

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**ESTUDO ANALÍTICO DA RETA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

LIDIANE PEREIRA DE CARVALHO

CARUARU, 2014

LIDIANE PEREIRA DE CARVALHO

**ESTUDO ANALÍTICO DA RETA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Colegiado de
Licenciatura em Matemática do Centro
Acadêmico do Agreste da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito
parcial para a obtenção do título de
Licenciada em Matemática.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

Co-orientador: Edelweis Jose Tavares Barbosa

CARUARU, 2014

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva CRB/4-1223

- C331e Carvalho, Lidiane Pereira de.
 Estudo analítico da reta à luz da teoria dos registros de representações semióticas. /
 Lidiane Pereira de Carvalho. – Caruaru, 2014.
 91f., il.; 30 cm.
- Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha; Co-orientador: Edelweis José Tavares
 Barbosa.
 Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de
 Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2014.
 Inclui referências.
1. Semiótica. 2. Geometria analítica. 3. Matemática – Estudo e ensino – Caruaru
 (PE). I. Rocha, Cristiane de Arimatéa. (Orientadora). II. Barbosa, Edelweis José Tavares
 (Co-orientador). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.)

UFPE (CAA 2014-95)

LIDIANE PEREIRA DE CARVALHO

**ESTUDO ANALÍTICO DA RETA À LUZ DA TEORIA DOS
REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS**

BANCA EXAMINADORA

Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

Edelweis Jose Tavares Barbosa
(Co-Orientador)

Amanda Barbosa da Silva
(Examinadora interno)

Fabiana dos Santos Faria
(Examinadora externo)

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em __ / __ / 2014

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é o resultado não apenas de uma pesquisa, mas dos aprendizados construídos ao longo da minha formação. Sendo assim, gostaria de agradecer a todos que de algum modo contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

A Deus, por tudo.

À Universidade Federal de Pernambuco, em especial o Campus do Agreste, pela oportunidade.

Agradeço a minha família. Meus pais, José e Cosma, pelo amor, incentivo e por acreditarem nos meus sonhos. Meu irmão e colega de turma, Wagner, pela companhia nessa jornada e aprendizados partilhados. A minha irmã, Lucelma, pelo inestimável apoio (e pelas muitas risadas!).

A minha orientadora, Cristiane, pela amizade, paciência, conselhos, explicações e tempo devotado não apenas a esse trabalho, mas em todos os momentos, mesmo quando iam além de suas funções de professora.

Ao meu co-orientador, Edelweis, pelas orientações, indicações e empréstimos de livros, pelas correções e inesgotáveis ensinamentos dados neste trabalho, no PIBID e nas disciplinas da graduação.

Agradeço a todos os meus professores: de diferentes formas vocês me deram ensinamentos sem os quais eu não seria quem sou hoje. Obrigada pela disponibilidade dentro e fora de sala de aula.

Agradeço aos professores, de minhas disciplinas e de outros cursos, que ofertaram cursos de extensão, palestras, projetos e eventos. Pelos importantes momentos de discussão (em corredores, salas de aula, os momentos de almoço) que ampliaram minha visão de educação, matemática, ciência e mundo.

Agradeço aos colegas de campus de diferentes cursos com quem dividi salas, ou com quem tive a oportunidade de conviver e conversar, por me mostrarem o mundo por um novo olhar, pelas amizades construídas.

Por fim, agradeço a meus colegas de turma, pela companhia, pelas conversas e amizade. Apenas quem caminha junto pode realmente entender o valor de cada conquista. Obrigada por dividirem ao longo desses últimos anos angústias e alegrias.

Resumo

O objetivo desta pesquisa foi analisar as representações e conversões entre registros na Geometria Analítica, em especial no estudo da reta, utilizados por estudantes. Para isto, utilizamos como referencial teórico a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval. A escolha do conteúdo se justificou, em especial, a sua própria constituição, que articula geometria e álgebra — sendo assim indispensável que, em seu ensino, sejam considerados ambos os campos da Matemática de forma integrada. A pesquisa de cunho qualitativo foi realizada com estudantes do segundo período do curso de Licenciatura em Matemática do Campus do agreste da Universidade Federal de Pernambuco. A pesquisa revelou que os estudantes apresentam dificuldade para reconhecer a reta em seus diferentes registros e para efetuar transformações, especialmente conversão envolvendo o registro gráfico.

Palavras-chave: Representação Semiótica; Geometria Analítica; Ensino.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Lista de figuras

Figura 1 - Esquema com possibilidade de conversão da reta.	24
Figura 2- Plano Cartesiano.....	29
Figura 3 - Segmento orientado AB	30
Figura 4 - Vetores com mesmo sentido e vetores com sentidos opostos	30
Figura 5 - Representações do vetor v	31
Figura 6 - Operações com vetores	31
Figura 7 - Pontos colineares.....	32
Figura 8- Colineares desenho de triângulos semelhantes.	33
Figura 9 - Representações de vetor diretor e reta.....	37
Figura 10 - Inclinação da reta.....	38
Figura 11- Equação Reduzida da Reta.....	39
Figura 12 – Gráfico para equação segmentada.	41
Figura 13 - Gráficos da segunda questão da atividade.....	49
Figura 14 - Gráficos da sexta questão da atividade	51
Figura 15 - Gráficos fornecidos para a décima primeira questão da atividade.	52
Figura 16- Respostas do estudante 27 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.	55
Figura 17 - Respostas do estudante 2 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.	55
Figura 18 - do estudante 28 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.....	55
Figura 19 - Resposta do estudante 19 para a primeira questão.	56
Figura 20 - Resposta do Estudante 20 para a primeira questão.....	56
Figura 21 - Resposta do estudante 5 para a primeira questão.	57
Figura 22 - Resposta do Estudante 12 para a primeira questão.....	57
Figura 23 - Resposta do Estudante 17 para a primeira questão.....	57
Figura 24 - Resposta do estudante 10 para a primeira questão.	58
Figura 25 - Resposta do estudante 9 para a segunda questão.....	58
Figura 26 - Resposta do estudante 16 para a segunda questão.....	59
Figura 27 - Resposta do estudante 17 para a segunda questão.....	60
Figura 28 - Resposta do estudante 29 para a terceira questão.....	60
Figura 29 - Resposta do estudante 22 para a terceira questão.....	61
Figura 30 - Resposta do estudante 11 para a terceira questão.....	61
Figura 31 - Resposta do estudante 12 para a terceira questão.....	62
Figura 32 - Resposta do estudante 16 para a terceira questão.....	62
Figura 33 - Resposta do estudante 6 para a terceira questão.....	63
Figura 34 - Resposta do estudante 3 para a quarta questão.....	64
Figura 35 - Resposta do estudante 9 para a quarta questão.....	65
Figura 36 - Resposta do Estudante 6 para a quarta questão.	65
Figura 37 - Resposta do estudante 22 para a quarta questão.....	66
Figura 38 - Resposta do estudante 11 para a quarta questão.....	66

Figura 39 - Resposta do estudante 12 para a quarta questão.....	66
Figura 40 - Resposta do estudante 16 para a quarta questão.....	67
Figura 41 - Resposta do estudante 13 para a quarta questão.....	67
Figura 42 - Resposta do estudante 11 para a quinta questão.....	68
Figura 43 - Resposta do estudante 5 para a quinta questão.....	68
Figura 44 - Resposta do estudante 17 para a quinta questão.....	69
Figura 45 - Resposta do estudante 27 para a quinta questão.....	69
Figura 46 - Resposta do estudante 11 para a sexta questão.....	71
Figura 47 - Resposta do estudante 2 para a sétima questão.	72
Figura 48 - Respostas dos estudantes 3 e 6, respectivamente, para a sétima questão.	72
Figura 49 - Resposta do estudante 11 para a oitava questão.	73
Figura 50 - Resposta dos estudantes 25 e 13, respectivamente, para a oitava questão.	74
Figura 51 - Respostas dos estudantes 2 e 13, respectivamente, para a nona questão.....	75
Figura 52 - Resposta do estudante 6 para a nona questão.	75
Figura 53 - Resposta do estudante 3 para a décima questão.	76
Figura 54- Respostas dos estudantes 10 e 25 respectivamente para a décima questão.	77
Figura 55 – Exemplo de resposta considerada como em branco para a décima primeira questão.	78
Figura 56 - Resposta do estudante 9 para a décima primeira questão.....	79
Figura 57 - Resposta do estudante 1 para a décima primeira questão.....	79
Figura 58 - Resposta do estudante 23 para a décima questão.	80
Figura 59 - Resposta do estudante 11 para a décima primeira questão.....	80
Figura 60 - Resposta do estudante 20 para a décima primeira questão.....	81
Figura 61 - Resposta do estudante 11 para o segundo gráfico da décima primeira questão.	81
Figura 62 - Resposta do estudante 23 para o segundo gráfico da décima primeira questão.	81
Figura 63 - Resposta do estudante 1 para a décima primeira questão.....	82

Lista de Quadros

Quadro 1 - Distribuição do conteúdo de Ponto e Reta	21
Quadro 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática). (DUVAL, 2010, p. 14).....	26
Quadro 3 - Registros mobilizados para estudo de vetores	32
Quadro 4 - Registros mobilizados para obter a condição de alinhamento de três pontos.	34
Quadro 5 - Registro mobilizados para verificar colinearidade entre três pontos.	35
Quadro 6 - Registro Mobilizados para obter a Equação Geral da Reta.....	36
Quadro 7 – Registros Mobilizados para obter a Equação Vetorial da Reta.	37
Quadro 8 - Registro Mobilizados para obter a Equação Reduzida da Reta.	40
Quadro 9 - Registro Mobilizados para obter a equação segmentada da reta.....	42
Quadro 10 - Registros Mobilizados para obter a equação paramétrica da reta.	43
Quadro 11 – Registros Mobilizados para obter a equação paramétrica da reta utilizando vetor. 44	
Quadro 12 - Registro Mobilizados para obter as Equações Simétricas da Reta.....	45
Quadro 13 - Registro Mobilizados para obter a equação reduzida da reta com dados vetoriais. 45	
Quadro 14 – Porcentagem de reprovações em Geometria Analítica em relação as reprovações nas demais disciplinas.	47
Quadro 15 - Perguntas para formação do perfil.	48
Quadro 16 – Porquês apresentados pelos estudantes para justificar as questões consideradas mais difíceis por eles.	85

Sumário

1.	INTRODUÇÃO	12
2.	O ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA	14
2.1	Documentos Curriculares Oficiais	14
2.2	Pesquisas em Geometria Analítica	16
2.3	O livro didático e a Geometria Analítica.....	19
3.	A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	23
3.1	O Estudo da Reta e os Registros de Representação Semiótica.....	27
3.1.1	Sistema cartesiano e ponto: introdução no ensino médio.....	29
3.1.2	Vetores – introdução no ensino superior	30
3.1.3	Condição de alinhamento de três pontos: abordagem no Ensino Médio.....	32
3.1.4	Condição de alinhamento de três pontos: abordagem no Ensino Superior	34
3.1.5	Forma geral da equação na reta: abordagem no Ensino Médio.....	35
3.1.6	Equação vetorial da reta: abordagem do ensino superior	36
3.1.7	Equação reduzida da reta: abordagem no Ensino Médio	37
3.1.8	Equação segmentada: abordagem no Ensino Médio	41
3.1.9	Equação paramétrica da reta: abordagem no Ensino Médio	42
3.1.10	Equações Paramétricas da Reta: abordagem no Ensino Superior	43
3.1.11	Equação Simétrica da Reta: abordagem no Ensino Superior	44
3.1.12	Equações reduzidas da reta: abordagem no Ensino Superior	45
4.	METODOLOGIA	46
4.1	Apresentação e discussão da atividade	48
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES DAS ANÁLISES	54
5.1.	Descrição dos Estudantes do 2º Período de Matemática	54
5.2	Análise da primeira questão	56
5.3	Análises da segunda questão	58
5.4	Análise da terceira questão.....	60
5.5	Análise da quarta questão.....	64
5.6	Análise da quinta questão.....	67
5.7	Análise da sexta questão	70
5.8	Análises da sétima questão.....	71

5.9 Análise da oitava questão	73
5.10 Análise da nona questão	74
5.11 Análise da décima questão	76
5.12 Análise da décima primeira questão.....	77
5.12.1 Primeiro gráfico.....	78
5.12.2 Segundo gráfico.....	81
5.13 Comentário a respeito das questões de conversão entre os registros gráficos e algébricos (7ª a 11ª questão).....	82
5.14 Análise da décima segunda questão	83
5.15 Análise geral dos resultados	85
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
7. REFERÊNCIAS	89

1. INTRODUÇÃO

O ensino da geometria é considerado um momento privilegiado do ensino da Matemática, por permitir a passagem do concreto para o pensamento. Essa passagem pode ser realizada através da construção dos conceitos e fórmulas geométricas por meio de deduções participativas entre estudantes e professores, propiciando um ambiente dinâmico e motivador para o aprendizado matemático.

A geometria analítica, em especial, realiza uma articulação direta entre geometria e álgebra, uma vez que o plano cartesiano permite converter formas geométricas em expressões algébricas e expressões algébricas em figuras geométricas. É um dos campos matemáticos onde podemos trabalhar diferentes eixos de forma a complementar e ampliar conceitos, vistos, muitas vezes, de forma fragmentada. Mas, para que essa articulação seja significativa, é preciso que o ensino siga em duas vias: “o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figura geométricas.” (BRASIL, 2006, p. 77).

Essa concepção de ensino apresentada está em concordância com a teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, que defende que, para haver o aprendizado em matemática, é necessário o uso de pelo menos dois *registros* de representações semióticas do objeto em estudo e a *conversão* de um registro para outro. É necessário que o estudante tenha acesso a diferentes registros para que o objeto matemático não fique limitado a uma de suas representações, que não conseguirá apresentá-lo em sua totalidade. Como a geometria analítica articula, pelo menos os registros numérico, algébrico, gráfico e a língua natural é um campo privilegiado para o estudo dos diferentes registros, os tratamentos e conversões entre eles.

Tendo em vista a necessidade do uso de diferentes registros e da articulação entre álgebra e geometria, esta pesquisa teve como objetivo analisar as representações mais comumente escolhidas pelos estudantes, as transformações mobilizadas nessa representação para solucionar problemas, as convenções realizadas entre esses registros e as principais dificuldades encontradas pelos estudantes no conteúdo de Geometria Analítica no estudo da reta. Para isso, procuramos trabalhar com diferentes representações da reta, tanto em registros diferentes como as múltiplas formas da equação da reta, pois, segundo Farias (2012, p. 2), “Qualquer trabalho desenvolvido

neste contexto exige do aluno o reconhecimento da equação de reta por meio de representações distintas.”.

A escolha da reta foi motivada pelo fato de ser um dos primeiros tópicos abordados no estudo da geometria analítica, que permite representação em todos os registros, assim como realizar os tratamentos e conversões entre eles. Consideramos, assim, que é importante conhecer um pouco mais sobre o processo de ensino e aprendizagem nessa iniciação ao estudo analítico de elementos geométricos.

Haja vista que essa pesquisa foi fundamentada na Teoria de Registros de Representações Semióticas aplicada para o ensino de Geometria Analítica, foi realizada inicialmente uma pesquisa bibliográfica com dois enfoques: conhecer a teoria de Duval e fazer um levantamento dos atuais trabalhos desenvolvidos para o ensino de Geometria Analítica.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. No capítulo dois é apresentado um breve levantamento das atuais orientações curriculares e pesquisas recentemente realizadas sobre o ensino de Geometria Analítica com enfoque nas pesquisas que utilizam ou investigam sobre a Teoria de Representações Semióticas nesse conteúdo.

No capítulo três, trazemos uma pequena introdução à Teoria de Representações Semiótica do autor Raymond Duval, e buscamos apresentar as relações da teoria com o conteúdo de Geometria Analítica. No capítulo quatro, é apresentada a metodologia utilizada para realizar essa investigação e o público que participará da pesquisa, nele discutimos a atividade utilizada para coleta de dados.

No capítulo cinco, apresentamos e discutimos os resultados obtidos de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. E, por fim, no capítulo seis, realizamos nossas considerações finais.

2. O ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA

A fim de conhecer o cenário e a atual situação do ensino de Geometria Analítica, foram pesquisados os trabalhos que vêm sendo realizados sobre o ensino de geometria em relação à Teoria de Representações Semióticas e o ensino de Geometria Analítica de forma geral, isto é, o que dizem os documentos oficiais e o que tem sido obtido nos estudos realizados neste campo.

2.1 Documentos Curriculares Oficiais

O PCN+ (2002) traz que a “Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações” (BRASIL, 2002, p. 124). Também destaca a importância do aluno “perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características” (BRASIL, 2002, p. 124), e que “mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe” (BRASIL, 2002, p. 124). De maneira que, em seu ensino, objetivamos, entre outras coisas, que os estudantes sejam capazes de “construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles” (BRASIL, 2002, p. 125).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), o estudo da Geometria é apontado como uma “oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas” (BRASIL, 2006, p. 75). Nele, a Geometria Analítica é caracterizada como:

a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). (BRASIL, 2006, pp. 76-77).

O OCEM reconhece, assim, a Geometria analítica como um campo de articulação entre geometria e álgebra, e que “esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola” (BRASIL, 2006, p. 77). Assim como o PCN+, o OCEM (BRASIL, 2006, pp. 77 – 78) orienta para o abandono de memorizações excessivas e a importância de se trabalhar o significado de uma equação. Aponta, ainda, que o estudo

das equações deve se dar por meio de deduções, e não apenas apresentações de expressões prontas, afim de que o aprendizado seja significativo, e que deve ser trabalhado o sentido geométrico dos parâmetros e as relações entre coeficientes de pares de retas, sejam elas paralelas ou perpendiculares. Indica, ainda, que a posição relativa entre retas e círculos deve ser discutida sob o ponto de vista algébrico, por meio da resolução de sistemas de equações. Da mesma forma, o estudo de resolução de um sistema deve ser colocado sob a ótica geométrica, ou seja, pode ser associado ao estudo da posição relativa entre retas e plano.

Os Parâmetros Curriculares de Pernambuco também indicam a Geometria Analítica, como uma área capaz de “proporcionar o desenvolvimento das habilidades de visualização” (PERNAMBUCO, 2012, p. 122) e que “permite a articulação de geometria com o campo da álgebra” (PERNAMBUCO, 2012, p. 122). E apontam que

para que essas características apresentem significado para o estudante, o trabalho nessa área não deve ser resumido à simples manipulação simbólica. Os significados geométricos de coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas, perpendiculares, tangentes e secantes, podem contribuir bastante para a compreensão das relações entre geometria e a álgebra (PERNAMBUCO, 2012, p. 122).

Nas orientações específicas para o 11º ano dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco também são destacadas as relações entre as representações gráficas e algébricas, nos tópicos:

- Associar uma reta representada no plano cartesiano a sua representação algébrica e vice-versa;
- Reconhecer o sentido geométrico dos coeficientes da equação de uma reta;
- Associar os coeficientes de reta (paralelas, perpendiculares e oblíquas) as suas representações geométricas e vice-versa;
- Associar a equação de uma circunferência a sua representação no plano cartesiano;
- Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico (caracterizado por suas coordenadas);
- Relacionar as operações realizadas com as coordenadas de um vetor (soma e multiplicação por um escalar) com sua representação geométrica (PERNAMBUCO, 2012, p. 125).

Percebe-se que nos três documentos é incentivado o ensino de geometria analítica e álgebra de forma conjunta, o que demonstra um reconhecimento às contribuições que essa abordagem pode trazer para o ensino de ambos os campos. Pois,

“problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos e relações algébricas são interpretadas geometricamente e esta transição é um processo de suma importância à construção do conhecimento nessa área” (RICHIT, 2005, p. 43). É importante ressaltar que essa relação não está restrita ao uso de aplicações dos conceitos, pois, como explica Munhoz (1999, *apud.* RICHIT, 2005, p. 41), “a geometria analítica apresenta uma dialética entre a Geometria e a Álgebra permeada pela língua natural, ou seja, todo e qualquer problema proposto em Geometria Analítica, tem sua interpretação geométrica e algébrica”.

2.2 Pesquisas em Geometria Analítica

Atendendo às orientações oficiais, várias pesquisas têm buscado formas de trabalhar o ensino de Geometria analítica, de forma a integrar geometria e álgebra.

Richit (2005), em sua dissertação de mestrado, apresentou os resultados de uma pesquisa que buscava descrever e analisar como trabalhar com projetos em Geometria Analítica, usando software de geometria dinâmica. Sua pesquisa visou à formação de futuros professores de Matemática, destacando alguns aspectos pertinentes ao trabalho com projetos que se coadunam aos princípios do Construcionismo. Em sua avaliação, a autora considera que o uso de projetos na licenciatura pode contribuir para o desenvolvimento de saberes de uso pedagógico e aprofundamento do conhecimento acerca do próprio recurso que é utilizado. Destacando, no entanto, a necessidade de que se conceda aos futuros professores autonomia para explorar conceitos de uma dada área do conhecimento usando recursos das tecnologias informáticas.

Vilela, Jahn e Costa (2008), procurando compreender os processos cognitivos envolvidos no ensino e aprendizagem de Geometria, investigaram os temas de Geometria explorados com um ambiente de geometria Dinâmica. A pesquisa foi realizada com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio e utilizou o Geogebra. Foram realizadas quatro atividades contemplando conteúdos de geometria analítica tais como coeficiente angular e linear. Os pesquisadores afirmam que a visualização dos objetos matemáticos pôde contribuir para um melhor entendimento do conteúdo tratado e acreditam que houve assimilação de novos conhecimentos por parte dos alunos.

Cardoso, Nehring e Soares (2012) também realizaram uma pesquisa com o uso do Software Geogebra e a Teoria de Duval, sendo seu trabalho desenvolvido com licenciados em matemática de uma universidade comunitária do interior do Rio Grande

do Sul. Na pesquisa, procuraram analisar os registros de representação mobilizados por 14 licenciandos ao longo de 16 atividades, organizadas em 3 sequências de ensino. Os autores consideraram que o uso do Geogebra contribuiu para a visualização e interpretação dos elementos geométricos explorados, mas observaram que alguns estudantes tiveram maior dificuldade em realizar a conversão, em especial do gráfico para o algébrico. Destacaram também que o registro da língua natural foi mobilizado não só para converter desse registro para os demais, mas também para argumentar e descrever suas análises.

Em seu mestrado, Rizzon (2008) realizou um estudo com turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Porto Alegre/RS, após a realização de uma Unidade de Aprendizagem¹ sobre geometria analítica; a autora buscou responder a seguinte questão: como os alunos aplicam a linguagem matemática na interpretação de questões sobre geometria analítica em uma escola do ensino médio? Sendo assim, buscou compreender o modo como os estudantes aplicam a linguagem matemática na resolução de questões no âmbito da geometria analítica, e identificar quais os conteúdos mais lembrados e não lembrados pelos alunos.

Os conteúdos mais lembrados pelos alunos foram: a equação da circunferência; o centro; os termos do desenvolvimento da equação normal da circunferência, com a variável x e o termo com a variável y ; o ponto que pertence à equação analítica e aos eixos coordenados; o par ordenado; e a equação reduzida da reta que destacava os coeficientes angular e linear. E observou que os conteúdos menos lembrados nessa pesquisa foram: o raio da circunferência; o termo independente da equação normal da circunferência; a inclinação (declividade); o coeficiente angular interpretado como a tangente do ângulo correspondente ou razão entre os catetos oposto e adjacente; e o conteúdo do par ordenado correspondente à origem. Sendo assim, é importante buscar modos de trabalhar mais intensamente esses conteúdos menos lembrados.

Com essa pesquisa, ela também identificou quais os conteúdos mais complexos que são responsáveis pela maioria das dificuldades dos estudantes. Rizzon verificou uma maior utilização da linguagem matemática, que possibilitou maior autonomia para a interpretação dos problemas propostos, que passaram a ter maior significado para os

¹ A unidade de aprendizagem (U.A.) é um modo de organização curricular baseado na educação pela pesquisa, voltado para superar o planejamento linear dos currículos e livros didáticos das escolas, é um conjunto de em um conjunto de atividades selecionadas para o estudo de um tema específico ou interdisciplinar, com vistas à reconstrução do conhecimento dos participantes, bem como ao desenvolvimento de habilidades e atitudes, o planejamento é flexível para atender as demandas dos estudantes.

estudantes e, dessa forma, o conhecimento reconstruído tornou-se mais duradouro e consistente, permitindo que os estudantes os aplicassem em novas situações-problema. A pesquisadora atribui os bons resultados ao modelo de aprendizagem compartilhada, que torna o aluno participativo e protagonista do processo de aprendizagem.

A pesquisa também reforçou que o professor é capaz de propor alternativas de ensino mais agradáveis e significativas para a reconstrução de saberes matemáticos e pode contribuir para a melhoria da qualidade da relação professor-aluno-aprendizagem em sala de aula.

