |l| \rangle$, em função da posição de partida, x , é muito parecida com o primeiro momento de $P(l)$, porém precisamos ficar atentos ao confinamento do buscador. Por isso vamos calcular inicialmente o primeiro momento $\langle l \rangle$, com dois alvos em $x = 0$ e em $x = \lambda$, da mesma forma do modelo da seção anterior e levando em conta todas as suas considerações.

Desta maneira, consideramos passos para a direita positivos e para esquerda negativos, com probabilidades iguais de ocorrer, $P(l) = P(-l) = P(|l|)$. E além disso os maiores passos que podem ser realizados antes de encontrar um alvo é $(x - r_v)$ para a esquerda ou $(\lambda - x - r_v)$ para direita, assim a expressão, $\langle l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} lP(l)dl$ do primeiro momento se torna

$$\begin{aligned} \langle l \rangle = & \int_{-\infty}^{-(x-r_v)} -(x-r_v)P(l)dl + \int_{-(x-r_v)}^{-l_0} lP(l)dl \\ & + \int_{l_0}^{(\lambda-x-r_v)} lP(l)dl + \int_{(\lambda-x-r_v)}^{\infty} (\lambda-x-r_v)P(l)dl. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Na primeira integral temos todos os passos para esquerda com distância maior que $(x - r_v)$ em módulo, ou seja $-\infty < l < -(x - r_v)$ e neste caso todos os passos encontrarão obrigatoriamente o alvo, permitindo substituir $l = -(x - r_v)$. Na segunda integral temos os passos para esquerda com módulo menor que $(x - r_v)$, levando em consideração também o tamanho mínimo do passo l_0 e neste caso não há encontro com o alvo, com os passos variando continuamente no intervalo $-(x - r_v) \leq l \leq -l_0$. A terceira integral refere-se aos passos para a direita com módulo menor que $(\lambda - x - r_v)$, considerando ainda o tamanho mínimo do passo l_0 e neste caso não tem encontro com o alvo, com os passos variando no intervalo entre $l_0 \leq l \leq (\lambda - x - r_v)$. Finalmente a última integral considera os passos para a direita com módulo maior que $(\lambda - x - r_v)$, satisfazendo $(\lambda - x - r_v) < l < \infty$ e estes passos com certeza encontrarão o alvo, o que permite substituir $l = (\lambda - x - r_v)$.

Utilizando a expressão anterior, calculamos $\langle l \rangle$

$$\begin{aligned} \langle l \rangle (x) = & \int_{\infty}^{-(x-r_v)} |-(x-r_v)|P(l)dl + \int_{-(x-r_v)}^{-l_0} |l|P(l)dl \\ & + \int_{l_0}^{(\lambda-x-r_v)} |l|P(l)dl + \int_{(\lambda-x-r_v)}^{\infty} |(\lambda-x-r_v)|P(l)dl. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Fazendo a substituição $l = -l'$ e lembrando que $P(l) = P(-l)$

$$\begin{aligned} \langle |l| \rangle (x) = & \int_{l_0}^{x-r_v} lP(l)dl + \int_{x-r_v}^{\infty} (x-r_v)P(l)dl \\ & + \int_{l_0}^{\lambda-x-r_v} lP(l)dl + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} (\lambda-x-r_v)P(l)dl. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Lembrando a condição de normalização de $P(l)$

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^{\infty} P(l)dl &= \int_{l_0}^{x-r_v} P(l)dl + \int_{x-r_v}^{\infty} P(l)dl \\ &= \int_{l_0}^{\lambda-x-r_v} P(l)dl + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} P(l)dl = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dessa forma $\langle |l| \rangle (x)$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle |l| \rangle (x) &= \left(\frac{(\lambda-x-r_v)}{2} - \int_{l_0}^{\lambda-x-r_v} (\lambda-x-r_v)P(l)dl \right) + \int_{l_0}^{\lambda-x-r_v} lP(l)dl \\ &+ \left(\frac{(x-r_v)}{2} - \int_{l_0}^{x-r_v} (x-r_v)P(l)dl \right) + \int_{l_0}^{x-r_v} lP(l)dl \\ &= \frac{(\lambda-2r_v)}{2} + \int_{l_0}^{x-r_v} [l - (x-r_v)]P(l)dl + \int_{l_0}^{\lambda-x-r_v} [l - (\lambda-x-r_v)]P(l)dl. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Interessante observar que as integrais acima tem o mesmo formato básico $\int_{l_0}^{\beta} [l - \beta]P(l)dl$, com $\beta = (x-r_v)$ ou $\beta = (\lambda-x-r_v)$. Dessa forma as expressões para os extremos do intervalo por possuírem a mesma estrutura podem ser modificadas de uma para outra substituindo $(x-r_v) \leftrightarrow (\lambda-x-r_v)$, isto ocorre devido a simetria existente no posicionamento do buscador próximo a qualquer um dos alvos, pois ele não distingue os alvos. E a expressão para a parte intermediária pode ser obtida somando as expressões das extremidades e subtraindo $(\lambda-2r_v)/2$ do resultado.

2.4.1 Distribuição Lei de potência

Utilizando a distribuição lei de potência, Eq. [1.39](#) com $1 < \mu \leq 3$, podemos calcular os elementos da matriz \mathbf{L}

$$\begin{aligned} L_{ij} = L_{ji} &= \int_{|x_j-x_i|}^{|x_j-x_i|+dx} P(l)dl = \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \frac{l^{1-\mu}}{(1-\mu)} \Big|_{|x_j-x_i|}^{|x_j-x_i|+dx} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|x_j-x_i|}{l_0} \right)^{(1-\mu)} - \left(\frac{|x_j-x_i|+dx}{l_0} \right)^{(1-\mu)} \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Substituindo $x_i = i.dx$ e $l_0 = i_l.dx$, com $i, i_l \in N$, temos a expressão discretizada:

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|j-i|}{i_l} \right)^{(1-\mu)} - \left(\frac{|j-i|+1}{i_l} \right)^{(1-\mu)} \right] \quad (2.58)$$

Para calcular o valor de $\langle |l| \rangle$, vamos resolver a Eq. [2.56](#):

- Para o caminhante saindo de $r_v \leq x \leq r_v + l_0$

– com $\mu \neq 2$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{(\mu - 1)l_0^{\mu - 1} \lambda^{-x - r_v}}{2} \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} [l - (\lambda - x - r_v)] l^{-\mu} dl \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(\lambda - 1)l_0^{\mu - 1}}{2(2 - \mu)} l^{-\mu + 2} \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} - \frac{(\mu - 1)l_0^{\mu - 1} (\lambda - x - r_v)}{2(1 - \mu)} l^{-\mu + 1} \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} - \frac{l_0(\mu - 1)}{2(2 - \mu)} + \frac{l_0^{\mu - 1} (\lambda - x - r_v)^{2 - \mu}}{2} \left[\frac{\mu - 1}{2 - \mu} + \frac{2 - \mu}{2 - \mu} \right] \\
&= \frac{(x - r_v)}{2} + \frac{l_0(\mu - 1)}{2(2 - \mu)} \left[1 + \frac{((\lambda - x - r_v)/l_0)^{2 - \mu}}{1 - \mu} \right]
\end{aligned} \tag{2.59}$$

– com $\mu = 2$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{l_0}{2} \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} [l - (\lambda - x - r_v)] l^{-2} dl + \frac{\lambda - 2r_v}{2} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{l_0}{2} \ln l \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} + \frac{l_0(\lambda - x - r_v)}{2} l^{-1} \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{l_0}{2} \ln((\lambda - x - r_v)/l_0) + \frac{l_0}{2} \\
&= \frac{(x - r_v)}{2} + \frac{l_0}{2} [1 + \ln((\lambda - x - r_v)/l_0)].
\end{aligned} \tag{2.60}$$

- Para o caminhante saindo de $\lambda - r_v - l_0 \leq x \leq \lambda - r_v$:

Substituindo $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ na expressão anterior vamos obter a resposta correta

– com $\mu \neq 2$

$$\langle |l| \rangle (x) = \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{l_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[1 + \frac{((x - r_v)/l_0)^{2 - \mu}}{1 - \mu} \right] \tag{2.61}$$

– com $\mu = 2$

$$\langle |l| \rangle (x) = \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{l_0}{2} [1 + \ln((x - r_v)/l_0)] \tag{2.62}$$

- Para o caminhante saindo de $r_v + l_0 \leq x \leq \lambda - r_v - l_0$

Neste caso podemos somar o resultado dos dois extremos o intervalo e subtrair $(\lambda - 2r_v)/2$

– com $\mu \neq 2$

$$\langle |l| \rangle (x) = \frac{l_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[2 + \frac{((x - r_v)/l_0)^{2 - \mu}}{1 - \mu} + \frac{((\lambda - x - r_v)/l_0)^{2 - \mu}}{1 - \mu} \right] \tag{2.63}$$

– com $\mu = 2$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{l_0}{2} [2 + \ln((\lambda - x - r_v)/l_0) + \ln((x - r_v)/l_0)] \\
&= l_0 [1 + \ln([\lambda - x - r_v)(x - r_v)]^{1/2}/l_0].
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Em simulações computacionais utilizamos $\mu \rightarrow 2$ ao invés de $\mu = 2$.

2.4.2 Exponencial simples

Podemos definir a distribuição exponencial simples como:

$$\begin{aligned} P(l) &= A_l e^{-\frac{|l|}{\tau}}, \quad |l| > l_0 \\ P(l) &= 0, \quad |l| < l_0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Agora precisamos normalizar a exponencial simples e obter a constante de normalização, A_l

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(l) dl &= 1 \\ \int_{-\infty}^{-l_0} A_l e^{\frac{l}{\tau}} dl + \int_{l_0}^{\infty} A_l e^{-\frac{l}{\tau}} dl &= 1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Fazendo a mudança $l \rightarrow -l$ na primeira integral acima

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{l_0} A_l e^{-\frac{l}{\tau}} d(-l) + \int_{l_0}^{\infty} A_l e^{-\frac{l}{\tau}} dl &= 1 \\ 2 \int_{l_0}^{\infty} A_l e^{-\frac{l}{\tau}} dl &= 1 \\ A_l e^{-\frac{l_0}{\tau}} \tau &= \frac{1}{2} \\ A_l &= \frac{e^{\frac{l_0}{\tau}}}{2\tau} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Dessa forma a distribuição exponencial simples se torna

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{e^{-\frac{(|l|-l_0)}{\tau}}}{2\tau}, \quad |l| > l_0, \\ P(l) &= 0, \quad |l| < l_0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Calculando os elementos da matriz \mathbf{L}

$$\begin{aligned} L_{ij} &= L_{ji} = \int_{|x_j-x_i|}^{|x_j-x_i|+dx} A_l e^{-\frac{l}{\tau}} dl \\ &= -A_l \tau \left[e^{-\frac{|x_j-x_i|+dx}{\tau}} - e^{-\frac{|x_j-x_i|}{\tau}} \right] \\ &= e^{\frac{l_0}{\tau}} \frac{e^{-\frac{|x_j-x_i|}{\tau}} - e^{-\frac{|x_j-x_i|+dx}{\tau}}}{2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Colocando $x_i = i \cdot dx$, $l_0 = i_l \cdot dx$ e $\tau = i_\tau \cdot dx$, com $i, i_l, i_\tau \in \mathbb{N}$, temos a expressão discretizada:

$$L_{ij} = L_{ji} = e^{\frac{i_l}{i_\tau}} \frac{e^{-\frac{|j-i|}{i_\tau}} - e^{-\frac{|j-i|+1}{i_\tau}}}{2} \quad (2.70)$$

E agora vamos calcular $\langle |l| \rangle$ usando a Eq. 2.56

- Para o caminhante saindo de $r_v \leq x \leq r_v + l_0$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} [l - (\lambda - x - r_v)] e^{\frac{-l}{\tau}} dl \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} l e^{\frac{-l}{\tau}} dl - A_l (\lambda - x - r_v) \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} e^{\frac{-l}{\tau}} dl \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - A_l \tau (\tau + l) e^{\frac{-l}{\tau}} \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} + A_l \tau (\lambda - x - r_v) e^{\frac{-l}{\tau}} \Big|_{l_0}^{\lambda - x - r_v} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - A_l \tau [(\tau + \lambda - x - r_v) e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau}} - (\tau + l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau}} \\
&\quad - (\lambda - x - r_v) e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau}} + (\lambda - x - r_v) e^{\frac{-l_0}{\tau}}] \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - A_l \tau [\tau e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau}} + (\lambda - x - r_v - \tau - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau}}] \\
&= \frac{x - r_v + \tau + l_0 - \tau e^{\frac{l_0 - (\lambda - x - r_v)}{\tau}}}{2}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

- Para o buscador saindo de $\lambda - r_v - l_0 \leq x \leq \lambda - r_v$

Neste caso a substituição $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ na integral anterior nos dá a resposta certa

$$\langle |l| \rangle (x) = \frac{\lambda - x - r_v + l_0 + \tau - \tau e^{\frac{l_0 - (x - r_v)}{\tau}}}{2} \tag{2.72}$$

- Para o caminhante saindo de $r_v + l_0 \leq x \leq \lambda - r_v - l_0$

Neste caso basta somar os resultados dos dois extremos e subtrair $(\lambda - 2r_v)/2$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{x - r_v + \tau + l_0 - \tau e^{\frac{l_0 - (\lambda - x - r_v)}{\tau}} + \lambda - x - r_v + l_0 + \tau - \tau e^{\frac{l_0 - (x - r_v)}{\tau}} - \lambda + 2r_v}{2} \\
&= \tau + l_0 - \frac{l_0}{\tau e^{\frac{l_0}{\tau}}} [e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau}} + e^{\frac{-(x - r_v)}{\tau}}]
\end{aligned} \tag{2.73}$$

2.4.3 Exponencial dupla

Podemos definir a distribuição exponencial dupla como:

$$\begin{aligned}
P(l) &= A_l (w_1 e^{\frac{-|l|}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{-|l|}{\tau_2}}), \quad |l| > l_0 \\
P(l) &= 0, \quad |l| < l_0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

E para efetuar os cálculos com a exponencial dupla, precisamos primeiro normalizar a distribuição e obter a constante de normalização.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P(l) dl &= 1 \\
\int_{-\infty}^{-l_0} A_l (w_1 e^{\frac{l}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{l}{\tau_2}}) dl + \int_{l_0}^{\infty} A_l (w_1 e^{\frac{-l}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{-l}{\tau_2}}) dl &= 1 \\
A_l [(w_1 \tau_1 e^{\frac{l}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{l}{\tau_2}}) \Big|_{-\infty}^{-l_0} + (-w_1 \tau_1 e^{\frac{-l}{\tau_1}} - w_2 \tau_2 e^{\frac{-l}{\tau_2}}) \Big|_{l_0}^{\infty}] &= 1 \\
2A_l (w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}) &= 1 \\
A_l &= \frac{1}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Assim a temos a distribuição exponencial dupla:

$$\begin{aligned}
P(l) &= \frac{w_1 e^{\frac{|l|}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{|l|}{\tau_2}}}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})}, \quad |l| > l_0, \\
P(l) &= 0, \quad |l| < 0.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Calculando os elementos da matriz \mathbf{L}

$$\begin{aligned}
L_{ij} = L_{ji} &= \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} A_l (w_1 e^{\frac{-l}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{-l}{\tau_2}}) dl \\
&= -A_l (w_1 \tau_1 [e^{\frac{-|x_j - x_i| + dx}{\tau_1}} - e^{\frac{-|x_j - x_i|}{\tau_1}}] + w_2 \tau_2 [e^{\frac{-|x_j - x_i| + dx}{\tau_2}} - e^{\frac{-|x_j - x_i|}{\tau_2}}])
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Discretizando os parâmetros, $x_i = i \cdot dx$, $l_0 = i_l \cdot dx$, $\tau_1 = i_{\tau_1} \cdot dx$ e $\tau_2 = i_{\tau_2} \cdot dx$ com $i, i_l, i_{\tau_1}, i_{\tau_2} \in \mathbb{N}$:

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{w_1 i_{\tau_1} [e^{\frac{-|j-i|+1}{i_{\tau_1}}} - e^{\frac{-|j-i|}{i_{\tau_1}}}] + w_2 i_{\tau_2} [e^{\frac{-|j-i|+1}{i_{\tau_2}}} - e^{\frac{-|j-i|}{i_{\tau_2}}}]}{2(i_{\tau_1} w_1 e^{\frac{-i_l}{i_{\tau_1}}} + i_{\tau_2} w_2 e^{\frac{-i_l}{i_{\tau_2}}})} \tag{2.78}$$

E agora vamos calcular $\langle |l| \rangle$:

