

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**INVESTIGANDO A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS
COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO E LICENCIATURA**

ERILLAINY ROBERTA SOARES SILVA

CARUARU, 2014

ERILLAINY ROBERTA SOARES SILVA

**INVESTIGANDO A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS
COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO E LICENCIATURA**

Trabalho de Conclusão de Curso, como
requisito para obtenção do título de graduada
em Matemática-Licenciatura.

Orientadora: Professora Mestre Cristiane de Arimatéa Rocha.

Co-orientador: Professor Mestre Edelweis José Tavares Barbosa.

CARUARU, 2014

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva CRB/4-1223

S586i Silva, Erillainy Roberta Soares.
Investigando a compreensão do conceito de números reais com estudantes do ensino médio e licenciatura. / Erillainy Roberta Soares Silva. – Caruaru, 2014.
56 f., il.; 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Co-orientador: Edelweis José Tavares Barbosa
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática – Licenciatura, 2014.
Inclui referências.

1. Números reais. 2. Compreensão. 3. Matemática – Estudo e ensino - Pernambuco. 4. Matemática - Currículos. 5. Matemática – Dificuldades. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa. (Orientadora). II. Barbosa, Edelweis José Tavares. (Co-orientador). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.)

UFPE (CAA 2014-113)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
ERILLAINY ROBERTA SOARES SILVA

**INVESTIGANDO A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS
COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO E LICENCIATURA**

BANCA EXAMINADORA

Cristiane de Arimatéia Rocha
(Orientadora)

Edelweis José Tavares Barbosa
(Co-orientador)

Amanda Barbosa da Silva
(Examinadora interna)

Fabiana dos Santos Farias
(Examinadora externa)

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em __ / __ / 2014

Agradecimento

*A minha orientadora, Cristiane de Arimatéa,
pela pessoa que é, pelo exemplo de mestre,
por fazer além do que a posição de orientadora
exigia, por ter sido determinante e fundamental
na construção desse trabalho.*

*Ao meu professor co-orientador Edelweis
Tavares pela sua contribuição na
elaboração deste trabalho.*

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo investigar quais os tipos de erros cometidos sobre o conjunto de Números Reais por estudantes de 3º ano do Ensino Médio e por estudantes da Licenciatura em Matemática. O conjunto dos números reais foi selecionado devido a sua inserção ao longo do currículo de Matemática do Ensino Fundamental. Posteriormente, já no Ensino Médio, se configura sua importância ao ser base para o estudo de funções no Ensino Médio. No Ensino Superior sua relevância se apresenta no estudo de limite de funções reais, convergência, geometria, equações, assuntos que permeiam graduações de Engenharia, Licenciatura em Matemática, entre outros considerados de *disciplinas exatas*. Para obtenção dos dados foi aplicado um questionário com 27 alunos do ensino médio e 18 alunos do curso de licenciatura UFPE-CAA do 5º período. Trata-se de um estudo qualitativo, categorizando os erros cometidos pelos grupos. A análise foi embasada nos estudos de Penteado (2004), Cezar (2011), Bartolomeu (2010), Dias (2002), Souto (2010), além dos PCN, PCN+, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e Parâmetros para a Educação Básica no Estado de Pernambuco. A análise revela uma lacuna no ensino e aprendizagem dos números reais, sendo necessário rever, discutir e refletir a forma como esta sendo ensinado os números reais hoje.

Palavras Chave: Números Reais; Conceito; Ordem;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	PERSPECTIVA HISTÓRICA DOS NÚMEROS REAIS.....	14
3	O QUE DIZEM AS PESQUISAS SOBRE NÚMEROS REAIS.....	17
	3.1 Na Educação Básica.....	17
	3.2 Na Formação dos Professores.....	18
	3.3 No Livro Didático e Documentos Curriculares Oficiais.....	20
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	23
	4.1 Apresentação dos Questionamentos Comuns.....	23
	4.1.1 <i>Objetivos da Questão 1</i>	23
	4.1.2 <i>Objetivos da Questão 2</i>	24
	4.1.3 <i>Objetivos da Questão 3</i>	24
	4.1.4 <i>Objetivos da Questão 4</i>	24
	4.1.5 <i>Objetivos da Questão 5</i>	24
	4.1.6 <i>Objetivos da Questão 6</i>	25
	4.2 Questionamentos Exclusivos da Licenciatura.....	25
	4.2.1 <i>Objetivos da Questão 7</i>	25
	4.2.2 <i>Objetivos da Questão 8</i>	25
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	26
	5.1 Análise dos Questionamentos Comuns.....	26
	5.1.1 <i>Análise da Questão 1</i>	26
	5.1.2 <i>Análise da Questão 2</i>	31
	5.1.3 <i>Análise da Questão 3</i>	35
	5.1.4 <i>Análise da Questão 4</i>	38
	5.1.5 <i>Análise da Questão 5</i>	42
	5.1.6 <i>Análise da Questão 6</i>	43

5.2	Análise dos Questionamentos Exclusivos da Licenciatura.....	44
5.2.1	<i>Análise da Questão 7.....</i>	<i>44</i>
5.2.2	<i>Análise da Questão 8.....</i>	<i>45</i>
5.3	Análise dos acertos totais.....	46
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
	REFERÊNCIAS.....	51
	APÊNDICE A – Perfil dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio.....	53
	APÊNDICE B – Perfil dos estudantes do 5º período Matemática-Licenciatura.....	54
	APÊNDICE C – Questões aplicadas na Licenciatura e Ensino Médio.....	55
	APÊNDICE D – Questões aplicadas apenas na Licenciatura.....	56

LISTA DE GRÁFICO

GRÁFICO 1: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 1	27
GRÁFICO 2:REFERENTE AOS EXEMPLOS DA QUESTÃO 1.....	30
GRÁFICO 3: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 2	31
GRÁFICO 4: REFERENTE AOS EXEMPLOS DA QUESTÃO 2.....	34
GRÁFICO 5: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 3	35
GRÁFICO 6: REFERENTE AOS EXEMPLOS DA QUESTÃO 3.....	38
GRÁFICO 7: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 4	39
GRÁFICO 8: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 5	42
GRÁFICO 9: REFERENTE AOS ERROS DA QUESTÃO 6	44
GRÁFICO 10: REFERENTE AOS ACERTOS TOTAIS	46

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- SEGMENTOS $\overline{AB}$ E $\overline{CD}$	14
FIGURA 2: PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 41 LICENCIATURA	26
FIGURA 3: PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 3 ENSINO MÉDIO.....	28
FIGURA 4: PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 1 ENSINO MÉDIO.....	28
FIGURA 5:PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 16 ENSINO MÉDIO.....	28
FIGURA 6:PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 20 ENSINO MÉDIO.....	28
FIGURA 7:PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 27 ENSINO MÉDIO.....	29
FIGURA 8:PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 30LICENCIATURA	29
FIGURA 9: PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 31LICENCIATURA.....	29
FIGURA 10:PROTOCOLO REFERENTE À PRIMEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 42LICENCIATURA	30
FIGURA 11: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 8ENSINO MÉDIO	31
FIGURA 12: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 24 ENSINO MÉDIO.....	32
FIGURA 13: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 15 ENSINO MÉDIO.....	32
FIGURA 14: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 27 ENSINO MÉDIO.....	33
FIGURA 15: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 3 ENSINO MÉDIO.....	33
FIGURA 16: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 29 LICENCIATURA.....	33
FIGURA 17: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 33 LICENCIATURA.....	33
FIGURA 18: PROTOCOLO REFERENTE À SEGUNDA QUESTÃO DO SUJEITO 36 LICENCIATURA.....	34
FIGURA 19:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 1ENSINO MÉDIO.....	35
FIGURA 20:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 3ENSINO MÉDIO.....	36
FIGURA 21:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 4ENSINO MÉDIO.....	36
FIGURA 22:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 8ENSINO MÉDIO.....	36
FIGURA 23:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 26ENSINO MÉDIO.....	37
FIGURA 24:PROTOCOLO REFERENTE À TERCEIRA QUESTÃO DO SUJEITO 43LICENCIATURA	37
FIGURA 25:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 31LICENCIATURA	38
FIGURA 26:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 1 LICENCIATURA	40
FIGURA 27:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 2 LICENCIATURA	40
FIGURA 28: PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 14 LICENCIATURA.....	40
FIGURA 29:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 4 LICENCIATURA	41
FIGURA 30:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 15 LICENCIATURA	41
FIGURA 31:PROTOCOLO REFERENTE À QUARTA QUESTÃO DO SUJEITO 26 ENSINO MÉDIO	41
FIGURA 32: PROTOCOLO REFERENTE À QUINTA QUESTÃO DO SUJEITO 33 LICENCIATURA.....	42

FIGURA 33: PROTOCOLO REFERENTE À SEXTA QUESTÃO DO SUJEITO 31 LICENCIATURA..... 43

1 INTRODUÇÃO

Tudo é Número! Por muito tempo os mitos e lendas divulgados até hoje da Matemática Grega indicam que os pitagóricos acreditavam e queriam compreender o mundo a partir dos números.

Clarice Lispector, autora de diferentes textos, escreveu uma crônica intitulada *Você é um Número*. Nessa crônica a autora descreve situações cotidianas em que nós seres humanos somos classificados, enumerados, codificados por números. Apesar de ser uma crônica escrita em 1971 muitos podem considerar atual.

No entanto, mesmo com as funções sociais dos números atribuídas no dia a dia, e também a importância dada ao campo de números e operações no currículo escolar ainda verifica-se algumas dificuldades de alunos e professores sobre os conceitos de números reais em diferentes pesquisas, tais como Cezar (2011), Bartolomeu (2010).

O conjunto dos números reais foi selecionado devido a sua inserção ao longo do currículo de Matemática do Ensino Fundamental. Posteriormente, já no Ensino Médio, se configura sua importância ao ser base para o estudo de funções no Ensino Médio. No Ensino Superior sua relevância se apresenta no estudo de limite de funções reais, convergência, geometria, equações, assuntos que permeiam graduações de Engenharia, Licenciatura em Matemática, entre outros considerados de *disciplinas exatas*.

Enquanto aluna de Licenciatura em Matemática tive a oportunidade de participar de Iniciação Científica no projeto intitulado Topologia na Reta e Construção de Conjuntos Numéricos no qual discutimos sobre as diferentes propriedades dos conjuntos. Posteriormente, no Programa institucional de bolsa de iniciação a docência (PIBID) obtive mais algumas experiências no Ensino Médio na sala de aula e identifiquei que muitas das dificuldades desses estudantes remetem ao que alguns professores chamam de *base*. Desse modo, o interesse em pesquisar os tipos de erros cometidos por alunos sobre o conjunto dos números reais.

Essa análise de erros cometidos por alunos pode subsidiar o trabalho de professores na busca de práticas que auxiliem esses alunos na construção do conceito desse conjunto.

Na delimitação da investigação, verificamos que vários pesquisadores como David e Moreira (2010) e Penteado (2004) em pesquisas anteriores com essa temática apresentam como resultado algumas dificuldades de alunos e professores da Educação Básica na

compreensão de propriedades do conjunto dos números reais, principalmente nas discussões e operações com o conjunto dos Números Irracionais.

Dessa maneira, o problema central de nossa pesquisa pode ser apresentado da seguinte forma:

Quais os tipos de erros cometidos sobre o conjunto de Números Reais por estudantes de 3º ano do Ensino Médio e por estudantes da Licenciatura em Matemática?

Nesse sentido elegemos como objetivo geral para essa investigação *analisar os tipos de erros sobre o conceito de números reais em um grupo de estudantes do ensino médio e um grupo de licenciandos em matemática.*

Para isso elegemos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar os erros cometidos nas questões de números reais nos diferentes grupos;
- Categorizar os tipos de erros cometidos entre os diferentes grupos da pesquisa.
- Verificar os tipos de representação numérica utilizada entre os diferentes grupos.

Esse trabalho está estruturado em seis capítulos. O Capítulo 1 apresenta a justificativa da temática, o problema e os objetivos da pesquisa.

O próximo capítulo apresentará preliminarmente aspectos da história dos números reais, tratando de alguns personagens que participaram do surgimento deste conjunto.

