UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA- CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SYLVIA FERREIRA DA SILVA

Subvariedades completas em espaços produto Riemannianos $M^n(c) \times \mathbb{R}$

Recife
2023

SYLVIA FERREIRA DA SILVA

Subvariedades completas em espaços produto Riemannianos $M^n(c) \times \mathbb{R}$

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Profº. Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586s Silva, Sylvia Ferreira da
Subvariedades completas em espaços produto Riemannianos $Mn\ (c) \times$ R / Sylvia Ferreira da Silva. – 2023.
94 f.: il., fig, tab.

Orientador: Fábio Reis dos Santos.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Subvariedades. I. Santos, Fábio Reis dos (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-61

SYLVIA FERREIRA DA SILVA

SUBVARIEDADES COMPLETAS EM ESPAÇOS PRODUTO RIEMANNIANOS M^N(C)×R

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 16/02/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Junior (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (Examinador Externo)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Drª. Keti Tenenblat (Examinador Externo)
Universidade Federal de Brasília

Prof. Dr. Luis Jose Alías Linaress (Examinador Externo)
Universidade de Múrcia/Espanha

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

OBSERVAÇÃO:
A defesa em epígrafe foi realizada parcialmente, por videoconferência, envolvendo a Banca Examinadora e o discente, através de recursos de videoconferência, que possibilitaram realizar a discussão acadêmica sobre o objeto de estudo, com som e imagem. A defesa assim ocorreu em virtude da das Resoluções 05/2021 do CEPE e 04/2022 do CONSUNI.

A(os) meus pais Manoel Honorato da Silva (In Memorian) e Severina Ferreira de Lima, por acreditarem na educação como agente transformador das nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus e a todos e todas que vieram antes de mim e são parte do que sou, e que sei que me acompanham e guiam em todos os passos e projetos. Em especial, ao meu pai (In Memorian), que não pôde ver em vida as minhas conquistas, mas cujo amor eu sinto a todo momento, por que este é imortal.

À minha mãe: a pessoa mais importante na minha existência. Através dela eu recebi a minha vida e por ela sou cuidada desde então com todo amor, carinho e apostando todas as fichas na minha trajetória. Dela eu recebi os maiores e melhores ensinamentos da vida, e principalmente o de que o caminho para uma vida melhor e próspera seria aquele moldado por meio da educação. Mesmo sendo privada de ter, ela fez o possível e impossível para dar às suas filhas a oportunidade de estudar, no que considero ser um enorme gesto de amor. Então posso dizer sem medo algum de errar que este título, muito antes de ser meu, é dela e para ela: Severina Ferreira de Lima.

Ao meu orientador, Profº. Dr. Fábio Reis dos Santos, por aceitar o desafio de me orientar como sua primeira aluna de doutorado, fornecendo sempre todo o suporte necessário. Além disso, também pela imensa generosidade com a qual esse processo todo de orientação foi conduzido e pelo incrível exemplo de profissionalismo, humanidade e excelência que eu levarei para todos os projetos que a vida me apresentar.

Ao meu companheiro e então marido Paulo, por todo amor, carinho, cuidado e torcida. Por acreditar em mim em todos os momentos, mesmo quando eu dizia que não tinha chances de dar certo (e sempre deu!). Também à minha irmã Suelane e meu cunhado Rafael Suzuki por toda ajuda, pelo carinho e presença em todos os momentos importantes.

Como disse Emicida, *"O amigo é um mago do meigo abraço; É mega afago, abrigo em laço. Oásis nas piores fases quando some o chão e as bases; Quando tudo vai pro espaço... Quem tem um amigo tem tudo."*. E eu tenho e tive a benção de encontrar no meu caminho muitas mãos acolhedoras e muitos abraços nos momentos difíceis. O que eu sou é, de fato, construído por estes laços... Por tudo isso, aos meus amigos queridos:

- Aos que a vida e a jornada na academia me presentearam e que compartilharam comigo momentos muito bonitos e muito difíceis também: Breno Souza, Castelo Branco, Douglas Queiroz, Eliada Andrade, Emmely Trindade, João Alexandre, Lorena Augusto, Michele Gonzaga, Nivaldo Gomes e Yasmim Menezes;

- Aos amigos de profissão: Anete Soares, Ania Lussón, Joás Rocha, João Gondim, Reinel Beltran, Serginei Liberato e Tereza Melo.

- Também preciso falar dos amigos que cruzaram meu caminho através da luta que acompanha nossa existência. A mesma que muitas vezes nos causa dor pela sua natureza, mas que nos aquilombou por intermédio do Grupo de Negres na Matemática, um dos mais sinceros e profundos que já tive a oportunidade de fazer parte. À vocês: Luciana Elias (UFJ), Manuela Souza (UFBA), Miriam Silva (UFPB), Marcela Ferrari (UEM), Priscila Pereira (UCI), Nivaldo Grulha (USP) e Rogério Monteiro (USP).

Aos meus professores, cujo exemplo me trouxe até aqui mas também pela fé de que eu poderia trilhar um caminho próspero. Em especial: Esrilton França, Fabiana Faria, Gabriela Wanderley (UFPB), Maité Kulesza (UFRPE) e Pedro Hinojosa (UFPB). E a todos os professores do programa de pós-graduação em Matemática da UFPE por toda contribuição durante o processo de doutoramento.

Agradeço profundamente à banca: Profº. Dr. Eraldo Lima (UFPB), Profº. Dr. Jorge H. Lira (UFC), Profª. Dra. Keti Tenenblat (UnB), Profº. Dr. Luis Alías (UMU-Espanha) e Profº. Dr. Márcio Batista (UFAL), por todas as importantes considerações a respeito do trabalho e, também, por destacarem a importância de termos mais mulheres na pesquisa.

Por fim, agradeço a Profª. Alma L. Albujer (UCO-Espanha) e ao Profº. Antonio F. de Souza (UFPE) pelos trabalhos em colaboração que estão presentes nesta tese.

RESUMO

A proposta desta tese é estudar subvariedades imersas em produtos Riemannianos do tipo $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Para isto desenvolvemos uma fórmula do tipo Simons para subvariedades com segunda curvatura média constante e possuindo vetor curvatura média normalizado paralelo imersas nestes espaços e, tendo como hipóteses restrições adequadas no quadrado da norma do tensor de umbilicidade e da função ângulo, concluímos que estas devem ser totalmente umbílicas em um slice. Em seguida, considerando subvariedades Weingarten linear fechadas, obtivemos uma desigualdade integral que nos permitiu classificar aquelas que atingem a igualdade como as totalmente umbílicas ou uma certa família de subvariedades paralelas contidas em um slice. Por fim, consideramos subvariedades que são pontos críticos do funcional curvatura média total e, para o caso particular das superfícies que satisfazem a equação de Euler-Lagrange deste funcional, obtviemos uma desigualdade integral que relaciona o tensor de umbilicidade da superfície com sua característica de Euler. Como consequência, caracterizamos aquelas que atingem a igualdade obtendo como um dos resultados, uma classe de superfícies mínimas.

Palavras-chaves: espaços produto riemanniano; subvariedades; desigualdade integral; imersões isométricas; weingarten linear; fórmula do tipo Simons.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study submanifolds immersed in the Riemannian products $M^n(c) \times \mathbb{R}$. For this, we developed a Simons type formula for submanifolds with constant second mean curvature and having a normalized parallel mean curvature vector immersed in these spaces and, having as restrictions imposed on the square of the norm of the umbilicity tensor and the angle function, we conclude that these must be totally umbilical in a slice. Next, considering closed Weingarten linear submanifolds, we obtain for these an integral inequality that allowed us to classify those that achieve equality as totally umbilical or a certain family of parallel submanifolds contained on a slice. Finally, we consider submanifolds that are critical points of the total mean curvature functional and, for the particular case of surfaces that satisfy Euler-Lagrange's equations for this functional, we obtain an integral inequality that relates the umbilicity tensor of the surface with its Euler's characteristic. Consequently, we characterize those who achieve equality obtaining, as one of the results, a class of minimal surfaces.

Keywords: riemannian product spaces; submanifolds; integral inequality; isometric immersions; linear weingarten; Simons-type formula.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considerando a teoria das imersões isométricas, o problema de caracterizar subvariedades com uma de suas duas primeiras (ou ambas) curvaturas constantes constitui um tema clássico de pesquisa. Nessa direção, podemos destacar os teoremas de rigidez de Alexandrov, Liebmann e Hilbert sobre superfícies com a primeira ou a segunda curvatura constante como os resultados mais celebrados da teoria de subvariedades no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, os quais foram posteriormente generalizados para as formas espaciais Riemannianas (ALEDO; ALÍAS; ROMERO, 2005; MONTIEL; ROS, 1991). Ainda no contexto de superfícies, não podemos deixar de destacar o teorema de Hopf (HOPF, 1983) sobre a caracterização de esferas totalmente umbilícas como as únicas esferas topológicas de curvatura média constante imersas em uma forma espacial tridimensional de curvatura seccional constante.

Passando para o caso em que a dimensão e a codimensão da subvariedade são arbitrárias, ao final dos anos 60 Simons em seu célebre trabalho (SIMONS, 1968) introduziu uma importante ferramenta para o estudo da geometria de subvariedades mínimas imersas na esfera Euclidiana unitária. Mais precisamente, Simons calculou o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental A de uma subvariedade mínima fechada (isto é, compacta sem bordo) Σ^m da esfera unitária $\mathbb{S}^n$, $n > m$, e como aplicação obteve a seguinte desigualdade integral

$$\int_\Sigma \Big(|A|^2 - c(n,m)\Big)\, |A|^2 d\Sigma \geq 0, \quad \text{onde} \quad c(n,m) = \frac{m(n-m)}{2(n-m)-1}, \tag{1.1}$$

a qual nos concede um gap natural em relação ao tamanho do quadrado da norma da segunda forma fundamental de tal subvariedade. Por meio da desigualdade (1.1), Simons provou que se Σ^m é uma subvariedade mínima fechada na esfera unitária tal que o quadrado da norma da sua segunda forma fundamental satisfaz $0 \leq |A|^2 \leq c(n,m)$, então ou $|A|^2 = 0$ e Σ^m é uma subvariedade totalmente geodésica ou $|A|^2 = c(n,m)$. Esta última igualdade foi estudada por (CHERN; DO CARMO; KOBAYASHI, 1970) que concluiram que neste caso Σ^m é necessariamente um toro de Clifford ou uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$. Vale ressaltar que o caso da codimensão 1 também foi estudado simultânea e independentemente por (LAWSON, 1969). Atualmente a desigualdade (1.1) é conhecida como a *desigualdade integral de Simons*. É importante enfatizarmos que a ferramenta introduzida por Simons não só se mostrou poderosa para o estudo de subvariedades mínimas e fechadas na esfera, mas também para o estudo de subvariedades completas com vetor curvatura média paralelo, bem como uma ferramenta de investigação em outros espaços ambientes, como podemos ver em (NOMIZU; SMYTH, 1969; ERBACHER, 1972; SANTOS, 1994; ALENCAR; DO CARMO, 2004; ARAUJO; TENENBLAT, 2009).

Por outro lado, nas últimas décadas tem ocorrido um crescente interesse no estudo de subvariedades imersas em espaços produtos Riemannianos. Em particular podemos destacar a variedade produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$ dotada da métrica produto padrão, onde $M^n(c)$ é uma forma espacial Riemanniana n-dimensional com curvatura seccional constante $c=-1,1$ e $\mathbb{R}$ a reta real. Esta classe de espaços é na verdade uma extensão natural do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Concernente a estes espaços destacamos os estudos de superfícies devidos à (ROSENBERG, 2002; ABRESH; ROSENBERG, 2004; MEEKS, 2004) como sendo os principais pontos de partida neste tópico. De fato, em (ABRESH; ROSENBERG, 2004), os autores definiram uma diferencial quadrática holomorfa para superfícies com curvatura média constante (abreviadamente cmc) e, generalizaram o teorema de Hopf para esses espaços mostrando que uma esfera cmc imersa deve ser uma esfera de rotação.

Com base na digressão feita acima, uma questão interessante é a caracterização de subvariedades em espaços produtos do tipo $M^n(c)\times\mathbb{R}$ usando fórmulas do tipo Simons. Nessa direção, (BATISTA, 2011) encontrou uma fórmula do tipo Simons para superfícies cmc nos espaços produto $M^2(c)\times\mathbb{R}$ e, aliado ao princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, ele aplicou esta fórmula para caracterizar superfícies completas com curvatura média constante nos espaços $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$. No que tange a dimensão e codimensão arbitrárias, (FETCU; ONICIUC; ROSENBERG, 2011; FETCU; ROSENBERG, 2013) obtiveram uma fórmula do tipo Simons para subvariedades com vetor curvatura média paralelo (abreviadamente pmc) nos espaços de produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$ estendendo, para dimensão e codimensão arbitrárias, a previamente obtida por (BATISTA, 2011). Como aplicação desta fórmula, os autores (FETCU; ROSENBERG, 2013) mostraram que se Σ^m é uma subvariedade pmc de $M^n(c)\times\mathbb{R}$ com

$n > m$ tal que o quadrado da norma de sua segunda forma fundamental satisfaz certas restrições, então Σ^m deve ser uma hipersuperfície totalmente umbilíca imersa com curvatura média constante em $M^{m+1}(c) \hookrightarrow M^n(c)$ para $n > m \geq 3$. Por outro lado em (FETCU; ONICIUC; ROSENBERG, 2011), eles obtiveram resultados do tipo gap para a curvatura média de certas subvariedades pmc biharmônicas completas, e também, classificaram as superfícies pmc biharmônicas próprias em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Iniciaremos nosso trabalho caracterizando subvariedades completas com segunda curvatura média constante e imersas com vetor curvatura média normalizado paralelo (abreviadamente pnmc) em espaços produtos da forma $M^n(c)\times\mathbb{R}$, (DOS SANTOS; DA SILVA, 2022). Para isto, adaptamos o operador diferencial introduzido por (CHENG; YAU, 1997) ao nosso contexto e provamos uma fórmula do tipo Simons para subvariedades pnmc imersas em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, estendendo a previamente obtida por (FETCU; ONICIUC; ROSENBERG, 2011; FETCU; ROSENBERG, 2013) (cf. Proposição 2.1.8). Utilizando esta fórmula do tipo Simons aliada a uma versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau generalizada (cf. Proposição 3.1.4), mostramos alguns resultados do tipo gap para estas subvariedades adicionando a condição de que o vetor curvatura média normalizado η faça um ângulo constante com o campo vetorial unitário ξ tangente à $\mathbb{R}$, a qual denotaremos por subvariedades com η-ângulo constante (cf. Definição 2.1.13). Mais precisamente, provamos os seguintes resultados, no qual denotamos por H_2 a *segunda curvatura média* de uma subvariedade definida por $m(m-1)H_2 := mH^2 - |A|^2$, (cf. equação 2.36).

Teorema 1.0.1 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 3$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$|\phi|^2 + \frac{2(2m+1)}{m}|T|^2 \leq 2 + \frac{m}{m-1}H_2,$$

onde T é a parte tangente de ξ e ϕ o tensor umbilicidade de Σ^m, então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$.

O próximo resultado aborda subvariedades pnmc em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e estende o Teorema 4.5 de (FETCU; ROSENBERG, 2013) sem a hipótese de ortogonalidade entre η e ξ. Em outras palavras, provamos o seguinte.

Teorema 1.0.2 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 3$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$|\phi|^2 - \frac{2\,(m+1)}{m}|T|^2 \leq -4 + \frac{m}{m-1}H_2,$$

então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1}$.

No caso 2-dimensional, (DOS SANTOS, 2021) estudou superfícies completas imersas em um espaço produto $M^2(c)\times\mathbb{R}$ com curvatura extrínseca constante, ou equivalentemente, H_2 constante. Nosso próximo resultado estende parte dos resultados obtidos por (DOS SANTOS, 2021) para superfícies pnmc com segunda curvatura média constante.

Teorema 1.0.3 *Seja Σ^2 uma superfície pnmc completa de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > 2$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$\sup_{\Sigma}(|\phi|^2 + 5|T|^2) < 2 + 2H_2,$$

então Σ^2 é uma superfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$.

Assim como no Teorema 1.0.2, também obtemos uma leitura do resultado acima para superfícies completas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ (cf. Teorema3.2.10).

Convém observar que a abordagem utilizada para a obtenção dos resultados anteriores não nos permite obter outros tipos de subvariedades além das totalmente umbilícas. Nesse sentido, a segunda parte desta tese correspondente ao Capítulo 4 e que corresponde aos trabalhos (DOS SANTOS; DA SILVA, 2022; DOS SANTOS, DA SILVA; DE SOUZA, 2022), objetiva a busca de outras subvariedades além das totalmente umbílicas. Em um trabalho recente (ALIAS; MELÉNDEZ , 2020), obtiveram uma desigualdade integral do tipo Simons para hipersuperfícies fechadas com curvatura escalar constante imersas na esfera $\mathbb{S}^n$. Através de releitura adequada da fórmula de Simons (cf. Proposição 3.2.1), foi possível estabelecer uma versão deste resultado para um contexto de subvariedades pnmc Weingarten linear em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, onde serão consideradas neste trabalho como subvariedades Weingarten linear, aquelas cujas curvaturas médias H e H_2 satisfazem a seguinte relação linear

$$H_2 = aH + b$$

para constantes $a, b \in \mathbb{R}$. É claro que as subvariedades Weingarten linear são extensões naturais das subvariedades com H_2 constante. Nessa configuração, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.4 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear fechada de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, tal que $H_2 = aH + b$, com $a, b \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma \geq 0,$$

para todo número $p > 2$, onde $\mathcal{F}_{a,b}$ é uma função real dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a,b}(x, y) = {} & \frac{m-2}{m-1}x^2 - m\left(a - \frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}x\right)\sqrt{\frac{x}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}} \\ & + (2m+1)y^2 + \frac{m(m-2)a}{2\sqrt{m(m-1)}}x - m\left(\frac{a^2}{2} + b\right). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $b > 0$ a igualdade ocorre acima se, e somente se,

(i) ou Σ^m for uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) ou $|\phi|^2 = \gamma(m, a, b)$ onde $\gamma(m, a, b)$ é uma constante positiva que depende apenas de a, b, m e Σ^m é isométrica a um produto do tipo $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r) \subset \mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, com $r = \sqrt{(m-2)/m(H_2+1)} > 0$.

No caso em que $b = 0$, o teorema precedente tem como consequência imediata o seguinte

Corolário 1.0.5 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc fechada em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{F}_{0,H_2}(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \geq 0,$$

para cada número real $p > 2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0,H_2}(x, y) = {} & (m-2)\,x^2 + (m-2)\,x\sqrt{x^2 + m\,(m-1)\,H_2} \\ & - (m-1)\left(m\,(1+H_2) - (2m+1)\,y^2\right). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $H_2 > 0$ a igualdade acima vale se, e somente se, *(i) ou Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$;*

(ii) ou

$$|\phi|^2 = \frac{m(m-1)(H_2+1)^2}{(m-2)(mH_2+2)},$$

e Σ^m é isométrica a um produto do tipo $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r) \subset \mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, com $r = \sqrt{(m-2)/m(H_2+1)} > 0$.

Fazendo algumas adaptações na prova do Teorema 1.0.4, também obtemos uma versão deste para subvariedades e superfícies em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Contudo, apenas foi possível detectarmos subvariedades totalmente umbilícas.

No quinto e último capítulo deste trabalho estudaremos subvariedades como pontos críticos de um certo funcional, cujos resultados obtidos fazem parte de (ALBUJER; DA SILVA; DOS SANTOS, 2022). É fácil ver que a técnica empregada nos capítulos anteriores não nos permite estudar subvariedades mínimas. De fato, em todos os resultados é assumido que a subvariedade possui vetor curvatura média normalizado paralelo. Afim de motivar nosso estudo, destacamos que uma linha de pesquisa interessante é estudar quais subvariedades são pontos críticos de certos funcionais geométricos. Neste cenário, vamos destacar três funcionais clássicos diferentes. Primeiramente, (CHEN, 1974) considerou o seguinte funcional para superfícies fechadas Σ^2 em $\mathbb{R}^3$:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma = \int_\Sigma (H^2 - K) d\Sigma, \tag{1.2}$$

onde H e K representam a curvatura média e Gaussiana de Σ^2, respectivamente. Intimamente relacionado com (1.2) podemos considerar a conhecida energia de Willmore ou funcional de Willmore dado por:

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_\Sigma H^2 d\Sigma. \tag{1.3}$$

De fato, em razão do teorema clássico de Gauss-Bonnet, ambos os funcionais $\widetilde{\mathcal{W}}$ e $\mathcal{W}$ têm os mesmos pontos críticos no conjunto de superfícies fechadas em $\mathbb{R}^3$. Associada a (1.3), está a famosa conjectura de Willmore, proposta por (WILLMORE, 1965) e resolvida por (MARQUES;

NEVES, 2014), que garante que o valor de $\mathcal{W}(\Sigma)$ é pelo menos $2\pi^2$ quando Σ^2 é um toro imerso em $\mathbb{R}^3$. Por fim, destacamos o funcional curvatura média total, o qual introduzido por (CHEN, 1971) para qualquer subvariedade fechada Σ^m no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^m d\Sigma.$$

Chen provou que $\mathcal{H}$ é limitado inferiormente pelo volume da m-esfera unitária, sendo a igualdade atingida quando a subvariedade é exatamente $\mathbb{S}^m$. O funcional curvatura média total também foi considerado para subvariedades em outros espaços ambientes. No caso de subvariedades fechadas na esfera $\mathbb{S}^n$, $\mathcal{H}$ é limitado inferiormente por zero, e a igualdade é atingida por todas as subvariedades mínimas fechadas de $\mathbb{S}^n$. Considerando o problema variacional associado a tal funcional, diz-se que uma subvariedade Σ^m é uma $\mathcal{H}$-subvariedade se for um ponto estacionário para $\mathcal{H}$.

Neste contexto, trabalhamos com o funcional curvatura média total e obtemos a equação de Euler-Lagrange deste para superfícies fechadas imersas no espaço do produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ (cf. Proposição 5.1.1). Como consequência, obtivemos uma desigualdade integral de tal sorte que, no caso em que a superfície está contida em um slice do produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, esta coincide com a desigualdade obtida por (GUO; LI, 2013) para $n = 4$ e melhora este resultado para $n > 4$. Mais especificamente,

Teorema 1.0.6 *Seja Σ^2 uma $\mathcal{H}$-superfície fechada no espaço produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então*

$$\int_{\Sigma} \left\{ \left(1 - 5|T|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^2\right) |\phi|^2 - 2(|\phi_h| + 1)|T|^2 + 2 \right\} d\Sigma \leq 4\pi\chi(\Sigma), \tag{1.4}$$

onde ϕ_h e $\chi(\Sigma)$ denotam o tensor de umbilicidade relacionado ao vetor de curvatura média h e a característica de Euler de Σ^2, respectivamente. Em particular, a igualdade vale se, e somente se, Σ^2 é isométrica a

(i) um slice $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$, ou

(ii) uma 2-esfera totalmente geodésica ou um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \times \{t_0\}$, ou

(iii) uma superfície Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$,

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

2 ARCABOUÇO TEÓRICO

Neste capítulo serão estabelecidas algumas notações e convenções a serem adotadas ao longo do texto. Além disso, serão apresentados definições e resultados, sem demonstrações, já conhecidos da teoria de imersões isométricas e que serão importantes no desenvolvimento do trabalho.

2.1 PRELIMINARES

2.1.1 Fórmulas gerais

Seja Σ^m uma subvariedade imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ com $n \geq m$. Escolheremos um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ em $\overline{M}^{n+1}$ com correferencial dual associado $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$, de modo que em cada ponto $p \in \Sigma^m$, os campos $e_1, \ldots, e_m$ sejam tangentes a Σ^m, e os campos $e_{m+1}, \ldots, e_{n+1}$ sejam normais a Σ^m. Assim, fica estabelecida a seguinte convenção para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \cdots \leq n+1, \quad 1 \leq i, j, k \leq m \quad \text{e} \quad m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leq n+1.$$

Nesta configuração, a métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$ é dada por

$$ds^2 = \sum_A \omega_A^2,$$

Denotando por $\{\omega_{AB}\}$ as formas de conexão de $\overline{M}^{n+1}$, temos que as equações de estrutura de $\overline{M}^{n+1}$ são dadas por :

$$d\omega_A = -\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB} = -\sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2} \sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \tag{2.2}$$

onde $\overline{R}_{ABCD}$ denota o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$.