- Para o caminhante saindo de $r_v \leq x \leq r_v + l_0$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \int_{l_0}^{\lambda - x - r_v} [l - (\lambda - x - r_v)] [w_1 e^{\frac{-l}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{-l}{\tau_2}}] dl \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \{ \tau_1 w_1 [-\tau_1 e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau_1}} - (\lambda - x - r_v - \tau_1 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_1}}] \\
&\quad + \tau_2 w_2 [-\tau_2 e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau_2}} - (\lambda - x - r_v - \tau_2 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}] \} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\tau_1 w_1 [-\tau_1 e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau_1}} - (\lambda - x - r_v - \tau_1 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_1}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})} \\
&\quad + \frac{\tau_2 w_2 [-\tau_2 e^{\frac{-(\lambda - x - r_v)}{\tau_2}} - (\lambda - x - r_v - \tau_2 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

- Para o buscador saindo de $\lambda - r_v - l_0 \leq x \leq \lambda - r_v$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle (x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \int_{l_0}^{x-r_v} [l - (x - r_v)] [w_1 e^{\frac{-l}{\tau_1}} + w_2 e^{\frac{-l}{\tau_2}}] dl \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_l \{ \tau_1 w_1 [-\tau_1 e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_1}} - (x - r_v - \tau_1 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_1}}] \\
&\quad + \tau_2 w_2 [-\tau_2 e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_2}} - (x - r_v - \tau_2 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}] \} \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\tau_1 w_1 [-\tau_1 e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_1}} - (x - r_v - \tau_1 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_1}}] \\
&\quad + \tau_2 w_2 [-\tau_2 e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_2}} - (x - r_v - \tau_2 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})} \\
&\quad + \frac{\tau_2 w_2 [-\tau_2 e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_2}} - (x - r_v - \tau_2 - l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

- Para o caminhante saindo de $r_v + l_0 \leq x \leq \lambda - r_v - l_0$

Neste caso precisamos somar os dois resultados e subtrair de $(\lambda - 2r_v)/2$

$$\begin{aligned}
\langle |l| \rangle &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\tau_1 w_1 [-\tau_1 (e^{\frac{-(\lambda-x-r_v)}{\tau_1}} + e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_1}}) - (\lambda - 2r_v - 2\tau_1 - 2l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_1}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})} \\
&\quad + \frac{\tau_2 w_2 [-\tau_2 (e^{\frac{-(\lambda-x-r_v)}{\tau_2}} + e^{\frac{-(x-r_v)}{\tau_2}}) - (\lambda - 2r_v - 2\tau_2 - 2l_0) e^{\frac{-l_0}{\tau_2}}]}{2(w_1 \tau_1 e^{\frac{-l_0}{\tau_1}} + w_2 \tau_2 e^{\frac{-l_0}{\tau_2}})}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

2.5 CÁLCULOS ANALÍTICOS DA EFICIÊNCIA DA BUSCA ALEATÓRIA EM UMA DIMENSÃO

Nesta subseção apresentaremos o cálculo das expressões analíticas para a eficiência da busca unidimensional. Em todos os casos utilizaremos o modelo apresentado na seção 2.1 deste capítulo, principalmente interessados no regime escasso para buscas não-destrutivas assimétricas, com $x_0 \ll L$.

Infelizmente os resultados analíticos de $\langle L \rangle$ para as distribuições de lei de potência são aproximados e tendem ao resultado exato para $L \rightarrow \infty$ (BULDYREV et al., 2001b; BULDYREV et al., 2001a). Já para as distribuições exponenciais simples e dupla os resultados são exatos, porém no caso específico da exponencial dupla esse resultado é de difícil trato analítico, tornado necessárias aproximações (CAMPOS et al., 2015b). Por isso no capítulo seguinte compararemos os resultados desses métodos e os obtidos pelo método do operador integral.

2.5.1 Lei de Potência

Na subseção 2.5.1 encontramos o tamanho médio de $\langle |l| \rangle$ de um passo simples, agora trabalharemos em aproximações para $\langle L \rangle$ no limite contínuo o qual o buscador pode estar em qualquer posição do intervalo.

Para tratar essa aproximação contínua começamos definindo o operador (BULDYREV et al., 2001b; BULDYREV et al., 2001a)

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-\alpha} [\mathcal{L}(\delta) - \mathbb{I}]. \quad (2.82)$$

A equação acima é baseada no operador que aparece na Eq. 2.43 e o parâmetro δ representa uma pequena escala do comprimento do problema, a qual tende a zero no limite contínuo. No caso de uma distribuição com passos do tipo lei de potência, consideramos $\delta = l_0$, fazendo o tamanho mínimo do passo tender a zero, mas ainda permanecendo finito, permitindo no passo mínimo o buscador ocupar uma posição arbitrariamente próxima da de partida.

Recordando a equação Eq. 2.21 e considerando $\rho_n = f(x)$, $r_v = 0$, $\mu = \alpha + 1$ e $P(x-x') = \frac{\alpha l_0^\alpha \Theta(|(y-x)| - l_0)}{2|y-x|^{\alpha+1}}$. Lembrando que Θ denota a função degrau de Heaviside a qual impede passos menores que l_0 , dessa forma

$$[\mathcal{L}f](y) = \frac{\alpha l_0^\alpha}{2} \int_0^L \frac{f(x) \theta(|y-x| - l_0) dx}{|y-x|^{\alpha+1}}. \quad (2.83)$$

Integrando o resultado acima e aplicando-o na Eq. 2.82, temos (BULDYREV et al., 2001b; BULDYREV et al., 2001a)

$$[\mathcal{D}_\alpha f](y) = V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(x-y) f'(x)}{2|y-x|^\alpha} dx - \frac{f(0)}{2y^\alpha} - \frac{f(L)}{2(L-y)^\alpha}, \quad (2.84)$$

onde *V.P.* é o valor principal de Cauchy, nas expressões acima substituímos $\lambda = L$ para ficar mais próxima a notação de (BULDYREV et al., 2001b) e consideramos $r_v = 0$ pois na busca unidimensional é indiferente se a detecção ocorre em $x = 0$ ou $x = r_v$. Além disso $f''(x)$, $f(0)$ e $f(L)$ precisam ser finitas dentro do intervalo $[0, L]$ para que o operador \mathcal{D}_α possa atuar (BULDYREV et al., 2001b).

Assim podemos obter nova expressão para $\langle L \rangle$ substituindo Eq. 2.82 em Eq. 2.21

$$\langle L \rangle = [\mathcal{D}_\alpha^{-1} h(x_0)], \quad (2.85)$$

onde

$$h(x_0) = -l_0^\alpha \langle |l| \rangle (x_0). \quad (2.86)$$

Utilizando a equação acima e a Eq. 2.84 temos

$$V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(x-y) \langle L \rangle'(x)}{2|y-x|^\alpha} dy = -l_0^{-\alpha} \langle |l| \rangle, \quad (2.87)$$

onde $\langle L \rangle(0) = \langle L \rangle(L) = 0$, pois se partimos de um desses pontos a distância até o alvo é nula.

Se fizermos $\langle L \rangle' (x) = \phi(x)$ e $l_0^{-\alpha} = h$ na Eq. 2.87 temos

$$V.P. \int_0^L \frac{\text{sgn}(y-x)\phi(x)}{2|y-x|^\alpha} dy = h(x). \quad (2.88)$$

A equação acima é uma equação diferencial não-homogênea (DELKHOSH, 2013) com condições de contorno correspondentes a $\langle L \rangle (0) = \langle L \rangle (L) = 0$, que é conhecida como equação integral generalizada de Abel com núcleo fracionário de Riesz (STEWART, 2012) e que tem solução geral

$$\phi(y) = A\phi_0(y) + \phi_1(y), \quad (2.89)$$

onde A é uma constante relacionada a condição inicial, ϕ_0 a solução do caso homogêneo e ϕ_1 do caso particular. A solução do caso homogêneo é (TAMARKIN, 1930)

$$\phi_0 = (Lx - x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}, \quad (2.90)$$

e do caso particular

$$\phi_1 = \frac{4 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi\alpha B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} z^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{d}{dz} \int_z^L dt (t^{1-\alpha})(t-z)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^t y^{\frac{\alpha}{2}} (t-y)^{\frac{\alpha}{2}-1} h(y) dy, \quad (2.91)$$

com $\Gamma(t)$ sendo a função gama:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (2.92)$$

e $B(a, b)$ a função beta.

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (2.93)$$

No nosso caso, utilizamos $h(y) = -l_0^\alpha \langle |l| \rangle (y)$ e após resolver todas as equações temos

$$\langle L \rangle (x_0) = L \frac{(2-\alpha)}{2(1-\alpha)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\alpha(z) + \psi_\alpha(1-z)}{\alpha(\alpha+2)B(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})} \right] + \frac{2LM^{\alpha-1} \sin(\frac{\pi\alpha}{2})(z-z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi(\alpha-1)}, \quad (2.94)$$

com $\psi_\alpha(z) = F(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + 2, z) z^{\frac{\alpha}{2}+1}$, $z = x_0/L$, $M = L/l_0$ e $F(a, b, c, d)$ é uma função hipergeométrica definida por

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)x^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+c)}. \quad (2.95)$$

Com a Eq. 2.94 conseguimos uma expressão aproximada para $\langle L \rangle$ entre dois encontros de alvos consecutivos, saindo da posição x_0 para distribuição de lei de potência. Um importante caso particular é para $\alpha = 1$, distribuição de Cauchy. Esse caso é relevante pois no limite $L \rightarrow \infty$ o ambiente fica com bem menos alimentos disponíveis e se o predador não tiver nenhuma

informação do ambiente de busca a eficiência, de acordo com a literatura, é maximizada para $\alpha_{opt} \rightarrow 1$ (VISWANATHAN et al., 1999). E a Eq. 2.94 se torna:

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{2L\sqrt{z - z^2} \log(M)}{\pi} \quad (2.96)$$

sabendo que $M = L/l_0$ e $z = x_0/L$ temos

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{2L\sqrt{\frac{x_0}{L} - \frac{x_0^2}{L^2}} \log\left(\frac{L}{l_0}\right)}{\pi} \quad (2.97)$$

e considerando buscas não-destrutivas com $x_0 \ll L$ no limite $L \rightarrow \infty$

$$\langle L \rangle_{opt} = \frac{2\sqrt{Lx_0} \log\left(\frac{L}{l_0}\right)}{\pi} \quad (2.98)$$

Lembrando que a eficiência é $\eta = 1/\langle L \rangle$, assim temos

$$\eta_{opt} = \frac{\pi}{2\sqrt{Lx_0} \log\left(\frac{L}{l_0}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{L} \log L}, \quad (\text{Distribuição de Lévy}). \quad (2.99)$$

2.5.2 Exponencial simples

Agora vamos mostrar como obter a distância média $\langle L \rangle$ percorrida entre dois encontros consecutivos de alvos para as distribuições exponenciais simples.

Seguiremos aqui o formalismo demonstrado em (CAMPOS et al., 2015b; CAMPOS et al., 2015a). Esse método é baseado no cálculo estatístico do tempo médio de primeira passagem $\langle T \rangle$ por qualquer um dos dois alvos. É importante observar que estas referências consideram o tempo de duração de cada passo t , ao invés do comprimento $|l|$. Entretanto se admitimos uma velocidade v constante teremos $|l| = vt$ e se consideramos $v = 1$, podemos indicar $l = t$ e $\langle L \rangle = \langle T \rangle$. Dessa maneira podemos utilizar o cálculo estatístico do tempo médio de primeira passagem $\langle T \rangle$, com a vantagem de conseguir expressões analíticas exatas para as quantidades de interesse.

Começamos definindo a forma geral da exponencial simples com t tempos de duração dos passos

$$\phi(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}. \quad (2.100)$$

Dessa maneira podemos aplicar o mesmo formalismo de um sistema markoviano descrito pela seguinte equação de balanço (CAMPOS et al., 2015b)

$$\rho(x, t; \rho_0) = \int_0^t \left(\frac{\rho(x + vt', t - t'; \rho_0) + \rho(x - vt', t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' + \rho_0 \delta(x - x_0) \delta(t) \quad (2.101)$$

onde $\rho(x, t; \rho_0)$ é a densidade de probabilidade para que o caminhante inicie no instante t em uma posição x com duração de passo caracterizada por $\phi(t)$. Já $\rho(x \pm vt', t - t'; \rho_0)$ é a densidade de probabilidade de dar um passo de duração t' começando no instante $t - t'$ e posição $x' = x \pm vt'$, a qual faz o caminhante passar pela posição x no instante t . Outra coisa a se observar é que o deslocamento para direita representado pelo sinal $-$ e para esquerda por $+$. Dessa maneira a Eq. 2.101 mostra que o caminhante pode assumir a posição x , no instante t , partindo de $x \pm vt'$ no instante $t - t'$ e fazendo um salto de duração t' , integrando sobre todas as durações possíveis até a duração máxima t . E o termo com a delta de Dirac mostra a condição inicial da caminhada, saindo de $x = x_0$ em $t = 0$.

Aplicando a transformada de Fourier e utilizando a propriedade de translação,

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-ikt_0} f(k), \quad (2.102)$$

temos

$$\rho(k, t, \rho_0) = \int_0^t \frac{\rho(k, t - t'; \rho_0)(e^{t'(ikv - \frac{1}{\tau})} + e^{-t'(ikv + \frac{1}{\tau})})}{2} + \rho_{10} e^{-ikx_0} \delta(t). \quad (2.103)$$

Agora, aplicamos a transformada de Laplace à equação acima, junto com a propriedade de convolução,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] = F(s)G(s), \quad (2.104)$$

com $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, teremos

$$\rho(k, s, \rho_0) = \frac{\rho(k, s, \rho_0)}{\tau} \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})^2 + (kv)^2} \right) + \rho_{10} e^{-ikx_0}, \quad (2.105)$$

e obtemos

$$\rho(k, s, \rho_0) = e^{-ikx_0} \rho_{10} \frac{(1 + 2s\tau + s^2\tau^2 + k^2\tau^2v^2)}{s\tau + s^2\tau^2 + \tau^2k^2v^2}. \quad (2.106)$$

Com esse resultado aplicamos a equação acima na Eq. 2.103

$$P(x, t; \rho_0) = \int_0^t \left(\frac{\rho(x + vt, t - t'; \rho_0) + \rho(x - vt, t - t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'. \quad (2.107)$$

Onde $P(x, t; \rho_0)$ é a equação que rege a densidade de probabilidade para que o caminhante esteja na posição x , no instante t . E aplicando novamente as transformadas de Fourier e Laplace, junto com as propriedades de translação e convolução, temos

$$P(k, s; \rho_0) = \rho(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})^2 + (kv)^2} \right). \quad (2.108)$$

Substituindo a Eq. 2.106 na equação acima

$$P(k, s; \rho_0) = e^{-ikx_0} \rho_{10} \frac{(s + \frac{1}{\tau})(1 + 2s\tau + s^2\tau^2 + k^2v^2\tau^2)}{((s + \frac{1}{\tau})^2 + k^2v^2)(s\tau + s^2\tau^2 + k^2v^2\tau^2)}, \quad (2.109)$$

e aplicando a transformada de Fourier inversa

$$P(x, s; \rho_0) = \frac{\rho_{10}(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{2s^2\tau + 2s}} e^{-\frac{|x-x_0|}{\sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}}}}{\tau v^2}. \quad (2.110)$$

Para o espaço de interesse $0 \leq x \leq L$, podemos escrever a densidade de probabilidade como (CALVO et al., 2007):

$$Q(x, s; \rho_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(x + mL, s; \rho_0) \quad (2.111)$$

Interessante notar a semelhança da expressão acima com o método das imagens em eletrostática com condições de contorno específicas (JACKSON, 1999). Uma das maneiras de solucionar o problema do caminhante aleatório no espaço $0 < x < L$ seria através de "cargas imagem" nas regiões $x < 0$ e $x > L$. Sendo possível usar o método das imagens para vários problemas em caminhadas aleatórias (CALVO et al., 2007).

Agora podemos substituir Eq. 2.110 em Eq. 2.111:

$$Q(x, s; \rho_0) = \frac{(s\tau + 1) \sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{-\frac{\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}|x-x_0|}{v}} \right)}{2\tau v^2 \left(1 - e^{-\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} \right)}, \quad (2.112)$$

e encontrar a taxa de probabilidade q de encontrar qualquer um dos alvos (não obrigatoriamente da primeira vez), a partir da densidade de probabilidade Q de encontrá-lo nas posições dos sítios alvos em qualquer instante t durante as condições de contorno (CAMPOS et al., 2015a), dessa forma

$$\begin{aligned} q(t, \rho_0) &= vQ(0, t, \rho_0), & 0 < x_0 < L, \\ q(t, \rho_0) &= vQ(0, t, \rho_0) - \frac{\delta(t)}{2}, & x_0 = 0, x_0 = L \\ q(t, \rho_1) &= vQ(0, t, \rho_1) - \frac{\delta(t)}{2}, & x_0 = 0, x_0 = L \end{aligned} \quad (2.113)$$

A delta de Dirac presente na equação acima representa as situações nas quais o caminhante parte da mesma posição de um dos alvos e já o encontra em $t = 0$. E a diferença entre a segunda e a terceira linha da equação acima é que na última delas a caminhada inicia no estado específico 1, com duração de passo inicial determinado pela exponencial da Eq. 2.100 (CAMPOS et al., 2015a), (CALVO et al., 2007). Nesse trabalho nos interessa a primeira linha da equação acima, pois o caminhante começa em $0 < x < L$, com o regime de busca não-destrutiva assimétrica $x_0 \ll L$.