Há, no terceiro capítulo, pesquisas sobre os números reais, com abordagem no ensino básico que pode ser visto no trabalho Bartolomeu (2010), na formação de professores, nas pesquisas de Penteado (2004), Dias (2002), Cezar (2011) e nos livros didáticos descrito no trabalho de Souto (2010) além dos documentos oficiais norteadores da Educação Básica.

O quarto capítulo, apresenta os procedimentos metodológicos, delimitando o campo de pesquisa, a construção do instrumento de coleta e os objetivos de cada pergunta. Já o quinto capítulo apresentamos a análise e discussão dos resultados. Nas considerações finais trazemos o resultado da pesquisa e perspectivas para novos estudos sobre a temática e ainda sugestões para abordagem desse conteúdo em sala de aula.

2 PERSPECTIVA HISTÓRICA DOS NÚMEROS REAIS

Os matemáticos gregos tratavam a questão da medida usando o conceito de grandezas comensuráveis.

Azevedo e Paterlini (2004) definem a comensurabilidade entre dois segmentos se estes segmentos são múltiplos de um segmento comum. Desse modo, para medir um segmento de reta $\overline{AB}$, usando como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$ como mostra a figura 1. Basta verificarmos quantas vezes o segmento $\overline{CD}$ cabe no segmento $\overline{AB}$ e constatar que $\overline{AB} = 5\overline{CD}$ ou $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 5$.

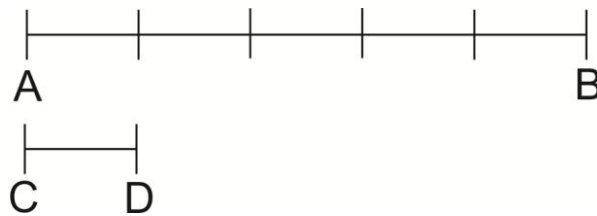


Figura 1- Segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

Se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, temos que $\overline{AB} = x\overline{EF}$ e $\overline{CD} = y\overline{EF}$ e podemos representar a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{x\overline{EF}}{y\overline{EF}} = \frac{x}{y}$. Dessa forma, podemos perceber que a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ não depende da unidade $\overline{EF}$ escolhida.

A partir dessa noção de comensurabilidade surge uma compreensão dos números racionais, este conjunto que segundo Eves (2004, p. 104) “é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações.”

Em Crotona, uma colônia grega situada na Itália, Pitágoras de Samos(?572a.C – 500a.C?), fundou uma instituição chamada escola pitagórica. “A concepção dos pitagóricos sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e essa explicação é dada pelos números.” (ROQUE, 2012, p. 104).

Contudo acredita-se ainda que Pitágoras não existiu e “a escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras.” (ROQUE, 2012, p. 103).

Porém, os pitagóricos descobriram algo surpreendente e perturbador, que existiam grandezas não comensuráveis. Conforme Eves (2004, p. 106) isso “deferiu um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros.” Além disso,

parecia contrário ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional.

A descoberta dos incomensuráveis¹ para os pitagóricos ocorreu de acordo com Contador (2008, p. 101) “quando o triângulo retângulo, cujos catetos são iguais a 1, gerou uma hipotenusa igual a $\sqrt{2}$, apareceu um profundo descontentamento entre eles, pois a representação geométrica dos números deveria transmitir harmonia e felicidade aos pitagóricos, e esta estranha diagonal podia ser traçada, mas não podia ser medida.”

Devido ao misticismo que predominava entre os pitagóricos, a descoberta de um número como $\sqrt{2}$ foi guardada em segredo, e passaram a chamá-lo de *arrhetos* ou invisível. Diz-se que Hipasos, discípulo de Pitágoras, revelou o escândalo e então foi morto. Outros que também se arriscaram nesta revelação pareceram em um naufrágio, pois era necessário esconder o indivisível e a sua forma. Enfim, a descoberta de uma diagonal que podia ser traçada, mas não podia ser medida, desfez a relação da Aritmética com a Geometria, e o universo das formas numéricas ficou em jogo para os pitagóricos.(CONTADOR, 2008, p. 103).

Por volta de 370 a.C., um matemático grego chamado Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C) resolveu o problema da incomensurabilidade usando a Teoria das Proporções que diz-se “grandezas estão na mesma razão, a primeira para segunda e a terceira para a quarta quando, tornando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerado em ordem correspondente.”EVES(2004, p. 173).Ou seja, duas grandezas podem ser comparadas quando um múltiplo de cada uma delas for maior do que a outra.

A teoria das proporções eudoxiana foi fundamental para posteriormente Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) construir uma rigorosa teoria para os números reais. Dedekind percebeu que a definição de Eudoxo associa a cada razão A/B um par de classes de frações A_1 e A_2 que ele chama de corte e utiliza para definir número real(GAZZONI e BURRIOL, 2001, p.88).

De acordo com Boyer (1996) Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de números apenas. Como Hugues Charles Robert Méray (1835-1911), ele também viu que para fazer isso era necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente do conceito de limite, para isso

¹Dois segmentos se dizem incomensuráveis se não forem comensuráveis (Azevedo e Paterlini, 2004).

decidiu a questão da existência de um limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como o número ou limite.(BOYER, 1996, p. 390).

Segundo Boyer (1996) sobre o conceito de limite Dedekind concluiu que, deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Refletiu sobre a questão, “o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais,” pergunta que deu nome ao seu livro. Percebeu ainda que “o domínio dos números racionais podia ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais, supusermos o que agora se chama o axioma de Cantor – Dedekind”(BOYER , 1996, p. 190).

Ainda no desenvolvimento do conceito de *continuum* Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), segundo Cobianchie Dias(2004) definiu infinitésimo como [...] uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), seus primeiros trabalhos estão relacionados com os números, tinha interesse em estabelecer fundamentos para o *continuum* dos números reais. Segundo Tangerino (2011, p.33) “Cantorem 1878 apresenta regra para construir classe não enumerável de números reais.”

Sendo assim, podemos perceber que transcorreram mais de 2000 anos até a construção do conjunto dos números reais que teve ao longo da história diferentes personagens matemáticos, uma construção assim pode ser considerada nas discussões sobre o ensino e aprendizagem nas salas de aula e isso se intensifica pela importância do conjunto para solucionar problemas relacionados a medidas, funções, limites e outras propriedades.

A seguir abordaremos aspectos relacionados a orientações curriculares e pesquisas sobre essa temática.

3 O QUE DIZEM AS PESQUISAS SOBRE NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais é um conceito que perpassa o currículo da Educação Básica ao Ensino Superior, especificamente no Curso de Matemática – Licenciatura. Neste momento, considerando que o tema dessa pesquisa relaciona-se com o conhecimento do conceito do conjunto dos números reais na educação básica e ensino superior, foi realizada uma análise e investigação de trabalhos desenvolvidos na área de educação acerca deste tema.

3.1 Na Educação Básica

Os números reais são de fundamental importância para matemática inicial dos estudantes, visto que este conteúdo é a base para a compreensão de diferentes conceitos, como por exemplo, função, limite, entre outros.

Esse conjunto numérico é mais utilizado cotidiano, seja para leitura de um gráfico, ou mesmo, na realização de uma medição, no entanto o conjunto dos números irracionais não aparece com tanta frequência.

Nesse sentido, Bartolomeu (2010) em sua pesquisa identificou os conhecimentos e dificuldades de um grupo de estudantes do ensino médio relacionado ao conjunto dos números reais.

Para obtenção dos dados aplicou um questionário composto com doze questões de múltipla escolha e três questões abertas. Os sujeitos da pesquisa foram 54 estudantes do ensino médio da rede pública estadual de São Paulo.

O autor obteve como resultado que os alunos têm pouco conhecimento para reconhecer diferentes representações e significados de número racional, relacionar conjuntos numéricos, localizar na reta numérica um número irracional apresentado na forma de radical e na relação da geometria com a aritmética.

Analisando os resultados obtidos por Bartolomeu (2010) podemos perceber que a dificuldade de localizar números na reta está relacionado com problema de ordenação.

Ripoll, Ripoll, Silveira (2011, p.258) com relação à ordenação, definem que “ordenamos os números quando dado x e y números reais absolutos, escrevemos $x < y$, ou $y > x$, e dizemos que ‘ x é menor do que y ’ ou que ‘ y é maior do que x ’, quando e só quando valerm:

- $x \neq y$;
- e, ademais, sendo eles representados por

$$x = m, a_1 a_2 \dots$$

$$y = M, b_1 b_2 \dots,$$

tivermos: ou $(m < M$ ou $m = M$, mas $a_n < b_n$, onde n é o primeiro índice i tal que $a_i \neq b_i$).

Por exemplo, temos que $2,5 > 2,444\ 444\dots$, pois $m = M = 2$, mas $a_1 = 5 > 4 = b_1$.

3.2 Na Formação dos Professores

O ensino e aprendizagem de matemática têm como principais participantes o professor e o estudante, sendo o professor o responsável pela organização da sala de aula e a gestão e escolha das atividades de ensino, assumindo o papel de mediador do conhecimento. Para que consiga realizar esse papel é necessário que os professores dominem os conceitos e propriedades, a fim de auxiliar os alunos na compreensão do conjunto dos números reais. Nesta perspectiva, Cezar(2011) investigou como o professor de Matemática tem conceituado e desenvolvido o conceito de números reais no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

Para isso realizou uma pesquisa com uma amostra de 25 professores de Matemática da rede pública do município de Nova Venécia do Estado do Espírito Santo. O instrumento da pesquisa foi um questionário constituído de duas partes. A primeira identificando o perfil dos profissionais da pesquisa. A segunda, contendo 10 questões relacionadas sobre números reais, seus conceitos, definições, construções e aplicações. Das questões nove foram dissertativas e uma questão objetiva com justificativa, todas possibilitando reflexões.

A pesquisadora verificou que não há inclusão de tópicos sobre a construção dos números reais nos livros didáticos do Ensino Básico e ainda, que uma grande quantidade de profissionais não possui conhecimentos relativos á construção deste conjunto.

Brousseau (1983), citado por Cezar (2011, p.20) nas suas investigações, indica alguns obstáculos relativos ao processo de ensino e aprendizagem de números reais: 1.dificuldade de determinar um número decimal entre dois outros, renunciando a existência de mais casas decimais (por exemplo, o aluno afirma que 2,35 é o sucessor de 2,34); além da dificuldade de aceitar e compreender as diferentes formas de escrever os decimais (por exemplo, 0, 999... e 1).

Já Dias (2002) investigou conceito imagem e conceito definição relacionado às propriedades da reta real e, particularmente, à noção de densidade.

De acordo com Caraça (1951, p.56) a propriedade densidade define que “entre dois elementos quaisquer de um conjunto, exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto.” Nesse sentido indica que o conjunto dos números reais, diz-se um conjunto denso.

Os sujeitos da pesquisa foram 45 professores de matemática do ensino fundamental e médio de São Paulo, e em formação continuada. Para obtenção dos dados foi utilizado questionários, divididos em três partes.

A primeira parte, as questões foram relacionadas com o conceito de densidade da reta. Já a segunda parte, constitui-se de três questões dissertativas para compor as informações sobre dificuldades encontradas nas questões da primeira parte, experiências possíveis de compor o conceito imagem e reflexões sobre os conceitos envolvidos. A terceira e última parte as questões foram com o intuito de criar um perfil dos participantes da pesquisa.

Como resultado da pesquisa constatou a ausência de conceito definição relacionado com o nome densidade, além disso, a identificação de números com uma aproximação pode interferir em uma elaboração de um conceito imagem incoerente com o conceito formal de densidade. A pesquisadora mostrou a importância dos conceitos imagem e definição evocados de densidade, para o processo de ensino e aprendizagem dos números reais.

Penteado (2004) investigou a concepção e a reação dos professores do ensino médio frente aos diferentes registros de representação de números, quando analisada a propriedade da densidade, tanto a do conjunto dos números racionais nos reais quanto dos irracionais nos reais. O público alvo foi um grupo de professores do ensino médio da rede pública do estado de São Paulo, a escolha foi feita pelo fato do professor ser o agente do processo ensino e aprendizagem que tem influência sobre um grande número de alunos.