Restringindo todos os tensores a Σ^m temos

$$\omega_\alpha = 0, \quad m+1 \leq \alpha \leq n+1.$$

Consequentemente, a métrica Riemanniana de Σ^m é escrita como $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$. Uma vez que

$$\sum_i \omega_{\alpha_i} \wedge \omega_i = d\omega_\alpha = 0,$$

segue do lema de Cartan que

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j \quad e \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{2.3}$$

Com isso, obtemos a segunda forma fundamental A de Σ^m em $\overline{M}^{n+1}$, a seguir

$$A = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j e_\alpha, \qquad h_{ij}^\alpha = \langle A_\alpha(e_i), e_j\rangle = \langle A(e_i, e_j), e_\alpha\rangle, \tag{2.4}$$

em que A_α denota o operador de Weingarten de Σ^m na direção e_α. O quadrado do comprimento da segunda forma fundamental fica, portanto, definido por:

$$|A|^2 = \sum_\alpha |A_\alpha|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2. \tag{2.5}$$

Além disso, definimos o vetor curvatura média h e a função curvatura média H de Σ^m em $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente por:

$$h = \frac{1}{m}\sum_\alpha \mathrm{tr}(A_\alpha) e_\alpha \quad \text{e} \quad H = |h| = \frac{1}{m}\sqrt{\sum_\alpha \mathrm{tr}\,(A_\alpha)^2}, \tag{2.6}$$

onde $\mathrm{tr}(A_\alpha) = \sum_i h_{ii}^\alpha$.

Em relação ao vetor curvatura média de uma imersão, a seguinte definição será bastante usual.

Definição 2.1.1 *Dizemos que o vetor curvatura média h de Σ^m em $\overline{M}^{n+1}$ é paralelo se ele for paralelo como uma seção do fibrado normal de Σ^m.*

Sendo assim, introduziremos as seguintes notações a serem utilizadas em todo este trabalho:

(a) Σ^m é pmc se ela possuir vetor curvatura média paralelo;

(b) Σ^m é cmc se ela possuir função curvatura média constante;

(c) Σ^m é $pnmc$ se ela possui função curvatura média positiva e vetor curvatura média normalizado paralelo.

Convém observar que uma subvariedade pmc é uma subvariedade cmc. Além disso, a condição de ser pnmc é mais geral que a condição pmc. De fato, subvariedades pmc com H não-nulo também são pnmc, ocorrendo a equivalência apenas no caso em que a curvatura média é constante e não nula. Além disso, temos que a condição pnmc é mais fraca que a pmc, a exemplo, toda hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana com curvatura média não-nula, sempre é pnmc. Uma melhor abordagem do tema pode ser encontrada em (CHEN, 2019).

Voltando ao contexto anterior, através das equações (2.1) e (2.2), decompomos as equações de estrutura de Σ^m em parte tangente:

$$d\omega_i = -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de Σ^m, donde obtemos a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + \sum_\beta \left(h^\beta_{ik} h^\beta_{jl} - h^\beta_{il} h^\beta_{jk} \right). \tag{2.7}$$

E, em parte normal:

$$d\omega_\alpha = -\sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta, \qquad \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0,$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R^\perp_{\alpha\beta kl} \omega_k \wedge \omega_l,$$

onde $R^\perp_{\alpha\beta ij}$ são as componentes da curvatura normal de Σ^m, donde obtemos a *equação de Ricci*

$$R^\perp_{\alpha\beta ij} = \overline{R}_{\alpha\beta ij} + \sum_k \left(h^\alpha_{ik} h^\beta_{kj} - h^\alpha_{kj} h^\beta_{ik} \right). \tag{2.8}$$

As componentes h_{ijk}^{α} da derivada covariante ∇A satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}^{\alpha}\omega_k = dh_{ij}^{\alpha} - \sum_k h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} - \sum_k h_{jk}^{\alpha}\omega_{ki} + \sum_\beta h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.9}$$

com

$$|\nabla A|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^{\alpha})^2. \tag{2.10}$$

Ainda sobre a segunda forma fundamental, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.2 *Seja Σ^m uma subvariedade imersa na variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, A a segunda forma fundamental e A_ζ o operador de forma associado a esta imersão na direção de $\zeta \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$. Dizemos que*

a) Σ^m é totalmente geodésica se para todo $p \in \Sigma^m$ tem-se $A \equiv 0$.

b) Σ^m é uma subvariedade totalmente umbílica se para todo $p \in \Sigma^m$ temos que $A_\xi = \langle h, \xi\rangle I$, para cada $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$.

c) Σ^m é uma subvariedade paralela se para todo $p \in \Sigma^m$, temos que $\nabla A \equiv 0$.

Desta forma, de (2.3) e (2.9) obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} = -\overline{R}_{\alpha ijk}. \tag{2.11}$$

As primeira e segunda derivadas covariante de h_{ij}^{α} denotadas por h_{ijk}^{α} e h_{ijkl}^{α}, respectivamente, satisfazem:

$$\sum_l h_{ijkl}^{\alpha}\omega_l = dh_{ijk}^{\alpha} - \sum_l h_{ljk}^{\alpha}\omega_{li} - \sum_l h_{ilk}^{\alpha}\omega_{lj} - \sum_l h_{ijl}^{\alpha}\omega_{lk} + \sum_\beta h_{ijk}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}.$$

Logo, tomando a derivada exterior em (2.9) obtemos a *identidade de Ricci*

$$h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha} = \sum_p h_{ip}^{\alpha}R_{pjkl} + \sum_p h_{pj}^{\alpha}R_{pikl} - \sum_\beta h_{ij}^{\beta}R_{\alpha\beta kl}^{\perp}. \tag{2.12}$$

Agora, ao restringirmos a derivada covariante $\overline{R}_{ABCD;E}$ de $\overline{R}_{ABCD}$ em Σ^m, segue que $\overline{R}_{\alpha ijk;l}$ é dada por

$$\overline{R}_{\alpha ijk;l} = \overline{R}_{\alpha ijkl} - \sum_\beta \overline{R}_{\alpha\beta jk}h_{il}^{\beta} - \sum_\beta \overline{R}_{\alpha i\beta k}h_{jl}^{\beta} - \sum_\beta \overline{R}_{\alpha ij\beta}h_{kl}^{\beta} + \sum_p \overline{R}_{pijk}h_{lp}^{\alpha}, \tag{2.13}$$

onde $\overline{R}_{\alpha ijkl}$ denota a derivada covariante de $\overline{R}_{\alpha ijk}$ como um tensor sobre Σ^m.

O Laplaciano Δh_{ij}^{α} de h_{ij}^{α} é definido por $\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sum\limits_k h_{ijkk}^{\alpha}$. Portanto, das equações (2.11) e (2.13) temos

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} &= h_{ij}^{\alpha}\sum_k \left[h_{ikjk}^{\alpha} + \overline{R}_{\alpha ikjk} - h_{ikkj}^{\alpha} + \overline{R}_{\alpha kkij} + h_{kkij}^{\alpha}\right] \\ &= \sum_k h_{ij}^{\alpha}\left[\overline{R}_{\alpha ikjk} + \left(h_{ikjk}^{\alpha} - h_{ikkj}^{\alpha}\right) + \overline{R}_{\alpha kkij} + h_{kkij}^{\alpha}\right] \\ &= \sum_k h_{ij}^{\alpha}\left(\overline{R}_{\alpha ikjk} + \overline{R}_{\alpha kkij}\right) + \sum_{k,p} h_{ij}^{\alpha}\left[\left(h_{pi}^{\alpha}R_{pkjk} + h_{pk}^{\alpha}R_{pijk}\right)\right] \\ &\quad + \sum_{\beta,k} h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}^{\perp} + \sum_k h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Em relação a estes termos, aplicando as equações de Gauss, Ricci e a primeira identidade de Bianchi à (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_k h_{ij}^{\alpha}\left(\overline{R}_{\alpha ikjk} + \overline{R}_{\alpha kkij}\right) + \sum_{\beta,k} h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}^{\perp} \\ &\quad = \sum_{\beta,k} h_{ij}^{\alpha}\left(-h_{kk}^{\beta}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + 2h_{jk}^{\beta}\overline{R}_{\alpha\beta ki} - h_{ij}^{\beta}\overline{R}_{\alpha k\beta k} + 2h_{ki}^{\beta}\overline{R}_{\alpha\beta kj}\right) \\ &\qquad - \sum_{p,k} h_{ij}^{\alpha}\left(h_{pj}^{\alpha}R_{pkki} + h_{pk}^{\alpha}R_{pikj}\right) - \sum_k h_{ij}^{\alpha}\left(\overline{R}_{\alpha ikj;k} + \overline{R}_{\alpha kki;j}\right) \\ &\qquad + \sum_{\beta,p,k} h_{ij}^{\alpha}\left(h_{ip}^{\alpha}h_{pj}^{\beta}h_{kk}^{\beta} + 2h_{pk}^{\alpha}h_{pj}^{\beta}h_{ik}^{\beta} - h_{ip}^{\alpha}h_{kj}^{\beta}h_{pk}^{\beta} - h_{pk}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}h_{pk}^{\beta} - h_{pj}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{pk}^{\beta}\right). \end{aligned}$$

Além disso, aplicando alguns cálculos matriciais e usando (2.4), chegamos à:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,p} h_{ij}^{\alpha}\left(h_{ip}^{\alpha}h_{pj}^{\beta}h_{kk}^{\beta} + 2h_{pk}^{\alpha}h_{pj}^{\beta}h_{ik}^{\beta} - h_{ip}^{\alpha}h_{kj}^{\beta}h_{pk}^{\beta} - h_{pk}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}h_{pk}^{\beta} - h_{pj}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{pk}^{\beta}\right) \\ &\qquad = m\sum_{\alpha}\mathrm{tr}(A_{\alpha}^2A_h) - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(A_{\alpha}A_{\beta} - A_{\beta}A_{\alpha}\right) + \left[\mathrm{tr}\left(A_{\alpha}A_{\beta}\right)\right]^2\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $N(A) = \mathrm{tr}\left(AA^t\right)$ para qualquer matrix $A = (a_{ij})$.

Uma vez que

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}, \tag{2.16}$$

temos a seguinte fórmula geral do tipo Simons:

Proposição 2.1.3 *Seja Σ^m uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$ com $n \geq m$. Então,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + &\sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{\alpha ikj;k} - \overline{R}_{\alpha kki;j}\right)\\ &+ \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\left(-h_{kk}^{\beta}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + 2h_{jk}^{\beta}\overline{R}_{\alpha\beta ki} - h_{ij}^{\beta}\overline{R}_{\alpha k\beta k} + 2h_{ki}^{\beta}\overline{R}_{\alpha\beta ki}\right)\\ &- \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha\right) + [tr\left(A_\alpha A_\beta\right)]^2 - tr(A_\beta)tr(A_\alpha^2 A_\beta)\right)\\ &+ 2\sum_{\alpha,i,j,k,p} h_{pj}^{\alpha}\left(h_{pk}^{\alpha}\overline{R}_{pijk} + h_{pj}^{\alpha}\overline{R}_{pkik}\right).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Observação 2.1.4 *No contexto de subvariedades mínimas, isto é, $H = 0$, a fórmula de Simons acima foi obtida por Chern, do Carmo e Kobayashi em (CHERN; DO CARMO; KOBAYASHI, 1970).*

Encerramos esta seção com os seguintes resultados algébricos que serão apresentados sem as suas demonstrações. O primeiro deles é o (SANTOS, 1994, Lema 2.6)

Lema 2.1.5 *Sejam $B, C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear simétrica tal que $[B, C] = 0$ e $tr(B) = tr(C) = 0$, então*

$$-\frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}|B|^2|C| \leq tr(B^2C) \leq \frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}|B|^2|C|.$$

Valendo a igualdade se, e somente se $m-1$ dos autovalores x_i de B e os autovalores correspondentes y_i dos de C satisfazem

$$|x_i| = \frac{|B|}{\sqrt{m(m-1)}} \quad x_i \geq 0 \qquad \text{e} \quad y_i = \frac{|C|}{\sqrt{m(m-1)}}\left(\textit{resp.} \quad y_i = -\frac{|C|}{\sqrt{m(m-1)}}\right). \tag{2.18}$$

E o segundo é o (LI; LI, 1992, Teorema 1).

Lema 2.1.6 *Sejam $B_1, \ldots, B_2$, onde $p \geq 2$, matrizes simétricas $m \times m$. Então*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\left(N\left(B_\alpha B_\beta - B_\beta B_\alpha\right)\right) + [(B_\alpha B_\beta)]^2 \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{p} N\left(B_\alpha\right)\right)^2.$$

É interessante observar que a desigualdade do Lema 2.1.5 pode ser considerada como uma generalização do Lema de Okumura bastante utilizado na obtenção de resultados de rigidez no contexto de hipersuperfícies.

2.1.2 Uma fórmula de Simons para subvariedades pnmc em $M^n(c)\times\ \mathbb{R}$

Sejam $M^n(c)$ uma variedade Riemanniana conexa munida do tensor métrico $\langle\,,\rangle_M$ e com curvatura seccional constante $c=-1,1$ e $\mathbb{R}$ a reta real. Denotamos o espaço produto de $M^n(c)$ por $\mathbb{R}$, como o produto Riemanniano $M^n(c)\times\mathbb{R}$, que nada mais é do que a variedade diferenciável $M^n(c)\times\mathbb{R}$ munida da métrica Riemanniana

$$\langle v,w\rangle_p=\langle(\pi_M)_*\,v,(\pi_M)_*\,w\rangle_M+\langle(\pi_{\mathbb{R}})_*\,v,(\pi_{\mathbb{R}_*})\,w\rangle_{\mathbb{R}},$$

com $p\in M^n\times\mathbb{R}$ e $v,w\in T_p\,(M\times\mathbb{R})$, onde $\pi_{\mathbb{R}}$ e π_M denotam as projeções canônicas sobre os fatores correspondentes . Especificamente, $M^n(c)\times\mathbb{R}$ denotará $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ quando $c=1$ e $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ quando $c=-1$. Note que estes dois espaços podem ser considerados como hipersuperfícies do espaço Euclideano $(n+2)$-dimensional $\mathbb{R}^{n+2}$ e do espaço Lorentziano $(n+2)$-dimensional $\mathbb{L}^{n+2}=(\mathbb{R}^{n+2},-dx^2+\cdots+dx_{n+2}^2)$, respectivamente:

$$\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}=\{(x_1,\ldots,x_{n+2})\in\mathbb{R}^{n+2};x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$$

e

$$\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}=\{(x_1,\ldots,x_{n+2})\in\mathbb{L}^{n+2};-x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=-1\}.$$

Associado ao produto Riemanniano, o campo vetorial

$$\partial_t:=(\partial/\partial_t)\Big|_{(p,t)},\quad (p,t)\in M^n\times\mathbb{R},$$

é paralelo e unitário, isto é,

$$\overline{\nabla}\partial_t=0\quad\text{e}\quad\langle\partial_t,\partial_t\rangle=1,\tag{2.19}$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $M^n(c)\times\mathbb{R}$. Observemos que ao longo de Σ^m, o campo ∂_t admite a seguinte decomposição:

$$\xi:=\partial_t=T+N,\tag{2.20}$$

onde por simplicidade, $T:=\partial_t^T$ e $N:=\partial_t^\perp$ denotam, respectivamente, as partes normal e tangente do campo ∂_t nos fibrados normal e tangente da subvariedade Σ^m em $\overline{M}^{n+1}$. Mais ainda, de (2.19) e (2.20), temos a relação

$$1=\langle\partial_t,\partial_t\rangle=|T|^2+|N|^2.\tag{2.21}$$

Observação 2.1.1 *Note que se $T = 0$, então ∂_t é sempre normal à Σ^m e, portanto, Σ^m esta contido em uma folha $M^n(c)\times\{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, quando $N = 0$, temos que ∂_t é sempre tangente à Σ^m, e neste caso, Σ^m esta contido em um cilindro vertical $\pi_M(M^{m-1})$ onde M^{m-1} é uma subvariedade de $M^n(c)$.*

Conforme (DANIEL, 2007), recordemos que o tensor curvatura de $M^n(c)\times\mathbb{R}$ é dado por:

$$\begin{aligned}\overline{R}\,(X,Y)\,Z &= c\,(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X) + c\langle Z,\partial_t\rangle\,(\langle Y,\partial_t\rangle X - \langle X,\partial_t\rangle Y)\\ &\quad + c\,(\langle Y,Z\rangle\langle X,\partial_t\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,\partial_t\rangle)\,\partial_t,\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}\,(M\times\mathbb{R})$ e $\overline{R}$ é definida por (ONEILL, 1983)

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z - \left[\overline{\nabla}_X,\overline{\nabla}_Y\right]Z.$$

Denotando ∇ e $\nabla^{\perp}$, respectivamente, como as conexões tangente e normal de Levi Civita ao longo do fibrado tangente e do fibrando normal de Σ^m, um cálculo direto em (2.20) nos dá

$$A_N(X) = \nabla_X T \quad \text{e} \quad A(X,T) = -\nabla^{\perp}_X N, \quad \text{para todo} \quad X\in\mathfrak{X}(\Sigma), \tag{2.23}$$

onde $A_N = \sum_\alpha \langle N, e_\alpha\rangle A_\alpha$ denota o operador de Weingarten na direção normal.

Diante do exposto acima, nosso propósito agora é obter uma fórmula do tipo Simons para uma subvariedade pnmc, Σ^m em $M^n(c)\times\mathbb{R}$. Para isto, vamos primeiro observar que o fato de $M^n(c)\times\mathbb{R}$ ser localmente simétrico, implica em

$$\overline{R}_{\alpha ikj;k} = \overline{R}_{\alpha kki;j} = 0. \tag{2.24}$$

Além disso, de (2.22), não é difícil verificar que $\overline{R}_{\alpha\beta kj} = 0$, para todo α,β,j,k. Também podemos verificar sem dificuldades que.

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^\alpha_{ij}\left(h^\beta_{kk}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + h^\beta_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k}\right) &= -cm^2H^2 + cm\langle A(T,T),h\rangle - cm|A_N|^2\\ &\quad + cm^2\langle h,N\rangle^2 + c(m-|T|^2)|A|^2\end{aligned} \tag{2.25}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j,k,p} h^\alpha_{ij}\left(h^\alpha_{pk}\overline{R}_{pijk} + h^\alpha_{pj}\overline{R}_{pkik}\right) &= -cm\sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 + c(m-|T|^2)|A|^2\\ &\quad - cm^2H^2 + 2cm\langle A(T,T),h\rangle.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Daí, substituindo (2.24), (2.25) e (2.26) na Proposição 2.1.3, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + cm|A_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|A_{\alpha}(T)|^2 - cm^2|h|^2 \\ + c(m - |T|^2)|A|^2 - cm^2\langle h, N\rangle^2 + 3cm\langle A(T,T), h\rangle \\ - \sum_{\alpha,\beta}\Big(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta]^2\Big) + \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(A_\beta)\mathrm{tr}(A_\alpha^2 A_\beta).\end{aligned}$$

A seguir, vamos também considerar o seguinte tensor simétrico

$$\phi = \sum_{\alpha,i,j}\phi_{ij}^{\alpha}\omega_i \otimes \omega_j e_\alpha,$$

onde

$$\phi_{ij}^{\alpha} = \langle \phi_\alpha(e_i), e_j\rangle = h_{ij}^{\alpha} - \langle h, e_\alpha\rangle\delta_{ij}. \tag{2.27}$$

É fácil ver que cada $\phi_\alpha = A_\alpha - \langle h, e_\alpha\rangle I$ é sem traço e que

$$|\phi|^2 = \sum_{\alpha}|\phi_\alpha|^2 = \sum_{\alpha,i,j}(\phi_{ij}^{\alpha})^2 = |A|^2 - mH^2 \quad \text{e} \quad |\phi_\alpha|^2 = |A_\alpha|^2 - m\langle e_\alpha, h\rangle^2. \tag{2.28}$$

Observemos que $|\phi| = 0$ se, e somente se, Σ^m é uma subvariedade totalmente umbílica de $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Neste contexto, um cálculo simples nos fornece

$$m|A_N|^2 = m|\phi_N|^2 + m^2\langle h, N\rangle^2$$

e

$$\sum_{\alpha}|A_\alpha(T)|^2 = \sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + 2\langle\phi_h(T), T\rangle + H^2|T|^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h_{ik}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ + c(m - |T|^2)|\phi|^2 - cm\langle\phi_h(T), T\rangle + \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(A_\beta)\mathrm{tr}(A_\alpha^2 A_\beta) \\ - \sum_{\alpha,\beta}\Big(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [\mathrm{tr}\,(A_\alpha A_\beta)]^2\Big).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Uma vez que trabalharemos com subvariedades pnmc Σ^m imersas no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$, vamos considerar $\{e_{m+1}, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial local ortonormal de vetores ao longo do fibrado normal de Σ^m tal que $e_{m+1} = h/H = \eta$. Disto,

$$\mathrm{tr}(A_\eta) = mH \quad \text{e} \quad \mathrm{tr}(A_\alpha) = m\langle h, e_\alpha\rangle = 0,$$

para todo $\alpha \geq m+2$, e de (2.27),

$$\phi_{ij}^{\eta} = h_{ij}^{\eta} - H\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha}, \tag{2.30}$$

para todos $\alpha \geq m+2$.

Além disso, como η é paralelo, a equação de Ricci (2.8) garante que

$$A_\alpha A_\eta = A_\eta A_\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \geq m+2.$$

Assim, de (2.28) e (2.30), temos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{tr}(A_\beta)\mathrm{tr}(A_\alpha^2 A_\beta) - \sum_{\alpha,\beta} \Big(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2 \Big) \\ = mH^2|\phi|^2 + mH \sum_{\alpha} \mathrm{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_\eta) \\ - \sum_{\alpha,\beta>m+1} N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) - \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 . \end{aligned} \tag{2.31}$$

Portanto, inserindo (2.31) em (2.29) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + m\sum_{i,j} h_{ij}^{\eta} H_{ij} + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha} |\phi_\alpha(T)|^2 \\ + \Big(c(m - |T|^2) + mH^2 \Big) |\phi|^2 - cm\langle \phi_h(T), T \rangle \\ + mH\sum_{\alpha} \mathrm{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_\eta) - \sum_{\alpha,\beta>m+1} N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) - \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Observação 2.1.7 *Aplicando metódos tensoriais, Rosenberg e Fetcu (FETCU; ROSENBERG, 2013), obtiveram a fórmula do tipo Simons* (2.32) *para subvariedades pmc.*

Em (CHENG; YAU, 1997), os autores introduziram um operador diferencial de segunda ordem auto-adjunto, muito utilizado nos estudos de rigidez de hipersuperfícies com curvatura escalar constante em formas espaciais, conhecido como operador quadrado ou operador de Cheng-Yau. Com o propósito de obtermos uma versão mais adequada para a fórmula (2.32) no estudo de subvariedades pnmc que serão feitos, trabalharemos com a seguinte versão do operador quadrado (ou ainda, operador de Cheng-Yau):

$$\square(f) = \sum_{i,j} \Big(mH\delta_{ij} - h_{ij}^{\eta} \Big) f_{ij} = mH\Delta f - \sum_{i,j} h_{ij}^{\eta} f_{ij}, \tag{2.33}$$

onde os f_{ij} são as componentes do hessiano de f. Do ponto de vista tensorial, (2.33) pode ser escrito como:

$$\square(f) = \mathrm{tr}(P \circ \mathrm{Hess}\, f), \tag{2.34}$$

com

$$P = mHI - h^{\eta}, \tag{2.35}$$

onde I é a identidade na álgebra dos campos vetoriais em Σ^m e $h^{\eta} = (h^{\eta}_{ij})$ denota a segunda forma fundamental de Σ^m na direção de e_{m+1}.