Assim substituindo Eq. 2.112 na primeira linha de Eq. 2.113:

$$q(s, \rho_0) = \frac{(s\tau + 1)\sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{\frac{(L-x_0)\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} + e^{\frac{x_0\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} \right)}{2\tau v^2 \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} - 1 \right)}. \quad (2.114)$$

Agora, substituindo a Eq. 2.112 na segunda linha de Eq. 2.113:

$$q(s, \rho_1) = \frac{(s\tau + 1)\sqrt{\frac{\tau v^2}{s^2\tau + s}} \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} + 1 \right)}{2\tau v^2 \left(e^{\frac{L\sqrt{s(s+\frac{1}{\tau})}}{v}} - 1 \right)} - \frac{1}{2}. \quad (2.115)$$

Sabendo a taxa de encontros q de um dos alvos podemos encontrar a taxa de probabilidade do primeiro encontro f .

$$q(s; \rho_0) = f(s; \rho_0) + f(s; \rho_0)q(s; \rho_1), \quad (2.116)$$

implicando em

$$f(s; \rho_0) = \frac{q(s; \rho_0)}{1 + q(s; \rho_1)}. \quad (2.117)$$

Sabendo que o tempo médio da primeira passagem é obtido através de (MÉNDEZ; CAMPOS; BARTUMEUS, 2014)

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty t f(t, \rho_0) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} t f(t, \rho_0) dt = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{df(s, \rho_0)}{ds}. \quad (2.118)$$

Usando os resultados de Eq. 2.115 e Eq. 2.117 em Eq. 2.118 encontramos o tempo médio

$$\langle T \rangle = \frac{L}{2} + \frac{x_0(L - x_0)}{2v^2\tau}. \quad (2.119)$$

Lembrando que podemos considerar $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ e o valor máximo de η (mínimo de $\langle L \rangle$) é encontrado para $\tau \rightarrow \infty$, dessa forma $\langle L \rangle_{opt} = L/2$ e a eficiência torna-se

$$\eta_{opt} \sim \frac{1}{L}, \quad (Exp \ Simple). \quad (2.120)$$

2.5.3 Exponencial dupla

Os passos dessa subseção são parecidos com os da anterior, porém com a diferença da distribuição ter duas exponenciais $n = 2$. A distribuição do tempo de duração dos passos se

torna

$$\phi(t) = w_1 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1} + w_2 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2}, \quad (2.121)$$

com τ_i representando as durações características e w_i os pesos estatísticos, de modo que $w_1 + w_2 = 1$.

Aplicando o mesmo formalismo de um sistema markoviano usado para a exponencial simples (CAMPOS et al., 2015b).

$$\rho_i(x, t, \rho_0) = \sum_{k=1}^{n=2} w_k \int_0^t \left(\frac{\rho_{k+} + \rho_{k-}}{2} \phi_k(t') dt' + \rho_{i0} \delta(x - x_0) \delta(t) \right), \quad (2.122)$$

$$\rho_1(x, t; \rho_0) = w_1 \left[\int_0^t \left(\frac{\rho_1(x+vt', t-t'; \rho_0) + \rho_1(x-vt', t-t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau_1}} dt' + \right. \quad (2.123)$$

$$\left. \int_0^t \left(\frac{\rho_2(x+vt', t-t'; \rho_0) + \rho_2(x-vt', t-t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau_2}} dt' \right] + \rho_{10} \delta(x - x_0) \delta(t)$$

e

$$\rho_2(x, t; \rho_0) = w_2 \left[\int_0^t \left(\frac{\rho_1(x+vt', t-t'; \rho_0) + \rho_1(x-vt', t-t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau_1}} dt' + \right. \quad (2.124)$$

$$\left. \int_0^t \left(\frac{\rho_2(x+vt', t-t'; \rho_0) + \rho_2(x-vt', t-t'; \rho_0)}{2} \right) e^{-\frac{t'}{\tau_2}} dt' \right] + \rho_{20} \delta(x - x_0) \delta(t).$$

Aplicando a transformada de Fourier e Laplace

$$\rho_1(s, k; \rho_0) = w_1 \left[\frac{\rho_1(s + \tau_1^{-1})}{\tau_1((s + \tau_1^{-1})^2 + (kv)^2)} + \frac{\rho_2(s + \tau_2^{-1})}{\tau_2((s + \tau_2^{-1})^2 + (kv)^2)} \right] + e^{-ikx_0} \rho_{10} \quad (2.125)$$

e

$$\rho_2(s, k; \rho_0) = w_2 \left[\frac{\rho_1(s + \tau_1^{-1})}{\tau_1((s + \tau_1^{-1})^2 + (kv)^2)} + \frac{\rho_2(s + \tau_2^{-1})}{\tau_2((s + \tau_2^{-1})^2 + (kv)^2)} \right] + e^{-ikx_0} \rho_{20}. \quad (2.126)$$

Resolvendo esse sistema encontramos essas equações

$$\rho_1 = \frac{e^{-ikx_0} ((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2) (\rho_{10} \tau_2 (k^2 \tau_2 v^2 + s^2 \tau_2 + s) + s \tau_2 w_1 + w_1)}{\tau_2 ((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2) (k^2 \tau_2 v^2 + s^2 \tau_2 + s) + w_1 (\tau_2 - \tau_1) (-k^2 v^2 (s\tau_1 \tau_2 + \tau_1 + \tau_2) - s (s\tau_1 + 1) (s\tau_2 + 1))} \quad (2.127)$$

e

$$\rho_2 = - \frac{e^{-ikx_0} ((k\tau_2 v)^2 + (s\tau_2 + 1)^2) (\tau_1 (k^2 (\rho_{10} - 1) \tau_1 v^2 + (\rho_{10} - 1) s^2 \tau_1 + s (\rho_{10} + w_1 - 2)) + w_1 - 1)}{\tau_2 ((k\tau_1 v)^2 + (s\tau_1 + 1)^2) (k^2 \tau_2 v^2 + s^2 \tau_2 + s) + w_1 (\tau_2 - \tau_1) (-k^2 v^2 (s\tau_1 \tau_2 + \tau_1 + \tau_2) - s (s\tau_1 + 1) (s\tau_2 + 1))}. \quad (2.128)$$

Para encontrar as densidades de probabilidade aplicamos as transformadas de Fourier e de Laplace nas equações acima

$$P_1(k, s; \rho_0) = \rho_1(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{(s + \frac{1}{\tau_1})^2 + (kv)^2} \right) \quad (2.129)$$

e

$$P_2(k, s; \rho_0) = \rho_2(k, s; \rho_0) \left(\frac{s + \frac{1}{\tau_2}}{(s + \frac{1}{\tau_2})^2 + (kv)^2} \right). \quad (2.130)$$

Agora se substituímos a Eq. 2.127 em Eq. 2.129, obtemos

$$P_1(k, s; \rho_0) = \frac{a_1(s) + a_2(vk)^2}{b_1 + b_2(vk)^2 + (vk)^4}, \quad (2.131)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s\rho_{10} + w_1\tau_2^{-1}), \\ a_2 &= \rho_{10}(s + \tau_1^{-1}), \\ b_1 &= s(s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s + w_2\tau_1^{-1} + w_1\tau_2^{-1}), \\ b_2 &= (s + \tau_1^{-1})(s + w_2\tau_1^{-1}) + (s + \tau_2^{-1})(s + w_1\tau_2^{-1}). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Se substituímos $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$, $w_1 \leftrightarrow w_2$ e $\rho_{10} \leftrightarrow \rho_{20}$, e encontramos $P_2(k, s; \rho_0)$. Fazendo a transformada inversa de Fourier na Eq. 2.131

$$P_1(x, s; \rho_0) = \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} e^{-\beta_- \frac{|x-x_0|}{v}} + \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} e^{-\beta_+ \frac{|x-x_0|}{v}}, \quad (2.133)$$

com $\beta_{\pm} = b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1}$. De forma análoga a Eq. 2.112 temos a seguinte densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} Q_1(x, s; \rho_0) &= \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_-(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\beta_-|x-x_0|}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}}} + \\ &\quad \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_+(L-|x-x_0|)}{v}} + e^{-\frac{\beta_+|x-x_0|}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}}}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

E as taxas de probabilidade de encontro de qualquer um dos alvos

$$\begin{aligned} q_1(s, \rho_0) &= \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_-(L-x_0)}{v}} + e^{-\frac{\beta_-x_0}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}}} + \\ &\quad \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{e^{-\frac{\beta_+(L-x_0)}{v}} + e^{-\frac{\beta_+x_0}{v}}}{1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}}}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Agora fazendo $x_0 = 0$ e $\rho_{10} = 1$ temos

$$\begin{aligned} q_1(s, \rho_1) &= \frac{a_1 - a_2\beta_-^2}{2\beta_-(b_2 - 2\beta_-^2)} \frac{\left(e^{-\frac{\beta_-L}{v}} + 1 \right)}{\left(1 - e^{-\frac{\beta_-L}{v}} \right)} + \\ &\quad \frac{a_1 - a_2\beta_+^2}{2\beta_+(b_2 - 2\beta_+^2)} \frac{\left(e^{-\frac{\beta_+L}{v}} + 1 \right)}{\left(1 - e^{-\frac{\beta_+L}{v}} \right)} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.136)$$

e colocando $\rho_{10} = 1$ na Eq. [2.132](#)

$$\begin{aligned} a_1 &= (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(s + w_1\tau_2^{-1}), \\ a_2 &= (s + \tau_1^{-1}). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Para $q_1(s, \rho_2)$, temos praticamente a mesma expressão de $q_1(s, \rho_1)$, porém $a_2 = 0$ e $a_1 = (s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})(w_1\tau_2^{-1})$.

Para obter as expressões de $P_2(k, s; \rho_0)$, $Q_2(x, s; \rho_0)$, $q_2(s, \rho_0)$, $q_2(s, \rho_1)$ e $q_2(s, \rho_2)$ o cálculo é feito de maneira semelhante.

Sabendo as taxas de encontros q_i , iremos encontrar as taxas de probabilidade do primeiro encontro $f_i(t, \rho_0)$,

$$q_1(s; \rho_0) = f_1(s; \rho_0) + f_1(s; \rho_0)q_1(s; \rho_1) + f_2(s; \rho_0)q_1(s; \rho_2) \quad (2.138)$$

e

$$q_2(s; \rho_0) = f_2(s; \rho_0) + f_1(s; \rho_0)q_2(s; \rho_1) + f_2(s; \rho_0)q_2(s; \rho_2). \quad (2.139)$$

Resolvendo as equações acima temos

$$f_1(s; \rho_0) = \frac{q_1(s; \rho_0)(1 + q_2(s; \rho_2)) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_0)}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)} \quad (2.140)$$

e

$$f_2(s; \rho_0) = \frac{q_2(s; \rho_0)(1 + q_1(s; \rho_1)) - q_2(s; \rho_1)q_1(s; \rho_0)}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)}. \quad (2.141)$$

implicando em

$$\langle T \rangle = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{q_2(s; \rho_0)(1 + q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)) + q_1(s; \rho_0)(1 - q_2(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2))}{1 + q_1(s; \rho_1) + q_2(s; \rho_2) + q_2(s; \rho_2)q_1(s; \rho_1) - q_1(s; \rho_2)q_2(s; \rho_1)}. \quad (2.142)$$

Para este trabalho nos interessa um subespaço total de parâmetros da distribuição $\{\tau_1, w_1, \tau_2, w_2\}$ onde $w_1 + w_2 = 1$, dessa maneira associando a uma busca não-destrutiva comparável à distribuição de Lévy com $\mu \rightarrow 2$. Para obter esse comportamento na exponencial dupla precisamos escolher $\tau_1 \gg L/v$ e $\tau_2 \ll L/v$, assim $\langle T \rangle$ se torna ([CAMPOS et al., 2015b](#))

$$\langle T \rangle = \frac{L}{2v} + \frac{\tau_2(1 - w_1)}{w_1} \left(1 - \frac{1 + \frac{Lw_1}{2v\tau_2} e^{-\frac{\sqrt{w_1}x}{v\tau_2}}}{1 + \sqrt{w_1}} \right). \quad (2.143)$$

Podemos considerar $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ e através do método de máximos e mínimos ([STEWART, 2012](#)) encontramos o valor mínimo de $\langle L \rangle$ e os parâmetros ótimos:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{x_0^2(L + \sqrt{8Lx_0})}{L - 8x_0}} \quad (2.144)$$

e

$$w_1^* = \frac{2x_0(L + \sqrt{8Lx_0})}{L(L - 8x_0)}. \quad (2.145)$$

Interessante observar que no regime escasso ($L \rightarrow \infty$) temos $\tau_2^* \rightarrow x_0$, fazendo que a condição τ_2^*/v seja satisfeita nas buscas não-destrutivas com $x_0 \ll L$ e o peso estatístico da primeira exponencial é bem pequeno $w_1 \rightarrow 2x_0/L$. Assim os parâmetros da exponencial dupla estão diretamente relacionados as escalas relevantes do problema (x_0 e L) o que indica que o caminhante deve ter algum conhecimento prévio do espaço de busca para conseguir escolher esses parâmetros.

Considerando $\langle T \rangle = \langle L \rangle$ e utilizando os parâmetros ótimos, temos:

$$\langle L \rangle_{opt}(x_0) = \frac{L}{2} + \frac{L \sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}} (L - 8x_0) \left(1 - \frac{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}\right)}{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)} \left(1 - \frac{\left(\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{(L-8x_0)\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}} + 1\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_0\sqrt{\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}}}{\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}} + 1}\right). \quad (2.146)$$

E assim termos $\eta_{opt} = 1/\langle L \rangle_{opt}$

$$\eta_{opt} = \frac{2}{L \left(\frac{x_0 \left(1 - \frac{2x_0(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L(L-8x_0)}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2(2\sqrt{2}\sqrt{Lx_0}+L)}{L-8x_0}}} + 1 \right)}. \quad (2.147)$$

Expandindo a expressão acima em série em torno de $L = \infty$

$$\eta_{opt} = \frac{1}{2\sqrt{2Lx_0}} + O\left(\frac{1}{L}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad (Exp Dupla). \quad (2.148)$$

3 RESULTADOS EM 1D

Neste capítulo apresentaremos comparações das eficiências da distribuição de lei de potência, exponencial simples e exponencial dupla (JÚNIOR, 2020).

Utilizaremos o método do operador integral com programas feitos em *Octave* para calcular a matriz \mathbf{L} , que foi construída com as expressões para os cálculos de L_{ij} , variando x_{ij} de r_v até $\lambda - r_v$ e para agilizar a montagem da matriz utilizamos o fato de ser uma matriz de toeplitz e suas propriedades com ajuda de funções pré existentes no *Octave*. Após isso ainda com ajuda de funções pré existentes calculamos a inversa da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{L})$, obtendo a matriz \mathbf{K} equivalente à discretização de $(\mathbf{I} - \mathcal{L})^{-1}$. Através das expressões analíticas calculadas obtemos $\langle |l| \rangle$, finalmente conseguimos calcular $\langle L \rangle$ através da multiplicação $\mathbf{K} \cdot \langle |l| \rangle$ e invertendo os elementos de $\langle L \rangle$ temos a eficiência. As desvantagens desse método são a discretização de x e a geração de matrizes muito grandes que além de ocupar bastante memória têm um grande tempo de execução o que dificulta aumentar os valores de L .

Uma das maneiras de contornar essas dificuldades é utilizar, com o auxílio de um programa escrito em *C++*, os cálculos analíticos da seção 2.5, com a vantagem de ocupar pouca memória e os cálculos serem efetuados bem rápidos, entretanto temos como desvantagens os cálculos para distribuição de lei de potência serem aproximados, e da necessidade de aproximações para a distribuição exponencial dupla.

Além disso também utilizamos simulações feitas pelo método de Monte Carlo em *C++*, que infelizmente apresentam longo tempo de execução para valores grandes de L e pela característica de simulações não tem como serem calculadas.

Para facilitar os cálculos fizemos $r_v = 0$ e escolhemos valores numéricos que satisfazem a escassez de alvos, $l_0, r_v \ll L$.