A pesquisa foi realizada em torno de dois questionamentos: que concepções são explicitadas por professores do ensino médio a respeito da densidade do conjunto dos números reais? E como eles reagem frente a questões que discutem o conceito de densidade enfocando diferentes registros de representação? A questão da densidade foi tomada tanto entre a relação do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais, quanto à dos irracionais nos reais.

A pesquisadora fundamentou-se na teoria de registros de representação semiótica de Duval e metodologicamente nos princípios da engenharia didática, para realizar as intervenções de uma sequência de ensino composta por dez atividades.

Em suas conclusões, constatou que os sujeitos associam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação, aproveitando todas essas ocasiões para discutir a questão da representação decimal infinita dos números reais. Alguns participantes da pesquisa

ainda associaram o registro de representação decimal infinito, ou o sinal de reticências, com o número irracional.

Observamos nessas pesquisas diferentes focos sobre a mesma temática. Cezar (2010) e Penteado (2004) observaram conhecimentos frente ao conceito de números reais, que é o foco da nossa pesquisa sendo que com alunos do Ensino Médio e Matemática-Licenciatura. Enquanto que Dias (2002) investigou conceito imagem e conceito definição relacionado às propriedades da reta real, que também será abordado, relacionando com ordenação.

Analisando estas pesquisas, o estudo de Penteado (2004) com professores obteve como um dos resultados a dificuldade na representação dos números reais, isso é semelhante ao que podemos constatar no estudo de Bartolomeu (2010) com estudantes, mostrando que representação é um a dificuldade comum entre alunos e professores.

3.3 No Livro Didático e Documentos Curriculares Oficiais

O livro didático é um dos principais materiais utilizados pelo professor para compor suas aulas. Sendo assim ele tem uma grande importância ao trabalharmos com o conceito, pois poderemos perceber se as definições dadas pelos alunos estão ou não próximas as trazidas pelos livros. Nesta perspectiva Souto (2010) investigou os conceitos de números irracionais e reais em nove livros didáticos do ensino fundamental e cinco livros didáticos do ensino médio selecionados naqueles aprovados pelo ministério da educação, Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional do livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).

O objetivo da pesquisa foi averiguar como o conceito número irracional/real é organizado nos livros didáticos da educação básica no Brasil. Como resultado o pesquisador obteve que a maioria dos livros analisados buscou problematizar a existência de um novo tipo de conjunto numérico exibindo exemplos de números que não são racionais, o número escolhidos é normalmente a raiz quadrada de dois, problematizando com a diagonal do quadrado.

Além disso, as propriedades citadas nos livros envolvem fundamentalmente as operações fechamento, relações de operações entre racionais e irracionais e a localização de pontos na reta, utilizando exemplos para ilustrar as propriedades. Trás ainda registros figural, simbólico-numérico, simbólico algébrico e de linguagem natural e alguma abordagem histórica.

Além das pesquisas trazerem informações sobre a temática, nos embasamos também nos documentos oficiais norteadores da Educação Básica.

De acordo com o PCN Ensino Médio (BRASIL, p.44)

O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos. [...] Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Já o PCN + Ensino Médio (BRASIL, p.122) trás que

Ainda neste tema, é possível alargar e aprofundar o conhecimento dos alunos sobre números e operações, mas não isoladamente dos outros conceitos, isto é, pode-se tratar os números decimais e fracionários, mas mantendo de perto a relação estreita com problemas que envolvem medições, cálculos aproximados, porcentagens, assim como os números irracionais devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas. É ainda importante para o aluno, nessa etapa de sua formação, o desenvolvimento da capacidade de estimativa da ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e da capacidade de tratar com valores numéricos exatos ou aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

Ao abordamos os números reais em sala de aula devemos evitar limitá-los apenas a propriedades e radicais. Nos PCN encontra-se, que o importante é o aluno compreender o conceito a fim de aplicá-lo no dia a dia, dentre as formas de aplicação ressalta-se as a utilização nas medições.

Já as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.71) norteiam

que os professores precisam propiciar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir. Com isso os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida.

De acordo com os Parâmetros para a Educação Básica no Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p.136)

é importante que os estudantes percebam que os números se agrupam em diferentes conjuntos numéricos. Com isso, eles devem também perceber que algumas propriedades válidas em determinado conjunto numérico já não valem para outros conjuntos. É também nessa etapa que a construção dos números irracionais adquire sentido, encerrando-se com a construção dos números reais.

Como podemos perceber tanto as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, quanto os Parâmetros para a Educação Básica no Estado de Pernambuco frisam a necessidade da compreensão pelos alunos dos conjuntos numéricos, dando enfoque no conjunto dos números naturais para contar, conjunto dos números reais para medir e o conjunto dos números irracionais para resolver alguns problemas matemáticos, sendo este conteúdo conjunto dos números reais de importante para a educação básica.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho é uma pesquisa que tem o objetivo investigar que conhecimentos sobre conceitos dos números reais compreendidos por alunos do Ensino Médio e estudantes de licenciatura em Matemática.

Os participantes da pesquisa foram 27 estudantes do 3º Ano do Ensino Médio de uma Escola Pública do município de Caruaru e 18 alunos de 5º período do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE-CAA.

A escolha do 3º Ano se justifica por ser o final da Educação Básica na qual os alunos já vivenciaram toda a discussão da Escola sobre esses conceitos. No caso de selecionarmos o 5º período do curso de Licenciatura em Matemática, pois se configura como o início do ciclo profissional do curso de Licenciatura em Matemática no qual por meio da disciplina Metodologia do Ensino de Matemática 1, cuja ementa enfoca a discussão sobre o ensino e aprendizagem de números e operações.

Os estudantes que participaram da pesquisa seus questionários foram numerados, sendo que os estudantes do ensino médio os números variaram de 1 a 27 e os estudantes do ensino superior os números variaram de 28 a 45.

Para o instrumento de coleta, foi elaborado um questionário, contendo seis questões comuns com acréscimo de duas questões com relação a dificuldades que os alunos da Educação Básica poderiam ter com o conteúdo apenas para os estudantes de licenciatura. Para a realização desta pesquisa foi assegurado que os resultados não seriam divulgados sem a permissão dos participantes.

Foi realizado um pré-teste do questionário a fim de verificar a eficácia do instrumento de coleta de dados, o que possibilitou a adequação da linguagem e do tempo para a reformulação do questionário final. As questões e seus respectivos objetivos estão descritos e comentados a seguir.

4.1 Apresentação dos Questionamentos Comuns

4.1.1 *Objetivos da Questão 1*

O que são números racionais? Dê 4 exemplos.

O objetivo da questão 1 é analisar como os estudantes conceituam/definem o conjunto dos números racionais, se apenas como números fracionários ou recordam que as dízimas

periódicas também fazem parte deste conjunto. Além de averiguar quais os exemplos mais citados.

4.1.2 *Objetivos da Questão2*

O que são números irracionais? Dê 4 exemplos.

O objetivo da questão 2 é analisar como os estudantes conceituam/definem o conjunto dos números irracionais, se associam a infinitude, neste caso as dízimas periódicas também seriam irracionais, ou a ideia de que o número não seja possível escrevê-lo na forma de fração. Além de averiguar quais os exemplos mais citados.

4.1.3 *Objetivos da Questão3*

O que são números reais? Dê 4 exemplos.

O objetivo da questão 3 é analisar como os estudantes conceituam/definem o conjunto dos números reais se o definem como a união dos racionais com os irracionais ou mesmo relacionam com a reta numérica. Além de averiguar quais os exemplos mais citados.

4.1.4 *Objetivos da Questão4*

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

O objetivo da questão 4 é analisar como os estudantes ordenam as frações, se vão transformar em decimais para construir a sequência correta, ordenar os numeradores ou denominadores.

4.1.5 *Objetivos da Questão5*

Represente na reta real os números $A = \sqrt{5}$; $B = 5$; $C = \pi$; $D = -2,8$;
 $E = -\frac{3}{4}$; $F = -\sqrt{2}$; $G = 1,272272227\dots$; $H = -0,5$; $I = -1$; e $J = 0,3333\dots$

O objetivo da questão 5 é analisar como os estudantes ordenam os números na reta numérica, além de abordar o conceito de densidade do conjunto dos números reais.

4.1.6 Objetivos da Questão 6

Dentre os números abaixo identifique os números irracionais por (I) e os números racionais por (R).

- | | |
|---|--|
| ☐ -6 | ☐ -1,5 |
| ☐ -2,171171117... | ☐ 0 |
| ☐ $\frac{-2}{3}$ | ☐ 1,734999999... |
| ☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | ☐ $\sqrt{7}$ |
| ☐ $\sqrt{9}$ | ☐ 2,010010001234... |

O objetivo da questão 6 é analisar como os estudantes reconhecem diferentes representações de números irracionais e racionais, se relacionam as dízimas periódicas como números racionais, ou levam em conta a infinitude e as reconhecem como números irracionais.

4.2 Questionamentos Exclusivos da Licenciatura

4.2.1 Objetivos da Questão 7

Que dificuldades você considera que os estudantes do ensino médio possam ter com relação ao conteúdo de números apresentados?

O objetivo da questão 7 é identificar quais dificuldades que o futuro professor de matemática considera que o seus alunos possam ter com relação aos reais.

4.2.2 Objetivos da Questão 8

Como o professor, como você poderia amenizar esta dificuldade?

Objetivo da questão 8 é compreender quais as soluções dadas pelos futuros professores para as dificuldades dos alunos na compreensão dos números reais.

Para análise foi utilizado software SPSS (*Software Statistical Package for the Social Sciences*). Utilizamos a análise descritiva nas quais foram discutidas diferentes variáveis com relação aos tipos de erros, as diferentes representações dos números reais e as definições desse conceito.

A seguir apresentaremos a análise e discussão dos resultados.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para elaboração de um perfil dos estudantes foi aplicado um pequeno questionário aos alunos do 3º ano (APÊNDICE A) e Licenciatura (APÊNDICE B).

Esse questionário sobre o perfil perguntava a idade, sobre o tipo de escola que frequentaram no ensino fundamental e Médio, a utilização do livro didático pelo professor, e período de ausência de professor de Matemática durante o Ensino Médio.

Os alunos do 3º ano do Ensino Médio que participaram da pesquisa foram em sua maioria estudantes com idade entre 17 e 19 anos. De todos os 27 alunos que responderam a pesquisa apenas 3 estudaram em escolar particular durante o Ensino Fundamental. Quando questionados se o professor utilizava e seguia o livro didático todos os alunos responderam negativamente. Com relação à ausência de professor durante algum período letivo, 12 estudantes responderam que sim e a média de tempo foi de 2 meses.

Dezoito estudantes da licenciatura contribuíram para a pesquisa. A faixa etária dos estudantes varia de 19 e 22 anos, dos quais apenas 3 estudaram em escola particular. Dos estudantes 11 (61,1%) se encontra no quinto período, também estavam presentes na sala durante a aplicação do questionário estudantes do 6º, 7º e 9º período. Quando questionamos os licenciandos sobre qual a disciplina que aborda o conteúdo de números reais no curso, a maioria dos estudantes respondeu matemática básica.

5.1 Análise dos Questionamentos Comuns

5.1.1 Análise da Questão 1

Nesta questão era solicitada a definição de números racionais. Tomamos como resposta correta da questão 1 o que segue no recorte abaixo.