Por outro lado, em (CAO; LI, 2007; GROSJEAN, 2002) os autores definiram as r-ésimas funções curvatura média H_r de uma subvariedade imersa em um espaço forma Riemanniano de dimensão m da seguinte forma:

Para cada inteiro par $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, escrevemos as r-ésimas funções curvatura média como:

$$\binom{m}{r} H_r := S_r = \frac{1}{r!} \sum_{i,j} \delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} \langle B_{i_1 j_1}, B_{i_2, j_2} \rangle \cdots \langle B_{i_{r-1} j_{r-1}}, B_{i_r j_r} \rangle.$$

onde $\binom{m}{r}$ é o coeficiente binomial, $\delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$ são os símbolos de Kronecker generalizados e

$$B_{ij} = \sum_{\alpha, i, j} h^{\alpha}_{ij} e_{\alpha},$$

com $\{e_{m+1}, \ldots, e_{n+1}\}$ denotando um referencial ortonormal ao longo do fibrado normal. Por convenção, tem-se que $H_0 = S_0 = 1$. Levando em conta esta definição, para nossos estudos, vamos considerar a seguinte função *segunda curvatura média* H_2:

$$m\,(m-1)\, H_2 = 2S_2 = m^2 H^2 - |A|^2 \tag{2.36}$$

Portanto, fazendo $f = mH$ em (2.33), e de (2.36) temos

$$\begin{aligned}
\square(mH) &= \sum_{i,j} \left(mH\delta_{ij} - h^{\eta}_{ij} \right) (mH)_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\Delta(m^2H^2) - m^2|\nabla H|^2 - m \sum_{i,j} h^{\eta}_{ij} H_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta H_2 - m^2|\nabla H|^2 - m \sum_{i,j} h^{\eta}_{ij} H_{ij}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte fórmula do tipo Simons para o operador de Cheng-Yau agindo na função curvatura média de Σ^m em $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.8 *Se Σ^m é uma subvariedade pnmc de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, então temos*

$$\begin{aligned}\square(mH) = {} & |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta H_2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + \Big(c(m-|T|^2) + mH^2\Big)|\phi|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle + mH\sum_\alpha tr(\phi_\alpha^2\phi_\eta) \\ & - \sum_{\alpha,\beta}\Big(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [tr(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\Big).\end{aligned}$$

Observação 2.1.9 *Esta proposição, generaliza o Corolário* 3.3 *de (FETCU; ROSENBERG, 2013) para o caso pnmc. De fato, no caso* pmc, *a curvatura média é constante, daí utilizando* (2.36), *nosso resultado se torna o mesmo do corolário citado.*

2.1.3 Redução de codimensão em espaços produtos e outras definições.

Nesta seção trataremos de alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do nosso estudo de subvariedades imersas em espaços produto. O primeiro deles, se encontra em uma dificuldade natural de caracterizar subvariedades imersas em formas espaciais cuja a codimensão é diferente de 1. Para contornar tal dificuldade, existem na literatura os chamados resultados de *redução de codimensão*. Estes resultados consistem em garantir que, sob determinadas condições, uma tal subvariedade esteja contida em uma outra (subvariedade) totalmente geodésica do espaço ambiente inicial. No caso em que o espaço ambiente é uma forma espacial, este tema foi amplamente estudado por (ERBACHER, 1972) e (DJACZER, 1990). No caso dos espaços de curvatura seccional não-constante, (YAU, 1975) deu uma importante contribuição quando o ambiente considerado é uma variedade conformemente plana. Recentemente, (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014), mostraram que os resultados de redução de codimensão obtidos por Dajczer podem ser reproduzidos nas variedades produtos do tipo $M^n(c) \times \mathbb{R}$, tornando mais atrativo o estudo de subvariedades nesses espaços.

A seguir veremos alguns resultados clássicos sobre a temática cujas principais referências são (DJACZER, 1990; MENDONÇA; TOJEIRO, 2014).

Definição 2.1.10 *Seja* $f : \Sigma^m \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica e* q *um número natural. Dizemos que a subvariedade* Σ^m *admite redução de codimensão para* q, *se* Σ^m *estiver contida em uma subvariedade de totalmente geodésica* $M^{m+q-1} \subset \overline{M}^{n+1}$.

Recordemos que dada uma imersão isométrica $f : \Sigma^m \to \overline{M}^{n+1}$, chamamos de *primeiro subespaço normal* de f em $x \in \Sigma^m$, ao subespaço $N_1(x) \subset T\Sigma^\perp$ gerado pela segunda forma fundamental A de f em x, isto é,

$$N_1(x) = \text{span}\{A(X,Y)\,;\, X, Y \in T\Sigma\}.$$

Por meio de um cálculo simples, vemos que

$$N_1(x) = \{\xi \in T\Sigma^\perp\,;\, A_\xi = 0\}^\perp.$$

A proposição a seguir, fornece uma maneira de verificar quando uma subvariedade isometricamente imersa em um espaço produto admite uma redução de codimensão.

Proposição 2.1.11 *(MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) Seja* Σ^m *uma subvariedade de* $M^n(c) \times \mathbb{R}$ *e* $\partial_t = T + N$ *o campo vetorial unitário e paralelo, associado ao produto, decomposto em relação à imersão* Σ^m *em parte tangente e normal, respectivamente. Suponha que* $L := N_1 + \text{span}\{N\}$ *é um subfibrado de* $T\Sigma^\perp$ *de* $rank\ q < n + 1 - m$, *de modo que* $\nabla^\perp N_1 \subset L$. *Então a codimensão de* Σ^m *se reduz a* q.

O resultado acima nos diz que se Σ^m é uma subvariedade de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ satisfazendo tais condições, então Σ^m está imersa como uma subvariedade da subvariedade totalmente geodésica $M^{m+q-1}(c) \times \mathbb{R} \subset M^n(c) \times \mathbb{R}$, de modo que

$$\Sigma^m \hookrightarrow_{\text{subvariedade}} M^{m+q-1}(c) \times \mathbb{R} \hookrightarrow_{\text{totalmente geodésica}} M^n(c) \times \mathbb{R}.$$

Uma condição necessária e suficiente para obtermos que $\nabla^\perp N_1 \subset L$ é dada pela seguinte proposição.

Proposição 2.1.12 *(MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) Seja* Σ^m *uma subvariedade de* $M^n(c) \times \mathbb{R}$. *Suponha que* $L := N_1 + \text{span}\{N\}$, *é um subfibrado de* $T\Sigma^\perp$ *de* $rank\ q < n + 1 - m$. *Então,* $\nabla^\perp N_1 \subset L$ *se, e somente se,* *(i)* $\nabla^{\perp} R^{\perp}|_{L^{\perp}} = 0$ *; e*

(ii) $\nabla^{\perp} h \in L$.

Antes de finalizar esta seção, apresentaremos mais alguns conceitos que serão usuais ao logo deste texto.

Definição 2.1.13 *Sejam Σ^m uma subvariedade de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ e $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$ um campo normal e unitário. Dizemos que Σ^m é ζ-ângulo constante, se o ângulo entre ζ e ∂_t é constante em cada ponto de Σ^m. Em outras palavras, se $\theta \in [0, \pi)$, então Σ^m é ζ-ângulo constante se a função ângulo, dada por*

$$\cos\theta = \langle \zeta, \partial_t \rangle \tag{2.37}$$

é constante em cada ponto de Σ^m.

Denotando por $\eta = h/H$ o vetor curvatura média normalizado de Σ^m em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, a seguinte observação mostra uma consequência interessante da relação ζ-ângulo constante e subvariedades pnmc.

Observação 2.1.14 *Se Σ^m é uma pnmc subvariedade η-ângulo constante de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, então $A_\eta(T) = 0$. De fato, uma vez que η é paralelo e a função ângulo suave, segue de* (2.23),

$$X\langle \eta, \partial_t \rangle = \langle \nabla^{\perp}_X \eta, \partial_t \rangle + \langle \eta, \nabla^{\perp}_X N \rangle = -\langle A(X,T), \eta \rangle = -\langle A_\eta(T), X \rangle, \tag{2.38}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Sendo Σ^m uma subvariedade η-ângulo constante, segue que o lado esquerdo de (2.38) *se anula. Isto mostra o afirmado.*

É importante chamarmos atenção para o fato de que as subvariedades pnmc η-ângulo constante correspondem a uma extensão natural das hipersuperfícies com ângulo constante em espaço produto. De fato, como foi visto anteriormente, cada hipersuperfície com curvatura média não nula, é pnmc. Dessa forma, o η-ângulo reduz-se a função ângulo que relaciona o normal de Gauss da hipersuperfície com o ∂_t. Esta temática foi, e vem sendo, amplamente estudadas no caso de hipersuperfícies, confira por exemplo (DILEN; FASTNAKELS; VAN DER VEKEN; VRAKEN, 2007; DILEN; MUNTEANU, 2007; NAVARRO; RUIZ-HERNANDES; SOLIS, 2016; NISTOR, 2017).

3 SUBVARIEDADES PNMC COMPLETAS EM ESPAÇOS PRODUTO

3.1 RESULTADOS AUXILIARES

Nesta seção serão apresentados alguns resultados essenciais para a obtenção dos Teoremas principais deste capítulo.

3.1.1 Lemas fundamentais

Apresentaremos aqui dois resultados bem conhecidos no contexto de subvariedades imersas em ambientes de curvatura seccional constante. No caso dos ambientes produtos, o nosso primeiro resultado generaliza, para dimensão e codimensão qualquer, o Lema 2.3 de (DOS SANTOS, 2021) para o contexto da segunda curvatura média H_2 constante.

Lema 3.1.1 *Seja Σ^m uma subvariedade $pnmc$ no espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$, com segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constante. Então*

$$|\nabla A|^2 \geq m^2|\nabla H|^2.$$

Mais ainda, se $H_2 > 0$ esta desigualdade se torna uma igualdade se, e somente se, Σ^m é uma parte aberta de uma subvariedade paralela de $M^n(c)\times\mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, como a segunda curvatura média H_2 é constante, podemos tomar a derivada covariante em ambos os lados de (2.36) a fim de obter

$$\nabla(m(m-1)H_2) = \nabla(m^2H^2 - |A|^2) \quad \Longrightarrow \quad m^2H\nabla H = |A|\nabla|A|.$$

Consequentemente,

$$m^4H^2|\nabla H|^2 = |A|^2|\nabla|A||^2.$$

Combinando esta equação com a desigualdade de Kato clássica,

$$|\nabla|A||^2 \leq |\nabla A|^2, \tag{3.1}$$

obtemos

$$m^4H^2|\nabla H|^2 = |A|^2|\nabla|A||^2 \leq |A|^2|\nabla A|^2.$$

Usando mais uma vez (2.36),

$$|A|^2|\nabla A|^2 \geq m^4H^2|\nabla H|^2 = m^2(|A|^2 + m(m-1)H_2)|\nabla H|^2. \tag{3.2}$$

Dessa forma,

$$|A|^2(|\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2) \geq m^3\,(m-1)\,H_2|\nabla H|^2. \tag{3.3}$$

Sendo o vetor curvatura média normalizado, se $H_2 \geq 0$ temos

$$|\nabla A|^2 \geq m^2|\nabla H|^2. \tag{3.4}$$

Note que se (3.4) for uma igualdade, de (3.3) devemos ter $H_2|\nabla H|^2 = 0$. Assumindo então que $H_2 > 0$ obtemos o resultado desejado. ■

O segundo resultado também generaliza para codimensão e dimensão arbitrárias o Lema 2.5 de (DOS SANTOS, 2021).

Lema 3.1.2 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc imersa no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$ com segunda curvatura média constante. Se $H_2 \geq 0$, então o operador P definido em (2.33) é positivo semidefinido e, consequentemente, o operador $\Box$ é semielíptico. No caso em que $H_2 > 0$, temos que P é positivo definido e o $\Box$ elíptico.*

Demonstração. Consideremos um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_m\}$ em Σ^m tal que diagonaliza a segunda forma fundamental, isto é, $h_{ij}^{m+1} = \lambda_i^{m+1}\delta_{ij}$. Sendo $H_2 \geq 0$, de (2.36) temos

$$m^2H^2 = |A|^2 + m\,(m-1)\,H_2 \geq (\lambda_i^{m+1})^2,$$

para cada curvatura principal λ_i^{m+1} de Σ^m, $i = 1, \ldots, m$.

Por outro lado, como $H > 0$,

$$-mH \leq \lambda_i^{m+1} \leq mH, \qquad i = 1, \ldots, m$$

e portanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$0 \leq mH - \lambda_i \leq 2mH.$$

De (2.33) temos que os $mH - \lambda_i$, são exatamente os autovalores de P. Portanto, P é positivo semidefinido. Uma vez que o operador $\square$ é semielíptico se, e somente se, P é positivo semidefinido, isso mostra a segunda parte do resultado. ■

3.1.2 Um princípio do máximo no infinito

Neste tópico, temos por objetivo apresentar um princípio do máximo no infinito para o operador $\square$, o qual será nossa principal ferramenta analítica para a obtenção dos resultados principais. Iniciaremos com as seguintes preliminares.

Consideremos Σ^m uma variedade Riemanniana e $L : \mathcal{C}^2(\Sigma) \to \mathcal{C}^2(\Sigma)$ o operador semi elípitico definido por

$$L(u) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{P} \circ \mathrm{Hess}\ u\right), \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{P} : T\Sigma \to T\Sigma$ é um tensor simétrico positivo semidefinido. De acordo com (ALIAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016), dizemos que o *Princípio do Máximo de Omori-Yau* vale em Σ^m para o operador L se, e somente se, para qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ com $u^* = \sup_\Sigma u < \infty$, existir uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^m$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$u\left(p_k\right) > u^* - \frac{1}{k}, \qquad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad L(u(p_k)) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, o mesmo vale se para cada função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ com $u_* = \inf_\Sigma u > -\infty$: o Princípio do Máximo de Omori-Yau vale em Σ^m para o operador L se existir uma sequência $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^m$, com as propriedades

$$u\left(p_k\right) < u_* + \frac{1}{k}, \qquad |\nabla u\left(p_k\right)| < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad L(u(p_k)) > -\frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que o operador L é uma extensão natural do operador Laplaciano, pois, se $\mathcal{P} = I$, então $L = \Delta$.

O clássico resultado devido a (OMORI, 1967) e (YAU, 1975), assegura-nos que o princípio do máximo vale para o operador Laplaciano em toda variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Em (ALIAS; IMPERA; RIGOLI, 2013, Teorema 2.5), os autores mostraram que não é preciso que a curvatura de Ricci da variedade seja limitada inferiormente como no caso clássico. Eles mostraram que controlando o decaimento da curvatura de Ricci da seguinte forma

$$\mathrm{Ric} \geq -(m-1)G^2\left(r(x)\right)\langle , \rangle,$$

onde $r(x)$ é a função distância a um ponto fixo dado em Σ^m e $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave satisfazendo:

$$(i)\ G(0) > 0, \qquad (ii)\ G'(0) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{G(t)} = +\infty \tag{3.6}$$

é suficiente para concluir a validade do princípio do máximo de Omori-Yau.

Por outro lado, como pode ser visto em (PIGOLA; RIGOLI; SETTI, 2007, Teorema 1.9), a validade do princípio do máximo de Omori-Yau em Σ^m não depende da limitação da curvatura como era de se esperar. De fato, eles provaram que este princípio do máximo vale para qualquer variedade Riemanniana que admita uma certa função C^2 não-negativa satisfazendo certas condições.

Para a prova do nosso princípio do máximo, utilizaremos a seguinte generalização para operadores diferenciais do tipo traço definido como o definido em (3.5) encontrada em (ALIAS; IMPERA; RIGOLI, 2013; ALIAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016).

Lema 3.1.3 *Seja Σ^m uma variedade de Riemanniana completa não compacta, seja $o \in \Sigma^m$ um ponto de referência e denote por $r(x)$ a função distância Riemanniana a partir de o. Assuma que a curvatura seccional de Σ^m satisfaz*

$$K(x) \geq -G^2\left(r(x)\right), \tag{3.7}$$

onde $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ satisfaz (3.6). *Então o Princípio do Máximo de Omori-Yau vale em Σ^m para algum operador semi elíptico L com $\sup_\Sigma tr(\mathcal{P}) < +\infty$.*

Proposição 3.1.4 (Princípio do Máximo) *Seja Σ^m uma variedade Riemanniana completa e não-compacta cuja curvatura seccional satisfaz a condição* (3.7) *e seja L um operador semielíptico como em* (3.5) *com $\sup_\Sigma tr(\mathcal{P}) < +\infty$. Se $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ é uma função não negativa tal que $L(f) \geq af^\beta$ para alguma $a > 0$ e $\beta > 1$, então $f \equiv 0$.*

Demonstração. Considere a função $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, que será escolhida adiante, e tomemos $g = \phi \circ f$. Definida dessa forma, o gradiente e o Hessiano de g são dados por

$$\nabla g = \phi'(f)\nabla f \quad \text{e} \quad \operatorname{Hess} g = \phi'(f)\operatorname{Hess} f + \phi''(f)\nabla f.$$

Usando isto em (3.5) temos,

$$\begin{aligned} L(g) &= \phi'(f)L(f) + \phi''(f)\langle \mathcal{P}(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= \phi'(f)L(f) + \frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}\langle \mathcal{P}(\nabla g), \nabla g\rangle. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Consequentemente,

$$-\frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}\langle \mathcal{P}(\nabla g), \nabla g\rangle + L(g) = \phi'(f)L(f).$$

Escolhendo $\phi(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ com $\alpha > 0$, vemos facilmente que as duas primeiras derivadas de ϕ são dadas por:

$$\phi'(t) = -\alpha\phi(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad \text{e} \quad \frac{\phi''(t)}{\phi'(t)^2} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\frac{1}{\phi(t)}.$$

Portanto de (3.8),

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\langle \mathcal{P}(\nabla g), \nabla g\rangle - \phi(f)L(g) = \alpha\phi(f)^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}L(f) \geq a\alpha\frac{f^\beta}{(1+f)^{2\alpha+1}}.$$

Se tomarmos $\alpha = \frac{\beta-1}{2} > 0$ chegamos à

$$a\alpha\left(\frac{f}{1+f}\right)^\beta \leq -gL(g) + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\langle \mathcal{P}(\nabla g), \nabla g\rangle. \tag{3.9}$$

Uma vez que, L é semi elíptico se, e somente se, $\mathcal{P}$ é positivo semidefinido e $\rho = \sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty$, temos

$$\langle \mathcal{P}(\nabla g), \nabla g\rangle \leq \rho|\nabla g|^2.$$

Assim de (3.9),

$$a\alpha\left(\frac{f}{1+f}\right)^\beta \leq -gL(g) + \rho\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2. \tag{3.10}$$

Sendo g limitada inferiormente, L semi elíptico, $\sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty$ e a curvatura seccional de Σ^m satisfazendo (3.7), estamos em condições de aplicar o Lema 3.1.3 a fim de obter uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em Σ^m tal que

$$g(p_k) < g_* + \frac{1}{k}, \quad |\nabla g(p_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad L(g(p_k)) > -\frac{1}{k}.$$

Com isso, $f(p_k) \to f^*$. Substituindo em (3.10) , temos que

$$a\alpha\left(\frac{f(p_k)}{1+f(p_k)}\right)^{\beta} \leq \frac{1}{k}\left(g_* + \frac{1}{k}\right) + \frac{\rho(\alpha+1)}{k\alpha}.$$

Fazendo $k \to +\infty$, temos $f^* = 0$, e já que $f \geq 0$, segue que $f \equiv 0$. ∎

3.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, apresentaremos os resultados principais deste capítulo concernentes a caracterização de subvariedades pnmc com segunda curvatura média H_2 e η-ângulo constantes no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$. O primeiro resultado nos fornece uma estimativa inferior para o operador de Cheng-Yau agindo sobre a função curvatura média. Este resultado será essencial para os nossos objetivos.

Proposição 3.2.1 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, $n \geq m \geq 3$, com segunda curvatura média constante, $H_2 \geq 0$. Então, temos*

$$\begin{aligned}\square(mH) \geq{}& cm|\phi_N|^2 - cmH\langle\phi_\eta(T), T\rangle - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &+ |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + c(m-|T|^2)\right).\end{aligned}$$

Demonstração. A ideia é utilizarmos os resultados obtidos na seção anterior para dar uma estimativa à fórmula do tipo Simons mais adequada aos nossos propósitos do que aquela apresentada na Proposição 2.1.3. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schawarz e o Lema 2.1.5, temos as seguintes desigualdades:

$$\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 \leq |\phi_\eta|^4 + 2|\phi_\eta|^2\left(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2\right) + \sum_{\alpha,\beta>m+1}[\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2, \tag{3.11}$$

e

$$mH\sum_\alpha \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2\phi_\eta) \geq -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_\eta|. \tag{3.12}$$

Mais ainda, usando o Lema 2.1.6 temos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta>m+1}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right) &\leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha>m+1}|\phi_\alpha|^2\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2)^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Logo, juntando as desigualdades (3.11), (3.12) e (3.13) obtemos,

$$\begin{aligned} mH\sum_{\alpha}\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2\phi_\eta) &- \sum_{\alpha,\beta\neq m+1} N\left(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha\right) - \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 \\ &\geq -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_\eta| - |\phi_\eta|^4 - 2|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2) \\ &\quad - \frac{3}{2}(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2)^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Note que os três últimos termos de (3.14) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -|\phi_\eta|^4 - 2|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2) &- \frac{3}{2}(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2)^2 \\ &= -|\phi_\eta|^4 + \frac{1}{2}|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|)^2 - \frac{5}{2}|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2) \\ &\quad - \frac{3}{2}(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2) - \frac{3}{2}|\phi|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2) - |\phi|^2|\phi_\eta|^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aplicando a desigualdade clássica de Young para

$$a = \sqrt{\frac{m}{m-1}}|\phi|H \quad \text{e} \quad b = |\phi||\phi_\eta|,$$

obtemos,

$$\sqrt{\frac{m}{m-1}}H|\phi|^2|\phi_\eta| \leq \frac{m}{2\,(m-1)}|\phi|^2H^2 + \frac{1}{2}|\phi|^2|\phi_\eta|^2. \tag{3.16}$$

Portanto, inserindo (3.15) e (3.16) em (3.14) e por fim, na Proposição 2.1.3, temos

$$\begin{aligned} \Box(mH) \geq |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha\left(T\right)|^2 + c(m - |T|^2)|\phi|^2 \\ - cmH\langle\phi_\eta\left(T\right), T\rangle - \frac{m\left(m-2\right)}{2\left(m-1\right)}H^2|\phi|^2 - \frac{m-2}{2}|\phi|^2|\phi_\eta|^2 \\ - \frac{3}{2}|\phi|^4 + \frac{1}{2}|\phi|^2|\phi_\eta|^2 + mH^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2). \end{aligned}$$

Como $H_2 \geq 0$, podemos usar o Lema 3.1.1 a fim de obter

$$\begin{aligned} \Box(mH) \geq cm|\phi_N|^2 - cmH\langle\phi_\eta(T), T\rangle - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + c(m - |T|^2)|\phi|^2 \\ - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{(m-3)}{2}|\phi|^2|\phi_\eta|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}|\phi|^2H^2 \\ + \frac{1}{2}|\phi_\eta|^2(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2). \end{aligned}$$

Sendo $m \geq 3$ e

$$|\phi|^2 = |\phi_\eta|^2 + \sum_{\alpha > m+1} |\phi_\alpha|^2 \geq |\phi_\eta|^2, \tag{3.17}$$

temos que

$$\begin{aligned} \square(mH) \geq\ & cm|\phi_N|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + |\phi|^2\left(-\frac{m}{2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H^2 + c(m - |T|^2)\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por fim, de (2.28) e (2.36) podemos escrever

$$mH^2 = \frac{1}{m-1}|\phi|^2 + mH_2. \tag{3.19}$$

Consequentemente, substituindo (3.19) em (3.18),

$$\begin{aligned} \square(mH) \geq\ & cm|\phi_N|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + c(m - |T|^2)\right). \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

Observação 3.2.2 *Já que o campo vetorial curvatura média é normalizado paralelo, $H > 0$ e deste modo, de* (3.19), *temos que as funções $|\phi|$ e H_2 não podem se anular simultaneamente. Isto é, se Σ^m for totalmente umbílica, então Σ^m não pode ser totalmente geodésica.*

Agora, apresentaremos nossos resultados de caracterização acerca de subvariedades pnmc com segunda curvatura média constante no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Como aplicação da Proposição 3.2.1 temos o nosso primeiro resultado:

Teorema 3.2.3 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 3$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$|\phi|^2 + \frac{2(2m+1)}{m}|T|^2 \leq 2 + \frac{m}{m-1}H_2, \tag{3.20}$$

então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1}$.