Dallemole, Groenwald e Ruiz (2011), como parte do convênio de pesquisa, firmado em 2005, entre o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL) em Tenerife, Espanha, juntamente com o grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), investigaram as dificuldades de 10 alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil na convenção dos Registros de Representação Semiótica nos conteúdos de Reta, bem como as contribuições do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)² para a identificação das dificuldades e recuperação individualizada deste conteúdo.

Os pesquisadores observaram que os estudantes apresentaram uma compreensão limitada acerca dos conteúdos de Reta, demonstrando dificuldades de visualização, interpretação e abstração. Os melhores resultados foram nos exercícios que envolviam língua natural, isto é, com respostas e perguntas discursivas. Os autores também perceberam que os estudantes com maior tempo de curso obtiveram melhores resultados, e atribuem isso ao fato de já terem estudado Geometria Analítica no curso superior.

O sistema inteligente SIENA foi avaliado como eficiente, uma vez que contribuiu para a identificação das dificuldades individuais em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica, língua natural, algébrico e gráfico, nos conceitos de Reta, e na recuperação dos conceitos nos quais os alunos apresentaram dificuldades. Os pesquisadores destacam que, após os estudos de recuperação, todos os estudantes apresentaram melhores resultados, e sugerem realização de novas pesquisas

² O SIENA é um sistema inteligente para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer, fundamentado em uma aprendizagem significativa, conforme Ausubel et al (1980), utilizando o ensino eletrônico como recurso pedagógico (MORENO ET AL., 2007; MURLICK e GROENWALD, 2009). No SIENA é utilizado um mapa conceitual denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (Pedagogical Concept Instructional Graph), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico.

que ampliem a sequência didática proposta para cada conceito, contendo exercícios e atividades resolvidas e atividades mais interativas.

Martinelli (2013), em seu trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática, apresentou uma proposta didática para o ensino de geometria analítica em ambientes informatizados. O autor elaborou atividades segundo a Teoria de Representações Semióticas onde procurou articular representações algébricas e geométricas através do software Winplot. As atividades foram realizadas com alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública de ensino de Porto Alegre.

Em uma atividade prévia Martinelli constatou que a maioria dos estudantes possuíam dificuldades em associar, articular e converter a representação gráfica com a algébrica e vice-versa. Os estudantes apresentaram dificuldades nas questões que envolviam construção de segmentos de retas, interseção de retas e rotação (utilizada para construção de superfícies de revolução). O autor considera que o uso do software Winplot influenciou diretamente o interesse dos alunos e auxiliou na conversão de registros, atuando favoravelmente na aprendizagem de Geometria Analítica.

Podemos observar que várias pesquisas vêm sendo realizadas tanto sob a ótica da Teoria de Representações Semióticas como em diferentes perspectivas. O uso de tecnologias digitais é enfoque de grande parte dos trabalhos, geralmente justificado pelo importante auxílio para visualização de gráficos e figuras geométricas. Os pesquisadores que utilizaram software avaliaram sua contribuição como positiva.

Com relação às representações analisadas, vemos a dificuldade da compreensão da reta e suas representações, sejam elas gráficas, algébricas e a importância da linguagem natural na compreensão desse conceito.

2.3 O livro didático e a Geometria Analítica

Dallemole e Groenwald (2012, 2014) realizaram uma análise das coleções de livros didáticos do ensino médio aprovadas pelo PNLD 2012 como parte da pesquisa a ser desenvolvida para o doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, a qual visa investigar como desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio. As autoras buscaram identificar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em particular para Reta e Circunferência, em que momentos são

abordados, quais Registros de Representação Semiótica são utilizados, como esses registros são explorados e quais as metodologias utilizadas.

As coleções investigadas foram Matemática – Contexto e Aplicações do autor Luiz Roberto Dante, editado pela Ática, em São Paulo, em 2010 (L1); Matemática – Paiva do autor Manoel Paiva editado pela Moderna, em São Paulo, em 2009 (L2); Novo Olhar Matemática do autor Joamir Roberto de Souza, editado pela FTD, em São Paulo, em 2010 (L3); Matemática: ciência e aplicações dos autores Gelson Iezzi, et al., editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010 (L4); Matemática: ensino médio das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010 (L5); Conexões com a Matemática de Juliane Matsubara Barroso, editado pela Moderna, em São Paulo, ano de 2010 (L6); Matemática: ciência, linguagem e tecnologia de Jackson Ribeiro, editado pela Scipione, em 2010 (L7).

As pesquisadoras constataram que é o terceiro volume das coleções, utilizado para a terceira série do Ensino Médio, que traz o conteúdo dando a ele mais atenção que a outros campos. As autoras observaram que os livros possuem organização e distribuição semelhante, os conteúdos são distribuídos por capítulos e subdivididos em unidades.

No que tange ao conteúdo de reta, o quadro 1 apresenta a distribuição do conteúdo de Ponto e Reta apresentada pelas autoras. As pesquisadoras observaram que os livros utilizam mais os registros língua natural e algébrico na explicação e demonstração de conceitos e que são mais comuns tratamentos algébricos que conversões, e que as atividades de conversão utilizadas são mais frequente no sentido registro língua natural para o registro algébrico e registro algébrico para registro gráfico. Mas, mesmo que em menor número, todos os livros apresentam conversões do registro gráfico para o algébrico e nenhum apresentou a conversão no sentido língua natural para registro gráfico. Também não foi apresentado tratamento no registro figural e apenas uma obra apresenta tratamento no registro gráfico.

Quanto “aos exercícios resolvidos e as atividades propostas os livros didáticos privilegiam, em sua maioria, transformações de tratamento em detrimento das conversões”. (DALLEMOLE, 2014, P. 18).

Distribuição do conteúdo de Ponto e Reta		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7
Sistema Cartesiano ortogonal		X		X	X	X	X	X
Distância entre dois pontos		X	X	X	X	X	X	X
Coordenadas de um ponto médio de um segmento de reta		X	X	X	X	X	X	X
Condição de alinhamento de três pontos		X	X	X	X	X	X	X
Inclinação de uma reta		X	X	X	X	X	X	X
Coeficiente linear de uma reta		X	X	X	X	X	X	X
Equação da reta quando conhecidos um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade m da reta		X	X	X	X		X	X
As bissetrizes dos quadrantes e as retas horizontais e verticais			X		X	X		
Formas da equação da reta:	Forma reduzida	X	X	X	X	X	X	X
	Equação geral	X	X	X	X	X	X	X
	Equação segmentária	X			X	X	X	
Posições relativas de duas retas no plano:	Retas paralelas	X	X	X	X	X	X	X
	Retas concorrentes	X	X	X	X	X	X	X
	Intersecção de duas retas	X	X	X	X	X	X	X
Equações paramétricas da reta			X		X		X	
Perpendicularidade de duas retas		X	X	X	X	X	X	X
Distância de um ponto a uma reta		X	X	X	X	X	X	X
Ângulo formado por duas retas		X		X	X	X	X	X
Área de uma região triangular		X	X	X	X	X	X	X
Inequação do 1º grau com duas variáveis			X	X	X	X	X	X

Quadro 1 - Distribuição do conteúdo de Ponto e Reta

Fonte: Fundamentado em Dallemole, 2014, p. 15.

O quadro 1 também mostra que apenas três dos sete livros trabalharam a equação paramétrica da reta — representação muito utilizada em conexão com a física e no ensino superior de forma geral, por permitir uma representação em função de um parâmetro.

A pesquisa apontou ainda que o manual do professor, de Paiva (L2), trouxe um texto “acerca da importância da utilização dos Registros de Representação Semiótica, citando Duval, apresenta exemplos de atividades que envolvem a conversão entre os registros supracitados” (DALLEMOLE, 2012, p. 556), entretanto mesmo nesse livro as

autoras não identificaram atividades envolvendo conversão entre os registros língua natural e gráfico, e do registro numérico para o registro gráfico.

Outra informação relevante é que os autores abordaram a construção do registro gráfico das equações em detrimento da interpretação global das propriedades figurais. Essa abordagem, como explica Dallemole (2014, p. 20), não favorece o aprendizado dos valores da figura-forma (traçados retos ou curvos).

Com isso, as autoras concluíram que a forma abordada pelos livros para os conteúdos de Reta e Circunferência não auxilia a distinção entre o objeto matemático e sua representação, já que o estudante não tem oportunidades de visualizar diferentes representações percebendo a mobilização de diferentes registros semióticos e a articulação entre eles para um mesmo objeto matemático.

Essa pesquisa aponta que os livros didáticos, apesar de terem a preocupação de trazerem diferentes registros semióticos, ainda apresentam problemas para uma verdadeira articulação entre eles. Sendo, portanto, necessário que o professor tenha esse cuidado ao trabalhar o conteúdo.

3. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (2009, 2010, 2011, 2012) defende a importância do uso de diferentes representações semióticas e a realização da conversão entre uma representação e outra para o processo de ensino-aprendizado.

Raymond Duval é filósofo e psicólogo, e realizou pesquisas no campo da psicologia cognitiva buscando estabelecer quais sistemas cognitivos são necessários para o aprendizado dos objetos matemáticos. Segundo Duval (2010), para que haja um aprendizado é necessária a aquisição do conceito do objeto de estudo e, para que isso ocorra, é necessária a criação ou utilização de sistemas semióticos.

Tratemos, então, de sistemas semióticos e representação semiótica. Para isso, é necessário conhecer as três atividades cognitivas ligadas à semiose consideradas fundamentais para que haja uma representação. Segundo Duval (2009, p. 36-37):

Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis com uma *representação de alguma coisa* em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. Todos os sistemas semióticos não permitem essas três atividades cognitivas fundamentais, por exemplo, o morse ou o código da rota. Mas a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem essas atividades. Falaremos, então, de **registros de representação semiótica**. (Grifo do autor)

Sendo assim, entendemos como registro de representação semiótica o sistema de signos — podendo estar na linguagem natural, algébrica, figural ou gráfica — que possua sentido próprio, além de permitir a formação, o tratamento e a conversão entre os registros. Essas três atividades cognitivas possuem características próprias e desempenham importante papel no processo de ensino e aprendizagem. Conheçamos um pouco mais de cada atividade:

1º **Formação** de uma representação identificável: essa fase consiste na descrição do objeto em estudo, para isso é necessário selecionar o conteúdo, os dados e as relações entre eles, quando isso ocorre, é escolhido um registro de representação (figura, língua natural ou algébrica, gráfico, etc.). É importante lembrar que “esta formação deve respeitar as regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num

sistema formal, entaves de construção para as figuras...)” (DUVAL, 2012, p. 6). São essas regras que possibilitam que a representação possa ser reconhecida, identificada e utilizada em tratamentos. Duval (2012, p. 7) explica que essas regras são de reconhecimento e não de produção efetiva, isto é, um sujeito que conhece as regras pode ser capaz de reconhecer os registros mesmo que não seja capaz de criá-lo.

2º **Tratamento** de uma representação: é a transformação que uma representação sofre dentro de um registro, ou seja, o objeto passa a ser representado em uma nova organização, mas que faz uso do mesmo registro inicial. Na língua natural isso ocorre com a *paráfrase*, nas expressões simbólicas temos o *cálculo*, nos registros figurais temos a *reconfiguração* e a *anamorfose*. Também o tratamento tem regras próprias que variam de um registro para o outro. Por exemplo, no registro algébrico, a transformação de uma equação geral da reta em uma equação reduzida da reta pode ser realizada com alguns procedimentos algébricos: $-2x + y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x - 5$, por isso, essa transformação é um tratamento.

3º **Conversão**: nessa atividade, ocorrerá uma transformação externa ao registro. Para isso, será necessário mobilizar pelo menos dois registros. Nesse caso, o conteúdo e informações de um registro poderão ser conservados totalmente ou apenas parcialmente na nova interpretação do segundo registro. Um registro linguístico pode ser convertido em um figural através da *ilustração*, a conversão contrária, nesse caso, poderia ser dada por uma *descrição*, a atividade de *tradução* é a conversão realizada entre registros de uma língua em outra, sejam elas naturais ou artificiais. Exemplo:

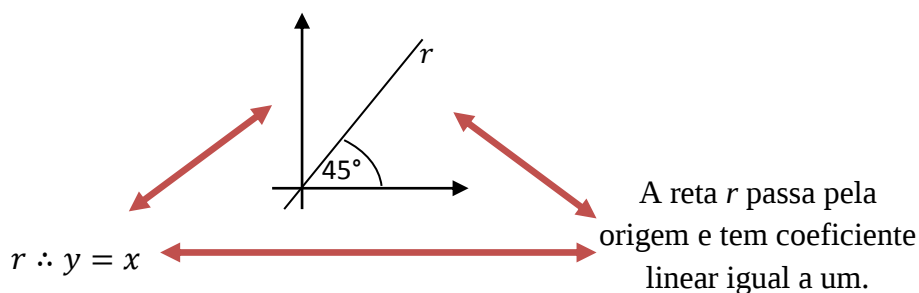


Figura 1 - Esquema com possibilidade de conversão da reta.

A especificidade das representações semióticas consiste em “poderem ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza” (DUVAL, 2009, p. 32). Duval explica ainda que “a noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de

conversão das representações de um sistema semiótico para um outro” (DUVAL, 2009, p. 32).

Duval (2009) construiu seus estudos com essa visão de registros de representação semiótica em função das atividades cognitivas que essas três ações desempenham, de forma simplificada são elas: A *formação* se refere à expressão ou representação do objeto, sendo a primeira atividade realizada. O *tratamento* é a atividade de transformar uma representação em outra dentro de um mesmo registro. A atividade de *conversão* é a realização da transformação de uma representação em outra de um registro diferente.

A importância dessa abordagem para o ensino e aprendizagem da matemática se deve à atividade cognitiva requerida pela matemática que diverge das de outros domínios do conhecimento. Duval (2010, pp. 13 – 14) explica que isso acontece não em função do conceito em si, mas por duas características seguintes:

1. A importância primordial das representações semióticas — o próprio desenvolvimento da matemática revela que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.
2. A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática — aqui serão tratados como registros as diferentes representações matemáticas, sendo elas: sistema de numeração, escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo que de forma diferente da usada em língua corrente.

Ao analisarmos o ensino e aprendizado de matemática é preciso levar em conta as atividades cognitivas mobilizadas pelos estudantes, pois, como explica Ruiz, “a matemática caracteriza-se, em seu espírito, por ser uma forma de pensamento. A sua matéria-prima são as ideias, seu desafio é a construção de sistemas coerentes de ideias” (2001, p. 129 Apud. ROLOFF, 2009). Dessa forma, a matemática tem um caráter abstrato, fato que na visão de Duval torna imprescindível o uso de registros de representação semiótica para se acessar o objeto matemático sem que ele fique limitado a uma de suas representações. Apesar disso, muitas vezes, apenas “a formação e o tratamento são levados em conta no ensino” (DUVAL, 2012, p. 12), negligenciando-se que “a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização” (DUVAL, 2012, p. 12). Para compreender um objeto matemático é indispensável a coordenação simultânea e coordenada de diversos registros, pois “a atividade matemática jamais se

limita à utilização de um único registro”, o que ocorre é que, em alguns casos, essa conversão é feita de forma implícita, isto é, para antecipar resultados ou escolher qual o melhor registro a ser utilizado em cada caso. “Em outras palavras, em matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro”. Dessa forma, o estudante está, incessantemente, realizando conversões espontâneas (DUVAL, 2011, p. 116).

Duval (2010) classificou os registros em quatro categorias de acordo com as suas representações: as que permitem o tratamento na forma de algoritmo são chamadas monofuncionais, as que não possibilitam essa opção são multifuncionais, as representações que possuem tratamento na forma de discurso, língua e/ou escrita são chamadas discursivas, e as que não permitem são não-discursivas.

O quadro 1, a seguir, resume a classificação dos registros realizada por Duval.

	Representação discursiva	Representação Não-discursiva
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (com figurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Quadro 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática). (DUVAL, 2010, p. 14).

Para Duval, o ensino de matemática deve estabelecer a conversão de pelo menos dois registros, sendo um monofuncional e outro multifuncional (KARRER, 2006, p. 44).

Além dessa classificação quanto ao registro, Duval também realizou uma classificação quanto ao tipo de conversão (atividade cognitiva de papel central em sua teoria.). Para Duval (2009), a conversão pode ser congruente ou não-congruente. A

atividade será congruente quando for semelhante a um processo de codificação, isto é, quando converter de uma linguagem em outra satisfizer as seguintes condições:

- Correspondência semântica entre as unidades significantes;
- Mesma ordem de apreensão das unidades significantes;
- Correspondência entre cada unidade da representação de partida e chegada.

A conversão será não-congruente quando pelo menos uma dessas condições não for satisfeita. Há muitos fatores que determinam a congruência e não-congruência, sendo em muitos casos necessárias situações intermediárias (DUVAL, 2011, p. 19), isto é, utilizar um terceiro registro para auxiliar na conversão.

O autor destaca ainda o fenômeno da heterogeneidade de convenções, que ocorre quando há congruência na conversão de um registro para o outro, mas não no sentido contrário.

3.1 O Estudo da Reta e os Registros de Representação Semiótica

Os estudantes costumam apresentar grande dificuldade na interpretação das representações gráficas cartesianas, elemento essencial no estudo da geometria analítica. Para Duval, isso se deve ao desconhecimento “das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p.2). O autor destaca que esse problema existe no estudo da reta quando afirma que:

Observa-se ainda a impossibilidade de encontrar a equação de uma reta partindo de sua representação gráfica, até para os casos mais elementares. Mesmo para o caso das retas, a articulação entre o registro das representações gráficas e das equações parece não se estabelecer mesmo depois que os alunos tenham tido aulas sobre funções afins. (DUVAL, 2011, p. 2)

Esse problema se deve em parte ao fato de que algumas abordagens didáticas “atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que é a passagem inversa que traz problema.” (DUVAL, 2011, p. 2). O autor define ainda três possíveis abordagens para o tratamento das representações gráficas que diferem quanto aos dados visuais e as questões consideradas no gráfico, são elas:

- A abordagem ponto a ponto: que associa alguns valores particulares a pontos no plano cartesiano, essa abordagem é útil para traçar o gráfico, por exemplo, de

uma reta, e favorece a leitura de pontos relevantes para determinado estudo, como a interseção da reta com um eixo.

- Uma abordagem de extensão do traçado efetuado: nesse caso teríamos uma abordagem mental apoiada por um conjunto infinito de pontos em potencial, nela também são levados em conta os dados traçados. Dessa forma, “o tratamento se mantém orientado na busca de valores particulares sem se ocupar com a forma da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p. 4).
- Abordagem de interpretação global de propriedades figurais: diferente das duas primeiras, nessa abordagem há uma preocupação com as relações entre as representações gráficas e algébricas — quando se modifica uma representação e isso leva a uma modificação na outra representação — “não estamos mais na presença da associação “um ponto — um par de números”, mas na presença da associação “variável visual de representação — unidade significativa da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p.4). Quando alteramos o coeficiente angular na equação da reta e observamos qual a mudança ocasionada no gráfico da reta, ou quando realizamos uma translação na reta e verificamos o que acontece com a equação da reta, buscamos uma interpretação global.

O ensino costuma deixar de lado a interpretação global, o que seria uma das causas para a dificuldade comum apresentada por estudantes na hora de utilizar as representações gráficas, uma vez que para compreender os conceitos de inclinação e direção essa abordagem se faz necessária.

Apresentaremos uma breve discussão sobre o estudo da reta e os registros de representação semiótica. Para construção dessa discussão foram utilizados os terceiros volumes das coleções de ensino médio Matemática Ensino Médio de Smole e Diniz (2010), e Conexões com a Matemática de Barroso (2010) e os volumes únicos Matemática de Dante (2007) e Matemática de Iezzi, Dolce, Degenszajn e Périco (2002) e os livros de ensino superior: Geometria Analítica um tratamento vetorial de Camargo e Boulo (2005), Geometria Analítica de Reis e Silva (1996) e Geometria Analítica de Steinbruch e Winterle (1987), assim como os livros e artigos utilizados para fundamentar a pesquisa. No ensino médio, o tema costuma ser introduzido após o estudo do ponto, enquanto no ensino superior começa-se com o conceito de vetor, já que a abordagem vetorial é a utilizada nesse nível, que traz a geometria analítica no

espaço ao invés do plano. A fim de manter a proximidade do conteúdo, nesse texto restringiremos nossos comentários, mesmo no nível superior, ao plano.

3.1.1 Sistema cartesiano e ponto: introdução no ensino médio

O plano cartesiano que possibilitou grande avanço nas representações de elementos geométricos consiste em dois eixos perpendiculares, geralmente graduados, que estabelecem uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e um conjunto de pares ordenados de números reais, a cada par ordenado (x, y) corresponde um único ponto P no plano cartesiano. A correspondência entre ponto e par ordenado é única, isto é, não depende do sistema de eixos adotados.

Os eixos coordenados, usualmente denotados por x (eixo das abscissas) e y (eixo das ordenadas), tem como ponto de interseção o ponto ordenado $(0,0)$ — origem — e dividem o plano cartesiano em quatro setores denominados de quadrantes e ordenados em sentido anti-horário. Os quadrantes organizam os pares ordenados de acordo com os sinais das abscissas e ordenadas como ilustrado a seguir:

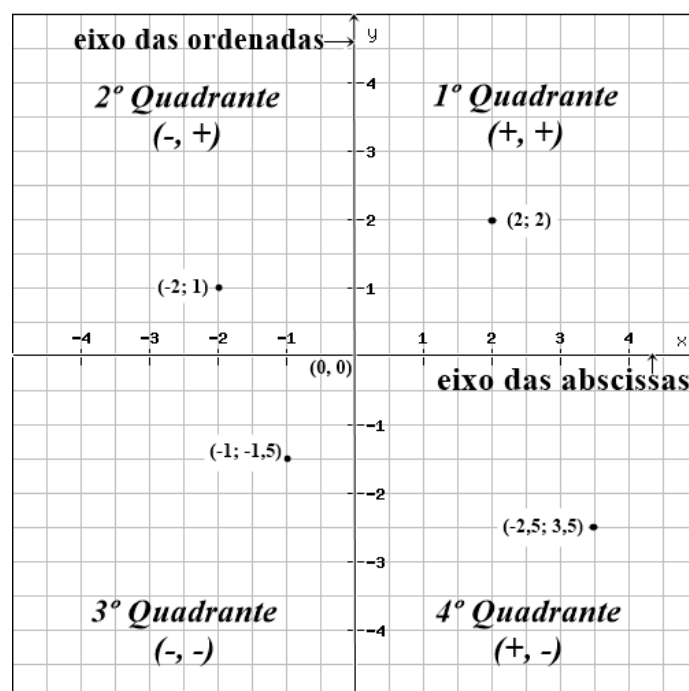


Figura 2- Plano Cartesiano

Nessa introdução ao sistema cartesiano, são apresentados os elementos essenciais e estabelecidos os primeiros significados, por exemplo, a relação do

quadrante com os sinais das coordenadas, dessa forma relacionamos os registros gráfico e numérico ou simbólico.

3.1.2 Vetores – introdução no ensino superior



Figura 3 - Segmento orientado AB

Uma reta r é dita orientada quando se fixa a ela um sentido de percurso, que é considerado positivo, e o sentido oposto é negativo, nesse caso, dizemos que a reta é um eixo. Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos (A, B) , nessa notação temos que A é a origem e B é a extremidade do segmento orientado, esse segmento será representado por AB e geometricamente caracterizado por uma seta:

Se tivermos a origem e extremidade coincidentes AA dizemos que é um segmento nulo. E se AB é um segmento orientado dizemos que BA é o segmento orientado oposto a AB . A reta que possui os pontos A e B é denominada reta suporte.

Dizemos que dois segmentos possuem a mesma direção quando suas retas suportes são paralelas, nesse caso eles podem ter o mesmo sentido ou terem sentidos opostos.



Figura 4 - Vetores com mesmo sentido e vetores com sentidos opostos

Pode-se associar um número real não negativo a cada segmento orientado, essa será a medida, comprimento ou módulo do segmento, que pode ser obtida com o cálculo da distância entre os pontos A e B . Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se tiverem mesma direção, sentido e comprimento.

Propriedade de Equipolência

- i. $AB \sim AB$
- ii. Se $AB \sim CD$, $CD \sim AB$
- iii. Se $AB \sim CD$, $CD \sim EF$, $AB \sim EF$
- iv. Dado um segmento orientado AB e um ponto C , existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

Cada segmento orientado é representante de exatamente uma classe de equipolência, a qual pertence.

Um vetor $\vec{v}$ é uma classe de equipolência de segmentos orientados, e possui, portanto, as características de qualquer segmento orientado pertencente a essa classe: módulo, sentido e direção.

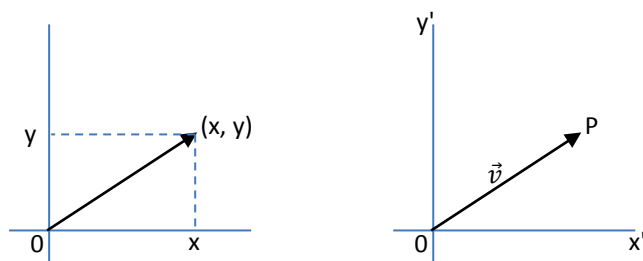


Figura 5 - Representações do vetor $\vec{v}$

Um versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido que o $\vec{v}$. Dois vetores serão ditos colineares se tiverem a mesma direção. Três ou mais vetores são coplanares se possuírem representantes pertencentes ao mesmo plano.