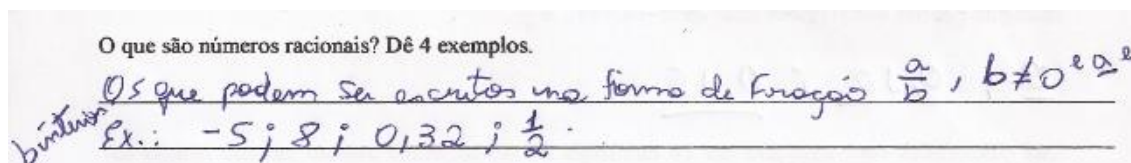
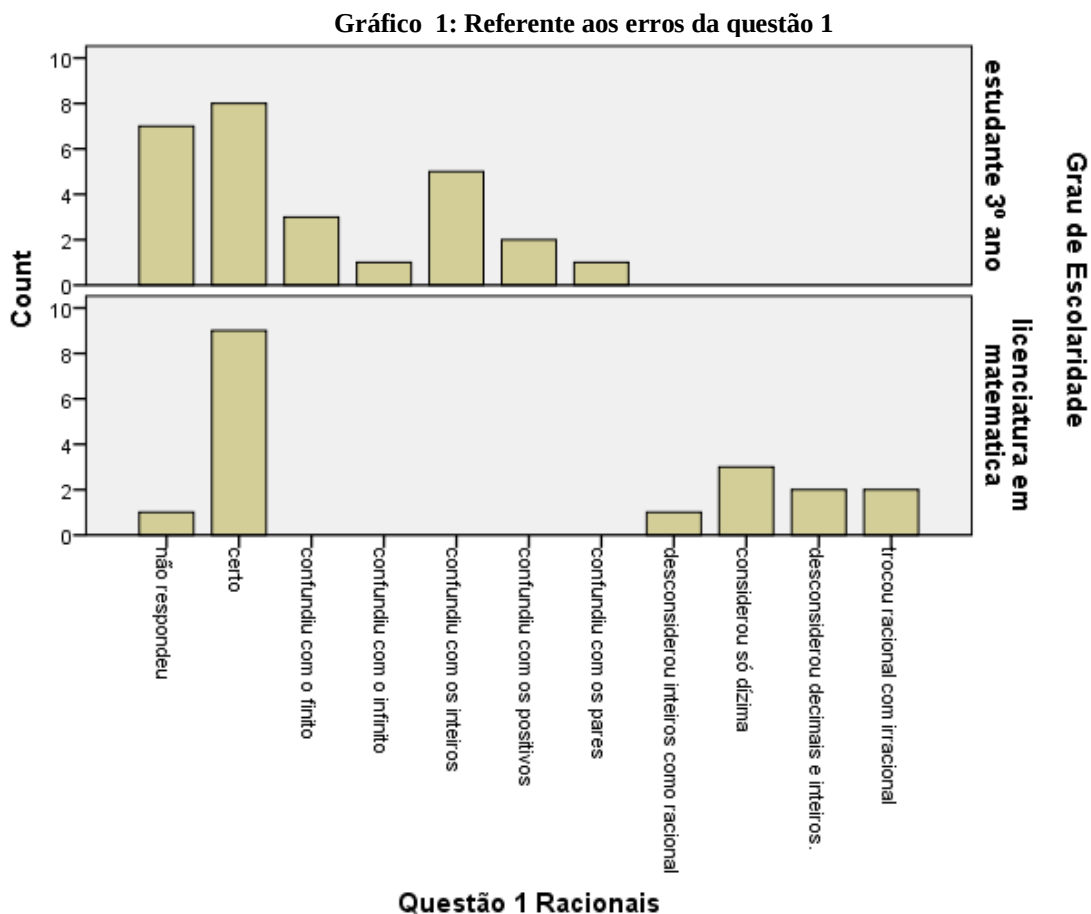


Figura 2: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 41 licenciatura

Analisando o número de acertos da questão 1 constatamos que apenas 8 (29,63%) dos estudantes do ensino médio e 9 (50%) dos estudantes da licenciatura acertaram esta questão. Nesse caso, percebemos que não houve uma diferença significativa entre os acertos dos dois grupos pesquisados.



No gráfico 1, destacamos a quantidade de erros por grau de escolaridade. Observamos que alguns erros são exclusivos da licenciatura e outros do 3º ano. Como podemos perceber confundir o conjunto dos racionais com o finito, infinito, positivos, pares e inteiros foram os erros encontrados no 3º ano. Já desconsiderar os inteiros e decimais como pertencente aos racionais, considerar só dízima periódica e trocar racional por irracional é único da licenciatura. Podemos visualizar também o grande número de questões em branco em alunos de Ensino Médio no total de 7 alunos (25,9%).

Fazendo uma apreciação dos erros classificamos em 8 tipos que serão apresentados e exemplificados a seguir.

- **Erro 1:** Alunos que definiram o conjunto dos racionais levando em consideração apenas a ideia de números finitos, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 3 (11%) alunos cometeram esse erro.

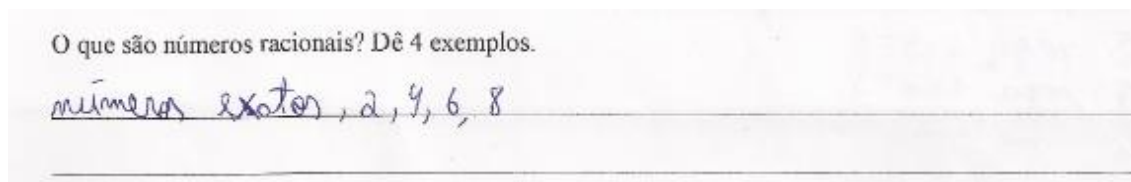


Figura 3: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 3 ensino médio

- **Erro 2:** Alunos que definiram o conjunto dos racionais com base no infinito, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

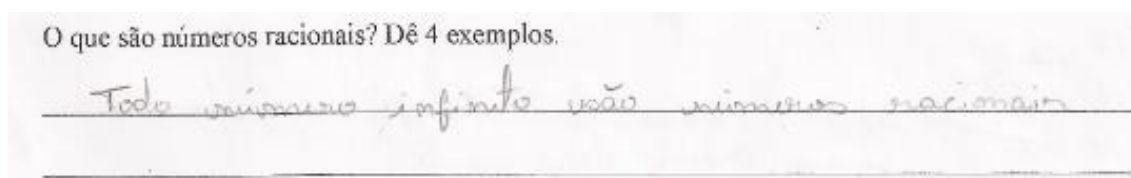


Figura 4: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 1 ensino médio

- **Erro 3:** Estudantes que restringiram o conjunto dos racionais apenas ao conjunto dos inteiros, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Temos que 5 (18,5%) alunos cometeram esse erro. Sendo este erro predominante entre os estudantes do ensino médio.

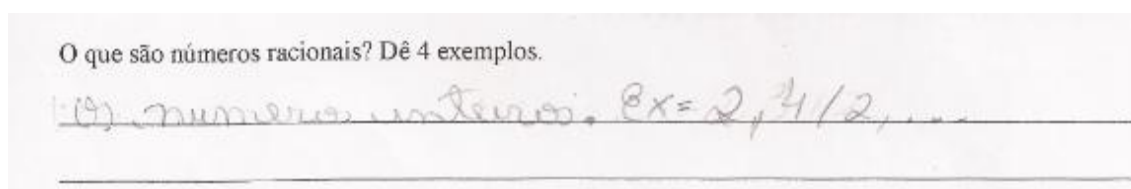


Figura 5: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 16 ensino médio

- **Erro 4:** Alunos que confundiram o conjunto dos racionais com os números positivos, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (7,4%) alunos cometeram esse erro.

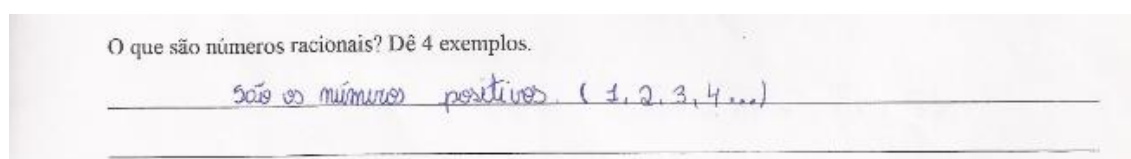


Figura 6: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 20 ensino médio

- **Erro 5:** Estudantes que confundiram o conjunto dos racionais com os números pares, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) alunos cometeu esse erro.

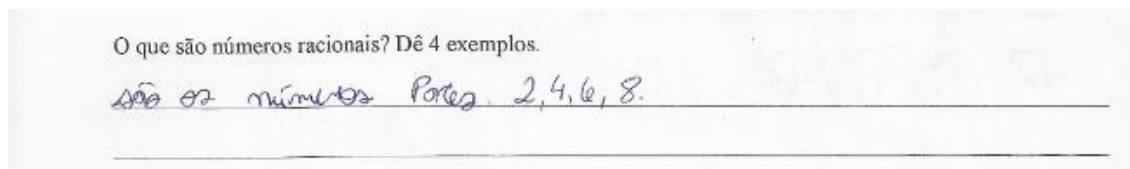


Figura 7: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 27 ensino médio

Nesses exemplos, vemos que os estudantes do Ensino Médio, apresentam diferentes ideias fracionadas do que seja o conjunto dos números racionais: a finitude, a infinitude, a paridade, as questões de números positivos e negativos são discussões necessárias na compreensão desse conjunto. Além disso, a própria diferença entre os conjuntos inteiros e racionais parece ser um ponto de discussão para o ensino e aprendizagem desse conjunto.

Com relação aos estudantes de Licenciatura observamos ainda outros tipos de erros na definição desse conjunto numérico.

- **Erro 6:** Discentes que desconsideraram os inteiros como pertencente ao conjunto dos racionais, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

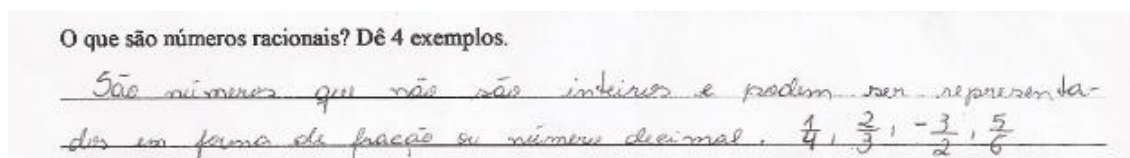


Figura 8: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 30 Licenciatura

- **Erro 7:** Alunos que consideraram apenas as dízimas periódicas como pertencente ao conjunto dos racionais, desconsiderando que os inteiros, naturais e decimais também pertencem a este conjunto, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Temos que 5 (18,5%) alunos cometeram esse erro, sendo este erro predominante entre os licenciados.

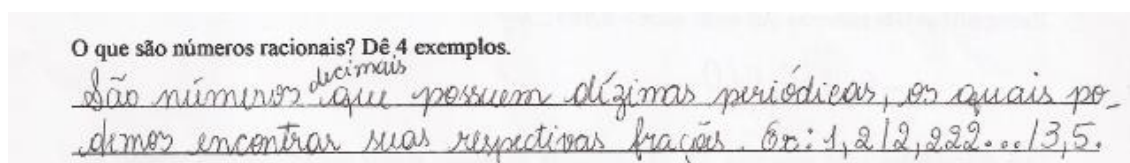


Figura 9: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 31 Licenciatura

- **Erro 8:** Estudantes que trocaram o conjunto racional pelo irracional, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (7,4%) alunos cometeram esse erro.

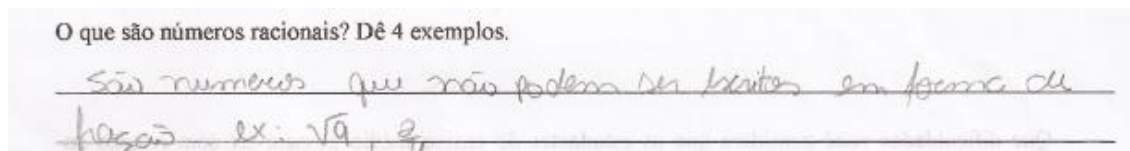


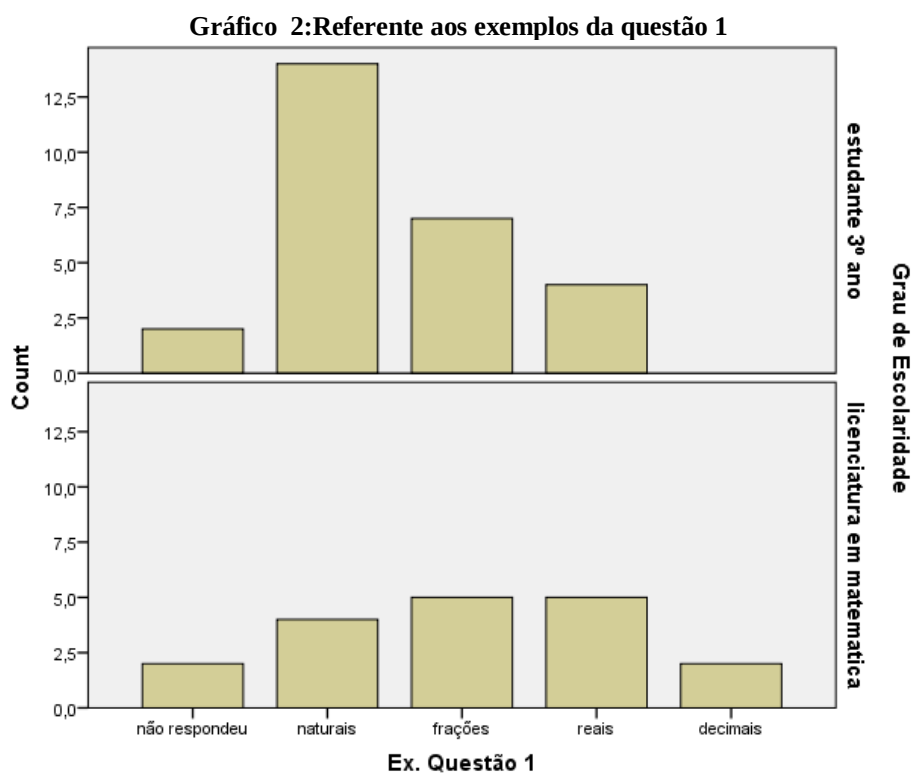
Figura 10: Protocolo referente à primeira questão do sujeito 42 Licenciatura

Nesses exemplos, vemos que os licenciandos, apresentam diferentes ideias do que seja o conjunto dos números racionais: associando apenas a frações, as dízimas periódicas e a troca dos racionais pelos irracionais.