Demonstração. Iniciamos tomando $c = 1$ na Proposição $3.2.1$. Então

$$\begin{aligned}\Box(mH) &\geq m|\phi_N|^2 - mH\langle\phi_\eta(T), T\rangle - 2m\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &+ |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + m - |T|^2\right).\end{aligned} \tag{3.21}$$

E segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$-2m\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \geq -2m\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2|T|^2 = -2m|\phi|^2|T|^2. \tag{3.22}$$

Sendo Σ^m pnmc com η-ângulo constante, segue de (2.23) que

$$0 = X\langle\eta, \xi\rangle = \langle\nabla_X^\perp\eta, N\rangle + \langle\eta, \nabla_X^\perp N\rangle = -\langle A(T, X), \eta\rangle = -\langle A_\eta(T), X\rangle, \tag{3.23}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Assim, (2.28) e (3.23) garantem que $\phi_\eta(T) = -HT$. Portanto

$$m|\phi_N|^2 - m\langle\phi_\eta(T), T\rangle = m|\phi_N|^2 + mH^2|T|^2 \geq 0. \tag{3.24}$$

Voltando para a desigualdade (3.21) e inserindo as desigualdades (3.22) e (3.24), temos

$$\Box(mH) \geq |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 - (2m+1)|T|^2 + m\right). \tag{3.25}$$

Agora, da hipótese (3.20), vemos facilmente que

$$\begin{aligned}-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}&|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 - (2m+1)|T|^2 + m \\ &= -\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{m}{m-1}H_2 + 2\right) - (2m+1)|T|^2 \\ &\geq -\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m}{2}\left(|\phi|^2 + \frac{2(2m+1)}{m}|T|^2\right) - (2m+1)|T|^2 \\ &= \frac{m}{2(m-1)^2}|\phi|^2.\end{aligned}$$

Logo de (3.25),

$$\Box(mH) \geq \frac{m}{2(m-1)^2}|\phi|^4. \tag{3.26}$$

Como $H_2 \geq 0$ o Lema 3.1.2 garante que P é positivo semidefinido, de (3.19) segue que

$$\begin{aligned}\Box(|\phi|^2) &= \Box\Big((m-1)(mH^2 - mH_2)\Big) \\ &= 2(m-1)H\Box(mH) + 2m(m-1)\langle P(\nabla H), \nabla H\rangle \\ &\geq 2(m-1)H\Box(mH).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Além disso, segue de $H_2 \geq 0$ e (3.19),

$$|\phi|^2 \leq m(m-1)H^2.$$

Portanto, de (3.26) e (3.27) temos

$$\Box(|\phi|^2) \geq \frac{1}{m-1}\sqrt{\frac{m}{m-1}}|\phi|^5. \tag{3.28}$$

Para concluirmos que Σ^m é totalmente umbílica, isto é, que $|\phi|^2 = 0$, precisaremos utilizar a Proposição 3.1.4 à função $|\phi|^2$. Neste caso, é necessário verificarmos que suas condições são satisfeitas. Primeiro observemos que a hipótese (3.20) garante que,

$$\begin{aligned} m\,(m-1)\,H^2 &= |\phi|^2 + m\,(m-1)\,H_2 \\ &= |\phi|^2 + \frac{2\,(2m+1)}{m}|T|^2 - \frac{2(2m+1)}{m}|T|^2 + m(m-1)H_2 \\ &\leq 2 + \frac{m}{m-1}H_2 + m\,(m-1)\,H_2. \end{aligned}$$

Isto implica que $\sup_\Sigma H < +\infty$. Consequentemente de (2.34),

$$\sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) = m(m-1)\sup_\Sigma H < +\infty. \tag{3.29}$$

Por outro lado, já que estamos supondo $H_2 \geq 0$, segue de (3.20) que, para $i = 1, \ldots, m$ e $m+1 \leq \alpha \leq n+1$,

$$(\lambda_i^\alpha)^2 \leq |A|^2 = m^2H^2 - m\,(m-1)\,H_2 \leq m^2H^2. \tag{3.30}$$

Logo, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $m+1 \leq \alpha \leq n+1$, temos

$$|\lambda_i^\alpha| \leq mH. \tag{3.31}$$

Assim, as duas desigualdade acima nos garantem que

$$(h_{ij}^\alpha)^2 \leq |A|^2 \leq m^2H \quad \text{e} \quad |h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha| = |h_{ii}^\alpha||h_{jj}^\alpha| \leq (mH)^2. \tag{3.32}$$

Portanto, inserindo (3.31) e (3.32) na equação de Gauss (2.7) segue que,

$$R_{ijij} \geq 1 - 2|T|^2 - (mH)^2 - |A|^2 \geq -1 - 2m^2\sup_\Sigma H^2 > -\infty. \tag{3.33}$$

Isto mostra que a curvatura seccional de Σ^m é limitada inferiomente pela constante positiva $G(t) = (1 + 2m^2 \sup_\Sigma H^2)^{1/2}$. Com tudo isso, estamos em condições para aplicar a Proposição 3.1.4 a desigualdade (3.28) para $\beta = 5/2$, a fim de concluir que $|\phi|^2 = 0$, ou seja, que Σ^m é totalmente umbílica. Com isso, temos que todas as desigualdades obtidas ao longo da demonstração se tornam igualdades. Em particular, a igualdade em (3.24) implica que $\phi_N = 0$ e $T = 0$, ou seja, isto mostra que ∂_t é normal à Σ^m.

Uma vez que $n > m$, se $n = m+1$ então Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbilíca de $\mathbb{S}^{m+1}$ e o resultado esta mostrado. Suponhamos então que $n > m+1$. Como $\phi_\alpha = 0$ para todo $\alpha \geq m+2$, segue de (2.28) que $A_\alpha = 0$, para todo $\alpha \geq m+2$, desta forma o primeiro subespaço normal

$$N_1 = \text{span}\{A(X,Y); X, Y \in TM\} = \text{span}\{e_{m+1}\}$$

possui dimensão 1 e $\nabla^\perp N_1 \subset L$, onde $L = N_1 + \text{span}\{N\}$. Como $N_1 \cap \text{span}\{N\} = \{0\}$ segue que

$$q = \dim(L) = \dim(N_1) + \dim(\text{span}\{N\}) - \dim(N_1 \cap \text{span}\{N\}) = 2.$$

Consequentemente, a condição $n + 1 - m > 2 = q$ é satisfeita e portanto podemos aplicar a Proposição (2.1.11) para garantir que a codimensão de Σ^m se reduz à 2. Assim, Σ^m está imersa como uma subvariedade da subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Como $T = 0$, segue que Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbilíca de $\mathbb{S}^{m+1}$ o que conclui a prova. ■

Observação 3.2.4 *Note que no Teorema 3.2.3 não é possível obtermos objetos que atingem a igualdade em* (3.20). *De fato, assuma que Σ^m é uma subvariedade que satisfaz todas as condições do Teorema 3.2.3 com a igualdade ocorrendo em* (3.20). *Então pelo Teorema 3.2.3, Σ^m deve ser uma subvariedade totalmente umbílica contida em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e, portanto, $|\phi| = |T| = 0$. Substituindo em* (3.20), *chegamos à:*

$$0 = 2 + \frac{m}{m-1} H_2,$$

o que contradiz o fato de H_2 ser não negativa.

Nosso segundo resultado é uma versão do Teorema 3.2.3 para o caso $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, em outras palavras:

Teorema 3.2.5 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 3$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$|\phi|^2 - \frac{2\,(m+1)}{m}|T|^2 \leq -4 + \frac{m}{m-1}H_2, \tag{3.34}$$

então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1}$.

Demonstração. Primeiramente consideremos um referencial ortonormal $\{e_{m+1}, \ldots, e_{n+1}\}$ ao longo do fibrado normal Σ^m tal que $e_{m+1} = \eta$. Assim, de (2.25), escrevemos

$$\phi_N = \sum_{\alpha=m+1}^{n+1} \langle N, e_\alpha \rangle \phi_\alpha.$$

Como aplicação da a desiguladade de Cauchy-Schwarz, segue da definição de norma de Hilbert-Schmidt que,

$$\begin{aligned} |\phi_N|^2 &= \sum_{\alpha,i} \langle N, e_\alpha \rangle^2 \langle \phi_\alpha\,(e_i)\,, \phi_\alpha\,(e_i) \rangle \\ &\leq \sum_{\alpha,i} |N|^2 |e_\alpha|^2 \langle \phi_\alpha\,(e_i)\,, \phi_\alpha\,(e_i) \rangle = |N|^2 |\phi|^2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Por outro lado, usando (3.23) chegamos à:

$$\begin{aligned} &mH\langle \phi_\eta(T), T\rangle + 2m\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &\qquad = mH\langle \phi_\eta(T), T\rangle + 2m|\phi_\eta(T)|^2 + 2m\sum_{\alpha>m+1} |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &\qquad \geq mH\langle \phi_\eta(T), T\rangle + 2m|\phi_\eta(T)|^2 \\ &\qquad = -mH^2|T|^2 + 2mH^2|T|^2 \\ &\qquad = mH^2|T|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Logo, substituindo (3.35) e (3.36) na Proposição 3.2.1 com $c = -1$, temos

$$\square(mH) \geq |\phi|^2 \left(-\frac{m^2\,(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 - 2m + (m+1)\,|T|^2 \right).$$

Da hipótese (3.34), um cálculo direto nos dá que

$$-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 - 2m + (m+1)|T|^2 \geq \frac{m}{2(m-1)^2}|\phi|^2.$$

A partir do exposto acima, pensando de maneira similar ao que foi feito na prova do Teorema 3.2.3, obtem-se:

$$\square(|\phi|^2) \geq \frac{1}{m-1}\sqrt{\frac{m}{m-1}}|\phi|^5.$$

Assim como no resultado anterior, não é difícil verificar que, $\sup_\Sigma \mathrm{tr}\,(P) < +\infty$ e que

$$R_{ijij} \geq -1 + 2|T|^2 - (mH)^2 - |A|^2 \geq -1 - 2m^2 \sup_\Sigma H^2 > -\infty.$$

Portanto, como aplicação da Proposição 3.1.4 devemos ter que $|\phi|^2 = 0$. Logo, todas as desigualdades obtidas ao longo da prova tornam-se igualdades e, em particular, a igualdade em (3.36) implica que $T = 0$. A partir daqui, procedemos exatamente como na última parte do Teorema 3.2.3 para concluir que Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{m+1}$. ■

Observação 3.2.6 *Diferente do que ocorre na Observação 3.2.4, no Teorema 3.2.5 é possível obtermos objetos que atingem a igualdade em* (3.34). *De fato se* Σ^m *é uma hipersuperfície totalmente umbílica de um slice de* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, *então* $H_2 = 4(m-1)/m > 0$.

3.2.1 Alguns casos particulares

Dedicaremos esta seção para alguns casos particulares dos Teorema 3.2.3 e 3.2.5. Para o primeiro deles, relembremos que uma subvariedade Σ^m é dita ser *pseudo-umbílica* se o seu vetor curvatura média é não-nulo e é uma direção umbílica, isto é,

$$A(X,Y) = \langle X, Y\rangle h,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Desta forma, de (2.27), $\phi_h = 0$. Uma vez que $\phi_h = H\phi_\eta$ e $H > 0$, devemos ter que $\phi_\eta = 0$. Sob esta hipótese, podemos ver que as condições $n \geq 3$ e η-ângulo constante requeridas nos Teoremas 3.2.3 e 3.2.5 não são mais necessárias. Além disso, a expressão (3.18) da Proposição 3.2.1 fica descrita por:

$$\begin{aligned}\Box(mH) &\geq cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ &+ |\phi|^2\left(-\frac{(3m-5)}{2(m-1)}|\phi|^2 - mH_2 - c(m-|T|^2)\right).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Proposição 3.2.7 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa de $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$, $n > m \geq 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geq 0$. Se Σ^m for pseudo-umbílica e,*

$$|\phi|^2 + \frac{2m+1}{m}|T|^2 \leq 1 + H_2, \tag{3.38}$$

então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1}$.

Demonstração. Tomando $c = 1$ em (3.37) e usando (3.22),

$$\begin{aligned}\Box(mH) &\geq m|\phi_N|^2 - 2m|\phi|^2|T|^2 + |\phi|^2\left(-\frac{(3m-5)}{2(m-1)}|\phi|^2 + mH_2 + (m-|T|^2)\right) \\ &\geq |\phi|^2\left(-\frac{(3m-5)}{2(m-1)}|\phi|^2 + mH_2 + m - 2(m+1)|T|^2\right).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Agora, da hipótese (3.38),

$$-\frac{(3m-5)}{2(m-1)}|\phi|^2 + m(H_2+1) - (2m+1)|T|^2 \geq \frac{2m^2-5m+5}{2(m-1)}|\phi|^2. \tag{3.40}$$

Assim, substituindo (3.27) em (3.40) temos

$$\Box(|\phi|^2) \geq \frac{2m^2-5m+5}{\sqrt{m(m-1)}}|\phi|^5.$$

Portanto, pensando da mesma forma de (3.29) e (3.33), usamos a Proposição 3.1.4 para garantir que $|\phi|^2 = 0$. Como H_2 é constante, de (3.19), temos que H é constante. Deste modo, a variedade pnmc se torna uma variedade pmc. Um cálculo usual utilizando a equação de Codazzi e a pseudo-umbilicidade, nos garante que $T = 0$. Portanto, a conclusão segue como na última parte do Teorema (3.2.3). ■

De maneira similar, temos a versão desta proposição para o caso em que Σ^m é uma subvariedade pnmc completa em $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$.

Proposição 3.2.8 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc completa de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geq 0$. Se Σ^m for pseudo-umbílica e*

$$|\phi|^2 - \frac{m+1}{m}|T|^2 \leq -2 + H_2,$$

então Σ^m é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1}$.

O segundo caso particular dos Teorema 3.2.3 e 3.2.5 trata-se do caso em que Σ^2 é uma superfície do espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$. Para este estudo, precisaremos da seguinte releitura da Proposição 3.2.1.

Primeiramente, ao tomarmos $m = 2$ em (3.14), como aplicação de (3.15), vemos que

$$\begin{aligned} 2H\sum_{\alpha=3}^{n+1}\operatorname{tr}(\phi_\alpha^2\phi_3) - \sum_{\alpha,\beta=3}^{n+1}\Big(N\left(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha\right) + [\operatorname{tr}\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)]^2\Big) \\ \geq \frac{1}{2}|\phi_3|^2(|\phi|^2 - |\phi_3|^2) - \frac{3}{2}|\phi|^2(|\phi|^2 - |\phi_3|^2) - |\phi|^2|\phi_3|^2 \\ \geq -\frac{3}{2}|\phi|^2(|\phi|^2 - |\phi_3|^2) - |\phi|^2|\phi_3|^2, \end{aligned} \tag{3.41}$$

com a igualdade ocorrendo na última linha se, e somente se, ou $|\phi_3| = 0$ ou $|\phi| = |\phi_3|$.

Por outro lado, de 3.17 temos que

$$-\frac{3}{2}|\phi|^2(|\phi|^2 - |\phi|^3) - |\phi|^2|\phi_3|^2 = -\frac{3}{2}|\phi|^4 + \frac{1}{2}|\phi|^2|\phi_3|^2 \geq -2|\phi|^4, \tag{3.42}$$

onde a igualdade acontece se, e somente se, $|\phi| = |\phi_3| = 0$. Portanto, assumindo que H_2 é constante, quando inserimos (3.42) em (3.41) e então na Proposição 3.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \Box(2H) \geq |\nabla A|^2 - 4|\nabla H|^2 + 2c|\phi_N|^2 - 4c\sum_\alpha|\phi_\alpha(T)|^2 - 2cH\langle\phi_3(T), T\rangle \\ + |\phi|^2\left(-2|\phi|^2 + 2H^2 + c(2 - |T|^2)\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Com isso podemos enunciar os seguintes resultados para o caso $m = 2$:

Teorema 3.2.9 *Seja Σ^2 uma superfície pnmc completa de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > 2$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$\sup_\Sigma(|\phi|^2 + 5|T|^2) < 2 + 2H_2, \tag{3.44}$$

então Σ^2 é uma superfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$.

Demonstração. Façamos $c = 1$ em (3.43). Uma vez que $H_2 \geq 0$ segue do Lema 3.1.1 que

$$\begin{aligned} \square(2H) \geq 2|\phi_N|^2 - 4\sum_{\alpha} |\phi_\alpha(T)|^2 - 2H\langle \phi_3(T), T\rangle \\ + |\phi|^2(-2|\phi|^2 + 2H^2 + 2 - |T|^2). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Sendo o η-ângulo constante, a desigualdade (3.23) é válida. Portanto, inserindo (3.23) em (3.45) e usando as equações (3.19) e (3.22), obtemos

$$\square(2H) \geq |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 + 2H_2 + 2 - 5|T|^2\right). \tag{3.46}$$

Agora, considerando $d := -\sup_\Sigma \left(|\phi|^2 + 5|T|^2\right) + 2 + 2H_2 > 0$, temos

$$\square(2H) \geq d|\phi|^2, \tag{3.47}$$

e portanto, de (2.36) e (3.27),

$$\square(|\phi|^2) \geq d\sqrt{2}|\phi|^3.$$

Da hipótese (3.44), vemos que a curvatura Gaussiana K de Σ^2 satisfaz:

$$2K = 2(1 - |T|^2) + 2H_2 \geq 2 - \sup_\Sigma(|\phi|^2 + 5|T|^2) + 2H_2 + 3|T|^2 \geq 0. \tag{3.48}$$

Por (3.44) temos que H é limitado. Consequentemente, $\sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty$. Portanto, aplicando a Proposição 3.1.4 concluímos $|\phi|^2 = 0$. Neste ponto o resultado segue como a última parte da prova do Teorema 3.2.3. ■

Encerramos esta seção com o caso de superfícies em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.10 *Seja Σ^2 uma superfície pnmc completa de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > 2$, com η-ângulo e segunda curvatura média $H_2 \geq 0$ constantes. Se*

$$\sup_\Sigma \left(|\phi|^2 + 3|N|^2\right) < -1 + 2H_2, \tag{3.49}$$

então Σ^2 é uma superfície cmc totalmente umbílica em $\mathbb{H}^3$.

Demonstração. Vamos proceder como na demonstração do Teorema 3.2.9. Observemos que, de (2.21), (3.35) e (3.36) a desigualdade (3.43) é dada por:

$$\square(2H) \geq |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 + 2H_2 - 4 + 3|T|^2\right) = |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 + 2H_2 - 1 - 3|N|^2\right).$$

Da hipótese (3.49), podemos tomar $d := -\sup_\Sigma \left(|\phi|^2 + 3|N|^2\right) - 1 + 2H_2 > 0$. Portanto

$$\Box(2H) \geq d|\phi|^2.$$

Consequentemente,

$$\Box(|\phi|^2) \geq d\sqrt{2}|\phi|^3.$$

Agora, seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 3.2.5, vemos de (3.49) que

$$\sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty \quad \text{e} \quad K \geq \frac{1}{2}.$$

Por fim, aplicamos a Proposição 3.1.4 e a última parte do Teorema 3.2.5 para obtermos o resultado desejado. ■

4 CARACTERIZAÇÃO DE SUBVARIEDADES PNMC EM ESPAÇOS PRODUTO VIA DESIGUALDADES INTEGRAIS

No capítulo anterior obtivemos resultados de rigidez para pnmc subvariedades η-ângulo constante nos espaços produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$ cuja segunda curvatura média era constante e não negativa e com restrições adequadas na parte sem traço do seu operador de forma. Nesta configuração, com o auxílio de um princípio do máximo do tipo Omori-Yau 3.1.4, conseguimos caracterizá-las como hipersuperfícies cmc totalmente umbílicas de $M^{m+1}(c) \hookrightarrow M^n(c) \times \mathbb{R}$.

Contudo a abordagem aplicada no capítulo anterior permitia apenas a caracterização de subvariedades totalmente umbílicas. Neste capítulo daremos continuidade ao estudo iniciado no capítulo anterior mas com o propósito de obter nos resultados de classificação, subvariedades paralelas com as duas curvaturas principais distintas e constantes. Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte dos trabalhos (DOS SANTOS; DA SILVA, 2022; DOS SANTOS, DA SILVA; DE SOUZA, 2022).

4.1 SUBVARIEDADES DO TIPO WEINGARTEN LINEAR

Na teoria de imersões isométricas em formas espaciais, são conhecidas por subvariedades *Weingarten linear* aquelas cujas curvaturas média e escalar satisfazem a seguinte relação:

$$rH + aR = b,$$

onde $a, b, r \in \mathbb{R}$ e R denota curvatura escalar da subvariedade (LI; SUH; WEI, 2009; HOU; YANG , 2010; DE LIMA; DOS SANTOS; VELÁSQUEZ, 2017).

No contexto de subvariedades imersas em espaços produto, no entanto, adotaremos a seguinte definição para tais subvariedades.

Definição 4.1.1 *Seja Σ^m uma subvariedade do produto Riemanniano $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Diremos que Σ^m é uma subvariedade Weingarten linear, se as suas duas primeiras curvaturas média forem linearmente relacionadas, isto é, se*

$$H_2 = aH + b \tag{4.1}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, dizer que Σ^m é uma subvariedade Weingarten linear, equivale a dizer que a sua curvatura média H e a sua segunda curvatura média H_2 satisfazem a relação de Weingarten (4.1). Observemos que as subvariedades Weingarten linear são extensões naturais das subvariedades com H_2 constante, pois estas resumem-se ao caso $a = 0$ na definição (4.1).

Para estudarmos estes objetos precisaremos introduzir um operador diferencial adequado. Assim, vamos considerar o operador de Cheng-Yau definido em (2.33) com as devidas modificações:

$$\begin{aligned} L(u) &= \sum_{i,j} \left[\left(mH - \frac{m-1}{2} a \right) \delta_{ij} - h^{m+1} \right] u_{ij} \\ &= \left(mH - \frac{m-1}{2} a \right) \Delta u - \sum_{i,j} h_{i,j}^{m+1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde, assim como antes, os u_{ij} representam as componentes do Hessiano de $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$. O operador L definido em (4.2) será denotado como *Operador modificado de Cheng-Yau*. Assim como em (2.34), também podemos ver o operador L do ponto de vista tensorial

$$L(u) = tr(P \circ \mathrm{Hess}\, u), \tag{4.3}$$

com

$$P = \left(mH - \frac{m-1}{2} a \right) I - h^\eta$$

onde I é a identidade na álgebra dos campos vetoriais em Σ^m e $h^\eta = (h_{ij}^\eta)$ denota a segunda forma fundamental de Σ^m na direção de e_{m+1}, que como antes denota o vetor curvatura média normalizado $\eta = e_{m+1} = h/H$. Diretamente da definição (4.3), as duas seguintes identidades são facilmente provadas:

$$L(uv) = uL(v) + vL(u) + 2\langle P(\nabla u), \nabla v \rangle \tag{4.4}$$

para cada $u, v \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ e

$$L(f(u)) = f'(u)L(u) + f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u \rangle \tag{4.5}$$

para toda função suave $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Portanto, fazendo $u = mH$ em (4.2), segue de (4.1) e (2.36) que

$$\begin{aligned}
L(mH) &= \sum_{i,j}\left[\left(mH - \frac{m-1}{2}a\right)\delta_{ij} - h_{ij}^{m+1}\right](mH)_{ij} \\
&= mH\Delta(mH) - \frac{m(m-1)}{2}\Delta(aH) - m\sum_{i,j} h_{ij}^{m+1}H_{i,j} \\
&= \frac{1}{2}\Delta(m^2H^2 - m(m-1)H_2) - m^2|\nabla H|^2 - m\sum_{i,j} h_{ij}^{m+1}H_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 - m^2|\nabla H|^2 - m\sum_{i,j} h_{ij}^{m+1}H_{ij}.
\end{aligned}$$

Dessa construção podemos então obter uma fórmula do tipo Simons para o operador modificado de Cheng-Yau agindo na função curvatura média de Σ^m em $M^n(c)\times\mathbb{R}$. Assim, o resultado a seguir generaliza a Proposição (2.1.8) para o contexto de subvariedades pnmc Weingarten linear.

Proposição 4.1.2 *Se Σ^m é uma subvariedade pnmc Weingarten linear de $M^n(c)\times\mathbb{R}$, então*

$$\begin{aligned}
L(mH) = |\nabla A|^2 &- m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\
&+ \left(c(m - |T|^2) + mH^2\right)|\phi|^2 - cmH\langle\phi_\eta(T), T\rangle \\
&\quad + mH\sum_{\alpha} tr(\phi_\alpha^2\phi_\eta) - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha\right) + \left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2\right).
\end{aligned}$$

4.1.1 Lemas Auxiliares

Nesta parte serão elencados alguns resultados importantes para a obtenção dos resultados principais deste capítulo. O primeiro deles extende o Lema 3.1.1 para o contexto de subvariedades Weingarten liner. A demonstração segue as mesmas ideias da prova do Lema 3.1.1, por questões de completude, apresentaremos a sua prova.