No plano um par ordenado $P(x, y)$ é um vetor, com direção definida pela reta que passa pelos pontos $O(0, 0)$ e P . O sentido de $\vec{v}$ é de O para P e o módulo de $\vec{v}$ será dado pelo comprimento de OP .

Assim, a cada vetor podemos associar um ponto e dessa forma $\vec{v} = (x, y)$ que é a expressão analítica do vetor.

Operações com vetor, seja $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\vec{v} + \vec{u} = (x_v + x_u, y_v + y_u)$$

$$k\vec{v} = (kx_v, ky_v)$$

Geometricamente, sendo $\vec{v}'$ e $\vec{u}'$ vetores equipolente a $\vec{v}$ e $\vec{u}$, temos:

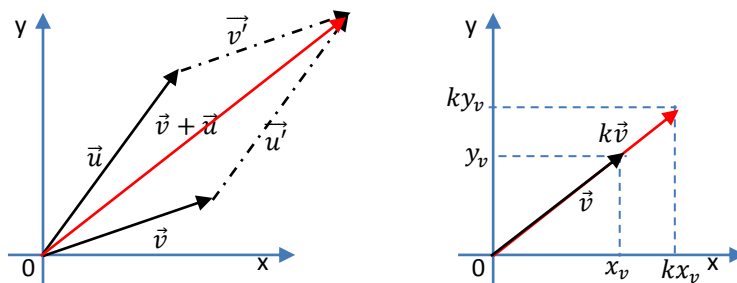
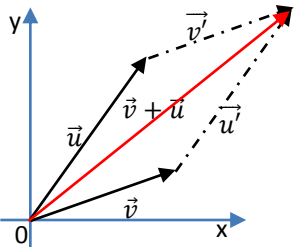
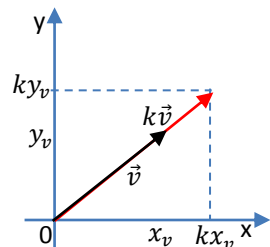


Figura 6 - Operações com vetores

Registro em língua natural	Registro figural	Registro algébrico
Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos (A, B), nessa notação temos que A é a origem e B é a extremidade do segmento orientado		$\vec{v} + \vec{u} = (x_v + x_u, y_v + y_u)$ $k\vec{v} = (kx_v, ky_v)$
	Registro gráfico	
		

Quadro 3 - Registros mobilizados para estudo de vetores

Nesse caso, temos a conversão da representação na língua natural para a representação figural e algébrica, utilizada principalmente de forma direta como generalizadora de métodos operacionais e propriedade de classe. A conversão para a representação gráfica apareceu para criação de conceito e depois como tratamento para realização de operações.

3.1.3 Condição de alinhamento de três pontos: abordagem no Ensino Médio

A condição de alinhamento tradicionalmente apresentada pelos livros do Ensino Médio é o cálculo do determinante de uma matriz de ordem três onde a primeira coluna contém as coordenadas da abscissa, a segunda contém as coordenadas da ordenada e a terceira é composta por números 1.

Três pontos são ditos colineares quando existe uma reta que os contém. Observe o gráfico que apresenta os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ alinhados pertencente a r que não é paralela a nenhum dos eixos.

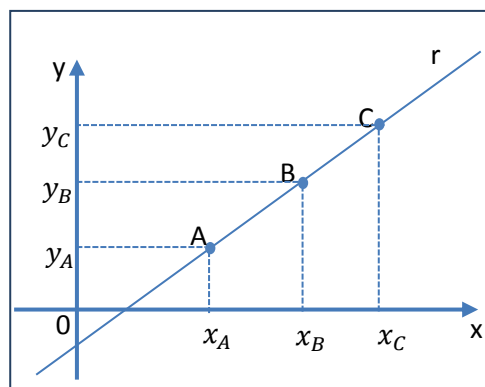


Figura 7 - Pontos colineares.

Observe que podemos desenhar triângulos retângulos — independentemente da posição dos pontos A, B e C — e que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCE$ são semelhantes entre si.

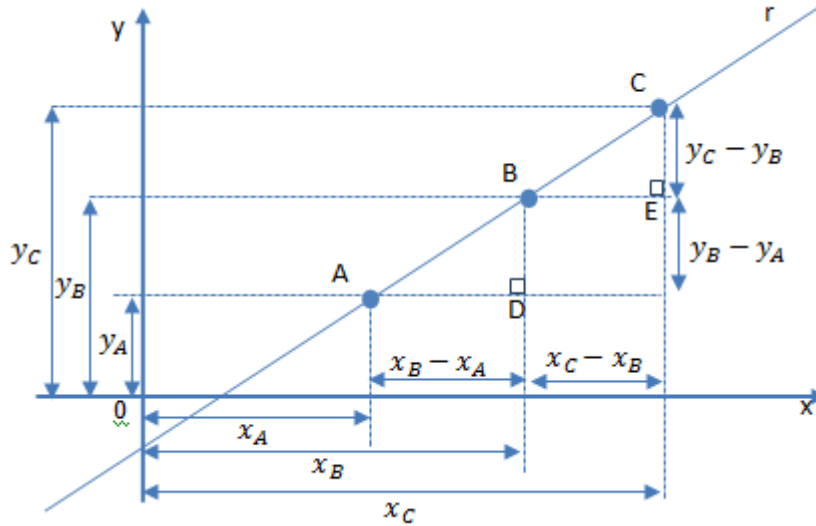


Figura 8- Colineares desenho de triângulos semelhantes.

Assim, temos a proporção:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) &= (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A) \Rightarrow \\ x_B y_C - x_B y_B - x_A y_C + x_A y_B &= x_C y_B - x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A \Rightarrow \\ x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C &= 0 \end{aligned}$$

Como a expressão do lado esquerdo da igualdade acima corresponde ao

determinante da matriz: $\begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$, podemos colocar que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

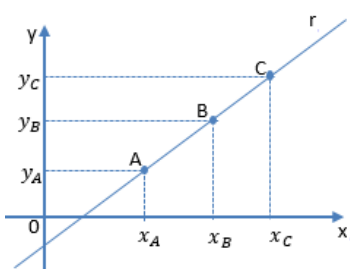
se os três pontos forem colineares e r não for paralela ao eixo. Se a reta r for paralela a um dos eixos teremos todas as coordenadas desse eixo iguais, logo uma coluna será múltipla da 3ª coluna, e dessa forma o determinante da matriz seja nulo sempre que tivermos três pontos colineares. A recíproca também é verdadeira, pois se

os pontos não fossem colineares poderíamos criar um triângulo ABC e sua área poderia

ser obtida por $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} 0 = 0$, absurdo.

$$\text{Portanto, A, B, C são colineares} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Com essa abordagem, utilizamos quatro registros de representação semiótica e são realizadas tanto a atividade de conversão como tratamento. No quadro 4 classificamos e apresentamos os registros mobilizados.

Registro na língua natural	Registro Simbólico	Registro Algebrico	Registro Gráfico
Três pontos são ditos colineares quando existe uma reta que os contém.	$\triangle ABD$ $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC}$	$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}$ $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$	

Quadro 4 - Registros mobilizados para obter a condição de alinhamento de três pontos.

Fonte: Fundamentado em Silva (2014, p. 57).

3.1.4 Condição de alinhamento de três pontos: abordagem no Ensino Superior

Se os pontos A, B e C são colineares, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ serão colineares, pois ambos são vetores diretores, portanto paralelos e com um ponto em comum. Ou seja, existe um m real tal que:

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}, \text{ para algum } m \in \mathbb{R}.$$

Ou utilizando $\vec{v} = (a, b)$ vetor diretor da reta que contém:

$$A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) \text{ e } C = (x_C, y_C).$$

Podemos fazer $\vec{v} = (a, b) = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$, então teremos:

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

De forma análoga, $\vec{v} = (a, b) = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, daí: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$$\text{Logo, } \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}.$$

Daí, se A, B e C são colineares serão válidas as seguintes relações:

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}, \text{ para algum } m \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$$

O que nos dá dois métodos para verificar colinearidade entre pontos.

Registro língua natural	Registro algébrico
Se os pontos A, B e C são colineares então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ serão colineares, pois ambos são vetores diretores.	$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$ $\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Quadro 5 - Registro mobilizados para verificar colinearidade entre três pontos.

3.1.5 Forma geral da equação na reta: abordagem no Ensino Médio

A reta possui várias representações. Além das representações em língua natural e gráfica, ela terá algumas representações algébricas. Cada representação tem características próprias que podem fazer com que seja preferida à outra forma em determinada situação. Por exemplo, tendo uma equação para a reta podemos determinar com precisão que pontos pertencem a ela, tarefa mais complexa com a representação gráfica se o número for irracional. Usualmente, iniciamos o estudo da reta com a *forma geral da equação da reta*. Para deduzi-la faremos uso da condição de alinhamento apresentada no tópico anterior.

Pelos estudos de geometria plana, sabemos que dois pontos determinam uma reta. Assim, dados dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, existe uma reta que passa simultaneamente por eles e existem infinitos outros pontos pertencentes a essa mesma reta. Pela condição de alinhamento de três pontos, podemos determinar todos os outros pontos da forma (x, y) que estão alinhados aos dois primeiros.

Para isso, tomemos um ponto genérico $P(x, y)$. Para que exista uma reta que contenha os pontos A, B e P é necessário apenas que eles estejam alinhados, ou seja, que

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desenvolvendo,

$$x_A y_B + x_B y + x y_A - x y_B - x_B y_A - x_A y = 0$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0 \quad (1)$$

Como x_A, x_B, y_A e y_B são números reais, façamos $a = y_A - y_B$, $b = x_B - x_A$ e $c = x_A y_B - x_B y_A$. Substituindo em (1):

$$ax + by + c = 0$$

que é a forma geral da equação da reta. Assim, todo ponto (x, y) pertencente à reta que contém os pontos A e B satisfaz essa equação. Qualquer reta pode ser representada na forma $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Utilizando esse método, podemos destacar a mobilização de dois registros: o algébrico e a língua natural.

Registro da língua natural	Registro algébrico
dados dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ existe uma reta que passa simultaneamente por eles e existem infinitos outros pontos pertencentes a essa mesma reta. Pela condição de alinhamento de três pontos podemos determinar todos os outros pontos da forma (x, y) que estão alinhados aos dois primeiros.	$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ $x_A y_B + x_B y + x y_A - x y_B - x_B y_A - x_A y = 0$ $a = y_A - y_B$ $b = x_B - x_A$ $ax + by + c = 0$ $c = x_A y_B - x_B y_A$ $ax + by + c = 0$

Quadro 6 - Registro Mobilizados para obter a Equação Geral da Reta.

Fonte: Fundamentado em Silva (2014, p. 59).

Utilizamos, aqui, atividade de conversão entre língua natural e registro algébrico, além de diversas atividades de tratamento. Seria possível, de forma semelhante ao método utilizado para descobrir a condição de alinhamento, realizar a conversão do registro gráfico para o algébrico e deduzir a equação geral da reta.

3.1.6 Equação vetorial da reta: abordagem do ensino superior

Um vetor não nulo paralelo a uma reta é chamado de vetor diretor dessa reta.

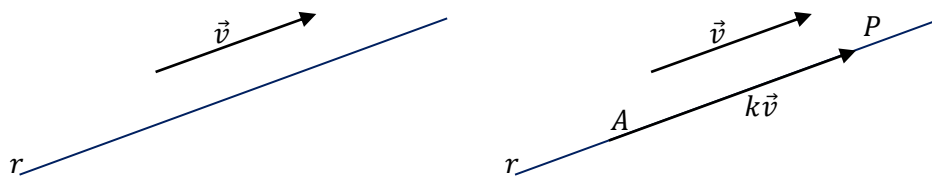


Figura 9 - Representações de vetor diretor e reta.

Uma reta r que passa pelo ponto A e tem como vetor diretor $\vec{v}$, terá para cada ponto P pertencente a ela um vetor $\overrightarrow{AP}$ paralelo a $\vec{v}$, assim, existe um numeral real t tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$. O que equivale a

$$P = A + t\vec{v} \quad (1)$$

Para cada ponto P pertencente à reta, existe um $t \in \mathbb{R}$ associado a ele que satisfaz a equação (1) e a cada $t \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto P pertencente à reta. A equação (1) é a equação vetorial da reta ou equação da reta na forma vetorial.

Língua natural	Figural	Algébrico
Uma reta r que passa pelo ponto A e tem como vetor diretor $\vec{v}$, terá para cada ponto P pertencente a ela um vetor $\overrightarrow{AP}$ paralelo a $\vec{v}$.		$\overrightarrow{AP} = k\vec{v}$ $P = A + k\vec{v}$

Quadro 7 – Registros Mobilizados para obter a Equação Vetorial da Reta.

Foi realizada a conversão da língua natural para a figural, como parte da definição de vetor diretor, a seguir a segunda parte da imagem ilustra o vetor $\overrightarrow{AP}$ em função de $\vec{v}$, o parágrafo seguinte realiza a conversão para a língua natural e a seguir algébrica, formalizando a equação vetorial da reta.

3.1.7 Equação reduzida da reta: abordagem no Ensino Médio

Podemos utilizar a forma geral da equação da reta para obtermos outras expressões algébricas. Isto pode ser feito, por exemplo, isolando y na forma geral da equação da reta, $ax + by + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (2)$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ e substituindo em (2) temos:

$$y = mx + n$$

A essa equação damos o nome de *equação reduzida da reta*, e associando aos estudos de funções polinomiais do 1º grau, temos que m é o coeficiente angular da reta e n é o coeficiente linear. Isto é, interpretando o sentido geométrico m , determina o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x e n é o ponto onde a reta intercepta o eixo y . Observe que se a reta for paralela ao eixo das ordenadas, teremos $b = 0$, e não será possível isolar y , neste caso a reta não possui equação na forma reduzida.

Com essa relação entre gráfico e coeficientes, podemos obter a equação reduzida da reta através da conversão do registro gráfico para o algébrico.

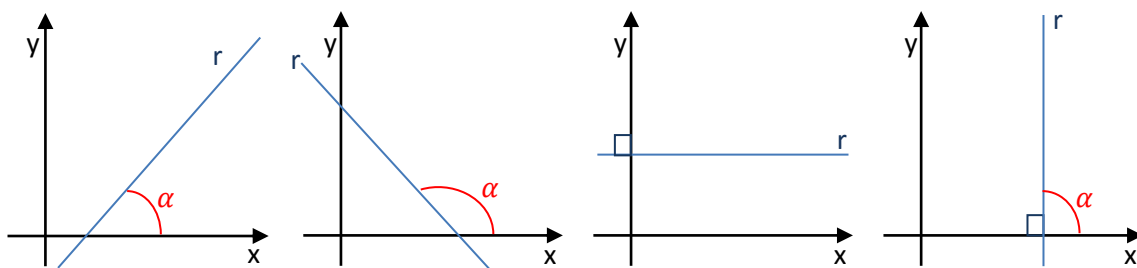


Figura 10 - Inclinação da reta.

Como m é o coeficiente de inclinação da reta, se conhecermos α podemos obter m calculando a tangente de α . Assim, $m = \operatorname{tg} \alpha$. No caso do terceiro plano cartesiano apresentado na figura 10, temos que o ângulo α é nulo, dessa forma, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ e, portanto, a equação reduzida será apenas $y = n$, já para o quarto gráfico representado no plano cartesiano, a reta forma um ângulo de 90° com o eixo das abscissas, como não existe tangente de 90° não é possível representar essa reta na forma de equação reduzida. Se conhecermos um ponto qualquer da reta $P(x_P, y_P)$, podemos obter a equação reduzida da reta fazendo as devidas substituições. Daí,

$$y = mx + n \Rightarrow y_P = (\operatorname{tg} \alpha)x_P + n \Rightarrow n = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)x_P}{y_P}$$

$$y = (\operatorname{tg} \alpha)x + \frac{(\operatorname{tg} \alpha)x_P}{y_P} \quad (2)$$

A equação (2) apresenta a equação reduzida da reta r obtida através do ângulo e de um ponto dado, que pode ser obtido pela observação do gráfico com coordenadas. Também podemos obter a equação reduzida da reta conhecendo dois pontos, isso pode

ser feito de duas formas: uma fazendo uso da tangente e outra criando um sistema de equação. Consideremos a reta r que contém os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

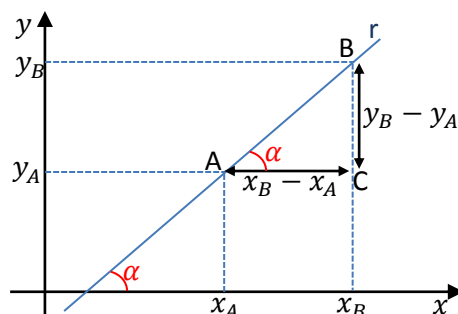


Figura 11- Equação Reduzida da Reta.

Observe o triângulo ΔABC , pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo podemos obter a tangente do ângulo α por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Para obtermos n — além do gráfico, se os pontos forem propícios — podemos usar a relação $n = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)x_P}{y_P}$, daí $n = \frac{\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x_P}{y_P} \Rightarrow n = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \frac{x_P}{y_P}$. Ou, se for possível, identificar diretamente, pela observação do gráfico, o ponto de interseção da reta com o eixo y .

Outra forma para obter a equação da reta é utilizando as coordenadas de dois pontos conhecidos (A e B).

Para obtermos a equação reduzida da reta sem fazermos uso de cálculos para o coeficiente, mas sendo conhecidos dois pontos, poderemos montar um sistema com os dois pontos:

$$\begin{cases} y_A = mx_A + n \\ y_B = mx_B + n \end{cases}$$

Pela primeira equação temos $n = y_A - mx_A$. Substituindo na segunda:

$$y_B = mx_B + y_A - mx_A \Rightarrow y_B = m(x_B - x_A) + y_A \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Substituindo m em $n = y_A - mx_A$, temos $n = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$.

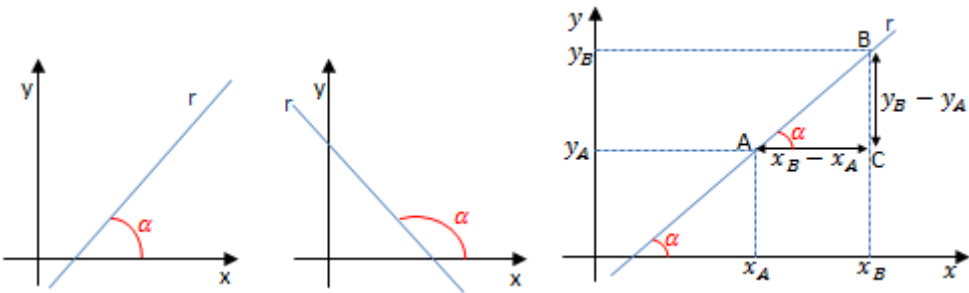
A equação reduzida será dada, portanto, por:

$$y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) x + \left(y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A \right)$$

Note que, nesse método, calculamos o coeficiente linear e depois substituímos um ponto para obter a equação. Dessa forma, se conhecemos um único ponto pertencente à reta e seu coeficiente de inclinação ou angular, podemos também obter a equação da forma reduzida, realizando parte dos passos descritos.

Não se espera, nem se deseja que o estudante decore as expressões apresentadas nesses modelos, mas sim descrever os métodos pelos quais eles poderão obter as equações reduzidas.

Cada método destaca alguns registros; os métodos que utilizam o coeficiente angular trazem a conversão do registro gráfico para o algébrico ou para a língua natural, além de tratamentos para explicitar os termos. Já os métodos que utilizam diretamente os pontos, priorizam os tratamentos algébricos, e realizam a conversão da língua natural para o registro algébrico.

Registro da língua natural	Registro simbólico	Registro algébrico
m determina o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x e n é o ponto onde a reta intercepta o eixo y. Consideremos a reta r que contém os pontos $A(x_A, x_B)$ e $B(y_A, y_B)$.	ΔABC $P(x_P, y_P)$ $A(x_A, x_B)$ $B(y_A, y_B)$	$ax + by + c = 0$ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ $y = mx + n$ $tg \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
Registro gráfico		
		

Quadro 8 - Registro Mobilizados para obter a Equação Reduzida da Reta.

Fonte: Fundamentado em Silva (2014, p. 63).

3.1.8 Equação segmentada: abordagem no Ensino Médio

Consideremos uma reta r que intercepta ambos os eixos coordenados sem passar pela origem. Nesse caso, temos que a reta possui um ponto $A(a, 0)$ e um ponto $B(0, b)$, com a e b números reais não nulos. Representando graficamente:

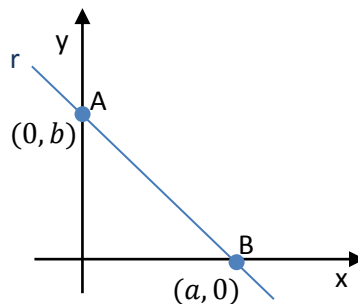


Figura 12 – Gráfico para equação segmentada.

Temos várias formas de obter uma equação que represente essa reta, utilizando o coeficiente angular pelos pontos, temos $m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$, e como podemos observar no gráfico, $n = b$. Assim,

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab \quad (3)$$

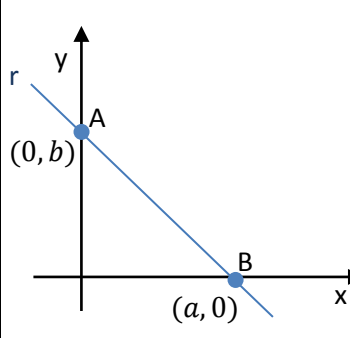
como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, dividindo a equação (3) por ab , ficamos com $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

A equação na forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ é denominada equação segmentária da equação da reta r .

Podemos também obter a equação pela condição de alinhamento, nesse caso obteremos a equação geral da reta — expressão (3) —, e prosseguiríamos da mesma forma já apresentada.

Nessa equação, identificamos com maior facilidade os pontos de interseção com os eixos, já que eles estão explicitados nos denominadores.

No caso representado, iniciamos realizando a conversão da língua natural para o registro gráfico e, em seguida, para o registro algébrico, no qual foram realizados tratamentos algébricos. O processo para fazer a transformação da forma algébrica para a gráfica pode ser realizado explicitando os pontos de interseção com os eixos e traçando a reta. O quadro 9 apresenta e classifica alguns exemplos de registros utilizados.

Registro da língua natural	Registro algébrico	Registro gráfico
Consideremos uma reta r que intercepta ambos os eixos coordenados sem passar pela origem. Nesse caso, temos que a reta possui um ponto $A(a, 0)$ e $B(0, b)$, com a e b números reais não nulos.	$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$ $n = b$ $bx + ay = ab$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	

Quadro 9 - Registro Mobilizados para obter a equação segmentada da reta.

3.1.9 Equação paramétrica da reta: abordagem no Ensino Médio

Alguns livros do ensino médio trazem ainda a equação paramétrica da reta, em que é utilizada uma terceira variável, além das tradicionais coordenadas x e y . Essa terceira variável (t) será o parâmetro adotado, ambas as coordenadas devem ser apresentadas como funções afins (f e g) dependentes de t .

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Para transformar uma equação da reta (sob qualquer forma) em equação paramétrica, devemos realizar algumas atividades algébricas de forma a isolar uma das coordenadas x ou y , ou organizar a igualdade de forma que o estudante visualize com clareza o parâmetro. Existem diferentes formas de se obter uma equação paramétrica, exemplifiquemos um método:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax = -by - c$$

Então, se decidirmos adotar t como parâmetro nessa etapa, devemos igualar cada termo da igualdade a t , e teremos:

$$ax = t \text{ e } -by - c = t \Rightarrow x = \frac{t}{a} \text{ e } y = \frac{t+c}{-b}$$

$$\text{Assim, } \begin{cases} x = \frac{t}{a} \\ y = \frac{t+c}{-b} \end{cases} \text{ é uma equação paramétrica da reta.}$$

Observe que o tipo de tratamento realizado poderia ser aplicado a qualquer outro modelo de equação da reta abordado. Para fazer a transformação contrária, isto é,

utilizar a equação paramétrica para chegar a uma outra forma da equação, usaremos uma estratégia semelhante: isolaremos o parâmetro na equação de uma coordenada e o substituiremos na outra coordenada. Como modelo, transformaremos uma equação paramétrica em uma equação reduzida da reta.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b}t \\ y = t - c \end{cases}$$

Isolando t na primeira equação, $t = \frac{b}{a}x$, e substituindo-o na segunda equação, teremos $y = \frac{b}{a}x - c$, uma equação reduzida da reta.

A vantagem dessa representação é a possibilidade de se trabalhar com um outro parâmetro. Na Física, por exemplo, é comum a necessidade de se trabalhar com o parâmetro tempo, se houver um problema com duas funções dependentes do tempo, pode ser útil o uso dessa representação para estudar as relações estabelecidas entre o parâmetro e as coordenadas.