A confusão entre racionais e irracionais, encontrado em dois casos na licenciatura também foi resultado da pesquisa de Bartolomeu (2010). Os sujeitos associam a racionalidade do número com a infinitude de sua representação. Alguns participantes da pesquisa ainda associaram o registro de representação decimal infinito, ou o sinal de reticências, com o número racional.

Sobre os exemplos de números que pertencem ao conjunto dos racionais nesta questão obtivemos vários tipos e foram classificados em números naturais, fracionários, decimais e números reais. A classificação de números reais é devido a cada número do exemplo pertencer a um conjunto diferente. Por exemplo, 4, -8, $\sqrt{2}$, $\frac{9}{8}$.

Veja no gráfico 2 os exemplos citados.



Os exemplos mais citados por alunos do 3º ano foram com os números naturais, já na licenciatura obtemos um empate entre os fracionários e os reais.

5.1.2 Análise da Questão2

Nesta questão era solicitada a definição de números irracionais. Adotamos como resposta correta da questão 2 o que segue no recorte abaixo.

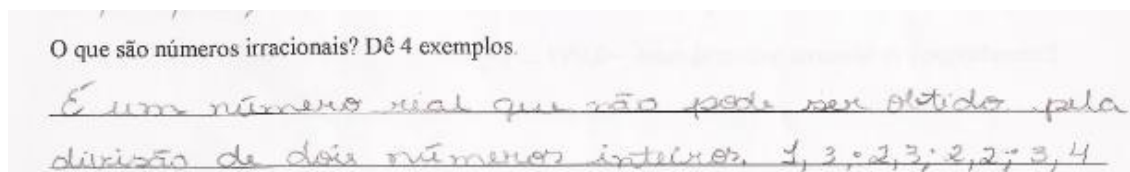
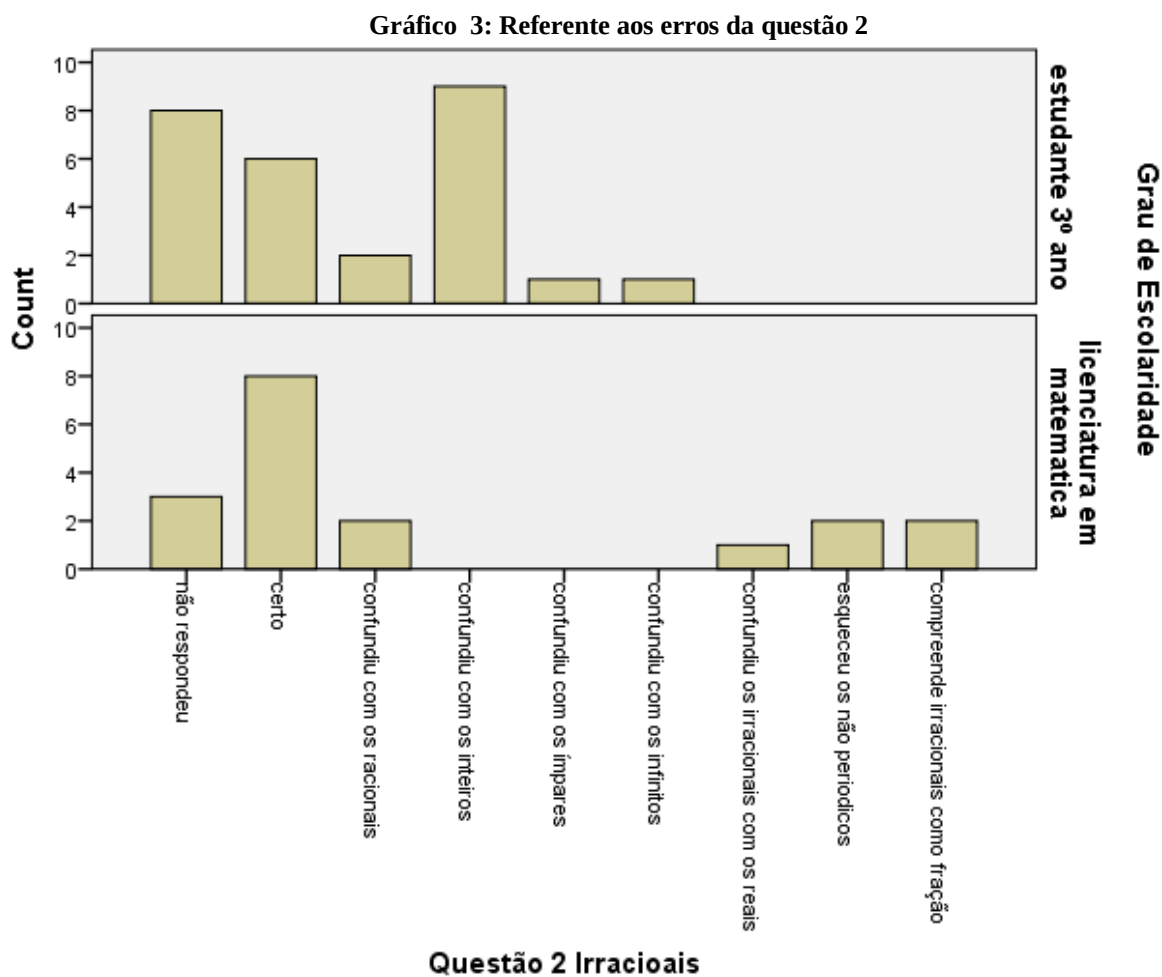


Figura 11: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 8 Ensino Médio

Analisando o número de acertos da questão 2 tivemos 6 (22,22%) de acertos no 3º ano e 8(44,44%) na matemática-licenciatura. Notemos que os acertos da licenciatura é o dobro do ensino médio, sendo assim, compreendemos que temos uma diferença significativa de acertos entre os graus de escolaridade.



No gráfico 3, destacamos a quantidade de erros por grau de escolaridade. Notemos que os erros exclusivos do 3º ano estão confusão com inteiros, que dentre os erros foi o que

predominou. Erraram ainda os ímpares e associam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação.

Já os licenciados trocaram os irracionais pelos reais. Dois estudantes (11%) da licenciatura em sua definição não ressaltou que os números não podem ser periódicos nos irracionais, e outros 2 (11%) compreendem irracional como fração.

Observamos ainda que existe apenas um erro comum ao 3º ano e a licenciatura que é a troca dos irracionais pelos racionais. Podemos visualizar também o grande número de questões em branco em alunos de Ensino Médio no total de 8 alunos (29,6%).

Fazendo uma apreciação dos erros classificamos em 7 tipos que serão apresentados e exemplificados a seguir.

- **Erro 1:** Alunos que trocaram o conjunto irracional pelo racional, pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (7,4%) alunos cometeram esse erro o ensino médio e 2 (11%) dos estudantes na licenciatura.

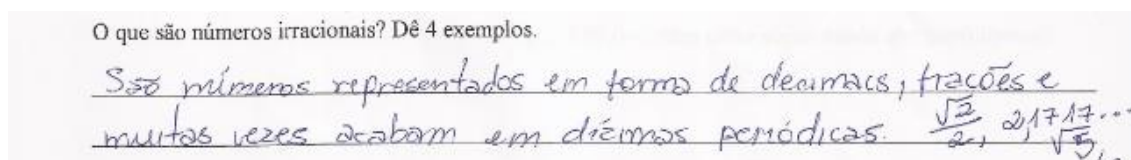


Figura 12: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 24 Ensino Médio

Esse foi o único erro comum a licenciatura e ensino médio que é a confusão em identificar o conjunto dos racionais e dos irracionais, este resultado também foi encontrado na licenciatura no estudo de Bartolomeu (2010).

- **Erro 2:** Estudantes que trocaram o conjunto dos irracionais pelos inteiros, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 9 (33,3%) alunos do ensino médio cometeram esse erro, sendo o erro predominante.

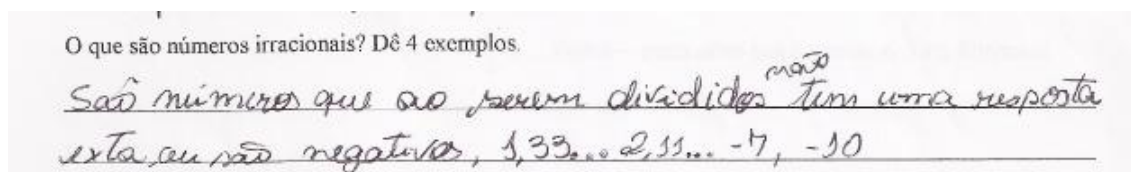


Figura 13: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 15 Ensino Médio

- **Erro 3:** Alunos que confundiram o conjunto dos irracionais com os números pares, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

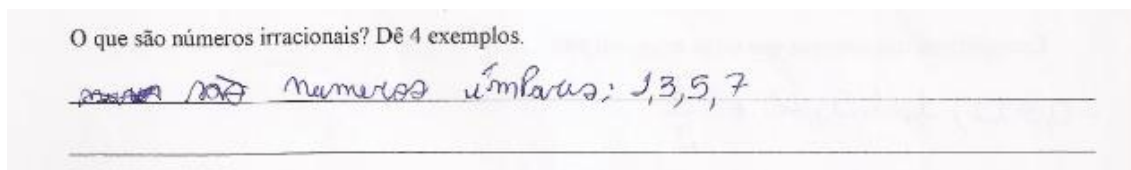


Figura 14: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 27 Ensino Médio

- **Erro 4:** Alunos que confundiram o conjunto dos irracionais com o infinito, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

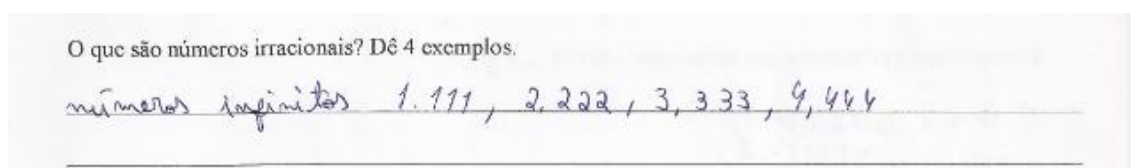


Figura 15: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 3 Ensino Médio

Nesse exemplo, vemos que os estudantes do Ensino Médio, apresentam diferentes ideias fracionadas do que seja o conjunto dos números irracionais: a infinitude, a imparidade, associa aos inteiros. A associação dos irracionais com a infinitude da representação do número foi um resultado igualmente encontrado por Penteado (2004).

Com relação aos estudantes de Licenciatura observamos ainda outros tipos de erros na definição desse conjunto numérico.

- **Erro 5:** Estudante que trocou o conjunto dos irracionais pelo conjunto dos reais, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (5,5%) aluno cometeu esse erro.