Lema 4.1.3 *Seja Σ^m uma subvariedade Weingarten linear de $M^n(c)\times\mathbb{R}$, tal que $H_2 = aH + b$ com*

$$(m-1)a^2 + 4mb \geq 0. \tag{4.6}$$

Então

$$|\nabla A|^2 \geq m^2|\nabla H|^2. \tag{4.7}$$

Mais ainda, se a desigualdade (4.6) *for estrita e a igualdade ocorrer em* (4.7), *então* Σ^m *será uma parte aberta de uma subvariedade paralela de* $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Inserindo a expressão $H_2 = aH + b$ em (2.36), temos

$$m^2H^2 = |A|^2 + m(m-1)(aH+b). \tag{4.8}$$

Agora tomando a derivada covariante em (4.8),

$$2|A|\nabla|A| = (2m^2H - m(m-1)a)\nabla H.$$

Consequentemente,

$$4|A|^2|\nabla|A||^2 = (2m^2H - m(m-1)a)^2|\nabla H|^2. \tag{4.9}$$

Não é difícil verificar a partir de (4.9) que

$$\Big(2m^2H - m(m-1)a\Big)^2 = 4m^2|A|^2 + m^2(m-1)\Big(4mb + (m-1)a^2\Big).$$

Utilizando então (4.8) chegamos à:

$$4|A|^2|\nabla|A||^2 = [4m^2|A|^2 + m^2(m-1)(4mb + (m-1)a^2)]|\nabla H|^2 \geq 4m^2|A|^2|\nabla H|^2.$$

Aplicando agora a desigualdade de Kato (3.1),

$$m^2|A|^2|\nabla H|^2 \leq |A|^2||\nabla|A||^2 \leq |A|^2|\nabla A|^2,$$

isto é,

$$|A|^2\Big(m^2|\nabla H|^2 - |\nabla A|^2\Big) \leq 0.$$

Portanto, temos que

$$|A|^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad m^2|\nabla H|^2 = |\nabla A|^2 = 0.$$

ou

$$|\nabla A|^2 \geq m^2|\nabla H|^2.$$

Agora se a desigualdade em (4.7) for estrita, segue de (4.9) que

$$(2m^2H - m(m-1)a)^2 > 4m^2|A|^2.$$

Assumindo ainda que a igualdade em (4.9) também ocorre em Σ^m, vamos mostrar que H é constante em Σ^m. De fato, suponhamos por absurdo que isso não ocorre. Assim, existe um ponto $p \in \Sigma^m$ tal que $|\nabla H(p)| > 0$. Logo, por continuidade, deve existir uma vizinhança aberta $U \subset \mathfrak{X}(\Sigma)$ de p tal que $|\nabla H(q)| > 0$ para todo $q \in U$. Portanto, deduzimos de (4.9) que

$$4|A|^2(q)|\nabla A(q)|^2 > 4m^2|A|^2(q)|\nabla H(q)|^2. \tag{4.10}$$

Uma vez que estamos supondo ser válida a igualdade em (4.7), segue que $|\nabla A(q)|^2 = m^2|\nabla H(q)|^2 > 0$, para $q \in U$. Logo, inserindo isto em (4.10), chegamos a um absurdo. Portanto H deve ser constante em Σ^m. Consequentemente, $\nabla A = 0$ e Σ^m é parte de uma subvariedade paralela de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, o que conclui a prova. ■

No mesmo espírito do Lema anterior, o nosso próximo resultado é uma extensão do Lema 3.1.2 para subvariedades pnmc Weingarten linear.

Lema 4.1.4 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, tal que $H_2 = aH + b$, com $b \geq 0$. Então o operador P definido em* (4.3) *é positivo semi-definido. No caso em que $b > 0$, temos que P é positivo definido.*

Demonstração. Vamos considerar $\{e_1, \ldots, e_m\}$ um referencial ortonormal em Σ^m tal que $h_{ij}^{m+1} = \lambda_i^{m+1}\delta_{ij}$. Uma vez que $b \geq 0$, de (4.8) temos

$$\begin{aligned}(\lambda_i^{m+1})^2 \leq m^2H^2 - m(m-1)aH &= \left(mH - \frac{m-1}{2}a\right)^2 - \frac{(m-1)^2}{4}a^2 \\ &\leq \left(mH - \frac{m-1}{2}a\right)^2.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Afirmamos agora que $mH - \frac{m-1}{2}a \geq 0$. De fato, vamos considerar dois casos. Quando $a \leq 0$, nossa afirmação é imediata. Por outro lado, se $a > 0$, de (4.8) vemos que

$$mH\,(mH - (m-1)a) = |A|^2 + m(m-1)b > 0,$$

já que Σ^m é uma subvariedade pnmc. Portanto, $mH - (m-1)a > 0$ e, consequentemente, $mH - \frac{m-1}{2}a \geq 0$ como afirmado.

Daí, de (4.11) obtemos

$$-mH + \frac{m-1}{2}a \leq \lambda_i^{m+1} \leq mH - (m-1)a, \quad i = 1, \ldots, m,$$

e portanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$0 \leq mH - \frac{m-1}{2}a - \lambda_i \leq 2mH - (m-1)a.$$

Uma vez que $mH - \frac{m-1}{2}a - \lambda_i$ são os autovalores de P, segue que P é positivo semidefinido. Similarmente se $b > 0$, então P é positivo definido. ■

O último resultado desta seção será a principal ferramente analítica para a demonstração do nosso resultado principal. Mais precisamente, o lema a seguir vai garantir que a integral do operador L agindo em qualquer função não-negativa é igual a zero, isto é, o operador L sobre Σ^m, se comportará como uma divergência para tais funções. No que segue, Σ^m denotará uma subvariedade fechada (isto é, compacta sem bordo) de $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

Lema 4.1.5 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear fechada de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ tal que $H_2 = aH + b$. Se o η-ângulo é constante, então este deve ser nulo. Mais ainda, a seguinte equação é satisfeita*

$$\int_\Sigma L(u) d\Sigma = 0, \tag{4.12}$$

para toda função não-negativa $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$.

Demonstração. Iniciaremos afirmando que

$$L(u) = \operatorname{div}(P(\nabla u)) - \langle \operatorname{div}(P), \nabla u \rangle, \tag{4.13}$$

para todo $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$. De fato, sejam $p \in \Sigma^m$ e $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ adaptado à Σ^m e geodésico em uma vizinhança $U \subset \Sigma^m$ de p. Pela definição (4.2), temos

$$\begin{aligned}L(u) &= \mathrm{tr}(P \circ \ \mathrm{Hess}\, u) = \sum_{i=1}^{m}\langle P(e_i), \mathrm{Hess}\, u(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle P(e_i), \nabla_{e_i}\nabla u\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} e_i\langle P(e_i), \nabla u\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{e_i} P(e_i), \nabla u\rangle.\end{aligned}$$

Como P é simétrico,

$$\begin{aligned}L(u) &= \sum_{i=1}^{m} e_i\langle e_i, P(\nabla u)\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{e_i} P(e_i), \nabla u\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle e_i, \nabla_{e_i} P(\nabla u)\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle (\nabla_{e_i} P)e_i, \nabla u\rangle \\ &= \mathrm{div}(P(\nabla u)) - \langle \mathrm{div}\,(P), \nabla u\rangle,\end{aligned}$$

onde $\mathrm{div}(P) = \sum_i (\nabla_{e_i} P)e_i = \mathsf{tr}(\nabla P)$, com ∇P definido por

$$\nabla P(X,Y) = (\nabla_X P)Y = \nabla_X P(Y) - P(\nabla_X Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{4.14}$$

Isto mostra o afirmado.

De (4.3) e (4.14), escrevemos

$$\nabla P(e_i, e_i) = m\langle \nabla H, e_i\rangle e_i - \nabla h^{m+1}(e_i, e_i),$$

onde foi escolhido $\eta = e_{m+1}$ no referencial ortonormal adapatado supracitado. Usando a equação de Codazzi (2.11), um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned}\langle \nabla h^{m+1}(e_i, e_i), X\rangle &= \langle (\nabla_{e_i} h^{m+1})e_i, X\rangle = \langle e_i, \left(\nabla_{e_i} h^{m+1}\right) X\rangle \\ &= \langle (\nabla_X h^{m+1})e_i, e_i\rangle - \sum_j \langle X, e_j\rangle \overline{R}_{(m+1)iji},\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando (2.22), segue

$$\sum_j \langle X, e_j\rangle \overline{R}_{(m+1)_{iji}} = c\langle \eta, \partial_t\rangle \left(\langle e_i, T\rangle\langle X, e_i\rangle - \langle T, X\rangle\langle e_i, e_i\rangle\right).$$

Portanto,

$$\mathrm{div}(P) = m\nabla H - m\nabla H - c(m-1)\langle \eta, \partial_t\rangle T = -c(m-1)\langle \eta, \partial_t\rangle T.$$

Por outro lado, tomando o campo vetorial $X = uT$ e calculando a sua divergência, temos

$$\mathrm{div}(X) = u\mathrm{div}(T) + T(u) = u\mathrm{div}(T) + \langle T, \nabla u\rangle.$$

Além disso, segue diretamente de (2.23) que $\mathrm{div}(T) = m\langle h, \partial_t\rangle$. Daí,

$$\mathrm{div}(X) = um\langle h, \partial_t\rangle + \langle T, \nabla u\rangle. \tag{4.15}$$

Como estamos supondo que Σ^m possui η-ângulo constante,

$$\mathrm{div}(\langle \eta, \partial_t\rangle X) = um\langle \eta, \partial_t\rangle\langle h, \partial_t\rangle + \langle \eta, \partial_t\rangle\langle T, \nabla u\rangle. \tag{4.16}$$

Uma vez que $\langle h, \partial_t\rangle = H\langle \eta, \partial_t\rangle$, concluimos de (4.13), (4.15) e (4.16) que

$$\mathrm{div}(P(\nabla u)) = L(u) - (m-1)\mathrm{div}(\langle \eta, \partial_t\rangle X) + m(m-1)uH\langle \eta, \partial_t\rangle^2.$$

Portanto pelo Teorema de Stokes,

$$\int_\Sigma L(u)d\Sigma = -cm(m-1)\langle \eta, \partial_t\rangle^2 \int_\Sigma uHd\Sigma. \tag{4.17}$$

para qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$.

Por fim, escolhendo u como uma função constante e positiva, como $H > 0$, de (4.17) devemos ter $\langle \eta, \partial_t\rangle = 0$. Portanto, inserindo isto de volta em (4.17) obtemos o resultado desejado. ■

4.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção serão apresentados os resultados principais deste capítulo. Iniciaremos mostrando um resultado derivado de (GUO; LI, 2013, Equação 3.5) por completude.

Lema 4.2.1 *Se Σ^m é uma subvariedade de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, então*

$$(|\phi| - |\phi_\eta|)(|\phi| + |\phi_\eta|)^2 \leq \frac{32}{27}|\phi|^3. \tag{4.18}$$

Demonstração. Vamos analisar os seguintes casos: $|\phi| = 0$ e $|\phi| \neq 0$. No primeiro caso, segue que $|\phi_\eta| = 0$ e portanto (4.18) vale. Se, no entanto, $|\phi| \neq 0$, fazendo $x = |\phi_\eta|/|\phi|$, então $x \in [0,1]$ por (3.17). Desta forma, a função $f(x) = (1-x)(1+x)^2$ é tal que

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = \frac{32}{27}.$$

Logo, temos que

$$(1-x)(1+x)^2 = \left(\frac{|\phi| - |\phi_\eta|}{|\phi|}\right)\left(\frac{(|\phi| + |\phi_\eta|)^2}{|\phi|^2}\right) \leq \frac{32}{27},$$

e o resultado segue.

■

Como aplicação deste Lema e dos resultados técnicos obtidos nas seções anteriores, mostraremos uma estimativa inferior para o operador L avaliado no quadrado da norma do tensor de umbilicidade de uma subvariedade Weingarten linear. Este resultado será essencial às demonstrações dos nossos resultados.

Proposição 4.2.2 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, tal que $H_2 = aH + b$ com $a, b \geq 0$. Então*

$$L(|\phi|^2) \geq -2(m-1)\left(|\phi|^2 \varphi_{a,b,c}(|\phi|, |T|) - \mathcal{L}_c\right)\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}}, \tag{4.19}$$

onde

$$\mathcal{L}_c = cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - cmH\langle\phi_\eta(T), T\rangle \tag{4.20}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_{a,b,c}(x,y) = {}& \frac{m-2}{m-1}x^2 - m\left(a - \frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}x\right)\sqrt{\frac{x^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}} \\ & - c(m - y^2) + \frac{m(m-2)a}{2\sqrt{m(m-1)}}x - m\left(\frac{a^2}{2} + b\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Em particular, se $b > 0$ e a igualdade em (4.19) é válida, então Σ^m é parte de uma subvariedade paralela de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples.

Demonstração. Primeiramente observemos que, usando (3.14) na Proposição 4.1.2, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} L(mH) \geq\ & |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + \Big(c(m-|T|^2)+mH^2\Big)|\phi|^2 - cmH\langle\phi_{m+1}(T),T\rangle \\ & - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_\eta| + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora vamos reescrever adequadamente os termos da última linha da desigualdade anterior. Começando pelos três últimos termos, temos que

$$\begin{aligned} |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 &= -|\phi|^4 + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{1}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 \\ &= -|\phi|^4 - \frac{1}{2}\Big(|\phi|^4 - 2|\phi|^2|\phi_\eta|^2 + |\phi_\eta|^4\Big) \\ &= -|\phi|^4 - \frac{1}{2}\Big(|\phi|^2 - |\phi_\eta|^2\Big)^2 \\ &= -|\phi|^4 - \frac{1}{2}\left(|\phi| - |\phi_\eta|\right)^2\left(|\phi| + |\phi_\eta|\right)^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por outro lado, somando e subtraindo o termo $\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^3$ na última linha de (4.22),

$$\begin{aligned} & -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_\eta| + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 \\ & \qquad = -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^3 + \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2\left(|\phi| - |\phi_\eta|\right) \\ & \qquad\quad + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Logo, de (4.23) e (4.24), escrevemos

$$\begin{aligned} & -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_\eta| + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4 - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 \\ & \qquad = \left(|\phi| - |\phi_\eta|\right)\left(\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2 - \frac{1}{2}\left(|\phi| - |\phi_\eta|\right)\left(|\phi| + |\phi_\eta|\right)^2\right) \\ & \qquad\quad - |\phi|^4 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^3. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, inserindo (4.25) na desigualdade (4.24) obtemos

$$\begin{aligned} L(mH) \geq{} & |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle \\ & + (|\phi| - |\phi_\eta|)\left(\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2 - \frac{1}{2}(|\phi| - |\phi_\eta|)(|\phi| + |\phi_\eta|)^2\right) \\ & + |\phi|^2\left(-|\phi|^2 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi| + c(m - |T|^2) + mH^2\right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Por outro lado, das identidades (2.28) e (4.1), temos

$$H^2 = \frac{1}{m(m-1)}|\phi|^2 + aH + b. \tag{4.27}$$

Uma vez que $a, b \geq 0$ e que $H > 0$, derivamos de (4.27),

$$H \geq \frac{1}{\sqrt{m(m-1)}}|\phi|. \tag{4.28}$$

Logo, como aplicação do Lema 4.2.1 e da desigualdade (4.28), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2 - \frac{1}{2}(|\phi| - |\phi_{m+1}|)(|\phi| + |\phi_{m+1}|)^2 \\ & \qquad \geq \frac{m-2}{m-1}|\phi|^3 - \frac{1}{2}(|\phi| - |\phi_{m+1}|)(|\phi| + |\phi_{m+1}|)^2 \\ & \qquad \geq \left(\frac{m-2}{m-1} - \frac{16}{27}\right)|\phi|^3. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Supondo então que $m \geq 4$, devemos ter

$$\frac{m-2}{m-1} - \frac{16}{27} > 0,$$

o que implica em

$$\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2 - \frac{1}{2}(|\phi| - |\phi_{m+1}|)(|\phi| + |\phi_{m+1}|)^2 \geq 0. \tag{4.30}$$

Portanto de (4.30), (4.25) se escreve como,

$$\begin{aligned} L(mH) \geq{} & |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle \\ & + |\phi|^2\left(-|\phi|^2 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi| + c(m - |T|^2) + mH^2\right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Sendo $b \geq 0$, o Lema 2.1.6 garante que

$$|\nabla A|^2 - |\nabla H|^2 \geq 0.$$

Consequentemente, (4.31) se escreve

$$L(mH) \geq \mathcal{L}_c + |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}} H|\phi| + c(m - |T|^2) + mH^2 \right), \tag{4.32}$$

onde $\mathcal{L}_c$ esta definido em (4.20).

Agora o nosso próximo passo é reescrever a segunda expressão de (4.32) em termos das constantes a, b e c. Para isto, observemos que, aplicando um cálculo direto em (4.27),

$$\left| H - \frac{a}{2} \right| = \sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}}. \tag{4.33}$$

Afirmamos que $H - \frac{a}{2} \geq 0$. Com efeito, se $a \leq 0$, a afirmação é imediata. Caso contrário, reescrevedo a identidade (4.27)

$$mH\left(mH - (m-1)a\right) = |A|^2 + m(m-1)b$$

e usando que $b \geq 0$, temos

$$mH\left(mH - (m-1)a\right) \geq |A|^2 > 0,$$

pois $H > 0$. Logo, a desigualdade acima nos garante que $mH - (m-1)a > 0$. Então, se $a > 0$, segue que $\frac{a}{2} \leq \frac{m-1}{2}a$, uma vez que $m \geq 4$. Portanto, $H - \frac{a}{2} \geq 0$ como afirmado. Consequentemente, (4.33) é da forma:

$$H - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}}. \tag{4.34}$$

Das igualdades (4.34) e (4.27), vemos que

$$
\begin{aligned}
&-|\phi|^2-\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|+mH^2-c(m-|T|^2)\\
&\quad=-\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}|\phi|\left(\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)}+b+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}\right)-\frac{m-2}{m-1}|\phi|^2\\
&\qquad+ma\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)}+b+\frac{a^2}{4}}+m\left(\frac{a^2}{2}+b\right)-c(m-|T|^2)\\
&\quad=m\left(a-\frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}|\phi|\right)\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)}+b+\frac{a^2}{4}}-\frac{m(m-2)a}{2\sqrt{m(m-1)}}|\phi|\\
&\qquad-\frac{m-2}{m-1}|\phi|^2+m\left(\frac{a^2}{2}+b\right)-c(m-|T|^2)\\
&\quad=-|\phi|^2\varphi_{a,b,c}(|\phi|,|T|),
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

onde $\varphi_{a,b,c}$ é a função real definida em (4.21).

Logo, inserindo (4.35) em (4.31), obtemos

$$L(mH)\geq\mathcal{L}_c-|\phi|^2\varphi_{a,b,c}(|\phi|,|T|). \tag{4.36}$$

Além disso, sendo $b\geq 0$, o Lema 4.1.3 garante que o operador P é positivo semidefinido. Daí, por (4.4) e (4.8), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m-1}L(|\phi|^2)&=2HL(mH)+2m\langle P(\nabla H),\nabla H\rangle-aL(mH)\\
&\geq 2\left(H-\frac{a}{2}\right)L(mH).
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Portanto, usando que $H-\frac{a}{2}\geq 0$, inserimos (4.36) em (4.37) e obtemos a estimativa (4.21).

Por fim, analisemos a igualdade supondo que $b>0$. Note que se a igualdade em (4.19) acontecer, ela também deve acontecer em (4.37). Sendo o operador P ser positivo definido (cf. Lema 4.1.3) esta igualdade implicará que H é constante. Além disso, a desigualdade no Lema 4.1.5 também deve ser uma igualdade, sendo H constante, obtemos que $\nabla A=0$ e, portanto, temos que a segunda forma fundamental de Σ^m é paralela. Finalmente, (3.12) também será uma igualdade e daí, também obtemos a igualdade no Lema 2.1.6. Portanto, Σ^m é uma subvariedade paralela de $M^n(c)\times\mathbb{R}$ com exatamente duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples, o que conclui a demonstração. ■

Assim como na Observação 3.2.2 do Capítulo 3, também temos o análogo para subvariedades pnmc Weingarten linear a seguir.

Observação 4.2.1 *Usando as identidades* (4.1) *e* (4.29), *escrevemos*

$$|\phi|^2 = m(m-1)(H^2 - aH - b). \tag{4.38}$$

Supondo que $b \geq 0$. Então, vemos que se $|\phi|$ e b se anulam ao mesmo tempo, por (4.38) *e $H > 0$, temos que $a = H > 0$. No caso de $a = 0$, a relação Weingarten Linear se reduz à $H_2 = b \geq 0$. Portanto, como $H > 0$ não podemos ter que $|\phi|$ e b se anulem ao mesmo tempo.*

Agora, apresentaremos os resultados principais deste capítulo.

Teorema 4.2.3 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear fechada de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, tal que $H_2 = aH + b$, com $a, b \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma \geq 0, \tag{4.39}$$

para todo número $p > 2$, onde $\mathcal{F}_{a,b}$ é uma função real dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a,b}(x,y) = {} & \frac{m-2}{m-1}x^2 - m\left(a - \frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}x\right)\sqrt{\frac{x}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}} \\ & + (2m+1)y^2 + \frac{m(m-2)a}{2\sqrt{m(m-1)}}x - m\left(\frac{a^2}{2} + b + 1\right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Mais ainda, se $b > 0$ a igualdade ocorre em (4.39) *se, e somente se:*

(i) Ou Σ^m for uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) Ou $|\phi|^2 = \gamma(m, a, b)$ onde $\gamma(m, a, b)$ é uma constante positiva que depende apenas de a, b, m e Σ^m é isométrica a um produto do tipo $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r) \subset \mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, com $r = \sqrt{(m-2)/m(H_2+1)} > 0$.

Demonstração. Primeiramente vamos fazer $c = 1$ na Proposição (4.2.2). Como Σ^m possui η-ângulo constante, de (3.23) segue que $A_\eta(T) = 0$ e, portanto, $\phi_\eta(T) = -HT$. Usando este fato juntamente com (3.22) e (3.24) escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= m|\phi_N|^2 - 2m\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - mH\langle \phi_\eta(T), T\rangle \\ &\geq m|\phi_N|^2 + mH^2|T|^2 - 2m|\phi|^2|T|^2 \\ &\geq -2m|\phi|^2|T|^2, \end{aligned} \tag{4.41}$$

de modo que a igualdade ocorre acima se, e somente se, $|\phi_N| = |T| = 0$. Assim, inserindo (4.41) em (4.21), obtemos

$$L(|\phi|^2) \geq -2(m-1)|\phi|^2\mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, |T|)\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}},$$

onde $\mathcal{F}_{a,b}(x, y)$ está definida em (4.40).

De agora em diante, por simplicidade, denotaremos $|\phi|^2 = u$. Sendo assim, reescrevemos (4.37) da seguinte forma

$$L(u) \geq -\sqrt{\frac{m-1}{m}}u\mathcal{F}_{a,b}(\sqrt{u}, |T|)\sqrt{4u + m(m-1)(a^2+4b)}. \tag{4.42}$$

Levando em consideração que $u \geq 0$ e $b \geq 0$, segue da Observação 4.2.1 e de (4.42) que

$$u^{\frac{p+2}{2}}\mathcal{F}_{a,b}(\sqrt{u}, |T|) \geq -\sqrt{\frac{m}{m-1}}\frac{u^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{4u + m(m-1)(a^2+4b)}}L(u), \tag{4.43}$$

para todo número real p.

Uma vez que Σ^m é fechada, tomamos a integral ambos lados de (4.43) obtendo assim,

$$\int_\Sigma u^{\frac{p+2}{2}}\mathcal{F}_{a,b}(\sqrt{u}, |T|)d\Sigma \geq -\sqrt{\frac{m}{m-1}}\int_\Sigma \frac{u^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{4u + m(m-1)(a^2+4b)}}L(u)d\Sigma. \tag{4.44}$$

Consideremos agora a seguinte função

$$f(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds,$$

onde $g(s)$ é definida por

$$g(s) = \frac{s^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{4s + m(m-1)(a^2+4b)}}, \quad s \geq 0.$$

Como $p > 2$ e $b \geq 0$, a Observação 4.2.1 garante que g esta bem definida. Além disso, podemos ver que f é suave e não-negativa, uma vez que a g o é. Portanto, tomando a integral em (4.5), segue do Lema 4.1.3,

$$0 = \int_\Sigma L(f(u))d\Sigma = \int_\Sigma f'(u)L(u)d\Sigma + \int_\Sigma f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle d\Sigma,$$

isto é,

$$-\int_\Sigma f'(u)L(u)d\Sigma = \int_\Sigma f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle d\Sigma. \tag{4.45}$$

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem da função f, temos

$$f'(t) = \frac{t^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{4t + m(m-1)(a^2+4b)}} \geq 0 \tag{4.46}$$

e

$$f''(t) = \frac{4(p-1)t^{\frac{p}{2}} + pm(m-1)(a^2+4b)t^{\frac{p-2}{2}}}{2(4t + m(m-1)(a^2+4b))^{\frac{3}{2}}} \geq 0. \tag{4.47}$$

Como Σ^m é uma subvariedade Weingarten linear tal que $H_2 = aH + b$ com $b \geq 0$, podemos usar o Lema 3.1.2 a fim de nos assegurar que P é positivo semidefinido. Logo, por meio de (4.45), (4.46) e (4.47), podemos estimar (4.44) como segue

$$\int_\Sigma u^{\frac{p+2}{2}}\mathcal{F}_{a,b}(\sqrt{u}, |T|)d\Sigma \geq \frac{\sqrt{m(m-1)}}{2}\int_\Sigma f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle d\Sigma \geq 0. \tag{4.48}$$

Portanto,

$$\int_\Sigma u^{\frac{p+2}{2}}\mathcal{F}_{a,b}(\sqrt{u}, |T|)d\Sigma \geq 0. \tag{4.49}$$

O que prova a desigualdade (4.39).