Registro em língua natural	Registro simbólico	Registro algébrico
Essa terceira variável (t) será o parâmetro adotado, ambas as coordenadas devem ser apresentadas como funções afins (f e g) dependentes de t .	$f(t)$ $g(t)$	$ax + by + c = 0$ $\begin{cases} x = \frac{t}{a} \\ y = \frac{t + c}{-b} \end{cases}$

Quadro 10 - Registros Mobilizados para obter a equação paramétrica da reta.

Observe que nessa atividade foi realizada apenas a conversão da língua natural para a algébrica, e depois foram realizadas uma série de atividades de tratamento, onde o estudante terá autonomia para decidir como organizar os termos.

3.1.10 Equações Paramétricas da Reta: abordagem no Ensino Superior

Da equação vetorial da reta temos: $P = A + t\vec{v}$, assim, representando na forma simbólico-numéricas, através de suas coordenadas $A = (x_A, y_A)$, $P = (x, y)$ e $\vec{v} = (a, b)$, teremos:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + k(a, b)$$

Daí,

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$$

Dessa forma, foi obtida a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$. Chamamos t de parâmetro da equação da reta e a cada t está associado um ponto da reta, na forma $(x_A + at, y_A + bt)$.

Registro na língua natural	Registro simbólico	Registro algébrico
A equação paramétrica da reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$.	$A = (x_A, y_A)$ $\vec{v} = (a, b)$ $(x_A + at, y_A + bt)$	$(x, y) = (x_A, y_A) + k(a, b)$ $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$

Quadro 11 – Registros Mobilizados para obter a equação paramétrica da reta utilizando vetor.

Aqui foi realizada a transformação de uma equação paramétrica em outra, através da substituição da representação simbólica para a numérico-tabular e de tratamentos algébricos. Por fim, é realizada a conversão do registro algébrico para o registro de língua natural.

3.1.11 Equação Simétrica da Reta: abordagem no Ensino Superior

Das equações paramétricas da reta podemos obter um novo conjunto de equações, isolando em cada equação da paramétrica o parâmetro. Assim, conhecendo

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$$

Se isolarmos t , teremos:

$$t = \frac{x - x_A}{a}, t = \frac{y - y_A}{b}$$

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b}$$

Estas equações são as Equações Simétricas, ou Normais, da Reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = (a, b)$.

Destacamos que no caso de termos os dois pontos pertencentes à reta na forma $A(0, y_A)$ e $B(x_B, 0)$, teremos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - 0, 0 - y_A) = (x_B, -y_A)$.

Tendo como equação simétrica da reta:

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b}$$

$$\frac{x - 0}{x_B} = \frac{y - y_A}{-y_A} \Rightarrow \frac{x}{x_B} = \frac{y}{-y_A} - \frac{y_A}{-y_A} \Rightarrow \frac{x}{x_B} = -\frac{y}{y_A} + 1 \Rightarrow \frac{x}{x_B} + \frac{y}{y_A} = 1$$

Obtemos, assim, a equação segmentada, geralmente apresentada no Ensino Médio.

Registro língua natural	Registro algébrico
Estas equações são as Equações Simétricas, ou Normais, da Reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = (a, b)$.	$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b}$

Quadro 12 - Registro Mobilizados para obter as Equações Simétricas da Reta.

Assim como na equação anterior, fizemos uso de tratamentos algébricos para transformar a equação paramétrica em uma equação simétrica, para em seguida realizar a conversão para a língua natural, a fim de complementar e auxiliar na compreensão da nova representação.

3.1.12 Equações reduzidas da reta: abordagem no Ensino Superior

Pelo tópico anterior podemos representar algebricamente a reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = (a, b)$, por:

$$\frac{y - y_A}{b} = \frac{x - x_A}{a}$$

Realizando alguns tratamentos algébricos:

$$\frac{y - y_A}{b} = \frac{x - x_A}{a} \Rightarrow y - y_A = b \frac{(x - x_A)}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}(x - x_A) + y_A.$$

Fazendo $m = \frac{b}{a}$, e substituindo na última expressão:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

que é a equação reduzida da reta que tem coeficiente angular igual a m e passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$.

Utilizamos, novamente, tratamentos algébricos para obter uma nova forma de equação da reta. A conversão para o registro língua natural complementa o conceito da reta na forma reduzida, destacando um elemento importante da representação gráfica: o coeficiente angular.

Registro língua natural	Registro algébrico
Que é a equação reduzida da reta que tem coeficiente angular igual a m e passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$.	$y = m(x - x_A) + y_A$

Quadro 13 - Registro Mobilizados para obter a equação reduzida da reta com dados vetoriais.

Observa-se pouco uso do registro gráfico, em especial da conversão no sentido gráfico para algébrico, ou gráfico para língua natural, a abordagem mais comum é língua natural ou gráfico inicialmente e conversão para o registro algébrico, a partir disso, são usados tratamentos para obter as outras formas da equação da reta.

4. METODOLOGIA

Essa pesquisa consiste numa investigação dos principais registros mobilizados pelos estudantes no conteúdo de geometria analítica, e busca indícios das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes na realização das três atividades cognitivas necessárias para a representação semiótica.

A pesquisa foi organizada em seis fases:

- 1º. Pesquisa bibliográfica buscando conhecer os trabalhos já realizados na área, os tópicos relacionadas no ensino de geometria analítica e a abordagem utilizada no ensino médio e superior. Para isso, buscamos referências nas leituras de artigos, monografias, documentos oficiais e livros didáticos;
- 2º. Elaboração de uma atividade para identificar os registros e as convenções mais utilizadas com relação à geometria analítica, especificamente no estudo da reta, bem como os erros cometidos e suas possíveis causas;
- 3º. Aplicação de um estudo-piloto para testar o modelo da atividade com uma turma do 3º ano do Ensino Médio;
- 4º. Reestruturação de algumas questões da atividade a partir da aplicação;
- 5º. Aplicação do questionário com uma turma do segundo período do curso de Licenciatura em Matemática;
- 6º. Análise dos questionários.

O público da pesquisa é formado por estudantes do 2º período de Licenciatura em Matemática do Campus do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco. O campus atende a diversas cidades do agreste pernambucano, sendo por isso um campo interessante de estudo pela diversidade de público que deve compor a amostragem da pesquisa.

O curso de Licenciatura em Matemática nesse campus é recente, tendo sua primeira entrada no segundo semestre de 2009. Em contato com a coordenação do curso, procuramos saber o índice de reprovação da disciplina Geometria Analítica. O quadro14 apresenta o percentual de reprovações de Geometria Analítica por semestre em relação a todas as reprovações do semestre. Destacamos que o período 2013.2 foi o primeiro período em que o curso estava completo, isto é, foram ofertadas todas as disciplinas dos nove períodos. De acordo com o currículo do curso, 41 disciplinas foram ofertadas.

Período	Reprovações em Geometria (%)
2010.1	45,50%
2010.2	20,00%
2011.1	12,12%
2011.2	12,84%
2012.1	6,72%
2012.2	6,90%
2013.1	10,00%
2013.2	21,62%
2014.1	Não concluída no momento da pesquisa

Quadro 14 – Porcentagem de reprovações em Geometria Analítica em relação as reprovações nas demais disciplinas.

Ao observarmos as primeiras porcentagens, é importante levar em consideração que, por serem no início do curso, havia poucas turmas. Consideramos, então, o índice de 2013.2, já que nesse período foram ofertadas as 41 disciplinas que compõem a grade do curso e nesse período pouco mais de um quinto das reprovações do curso foram em Geometria Analítica.

A escolha da turma do segundo período se deve por ser nesse período que é vista a disciplina de Geometria Analítica, de forma que os estudantes estariam em contato com a abordagem do ensino superior e, tendo concluído o ensino médio, conheceriam alguns métodos também do ensino básico, tendo, portanto, a oportunidade de escolher o método que considera melhor. Além de revelar possíveis dificuldades que mesmo após o ensino no nível superior ainda existem.

A atividade foi aplicada, aproximadamente, na metade do curso de Geometria Analítica. Para identificar os estudantes foi associado, a cada um e de forma aleatória, um número — utilizaremos este sistema de numeração para referir-nos aos estudantes a fim de preservar suas identidades. Conseguimos aplicar a atividade para 30 estudantes.

A atividade foi desenvolvida e reestruturada combinando questões abertas e fechadas, e aplicada por contato direto que, como explica Barros (2007, p. 107), permite ao pesquisador explicar os objetivos da pesquisa e esclarecer dúvidas em relação ao enunciado de certas questões.

A avaliação da atividade teve caráter qualitativo, e para análise e categorias de análise foi utilizada a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, por isso adotamos nelas as classificações definidas por esse autor.

4.1 Apresentação e discussão da atividade

Foi elaborado e aplicado um questionário composto por sete perguntas para conhecer o perfil dos estudantes, doze questões — abertas e fechadas — envolvendo associação, e as transformações — tratamento e conversão — já que as duas “são de extrema importância no processo de aprendizagem, pois exigem do aluno procedimentos diferentes” (FARIAS, 2012, p. 5), colocamos ainda um quadro de sugestões para que os estudantes pudessem expressar sua opinião sobre o questionário, através de comentários, sugestões e críticas.

Nome: _____	Idade: _____
Curso: _____	Período: _____
Cidade: _____	
Você estudou em escola: () Pública () Particular _____	
No ensino médio você teve aulas de geometria analítica? _____	

Quadro 15 - Perguntas para formação do perfil.

O nome foi solicitado para ser possível localizar o estudante caso fosse necessário esclarecer algum dado omitido. A idade e o tempo de conclusão do ensino médio foram solicitados para verificar se a geração de nascimento ou período de formação básica poderia indicar alguma modificação na relação que o estudante tem com a geometria analítica. O Campus do Agreste da UFPE é formado por estudantes oriundos de várias cidades, principalmente do agreste pernambucano, por isso foi solicitado a cidade de origem dos estudantes, para conhecermos os municípios onde eles tiveram sua formação básica. Apesar de conhecer o curso e período em que o questionário foi aplicado, não seria possível assegurar que todos os estudantes fossem da mesma turma, já que a disciplina onde o questionário foi aplicado é comum a outros cursos, sendo equivalente aos cursos de Licenciatura em Física, Química e Matemática nesse campus. A pergunta sobre a modalidade/regime da escola é para aferir se elas teriam resultados diferentes. Por fim, sabendo que o conteúdo de geometria, historicamente, foi negligenciado no ensino e que nem sempre as escolas abordam todos os tópicos presentes no currículo, a última pergunta tinha por objetivo verificar se esses estudantes tinham tido contato com o conteúdo de geometria analítica na educação básica.

A seguir, apresentamos cada questão proposta.

1º Questão — *Elabore um problema que envolva o Estudo Analítico da Reta.*

Nessa questão, o estudante é convidado a elaborar um problema sobre o Estudo Analítico da Reta, não precisando responder o problema. O objetivo é oferecer maior liberdade ao estudante e verificar que tipos de registros os estudantes escolheriam mobilizar, e quais das atividades cognitivas (formação, tratamento e conversão) seriam englobadas pelo estudante. A elaboração de problemas é uma das habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes durante o Ensino Fundamental e Médio, sendo apontada pelo PCN (PERNAMBUCO, 2012), em diversos anos letivos, como uma das atividades, habilidade, a ser desenvolvida pelos estudantes. Nela, espera-se que o estudante utilize, principalmente, a língua natural para expressar suas ideias e conhecimentos.

2º Questão — *Determine os pontos destacados no gráfico abaixo.*

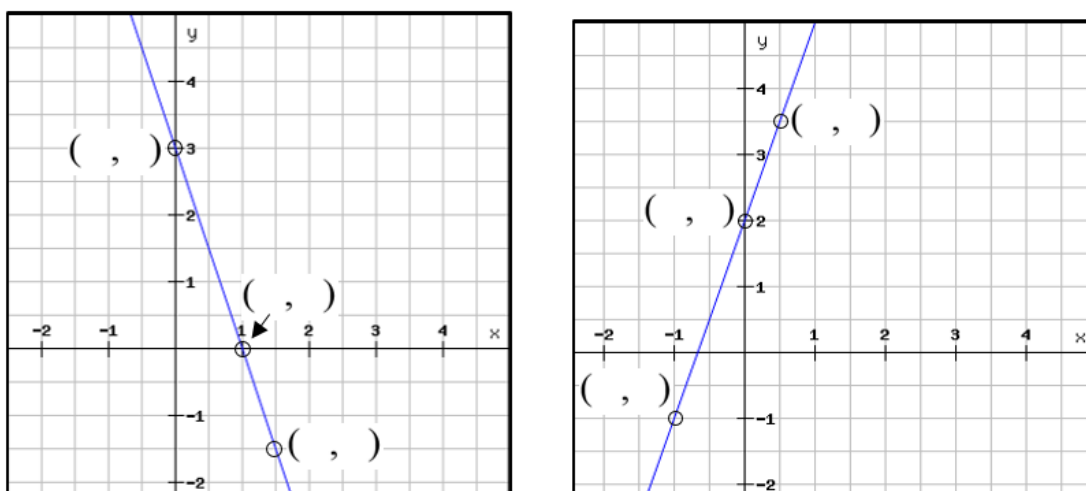


Figura 13 - Gráficos da segunda questão da atividade.

O objetivo dessa questão é verificar se o estudante consegue identificar no plano cartesiano, representação gráfica, pontos destacados e pertencentes ao gráfico. Para isso, o estudante deverá representar numericamente os pontos apresentados na representação gráfica. Esse reconhecimento do ponto no gráfico é importante por ser um recurso comum utilizado por estudantes para fazer a associação entre os registros numérico, algébrico e gráfico. Foram destacados pontos com coordenadas inteiras ou múltiplos de um meio para facilitar a identificação já que a escala dos gráficos é de um. A expectativa é que essa questão apresente menor número de erros, já que conhecimentos

de função e o estudo do plano cartesiano do ensino fundamental poderão ser mobilizados para responder a questão.

3º Questão — Assinale a(s) alternativa(s) em que os três pontos forem colineares, isto é, pertencerem a uma mesma reta.

a) $() \rightarrow (1, 2), (2, 0) \text{ e } (3, -2)$

b) $() \rightarrow (1, 1), (2, 0) \text{ e } (3, 2)$

c) $() \rightarrow (1, 2), (3, 2) \text{ e } (2, 0)$

Nesta questão, objetivamos analisar se o estudante é capaz de reconhecer pontos pertencentes a uma mesma reta e, se sim, que método utilizaria para fazer essa análise. Nela, o estudante deverá converter na linguagem natural e simbólica, para a gráfica ou algébrica e identificar os pontos colineares.

4º Questão — Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $A(4, 1)$ e $B(0, 3)$.

Essa questão serviria para identificar se o estudante consegue encontrar a equação da reta dados dois pontos, para isso ele precisará converter a língua natural em linguagem algébrica. No caso do estudante conseguir realizar a conversão, procuraremos identificar qual(is) das representações algébricas foi/foram escolhida(s) por ele, assim como o método utilizado no processo de conversão.

5º Questão — Assinale as alternativas que apresentam uma equação para a reta

$2x + 3y + 6 = 0$:

$() y = -\frac{2}{3}x - 2$

$() y = -2x + 6$

$() \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t - 2 \end{cases}$

$() \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$

$() \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$() \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$

Na quinta questão, o estudante deve associar diferentes representações algébricas. Nela, podemos observar se o estudante consegue identificar a reta independente da equação utilizada. Espera-se que ele faça isso por meio de transformações algébricas, ou relacionando aos gráficos e depois voltando à representação algébrica. O estudante poderá, ainda, reconhecer a representação algébrica sem realizar atividade de transformação ou conversão, pois, para Duval (2010,

2012), o reconhecimento de registros pelos estudantes pode acontecer sem a necessidade de que eles saibam construí-los.

6ª Questão — Associe as equações da reta aos gráficos das retas correspondentes.

(1) $\rightarrow y = 4x - 2$

(2) $\rightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{5} \\ y = t - 1 \end{cases}$

(3) $\rightarrow x + \frac{y}{2} = 1$

(4) $y - 3x - 2 = 0$

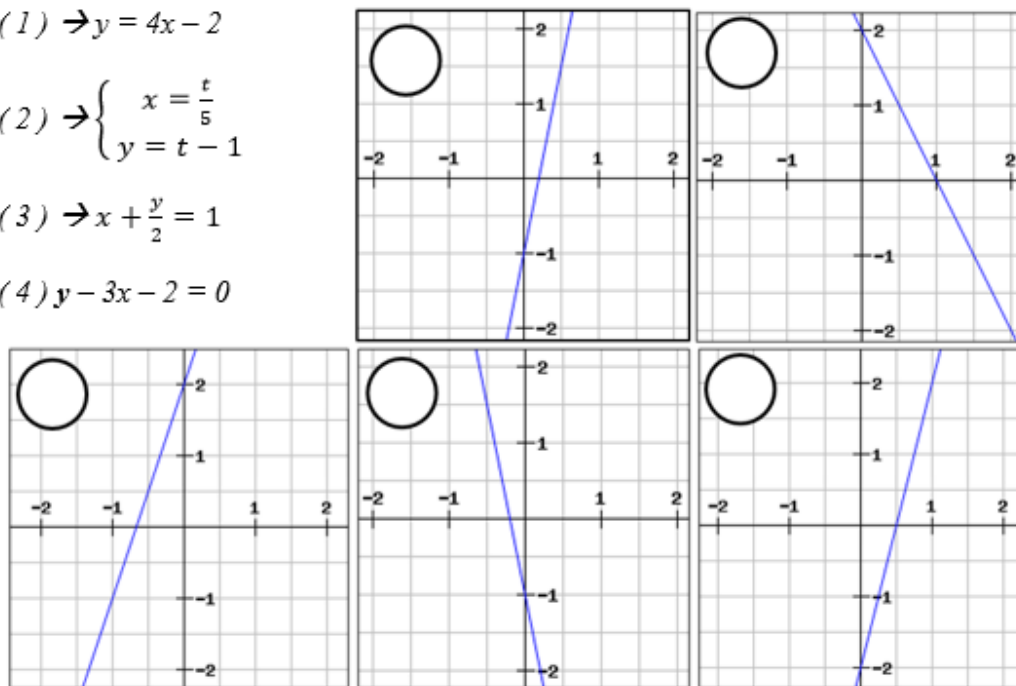


Figura 14 - Gráficos da sexta questão da atividade

Nessa questão, também associativa, desejamos verificar se o estudante consegue relacionar as representações algébricas e gráficas. Nela, o estudante precisa fazer apenas o reconhecimento, por isso, problemas relacionados à construção de representações não o impediriam de respondê-la. A questão envolve quatro retas para podermos ter os modelos de equações algébricas da reta, mais comuns. A dificuldade maior da questão é que ela exige do estudante o reconhecimento da reta em diferentes registros, e um estudante pode “reconhecer uma equação de reta no registro algébrico, mas não reconhecê-la no registro gráfico, logo, cada registro de representação apresenta suas próprias dificuldades de leitura por parte dos educandos” (FARIAS, 2012, p. 3).

Questão 7 — Seja r a reta de equação $-5x + 3y - 15 = 0$ esboce o gráfico da reta r .

Questão 8 — Seja u a reta de equação $x = 4 + 2t$ e $y = 1 - t$ esboce o gráfico da reta u .

Questão 9 — Seja s a reta de equação $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ esboce o gráfico da reta s .

Questão 10 — Seja t a reta de equação $y = 3x - 1$ esboce o gráfico da reta t .

Nessas questões, é solicitado ao estudante construir o gráfico de uma reta, sendo fornecida, para isso, a representação algébrica nas formas de: equação geral, equação paramétrica, equação segmentada e equação reduzida da reta, respectivamente. Nela, nosso objetivo é identificar se os estudantes conseguem realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico independente da forma algébrica apresentada, se alguma forma é mais fácil, e quais os processos utilizados para realizar essa conversão.

Questão 11 — Determine a equação da reta representada nos gráficos a seguir:

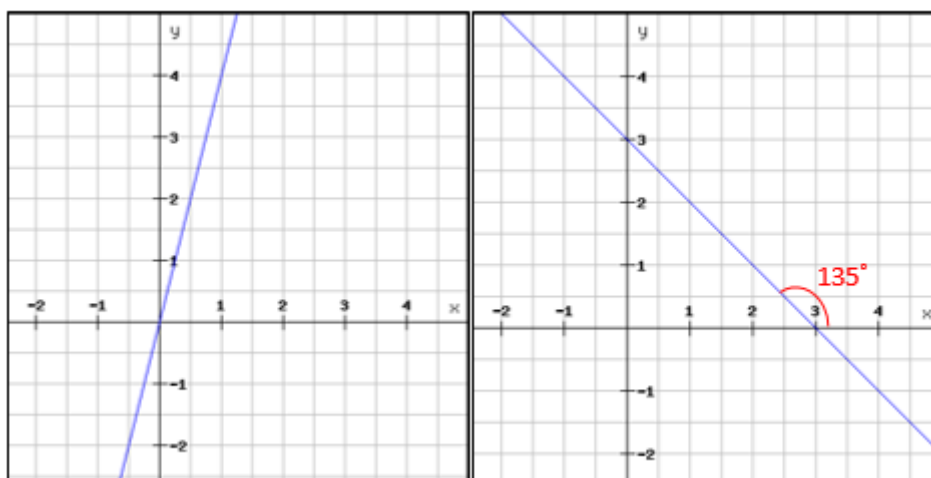


Figura 15 - Gráficos fornecidos para a décima primeira questão da atividade.

Continuando com o processo de conversão entre registros gráficos e algébricos, nessa questão, o estudante encontrará gráficos com retas e deve, através deles, esboçar a equação da reta de cada gráfico. No primeiro gráfico, o estudante tem dois pontos representados por números inteiros — (0, 0) e (1, 4). No segundo gráfico, além da presença de pontos com coordenada inteiras — (0, 3) e (3, 0) —, é fornecido o ângulo de inclinação da reta com o eixo das abscissas. É possível que os estudantes apresentem maior dificuldade nessa questão, tendo em vista:

O custo muito desigual na passagem entre a expressão na forma simbólica e a representação gráfica aparece aqui de modo preciso. Para passar da escrita simbólica para a representação gráfica, é possível se contentar com a abordagem ponto a ponto: atribuem-se valores particulares a x sem se preocupar com quaisquer propriedades para encontrar pares de números, quer dizer, pontos. Mas, para passar da representação gráfica para a expressão algébrica, isto não é possível: é preciso identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las. Dito de outro modo, a passagem da representação gráfica para a expressão algébrica exige uma interpretação global. Diferentemente da abordagem ponto a ponto, ou mesmo da

abordagem de extensão representativa, a abordagem de interpretação global exige que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades e não sobre valores particulares tomados um a um (DUVAL, 2011, p. 7).

Assim, a conversão no sentido gráfico-algébrico pode apresentar maior dificuldade para os estudantes do que no sentido algébrico-gráfico.

Questão 12 — *Qual(is) das perguntas você achou mais difícil de responder? Por quê?*

O objetivo é buscar entender melhor as dificuldades apresentadas durante o questionário, permitindo ao estudante apontar como enxerga suas maiores dificuldades, isto é, a que atribuem o problema, e como superam, ou utilizam para atenuá-lo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES DAS ANÁLISES

5.1. Descrição dos Estudantes do 2º Período de Matemática

A pesquisa foi realizada com 30 estudantes, do 2º período de Licenciatura em Matemática (todos os estudantes eram de matemática e eram estudantes da turma do 2º período não havendo, portanto alunos com reprovação em Geometria Analítica), com idades variando entre 17 e 45 anos, estando, a maior parte deles, na faixa de 19 a 22 anos.

Cerca de mais de 80% concluíram o ensino médio nos últimos 5 anos, por isso não serão consideradas idade nem período de conclusão para discussão de resultados, por não haver representantes suficientes para outras faixas.

Os estudantes residem em 11 cidades do agreste de Pernambuco distribuídos conforme apresenta na Tabela 1.

Tabela 1 - Distribuição dos estudantes por cidade.

Cidade	Quantidade de estudantes
Gravatá	4
Passira	3
Caruaru	10
Vertentes	2
Agrestina	1
Bezerros	1
Sairé	1
São Caetano	1
Surubim	1
Santa Cruz do Capibaribe	1
Cachoeirinha	1

Vinte e cinco estudantes estudaram apenas em escola pública, quatro em escola particular e um em ambas.

Do total de estudantes, somente 10 declararam ter visto o conteúdo de Geometria Analítica no ensino médio, alguns, porém, explicando que apenas de forma introdutória, como vemos nas imagens 15 e 16.

No ensino médio você teve aulas de geometria analítica? não, não tive
essa oportunidade.

Figura 16- Respostas do estudante 27 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.

No ensino médio você teve aulas de geometria analítica? poucas apenas coisas
básicas como distância entre dois pontos.

Figura 17 - Respostas do estudante 2 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.