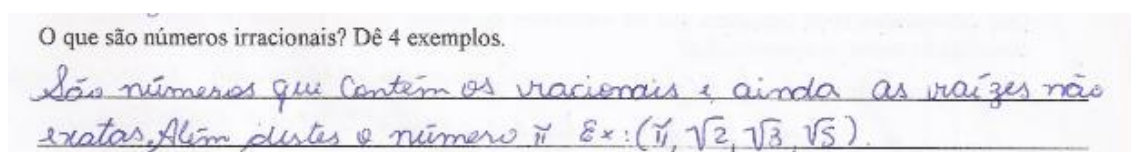


Figura 16: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 29 Licenciatura

- **Erro 6:** Alunos que desconsideraram os não periódicos, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (11%) alunos cometeram esse erro.

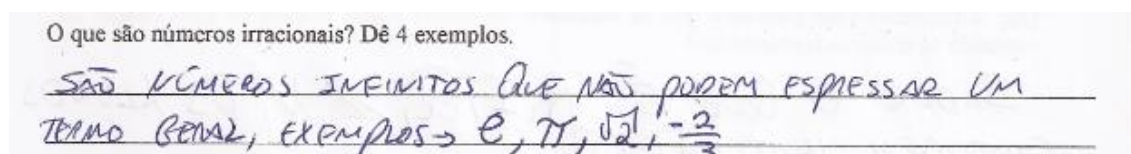


Figura 17: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 33 Licenciatura

- **Erro 7:** Discentes que compreende irracional como uma fração, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (11%) alunos cometeram esse erro.

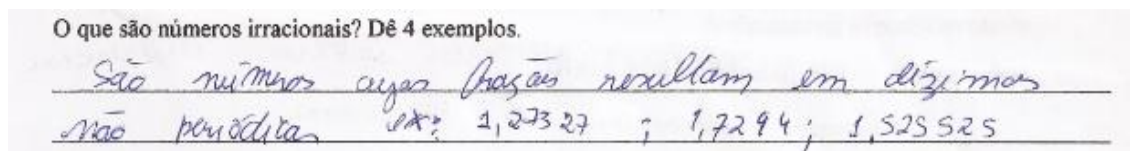
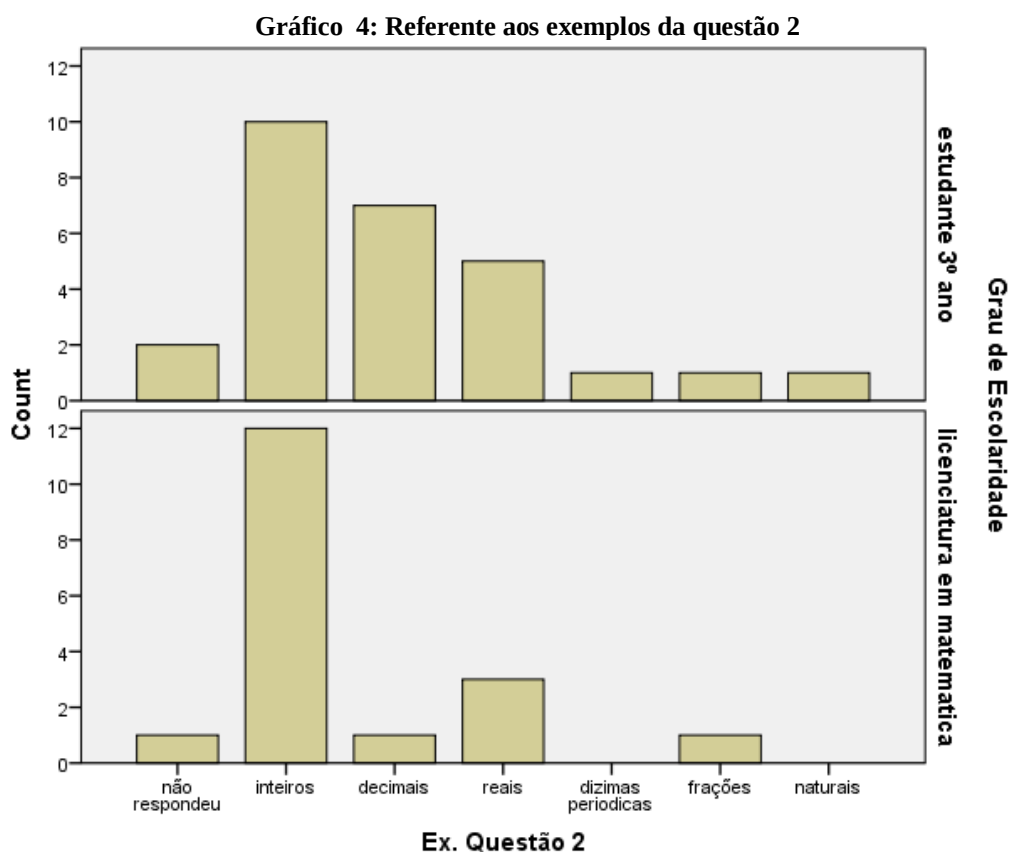


Figura 18: Protocolo referente à segunda questão do sujeito 36 Licenciatura

Nos erros 6 e 7 observamos uma aproximação com o estudo de Penteado (2004), no qual os professores associam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação.

Com relação aos exemplos desta questão, os resultados foram classificados em números inteiros, decimais, naturais, frações, dízimas periódicas e números reais.

Veja no gráfico 4 os exemplos citados.



Analisando os exemplos tanto no 3º ano como na licenciatura predominaram equivocadamente os números inteiros e em segundo lugar no 3º ano com um resultado próximo dos inteiros encontram-se os decimais.

Nesse sentido, a representação dos irracionais parece ser outro foco de formação, pois ambos os grupos identificaram os inteiros como irracionais.

5.1.3 Análise da Questão 3

A questão pedia que fossem definidos os números reais. Aceitamos como resposta correta da questão 3 o que segue no recorte abaixo.

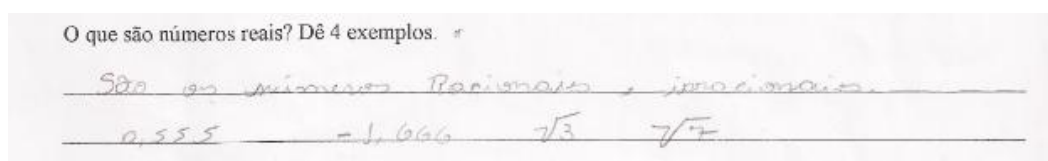
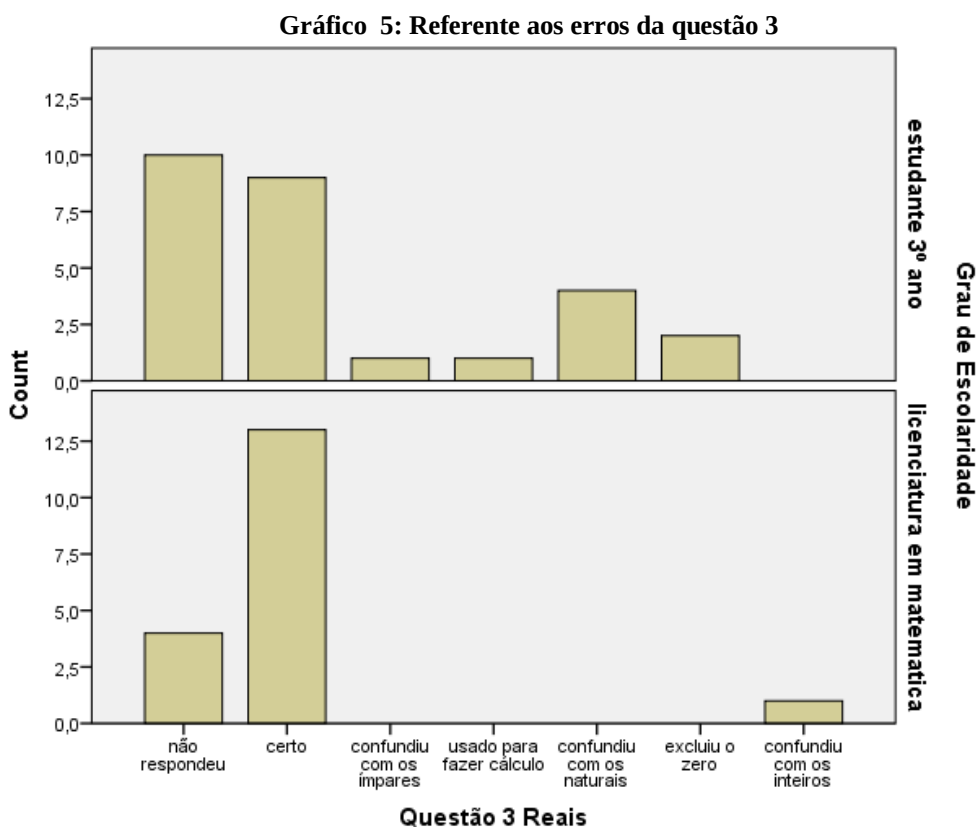


Figura 19: Protocolo referente à terceira questão do sujeito 1 Ensino Médio

Notemos que o conjunto dos números reais é definido como a união de dois conjuntos, dos números racionais e o conjunto dos números irracionais Medeiros (2010, p. 26) ou pode estar associando a todos os números da reta numérica. Examinando o número de acertos da questão 3 obtemos 9 (37,04%) no ensino médio e 13 (72,22%) na licenciatura. Como na questão anterior houve diferença significativa de acertos entre os estudantes do 3º ano e da licenciatura.



O Gráfico 5 revela que não houve erro em comum. Entre os licenciando só foi encontrado o erro da troca dos reais pelos inteiros, ou seja, confusão em identificar o que caracteriza o conjunto. Já com relação ao 3º ano houve confusão com os ímpares, naturais que foi o erro mais encontrado, além da exclusão do zero e considerar que são apenas os números para fazer cálculos. Podemos visualizar também o grande número de questões em branco em alunos de Ensino Médio no total de 10 alunos (37%).

Fazendo uma apreciação dos erros classificamos em 5 tipos que serão apresentados e exemplificados a seguir.

- **Erro 1:** Alunos que confundiram os reais com os números ímpares, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

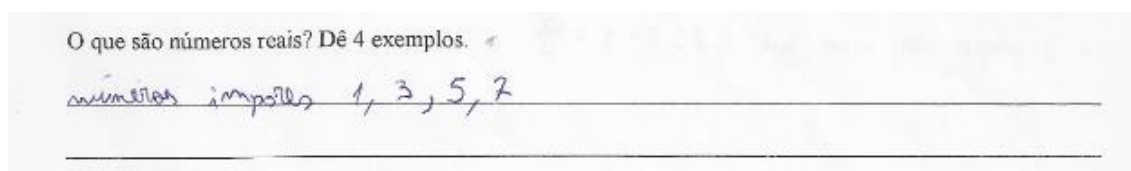


Figura 20:Protocolo referente à terceira questão do sujeito 3Ensino Médio

- **Erro 2:** Estudantes que consideraram que os reais são apenas os números usados para fazer cálculos, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

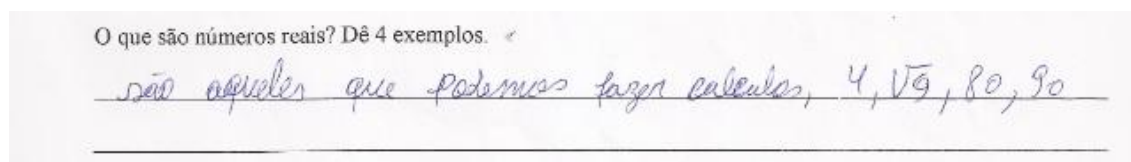


Figura 21:Protocolo referente à terceira questão do sujeito 4Ensino Médio

- **Erro 3:** Discentes que confundiram o conjunto dos reais com o dos naturais, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 4 (14,8%) alunos cometeram esse erro.