Assumiremos agora que a igualdade vale em (4.49) e que $b > 0$. Por (4.48), temos

$$\int_\Sigma f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle d\Sigma = 0, \tag{4.50}$$

onde,

$$f''(u) = \frac{4(p-1)u^{\frac{p}{2}} + pm(m-1)(a^2+4b)u^{\frac{p-2}{2}}}{2(4u + m(m-1)(a^2+4b))^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

sendo a igualdade válida acima se, e somente, se $p > 2$ e $u = 0$. Como $b > 0$, usamos mais uma vez o Lema (4.1.3) para garantir que P é positivo definido e, consequentemente

$$\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\nabla u = 0$. Então segue de (4.50) que

$$f''(u)\langle P(\nabla u), \nabla u\rangle = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma^m,$$

o que implica que a função $u = |\phi|^2$ deve ser constante, isto é, ou $u \equiv 0$ ou $u \equiv u_0 > 0$.

Se $|\phi|^2 = u \equiv 0$, então Σ^m é uma subvariedade totalmente umbílica. Portanto, de (3.24), temos que $T = 0$, donde concluimos que Σ^m esta contida em $\mathbb{S}^n$. Caso contrário, se $|\phi|^2 = u \equiv u_0 > 0$, segue de (4.38) que H deve ser constante também. Assim, a igualdade em (4.49) implica em

$$\int_\Sigma \mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, |T|)d\Sigma = 0. \tag{4.51}$$

Utilizando (4.51) juntamente com (4.36) e (4.41) obtemos a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &\geq m\int_\Sigma \left(|\phi_N|^2 - H\langle\phi_\eta(T), T\rangle - 2\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2\right) d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2\varphi_{a,b,1}(|\phi|, |T|)d\Sigma \\ &\geq m\int_\Sigma \left(|\phi_N|^2 + H^2|T|^2\right) d\Sigma - |\phi|^2\int_\Sigma \mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, |T|)d\Sigma \\ &= m\int_\Sigma \left(|\phi_N|^2 + H^2|T|^2\right) d\Sigma \geq 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Isto nos mostra que também teremos $|\phi_N| = |T| = 0$ no caso em que Σ^m não é totalmente umbílica. Portanto, para este caso, também concluímos que Σ^m está contida em $\mathbb{S}^n$. A partir disto, vemos de (4.40) que $\mathcal{F}_{a,b}(|\phi|) := \mathcal{F}_{a,b}(|\phi|, 0)$ é uma função constante. Mas, quando inserimos isso em (4.51) comprovamos que esta constante na verdade deve ser nula, isto é, $\mathcal{F}_{a,b}(|\phi|) = 0$. Portanto, segue de (4.52) que $|\phi|^2 = \gamma(m, a, b)$, a qual é a única raiz positiva de $\varphi_{a,b,1}$. Nesta configuração, vemos que todas as desigualdades obtidas ao longo da demonstração se tornam igualdades e, em particular, vale a igualdade em (3.12) e vale a igualdade do Lema 4.1.3. Então, utlizando os Lemas 2.1.6 e 4.1.3 devemos ter que Σ^m é uma subvariedade paralela de $\mathbb{S}^n$ com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples. Além disso, também ocorre a igualdade em (4.30), a qual implica que $|\phi| = |\phi_{m+1}|$. Logo, em ambos os casos, $|\phi| = 0$ ou $|\phi| = |\phi_{m+1}|$, teremos que $\phi_\alpha = 0$ para todo $\alpha > m+1$.

Neste momento, procedemos como na parte final do Teorema 3.2.3 a fim de concluir que Σ^m está contida em uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ a qual é ortogonal à ∂_t. Portanto, Σ^m é de fato, uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{S}^{m+1}$ com duas curvaturas principais distintas. Daí, podemos aplicar os resultados clássicos de classificação de hipersuperfícies isoparamétricas em espaços formas espaciais (CARTAN, 1938; LEVI-CIVITA, 1937; SEGRE, 1938) para concluir que Σ^m deve ser isometrica ao seguinte produto $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r)$ com $0 < r < 1$.

Encerraremos este resultado mostrando que os produtos $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r)$ satisfazem as hipóteses do Teorema. Por simplicidade vamos considerar $a = 0$ para este cálculo. De fato, observemos que para um dado raio $0 < r < 1$, o mergulho

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}$$

possui curvaturas principais dadas por

$$\lambda_1 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Portanto a sua curvatura média e a norma do operador sem traço são dadas por

$$H = \frac{m(1-r^2)-1}{mr\sqrt{1-r^2}} \quad \text{e} \quad |\phi|^{`2} = \frac{m-1}{mr^2(1-r^2)}.$$

Além destes, a sua segunda curvatura média é dada por

$$H_2 = \binom{m}{2}^{-1} S_2 = \binom{m}{2}^{-1} (m-1)\left(\frac{m(r^2-1)-2}{2r^2}\right) = \frac{m(1-r^2)-2}{mr^2},$$

a qual é constante. Em particular, podemos ver que $H_2 > 0$ se, e somente se, $r^2 < (m-2)/m$. É claro que, neste caso,

$$r = \sqrt{(m-2)/m(H_2+1)} < \sqrt{(m-2)/m},$$

com

$$|\phi|^2 = \frac{m-1}{mr^2(1-r^2)} = \frac{m(m-1)(1+H_2)^2}{(m-2)(mH_2+2)} = \gamma(m,0,H_2)$$

que dá a caracterização da igualdade no Teorema 4.2.3 e conclui esta prova. ∎

Como foi discutido anteriormente, quando $a = 0$ a condição Weingarten linear reduz-se ao caso H_2 constante. Assim, fazendo $a = 0$ no Teorema 4.2.3, como estamos assumindo que $b \geq 0$, da relação (4.1) temos que H_2 é não negativa. Portanto, segue como consequência imediata do Teorema 4.2.3,

Corolário 4.2.4 *(DOS SANTOS; DA SILVA, 2022, Teorema 1.1) Seja Σ^m uma subvariedade pnmc fechada em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, com segunda curvatura média $H_2 \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{F}_{0,H_2}\left(|\phi|, |T|\right) d\Sigma \geq 0, \tag{4.53}$$

para cada número real $p > 2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0,H_2}(x,y) = (m-2)\,x^2 + (m-2)\,x\sqrt{x^2 + m\,(m-1)\,H_2} \\ -\,(m-1)\left(m\,(1+H_2) - (2m+1)\,y^2\right). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $H_2 > 0$ a igualdade (4.53) vale se, e somente se:

(i) ou Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) ou

$$|\phi|^2 = \frac{m(m-1)(H_2+1)^2}{(m-2)(mH_2+2)},$$

e Σ^m é isométrica a um produto do tipo $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{m-1}(r) \subset \mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, com $r = \sqrt{(m-2)/m(H_2+1)} > 0$.

Observação 4.2.5 *É interessante destacarmos que o Corolário (4.2.4) estende o resultado obtido por (ALIAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016) onde são estudadas hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera unitária.*

Analogamente ao que foi feito no Teorema 4.2.3, para o caso em que $c = -1$ temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.6 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten linear fechada de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, tal que $H_2 = aH + b$ com $a, b \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{G}_{a,b}(|\phi|, |T|) \geq 0, \tag{4.54}$$

para todo número real $p > 2$, onde $\mathcal{G}_{a,b}$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{a,b}(x,y) = {} & \frac{m-2}{m-1}x^2 - m\left(a - \frac{m-2}{\sqrt{m(m-1)}}x\right)\sqrt{\frac{x^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}} \\ & + \frac{m(m-2)a}{2\sqrt{m(m-1)}}x - (m+1)y^2 - m\left(\frac{a^2}{2} + b - 2\right).\end{aligned} \tag{4.55}$$

Mais ainda, se $b > 0$ a igualdade vale em (4.54) se, e somente se, Σ^m for uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como já visto anteriormente, temos que

$$|\phi_N| = \sum_{\alpha=m+1}^{n+1} \langle N, e_\alpha\rangle \phi_\alpha, \quad \text{e} \quad |\phi_N|^2 \leq |N|^2|\phi|^2,$$

onde $\{e_{m+1}, \ldots, e_{n+1}\}$ é um referencial ortonormal do fibrado normal e tal que $e_{m+1} = \eta$. Daí, podemos estimar (4.20) para $c = -1$ como segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-1} &= -m|\phi_N|^2 + mH\langle\phi_\eta(T), T\rangle + 2m\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &\geq -m|N|^2|\phi|^2 + mH\langle\phi_\eta(T), T\rangle + 2m|\phi_\eta(T)|^2 + 2m\sum_{\alpha>m+1}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ &\geq -m(1-|T|^2)|\phi|^2 + mH\langle\phi_\eta(T), T\rangle + 2m|\phi_\eta(T)|^2 \\ &= -m(1-|T|^2)|\phi|^2 - mH^2|T|^2 + 2mH^2|T|^2 \\ &= -m(1-|T|^2)|\phi|^2 + mH^2|T|^2 \\ &\geq -m(1-|T|^2)|\phi|^2,\end{aligned} \tag{4.56}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $|T| = 0$. Logo, ao inserir (4.56) em (4.20), obtemos

$$L(|\phi|^2) \geq -2(m-1)|\phi|^2\mathcal{G}_{a,b}(|\phi|, |T|)\sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}},$$

onde $\mathcal{G}_{a,b}(x,y)$ esta definida em (4.55).

A partir deste ponto, a demonstração segue da mesma maneira da prova do Teorema 4.2.3 até chegarmos a desigualdade (4.54). Se vale a igualdade, então de (4.50) temos

$$\langle P(\nabla|\phi|^2), \nabla|\phi|^2\rangle = 0, \tag{4.57}$$

desde que

$$f''(|\phi|) = \frac{4(p-1)|\phi|^p + m(m-1)(4b+a^2)p|\phi|^{p-2}}{2\left(4|\phi|^2 + m(m-1)(4b+a^2)\right)^{3/2}}$$

onde foi utilizado que $p > 2$ e $b > 0$. Sendo P é positivo definido, de (4.57) segue que $|\phi|$ é constante ao longo de Σ^m. Se $|\phi| = 0$, temos que Σ^m é totalmente umbílica. Como antes, Σ^m será uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $|\phi|$ é uma constante positiva, então da igualdade em (4.54),

$$\int_\Sigma \mathcal{G}_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma = 0.$$

Desta igualdade, (4.37) e (4.56) nos garantem que

$$\begin{aligned} 0 &\geq -m \int_\Sigma \left(|\phi_N|^2 - H\langle \phi_\eta(T), T\rangle - 2\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \right) d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \varphi_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma \\ &\geq mH^2 \int_\Sigma |T|^2 d\Sigma - |\phi|^2 \int_\Sigma \mathcal{G}_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $|T| = 0$. Raciocinando como na última parte da prova do Teorema 4.2.3, devemos ter que Σ^m é uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, concluímos do (ALIAS; IMPERA; RIGOLI, 2013, Teorema 2) que Σ^m é isométrica a um cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, que não é uma variedade fechada. Portanto, a igualdade em (4.54) ocorre se, e somente se, Σ^m for uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. ■

Consoante a observação feita antes do Teorema 4.2.6, também temos a seguinte consequencia:

Corolário 4.2.7 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc e fechada em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geq 4$, com segunda curvatura média $H_2 \geq 0$. Se o η-ângulo é constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \mathcal{G}_{0,H_2}(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \geq 0, \tag{4.58}$$

para cada número real $p > 2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{0,H_2}(x,y) = (m-2)x^2 &+ (m-2)x\sqrt{x^2 + m(m-1)H_2} \\ &- (m-1)\left(m(H_2 - 2) + (m+1)y^2\right). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $H_2 > 0$ a igualdade (4.58) vale se, e somente, se Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

O seguinte exemplo nos mostra a importância da compacidade assumida nos Teorema 4.2.3 e 4.2.6.

Exemplo 4.2.8 *Lembremos que uma subvariedade Σ^m de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ é dita um* cilindro vertical *sobre Σ^{m-1}, se $\Sigma^m = \pi_\Sigma^{-1}(\Sigma^{m-1})$ onde Σ^{m-1} é uma subvariedade de $M^n(c)$. Podemos facilmente verificar que Σ^m é um cilindro vertical paralelo e não mínimal de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ se, e somente se, Σ^{m-1} for uma subvariedade paralela não mínimal em $M^n(c)$. Além disso, o seu vetor curvatura média é dado por $h = \frac{m-1}{m} h_0$, onde h_0 é o vetor curvatura média de Σ^{m-1} em $M^n(c)$. Portanto, Σ^m é uma subvariedade pnmc Weingarten linear de $M^n(c) \times \mathbb{R}$ que possui η-ângulo constante e que não esta contida em $M^n(c) \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, uma vez que que cilindros verticais são caracterizados pelo fato de que ∂_t é sempre tangente à Σ^m (cf. Observação 2.1.1). Sendo assim, vemos que a hipótese de Σ^m ser uma subvariedade fechada assumida nos Teoremas 4.2.3 e 4.2.6 é, de fato, necessária.*

4.2.1 Dois casos particulares

Após a conclusão dos Teoremas 4.2.3 e 4.2.6, um questionamento surge de maneira natural: seria possível obtermos resultados análogos aos Teoremas supracitados considerando os casos em que a dimensão é igual a 2 e 3? Esta pequena seção tem por objetivo responder esta pergunta. Para isto será necessária uma adaptação na prova da Proposição 4.1.2. Em verdade, veremos que nestes casos os únicos objetos geométricos detectáveis são as subvariedades totalmente umbílicas.

Primeiramente, note que as integrais obtidas nos Teoremas 4.2.3 e 4.2.6 são válidas para estes casos. Para vermos isto, vamos reescrever a desigualdade em (3.14)

$$\begin{aligned} mH\sum_\alpha \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2\phi_\eta) - \sum_{\alpha,\beta\neq m+1} N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) - \sum_\alpha [tr(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 \\ \geq -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}} H|\phi|^2|\phi_\eta| - \frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 + |\phi|^2|\phi_\eta|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^4. \end{aligned} \tag{4.59}$$

De um cálculo direto, podemos ver que

$$|\phi|^2|\phi_\eta|^2 \geq -\frac{1}{2}|\phi_\eta|^4 - \frac{1}{2}|\phi|^4, \tag{4.60}$$

com a igualdade valendo se, e somente se, $|\phi| = |\phi_\eta| = 0$, isto é, se, e somente se, M^m for uma subvariedade totalmente umbílica. Além disso,

$$|\phi|^2 = |\phi_\eta|^2 + \sum_{\alpha > m+1} |\phi_\alpha|^2 \geq |\phi_\eta|^2, \tag{4.61}$$

com a igualdade valendo se, e somente se, $|\phi_\alpha| = 0$ para todo $\alpha > m+1$. Portanto, inserindo (4.60) e (4.61) em (4.59), temos

$$\begin{aligned} mH \sum_\alpha \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_\eta) - &\sum_{\alpha,\beta \neq m+1} N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) - \sum_\alpha [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 \\ &\geq -|\phi|^2 \left(\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}} H|\phi| + 3|\phi|^2 \right). \end{aligned}$$

Usando isto na Proposição 4.1.2,

$$\begin{aligned} L(mH) \geq |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + cm|\phi_N|^2 - 2cm \sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - cmH\langle \phi_\eta(T), T\rangle \\ + \left(c(m - |T|^2) + mH^2 - \frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}} H|\phi| - 3|\phi|^2 \right) |\phi|^2. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Portanto, substituindo (4.27) e (4.33) em (4.62)

$$L(mH) \geq |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 \mathcal{L}_c - |\phi|^2 \overline{\varphi}_{a,b,c}(|\phi|, |T|),$$

onde

$$\overline{\varphi}_{a,b,c}(x,y) = 2x^2 + \varphi_{a,b,c}(x,y).$$

com $\mathcal{L}_c$ e $\varphi_{a,b,c}$ definidos em (4.20) e (4.21), respectivamente. Sendo assim, como $b \geq 0$ podemos aplicar o Lema 4.1.5 juntamente às desigualdades (4.37) e (4.62) para obtermos

$$L(|\phi|^2) \geq -2(m-1)(|\phi|^2 \overline{\varphi}_{a,b,c}(|\phi|, |T|) - \mathcal{L}_c) \sqrt{\frac{|\phi|^2}{m(m-1)} + b + \frac{a^2}{4}}.$$

Da discussão acima, obtemos:

Teorema 4.2.9 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten Linear em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m$ tal que $H_2 = aH + b$, com $a, b \geq 0$. Se o η-ângulo for constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2} \overline{\mathcal{F}}_{a,b}(|\phi|, |T|) d\Sigma \geq 0, \tag{4.63}$$

para todo número real $p > 2$, onde $\overline{\mathcal{F}}_{a,b}$ é a função dada por

$$\overline{\mathcal{F}}_{a,b}(x, y) = 2x^2 + \mathcal{F}_{a,b}(x, y),$$

com $\mathcal{F}_{a,b}(x, y)$ definido em (4.40)*. Mais ainda, a igualdade vale em* (4.63) *se, e somente se, Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 4.2.3 até atingirmos a desigualdade (4.49) trocando a função $\varphi_{a,b,c}$ por $\overline{\varphi}_{a,b,c}$ ao longo dos cálculos. Se a igualdade em (4.63) acontece, então também acontece a igualdade em (4.60) e portanto, Σ^m é uma totalmente umbílica. Além disso, a igualdade ocorre em (4.41), donde concluímos que $T = 0$. Portanto, Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. ■

Seguindo os mesmos passos da prova do 4.2.3 e 4.2.9, temos

Teorema 4.2.10 *Seja Σ^m uma subvariedade pnmc Weingarten Linear em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m$ tal que $H_2 = aH + b$, com $a, b \geq 0$. Se o η-ângulo for constante, então*

$$\int_\Sigma |\phi|^{p+2}\overline{\mathcal{G}}_{a,b}(|\phi|, |T|)d\Sigma \geq 0, \tag{4.64}$$

para todo número real $p > 2$, onde $\overline{\mathcal{G}}_{a,b}$ é a função dada por

$$\overline{\mathcal{G}}_{a,b}(x, y) = 2x^2 + \mathcal{G}_{a,b}(x, y),$$

com $\mathcal{G}_{a,b}(x, y)$ definido em (4.55)*. Mais ainda, a igualdade vale em* (4.60) *se, e somente se, Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^n \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Observação 4.2.2 *A abordagem desenvolvida aqui não é efetiva para detectar subvariedades paralelas com duas curvaturas principais distintas, assim como na Proposição 4.2.2, por conta disso, apenas o utilizamos nos casos onde $m = 2$ e $m = 3$. Sendo assim, seguindo (GUO; LI, 2013, Observação 3.2), um interessante questionamento é se a Proposição 4.2.2 vale ou não para $m = 2$ e $m = 3$.*

5 O FUNCIONAL CURVATURA MÉDIA TOTAL EM ESPAÇOS PRODUTO E APLICAÇÕES

Encerramos este trabalho de tese ainda estudando os resultados de rigidez em espaços ambientes da forma $M^n(c) \times \mathbb{R}$, no entanto por uma abordagem diferente das utilizadas anteriormente. Neste capítulo, estudaremos subvariedades fechadas que são pontos críticos de um determinando funcional. Nosso propósito é obter uma equação de Euler-Lagrange para o funcional curvatura média total $\mathcal{H}$ e utilizá-la no estudo das subvariedades que são pontos críticos deste funcional. Em particular, nossos resultados principais estão concentrados no estudo das superfícies imersas no produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e na obtenção de ferramentas que possam ser utlizadas em sua classificação.

5.1 A PRIMEIRA FÓRMULA DE VARIAÇÃO

Diferente dos outros capítulos, aqui usaremos uma abordagem tensorial para a obtenção dos nosso resultados. Neste sentido é conviente reescrevermos alguns dos elementos e conceitos já vistos no Capítulo 2.

Seja Σ^m uma subvariedade imersa no espaço produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Denotaremos por A a segunda forma fundamental e A_ξ o operador de Weingarten associado, na direção normal ξ, os quais satisfazem:

$$\langle A(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi(X), Y\rangle, \tag{5.1}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Além disso, as expressões a seguir são conhecidas como as respectivas fórmulas de Gauss e Weingarten de Σ^m em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X,Y) \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi, \tag{5.2}$$

para todo campo vetorial tangente $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Utilizando (2.4) e (2.7) e (5.1), podemos obter as seguintes equações de Gauss,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle + \langle Z,T\rangle(\langle Y,T\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,T\rangle\langle Y,W\rangle) \\ + (\langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle)\langle T,W\rangle + \langle A(X,Y),A(Y,W)\rangle \\ - \langle A(Y,Z),A(X,W)\rangle\end{aligned} \tag{5.3}$$

e de Codazzi,

$$(\nabla^{\perp}_{Y}A)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_{X}A)(Y,Z) = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}, \tag{5.4}$$

onde $\nabla^{\perp}A$ satisfaz:

$$(\nabla^{\perp}_{X}A)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_{X}A(X,Z) - A(\nabla_X Y,Z) - A(Y,\nabla_X Z). \tag{5.5}$$

Denotemos por h o campo vetorial curvatura média de Σ^m em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, definido por

$$h = \frac{1}{h}\mathrm{tr}(A) \tag{5.6}$$

e por H sua norma, isto é, $H^2 = \langle h,h\rangle$. É fácil ver que $\{e_{m+1},\ldots,e_{n+1}\}$ é um referencial ortonormal de $\mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$, podemos escrever (5.6) do seguinte modo:

$$h = \sum_{\alpha} H^{\alpha}e_{\alpha}, \text{ onde } H^{\alpha} := \frac{1}{m}\mathrm{tr}(A_{\alpha}) = \langle h,e_{\alpha}\rangle,$$

e $A_{\alpha} := A_{e_{\alpha}}$. Em particular, $mH^2 = \mathrm{tr}(A_h)$.

Recordemos ainda, que o operador Laplaciano $\Delta^{\perp} : \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp} \to \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$, é definido por

$$\Delta^{\perp}\xi = \mathrm{tr}(\nabla^2\xi) = \sum_i \nabla^{\perp}_{e_i}\nabla^{\perp}_{e_i}\xi, \tag{5.7}$$

onde $e_1,\ldots,e_n$ é um referencial ortonormal ao longo de Σ^m.

Em seu trabalho (CHEN, 1971) introduziu o funcional *curvatura média total*, para qualquer subvariedade Σ^m fechada no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^m d\Sigma. \tag{5.8}$$

Chen provou que $\mathcal{H}$ é limitado inferiormente pelo volume da m-esfera unitária, com a igualdade sendo obtida precisamente quando a subvariedade é a própria m-esfera unitária.

Nesta seção, nós estudaremos o funcional definido em (5.8) considerando agora que Σ^m é uma subvariedade fechada imersa no produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com o propósito de estudar os pontos estacionários deste funcional, a começar pela obtenção da fórmula de Euler-Lagrange para o mesmo, por meio do cálculo da primeira variação de $\mathcal{H}$, na proposição a seguir.

Proposição 5.1.1 *Seja $x : \Sigma^m \to \mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica da variedade compacta Σ^m. Então x é um ponto estacionário do funcional $\mathcal{H}$, ou uma $\mathcal{H}$-subvariedade se, e somente se,*

$$H^{m-2}\left(\Delta^{\perp}h + \left(m - |T|^2 - mH^2\right)h - m\langle N, h\rangle N + \sum_{\alpha,\beta} H^{\alpha} tr(A_{\alpha} \circ A_{\beta})e_{\beta}\right) = 0, \quad (5.9)$$

para $m > 2$, e

$$\Delta^{\perp}h + (2 - |T|^2 - 2H^2)h - 2\langle N, h\rangle N + \sum_{\alpha,\beta} H^{\alpha} tr(A_{\alpha}A_{\beta})e_{\beta} = 0, \quad (5.10)$$

no caso em que $m = 2$, onde $m + 1 \leq \alpha, \beta \leq n + 1$.

Demonstração. Consideremos uma variação de x, isto é, uma aplicação suave, $X : \Sigma^m \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, tal que para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $X_s : \Sigma^m \longrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, dado por $X_s(p) = X(s, p)$ é uma imersão e $X_0 = x$. Portanto, podemos agora calcular a primeira variação de $\mathcal{H}$ ao longo de X, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{H}(X_s)\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\int_{\Sigma} H_s^m d\Sigma_s\Big|_{s=0} \\ &= \int_{\Sigma} \frac{d}{ds}(H_s^m) d\Sigma_s\Big|_{s=0} + \int_{\Sigma} H_s^m \frac{d}{ds}(d\Sigma_s)\Big|_{s=0},\end{aligned}$$

onde, para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $H_s = \sqrt{\langle h_s, h_s\rangle}$ representa a norma do vetor curvatura média de Σ^m em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com respeito à métrica induzida por X_s e $d\Sigma_s$ denota o respectivo elemento de volume.