Já o estudante 28 (Figura 18), destacou a diferença entre as abordagens no ensino médio e superior para esse conteúdo. O uso de uma abordagem vetorial é uma das dificuldades dos estudantes, já que é um tópico com o qual não costumam ter contato na educação básica, pois, mesmo sendo um assunto previsto nas orientações de Pernambuco, os livros didáticos não trazem esse tópico, de forma que o estudante só pode ter contato com o tópico através do professor.

No ensino médio você teve aulas de geometria analítica? Sim, porém não estudei
nada do que estou vendo aqui.

Figura 18 - do estudante 28 sobre aulas de Geometria no Ensino Médio.

Esse alto índice de estudantes que relataram não terem tido contato com o conteúdo nos preocupa por se tratar de um conteúdo relevante e previsto nos documentos oficiais, mas que não parece estar sendo abordado, em muitas escolas, como planejado. Faria (2011, p. 80) realizou uma pesquisa com professores do terceiro ano do ensino médio e verificou, por entrevistas e observações, que os processos seletivos para o ensino superior afetam a organização e escolha dos conteúdos abordados nesse ano. Um professor explicou para a pesquisadora: “os professores se preocuparam, inclusive, em fazer alterações dos conteúdos matemáticos regularmente estudados em uma determinada série para contemplar os programas dos vestibulares seriados”.

Ainda de acordo com Faria (2011), o campo Algébrico/Geométrico (campo onde esta o conteúdo de Geometria Analítica) não foi abordado no ENEM de 2007, 2008, na prova anulada de 2009, aparecendo como 5% da prova aplicada em 2009, sendo o campo menos abordado em todos os anos. Nos vestibulares o índice melhora: no vestibular da UFPE, de 2010, o campo aparece em 19% das questões. A pesquisadora

destacou que, ao longo dos últimos três anos, tanto ENEM quanto o vestibular da UFPE apresentaram uma distribuição mais equilibrada entre os cinco campos apontados pela Matriz de Referência do ENEM. Esses resultados nos levam a questionar se, por influência dos processos seletivos, os professores deixam em segundo plano o tópico de Geometria Analítica, fazendo com que muitas vezes não seja visto ou seja abordado de forma limitada.

5.2 Análise da primeira questão

Metade dos estudantes não respondeu essa questão, alguns justificando possuir dificuldade para elaborar questões.

Dos estudantes que responderam essa questão, obtivemos duas perguntas sobre distância entre pontos e uma pedindo o coeficiente linear de uma equação da reta, mas sem trazer uma equação no enunciado (Figura 20).

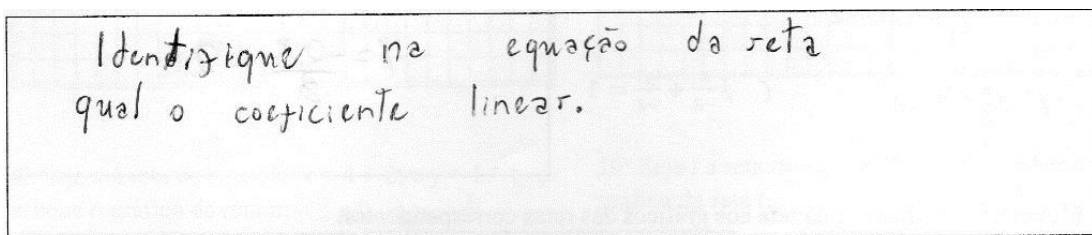


Figura 19 - Resposta do estudante 19 para a primeira questão.

Outro buscou uma questão aplicada, que relaciona o conteúdo com outros tópicos da geometria plana (Figura 21).

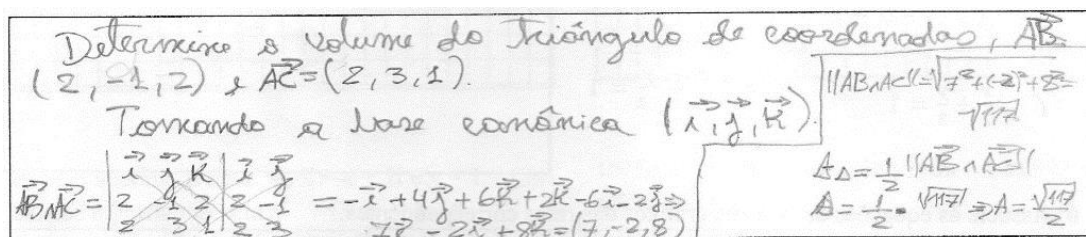


Figura 20 - Resposta do Estudante 20 para a primeira questão.

Nessa figura, observamos que o estudante pediu o cálculo do volume de um triângulo, possivelmente houve um equívoco. Nesse caso, há uma dificuldade do estudante com a nomenclatura utilizada para grandezas e medidas, já que o registro algébrico apresentado traz o método para calcular a área do triângulo e não o volume de um tetraedro.

Oito questões solicitaram a equação da reta, os estudantes davam pontos e pediam a equação que passava pelo ponto, exigindo uma das formas, três estudantes deixaram livres, um estudante pediu a equação cartesiana e metade dos estudantes pediram a equação paramétrica como vemos na figura 22.

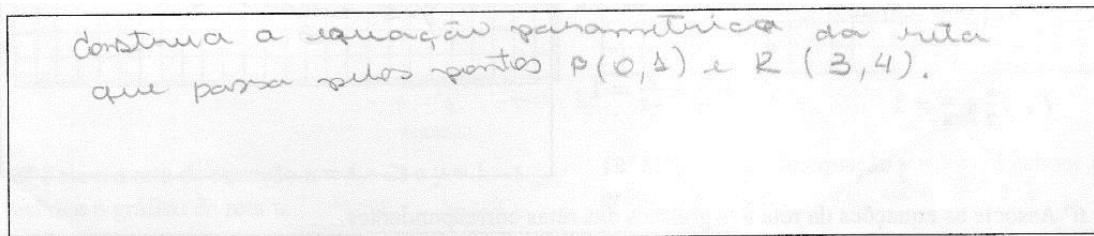


Figura 21 - Resposta do estudante 5 para a primeira questão.

Apenas um estudante forneceu uma equação paramétrica e pediu a equação do plano que contém a reta por ele fornecida, como podemos verificar na Figura 23.

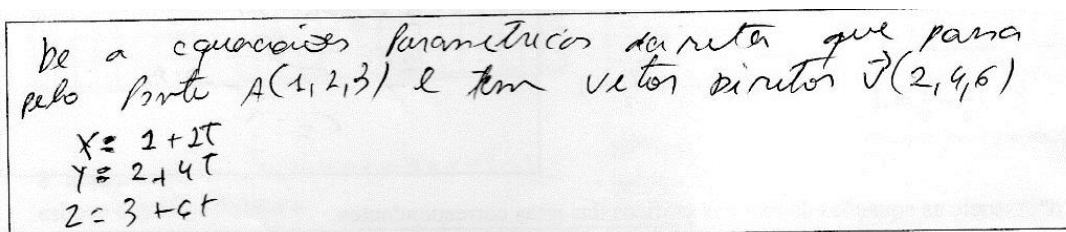


Figura 22 - Resposta do Estudante 12 para a primeira questão.

Observamos nas figuras acima que a preferência dos estudantes foi pela atividade de conversão entre a língua natural e algébrica, tendo sido preferida a equação paramétrica, que foi a mais solicitada, e apareceu também no enunciado de uma questão que pedia a equação do plano.

Apenas um estudante colocou no enunciado uma representação gráfica (imagem 24). Nessa atividade, os pontos são dados em registro gráfico ao invés do numérico tradicional, o estudante responde a questão, mas comete um equívoco. Nessa rasura, o erro pode ter ocorrido pela tentativa de se obter um número racional.

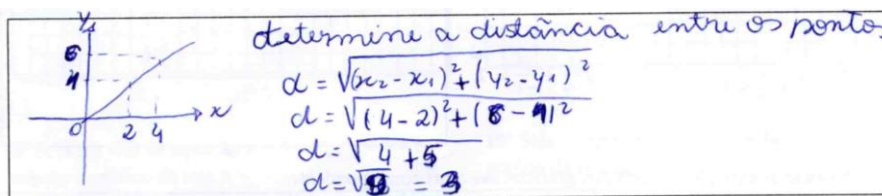


Figura 23 - Resposta do Estudante 17 para a primeira questão.

Em várias questões, haviam problemas com enunciados confusos, mas apenas em duas não foi possível identificar a intenção do estudante, isso se deve em especial ao

fato de não ter sido utilizada a língua natural. A articulação entre língua natural e os demais registros não costuma ser simples, isso ocorre porque “não são as mesmas operações discursivas que mobilizamos e desenvolvemos na prática espontânea da fala e no discurso matemático” (DUVAL, 2011, p. 31). As diferenças entre as estruturas dessas duas línguas faz com que, muitas vezes, um enunciado não seja claro para quem o lê ou, no sentido contrário, se tenha dificuldade em elaborar em língua natural um problema.

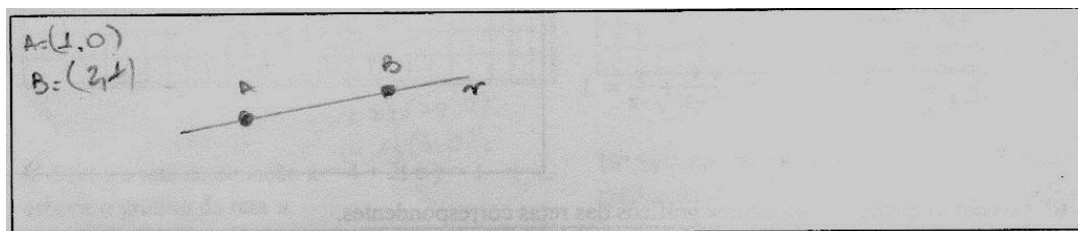


Figura 24 - Resposta do estudante 10 para a primeira questão.

5.3 Análises da segunda questão

Nesse item, 15 estudantes conseguiram acertar os seis pontos marcados, e 7 estudantes acertaram cinco pontos, com erros causados possivelmente por descuido

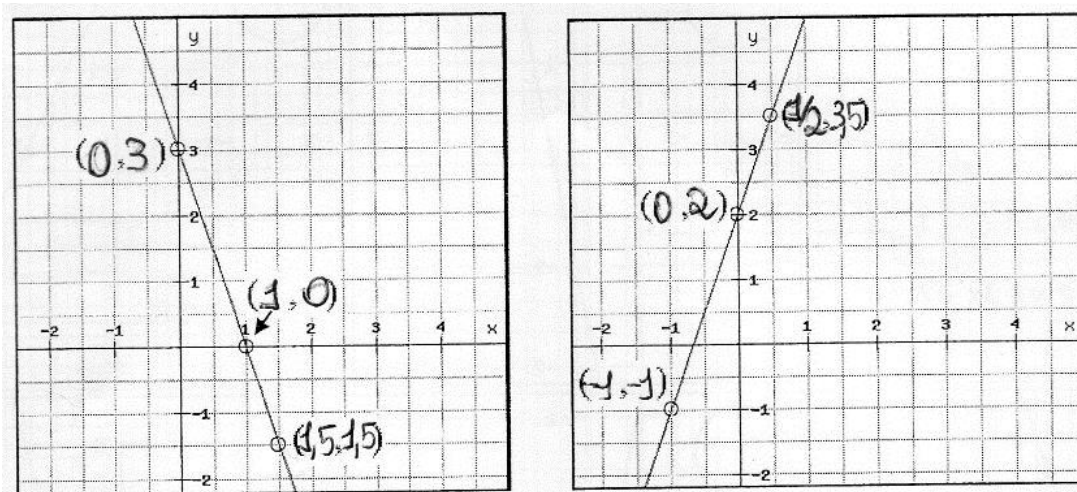


Figura 25 - Resposta do estudante 9 para a segunda questão.

No primeiro gráfico, o estudante não colocou o sinal negativo da ordenada no ponto $(1,5; -1,5)$, mas, no segundo gráfico, o estudante identifica corretamente o ponto $(-1; -1)$, por isso, é possível que tenha sido um erro causado por desvio de atenção e não por desconhecimento do plano cartesiano. Na resposta desse estudante, um outro ponto interessante são os registros numéricos utilizados: $(\frac{1}{2}; 3,5)$, o estudante

identificou corretamente os números racionais associados a cada coordenada, e fez uso de duas notações numéricas diferentes.

Quatro estudantes acertaram quatro pontos, com erros que variavam de sinal para os números representados na forma de fração. Na imagem 27, o estudante utilizou o registro na forma de fração para as coordenadas, e o fez corretamente em uma delas. Nas demais, percebemos que a forma como ele construiu a fração foi colocando como numerador o número inteiro mais próximo, geralmente menor que a coordenada, e dividindo-o por dois. Essa dificuldade na formação do registro numérico pode acontecer por algum problema referente a leitura do plano cartesiano e/ou a localização de números racionais na reta real.

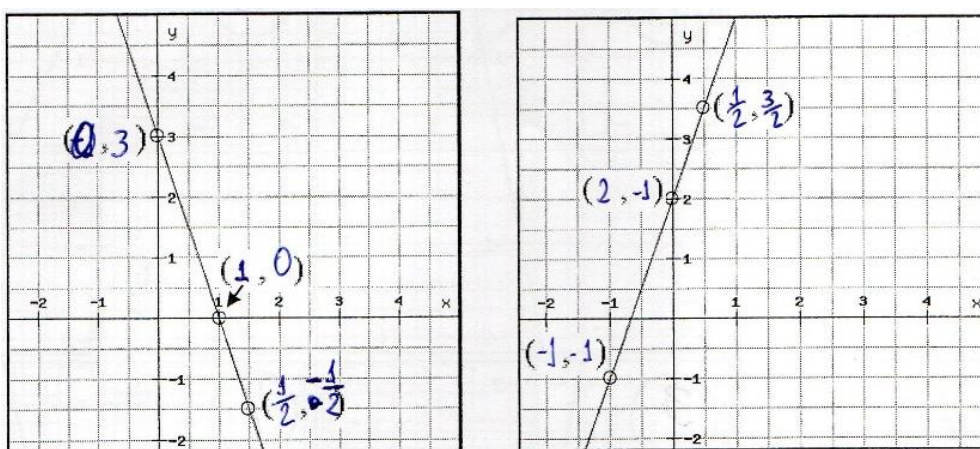


Figura 26 - Resposta do estudante 16 para a segunda questão.

Na imagem 28, o estudante errou um único ponto: nele, o estudante inverteu a posição das coordenadas, isto é, atribuiu o sinal negativo de forma equivocada. Esse erro pode ser casual, ou uma dificuldade que o levou a inverter os sinais atribuídos às coordenadas do quarto quadrante. Nesse caso, seria uma dificuldade com a leitura e interpretação do gráfico, relativa especificamente à representação das coordenadas no plano.

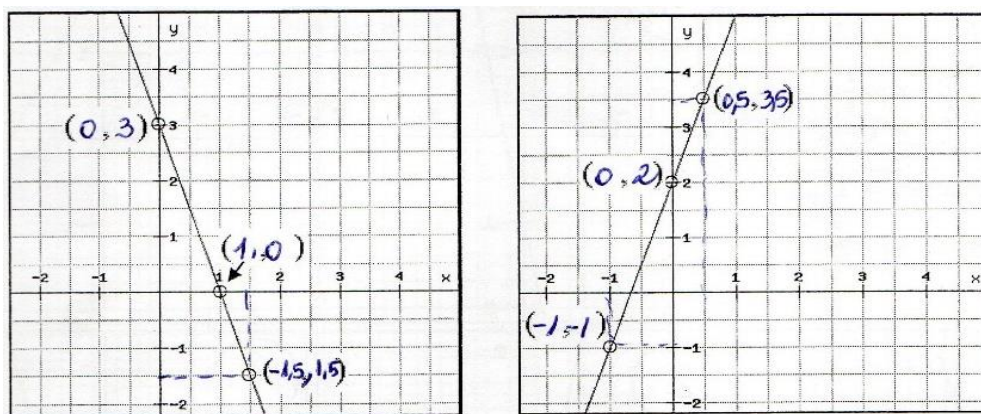


Figura 27 - Resposta do estudante 17 para a segunda questão.

Os demais estudantes erraram ou deixaram em branco três ou mais dos pontos solicitados, demonstrando insegurança na interpretação do plano cartesiano. Em função dessa dificuldade de leitura do gráfico cartesiano, o estudante poderá apresentar mais equívoco nas questões que envolvem as retas de forma direta, já que entender o sistema cartesiano é fundamental para uma real compreensão de outros conceitos na Geometria Analítica.

5.4 Análise da terceira questão

Dos trinta estudantes, dezessete responderam os três itens corretamente, quatro estudantes deixaram a questão em branco e outros cinco responderam de forma errada.

Das respostas certas, onze utilizaram a representação gráfica e dois utilizaram a representação algébrica. Quatro estudantes não apresentaram cálculos, o que impossibilitou identificar o método utilizado. Vejamos a seguir alguns exemplos dessas representações.

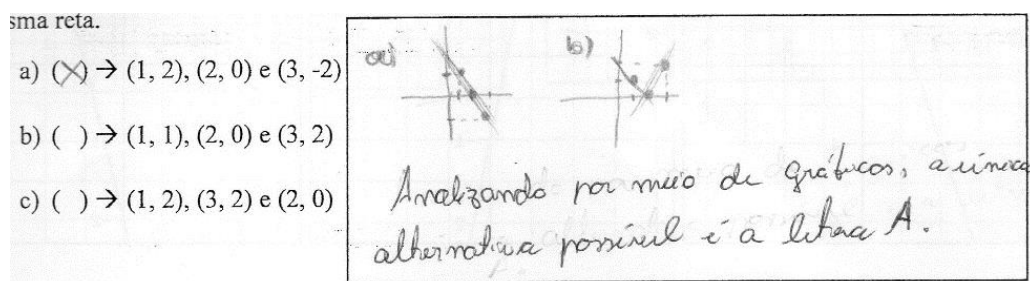


Figura 28 - Resposta do estudante 29 para a terceira questão.

sma reta.

- a) $\times \rightarrow (1, 2), (2, 0) \text{ e } (3, -2)$
 b) $() \rightarrow (1, 1), (2, 0) \text{ e } (3, 2)$
 c) $() \rightarrow (1, 2), (3, 2) \text{ e } (2, 0)$

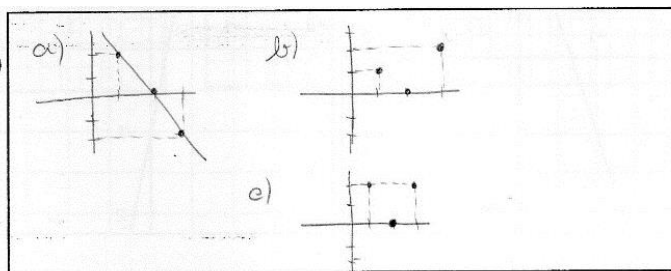


Figura 29 - Resposta do estudante 22 para a terceira questão.

Nas imagens 29 e 30, os estudantes fizeram corretamente o esboço do gráfico e constataram que só seria possível construir uma reta ligando os pontos no item “a”. Nesses exemplos, percebemos que os estudantes optaram por realizar a conversão da língua natural e do registro numérico apresentado nos itens para a representação gráfica dos pontos. Dessa maneira, conseguiu realizar a tarefa com a estratégia escolhida de forma satisfatória.

Os estudantes que escolheram a representação algébrica como solução desenvolveram estratégias diferentes.

sma reta.

- a) $\times \rightarrow (1, 2), (2, 0) \text{ e } (3, -2)$
 b) $() \rightarrow (1, 1), (2, 0) \text{ e } (3, 2)$
 c) $() \rightarrow (1, 2), (3, 2) \text{ e } (2, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{-2}{1} = -2 & y - y_0 &= m(x - x_0) & P/x = 3 \\ y - 2 &= -2(x - 1) & y - 2 &= -2(x - 1) & y - 2 &= -2(3 - 1) \\ y &= -2x + 2 + 2 & y &= -2x + 4 & y &= -2 \cdot 3 + 4 \\ y &= -2x + 4 & y &= -2x + 4 & y &= -6 + 4 \\ y &= -2x + 4 & y &= -2x + 4 & y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{0} &= & y - 1 &= -1(x - 1) & P/x = 3 & y = -3 + 2 \\ y &= -x + 2 & y &= -x + 2 & y &= -3 + 2 \\ y &= -x + 2 & y &= -x + 2 & y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0}{2} &= 0 & y - y_0 &= m(x - x_0) & y - 2 &= 0 \\ y - 2 &= 0 & y &= 2 \end{aligned}$$

Figura 30 - Resposta do estudante 11 para a terceira questão.

Na imagem 31, observamos uma resposta desenvolvida algebricamente para o problema. Nela, o estudante 11 utilizou dois pontos dados para descobrir o coeficiente angular da reta e, em seguida, escolheu um destes pontos para descobrir a equação reduzida da reta determinada pelos pontos escolhidos, então ele substituiu x por 3 e verificou que, de fato, o ponto $(3, -2)$ pertence a essa reta. O estudante repetiu a estratégia para o item “b”, encontrando o ponto $(3; -1)$, ele interrompe o cálculo e passa para o item “c”, em que faz o mesmo e encontra como equação uma reta paralela ao eixo do x , encerrando a questão, o que demonstra que nos itens “b” e “c” o estudante parece perceber que os pontos não podem ser colineares.

Novamente, verificamos que o estudante compreendeu o que foi pedido, desenvolveu e executou uma estratégia de solução eficaz. Nessa solução, vimos a

conversão do registro em língua natural para o algébrico, apesar de utilizar elementos com significados gráficos como o coeficiente angular e ter demonstrado saber que, no item “c”, seria necessário que o ponto tivesse ordenada 2, em função do paralelismo. Para esse estudante não foi necessário apresentar nenhum registro gráfico que assegure o uso dessa conversão.

uma reta.

a) ~~()~~ $\rightarrow (1, 2), (2, 0) \text{ e } (3, -2)$

b) () $\rightarrow (1, 1), (2, 0) \text{ e } (3, 2)$

c) () $\rightarrow (1, 2), (3, 2) \text{ e } (2, 0)$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_3} \cdot m$
 $a) (2, -2) = (1, -2)$
 $b) (2, -1) = (2, 1)$
 $c) (2, 0) = (2, -2)$

a alternativa
 a porque a diferença
 de $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_3} \cdot m$
 com $m = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}}$

Figura 31 - Resposta do estudante 12 para a terceira questão.

A imagem 32 mostra a resposta do outro estudante que respondeu corretamente tendo escolhido a representação algébrica. Nesse caso, ele preferiu fazer uso de uma abordagem vetorial, utilizando a propriedade que para que três pontos (A_1, A_2, A_3) sejam colineares é necessário que os vetores $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ sejam colineares. Esse estudante escreveu essa relação através da igualdade $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_3} \cdot m$. Vemos, no lado esquerdo, o cálculo dos vetores. Ainda que o estudante não tenha concluído os cálculos, sua resposta correta e explicação evidenciam que ele verificou que não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade.

Os erros nessa questão foram atribuídos a problemas conceituais, quanto aos métodos. Na imagem 33, vemos uma das resoluções. Nela, o estudante utilizou os dois primeiros pontos (A e B) da alternativa “c” para calcular o ponto e vetor $C = \overrightarrow{AB}$, obtendo por esse cálculo o terceiro ponto, o estudante acreditou, então, que os pontos são colineares.

uma reta.

a) () $\rightarrow (1, 2), (2, 0) \text{ e } (3, -2)$

b) () $\rightarrow (1, 1), (2, 0) \text{ e } (3, 2)$

c) ~~()~~ $\rightarrow (1, 2), (3, 2) \text{ e } (2, 0)$

$C = \overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow (3, 2) - (1, 2) = (2, 0) = C(2, 0)$

$(AB = C)$

Figura 32 - Resposta do estudante 16 para a terceira questão.

No que se refere aos erros, nessa questão houve um erro com uso da representação gráfica, possivelmente causado pela má formação do registro gráfico, e os demais não deixaram anotações, ou iniciaram o processo de conversão para registro simbólico, mas, não tendo sido concluído, não foi possível identificar que estratégia foi utilizada.

Outros quatro estudantes apresentaram erro parcial, isto é, marcaram os pontos que eram colineares, mas também um conjunto de pontos que não são colineares, demonstrando não terem se apropriado plenamente do conteúdo. Nesse caso alguns estudantes não deixaram cálculos suficientes para apontar a estratégia ou utilizaram métodos e erros semelhantes ao apresentado na figura 33.

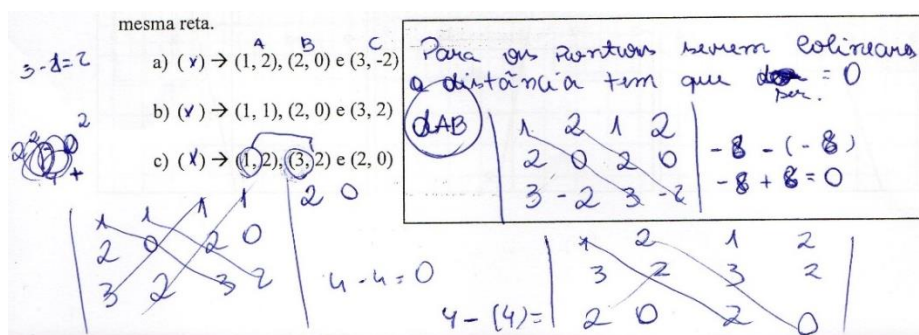


Figura 33 - Resposta do estudante 6 para a terceira questão.