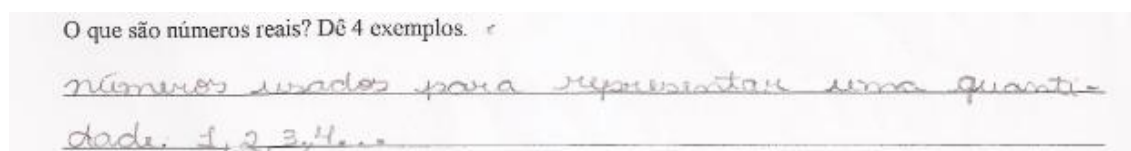


Figura 22:Protocolo referente à terceira questão do sujeito 8Ensino Médio

- **Erro 4:** Alunos que conceituaram os reais como o conjunto de todos os números com exceção do zero, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (7,4%) alunos cometeram esse erro.

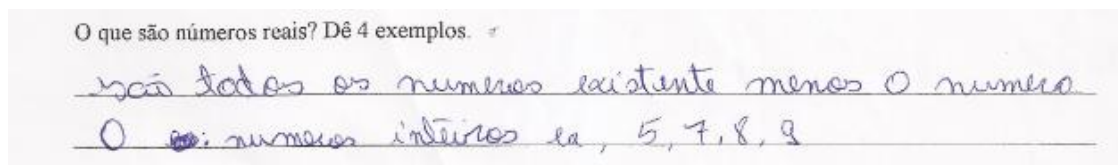


Figura 23: Protocolo referente à terceira questão do sujeito 26 Ensino Médio

Nesse exemplo, vemos que os estudantes do Ensino Médio, apresentam diferentes ideias do que seja o conjunto dos números reais: a imparidade, ou seja, associa apenas a números ímpares, a ausência do zero, ou ainda números utilizados apenas para fazer conta. Isso mostra que os alunos construíram de forma errônea a ideia de números reais. Podemos relacionar estes erros com o resultado encontrado por Cezar (2011) em sua pesquisa que a ausência de conhecimento para conceituar o conjunto dos números reais pode estar associado a não inclusão de tópicos sobre a construção dos números reais nos livros didáticos do Ensino Básico e ainda, que uma grande quantidade de profissionais não possui conhecimentos relativos à construção deste conjunto.

Com relação aos estudantes de ensino médio observamos ainda outros tipos de erro na definição desse conjunto numérico.

- **Erro 5:** Estudantes que trocou o conjunto dos reais pelo conjunto dos inteiros, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (5,5%) aluno cometeu esse erro.

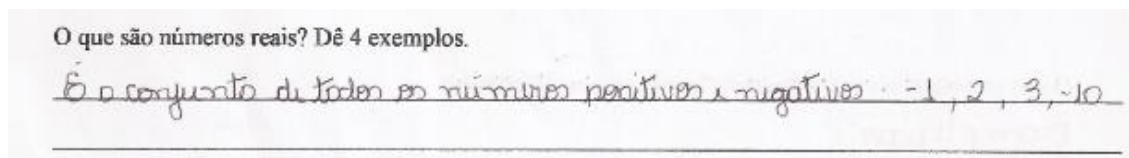
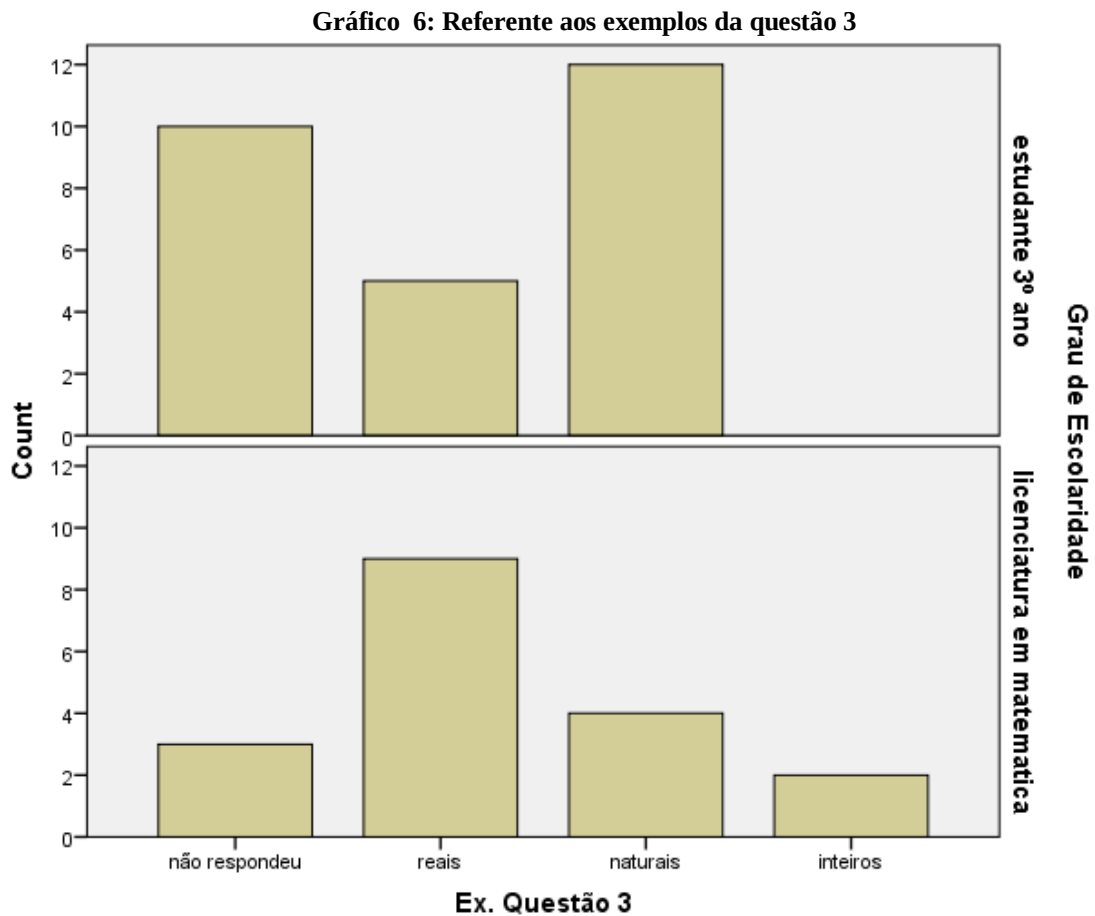


Figura 24: Protocolo referente à terceira questão do sujeito 43 Licenciatura

Como podemos perceber confundir o conjunto dos números reais com o conjunto dos números inteiros foi o único erro da licenciatura, ou seja, não conseguem caracterizar o conjunto. Esse resultado também foi encontrado na licenciatura na pesquisa de Bartolomeu (2010).

Os exemplos da questão 3 foram classificados em números inteiros, naturais e números reais.

Veja no gráfico 6 os exemplos da questão 3.



Analisando os exemplos observamos que no 3º ano a predominância foi de números naturais, já na licenciatura de números reais.

5.1.4 Análise da Questão 4

A questão pedia que fossem colocados em ordem crescente os números, de acordo com o que Ripoll, Ripoll e Silveira (2011) definem como ordem. Aceitamos como resposta correta da questão 4 o que segue no recorte abaixo.

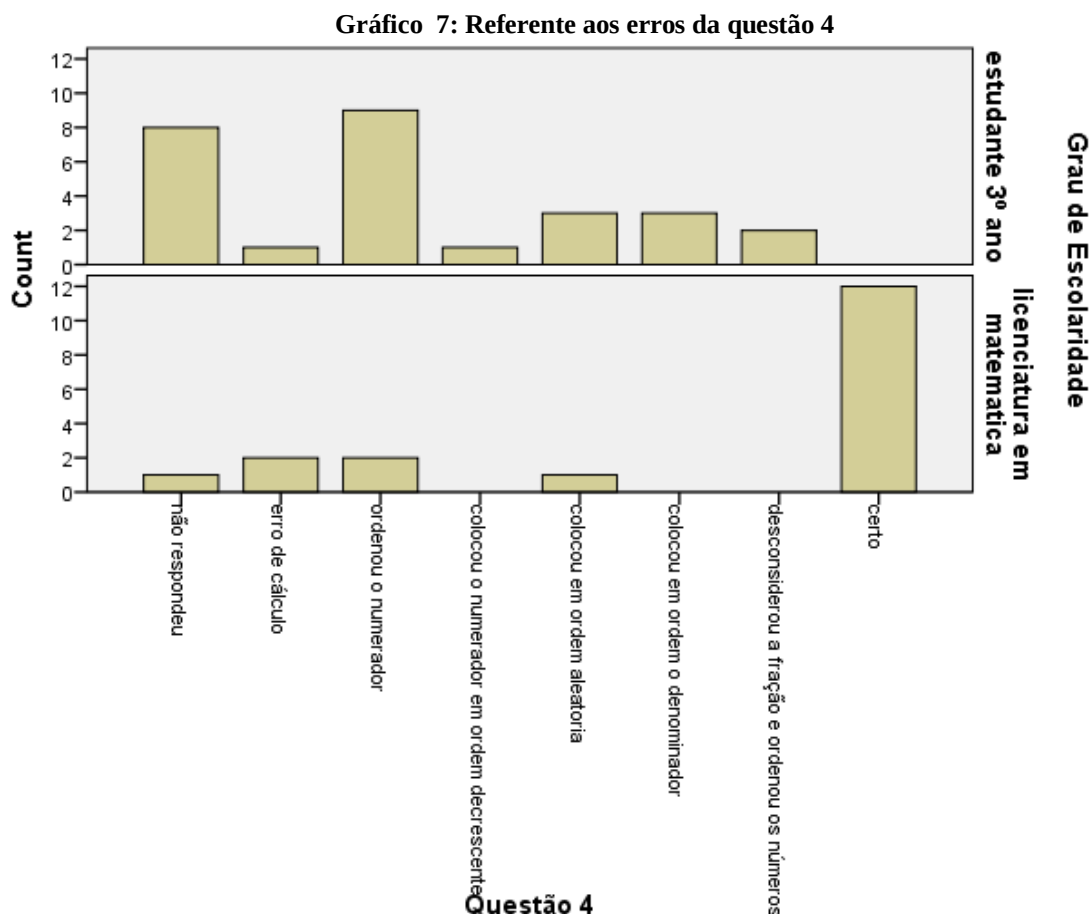
Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$\frac{6}{15}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{6}{3}$

Figura 25: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 31 Licenciatura

Analisando o percentual de acertos da questão 4 notamos que nenhum estudante do 3º ano acertou e 12(66,67%) dos licenciandos acertaram sendo um resultado significativo. Comparando o resultado desta questão com as três anteriores notamos que alguns alunos da

licenciatura não conseguem definir os conjuntos numéricos, porém sabem manipulá-los de forma satisfatória. Podemos visualizar também o grande número de questões em branco em alunos de Ensino Médio no total de 8 alunos (29,6%).



Analisando o Gráfico 7 apresenta de forma detalhada os erros da questão 4, notamos que o erro predominante entre os estudantes do 3º ano e ordenar o numerador, contudo isso ainda aconteceu em dois (11,11%) casos na licenciatura. Ainda tivemos dois erros comuns com relação à ordem aleatória e ao erro de cálculo. Além destes o 3º ano cometeu três erros, que foram colocar o denominador em ordem, em ordem decrescente e desconsiderar a fração e ordenar os números. Na licenciatura o índice de acerto foi satisfatório 12 (66,6%) dos alunos acertaram.

Fazendo uma apreciação dos erros classificamos em 6 tipos que serão apresentados e exemplificados a seguir.

- *Erro 1:* Estudantes que acertaram o local de alguns dos números, porém erraram cálculo para não ter conseguido colocar todos no lugar, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (11%) alunos cometeram esse erro na licenciatura enquanto que ocorreu 1 (3,70%) no ensino médio.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$$\frac{6}{15}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{6}{3}$$

$$0,4 - 0,5 - 0,8 - 1,33 - 1,4 - 2$$

Figura 26: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 1 Licenciatura

- **Erro 2:** Alunos que colocaram em ordem o numerador, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Temos que 9 (33,3%) alunos cometeram esse erro no ensino médio e 2 (11%) na licenciatura.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{3}, \frac{6}{15}, \frac{8}{6}, \frac{14}{10}$$

Figura 27: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 2 Licenciatura

- **Erro 3:** Estudantes que colocaram em ordem aleatória, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 3 (11,1%) alunos cometeram esse erro no ensino médio e 1 (5,5%) na licenciatura.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$$\frac{6}{15}, \frac{8}{6}, \frac{3}{6}, \frac{14}{6}, \frac{4}{8}, \frac{6}{3}$$

Figura 28: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 14 Licenciatura

Nesses exemplos, os erros comuns foram erro de cálculo, que está relacionado com a transformação das frações em decimais, ordenar o numerador, neste caso desconsidera a existência do denominador. E colocar as frações em ordem aleatória, isso provavelmente ocorreu por os sujeitos não saberem como resolver a questão.