3.1 DISTRIBUIÇÃO DE LEI DE POTÊNCIA

Os resultados da simulação pelo método do operador integral foram comparados com os dados apresentados em (BARTUMEUS et al., 2013). Porém precisamos ressaltar que a PDF utilizada em (BARTUMEUS et al., 2013) é uma lei de potência com tamanho máximo de passo

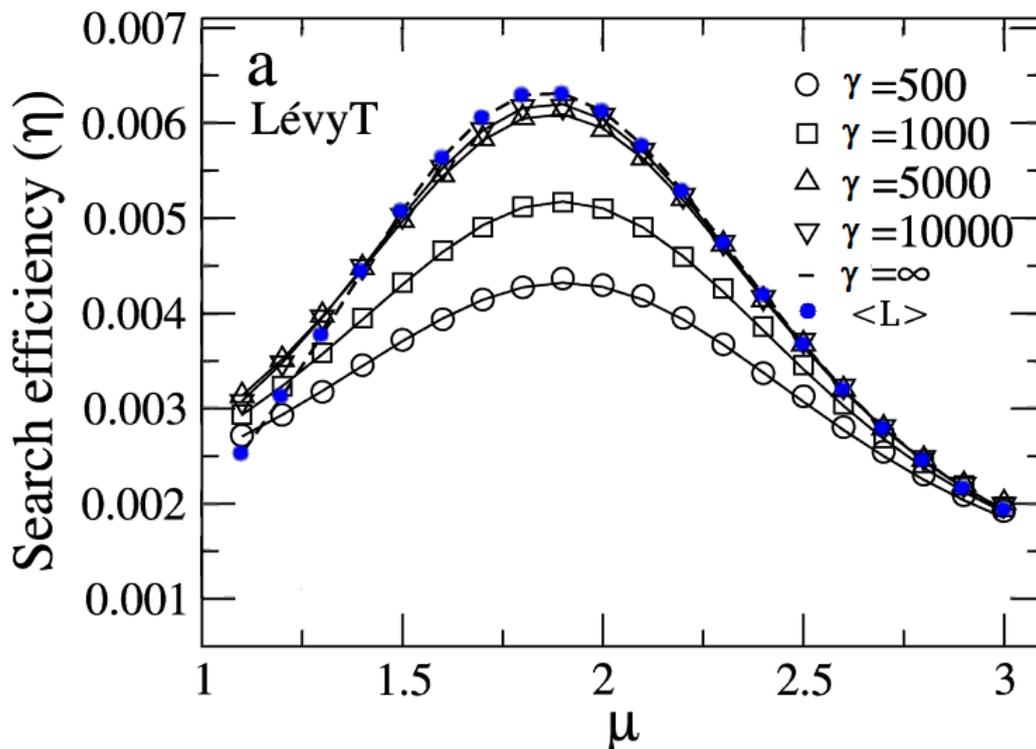
γ , assim

$$P(l) = \frac{(\mu-1)(l_0)^{\mu-1}}{2|l|^\mu} \left[1 - \left(\frac{l_0}{\tau} \right)^{\mu-1} \right]^{-1}, \quad l_0 \leq l \leq \gamma \quad (3.1)$$

$$P(l) = 0, \quad l < l_0 \text{ ou } l > \gamma.$$

O qual volta a Eq. 1.39 quando $\gamma \rightarrow \infty$.

Figura 13 – Eficiência η da busca não-destrutiva em função de μ para distribuição de lei de potência, onde o parâmetro γ é o tamanho máximo do passo, $dx = 0.2, r_v = 1, l_0 = 1, L = 10^3$ e $x_0 = 2$. Os resultados em azul foram obtidos pelo método do operador integral para a distribuição não truncada e adicionados a imagem. Os símbolos pretos são resultados por simulação numérica e as linhas pretas obtidos pelo método do operador integral. Observamos que no limite $\gamma \rightarrow \infty$ os resultados coincidem.

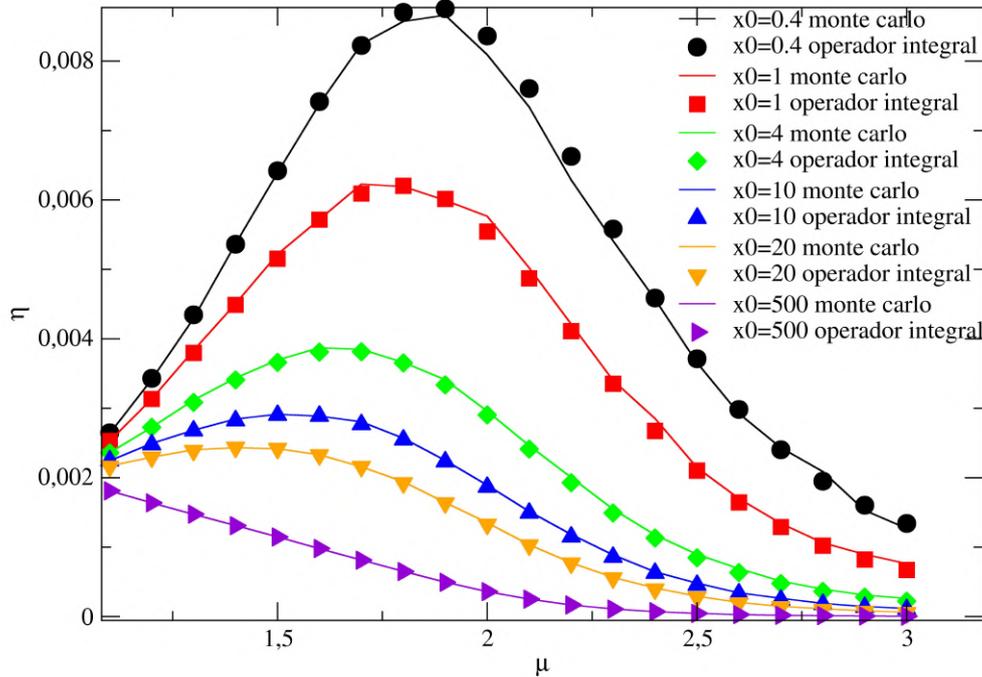


Fonte: Adaptado de: (BARTUMEUS et al., 2013)

Na Fig. 13 os resultados obtidos pelo método do operador integral (linhas pretas) são comparados com os da simulação numérica de Monte Carlo (BARTUMEUS et al., 2013) (símbolos pretos). Verificamos que os resultados do método do operador integral para a distribuição não truncada (símbolos azuis) concordam bastante com os de (BARTUMEUS et al., 2013) para o maior valor de $\gamma = 10000$ ou $\gamma \rightarrow \infty$ e valores de μ relativamente próximos de 2. Importante deixar bem claro que essa figura, com exceção dos símbolos azuis, foi retirada do artigo (BARTUMEUS et al., 2013).

Já na Fig. 14 temos uma comparação de diversos valores de x_0 obtidos pelo método do operador integral (linhas sólidas) e por simulações através do método de Monte Carlo (símbolos). Os demais parâmetros são $l_0 = 0.2, dx = 0.2$, e $L = 10^3$. Interessante observar

Figura 14 – Eficiência η em função de μ para distribuição de lei de potência, com $l_0 = 0.2$, $dx = 0.2$, $L = 10^3$ e o valor de x_0 variando. As linhas sólidas representam simulações pelo método de Monte Carlo e os símbolos foram obtidos pelo método do operador integral.



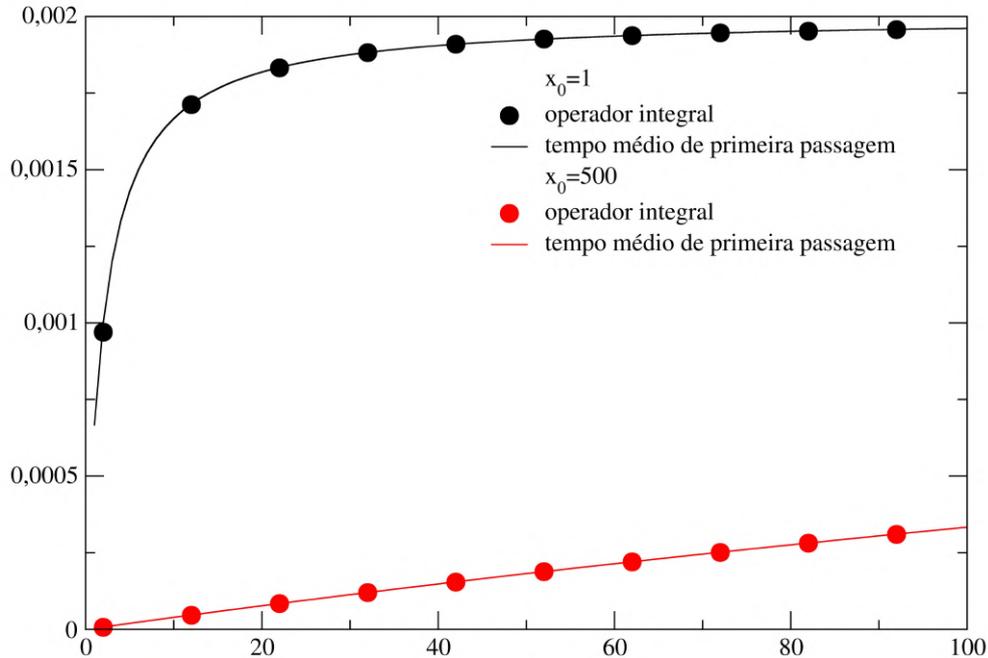
Fonte: O autor (2022).

como a eficiência máxima aumenta e μ se aproxima de 2 para valores menores de x_0 , inclusive o caso $x_0 = 500$, busca destrutiva. Além disso, percebemos valores próximos entre os dois métodos.

3.2 EXPONENCIAL SIMPLES

Na Fig. 15 temos a eficiência da busca, em função do comprimento característico, onde $L = 1000$, $l_0 = 0$ e $dx = 0.2$ para o caso destrutivo $x_0 = 500$ (vermelho) e para o não destrutivo $x_0 = 1$ (preto). Comparamos os resultados obtidos com o método do operador integral utilizando as Eqs. 2.73 e 2.70 em Eq. 2.48 (círculos), com os resultados referentes a curva teórica da Eq. 2.119 (linhas sólidas). Os resultados concordam muito.

Figura 15 – Eficiência da exponencial simples em função de τ onde $l_0 = 0, x_0 = 1, L = 10^3$ e $dx = 0.2$, para o caso não-destrutivo $x_0 = 1$ (preto) e para o destrutivo $x_0 = 500$ (vermelho). Os círculos foram obtidos pelo método do operador integral e as linhas sólidas através do tempo médio de primeira passagem. Vemos uma boa concordância dos resultados.



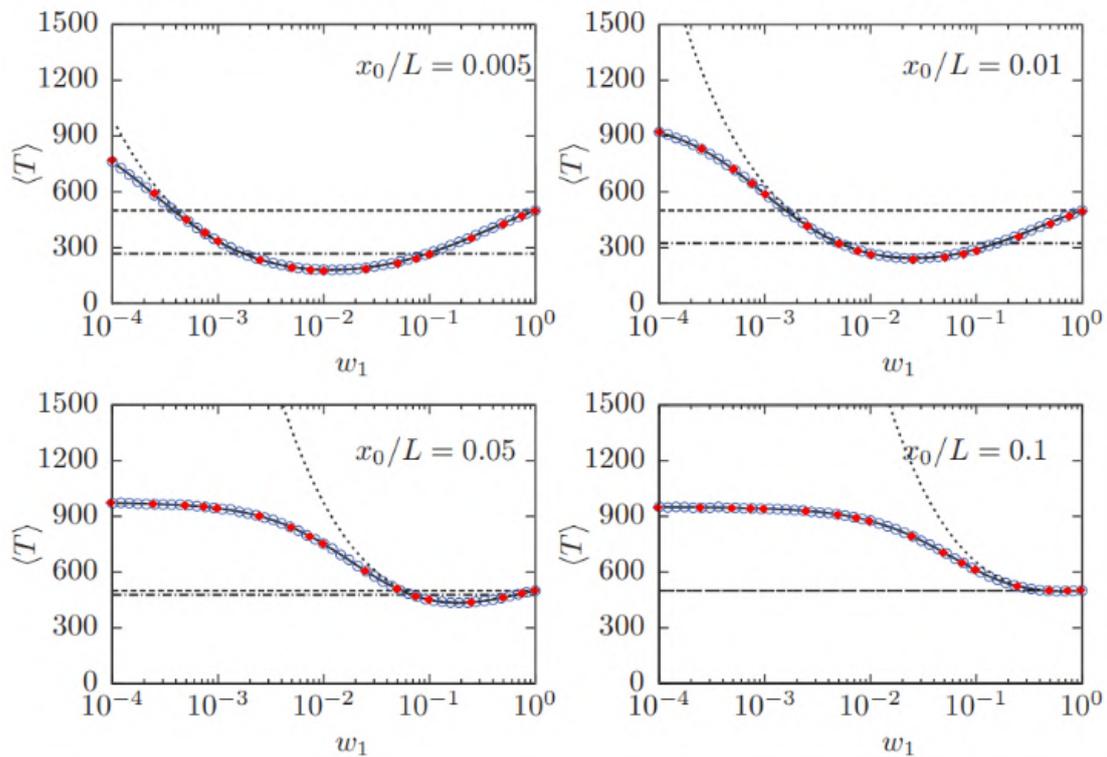
Fonte: O autor (2022).

3.3 EXPONENCIAL DUPLA

Na Fig. 16 utilizamos o método do operador integral com os resultados de Eq. 2.81 e 2.78 em Eq. 2.48 (círculos vermelhos), comparando-os com o resultado exato do método do tempo médio de primeira passagem usando $w_1 = 1 - w_2, \tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$ (linha sólida preta), com a aproximação da Eq. 2.143 usando $\tau_1 \gg L/v, \tau_2/v$ (linha pontilhada preta) e o método de Monte Carlo com medidas sobre 10^6 caminhadas (círculos azuis). Importante destacar que neste caso foi usado o valor do próprio $\langle L \rangle$ ao invés de $\eta = 1/\langle L \rangle$ e que essa figura com exceção dos círculos vermelhos (os quais adicionei a imagem pré-existente) é encontrada no em (CAMPOS et al., 2015b).

Estes resultados são para o regime de busca não-destrutiva $x_0/L \ll 1$, entretanto já se aproximando do caso destrutivo para $x_0/L = 0.1$. Inicialmente observa-se que todos os resultados concordam para o valor mínimo de $\langle L \rangle$ e para os demais valores concordam

Figura 16 – Distância média entre dois encontros consecutivos de alvos, $\langle T \rangle = \langle L \rangle$, em função do peso estatístico da primeira exponencial, w_1 , para a exponencial dupla, com $l_0 = 0$, $dx = 0.2$, $L = 10^3$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e $v = 1$. A posição inicial, x_0 , está indicada em cada gráfico, correspondendo para os menores valores de x_0/L , ao regime de buscas não-destrutivas. Os símbolos vermelhos representam os resultados obtidos pelo método do operador integral, a linha sólida preta é o resultado exato do tempo médio de primeira passagem, a linha pontilhada preta é o tempo médio de primeira passagem com a aproximação da Eq. 2.143 e os círculos azuis representam o método de Monte Carlo com 10^6 caminhadas. Também temos as linhas horizontais traço-pontilhada e a tracejada que são os resultados para lei de potência com $\mu = 2$ e $\mu \rightarrow 1$ respectivamente. Os círculos vermelhos foram adicionados a imagem pré-existente. Uma boa concordância entre os resultados é observada perto do valor mínimo de $\langle L \rangle$.



Fonte: Adaptado de: (CAMPOS et al., 2015b).

também, exceto a linha pontilhada preta.

Além disso observa-se nas duas linhas horizontais, a tracejada que se refere a valores de $\langle L \rangle$ para distribuição de lei de potência com $\mu \rightarrow 1$ (regime balístico) e a linha tracejada pontilhada a qual se refere a valores de $\langle L \rangle$, também obtidos para distribuição de lei de potência, só que dessa vez com $\mu = 2$ (próximo a eficiência máxima na ausência de conhecimento prévio do ambiente e busca não destrutiva). Para as buscas não-destrutivas o mínimo de $\langle L \rangle$ é menor que que a lei de potência para $\mu = 2$ e para $\mu \rightarrow 1$. Esse resultado sugere que a distribuição exponencial dupla pode apresentar maior eficiência que a lei de potência para buscas não-destrutivas unidimensionais. Mais adiante iremos analisar a possibilidade da exponencial dupla apresentar maior eficiência detalhadamente.

3.4 COMPARAÇÃO DAS EFICIÊNCIAS MÁXIMAS DE BUSCAS NÃO DESTRUTIVAS

Nas seções anteriores deste capítulo analisamos isoladamente as distribuições de de potência, exponencial simples e exponencial dupla. Agora nós vamos comparar os resultados entre distribuições diferentes para buscas não-destrutivas.