Desses estudantes, um utilizou a representação algébrica, como visto na imagem 34. Percebemos que o estudante quis utilizar o fato de que se três pontos são colineares, então o determinante da matriz que tem cada linha formada por um vetor, cuja terceira coordenada é 1, é zero. O erro ocorreu nesse momento, que diz respeito à representação numérico-tabular. Nesse caso, o estudante não se lembrou de “acrescentar” a terceira coluna (coordenada 1).

Esse estudante empregou a estratégia correta, aplicando a *Regra de Sarrus* para calcular o determinante, no entanto, ignorou que a matriz formada não é quadrada. Obteve em seus cálculos todos os determinantes iguais a zero. Dessa forma, concluiu de forma coerente com a teoria, que todas as alternativas continham pontos colineares. Percebemos que o estudante entendeu o problema, e desenvolveu uma estratégia correta, mas não conseguiu realizá-la por erros conceituais na formação dos registros.

Nessa questão, observamos o uso de quatro estratégias de solução, três algébrico-numéricas (identificar equação que passa por dois pontos, determinante igual a zero e dependência linear) e a estratégia gráfica. Tendo havido uma significativa preferência dos estudantes pela representação gráfica, que foi utilizada por 12

estudantes, dos quais 11 obtiveram sucesso. Sendo assim, possivelmente pela frequência da abordagem gráfica, a visualização da reta é a mais compreendida e considerada mais prática pelos estudantes.

5.5 Análise da quarta questão

Nessa questão, foram deixadas oito respostas em branco e um esboço do gráfico da reta, mas sem nenhum registro algébrico para a equação. Na tabela 1, vemos a escolha dos estudantes, excetuando esses listados acima, quanto ao modelo de equação registrado, e dos 21 estudantes quantos conseguiram concluir corretamente.

Tabela 2- Distribuição das respostas de acordo com modelo de equação.

Registro de Equação da reta	Número de estudante que fizeram a escolha	Número de acertos por registro escolhido
Equação reduzida da reta	2	1
Equação paramétrica da reta	10	6
Equação segmentada da reta	0	0
Equação geral da reta	9	5

Todos os estudantes que escolheram a equação geral da reta, com exceção do estudante 3, utilizaram a equação geral obtida da equação cartesiana na forma $bx - ay = -c$, na qual $v = (a, b)$ é um vetor paralelo à reta, como mostrado na imagem 35.

Handwritten work for finding the general equation of a line. The student starts with the point-slope form $y - y_1 = m(x - x_1)$ and uses the points $(4, 1)$ and $(0, 3)$ to find the slope $m = -1/2$. They then substitute m and one point into the equation, resulting in $y - 1 = -1/2(x - 4)$. This is simplified to $y - 1 = -1/2x + 2$, then multiplied by 2 to get $2y - 2 = -x + 4$, and finally rearranged to the general form $x + 2y - 6 = 0$.

Figura 34 - Resposta do estudante 3 para a quarta questão.

Na imagem 36, podemos ver a resposta do estudante que fugiu à abordagem da equação geral obtida pela equação cartesiana. O estudante utilizou o coeficiente de inclinação da reta obtido pela expressão $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e, dessa mesma relação, pode-se obter uma nova equação, tomando $y_1 = y$ e $x_1 = x$, que terá a forma $y_2 - y = m(x_2 - x)$, que foi a expressão algébrica utilizada pelo estudante 9.

Handwritten work for Figure 35:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{3 - 1}{0 - 4} \rightarrow m = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x + y - 3 = 0$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{3 - y}{0 - x} \rightarrow 3 - y = -\frac{1}{2} \cdot (0 - x)$$

$$3 - y = \frac{1}{2}x$$

Figura 35 - Resposta do estudante 9 para a quarta questão.

Quanto aos erros cometidos nessa questão, os estudantes que escolheram a forma geral erraram na substituição na fórmula e/ou cometeram erros operacionais durante a atividade de tratamento algébrico, erros ocasionados por trocas de sinais e problemas com frações, apesar desse tipo de tratamento ser o mais frequente em livros didáticos segundo Dallemore e Groenwald (2012, 2014).

Handwritten work for Figure 36:

$$\overline{AB} = B - A = (0, 3) - (4, 1) = (-4, 2)$$

Aplicando o ponto A

$$ax + by + c = 0$$

$$-4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + c = 0$$

$$-16 + 2 + c = 0$$

$$-14 + c = 0$$

$$c = 14$$

$$-4x + 2y + 14 = 0 \quad (-3)$$

$$4x - 2y + 4 = 0 \quad \div 2$$

$$2x - y + 2 = 0$$

Figura 36 - Resposta do Estudante 6 para a quarta questão.

Na imagem 37, podemos notar que o estudante utilizou o mesmo método que o estudante 3, tendo obtido o vetor $(-4, 2)$. Nesse caso, o erro ocorreu com a troca das coordenadas na substituição. Este fato pode se justificar por uma confusão com os elementos algébricos utilizados, já que geralmente se utiliza a expressão $ax + by + c = 0$ para a equação geral, e (a, b) para representar vetores e pontos genéricos, assim, o estudante relacionou a abscissa com o coeficiente de x e a ordenada com o coeficiente de y de forma equivocada. Também foi utilizada a expressão tradicional do ensino médio, o estudante não realizou a “troca” do sinal do coeficiente de y . Esses equívocos podem ser causados por uma falha significação dos elementos algébricos, representados pelo mesmo símbolo, mas que têm significados distintos quanto ao objeto matemático representado.

$$\begin{array}{l}
 A = (4, 1) \quad B - A = (-4, 2) \\
 B = (0, 3) \quad \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \rightarrow x = 4 - 4t \\ y = y_0 + b \cdot t \rightarrow y = 1 + 2t \end{cases}
 \end{array}$$

Figura 37 - Resposta do estudante 22 para a quarta questão.

$$\begin{array}{l}
 \vec{AB} = B - A = (0, 3) - (4, 1) = (-4, 2) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases} \\
 (x_0, y_0) = (4, 1) \\
 r: \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \\
 \text{Eg find } r: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Figura 38 - Resposta do estudante 11 para a quarta questão.

Nas respostas apresentadas nas figuras 38 e 39 com equações paramétricas, os estudantes utilizaram a expressão algébrica $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$ com (x_A, y_A) e vetor direto (a, b) , usualmente apresentada nos livros do ensino superior. Os estudantes utilizaram o mesmo ponto na equação.

A exceção é apresentada pelo estudante 12, que apresentou duas equações paramétricas (na imagem 40 vemos sua resposta). Apesar de sua explicação indicar que pelo ponto A passa a mesma equação que pelo ponto B, e apresentar expressões algébricas diferentes, acreditamos que o estudante chamava atenção para o fato de serem ambas representações paramétricas de uma mesma reta.

$$\begin{array}{l}
 \vec{v} = \vec{AB} = (-4, 2) \quad \text{Pelo ponto B na} \\
 P(x, y, z) = (4, 1) + t(-4, 2) \quad \text{a mesma equação.} \\
 \text{Passando por A:} \quad \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 + 0t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 - 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}
 \end{array}$$

Figura 39 - Resposta do estudante 12 para a quarta questão.

Nesse caso, os erros foram causados por confusão na interpretação do sentido de cada ponto. Podemos notar, na imagem 41, que o estudante encontrou o vetor, mas que na hora de realizar as substituições na expressão utilizou os três pontos de forma equivocada, usou um ponto no lugar das coordenadas do vetor e colocou as coordenadas

no lugar do x e y nas equações. Os outros erros se devem, de forma semelhante, a problemas com substituição nas equações.

$$\vec{AB} = B - A = (0, 3) - (4, 1) = (-4, 2)$$

$$\begin{cases} x = x + at \\ y = y + bt \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 + at \\ y = 1 + bt \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = 4 + 0.t \\ 2 = 1 + 3.t \end{cases}$$

Figura 40 - Resposta do estudante 16 para a quarta questão.

Apenas dois estudantes escolheram a forma da equação reduzida, sendo que um deles não concluiu os cálculos, tendo abandonado a questão após escrever a expressão geral e calcular o vetor diretor. O estudante 13 conseguiu encontrar a equação reduzida de forma correta, como podemos verificar na imagem 42.

4º Obtenha a equação da reta, que passa pelos pontos A(4, 1) e B(0, 3).

$$y = ax + b$$

$$1 = a \cdot 4 + 3$$

$$1 - 3 = a \cdot 4$$

$$a = -\frac{2}{4}$$

$$y = -\frac{2}{4}x + 3$$

Figura 41 - Resposta do estudante 13 para a quarta questão.

Como vemos, o estudante 13 calculou o coeficiente angular através dos dois pontos, e em todo o processo utilizou apenas a conversão da língua natural para algébrica e tratamentos algébricos. Mas, para encontrar o termo “ b ” da equação da reta, ele usou o fato desse ser o ponto de interseção da reta com o eixo y . Assim, acreditamos que, mesmo sem a presença do gráfico, o estudante estabeleceu relações com essa representação gráfica mentalmente.

5.6 Análise da quinta questão

Observamos que, nesse quesito, o maior número de acertos obtidos foi com a transformação da equação geral em equação reduzida da reta tendo, 15 acertos.

~~(X)~~ $y = -\frac{2}{3}x - 2$ () $y = -2x + 6$
 () $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t - 2 \end{cases}$ () $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$
 () $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ~~(X)~~ $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$

$$\begin{aligned}
 2x + 3y + 6 &= 0 & b &= 2 \\
 3y &= -2x - 6 & -a &= 3 \\
 & & a &= -3 \\
 y &= \frac{-2x - 6}{3} \\
 y &= \frac{-2x}{3} - 2 \\
 \frac{2x + 3y}{-6} &= \frac{-6}{-6} & x &= \\
 \frac{-6}{-6} &= \frac{-6}{-6} & \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} &= 1
 \end{aligned}$$

$y = 2 - 2t$
 $-2 = -2t$
 $0 = -2t$
 $t = -1$

Figura 42 - Resposta do estudante 11 para a quinta questão.

Na imagem 43, vemos que o estudante 11 realizou uma transformação algébrica para obter a forma reduzida — esse foi o recurso utilizado também pelos outros estudantes nesse quesito.

As representações paramétricas e segmentadas apresentaram quase os mesmos resultados: 5 e 4 acertos, respectivamente. Sendo que um dos estudantes nas equações paramétricas assinalou ambas as opções, o que seria possível já que existem diferentes equações paramétricas para uma mesma reta, mas nesse item não aconteceu. Os estudantes não deixaram anotações dos métodos utilizados.

Como apresentado, ainda na imagem 43, as transformações algébricas foi o método utilizado para obtenção da equação na forma segmentada. Uma anotação que consideramos relevante foi de um estudante que não assinalou nenhuma das formas segmentadas. Acreditamos que isso ocorreu por acreditar que ambas estavam erradas. Na imagem 44, vemos sua resposta, e podemos perceber que, acima do item, o estudante deixou um par ordenado com os valores (3, -2), o que nos leva a concluir que, possivelmente, o estudante considera que a resposta correta seria na forma $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$.

~~(X)~~ $y = -\frac{2}{3}x - 2$ () $y = -2x + 6$
~~(X)~~ $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t - 2 \end{cases}$ () $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$
 () $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ () $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$

$$\begin{aligned}
 3y &= -2x - 6 \\
 y &= \frac{-2x - 6}{3} \\
 y &= \frac{-2x}{3} - 2
 \end{aligned}$$

$(3, -2)$
 $a = 3$
 $b = -2$

Figura 43 - Resposta do estudante 5 para a quinta questão.

Na resposta do estudante 17, vimos pelas anotações que ele eliminou três alternativas: duas de forma correta e o último item erroneamente. Como não há cálculos

ou outros elementos que expliquem como fez a eliminação, não é possível ter certeza da abordagem utilizada.

~~(X)~~ $y = -\frac{2}{3}x - 2$ () $y = -2x + 6$ ✓
 () $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t - 2 \end{cases}$ () $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ ✓
 () $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ () $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$ ✓

Figura 44 - Resposta do estudante 17 para a quinta questão.

Foram assinaladas 6 equações não equivalentes a equação dada, sendo 3 a equação segmentada, 2 a equação reduzida e 1 a equação paramétrica. Por esses dados, acreditamos que a equação segmentada seja para a maioria dos estudantes o mais difícil tratamento, já que foi o que teve menor número de acertos e maior número de erros. Na imagem 46, acreditamos que o estudante acreditou que deve manter os mesmos coeficientes agora como denominadores. Os estudantes que erraram no processo de tratamento tiveram problemas com a presença de coeficientes na forma de fração.

() $y = -\frac{2}{3}x - 2$ () $y = -2x + 6$ ✓
 () $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t - 2 \end{cases}$ () $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ ✓
 (X) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ () $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$ ✓

$2x + 3y + 6 = 0$
 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Figura 45 - Resposta do estudante 27 para a quinta questão.

Alguns estudantes que na 4ª questão utilizaram corretamente a equação paramétrica deixaram em branco essa equação na 5ª questão, o que pode indicar uma dificuldade do estudante em fazer a transformação de uma forma da equação da reta para a forma paramétrica, como, por exemplo, na figura 43, em que essa foi a única forma não identificada pelo estudante 11, que havia escolhido justamente a equação paramétrica no item anterior.

5.7 Análise da sexta questão

Dos trinta estudantes que participaram da pesquisa, 5 deixaram essa questão em branco, 4 não conseguiram associar nenhuma das representações gráficas e algébricas desse item, 5 conseguiram relacionar corretamente as quatro equações da reta e 4 erraram apenas uma das formas — dois, a forma paramétrica, e os outros dois, a forma geral da equação da reta. Analisando individualmente cada modelo, encontramos:

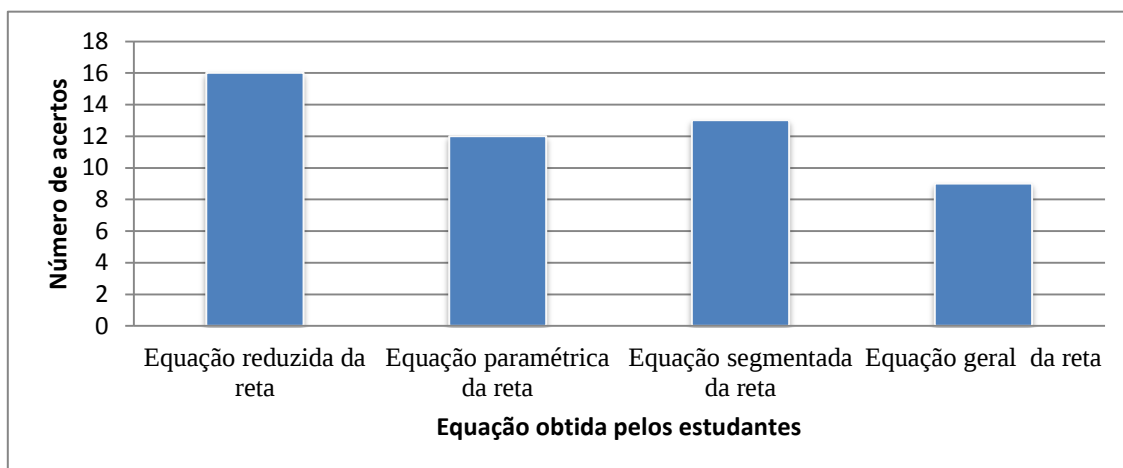


Gráfico 1- Distribuição de acertos por equação na questão 6.

A frequência maior para a forma da equação reduzida era esperada, em especial pela relação entre essa representação e o conteúdo de função afim. Já o resultado para a equação segmentada foi surpreendente, tendo em vista as dificuldades apresentadas nas questões anteriores com esse modelo.

Nas anotações dos estudantes para essa atividade, percebemos que alguns utilizaram a ideia de ponto, isto é, atribuíram valores a uma variável para encontrar o par ordenado. Dessa forma, eles estão fazendo uso de uma representação numérica para auxiliar na identificação do gráfico.

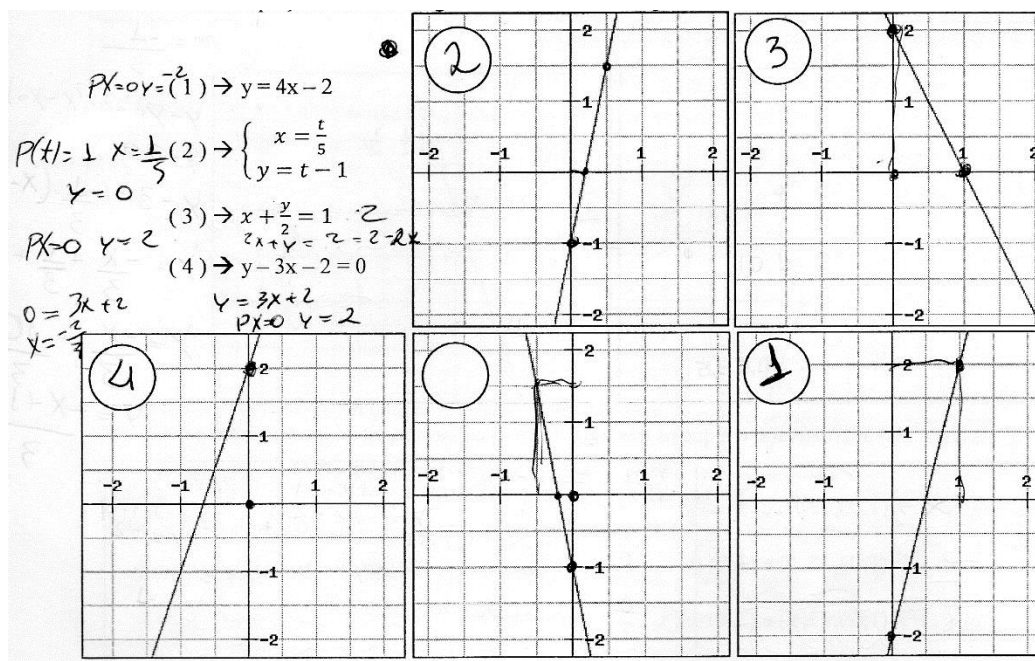


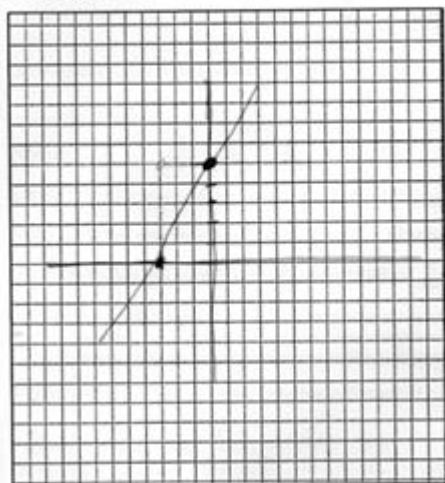
Figura 46 - Resposta do estudante 11 para a sexta questão.

Dos estudantes que erraram a equação paramétrica, seis associaram a equação ao quarto gráfico, que apresenta o gráfico de uma reta com coeficiente angular oposto ao do primeiro gráfico, e essa era a associação correta. Esse era um dos erros esperado, tendo em vista que em uma pesquisa realizada por Duval (2011, p. 11), apenas 60% dos estudantes do premier (equivalente ao primeiro ano do ensino médio na França) conseguiram ver uma diferença de sentido na inclinação da reta associada à diferença entre $y = x$ e $y = -x$.

5.8 Análises da sétima questão

Vinte e um estudantes deixaram a questão em branco, cinco estudantes erraram a representação gráfica e 4 acertaram, todos os estudantes que acertaram utilizaram a abordagem ponto a ponto, como já era esperado, tendo em vista ser a forma mais tradicionalmente utilizada. Na figura 49, vemos o gráfico — o estudante adotou o quadriculado como escala — e o cálculo dos pontos utilizado para obtê-lo.

7º Seja r a reta de equação $-5x + 3y - 15 = 0$
esboce o gráfico da reta r .



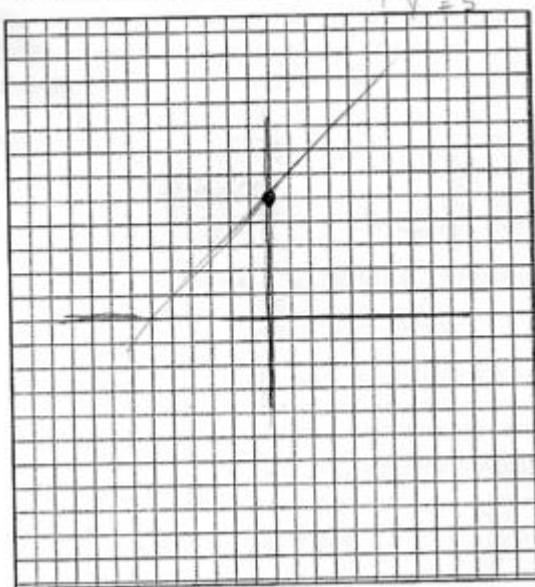
Quando $x = 0$
 $-5 \cdot 0 + 3y - 15 = 0$
 $0 + 3y - 15 = 0$
 $3y = 15$
 $y = \frac{15}{3}$ $y = 5$

Quando $y = 0$
 $-5x + 0 - 15 = 0$
 $-5x = 15$
 $x = \frac{15}{-5}$ $x = -3$

Figura 47 - Resposta do estudante 2 para a sétima questão.

As respostas erradas foram causadas, em geral, por erros durante as transformações algébricas necessárias para encontrar os pontos.

7º Seja r a reta de equação $-5x + 3y - 15 = 0$
esboce o gráfico da reta r .



$-5 + 3y - 15 = 0$
 $-20 + 3y = 0$
 $3y = 20$
 $y = \frac{20}{3}$ $(0, \frac{20}{3})$

7º Seja r a reta de equação $-5x + 3y - 15 = 0$
esboce o gráfico da reta r . $(0, -5)$, $(-2, 0)$

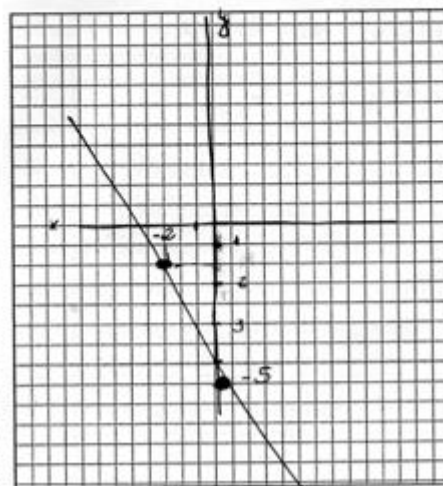


Figura 48 - Respostas dos estudantes 3 e 6, respectivamente, para a sétima questão.

No caso do estudante 6, vemos que, para ele, o problema foi um sinal na passagem $3y - 15 = 0 \Rightarrow 3y = -15$. Notamos também que o estudante 6 calculou o ponto $y = \frac{20}{3}$, mas aparentemente não gostou do valor, pois decidiu não utilizá-lo,

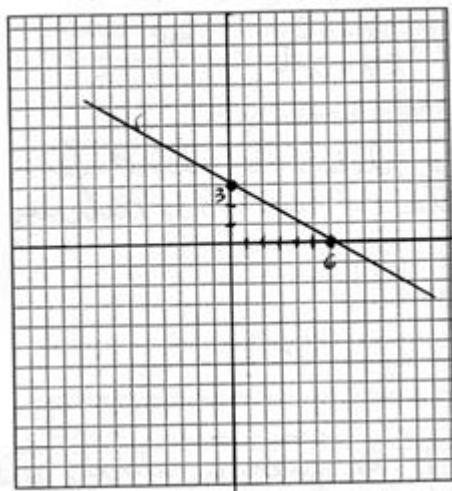
preferindo realizar mais um cálculo no qual obteve o valor $y = -\frac{15}{3}$ para $x = 1$, que ele representou no ponto $(-2, \frac{3}{2})$.

Outras dificuldades apresentadas na questão indicaram erros conceituais, pois alguns estudantes calcularam apenas um ponto e traçaram a reta de forma aleatória (estudante 3), sem considerar a necessidade de dois pontos, ou o coeficiente de inclinação para determinar o gráfico da reta.

5.9 Análise da oitava questão

Novamente, vinte e um estudantes não responderam a questão, cinco conseguiram concluí-la corretamente, também utilizando o cálculo de pontos. Como é uma função paramétrica, os estudantes atribuíram valores aleatórios para t , para obter os pontos e traçar o gráfico.