Vamos calcular $\frac{d}{ds}(H_s^m)\Big|_{s=0}$. Por simplicidade, denotemos $v = d/ds$. Afirmamos que

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}v(H_s^2)\Big|_{s=0} &= \langle mh - |T|^2h - m\langle N, h\rangle N + \sum_{\alpha,\beta} H^{\alpha} tr(A_{\alpha}A_{\beta})e_{\beta}, v^{\perp}\rangle \\ &\quad + \frac{m}{2}v^{\top}(H^2) + \langle h, \Delta^{\perp}v^{\perp}\rangle.\end{aligned} \quad (5.11)$$

Vamos supor agora que $m > 2$. Então,

$$v(H_s^m)\Big|_{s=0} = v(H_s^m) = v((H_s^2)^{\frac{m}{2}}) = \frac{m}{2}H_s^{m-2}v(H_s^2) \tag{5.12}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} v(H_s^m)\Big|_{s=0} &= H^{m-2}\langle mh - |T|^2h - m\langle N,h\rangle N + \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha \mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)e_\beta, v^\perp\rangle \\ &+ H^{m-2}\left(\frac{m}{2}v^\perp(H^2) + \langle h, \Delta^\top v^\perp\rangle\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Mais ainda, utilizando (WEINER, 1978) temos

$$v(d\Sigma_s)\Big|_{s=0} = \Big(-m\langle h, v^\perp\rangle + \mathrm{div}(v^\top)\Big)\, d\Sigma. \tag{5.14}$$

Portanto, ao longo de Σ^m, $m > 2$ vale

$$\begin{aligned} v(H_s^m d\Sigma_s)\Big|_{s=0} &= v(H_s^m)\Big|_{s=0} d\Sigma + H^m v(d\Sigma_s)\Big|_{s=0} \\ &= \Big\{H^{m-2}\Big(\langle mh - |T|^2h - m\langle N,h\rangle N - mH^2h, v^\perp\rangle\Big)\Big\}\, d\Sigma \\ &+ \left\{H^{m-2}\left(\sum_{\alpha,\beta} H^\alpha \mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)\langle e_\beta, v^\perp\rangle + div(H^m v^\top) + \langle \Delta^\perp v^\perp, h\rangle\rangle\right)\right\} d\Sigma, \end{aligned}$$

onde foram utilizadas (5.11) e (5.13) e o fato de que

$$\mathrm{div}(H^m v^\top) = \frac{m}{2}H^{m-2}v^\top(H^2) + H^m \mathrm{div}(v^\top).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\int_\Sigma H_s^m d\Sigma_s\Big|_{s=0} &= \int_\Sigma H^{m-2}\langle \Delta^\perp v^\perp, h\rangle d\Sigma + \int_\Sigma H^{m-2}\sum_{\alpha,\beta} H^\alpha \mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)\langle e_\beta, v^\top\rangle d\Sigma \\ &- \int_\Sigma H^{m-2}\Big(\langle |T|^2h - mh + m\langle N,h\rangle N + mH^2h, v^\perp\rangle\Big)\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, x é um ponto estacionário de $\mathcal{H}$ se, e somente se,

$$H^{m-2}\left(\Delta^\perp h - |T|^2h + mh - m\langle N,h\rangle N - mH^2h + \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha \mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)e_\beta\right) = 0.$$

O caso $m = 2$ segue de um argumento análogo usando (5.11) ao invés de (5.13).

Resta mostrarmos a afirmação. De (2.6), segue que $mH^2 = \mathrm{tr}(A_h)$, deste modo podemos escrever,

$$mv(H_s^2) = \sum_i \langle (\overline{\nabla}_v A_{h_s}) e_i, e_i\rangle = \left(\sum_i \langle \overline{\nabla}_v A_{h_s}(e_i), e_i\rangle - \sum_i \langle A_{h_s}(\overline{\nabla}_v e_i)^\top, e_i\rangle \right), \quad (5.15)$$

para todo $\{e_1, \ldots, e_m\}$ referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Em particular, dado $p \in \Sigma$, podemos escolher este referencial de modo que o mesmo seja geodésico, isto é, $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq m$.

Apesar de considerar os próximos cálculos no ponto p, por simplicidade, o omitiremos. Vamos denotar

$$I = \sum_i \langle \overline{\nabla}_v A_{h_s}(e_i), e_i\rangle \quad \text{e} \quad II = \sum_i \langle A_{h_s}(\overline{\nabla}_v e_i)^T, e_i\rangle, \quad (5.16)$$

e calcular ambos os termos separadamente. De (5.2) e $[v, e_i] = \overline{\nabla}_v e_i - \overline{\nabla}_{e_i} v = 0$,

$$\begin{aligned}
I &= -\sum_i \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_{e_i} h_s, e_i\rangle + \sum_i \langle \overline{\nabla}_v \nabla^\perp_{e_i} h_s, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v, e_i) h_s, e_i\rangle - \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_v h_s, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \overline{\nabla}_v e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v, e_i) h_s, e_i\rangle - \sum_i e_i \langle \overline{\nabla}_v h_s, e_i\rangle + \sum_i \langle \overline{\nabla}_v h_s, \overline{\nabla}_{e_i} e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \overline{\nabla}_{e_i} v\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v, e_i) h, e_i\rangle + \sum_i e_i \langle h_s, \overline{\nabla}_v e_i\rangle + \sum_i \langle \overline{\nabla}_v h_s, A(e_i, e_i)\rangle \\
&\quad - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, A(e_i, v^\top)\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle.
\end{aligned}$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten,

$$\begin{aligned}
I &= \sum_i \langle \overline{R}(v, e_i) h, e_i\rangle + \sum_i e_i \langle h_s, \overline{\nabla}_{e_i} v\rangle + m\langle \overline{\nabla}_v h_s, h_s\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, A(e_i, v^\top)\rangle \\
&\quad - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v, e_i) h_s, e_i\rangle + \sum_i e_i \langle h_s, A(e_i, v^\top)\rangle + \sum_i e_i \langle h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle + \frac{m}{2} v(H^2) \\
&\quad - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, A(v^\top, e_i)\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle
\end{aligned}$$

Utilizado (5.7) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \langle \overline{R}(v,e_i)h_s, e_i\rangle + \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, A(v^\top, e_i)\rangle + \sum_i \langle h_s, \nabla^\perp_{e_i} A(v^\top, e_i)\rangle \\
&\quad + \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle + \sum_i \langle h_s, \nabla^\perp_{e_i}\nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle + \frac{m}{2} v(H^2) \\
&\quad - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, A(v^\top, e_i)\rangle - \sum_i \langle \nabla^\perp_{e_i} h_s, \nabla^\perp_{e_i} v^\perp\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v,e_i)h_s, e_i\rangle + \sum_i \langle h_s, \nabla^\perp_{e_i} A(v^\top, e_i)\rangle + \langle h_s, \Delta^\perp v^\perp\rangle + \frac{m}{2} v(H^2).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Da equação de Codazzi (5.4) e de (5.5)

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp_{e_i} A(v^\perp, e_i) &= (\nabla^\perp_{e_i} A)(v^\top, e_i) + A(e_i, \nabla_{e_i}, v^\top) \\
&= (\overline{R}(v^\top, e_i)e_i)^\perp + (\nabla^\perp_v A)(e_i, e_i) + A(e_i, \nabla_{e_i} v^\top).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Inserindo (5.18) em (5.17)

$$\begin{aligned}
I &= \sum_i \langle \overline{R}(v^\perp, e_i)h_s, e_i\rangle + \sum_i \langle h_s, \nabla^\perp_{v^\top} A(e_i, e_i)\rangle + \sum_i \langle h_s, A(e_i, \nabla_{e_i} v^\top)\rangle \\
&\quad + \langle h_s, \Delta^\perp v^\perp\rangle + \frac{m}{2} v(H^2) \\
&= \sum_i \langle \overline{R}(v^\perp, e_i)h_s, e_i\rangle + \frac{m}{2} v^\top(H_s^2) + \sum_i \langle A_{h_s}(e_i), \nabla_{e_i} v^\top\rangle \\
&\quad + \langle h_s, \Delta^\perp v^\perp\rangle + \frac{m}{2} v(H^2).
\end{aligned}$$

Para a segunda expressão de (5.16)

$$\begin{aligned}
II &= \sum_i \langle A_{h_s}(\overline{\nabla}_v e_i)^\top, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle A_{h_s}(\overline{\nabla}_{e_i} v^\top + \overline{\nabla}_{e_i} v), e_i\rangle = \sum_i \langle A_{h_s}(\nabla_{e_i} v^\top), e_i\rangle - \operatorname{tr}(A_{h_s} \circ A_{v^\perp}).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Portanto,

$$\frac{m}{2} v(H_s^2) = \sum_i \langle \overline{R}(v^\perp, e_i)h_s, e_i\rangle + \frac{m}{2} v^\top(H_s^2) + \langle h_s, \Delta^\perp v^\perp\rangle + \operatorname{tr}(A_{h_s} A_{v^\perp}).$$

Daí,

$$\frac{m}{2} v(H^2)\Big|_{s=0} = \sum_i \langle \overline{R}(v^\perp, e_i)h, e_i\rangle + \frac{m}{2} v^\perp(H^2) + \langle h, \Delta^\perp v^\perp\rangle + \operatorname{tr}(A_h A_{v^\perp}). \tag{5.20}$$

Por outro lado, escrevendo $v^\perp = \sum_\beta \langle v^\perp, e_\beta\rangle e_\beta$, temos

$$A_h = \sum_\alpha H^\alpha A_\alpha \quad \text{e} \quad A_{v^\perp} = \sum_\beta \langle v^\perp, e_\beta\rangle A_\beta.$$

Portanto,

$$\operatorname{tr}(A_h A_{v^\perp}) = \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha \operatorname{tr}(A_\alpha A_\beta)\langle v^\perp, e_\beta\rangle. \tag{5.21}$$

Além disso, de (2.22)

$$\sum_{i=1}^m \langle \overline{R}(v^\perp, e_i)h, e_i\rangle = -\langle mh - |T|^2 h - m\langle N, h\rangle N, v^\perp\rangle. \tag{5.22}$$

A afirmação fica provada substituindo (5.21) e (5.22) em (5.20). ■

Não é difícil ver que as superfícies mínimas são pontos estacionários do funcional curvatura média total $\mathcal{H}$. De fato, (5.9) é trivial para subvariedades mínimas e (5.10) também é satisfeita uma vez que $H = 0$ implica que o campo vetorial curvatura média se anula ao longo de Σ^m. Vamos mostrar que as subvariedades mínimas são os únicos pontos estacionários deste funcional na classe das totalmente umbílicas contidas em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Para começar, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.1.2 *Se Σ^m for uma subvariedade totalmente umbílica contida em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, então o vetor curvatura média é paralelo ao longo do fibrado normal.*

Demonstração. Da umbilicidade, segue que

$$A(X, Y) = \langle X, Y\rangle h, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Portanto, um cálculo rápido a partir da equação de Codazzi, nos dá:

$$(\langle Y, Z\rangle\langle X, T\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle)N = \langle X, Z\rangle \nabla^\perp_Y h - \langle Y, Z\rangle \nabla^\perp_X h, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \tag{5.23}$$

Como $T = 0$, de (5.23)

$$\langle Y, Z\rangle \nabla^\perp_X h = \langle X, Z\rangle \nabla^\perp_Y h,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, escolhendo $Y = Z$ ortogonal a X, concluímos que h é paralelo no fibrado normal. ■

Fecharemos esta seção com a seguinte consequência:

Corolário 5.1.3 *Seja Σ^m uma subvariedade totalmente umbílica contida em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, Σ^m é uma $\mathcal{H}$-subvariedade de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ se, e somente se, for totalmente geodésica.*

Demonstração. Seja Σ^m uma subvariedade de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ nas condições do corolário. Do Lema 5.1.2 segue que $\nabla^{\perp} h = 0$. Uma vez que Σ^m está contida em um slice, $T = 0$. Usando (2.23) e a hipótese de umbilicidade, temos

$$0 = \langle A_N(X), Y\rangle = \langle A(X,Y), N\rangle = \langle X, Y\rangle\langle N, h\rangle, \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

portanto, $\langle N, h\rangle = 0$. Além disso a umbilicidade de Σ^m, também implica que, para todo $m+1 \leq \alpha \leq n+1$, vale que $A_\alpha(X) = \langle h, e_\alpha\rangle X$.

$$\langle A_\alpha(X), Y\rangle = \langle \sigma(X,Y), e_\alpha\rangle = \langle X, Y\rangle\langle h, e_\alpha\rangle,$$

portanto, $\mathrm{tr}(A_\alpha) = m\langle h, e_\alpha\rangle$.

Daí, a primeira fórmula da variação para $\mathcal{H}$, Proposição 5.1.1 se torna

$$0 = H^{m-2}\left(mh - mH^2 h + m\sum_\alpha \langle h, e_\alpha\rangle^2 h\right) = mH^{m-2}h,$$

se $m > 2$, e simplesmente $h = 0$ no caso em que $m = 2$. Portanto, é imediato verificar que Σ^m é uma $H-$subvariedade se, e somente, for mínima. E, portanto, da umbilicidade, se e somente se, for totalmente geodésica. ■

5.2 DOIS LEMAS FUNDAMENTAIS

Nesta seção apresentaremos algumas ferramentas analíticas importantes para a obtenção dos resultados principais deste capítulo. Vamos começar denotando o conjunto das seções do fibrado normal $T\Sigma^{\perp}$ por $\mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ e, o conjunto das funções suaves de Σ^m por $C^\infty(\Sigma)$.

Associado à segunda forma fundamental A de Σ^m, vamos considerar o seguinte operador $P : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ por

$$P(X,Y) = m\langle X, Y\rangle h - A(X,Y). \tag{5.24}$$

Observemos que P é simétrico e que seu traço é dado por $\mathrm{tr}(P) = m(m-1)h$. A respeito de P, vamos considerar o seguinte operador diferencial de segunda ordem:

$$\Box^* : \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$$

por

$$\Box^*(\xi) = \langle P, \nabla^2 \xi \rangle,$$

onde, $\langle , \rangle$ representa o produto interno de Hilbert-Schmidt. Vejamos que para cada $\alpha \in \{m+1, \ldots, n+1\}$, vale

$$\begin{aligned}
\langle P(X,Y), e_\alpha \rangle &= \langle m\langle X,Y\rangle h - A(X,Y), e_\alpha \rangle \\
&= m\langle X,Y\rangle \langle h, e_\alpha \rangle - \langle A(X,Y), e_\alpha \rangle \\
&= m\langle X,Y\rangle \sum_\beta H^\beta \langle e_\alpha, e_\beta \rangle - \langle A_\alpha(X), Y \rangle \\
&= m\langle X,Y\rangle H^\alpha - \langle A_\alpha(X), Y \rangle \\
&= \langle P_\alpha(X), Y \rangle,
\end{aligned}$$

onde o operador $P_\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$, dado por, $P_\alpha = mH^\alpha I - A_\alpha$, é simétrico e tal que $\mathrm{tr}(P_\alpha) = m(m-1)H^\alpha$ e

$$\sum_\alpha \mathrm{tr}(P_\alpha) e_\alpha = m(m-1)\sum_\alpha H^\alpha e_\alpha = m(m-1)h = \mathrm{tr}(P).$$

Deste modo, podemos definir o operador diferencial de segunda ordem:

$$\Box : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$$

pondo

$$\Box(f) = \sum_\alpha \mathrm{tr}(P_\alpha \circ \mathrm{Hess} f) e_\alpha.$$

O próximo resultado nos fornece uma relação entre os operadores $\Box^*$ e $\Box$ introduzidos acima.

Lema 5.2.1 *Seja Σ^m uma subvariedade compacta no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Então*

$$\int_\Sigma f \Box^*(\xi) d\Sigma = \int_\Sigma \langle \Box(f), \xi \rangle d\Sigma + c(m-1) \int_\Sigma \Big(f \langle \nabla_T^\perp \xi, N \rangle - \langle N, \xi \rangle \langle \nabla f, T \rangle \Big) d\Sigma,$$

para todo $f \in C^2(\Sigma)$ e $\xi \in T\Sigma^\perp$.

Demonstração. Seja $p \in \Sigma^m$ e $\{e_1, \dots, e_m\}$ um referencial móvel de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ numa vizinhança $U \subset \Sigma^m$ de p, o qual é geodésico em p, isto é, $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. Usando o produto interno de Hilbert-Schimidt, temos que

$$
\begin{aligned}
f\Box^*(\xi) = f\langle P, \nabla^2\xi\rangle = f\sum_{i,j}\langle P(e_i, e_j), \nabla^2\xi(e_i, e_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j} e_j\left(f\langle P(e_i, e_j), \nabla^\perp_{e_i}\xi\rangle\right) - \sum_{i,j} e_i\left(e_j(f)\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle\right) \\
&- f\sum_{i,j}\delta_{ij}\langle\nabla^\perp_{e_j}P(e_i, e_j), \nabla^\perp_{e_i}\xi\rangle - \sum_{i,j} e_i(e_j(f))\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle \\
&+ \sum_{i,j} e_j(f)\langle\nabla^\perp_{e_i}P(e_i, e_j), \xi\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Por outro lado, por um cálculo direto, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} e_i(e_j(f))\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle &= m\sum_{i,j} e_i(e_j(f))\delta_{i,j}\langle h, \xi\rangle - \sum_{i,j} e_i(e_j(f))\langle A(e_i, e_j), \xi\rangle \\
&= m\Delta f\langle h, \xi\rangle - \sum_{\alpha,i,j} e_i(e_j(f))\langle A_\alpha(e_i), e_j\rangle\langle e_\alpha, \xi\rangle \\
&= m\Delta f\sum_\alpha H^\alpha\langle e_\alpha, \xi\rangle - \sum_{\alpha,i,j}\langle e_j, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle\langle A_\alpha(e_i), e_j\rangle\langle e_\alpha, \xi\rangle \\
&= \sum_\alpha(mH^\alpha\nabla f - \operatorname{tr}(A_\alpha \circ \operatorname{Hess} f))\langle e_\alpha, \xi\rangle \\
&= \sum_\alpha \operatorname{tr}(P_\alpha \circ \operatorname{Hess} f)\langle e_\alpha, \xi\rangle = \langle\Box(f), \xi\rangle,
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

onde $\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Inserindo (5.26) em (5.25) temos

$$
\begin{aligned}
f\Box^*(\xi) = \langle\Box(f), \xi\rangle - f\sum_{i,j}\langle\nabla^\perp_{e_j}P(e_i, e_j), \nabla^\perp_{e_i}\xi\rangle + \sum_{i,j} e_j(f)\langle\nabla^\perp_{e_i}P(e_i, e_j), \xi\rangle \\
+ \sum_{ij} e_j\left(f\langle P(e_i, e_j), \nabla^\perp_{e_i}\xi\rangle\right) - \sum_{i,j} e_i\left(e_j(f)\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle\right).
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Podemos ver que as últimas expressões em (5.27) podem ser vistas como divergências, isto é:

$$
\sum_{i,j}\operatorname{div}\left(e_j(f)\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle e_i\right) = \sum_{i,j} e_j(f)\langle P(e_i, e_j), \xi\rangle\operatorname{div}(e_i) + \sum_{i,j} e_i\left(e_j(f)\right)(e_i, e_j), \xi\rangle
$$

e

$$\sum_{i,j}\operatorname{div}\left(f\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle e_j\right)=f\sum_{i,j}\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle\operatorname{div}(e_j)+\sum_{i,j}e_j\left(f\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle\right).$$

Uma vez que $p\in\Sigma^m$, vale que $\operatorname{div}(e_j)(p)=\operatorname{div}(e_i)(p)=0$, para qualquer $1\le i\le m$, daí obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j}\operatorname{div}\left(f\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle e_j-e_j(f)\langle P(e_i,e_j),\xi\rangle e_i\right)\\&\quad=\sum_{i,j}e_j\left(f\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle\right)-\sum_{i,j}e_i\left(e_j(f)\langle P(e_i,e_j),\xi\rangle\right).\end{aligned}\tag{5.28}$$

Agora usando a equação de Codazzi, temos

$$\begin{aligned}\langle\nabla^{\perp}_{e_j}P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle&=m\delta_{i,j}\langle\nabla^{\perp}_{e_i}h,\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle-\langle\nabla^{\perp}_{e_j}A(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle+\langle\overline{R}(e_i,e_j)\nabla^{\perp}_{e_i}\xi,e_j\rangle\\&=m\delta_{i,j}\langle\nabla_{e_j}h,\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle-\langle\nabla^{\perp}_{e_j}A(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle\\&\quad+\langle\nabla^{\perp}_{e_i},N\rangle\left(\nabla\langle e_j,T\rangle\langle e_i,e_j\rangle-\langle e_i,T\rangle\langle e_j,e_j\rangle\right),\end{aligned}$$

e portanto,

$$f\sum_{i,j}\langle\nabla^{\perp}_{e_i}P(e_i,e_j),\xi\rangle=-c(m-1)\langle N,\xi\rangle\langle\nabla f,T\rangle.\tag{5.29}$$

De forma similar,

$$\sum_{i,j}e_j(f)\langle\nabla^{\perp}_{e_i}P(e_i,e_j),\xi\rangle=-c(m-1)\langle N,\xi\rangle\langle\nabla f,T\rangle.\tag{5.30}$$

Substituindo (5.28), (5.29) e (5.30) em (5.27),

$$\begin{aligned}f\Box^*(\xi)&=\langle\Box(f),\xi\rangle+\sum_{i,j}\operatorname{div}\left(f\langle P(e_i,e_j),\nabla^{\perp}_{e_i}\xi\rangle e_j-e_j(f)\langle P(e_i,e_j),\xi\rangle e_i\right)\\&\quad+c(m-1)\left(f\langle\nabla^{\perp}_{T}\xi,N\rangle-\langle N,\xi\rangle\langle\nabla f,T\rangle\right).\end{aligned}$$

É importante pontuarmos que a expressão no termo de divergência é independente do referencial utilizado. Sendo assim, concluímos o resultado desejado ao aplicar o Teorema da Divergência. ■

Observação 5.2.1 *Devemos notar que, quando $c=0$, o espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$ se torna o espaço Euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso particular, temos*

$$\int_\Sigma f\Box^*(\xi)d\Sigma=\int_\Sigma\langle\Box(f),\xi\rangle d\Sigma.\tag{5.31}$$

Para $f \equiv 1$ no Lema (5.2.1), temos

Corolário 5.2.2 *Seja Σ^m uma subvariedade compacta no espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$. Então, para todo $\xi \in T\Sigma^\perp$*

$$\int_\Sigma \Box^*(\xi)d\Sigma = c(m-1)\int_\Sigma \langle \nabla_T^\perp \xi, N\rangle d\Sigma.$$

O próximo resultado nos fornece uma desigualdade do tipo Hiusken para subvariedades no espaço produto.