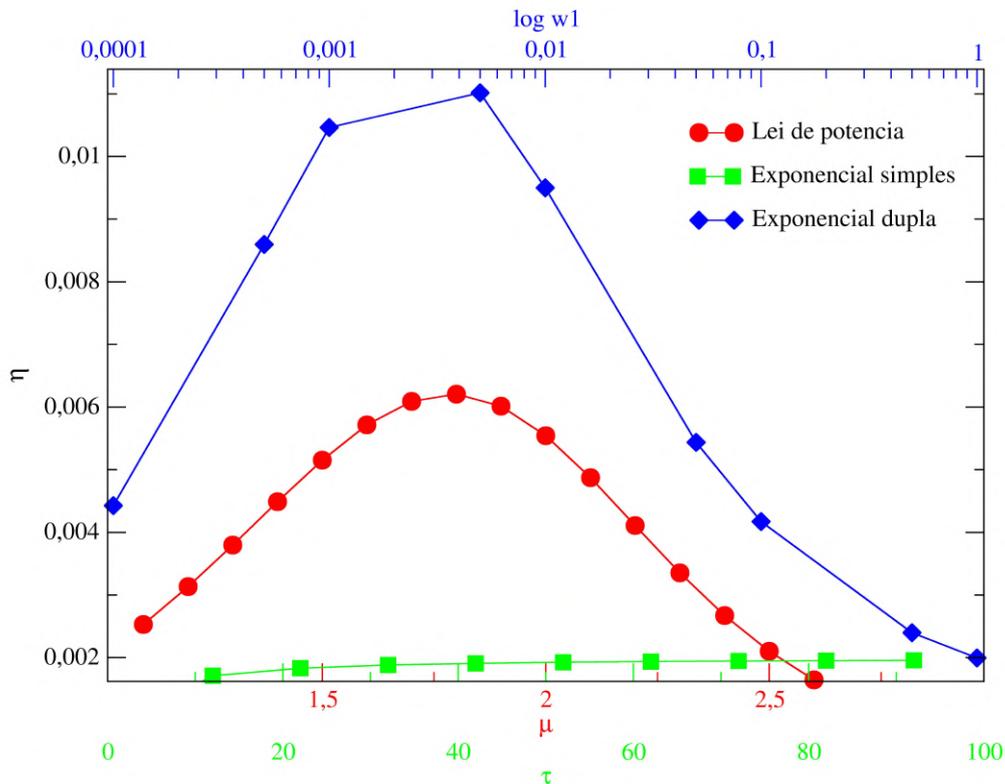
A eficiência das buscas do tipo lei de potência foi estudada em (VISWANATHAN et al., 1999). Observou-se que para o regime não-destrutivo assimétrico, regime de alimentos escasso e ausência de informações prévias do espaço de busca a eficiência máxima da distribuição do tipo lei de potência ocorre para $\mu \approx 2$. Se considerarmos $\mu = 3$, teremos o segundo momento definido e a distribuição governada pelo TCL, dessa forma a busca ganha uma dinâmica difusiva ou normal. Para $\mu \rightarrow 1$ temos um regime balístico.

As caminhadas com $\mu \approx 2$ tem muitos passos pequenos se alternando com uns poucos, mas relevantes passos longos. Os passos pequenos favorecem o encontro dos alvos próximos e os longos auxiliam o encontro dos alvos mais distantes. Isso representa um meio termo entre o caso balístico ($\mu \rightarrow 1$) e o caso difusivo ($\mu = 3$), sendo nesse caso uma dinâmica superdifusiva que continuará pelo menos até as escalas de tempo ou distâncias totais percorridas da ordem do livre caminho médio λ da distribuição dos sítios alvos, pois em algum momento ocorrerá a passagem para o regime normal ou difusivo devido truncagem dos longos passos pelo encontro dos alvos.

Agora o que ocorre para FDP nas quais os tamanhos de passos tenham mais de uma escala de comprimento característica, de maneira que uma escala facilite encontrar os alvos mais próximos e outra os alvos mais distantes? Esse é o caso da distribuição exponencial dupla com os parâmetros $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$. Será que ela apresentará uma eficiência maior que a distribuição de lei de potência para as buscas não-destrutivas? E o quanto influencia conhecer previamente o espaço de busca? Iremos tentar responder essas questões para o caso unidimensional nessa sessão.

A Fig. 17 mostra a eficiência em função de μ para lei de potência (vermelho), em função do $\log w_1$ para exponencial dupla (azul) com parâmetros $\tau_1 = 10^6$, $\tau_2 = 2$ e em função de τ para exponencial simples (verde). Os demais parâmetros são $L = 10^3$, $x_0 = 2$, $l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$. Já era esperado que a exponencial simples apresentasse a menor eficiência ótima de todas as distribuições. Porém a exponencial dupla com parâmetros $\tau_1 = 10^6$ e $\tau_2 = 2$ apresentou para $w_1 \approx 0.005$ uma eficiência maior do que a lei de potência para $\mu \approx 1.9$, sendo esse um resultado inesperado, confirmando as evidências vistas em (CAMPOS et al.,

Figura 17 – Eficiência, para buscas não-destrutivas, para lei de potência em função de μ (vermelho), para exponencial simples em função de τ (verde) e para exponencial dupla com $\tau_1 = 10^6$ e $\tau_2 = 2$ em função de $\log w_1$ (azul). Os resultados foram obtidos através do método do operador integral, com $L = 10^3$, $x_0 = 2$, $l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$. Nota-se maior eficiência da exponencial dupla, seguida pela distribuição de lei de potência e pela exponencial simples.



Fonte: O autor (2022).

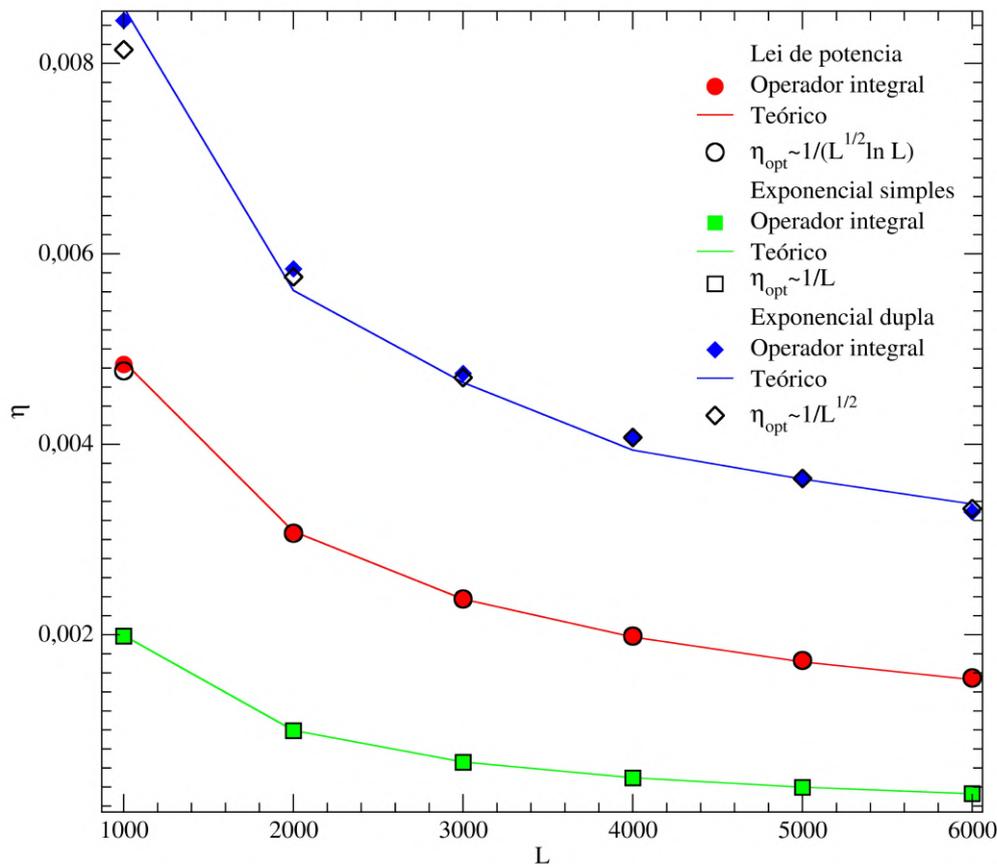
2015b) e os resultados encontrados em (JÚNIOR, 2020).

Será que isso acontece para outros valores de L . Para verificarmos isso, na Fig. 18 comparamos as eficiências ótimas em função de L , para buscas não-destrutivas, lei de potência (vermelho), da exponencial simples (verde) e exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$. Os resultados foram obtidos pelo método do operador integral (símbolos coloridos), que são comparados com os resultados teóricos (linhas coloridas) e com as equações aproximadas (símbolos pretos). Os parâmetros utilizados são $x_0 = 2$, $l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$. Continuamos verificando a maior eficiência da exponencial dupla para cada valor de L .

Os resultados teóricos da Fig. 18 foram obtidos através das seguintes equações (FERREIRA et al., 2021; BULDYREV et al., 2001a):

$$\eta = 1 / \langle L \rangle = \frac{2}{L + x_0(L - x_0)/\tau}, \quad (3.2)$$

Figura 18 – Eficiência ótima, para buscas não-destrutivas, em função de L para distribuição de lei de potência (vermelho), exponencial simples (verde) e exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^3 L$ e $\tau_2 = x_0$. Resultados obtidos pelo método do operador integral (símbolos coloridos), resultados teóricos (linhas coloridas) e equações aproximadas (símbolos pretos) com $x_0 = 2, l_0 = 0.2$ e $dx = 0.2$ (JÚNIOR, 2020). A exponencial dupla continua com maior eficiência.



Fonte: O autor (2022).

para exponencial simples, usando o $\langle L \rangle$ da Eq. 2.119,

$$\eta = 1/\langle L \rangle \frac{2\tau_2\sqrt{w_1}}{Lw_1[\tau_2 + x_0(1 - \sqrt{w_1})] + 2\tau_2(1 - \sqrt{w_1})(\tau_2 + x_0)}, \quad (3.3)$$

para exponencial dupla, usando $\langle L \rangle = \langle T \rangle$ da Eq. 2.143 e

$$\eta = 1/\langle L \rangle = \frac{(1 - \alpha)}{2L} \left(\frac{L}{x_0}\right)^{\alpha/2} \left[\frac{1}{\alpha B(\alpha/2, \alpha/2)} - \frac{1}{B(\alpha/2, 1 - \alpha/2)} \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\alpha-1} \right]^{-1}, \quad (3.4)$$

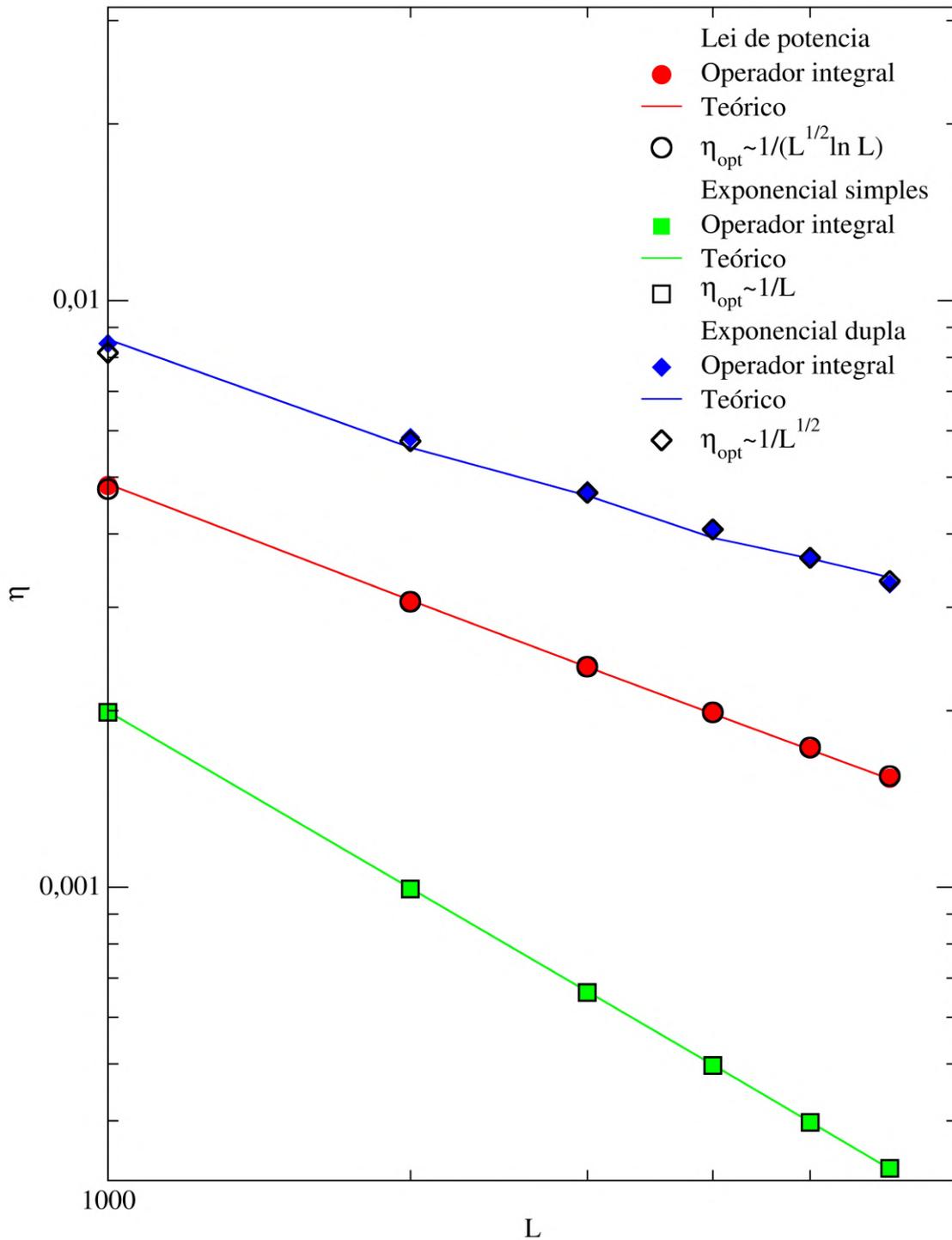
para lei de potência, usando $\langle L \rangle$ da Eq. 2.94, com o valor de α :

$$\alpha = 1 + \frac{2}{\ln(x_0/L)}. \quad (3.5)$$

Já os resultados aproximados foram obtidos através das Eqs. 2.120, 2.148 e 2.99 para exponencial simples, exponencial dupla e lei de potência respectivamente.

E para verificarmos melhor o comportamento das eficiências ótimas colocamos o gráfico da Fig. 18 em escala log-log na Fig. 19. Observa-se que além de ter a menor a eficiência ótima

Figura 19 – Gráfico da Fig. 18 em escala log-log. Nota-se que a eficiência ótima da exponencial dupla cai mais lentamente com L do que nas outras distribuições.



Fonte: O autor (2022).

a exponencial simples diminui mais rapidamente, seguido da distribuição de lei de potência e finalmente da exponencial dupla. Isso sugere que a exponencial dupla continua a apresentar vantagens à medida que os valores de L aumentam.

Além disso para termos uma ideia de quanto a eficiência máxima da distribuição exponencial

dupla é maior que a da distribuição de lei de potência calculamos a razão entre as duas utilizando o método de Monte Carlo e os parâmetros $x_0 = 1.1, L = 2000, l_0 = 0.2$ e para exponencial dupla $\tau_1 = 10^3 L, \tau_2 = x_0$ encontramos uma razão de aproximadamente 1.77. Já se alteramos o valor de L para 5000 essa razão se torna aproximadamente 1.95. Assim confirmando o que vemos no gráfico da Fig. 19 que para maiores valores de L a vantagem da exponencial dupla aumenta.

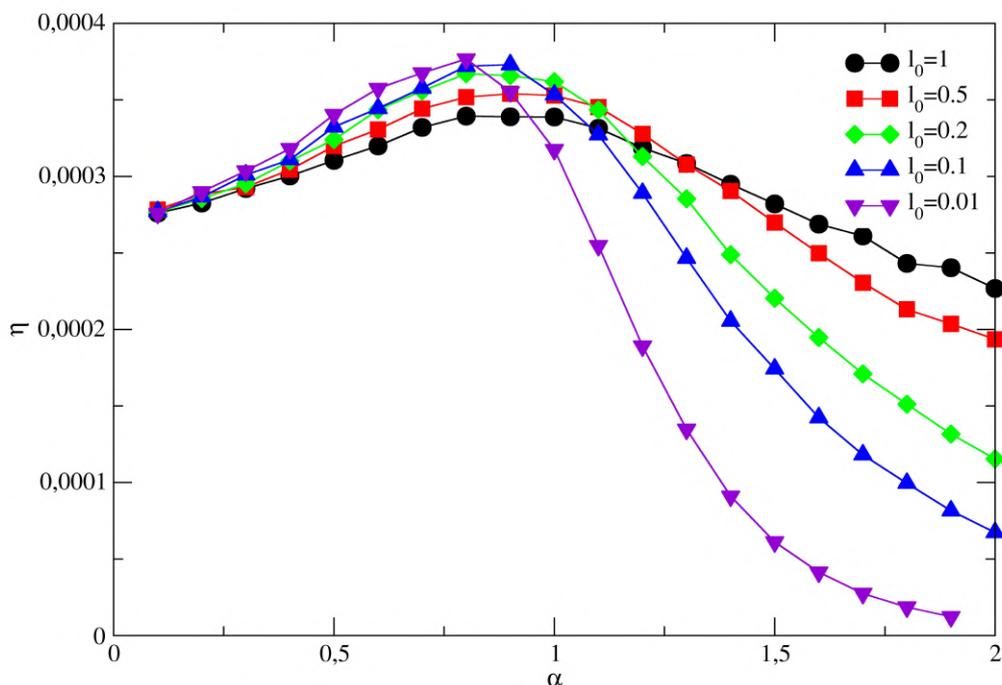
Os resultados apresentados neste capítulo mostraram a exponencial dupla apresentando uma eficiência maior do que a distribuição de lei de potência, porém para obter esse resultado precisamos garantir uma escolha adequada dos parâmetros da exponencial dupla com τ_1 e $\tau_2 \ll L$. Já a distribuição de lei de potência não precisa de informações do espaço de busca para obter sua eficiência máxima. E a exponencial simples, apresenta uma eficiência menor do que a das outras distribuições.