8ª Seja u a reta de equação $x = 4 + 2t$ e $y = 1 - t$ esboce o gráfico da reta u .



$$\begin{aligned} x &= 4 + 2t \\ y &= 1 - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P/t = 1 \\ x &= 4 + 2 \cdot 1 = 6 \\ y &= 1 - 1 = 0 \\ P/t = -2 \\ x &= 4 - 4 = 0 \\ y &= 1 - (-2) = 3 \end{aligned}$$

Figura 49 - Resposta do estudante 11 para a oitava questão.

Na forma paramétrica, os estudantes cometeram erros de tratamento como os do item anterior e um novo problema surgiu: alguns estudantes se confundiram com o parâmetro t adotado, o que pode ser notado nas respostas dos estudantes a seguir:

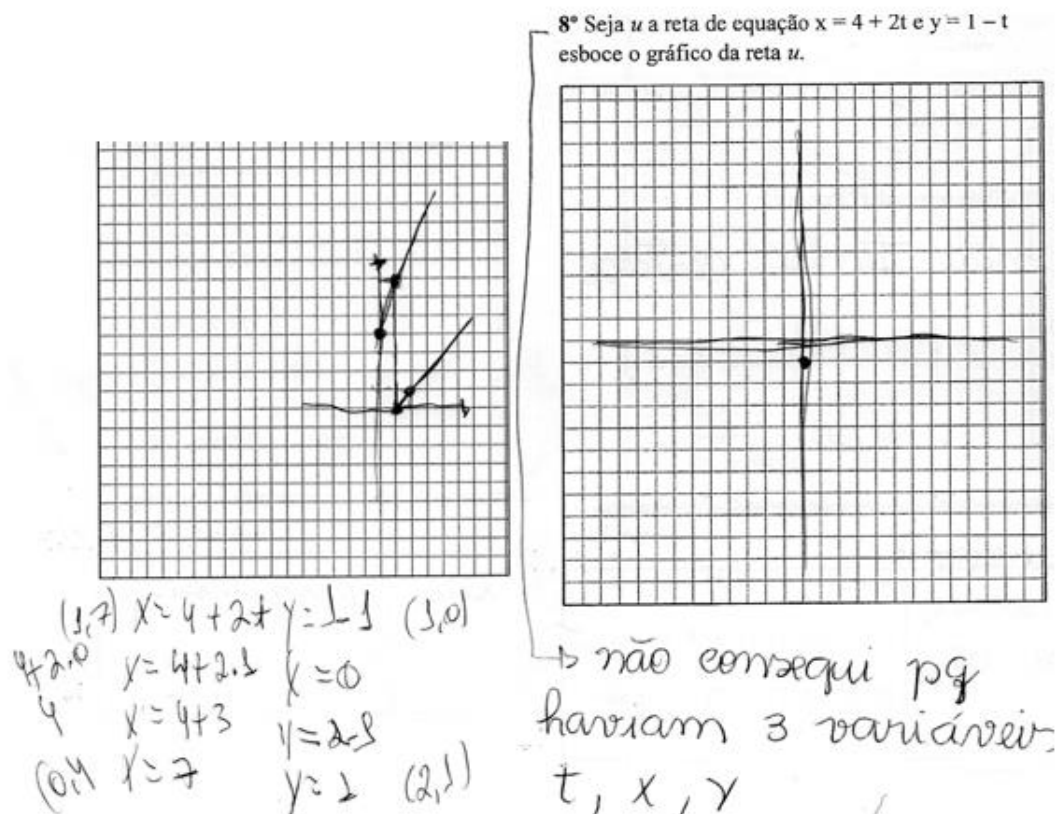


Figura 50 - Resposta dos estudantes 25 e 13, respectivamente, para a oitava questão.

No primeiro, vemos que o estudante considerou cada equação separadamente e esboçou duas retas, de forma um tanto confusa. Na segunda, o estudante apontou diretamente a presença do parâmetro como um problema, o que indica que ambos os estudantes não reconhecem essa representação como uma equação da reta.

5.10 Análise da nona questão

Houve um aumento no número de questões em branco, agora vinte e três, e uma diminuição no número de acertos. 3 estudantes conseguiram esboçar o gráfico da reta, para isso, dois deles utilizaram o cálculo de pontos e um não deixou cálculo, mas colocou dois zeros que sugerem a mesma abordagem.

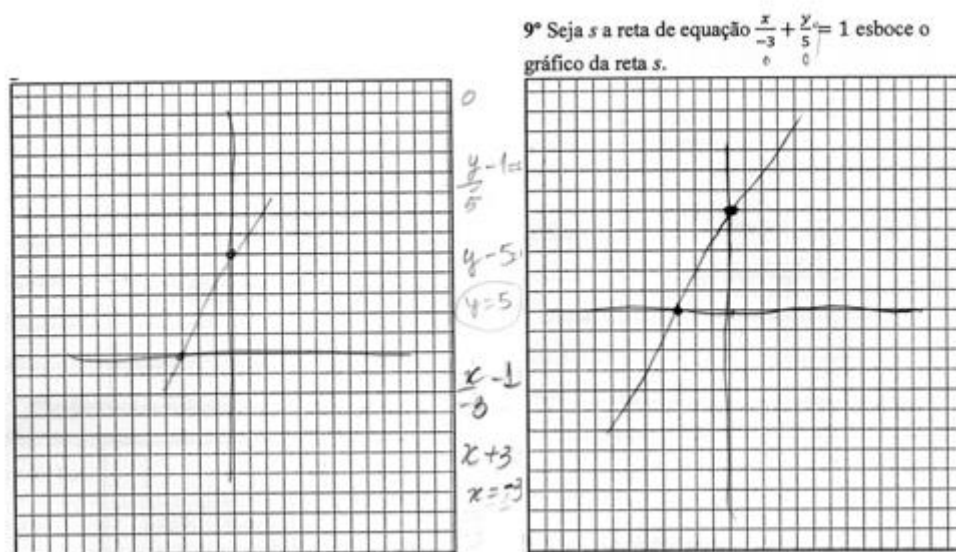
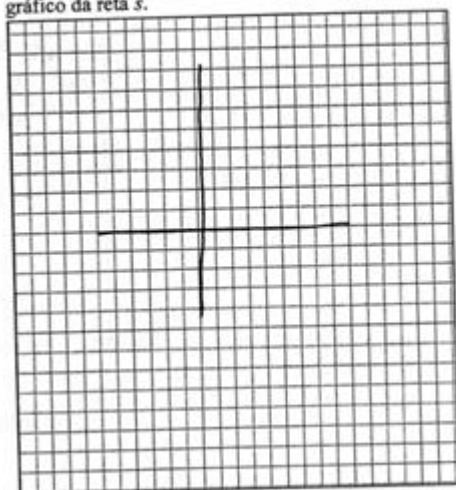


Figura 51 - Respostas dos estudantes 2 e 13, respectivamente, para a nona questão.

Aparentemente, nenhum estudante utilizou o fato de que na equação paramétrica os denominadores são os respectivos pontos de intercessão com o eixo da variável que está no numerador, um indício de que não relacionam bem essa equação e seu gráfico.

9º Seja s a reta de equação $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ esboce o gráfico da reta s .



Handwritten calculations:

$$1 - 5, \quad -5x + 3y - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x = 0,$$

$$* \quad \frac{-5x + 3y - 1}{15} = 1 \quad \text{a Reta: } -5x + 3y - 1$$

Figura 52 - Resposta do estudante 6 para a nona questão.

Nas resoluções erradas, foram encontrados erros no tratamento algébrico. O estudante 6 optou por transformar a equação segmentada em equação geral, alguns estudantes fizeram isso, mas não conseguiram concluir a transformação de forma correta. Por exemplo, o estudante 6, que acertou a soma das frações, mas o denominador

desapareceu quando o termo independente foi colocado no primeiro lado da igualdade, parece ter percebido que havia um erro, porque não concluiu o esboço do gráfico.

5.11 Análise da décima questão

Foram deixadas dezoito questões em branco, seis estudantes acertaram e dois calcularam corretamente os pontos, porém não traçaram a reta.

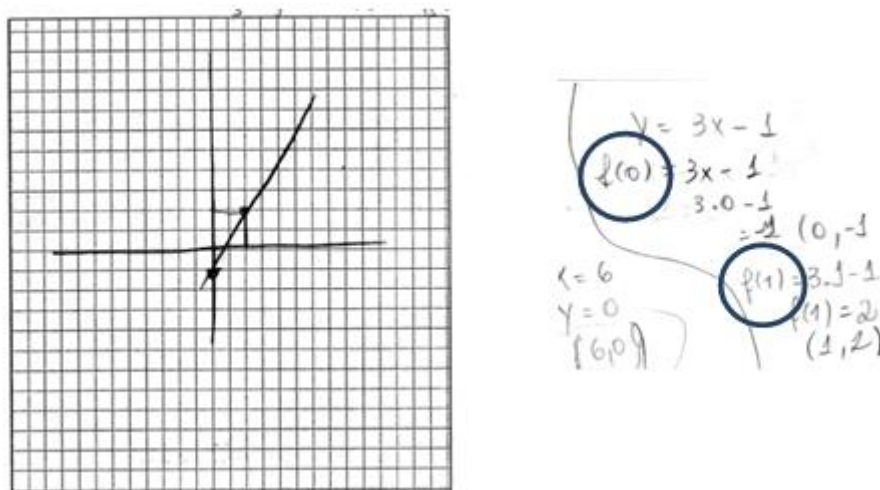


Figura 53 - Resposta do estudante 3 para a décima questão.

Novamente, a abordagem escolhida foi o cálculo de pontos, e um dos estudantes deixou explícita a relação com o conteúdo de função polinomial do 1º grau, como vemos na imagem 55. Essa relação com o conteúdo de função pode auxiliar o estudante, tendo em vista que o estudo de funções costuma realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Na resposta do estudante 10, vemos que o estudante calcula quatro pontos, dos quais apenas um não satisfaz a equação. Em seguida, o estudante marca os pontos encontrados no gráfico, com exceção do último. Os pontos A e C seriam suficientes para determinar de forma correta o gráfico da reta. O ponto B tem as coordenadas trocadas, possivelmente um erro causado por descuido durante o cálculo mental.

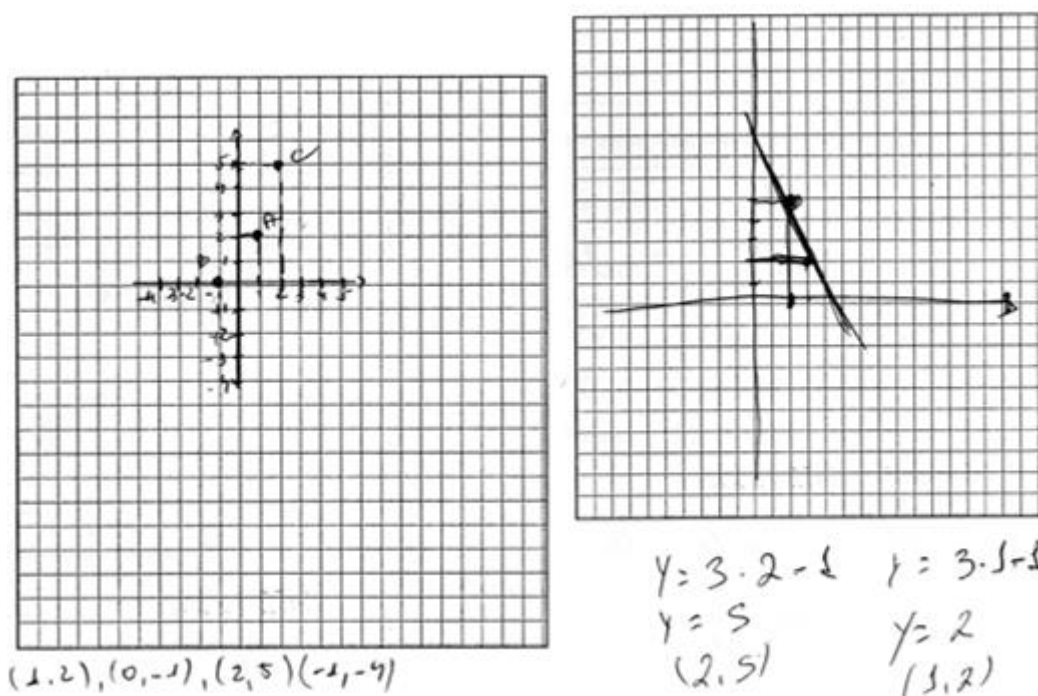


Figura 54- Respostas dos estudantes 10 e 25 respectivamente para a décima questão.

O segundo gráfico também apresentou um erro na formação do registro algébrico. O estudante calculou corretamente os dois pontos, porém não conseguiu representar corretamente o segundo ponto no gráfico, fato que levou ao esboço errado da reta. O pouco número de acertos nessa questão foi uma surpresa, já que o modelo favorecia uma associação com função geralmente estudada por mais tempo e com criação de gráficos na educação básica.

5.12 Análise da décima primeira questão

Para realizar a conversão no sentido gráfico para algébrico, os estudantes tiveram maior dificuldade no segundo gráfico. Em ambos os gráficos foram dados dois pontos com ambas as coordenadas pertencentes aos inteiros, mas, aparentemente, a presença do ângulo confundiu alguns estudantes, ao invés de servir como mais uma ferramenta para obter uma solução. No gráfico 3, podemos comparar os resultados de cada item:

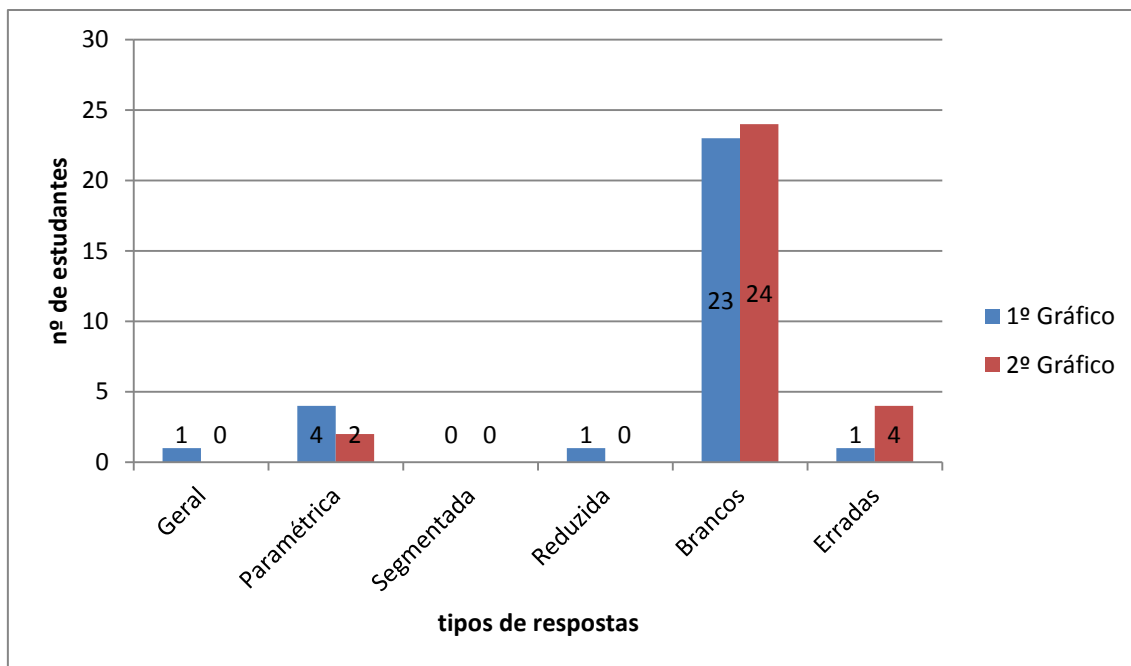


Gráfico 2- Resultado da construção de gráficos: distribuição de erros e acertos por equação da reta.

Vinte estudantes deixaram a questão totalmente em branco ou justificaram não responder por, até o momento, não ter sido visto no curso superior, e não saber responder, pois não viram no ensino médio, outros três escreveram a forma geral da equação da reta, sem estabelecer relação com o gráfico sendo, por isso, também considerada em branco.

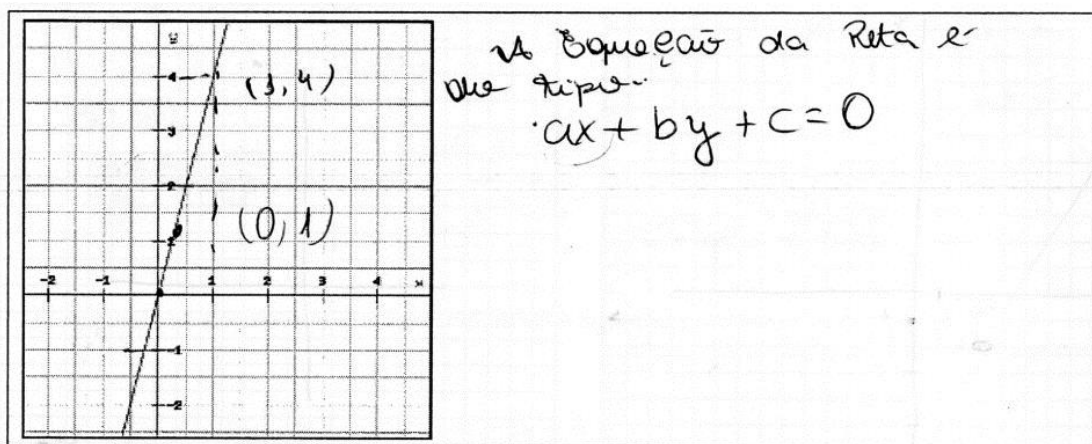


Figura 55 – Exemplo de resposta considerada como em branco para a décima primeira questão.

5.12.1 Primeiro gráfico

O estudante 9, que escolheu realizar a conversão utilizando a forma geral da equação da reta, identificou dois pontos pertencentes à reta e, em seguida, calculou o

coeficiente angular e a forma geral da equação da reta. Esse estudante utilizou nessa questão o mesmo método utilizado por ele na questão quatro.

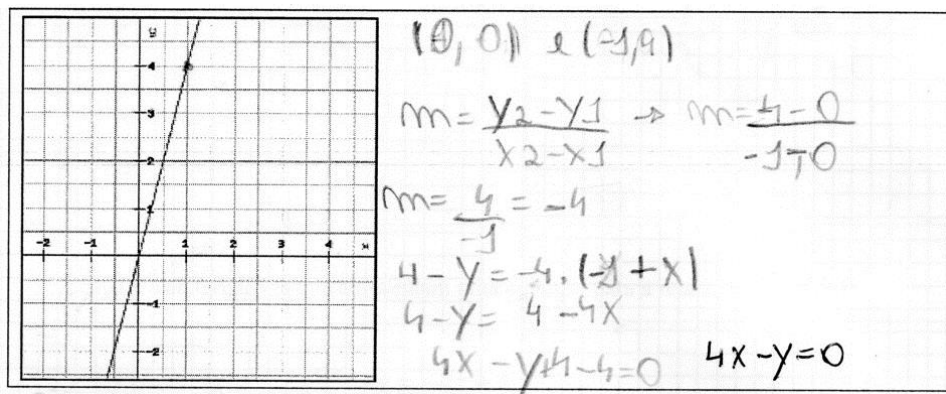


Figura 56 - Resposta do estudante 9 para a décima primeira questão.

Já o estudante 1 escolheu a forma paramétrica e, apesar de não ter realizado nenhum cálculo visível, podemos entender que utilizou os pontos $(0, 0)$ — escrito por ele em cima do gráfico — e o ponto $(1, 4)$ — visível na expressão pronta. Dessa forma, o estudante realizou a conversão da representação gráfica para algébrica mentalmente. Esse também foi o método e equação escolhida por ele na questão quatro, a única diferença é que lá ele explicitou o cálculo do vetor paralelo à reta.

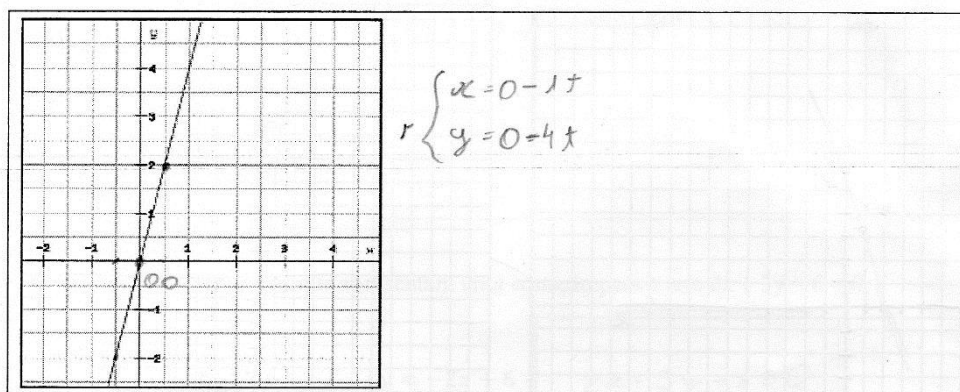


Figura 57 - Resposta do estudante 1 para a décima primeira questão.

Outra solução paramétrica é apresentada na imagem 59. Dessa vez, o estudante deixa explícita a fórmula usada e o cálculo do vetor, e escolhe como ponto a coordenada $(1, 4)$ ao invés da origem. Na questão quatro, o estudante utilizou a mesma estratégia para obter a equação. As outras duas soluções apresentam as mesmas duas equações obtidas de forma semelhante, ambos os estudantes acertaram a questão quatro com a diferença de terem escolhido nela a forma geral.

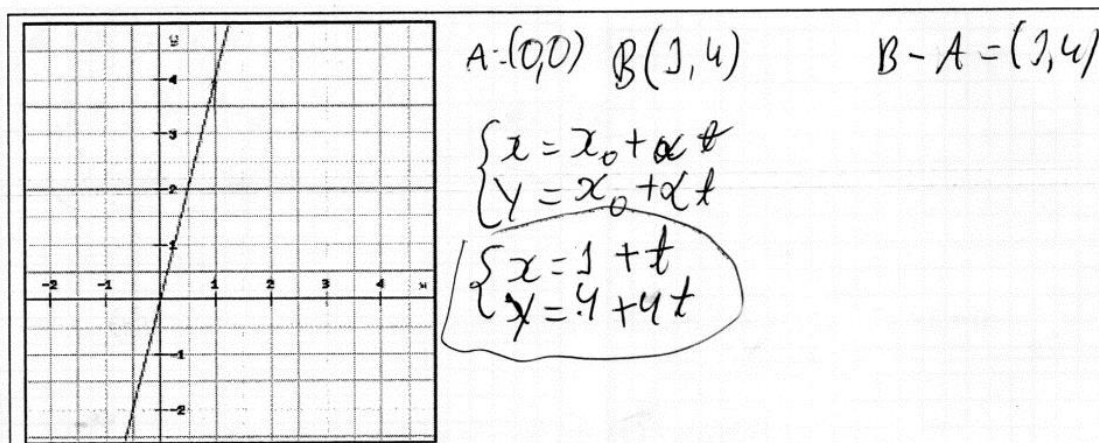


Figura 58 - Resposta do estudante 23 para a décima questão.

A forma reduzida foi obtida por um estudante que utilizou o coeficiente angular calculado de forma semelhante à utilizada pelo estudante 9. Ele também explicitou a forma geral, mas deu destaque a forma reduzida inicialmente obtida. Na questão quatro, esse estudante havia representado a reta com a equação paramétrica.

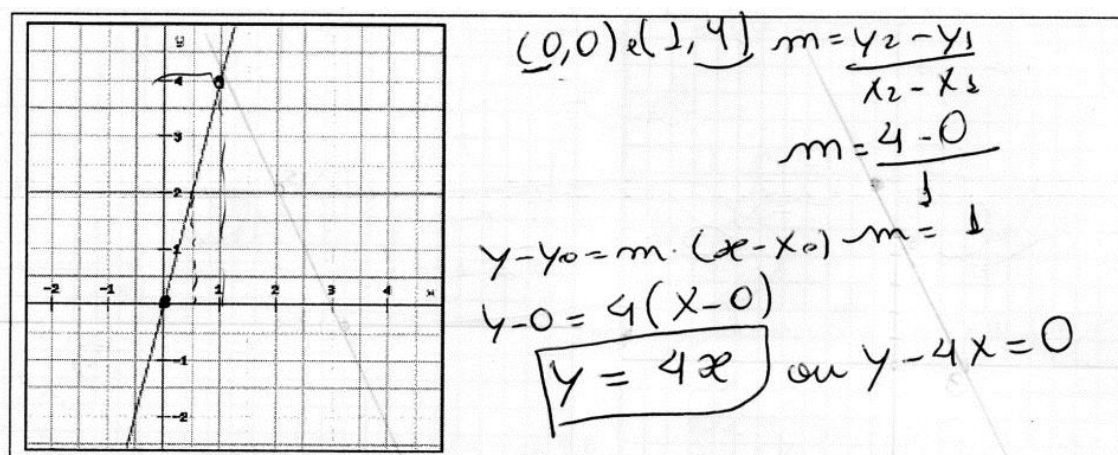


Figura 59 - Resposta do estudante 11 para a décima primeira questão.