Lema 5.2.3 *Se Σ^m uma subvariedade do espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$, então*

$$|\nabla^\perp A|^2 \geq \frac{m}{m+2}\left(3m|\nabla^\perp h|^2 + 4c(m-1)\langle \nabla_T^\perp h, N\rangle\right). \tag{5.32}$$

Demonstração. Seja $F : \mathfrak{X}(\Sigma)^3 \to \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ um tensor definido por

$$F(X,Y,Z) = \nabla_Z^\perp A(X,Y) + a\left(\langle Y,Z\rangle \nabla_X^\perp h + \langle X,Z\rangle \nabla_Y^\perp h + \langle X,Y\rangle \nabla_Z^\perp h\right),$$

para $a \in \mathbb{R}$. Um cálculo direto nos assegura que:

$$\begin{aligned}\langle F(X,Y,Z), F(X,Y,Z)\rangle &= \langle \nabla_Z^\perp A(X,Y), \nabla_Z^\perp A(X,Y)\rangle + 2aQ_1(X,Y,Z)\\ &\quad + a^2 Q_2(X,Y,Z),\end{aligned}$$

onde Q_1 e Q_2 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}Q_1(X,Y,Z) &= \langle Y,Z\rangle\langle \nabla_X^\perp h, \nabla_Z^\perp A(X,Y)\rangle + \langle X,Z\rangle\langle \nabla_Y^\perp h, \nabla_Z^\perp A(X,Y)\rangle\\ &\quad + \langle X,Y\rangle\langle \nabla_Z^\perp h, \nabla_Z^\perp A(X,Y)\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}Q_2(X,Y,Z) &= \left(\langle Y,Z\rangle^2\langle \nabla_X^\perp h, \nabla_X^\perp h\rangle + \langle X,Z\rangle^2\langle \nabla_Y^\perp h, \nabla_Y^\perp h\rangle + \langle X,Y\rangle^2\langle \nabla_Z^\perp h, \nabla_Z^\perp h\rangle\right)\\ &\quad + 2\left(\langle Y,Z\rangle\langle X,Z\rangle\langle \nabla_X^\perp h, \nabla_Y^\perp h\rangle + \langle Y,Z\rangle\langle X,Y\rangle\langle \nabla_X^\perp h, \nabla_Z^\perp h\rangle\right)\\ &\quad + 2\langle X,Z\rangle\langle X,Y\rangle\langle \nabla_Y^\perp h, \nabla_Z^\perp h\rangle.\end{aligned}$$

Com o propósito de calcular estes últimos termos, vamos tomar $p \in \Sigma^m$ e um referencial ortonormal $\{e_1,\ldots,e_2\}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ numa vizinhança $U \subset \Sigma^m$ de p, que é geodésico em p. Então, vemos que

$$\sum_{i,j,k}\langle \nabla_{e_k}^\perp A(e_i,e_j), \nabla_{e_k}^\perp A(e_i,e_j)\rangle = |\nabla^\perp A|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{i.j,k} Q_2(e_i,e_j,e_k) = 3(m+2)|\nabla^\perp h|^2.$$

Para além disso, da equação de Codazzi (5.4) temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k} Q_1(e_i,e_j,e_k) &= \sum_{i,j,k}\Big(\delta_{jk}\langle\nabla^\perp_{e_i}h,\nabla^\perp_{e_k}\sigma(e_i,e_j)\rangle + \delta_{ik}\langle\nabla^\perp_{e_j}h,\nabla^\perp_{e_k}\sigma(e_i,e_j)\rangle\Big)\\
&\quad + \sum_{i,j,k}\delta_{ij}\langle\nabla^\perp_{e_k}h,\nabla^\perp_{e_k}\sigma(e_i,e_j)\rangle\\
&= 3m|\nabla^\perp h|^2 + 2(m-1)\sum_i\langle e_i,T\rangle\langle\nabla^\perp_{e_i}h,N\rangle\\
&= 3m|\nabla^\perp h|^2 + 2(m-1)\langle\nabla^\perp_T h,N\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
|F|^2 = |\nabla^\perp A|^2 + 2a\Big(3m|\nabla^\perp h|^2 + 2mm-1)\langle\nabla^\perp_T h,N\rangle\Big) + 3a^2(m+2)|\nabla^\perp h|^2.
$$

Fazendo $a=-m/(m+2)$ obtemos (5.31). ■

5.3 RESULTADO PRINCIPAL

Daqui em diante, trataremos apenas com $\mathcal{H}$-superfícies imersas no espaço produto $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$. Antes de provar nosso resultdo principal, Teorema 5.3.2, precisaremos da seguinte proposição auxiliar.

Proposição 5.3.1 *Seja Σ^2 uma $\mathcal{H}$-superfície no espaço produto $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$. Então, temos*

$$
\int_\Sigma\left(|\nabla^\perp A|^2 + 2\sum_\alpha tr(A_\alpha\circ HessH^\alpha)\right)d\Sigma \geq \int_\Sigma\Big(2\langle N,h\rangle^2 - (2-|T|^2+|\phi|^2)H^2\Big)\,d\Sigma.
$$

Demonstração. Primeiramente, de (5.22), um cálculo direto nos fornece o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\langle P,\nabla^2\xi\rangle &= \sum_{i,j}\langle P(e_i,e_j),\nabla^2\xi(e_i,e_j)\rangle\\
&= 2\sum_{i,j}\delta_{ij}\langle h,\nabla^2\xi(e_i,e_j)\rangle - \sum_{i,j}\langle A(e_i,e_j),\nabla^2\xi(e_i,e_j)\rangle\\
&= 2\sum_i\langle h,\nabla^2\xi(e_i,e_i)\rangle - \sum_{i,j}\langle A(e_i,e_j),\nabla^2\xi(e_i,e_j)\rangle\\
&= 2\langle h,\Delta^\perp\xi\rangle - \sum_{i,j}\langle A(e_i,e_j),\nabla^2\xi(e_i,e_j)\rangle,
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

para todo referencial ortonormal $\{e_1, e_2\} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Mais ainda, de forma similar a (5.26), como

$$A(e_i, e_j) = \sum_{\beta} \langle A_\beta(e_i), e_j \rangle e_\beta \quad \text{e} \quad \nabla^2 \xi(e_i, e_j) = \sum_{\alpha} \langle \mathrm{Hess}\xi^\alpha(e_i), e_j \rangle e_\alpha,$$

onde $\xi = \sum_\alpha \xi^\alpha e_\alpha$, então,

$$\sum_{i,j} \langle A(e_i, e_j), \nabla^2 \xi(e_i, e_j) = \sum_{\alpha} \mathrm{tr}\,(A_\alpha \circ \mathrm{Hess}\ \xi^\alpha) \rangle.$$

Portanto,

$$\Box^*(\xi) = 2\langle h, \Delta^\perp \xi \rangle - \sum_{\alpha} \mathrm{tr}\,(A_\alpha \circ \mathrm{Hess}H^\alpha)\,. \tag{5.34}$$

Agora fazendo $\xi = 2h$, temos

$$\begin{aligned} \Box^*(2h) &= 4\langle h, \Delta^\perp h \rangle - 2\sum_{\alpha} \mathrm{tr}(A_\alpha \circ \mathrm{Hess}H^\alpha) \\ &= \langle \Delta^\perp h, h \rangle + 3\langle \Delta^\perp h, h \rangle - 2\sum_{\alpha} \mathrm{tr}\,(A_\alpha \circ \mathrm{Hess}H^\alpha)\,. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Por outro lado, utilizando a seguinte identidade

$$\frac{1}{2}\Delta H^2 = \langle \Delta^\perp h, h \rangle + |\nabla^\perp h|^2,$$

em (5.35), temos

$$\Box^*(2h) = \langle \Delta^\perp h, h \rangle + \frac{3}{2}\Delta H^2 - 3|\nabla^\perp h|^2 - 2\sum_{\alpha} tr\,(A_\alpha \circ HessH^\alpha)\,.$$

Utilizando o Lema (5.2.3) para $m = 2$,

$$-3|\nabla^\perp h|^2 \geq -|\nabla A|^2 + 2\langle \nabla^\perp_T h, N \rangle.$$

Portanto,

$$\Box^*(2h) \geq \langle \Delta^\perp h, h \rangle + \frac{3}{2}\Delta H^2 - |\nabla^\perp A|^2 + 2\langle \nabla^\perp_T h, N \rangle - \sum_{\alpha} \mathrm{tr}\,(A_\alpha \circ \mathrm{Hess}H^\alpha)\,. \tag{5.36}$$

Vamos considerar agora $\{e_3, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$. Escrevendo $h = \sum_\gamma H^\gamma e_\gamma$, e considerando a definição de ϕ_α, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha tr(A_\alpha A_\beta)\langle e_\beta, h \rangle &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} H^\alpha H^\gamma tr(A_\alpha A_\beta)\langle e_\beta, e_\gamma \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha H^\beta tr(\phi_\alpha \phi_\beta) + 2\sum_{\alpha,\beta} (H^\alpha)^2 (H^\beta)^2 \\ &= \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha H^\beta tr(\phi_\alpha \phi_\beta) + 2H^4. \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 5.1.1,

$$\langle \Delta^{\perp} h, h\rangle + (2 - |T|^2)H^2 - 2\langle N, h\rangle^2 + \sum_{\alpha,\beta} H^{\alpha}H^{\beta} tr(\phi_{\alpha}\phi_{\beta}) = 0. \tag{5.37}$$

Agora vamos considerar $A_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(\phi_{\alpha} \circ \phi_{\beta})$. Desta maneira, a matriz $(A_{\alpha\beta})$ de ordem $(n-1) \times (n-1)$ é simétrica e pode ser considerada diagonal para uma escolha adequada dos $\{e_{\alpha}\}$. Portanto,

$$\sum_{\alpha,\beta} H^{\alpha}H^{\beta}\mathrm{tr}(\phi_{\alpha}\phi_{\beta}) = \sum_{\alpha}(H^{\alpha})^2\mathrm{tr}(\phi_{\alpha}^2) \leq \sum_{\alpha}(H^{\alpha})^2\sum_{\beta}\mathrm{tr}(\phi_{\beta})^2 = H^2|\phi|^2. \tag{5.38}$$

Daí, substituindo (5.37) e (5.38) em (5.36),

$$\begin{aligned} \Box^*(2h) - 2\langle \nabla_T^{\perp} h, N\rangle \geq -(2 - |T|^2 + |\phi|^2)H^2 + 2\langle N, h\rangle^2 + \frac{3}{2}\Delta H^2 \\ - |\nabla^{\perp} A|^2 - 2\sum_{\alpha} tr(A_{\alpha} \circ \mathrm{Hess}\, H^{\alpha}). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Portanto, considerando o Corolário 5.2.2 e o teorema da divergência, segue que

$$\int_{\Sigma}\left(|\nabla^{\perp}\sigma|^2 + 2\sum_{\alpha} tr(A_{\alpha} \circ Hess\, H^{\alpha})\right) d\Sigma \geq \int_{\Sigma}\left(2\langle N, h\rangle^2 - (2 - |T|^2 + |\phi|^2)H^2\right) d\Sigma,$$

como gostaríamos que fosse. ■

Agora, estamos prontos para apresentar a demonstração do nosso resultado principal a seguir

Teorema 5.3.2 *Seja Σ^2 uma $\mathcal{H}$-superfíce compacta no espaço produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então*

$$\int_{\Sigma}\left\{\left(1 - 5|T|^2 - \frac{3}{2}|\phi|^2\right)|\phi|^2 - 2(|\phi_h| + 1)|T|^2 + 2\right\} d\Sigma \leq 4\pi\chi(\Sigma). \tag{5.40}$$

Em particular, a igualdade vale se, e somente se, Σ^2 é isométrica a

(i) um slice $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$, ou

(ii) uma 2-sphere totalmente geodésica ou um toro de Clifford em $\mathbb{S}^3 \times \{t_0\}$, ou

(iii) uma superfície Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$,

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para começar, considerando a definição de ϕ_α, é imediato verficarmos que para todo $3 \leq \alpha, \beta \leq n+1$

$$A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha = \phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha.$$

Mais ainda, uma vez que para qualquer $3 \leq \alpha \leq n+1$ ϕ_α é uma matriz simétrica 2×2 com $tr(\phi_\alpha) = 0$, obtemos facilmente que $\phi_\alpha^2 = \lambda I$ para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ e, consequentemente,

$$tr(\phi_\alpha^2 \phi_\beta) = 0. \tag{5.41}$$

Além disso, de um cálculo direto e considerando (5.41), obtemos as seguintes identidades algébricas:

$$\sum_{\alpha,\beta} tr(A_\beta) tr(A_\alpha^2 A_\beta) = 2H^2|\phi|^2 + 4H^4 + 4\sum_{\alpha,\beta} H^\alpha H^\beta tr(\phi_\alpha \phi_\beta),$$

e

$$\sum_{\alpha,\beta} [tr(A_\alpha A_\beta)]^2 = \sum_{\alpha,\beta} [tr(\phi_\alpha \phi_\beta)]^2 + 4H^4 + 4\sum_{\alpha,\beta} H^\alpha H^\beta tr(\phi_\alpha \phi_\beta).$$

Portanto, de todas as identidades acima,

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha,\beta} &\Big(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2 - tr(A_\beta) tr(A_\alpha^2 A_\beta) \Big) \\ &= -\sum_{\alpha,\beta} \Big(N(\phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha) + [tr(\phi_\alpha \phi_\beta)]^2 \Big) + 2H^2 |\phi|^2. \end{aligned}$$

Então, a Proposição 2.1.3 pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta |A|^2 = |\nabla^\perp A|^2 &+ 2\sum_\alpha tr(A_\alpha \circ Hess\, H^\alpha) + 2|\phi_N|^2 - 4\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ &+ \Big(2 - |T|^2 + 2H^2\Big) |\phi|^2 - m\langle \phi_h(T), T\rangle \\ &- \sum_{\alpha,\beta} \Big(N(\phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha) + [tr(\phi_\alpha \phi_\beta)]^2 \Big). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Observe agora que, usando o Lema 2.1.6,

$$-\sum_{\alpha,\beta} \Big(N(\phi_\alpha \phi_\beta - \phi_\beta \phi_\alpha) + [tr(\phi_\alpha \circ \phi_\beta)]^2 \Big) \geq -\frac{3}{2}|\phi|^4. \tag{5.43}$$

Além disto, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$-4\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \geq -4|\phi|^2|T|^2 \quad \text{and} \quad -2\langle \phi_h(T), T\rangle \geq -2|\phi_h||T|^2. \tag{5.44}$$

Inserindo (5.43) e (5.44) in (5.42), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 \geq |\nabla^{\perp}A|^2 + 2\sum_{\alpha} tr(A_\alpha \circ Hess\, H^\alpha) + 2|\phi_N|^2 - 2|\phi_h||T|^2 \\ + \left(2 - 5|T|^2 + 2H^2 - \frac{3}{2}|\phi|^2\right)|\phi|^2.\end{aligned}$$

Tomando a integral e usando o Teoram da Divergência, segue da Proposição 5.3.1,

$$\begin{aligned}0 \geq \int_\Sigma \left(2|\phi_N|^2 + 2\langle N, h\rangle^2 + (|\phi|^2 + |T|^2)H^2\right) d\Sigma \\ + \int_\Sigma \left[\left(2 - \frac{3}{2}|\phi|^2 - 5|T|^2\right)|\phi|^2 - 2H^2 - 2|\phi_h||T|^2\right] d\Sigma.\end{aligned} \tag{5.45}$$

Então,

$$\int_\Sigma \left[\left(2 - \frac{3}{2}|\phi|^2 - 5|T|^2\right)|\phi|^2 - 2H^2 - 2|\phi_h||T|^2\right] d\Sigma \leq 0. \tag{5.46}$$

Por outro lando, da equação de Gauss, tem-se

$$2H^2 = 2K + |\phi|^2 - 2(1 - |T|^2).$$

Portanto, o Teorema de Gauss-Bonnet implica em

$$\int_\Sigma \left\{\left(1 - \frac{3}{2}|\phi|^2 - 5|T|^2\right)|\phi|^2 - 2(|\phi_h| + 1)|T|^2 + 2\right\} d\Sigma \leq 4\pi\chi(\Sigma). \tag{5.47}$$

Se a igualdade ocorre em (5.47), então todas as desigualdades obtidas ao longo da demonstração, se tornam igualdades. Em particular, a igualdade em (5.45) e (5.46). Desta forma, temos que $|\phi_N| = \langle N, h\rangle = 0$ e ou $|T| = |\phi| = 0$ ou $H = 0$. No primeiro caso, que Σ^2 é uma $\mathcal{H}$-superfície satisfazendo as condições to Corolário (5.1.3), e portanto é totalmente geodésica. Sendo assim então ou será isométrica a um slice $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ no caso em que $n = 2$, ou a uma esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S}^3 \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Agora vamos focar no segundo caso. Por outro lado, já que $|\phi_N| = \langle N, h\rangle = 0$ a identidade em (2.28) implica que $A_N = 0$. Consequentemente, de (2.23) temos que $|T|$ é constante em Σ^2, portanto $|N|$ também será. Da hipótese de $H = 0$, a igualdade no Lema 5.2.3 também ocorre, o que nos garante que Σ^2 é uma superfície paralela de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, isto é, que $\nabla^{\perp}A = 0$. Então a igualdade de Codazzi se escreve como,

$$0 = \langle \overline{R}(X, Y)N, Z\rangle = |N|^2\left(\langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle\right), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Portanto, é fácil vermos que $N = 0$ ou $T = 0$. No caso em que $N = 0$, devemos ter que Σ^2 é um cilindro vertical $\pi^{-1}(\gamma)$, onde γ é um círculo em $\mathbb{S}^n$ e $\pi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a projeção natural. Este caso não pode ocorrer, uma vez que contradiz o fato de Σ^2 ser compacta. Portanto $T = 0$, e Σ^2 é uma superfície mínima em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Para o caso em que Σ^2 pode ser isometricamente imersa em um certo $\mathbb{S}^3 \times \{t_0\}$, um clássico resultado a cerca de superfícies isoparamétricas em espaços forma Riemannianos (LAWSON, 1969), nos garante que Σ^2 é isométrica a um toro de Clifford $\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2})$ em $\mathbb{S}^3 \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Para os outros casos observe que pela igualdade em (5.46), obtemos que

$$\int_\Sigma |A|^2 \left(\frac{3}{2}|A|^2 - 2 \right) d\Sigma = 0$$

Portanto, de (LI; LI, 1992, Teorema 1) Σ^2 é isométrica a uma superfície Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. ∎

REFERÊNCIAS

ABRESH, U.; ROSENGBERG, H., A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.*, n. 193, p. 141–174, 2004;

ALBUJER, A.L.; DOS SANTOS, F.R., Willmore surfaces and Hopf tori in homogeneous 3-manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, n. 62, p.181-200, 2022;

ALBUJER, A.L.; DA SILVA S.F.; DOS SANTOS F.R., Total mean curvature surfaces in the product space $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and applications. *To appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.*;

ALEDO, J.A.; ALÍAS, L.J.; ROMERO, A., A new proof of Liebmann classical rigidity theorem for surfaces in space forms. *Rocky Mountain J. Math*, n.35, p.1811-1824, 2005;

ALENCAR, H.; DO CARMO, M., Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proc. Am. Math. Soc. 120,* p.1223–1229, 2004;

ALÍAS, L.J.; IMPERA, D.; RIGOLI M., Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products. *Trans. Am. Math. Soc.*, n. 365, p. 591-621, 2013;

ALÍAS, L.J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M., Maximum principles and geometric applications. *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, Cham, 2016;

ALÍAS L.J.; MELÉNDEZ J., Integral inequalities for compact hypersurfaces with constant scalar curvature in the Euclidean sphere. *Mediterr. J. Math*, n.17, p.61, 2020;

ARAÚJO, K.O.; TENENBLAT, K., On submanifolds with parallel mean curvature vector. *Kodai Math. J.*, n.32, p. 59-76, 2009;

BARBOSA, J.L.M.; COLARES, A.G., Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, n. 15, p.277-297, 1997;

BATISTA, M., *Simons type equation in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and applications. Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* n.61, p.1299-1322, 2011;

CAO, L.; LI, H., r-Minimal submanifolds in space forms. *Ann. Global Anal. Geom.*, n.32 p. 311-341;

CARTAN, É., Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaes a courbure constante. *Ann. Mat. Pura Appl.*, n. 17, pg.177-191, 1938;

CHEN, B-Y., Some conformal invariants of submanifolds and their applications. *Bolletino U. M. I.*, n.10, p.380-385, 1974;

CHEN, B-Y., On the total curvature of immersed manifolds: An inequality of Fenchel-Borsuk-Willmore. *Amer. J. Math.*, n.93, p.148-162, 1971;

CHEN, B-Y. A comprehensive survey on parallel submanifolds in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds. *Axioms*, v. 8, n. 4, p. 120, 2019.

CHENG, S.Y.; YAU, S-T., Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann*, n. 225, p. 195-204, 1997;

CHERN, S.S.; DO CARMO, M.P.; KOBAYASHI, S., Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *Functional Analysis and Related Fields*, p. 59-75, 1970;

DANIEL, B., Isometric Immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, n. 82, p. 87-131, 2007;

DILEN, F.; FASTENAKELS J.; VAN DER VEKEN,J.; VRAKEN, L., Constante angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Mh. Math.*, n.152, p. 89-96, 2007;

DILEN, F.; MUNTEANU, M.I., Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc., New Series*, n.40, p. 85-97, 2009;

DJACZER, M., Submanifolds and isometric immersions. *Mathematics Lecture Series,* vol.13, Publish or Perish, Inc., Houston, 1990;

DOS SANTOS, F.R., Rigidity of surfaces with constant extrinsic curvature in Riemannian product spaces. *Bull. Braz. Math. Soc. New Series, vol.52, p.307-326 , 2021;*

DOS SANTOS, F.R.; DA SILVA, S.F., On complete submanifolds with parallel normalized mean curvature in product spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, vol. 152 ,p. 1-25;

DOS SANTOS, F.R.; DA SILVA, S.F., A Simons type integral inequalities for closed submanifolds in the product space $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *Nonlinear Analysis*, n.209, p.112366, 2021;

DOS SANTOS, F.R.; DA SILVA, S.F.; DE SOUZA, A.F., Characterizations of Linear Weingarten submanifolds in the product spaces,.*Preprint*;

ERBACHER, J., Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connection. *Nagoya Math. J.*, n. 45, p. 139-165, 1972;

FETCU, D.; ONICIUC, C.; ROSENBERG, H., Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *J. Geom. Anal.*, n.23, p.2158-2176, 2013;

FETCU,D.; ROSENBERG, H., On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, n.29, p. 1283-1306, 2013;

GROSJEAN, J.F., Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact submanifolds. *Pacific J. Math*, n. 206 p. 93-112, 2002;

GUO, X.; LI, H., Submanifolds with constant scalar curvature in a unit sphere. *Tohoku Math. J.*, n.65, p.331-339, 2013;

LI, H.; SUH, Y.J.; WEI. G., Linear Weingarten hypersurfaces in the unit sphere. *Bull. Korean. Math. Soc.*, n.46 ,p. 321-329, 2009;

de LIMA, H.F., dos SANTOS, F.R.; VELÁSQUEZ, M.A., On the umbilicity of complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces immersed in a locally symmetric Lorentz space. São Paulo J. Math. Sci., n. 11, 456–470 (2017)

HOPF, H., Differential Geometry in the Large. *Lectures notes in Math, Springer Berlin*, n.1000, 1983.

HOU, Z.H.; YANG, D., Linear Weingarten spacelike hypersurfaces in the Sitter space. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, n.17, p. 769-780, 2010;

LAWSON, H.B., Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. Math.*, n.35, p. 187-197, 1969;

LEVI-CIVITA, Famiglia di superfici isoparametric nell'ordinario spzio euclideo. *Att. Accad. Naz. Lincie Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.*, n. 26, p.355-362, 1937;

LI, A.M.; LI, J.M., An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere. *Arch. Math.*, n.58, p. 582-594, 1992;

MARQUES, F.C.; NEVES, A., Min-Max theory and the Willmore conjecture. *Ann. Math.*, n.179, p.683-782, 2014;

MEEKS, W.H.; ROSENBERG, H., Stable minimal surfaces in $M^n \times \mathbb{R}$. *J. Differ. Geom.*, n.68, p. 515-534, 2004;

MENDONÇA, B.; TOJEIRO, R., Umbilical Submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *Canad. J. Math.*, n. 66, p. 400-428, 2014;

MONTIEL, S.; ROS, A., Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. *Differential geometry, Pitman Monographs Survaeys Pure Appl. Math.,* vol. 52, p. 279-296, 1991

NAVARRO, M.; RUIZ-HERNÁNDEZ, G.; SOLIS, D.A., Constant mean curvature hypersurfaces with constant angle in semi-Riemannian space forms. *Differ. Geom. Appl.*, n.49, p.473-495, 2016;

NISTOR, A.I., New developments on constant angle property in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, n.96, p. 863-875, 2017;

NOMIZU, K.; SMYTH, B., A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature.*J. Differ. Geom.*, n.3, p. 367-377, 1969;

O'NEILL, B., Semi-Riemannian geometry with applications to Relativity. New York, *Academic Press*, 1983;

OMORI, H., Isometric immersions of Riemannian manifolds,. *J. Math. Soc. Japan*, n.19, p.205-2174, 1967;

ÔTSUKI, T., Minimal hypersurfaces in a Riemannian Manifold of constant curvature. *Amer. J. Math.*, n.92, p.145-173, 1970;

PIGOLA,S.; RIGOLI, M.; SETTI, A.G., Maximum principles on Riemannian manifolds and applications. *Mem. Amer. Math. Soc.*, n.822, 2005;

ROSENBERG, H., Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *J. Math*, n.46, p. 1177-1195, 2002;

SANTOS, W., Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres. *Tohoku Math. J.*, n.46, p. 403-415, 1994;

SEGRE, B., Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Att. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.*, n. 27, p. 203-207 ,1938;

SIMONS, J., Minimal varieties in Riemannian n-manifolds. *Ann. Math.*, n. 88, p. 62–105, 1968;

YAU, S-T., Submanifolds with constant mean curvature I. *Am. J. Math.,* n.28, p.201-228, 1975;

YAU, S-T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.,* n.96, p.346-366, 1975;

WEINER, J.L., On the Problem of Chen, Wilmore, et.al. *Indiana Univ. Math. J.*, n.27 p. 19-35. 1978;

WILLMORE, T.J., Note on embedded surfaces. *An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I A Mat. (N.S.)*, n.11B, p.493-496, 1965.