4 RESULTADOS EM 2D

No capítulo anterior vimos a comparação das eficiências das distribuições em uma dimensão e neste capítulo estudaremos o caso bidimensional. Uma das diferenças do caso bidimensional é que não existe método do operador integral, nem expressões analíticas para os cálculos de $\langle L \rangle$ e conseqüentemente da eficiência. Por isso utilizaremos o método de Monte Carlo, com auxílio um programa de computador feito em *C++*, para efetuar os cálculos. O código utilizado é uma adaptação do programa desenvolvido por S. V. Buldyrev para lei de potência, de modo a levar em conta também os casos das distribuições de tamanhos de passos do tipo exponencial simples, exponencial dupla e Lévy.

4.1 DISTRIBUIÇÃO DE LEI DE POTÊNCIA

Figura 20 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5$, $x_0 = 1.4$, $r_v = 1$ e variando os valores de l_0 .

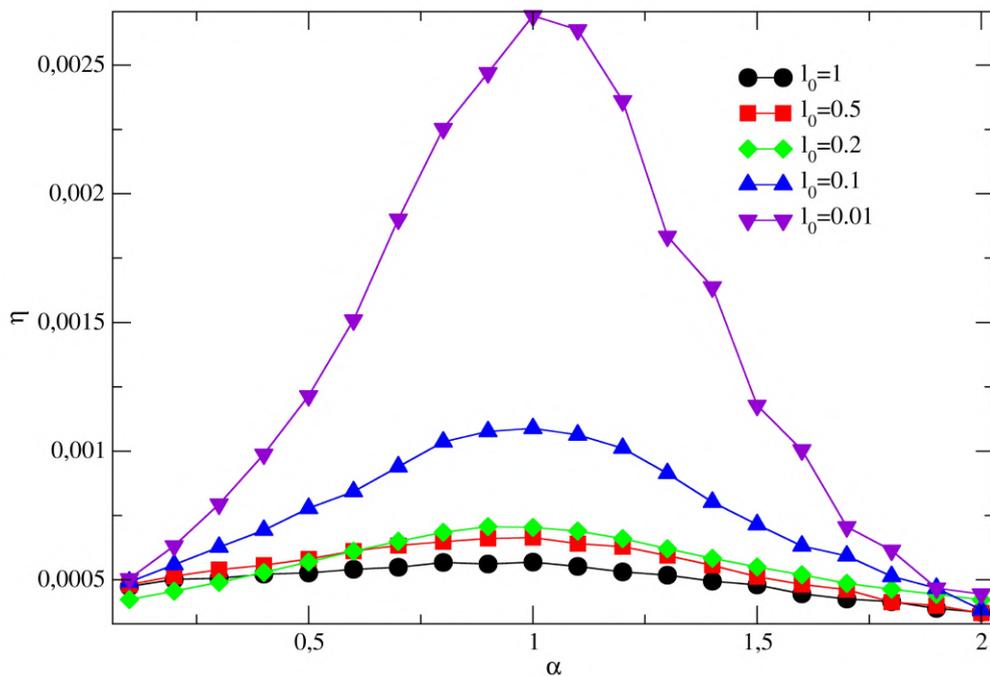


Fonte: O autor (2022).

Inicialmente na Fig. [20](#) vamos avaliar se a eficiência (η) em função de α muda para

diferentes valores do tamanho mínimo do passo (l_0). Os parâmetros são $L = 10^5$, $x_0 = 1.4$, $r_v = 1$ e variando os valores de l_0 . Interessante observar que quanto menor o tamanho mínimo do passo (l_0) maior a eficiência, também se observa que para esses valores menores de l_0 a eficiência máxima é alcançada para um menor valor de α , embora em todos os casos os valores se mantenham próximos de 1, e decaem mais rapidamente.

Figura 21 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5$, $x_0 = 1.0001$, $r_v = 1$ e variando os valores de l_0 .

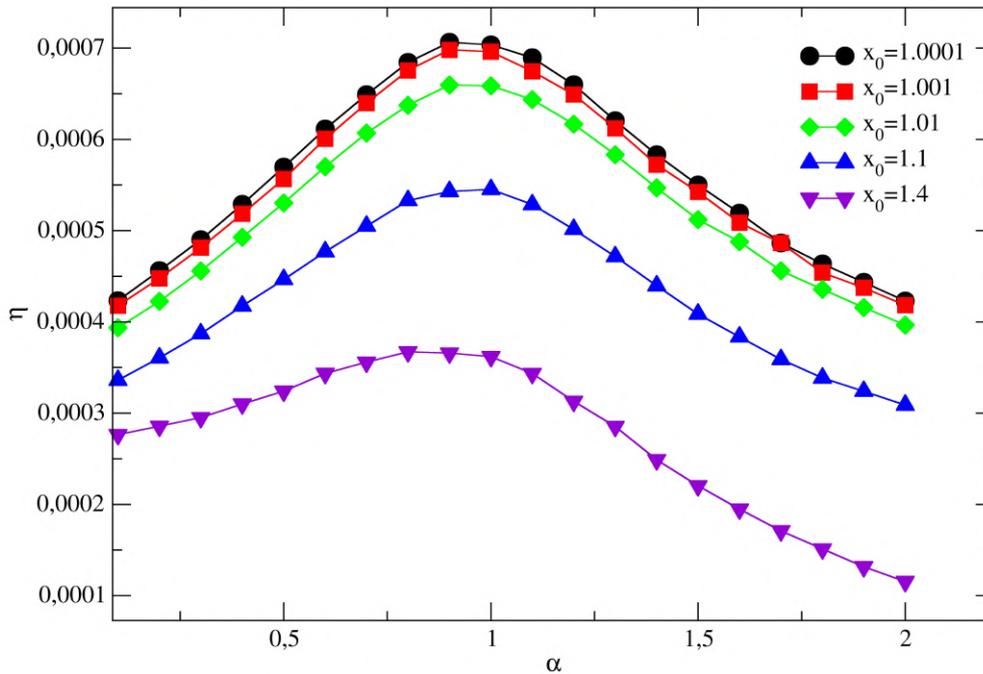


Fonte: O autor (2022).

Agora variamos o valor da posição inicial do caminhante (x_0) para 1.0001 e verificamos como a busca se comporta para diferentes valores do tamanho mínimo do passo (l_0), na Fig. 21, mantemos os parâmetros $L = 10^5$, $r_v = 1$ e continuamos variando l_0 . Notamos que quanto maior o valor de l_0 menor a eficiência máxima, porém nesse caso elas ocorrem para valores de α mais próximos entre si, com $\alpha \approx 1$.

Além disso na Fig. 22, analisamos o que ocorre quando consideramos o tamanho mínimo do passo fixo, nesse caso $l_0 = 0.2$, e variamos a posição inicial (x_0), continuamos com os parâmetros $L = 10^5$ e $r_v = 1$. Observamos que $\alpha \approx 1$ e quanto maior o valor de x_0 menor a eficiência máxima.

Figura 22 – η em função de α para distribuição de lei de potência com $L = 10^5$, $l_0 = 0.2$, $r_v = 1$ e variando os valores de x_0 .



Fonte: O autor (2022).

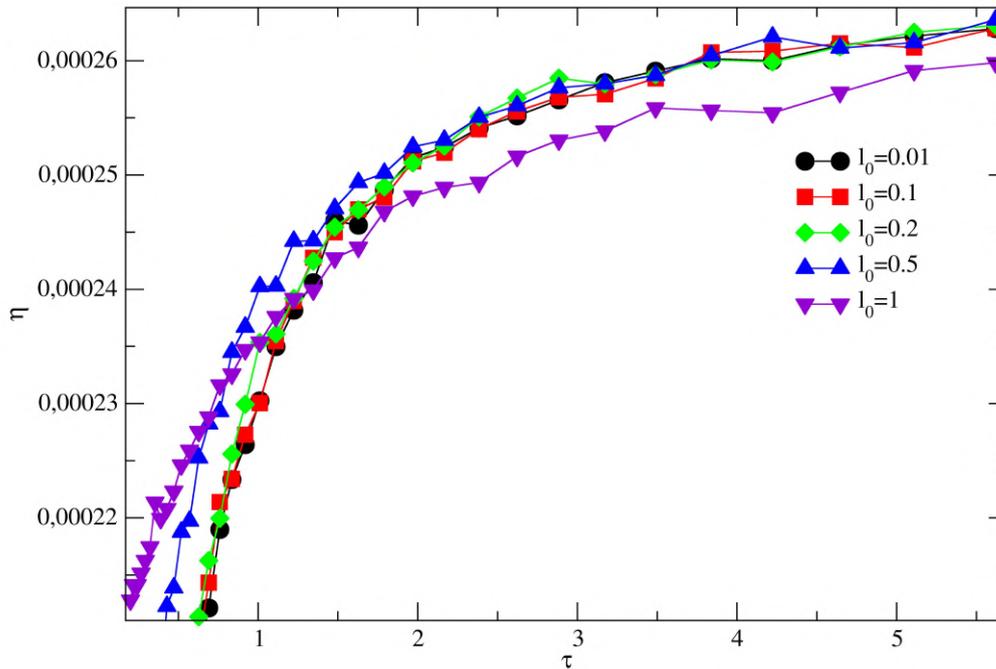
Ao observar esses gráficos vemos que quanto mais próximo do alvo na posição inicial (x_0) e quanto menor o tamanho mínimo do passo a caminhada vai apresentar uma eficiência máxima maior.

4.2 EXPONENCIAL SIMPLES

Continuando nossas análises agora vemos na Fig. 23 o que ocorre com o gráfico a eficiência (η) em função de τ para diferentes valores do tamanho mínimo do passo para exponencial simples com $L = 10^5$, $r_v = 1$ e posição inicial do caminhante $x_0 = 1.4$. Notamos que as eficiências máximas ocorrem para valores próximos com exceção de $l_0 = 1$ que sua eficiência máxima fica um pouco abaixo.

Agora alteramos o valor da posição inicial do caminhante (x_0) para 1.0001 na Fig. 24 e verificamos como a eficiência (η) em função de τ se comporta para diferentes valores do tamanho mínimo dos passos, com os parâmetros $L = 10^5$ e $r_v = 1$. Nesse caso observamos

Figura 23 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5$, $x_0 = 1.4$, $r_v = 1$ e variando os valores de l_0 .



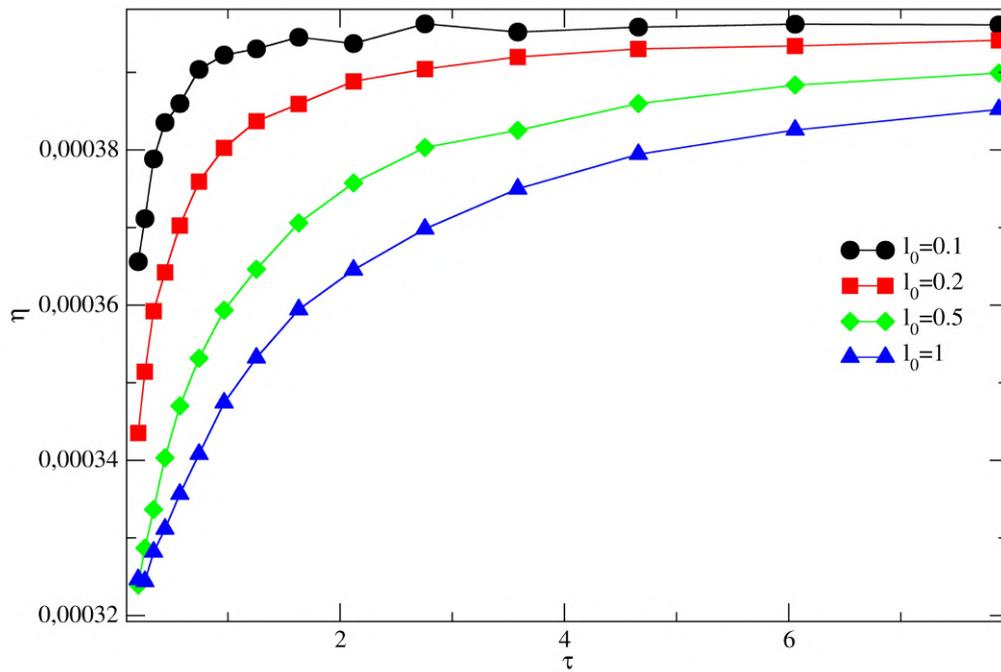
Fonte: O autor (2022).

uma eficiência máxima um pouco maior para menores valores de l_0 .

E para verificar como o gráfico de η em função de τ para exponencial simples se comporta com valores diferentes da posição inicial do caminhante (x_0), na Fig. 25, mantemos $L = 10^5$, $r_v = 1$ e o tamanho mínimo dos passos $l_0 = 0.2$. Observamos que a eficiência máxima é maior para valores menores de x_0 .

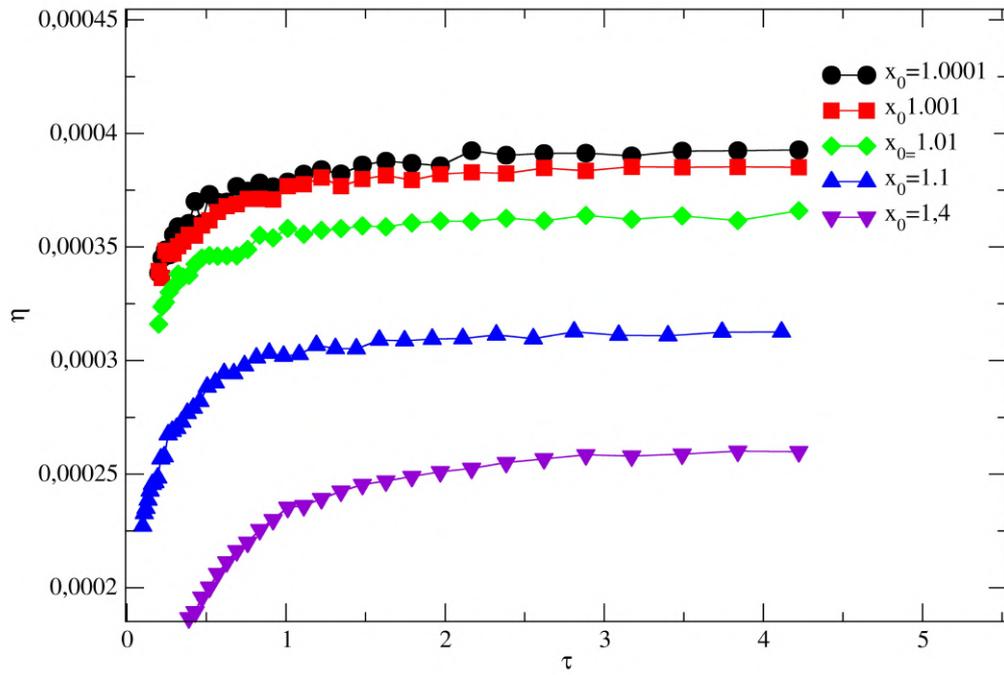
De maneira similar a distribuição de lei de potência observamos que a exponencial simples geralmente apresenta maior eficiência para tamanhos do passo mínimo (l_0) menores e para caminhantes como posição inicial (x_0) mais próximas do alvo. Entretanto ao atingir a eficiência máxima, o valor da eficiência apresenta muito pouca variação, sendo quase constante para os próximos valores de τ , diferente da distribuição de lei de potência na qual após atingir a eficiência máxima os valores de η diminuem para os próximos valores de α .

Figura 24 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5$, $x_0 = 1.0001$, $r_v = 1$ e variando os valores de l_0 .



Fonte: O autor (2022).