A única solução errada foi a apresentada na imagem 62. Nela, temos duas hipóteses: a) o estudante opta por trabalhar com os eixos y e t , ocupando o eixo das abscissas, e apresenta uma equação que não tem cálculos que permitam entender o processo utilizado para obtê-la, ou b) o estudante usou a forma paramétrica, um indício dessa opção seria o fato dele ter colocado $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, um dos problemas foi a ausência de uma segunda equação para obtermos os valores de x .

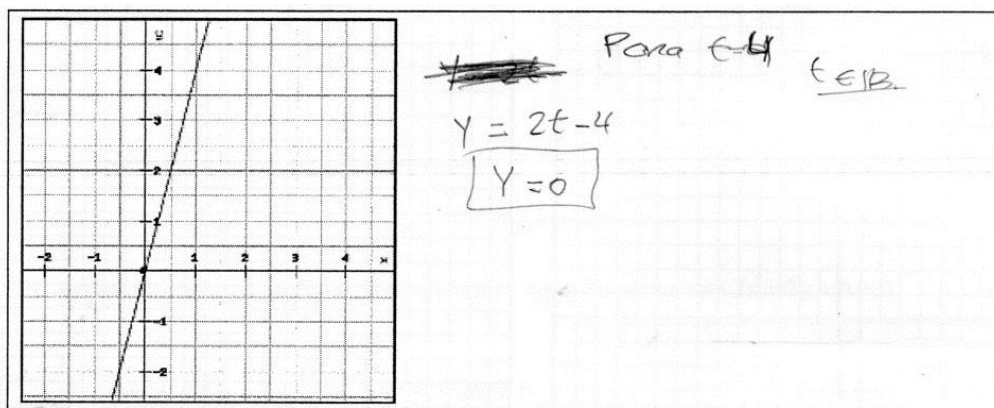


Figura 60 - Resposta do estudante 20 para a décima primeira questão.

5.12.2 Segundo gráfico

Começaremos pela resposta correta, de forma semelhante à utilizada por ele na questão quatro, o estudante 11 obteve a equação paramétrica da reta após destacar três pontos no gráfico, sendo os dois pontos de intercessão com os eixos.

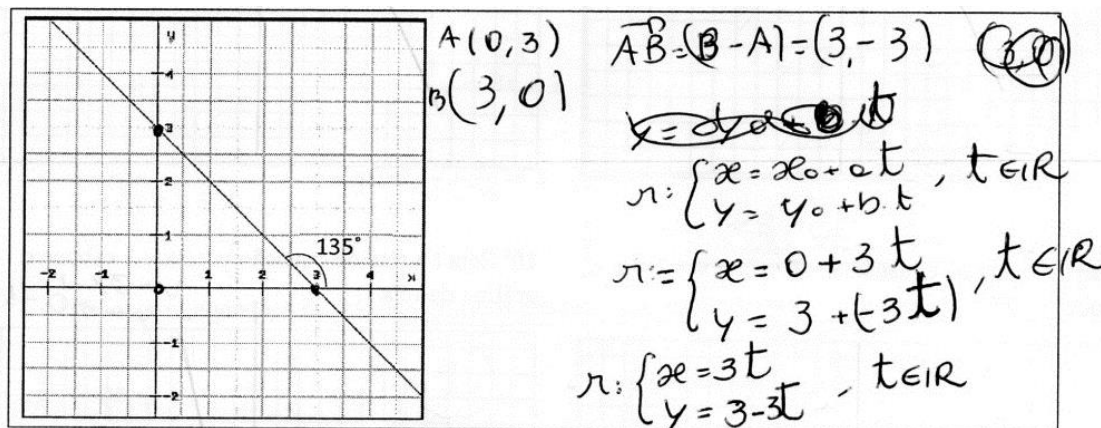


Figura 61 - Resposta do estudante 11 para o segundo gráfico da décima primeira questão.

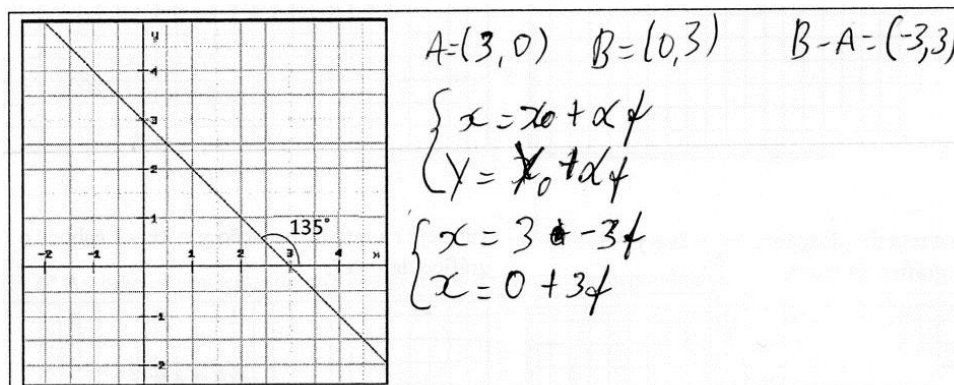


Figura 62 - Resposta do estudante 23 para o segundo gráfico da décima primeira questão.

As respostas que apresentaram erros se devem possivelmente ao descuido. No caso do estudante 1, por exemplo, ele havia acertado o item anterior utilizando a mesma estratégia, o problema foi que mesmo tendo calculado o vetor, ele não utilizou as informações obtidas.

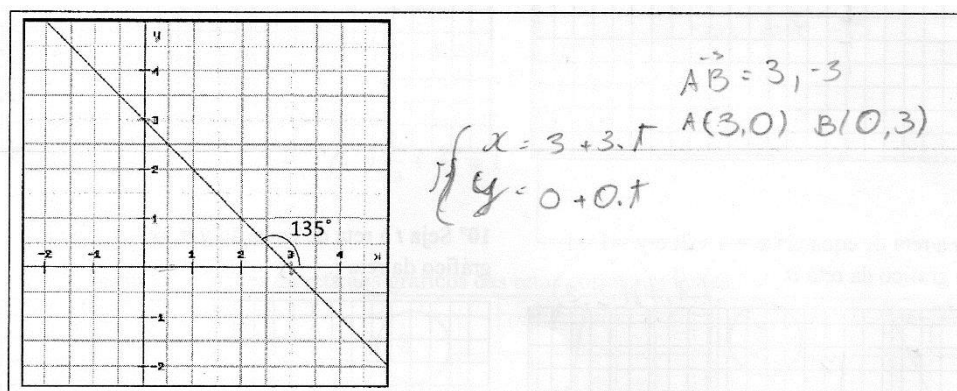


Figura 63 - Resposta do estudante 1 para a décima primeira questão.

Outro estudante tentou utilizar o ângulo fornecido, mas não conseguiu, pois associou a função cosseno com a qual demonstrou dificuldades de compreensão. A equação apresentada contém os mesmos problemas da resposta dele no item anterior dessa questão.

5.13 Comentário a respeito das questões de conversão entre os registros gráficos e algébricos (7ª a 11ª questão)

Essas foram as questões que tiveram maior índice de respostas em brancos, sendo consideradas em branco as questões totalmente vazias e as que continham o plano cartesiano desenhado sem estar nele marcados pontos ou o esboço da reta. A atividade de conversão entre os registros gráficos e algébricos em ambos os sentidos foi a que apresentou maior dificuldade por parte dos estudantes. A Tabela 3 traz os resultados obtidos nessas questões.

Tabela 3 - Resultado das questões de conversão entre os registros gráfico e algébrico

Questão	7ª	8ª	9ª	10ª
Acertos	4	5	3	7
Branco	21	21	23	18
Erros	5	4	4	5

No sentido algébrico gráfico, observamos que a maioria dos estudantes que tentou responder a questão conseguiu realizar a conversão para o registro numérico, apresentando equívocos para esboçar o gráfico. Assim, há uma dificuldade com a formação do registro gráfico e com a conversão entre os registros numérico e gráfico.

A dificuldade de conversão com sentido gráfico para algébrico é, possivelmente, causada por dificuldades na leitura e interpretação correta dos dados. Segundo Duval (2011, p. 7), a conversão nesse sentido exige uma leitura global, geralmente deixada em segundo plano no ensino. Sendo assim, o estudante acaba não conseguindo realizar a conversão mesmo sabendo efetuar todos os tratamentos envolvidos no processo de conversão. Um dos indícios que corroboram para esse resultado é o menor índice de acertos para o segundo gráfico, os estudantes que acertaram o gráfico 1 tendo feito uso da conversão para o registro numérico e posteriormente o gráfico, teriam obtido a equação do segundo gráfico através da mesma estratégia. Nesse aspecto, acreditamos que a informação do ângulo levou alguns estudantes a não realizarem uma leitura completa do gráfico, o que os impediu de desenvolver uma estratégia que eram capazes de realizar.

Os melhores resultados foram obtidos pela equação na forma reduzida, mas mesmo nele apenas seis estudantes conseguiram realizar a conversão de forma satisfatória. O menor número de acertos ficou, novamente, com a forma segmentada, que teve apenas três conversões bem sucedidas.

Os estudantes que realizaram a conversão com sucesso fizeram, em geral, uso de um registro intermediário, como previsto por Duval para as conversões não congruentes. Nessas questões, os estudantes utilizaram o registro numérico como registro intermediário, adotando uma abordagem ponto a ponto que, como explica Duval, favorece o esboço de gráficos.

5.14 Análise da décima segunda questão

Para a pergunta: “Qual(is) das perguntas você achou mais difícil de responder? Por quê?”, obtivemos sete respostas em branco e três estudantes responderam que tiveram dificuldades em todas as questões. No gráfico 4, temos a apresentação quantitativa das respostas dos estudantes que apontaram algumas questões em especial. A legenda indica a cor correspondente a cada questão, e o rótulo a quantidade de

estudantes que indicou essa questão. Nessas respostas, pudemos confirmar o que foi observado na análise dos itens anteriores: que eles possuem maior dificuldade nas questões que envolveram a conversão entre os registros gráficos e algébricos, em especial quando tinha como origem a representação gráfica.

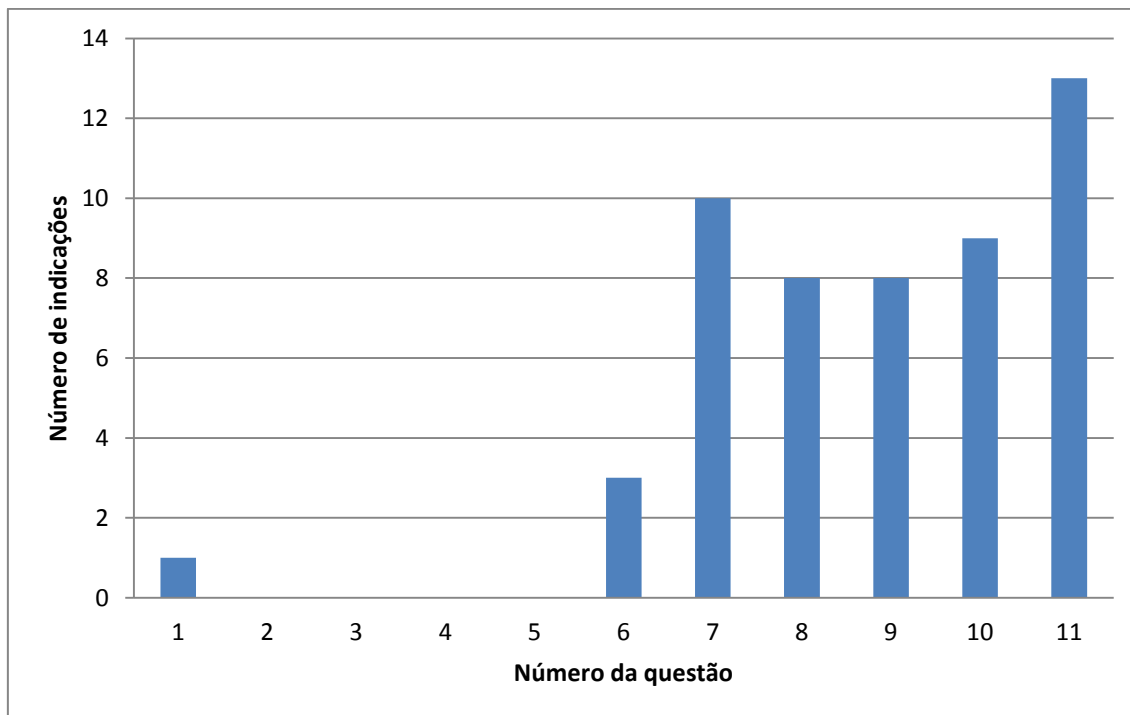


Gráfico 3 - Questões apontadas pelos estudantes como as mais difíceis.

Quanto ao motivo da dificuldade, o quadro 16 traz algumas das respostas:

“Todas, pois nunca tive aula de Geometria Analítica, a não ser esse período na UFPE, mas espero aprender” (Estudante 16).

“Todas, como não tive uma boa base sobre geometria analítica no ensino médio, gerou consequentemente uma deficiência, ou seja, um problema no meu aprendizado sobre esse determinado assunto” (Estudante 30).

“11, 7, 8, 9, 10, 1, porque não tive a oportunidade de aprender bem esses assuntos” (Estudante 15).

“Do 7º ao 10º, pois minha maior dificuldade é esboçar gráficos” (Estudante 22).

“Do 7º ao 10º. Porque não tinha visto desta forma” (Estudante 8).

“Esboçar o gráfico, todas. Porque não foi ensinado ainda como esboçar o gráfico a partir da reta” (Estudante 27).

“As questões 7 à 11, pois não gosto de gráficos” (Estudante 17).

“A 11ª por nunca tinha feito antes” (Estudante 5).

“O sétimo, por não lembrar de algumas fórmulas e o décimo” (Estudante 18).

“As duas, porque não tenho certeza sobre seus pontos” (Estudante 13 em relação aos gráficos da questão 11).

“A última porque não recordo como identificar a equação pelo gráfico” (Estudante 19).

“Questão 6, porque envolve diferentes abordagens das equações da reta e seus respectivos gráficos” (Estudante 11).

Quadro 16 – Porquês apresentados pelos estudantes para justificar as questões consideradas mais difíceis por eles.

Percebemos pelas respostas que os estudantes reconhecem suas dificuldades e as atribuem a falhas no ensino, em especial, na educação básica. Os dados colhidos para formação do perfil colaboram com essa visão, já que apenas 10 dos 30 estudantes relataram ter visto, ainda que de forma introdutória, o conteúdo de Geometria Analítica no ensino médio. Os erros relacionados às atividades de conversão gráfica e algébrica, que tiveram maior índices de respostas em branco, foram causados, nessa perspectiva, por, até o momento da realização da pesquisa, não ter sido trabalhado esse enfoque no ensino superior, segundo os estudantes, e pelo fato dos estudantes não terem visto o tema de forma alguma na educação básica.

5.15 Análise geral dos resultados

A tabela 2 apresenta o número de acertos obtidos em cada questão. Nas questões com muitos itens, foram contabilizadas como corretas, nessa tabela, apenas as que tiveram todos os itens corretos, ou foram contabilizadas individualmente. Por exemplo, na questão 2, a resposta que apresenta cinco dos seis pontos propostos corretamente não foi contabilizada.

Tabela 4- Acertos por questão.

Questão	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª			6ª				7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	
					R	P	S	R	P	S	G						
Acertos	13	15	18	13	15	5	4	16	12	13	9	4	5	3	7	6	2

Legenda: R representa a Equação reduzida da reta; P representa a Equação Paramétrica da reta; S representa a Equação Segmentada da Reta e G a Equação Geral da Reta.

Vemos que os melhores resultados foram obtidos na terceira questão, na sexta questão (pela forma reduzida da equação da reta), na quinta questão (também pela forma reduzida da reta) e na segunda questão.

Houve, assim, maior facilidade com as atividades de conversão dos registros em língua natural para o algébrico (questão 3), no reconhecimento e associação entre representações gráfico e algébrica, na transformação algébrica — nessas, destacando a forma reduzida da equação da reta, com a qual os estudantes têm maior afinidade, em função dos estudos de função polinomial do primeiro grau —, e na conversão do registro gráfico para o numérico.

Já no que se refere às dificuldades, estas foram maiores no segundo gráfico da décima primeira questão, no 9º, 7º e 8º quesitos e nas formas paramétricas e geral da quinta questão.

Nesse caso, o maior problema está nas atividades de conversão entre os registros gráficos e algébricos, em ambos os sentidos (7º, 8º, 9º e 11º), e em problemas algébricos para realizar a transformação nesse registro, especialmente quando o procedimento utiliza frações.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos identificar quais os principais registros utilizados por estudantes na resolução de questões de Equação da Reta, no conteúdo de geometria analítica e, a partir disto, verificar quais destes registros são preferidos e quais apresentam maiores dificuldades para os estudantes, bem como identificar quais são as atividades cognitivas (formação, tratamento e conversão) consideradas com menor ou maior grau de dificuldade de compreensão para os estudantes participantes da pesquisa.

Durante a pesquisa selecionamos os participantes. Nessa fase, cogitamos realizá-la envolvendo estudantes do terceiro ano do Ensino Médio — ano letivo em que o livro didático traz o assunto de geometria analítica, sendo assim, a série mais comum para a realização desse estudo —, mas, com exceção da escola onde realizamos o pré-teste, nenhuma das outras três escolas consultadas havia abordado o conteúdo até o momento da pesquisa, revelando que não seria possível avaliar a relação dos estudantes com as diferentes representações, já que estes não haviam tido contato com o conteúdo. Os professores explicaram que, por estarmos com o calendário escolar modificado em função da Copa do Mundo realizada no Brasil, o conteúdo só seria abordado a partir do segundo semestre. Por essa razão, a segunda fase de aplicação da pesquisa foi realizada apenas com estudantes de Matemática-Licenciatura.

Os resultados da pesquisa apontaram um problema no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, em especial nas atividades de conversão envolvendo o registro gráfico. Mesmo os estudantes que demonstraram conseguir relacionar e, portanto, reconhecer os registros gráficos e algébricos, em sua maioria, não conseguiram realizar a conversão entre esses registros.

O baixo número de estudantes que afirmou ter tido aulas de Geometria Analítica no ensino médio aparece como uma das possíveis causas dos problemas dos alunos nessa disciplina, sendo um dos possíveis fatores para o alto índice de reprovação. Esse dado, juntamente com os relatos oferecidos por eles na questão 12, e as pesquisas já realizadas na área apontam que o ensino de Geometria Analítica não tem desenvolvido oportunidades de articulação significativa entre o registro gráfico e outros registros. E sendo a Geometria Analítica uma área desenvolvida pela articulação direta entre os registros gráficos e algébricos, o ensino focado em apenas um desses registros compromete a habilidade do estudante de reconhecer, formar e trabalhar com o outro

registro, limitando o conceito matemático — neste estudo, a reta — a um de seus registros.

Sendo assim, os resultados obtidos alertam para as dificuldades de compreensão que os estudantes apresentam no estudo da reta para trabalhar com algumas de suas representações. Acreditamos que uma abordagem mais diversificada, que relacione diferentes registros e possibilite a realização de atividades de conversão entre eles, em ambos os sentidos, possa melhorar o aprendizado desse conteúdo.

As pesquisas realizadas na área, em concordância, sugerem o uso de softwares, a fim de auxiliar na visualização das relações entre os diferentes registros. Consideramos as sequências de ensino apontadas nessas pesquisas como significativas e relevantes para o ensino, mas destacamos que se uma instituição não dispuser de meios para a realização das atividades com softwares, pode utilizar recursos tradicionais ou materiais manipuláveis para trabalhar com os diferentes registros. Sendo necessário, nesse caso, que o professor conheça a importância de trabalhar com os diferentes registros e possa identificar qual a melhor alternativa para trabalhá-los dentro da realidade escolar que vivencia.

Sugerimos a realização de novas pesquisas que possam acompanhar os estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem, promovendo atividades de conversão e construções de representações entre todos os registros possíveis, tanto na educação básica como no ensino superior. Propomos também um levantamento, mais expressivo e minucioso, do ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio, já que a pesquisa aponta a possibilidade de que, aproximadamente dois terços dos estudantes que concluem a Educação Básica não tenham tido aulas de Geometria Analítica, mesmo sendo esse um conteúdo apontado pelos documentos curriculares nacionais.

7. REFERÊNCIAS

BARROSO, J. M.; obra coletiva. **Conexões com a Matemática**. Volume 3. 1ª ed. São Paulo: Moderna. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC). **Secretaria da Educação Básica (SEB). Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. 2006. Brasília: MEC/SEB.

_____. Ministério da Educação e cultura (MEC). **Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, 2002. Brasília: MEC.

CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CARDOSO, F. C.; NEHRING, C. M.; SOARES, M. A. S. **Geometria Analítica: Uma análise dos registros mobilizados por um grupo de licenciandos em matemática com o auxílio do Geogebra**. In: Escola de Inverno de Educação Matemática (III EIEMAT), 3a, 2012, Santa Maria. Anais Eletrônicos: Santa Maria: UFSM, 2012. Comunicação Científica. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/CC/CC_Cardoso_Franciaele_Catelan.pdf>. Acesso em: 01 set. 2013.

DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O. . **Geometria Analítica e Registros de Representação Semiótica: Conversão entre os Registros Língua Natural e Algébrico**. In: II CNEM-Congresso Nacional de Educação Matemática e IX EREM-Encontro Regional de Educação Matemática, 2011, Ijuí-RS. Anais do Congresso Nacional de Educação Matemática; 9.Encontro Regional de Educação Matemática, 07 a 10 de junho, 2011.

DALLEMOLE, J. J. ; GROENWALD, C. L. O. .**Livros Didáticos de Matemática e os Registros de Representação Semiótica no Conteúdo de Geometria Analítica**.In: XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática: Educação Matemática em Tempos de Incertezas, 2012, Lajeado- RS. Anais do XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2012, p. 549 - 558. Disponível em: < https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/6/pdf_6.pdf>. Acesso: 03 out. 2013.

DALLEMOLE, J.; OLIVEIRA GROENWALD, C.. **A geometria analítica e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de matemática**. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, América do Norte*, 714 07 2014.

DALLEMOLE, J. J. ; GROENWALD, C. L. O. ; RUIZ, L. M .**Os registros de representação semiótica no estudo da reta com enfoque na geometria analítica**. *Alexandria (UFSC)*, v. 4, p. 149-178, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. Volume único. 2ª ed. São Paulo: Ática. 2007.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2010. (Coleção Papirus Educação).

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Trad. MORETTI, M. T. *Revemat*, v.7, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em: <www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat - <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>>.

_____. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. Trad. MORETTI, M. T. *Revemat*, v.6, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>>.

FARIA, F.S. **Conhecimentos e concepções de professores de Matemática que atuam no Ensino Médio: influência dos processos seletivos de acesso ao Ensino Superior**. Recife: UFPE, 2011.

FARIAS, R. R.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. **A transformabilidade dos registros de representação semiótica no ensino de equações de reta**. *Revemat*, v.7, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p53>>. Acesso: 20 jul. 2014.

GONÇALVES, J. S. **Análise da qualidade de sistemas lineares: Um estudo sobre convenções de registros com auxílio do software Winplot**. São Paulo: Universidade Bandeirante, 2012.

GUERATO, E. T.; BARROS, L. G. X. **Tratamento vetorial da geometria analítica plana**. 2011. Disponível em: <http://www.sinprosp.org.br/congresso_matematica/revendo/dados/files/textos/Relatos/TRATAMENTO%20VETORIAL%20DA%20GEOMETRIA%20ANAL%20C3%8DTICA%20PLANA.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2013.

IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. **Matemática**. volume único. 2ª ed. São Paulo: Saraiva. 2002.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. São Paulo, 2006. 435f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). – Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/monica_karrer.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2013.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval**. In: Seminário de Pesquisa em Educação da região Sul (IX ANPED Sul), 2012.

MARTINELLI, D. S. P. **Geometria analítica com o software Winplot: articulando as representações algébricas e geométricas**. Porto Alegre, 2013. UFRGS. Acesso em: 16 de set. 2013.

PERNAMBUCO, Secretária de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012.

RAQUEL, S. S. **Estudo da reta em geometria analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software Geogebra**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria analítica**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática**. Universidade Estadual Paulistas (unesp). Rio Claro, 2005.

RIZZON, K. **Análise da linguagem matemática relacionada à geometria analítica do ensino médio**. Porto Alegre, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2008.

ROLOFF, M. C. S. **Representações sociais de Matemática: Um estudo com alunos da educação de jovens e adultos**. Itajaí – SC: Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI), 2009.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. **Matemática Ensino Médio**. 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VILELA, D. F.; JAHN, A. P.; COSTA, N. M. L. **Matemática no ensino médio: Estudo sobre a aprendizagem de geometria em ambientes informatizados**. In: 1 Jornada de Iniciação Científica e Tecnológica UNIBAN. São Paulo, 2008, Acesso em: 18 de ago. de 2013. Disponível em: <http://www.uniban.br/pesquisa/iniciacao_cientifica/pdf/ciencias_humanas/educmat/matematica_informatizados.pdf> 2008.