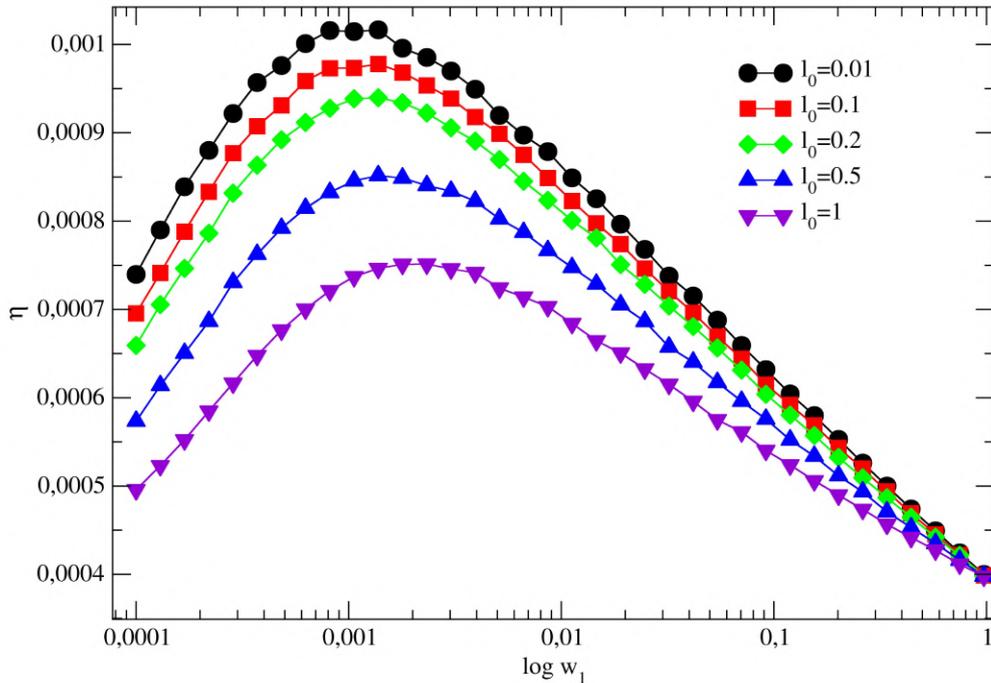
Figura 25 – η em função de τ para distribuição exponencial simples com $L = 10^5$, $l_0 = 0.$, $r_v = 1$ e variando os valores de x_0 .



Fonte: O autor (2022).

4.3 EXPONENCIAL DUPLA

Figura 26 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5$, $x_0 = 1.0001$, $r_v = 1$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e variando os valores de l_0 .



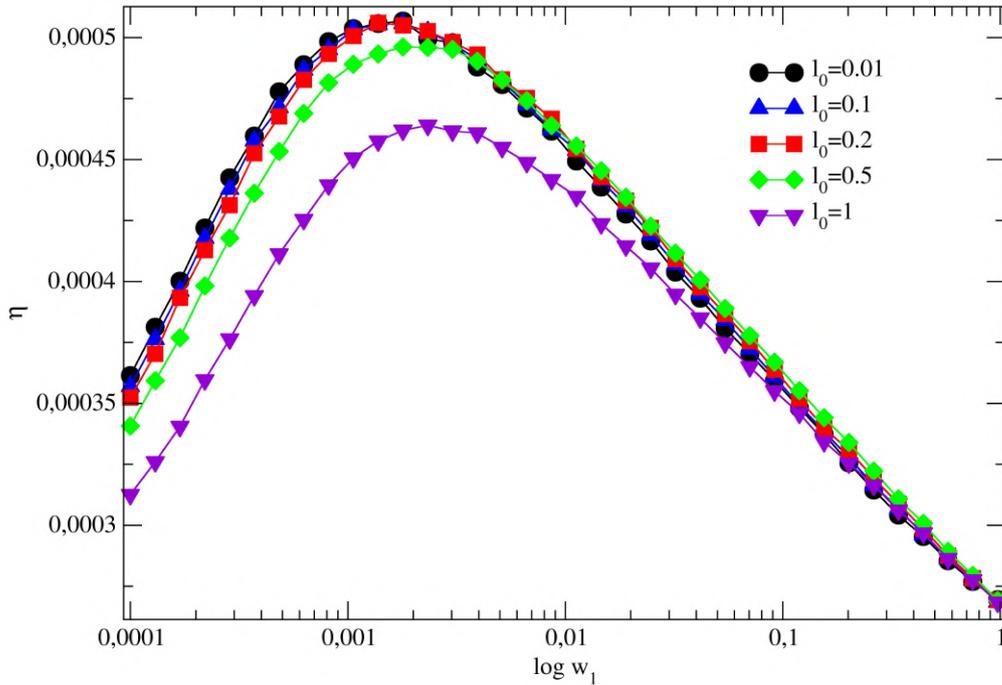
Fonte: O autor (2022).

Para a distribuição exponencial dupla inicialmente verificamos como a eficiência (η) em função de $\log w_1$ se comporta para tamanhos do passo mínimo diferentes, na Fig. 26. Com os parâmetros $L = 10^5$, $r_v = 1$, $\tau_1 = L^3$, $\tau_2 = x_0$ e a posição inicial do caminhante $x_0 = 1.0001$. Verificamos que quanto maior o valor do tamanho do passo mínimo l_0 menor a eficiência máxima.

Depois, para verificarmos se existe alguma diferença caso o caminhante comece de uma posição inicial mais afastada do alvo, alteramos a posição inicial (x_0) para 1.4 e mantemos os demais valores iguais na Fig. 27. Observamos resultados parecidos com a figura anterior, onde a medida de o tamanho do passo mínimo (l_0) aumenta a eficiência máxima diminui.

E para comparar como valores diferentes da posição inicial do caminhante (x_0) interferem na eficiência máxima (η) em função de $\log w_1$, na Fig. 28, fazemos o gráfico com $L = 10^5$, $r_v = 1$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e $l_0 = 0.2$. Nota-se a maior eficiência máxima para posição inicial do

Figura 27 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5$, $x_0 = 1.4$, $r_v = 1$, $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$ e variando os valores de l_0 .

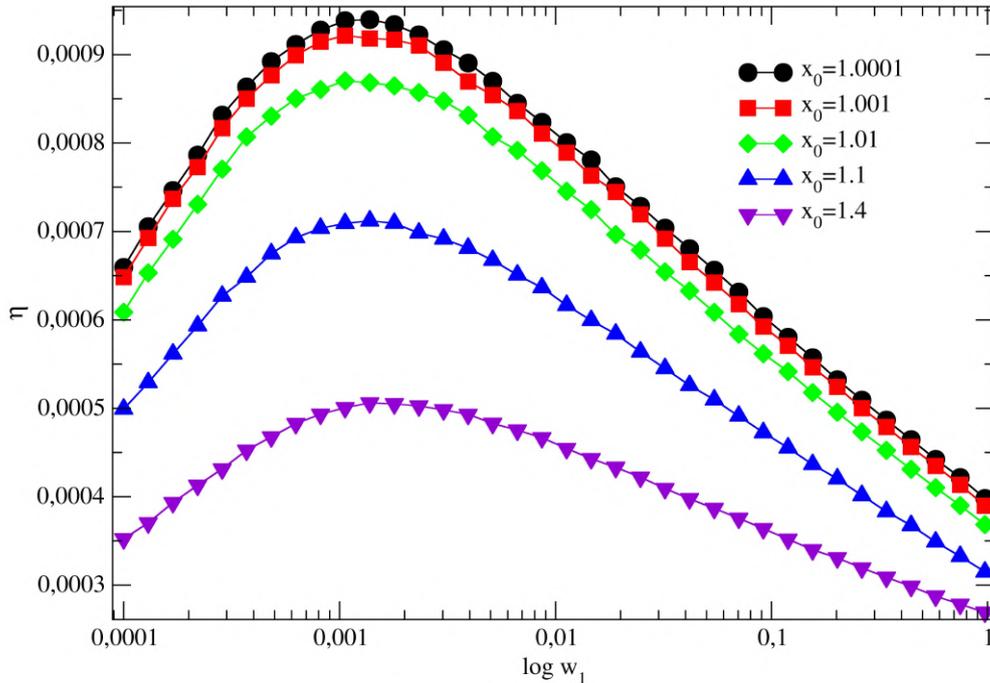


Fonte: O autor (2022).

caminhante mais próxima do alvo, ou seja, menor x_0 .

Observamos de maneira análoga as duas distribuições anteriores que para posições iniciais do caminhante mais próximas do alvo (menor x_0) e quanto menor o tamanho mínimo do passo (l_0) maior a eficiência máxima. E de maneira semelhante a distribuição de lei de potência após encontrar o valor máximo da eficiência, ela diminui à medida que $\log w_1$ aumenta.

Figura 28 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla com $L = 10^5$, $l_0 = 0.2$, $r_v = 1$, $\tau_1 = 10^3$, $\tau_2 = x_0$, e variando os valores de x_0 .



Fonte: O autor (2022).

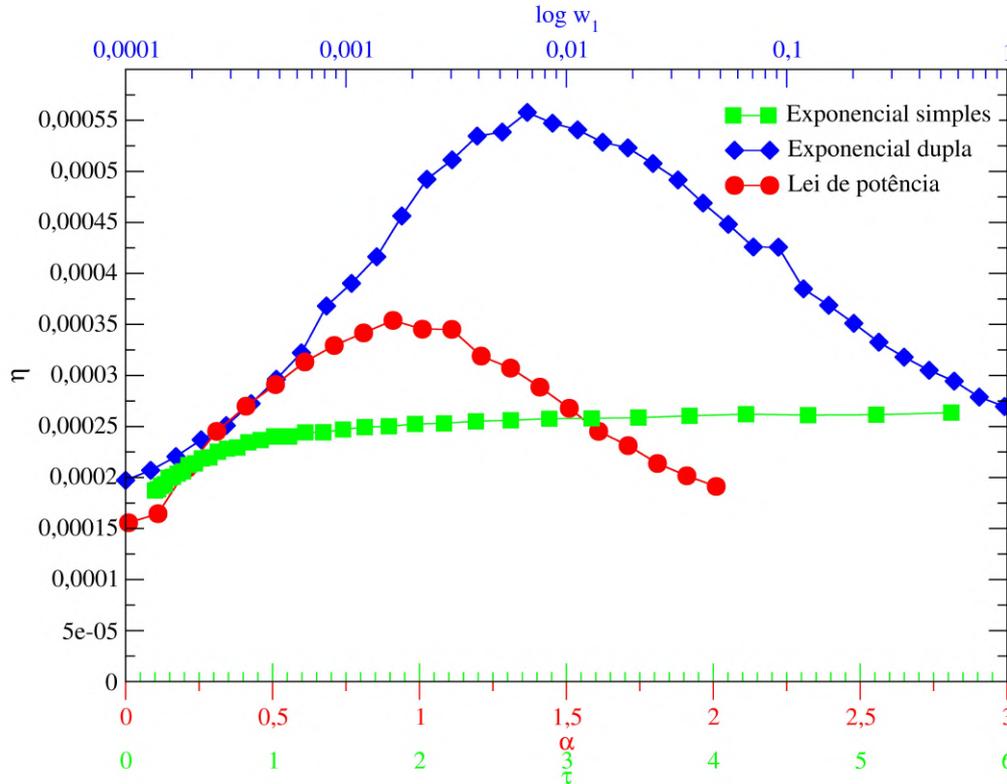
4.4 COMPARAÇÃO DAS EFICIÊNCIAS MÁXIMAS DE BUSCAS NÃO DESTRUTIVAS EM 2-D

Após analisar isoladamente as distribuições de lei de potência, exponencial simples e exponencial dupla, iremos comparar os resultados dessas três distribuições.

De forma análoga ao caso unidimensional a eficiência das buscas tipo lei de potência no regime não-destrutivo assimétrico, com poucos alimentos e sem informações prévias do ambiente a eficiência máxima ocorre para $\mu \approx 2$ no caso bidimensional (VISWANATHAN et al., 1999). E do mesmo modo iremos investigar o que ocorre para FDP com mais de uma escala de comprimento característica com um dos parâmetros favorecendo o encontro de alvos próximos e o outro favorecendo alvos distantes. Vamos trabalhar com a distribuição exponencial dupla usando os parâmetros $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$.

A Fig. 29 mostra a eficiência (η) em função de α para distribuição de lei de potência (vermelho), em função de $\log w_1$ para exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^L$, $\tau_2 = x_0$ e

Figura 29 – η em função de $\log w_1$ para distribuição exponencial dupla (azul) com $\tau_1 = 10^3 L$, $\tau_2 = x_0$; função de α para distribuição de lei de potência (vermelho) e função de τ para exponencial simples (verde). Os outros parâmetros são $L = 10^5$, $l_0 = 0.5$, $r_v = 1$ e $x_0 = 1.4$.



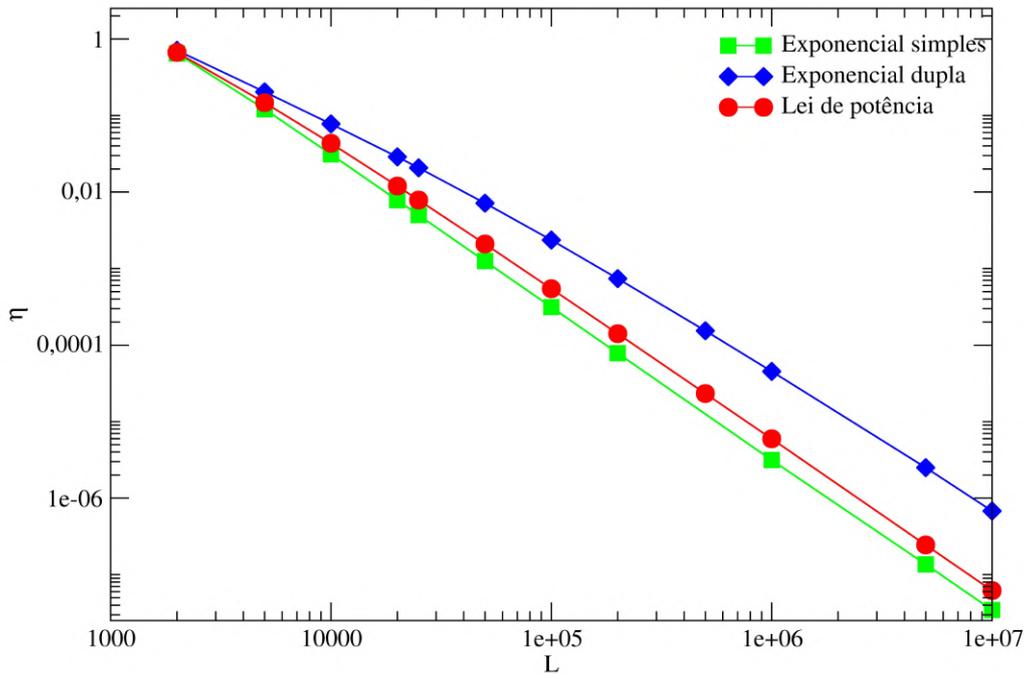
Fonte: O autor (2022).

em função de τ para exponencial simples (verde). Os outros parâmetros são $L = 10^5$, $l_0 = 0.5$, $r_v = 1$ e $x_0 = 1.4$. Como esperado a distribuição com menor eficiência é a exponencial simples, e a exponencial dupla, de modo análogo ao caso unidimensional, apresenta maior a maior eficiência.

Agora vamos verificar se esse comportamento ocorre para outros valores de L . Na Fig. 30 temos o gráfico log-log da eficiência máxima em função de L . Os parâmetros em comum são $x_0 = 1.1$, $r_v = 1$ e $l_0 = 0.2$, os valores de $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$ para exponencial dupla foram escolhidos a dedo para obter a maior eficiência possível. Continuamos observando o mesmo resultado com a exponencial dupla apresentando a maior eficiência ótima, a exponencial simples a menor e a distribuição de lei de potência com uma eficiência ótima intermediária. Além disso observamos que para maiores valores de L as vantagens da exponencial dupla se sobressaem.

No capítulo anterior verificamos que podemos aproximar os resultados das eficiências ótimas através das Eq. 2.120, 2.148 e 2.99, será que conseguimos alguns fits semelhante para o modelo bidimensional? Para verificarmos isso na Fig. 31 calculamos os fits para o caso bi-

Figura 30 – gráfico log-log de η em função de L para distribuição exponencial dupla (azul), distribuição de lei de potência (vermelho) e exponencial simples (verde), os parâmetros em comum são $l_0 = 0.2$, $r_v = 1$ e $x_0 = 1.1$.



Fonte: O autor (2022).

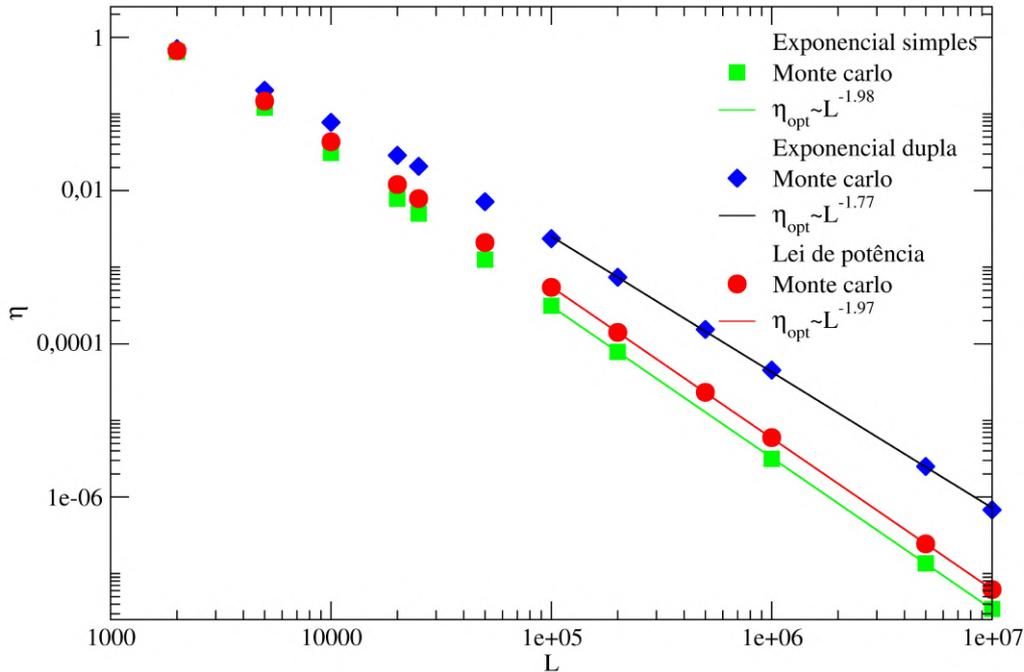
dimensional, trabalhando para valores de $L = 10^5$ até $L = 10^7$ e encontramos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \eta_{opt} &\approx L^{-1.97}, && \text{para lei de potência;} \\
 \eta_{opt} &\approx L^{-1.98}, && \text{para exponencial simples e} \\
 \eta_{opt} &\approx L^{1.77}, && \text{para exponencial dupla.}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Interessante observar que os fits para a distribuição exponencial simples e para a lei de potência apresentam valores tão próximos que não existe confiança em afirmar que eles são distintos.

Além disso calculamos a razão entre as eficiências máximas da exponencial dupla e da lei de potência, utilizando os parâmetros $x_0 = 1.1$, $L = 2000$, $l_0 = 0.2$ e escolhendo os parâmetros da forma que $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$ encontramos aproximadamente 1.06. Mudando o valor de L para 5000 e mantendo os demais valores inalterados encontramos a razão de aproximadamente 1.38, o que são comparáveis com os valores encontrados no caso unidimensional, 1.77 e 1.95

Figura 31 – Fits para os valores da Fig. 30 os fits foram feitos para valores a partir de $L = 10^5$ até $L = 10^7$.



Fonte: O autor (2022).

respectivamente.

Outro detalhe importante de se observar é que para os resultados bidimensionais os valores das eficiências máximas das três distribuições, estão mais próximos entre si, principalmente das eficiências máximas das distribuições de lei de potência e exponencial simples. E quanto maior o valor de x_0 menor a diferença entre as eficiências máximas. Ainda não sabemos o motivo que isso ocorre, porém uma das das hipóteses para que isso aconteça seria que no caso bidimensional existe a possibilidade do caminhante passar próximo ao alvo sem encontrá-lo, o que não pode acontecer no caso unidimensional.

Neste capítulo vimos que a exponencial dupla (com $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$) apresenta a maior eficiência de todas no caso bidimensional, de forma semelhante ao caso unidimensional. Porém para encontrar esse resultado é necessária uma escolha minuciosa dos parâmetros da exponencial dupla, o que indica conhecimento prévio das informações do espaço de busca. Já na distribuição de lei de potência não existe a necessidade de informações do espaço de busca para obter a eficiência ótima.

5 CONCLUSÃO E PESPPECTIVAS

Nesse trabalho estudamos a eficiência de buscas aleatórias para o caso bidimensional em regime não destrutivo e distância L entre os alvos. Dessa maneira comparamos as eficiências ótimas para as distribuições de Lévy, exponencial simples e exponencial dupla, no caso em que $L \rightarrow \infty$ (regime escasso). Antes de fazermos a análise em duas dimensões, revisamos o caso unidimensional com a ajuda de alguns métodos conhecidos na literatura (CAMPOS et al., 2015b), (BULDYREV et al., 2001a), (BARTUMEUS et al., 2013) e utilizamos simulações computacionais, com o método do operador integral e o método de Monte Carlo, para o caso unidimensional.

No caso bidimensional verificamos a eficiência ótima com a ajuda de simulações computacionais feitas pelo método de Monte Carlo e verificamos que de maneira análoga ao caso de uma dimensão, a eficiência ótima em função de L , para o caso $L \gg x_0$, nessas três distribuições. A distribuição exponencial dupla com $\tau_1 \gg L$ e $\tau_2 \ll L$ apresenta a maior eficiência. Entretanto as três distribuições apresentam eficiências máximas com valores mais próximos entre si no caso de duas dimensões em relação ao caso de uma dimensão, principalmente as distribuições exponencial simples e de lei de potência as quais apresentam eficiência máxima muito mais próximas. Também calculamos os fits para essas eficiências máximas, no caso bidimensional, encontrando valores de $\eta_{opt} \approx L^{-1.98}$ para distribuição exponencial simples, $\eta_{opt} \approx L^{-1.97}$ para lei de potência e $\eta_{opt} \approx L^{-1.77}$ para exponencial dupla. Esses valores são diferentes dos encontrados na literatura para os casos em uma dimensão.

Porém, para que a exponencial dupla apresente maior eficiência é necessária a escolha dos parâmetros ideais, o que é improvável de acontecer quando o buscador não possui nenhum conhecimento prévio do espaço de busca. Assim, na ausência completa de informações a respeito do espaço de busca as buscas de Lévy permanecem como as com maior eficiência e por isso em casos extremos, com escassez de alimentos, os animais buscam comida através de distribuições de tamanho de passos de Lévy. Observamos que isso é válido nos casos unidimensional e bidimensional, de acordo com a *Lévy flight foraging hypothesis*. Embora no caso bidimensional a distribuição exponencial simples e a lei de potência apresentem valores muito próximos para os seus fits, dessa forma não existe confiança em afirmar que eles são distintos.

Como perspectivas para trabalhos posteriores, gostaríamos de investigar o motivo pelo qual as eficiências máximas estão mais próximas no caso bidimensional em relação ao caso unidi-

mensional. Também desejamos aplicar as distribuições hiperexponenciais em sistemas reais, comparando as eficiências ótimas com os resultados previamente analisados pela distribuição de lei de potência. E além disso, gostaríamos de abordar a eficiência da busca não destrutiva em três dimensões.

REFERÊNCIAS

- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure*, v. 17, p. 21–88, 1900. Reprinted in P. H. Cootner (ed), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge, Mass. MIT Press.
- BARNARD, C. Behavioural ecology: An evolutionary approach, 2nd edition, j.r. krebs, n.b. davies (eds.). blackwell scientific publications, oxford (1984), xi. *Animal Behaviour*, v. 33, 1985.
- BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G.; LUZ, M. Stochastic optimal foraging theory. In: _____. [S.l.: s.n.], 2013. v. 2071, p. 3–32. ISBN 978-3-642-35496-0.
- BELLHOUSE, D. A history of the central limit theorem: From classical to modern probability theory. by hans fischer. dordrecht, heidelberg, london, new york (springer). 2010. isbn 978-0-387-87856-0. 418 pp. *Historia Mathematica*, 11 2012.
- BENHAMOU, S. How many animals really do the lévy walk? *Ecology*, Ecological Society of America, v. 88, n. 8, p. 1962–1969, 2007. ISSN 00129658, 19399170. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/27651327>.
- BULDYREV, S.; GITTERMAN, M.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A.; da Luz, M.; RAPOSO, E.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 302, n. 1, p. 148–161, 2001. ISSN 0378-4371. Proc. Int. Workshop on Frontiers in the Physics of Complex Systems. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437101004617>.
- BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A. Y.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E.; VISWANATHAN, G. M. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 64, n. 4, sep 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physreve.64.041108>.
- BULDYREV, S. V.; RAPOSO, E. P.; BARTUMEUS, F.; HAVLIN, S.; RUSCH, F. R.; LUZ, M. G. E. da; VISWANATHAN, G. M. Comment on “inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$ ”. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 048901, Jan 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.048901>.
- CALVO, I.; CARRERAS, B. A.; SÁNCHEZ, R.; MILLIGEN, B. P. van. Continuous time random walks in periodic systems: fluid limit and fractional differential equations on the circle. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 40, n. 45, p. 13511–13522, oct 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/45/002>.
- CAMPOS, D.; ABAD, E.; MÉNDEZ, V.; YUSTE, S. B.; LINDENBERG, K. Optimal search strategies of space-time coupled random walkers with finite lifetimes. *Physical Review E*, v. 91, 05 2015.
- CAMPOS, D.; BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P.; MÉNDEZ, V. m. c. First-passage times in multiscale random walks: The impact of movement scales on search efficiency. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 92, p. 052702, Nov 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.052702>. Acesso em: 12 abr. 2022.

DELKHOSH, M. Introduction of derivatives and integrals of fractional order and its applications. *Applied Mathematics and Physics*, v. 1, p. 103–119, 11 2013.

EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. In: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. [S.l.: s.n.], 1905.

FERREIRA, J.; RAPOSO, E. P.; ARAÚJO, H. A.; LUZ, M. G. E. da; VISWANATHAN, G. M.; BARTUMEUS, F.; CAMPOS, D. Landscape-scaled strategies can outperform lévy random searches. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 103, p. 022105, Feb 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.103.022105>

FOSS, S.; KORSHUNOV, D.; ZACHARY, S. Heavy-tailed and long-tailed distributions. In: _____. *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*. New York, NY: Springer New York, 2013. p. 7–42. ISBN 978-1-4614-7101-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7101-1_2

HUGHES, B. D.; SHLESINGER, M. F.; MONTROLL, E. W. Random walks with self-similar clusters. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 78, n. 6, p. 3287–3291, 1981. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.78.6.3287>. Acesso em: 12 abr. 2022.

JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed.. ed. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321. Disponível em: <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>

JAGER, M. de; WEISSING, F. J.; HERMAN, P. M. J.; NOLET, B. A.; KOPPEL, J. van de. Lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity. *Science*, v. 332, n. 6037, p. 1551–1553, 2011. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1201187>. Acesso em: 12 abr. 2022.

JAGER, M. de; WEISSING, F. J.; HERMAN, P. M. J.; NOLET, B. A.; KOPPEL, J. van de. Response to comment on "lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity". *Science*, v. 335, n. 6071, p. 918–918, 2012. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1215903>. Acesso em: 12 abr. 2022.

JANSEN, V. A. A.; MASHANOVA, A.; PETROVSKII, S. Comment on "lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity". *Science*, v. 335, n. 6071, p. 918–918, 2012. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1215747>. Acesso em: 12 abr. 2022.

JÚNIOR, J. E. F. *Análise Comparativa da Eficiência de Buscas Aleatórias Unidimensionais*. 97 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

KLAFTER, M. F. S. J.; ZUMOFEN, G. Beyond brownian motion. *Physics Today*, v. 49, n. 2, p. 33–39, 1996. Disponível em: https://acoustique.ec-lyon.fr/chaos/Klafter_PhysicsToday96.pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

LEVERNIER, N.; TEXTOR, J.; BÉNICHOU, O.; VOITURIEZ, R. Inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 080601, Feb 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.080601>

LEVERNIER, N.; TEXTOR, J.; BÉNICHOU, O.; VOITURIEZ, R. Reply to “comment on ‘inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$ ’”. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 048902, Jan 2021. Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.048902>>.

LUZ, M. G. E. da; GROSBERG, A.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. The random search problem: trends and perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 43, p. 430301, oct 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/42/43/430301>>.

MACARTHUR, R. H.; PIANKA, E. R. On optimal use of a patchy environment.

The American Naturalist, v. 100, n. 916, p. 603–609, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/282454>>.

MANTEGNA, R.; STANLEY, H. Mantegna, r. n. stanley, h. e. stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: The truncated lévy flight. *phys. rev. lett.* 73, 2946–2949. *Physical review letters*, v. 73, p. 2946–2949, 12 1994.

METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, v. 339, n. 1, p. 1–77, 2000. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300000703>>. Acesso em: 12 abr. 2022.

METZLER, R.; NONNENMACHER, T. F. Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional fokker–planck equations, and physical motivation. *Chemical Physics*, v. 284, n. 1, p. 67–90, 2002. ISSN 0301-0104. Strange Kinetics. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301010402005372>>. Acesso em: 12 abr. 2022.

MÉNDEZ, V.; CAMPOS, D.; BARTUMEUS, F. *Stochastic Foundations in Movement Ecology: Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches*. [S.l.: s.n.], 2014. ISBN 978-3-642-39009-8.

NOLAN, J. Stable distribution: Models for heavy-tailed data. 01 2018. Chapter 1. Disponível em: <<https://edspace.american.edu/jpnolan/stable/>>. Acesso em: 12 abr. 2022.

PATLAK, C. S. Random walk with persistence and external bias. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 15, p. 311–338, 1953.

PENG, C.-K.; MIETUS, J.; HAUSDORFF, J. M.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 70, p. 1343–1346, Mar 1993.

PERRIN, C. L. Numerical recipes in fortran 90: the art of scientific computing, second edition, volume 2 (3 cd-roms and manual) by william h. press, saul a. teukolsky, william t. vetterling, and brian p. flannery. cambridge university press: new york, 1996. *Journal of the American Chemical Society*, American Chemical Society, v. 119, n. 37, p. 8748–8748, Sep 1997. ISSN 0002-7863. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/ja965936f>>.

PIROLI, P.; CARD, S. Information foraging in information access environments. In: *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems*. USA: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1995. (CHI '95), p. 51–58. ISBN 0201847051. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/223904.223911>>. Acesso em: 12 abr. 2022.

PIROLI, P.; CARD, S. Information foraging. *Psychological Review*, v. 106, n. 4, p. 643–675, October 1999. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.106.4.643>. Acesso em: 12 abr. 2022.

RAPOSO, E. P.; BULDYREV, S.; LUZ, M.; SANTOS, M.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. Dynamical robustness of lévy search strategies. *Physical review letters*, v. 91, p. 240601, 12 2003.

RAPOSO, E. P.; OLIVEIRA, S.; NEMIROVSKY, A.; COUTINHO-FILHO, M. Random walks: A pedestrian approach to polymers, critical phenomena, and field theory. *American Journal of Physics - AMER J PHYS*, v. 59, p. 633–645, 07 1991.

REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics; 1st ed.* London: Arnold, 1980. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/101976>.

REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics.* Tokyo: McGraw Hill, 1965.

REYNOLDS, A. M. Mussels realize weierstrassian lévy walks as composite correlated random walks. *Scientific Reports*, v. 4, n. 1, p. 4409, Mar 2014. ISSN 2045-2322. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep04409>. Acesso em: 12 ab. 2022.

RHODES, T.; TURVEY, M. T. Human memory retrieval as lévy foraging. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 385, n. 1, p. 255–260, 2007. ISSN 0378-4371. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437107007509>. Acesso em: 12 abr. 2022.

SCHMITZ, O.; BECKERMAN, A.; O'BRIEN, K. Behaviorally mediated trophic cascades: Effects of predation risk on food web interactions. *Ecology*, v. 78, 07 1997.

STEWART, J. *Calculus : early transcendentals.* Belmont, Cal.: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012. ISBN 0538497904 9780538497909 0840058853 9780840058850 0538498714 9780538498715 0538498870 9780538498876 0840048254 9780840048257.

TAMARKIN, J. D. On integrable solutions of abel's integral equation. *Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, v. 31, n. 2, p. 219–229, 1930. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1968092>.

VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. Optimizing the success of random searches. *Nature*, v. 401, n. 6756, p. 911–914, Oct 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/44831>. Acesso em: 12 abr. 2022.

VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.

V.P.L.S., R. B. F. H. M. . R. A. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, Taylor Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14786442808674769>.

WEISS, G.; WEISS, G. *Aspects and Applications of the Random Walk*. North-Holland, 1994. (International Congress Series). ISBN 9780444816061. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=QRnvAAAAMAAJ>.

WERNER, E. E.; HALL, D. J. Optimal foraging and the size selection of prey by the bluegill sunfish (*lepomis macrochirus*). *Ecology*, Ecological Society of America, v. 55, n. 5, p. 1042–1052, 1974. ISSN 00129658, 19399170. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1940354>.

WOSNIACK, M. E.; SANTOS, M. C.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. E. da. Robustness of optimal random searches in fragmented environments. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 91, p. 052119, May 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.052119>.

ZASLAVSKY, G. Fractional kinetic equation for hamiltonian chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 76, n. 1, p. 110–122, 1994. ISSN 0167-2789. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278994902542>. Acesso em: 12 abr. 2022.