Com relação aos estudantes de ensino médio observamos ainda outros tipos de erros na ordenação dos números.

- **Erro 4:** Discentes que colocaram o numerador em ordem decrescente, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 1 (3,70%) aluno cometeu esse erro.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$\frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{6}{15}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5}, \frac{6}{3}$

Figura 29: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 4 Licenciatura

- **Erro 5:** Alunos que colocaram em ordem o denominador, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 3 (11,1%) alunos cometeram esse erro.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

$\frac{6}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{6}, \frac{4}{8}, \frac{6}{15}, \frac{14}{16}$

Figura 30: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 15 Licenciatura

- **Erro 6:** Estudantes que desconsideraram a fração e colocaram todos os números em ordem, isso pode ser visto abaixo em um recorte do questionário de um estudante. Apenas 2 (7,4%) alunos cometeram esse erro.

Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

3, 4, 5, 6, 8, 14, 15, 16

Figura 31: Protocolo referente à quarta questão do sujeito 26 Ensino Médio

Nesses exemplos, cujos erros são exclusivos do ensino médio estão ordenar as frações de ordem decrescente, ordenar o denominador, neste caso desconsiderou o numerador. E desconsiderar a fração e colocar todos os números em ordem, este erro pode ter ocorrido por o sujeito não considerar fração como número, ou por desconhecer a existência dos racionais, ou ainda por considerar apenas decimais como pertencentes ao conjunto dos racionais.

O Licenciado que foi numerado como o 10, na questão 7, colocou que uma das dificuldades dos estudantes do ensino médio seria “conceituar os conjuntos e determinar as posições dos números.” Isso foi observado por Bartolomeu (2010) em sua pesquisa que notou que a dificuldade de localizar números na reta está relacionado com problema de ordenação.

5.1.5 Análise da Questão 5

Esta questão solicitava o preenchimento na reta numérica de alguns números, e abordava o conceito de densidade que é definido em Caraça (1951). Aceitamos como resposta correta da questão 5 o que segue no recorte abaixo.

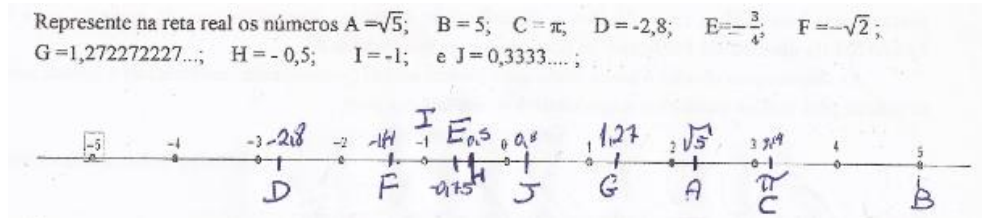
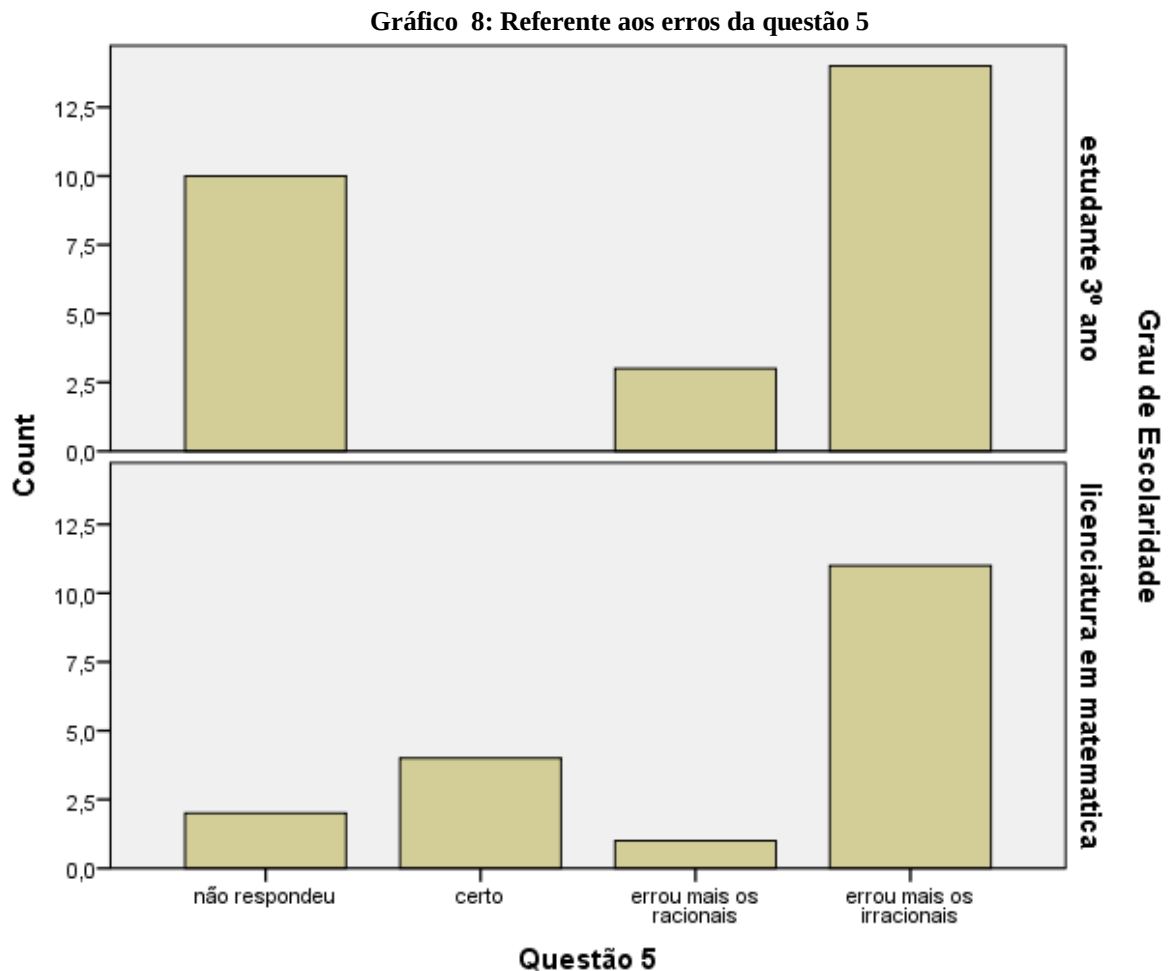


Figura 32: Protocolo referente à quinta questão do sujeito 33 Licenciatura

Não houve acerto por parte dos estudantes do 3º ano e apenas 4 (22,22%) de acertos na licenciatura. Podemos visualizar também o grande número de questões em branco em alunos de Ensino Médio no total de 10 alunos (37%).



Dentre os erros encontrados estão com relação à localização dos números irracionais na reta numérica, resultado também encontrado por Bartolomeu (2010) que em seu estudo percebeu que a dificuldade de localizar números na reta está relacionada com problemas de ordenação e Brosseau (1983), indica que a dificuldade de determinar um número decimal entre dois outros, esta relacionado a não aceitação de mais casas decimais entre dois números.

Souto (2010) em sua pesquisa ressaltou que localização de pontos na reta é uma das propriedades citadas nos livros didáticos. Já Dias (2002) constatou a ausência de conceito definição relacionado com o nome densidade, essas são algumas evidencias que pode ter levado a um índice alarmante de erros no ensino médio.

O número que mais foi localizado de forma errada no 3º ano foi o $-\frac{3}{4}$, um irracional fracionário, já na licenciatura foi o $-\sqrt{2}$, que é um irracional negativo.

5.1.6 Análise da Questão 6

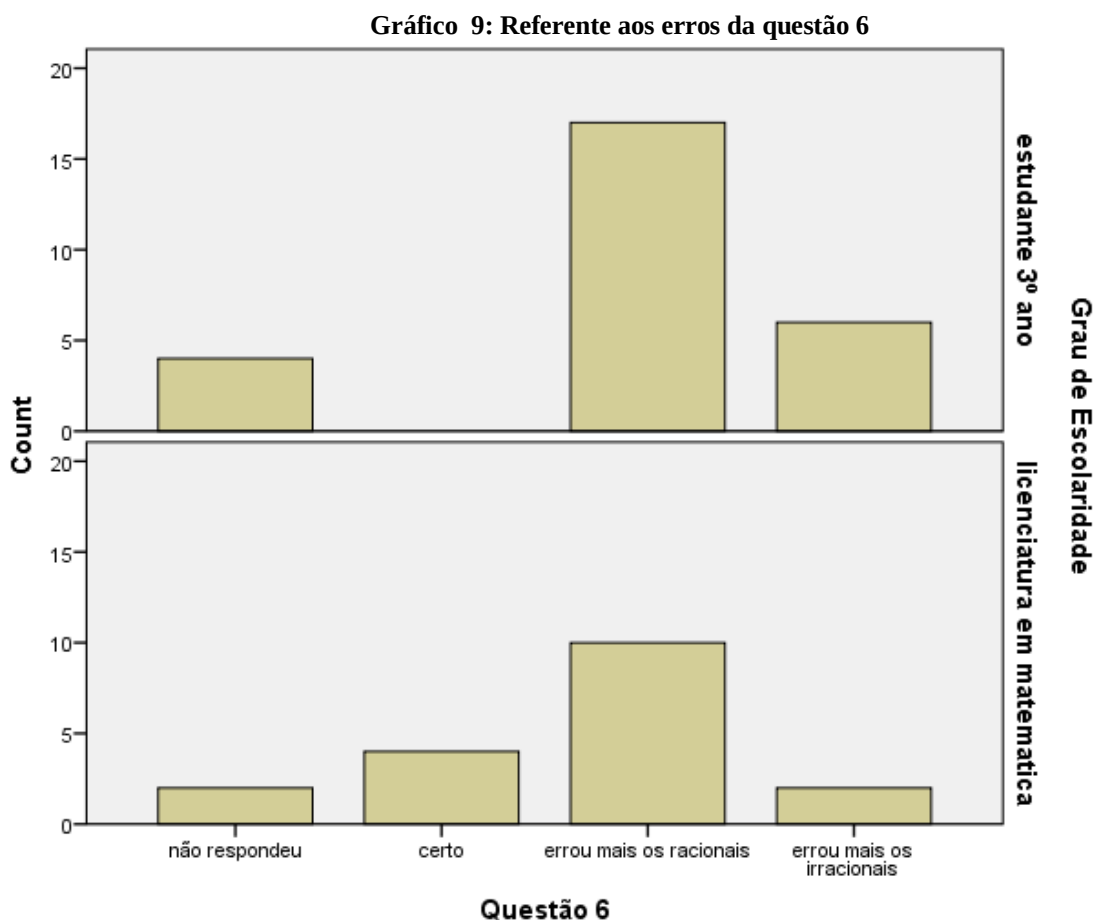
Esta questão pedia que classifica-se os números em racionais e irracionais. Aceitamos como resposta correta da questão 6 o que segue no recorte abaixo.

Dentre os números abaixo identifique os números irracionais por (I) e os números racionais por (R).	
(R) -6	(R) -1,5
(I) -2,171171117...	(R) 0
(R) $\frac{-2}{3}$	(R) 1,734999999...
(I) $\frac{\sqrt{2}}{4}$	(I) $\sqrt{7}$
(R) $\sqrt{9}$	(I) 2,010010001234...

Figura 33: Protocolo referente à sexta questão do sujeito 31 Licenciatura

Assim como na questão anterior no 3º ano não houve nenhum acerto já na licenciatura obtemos 4 (22,22%) de acertos.

O Gráfico 9 mostra os erros detalhados da questão 6.



Diferente da questão anterior o número maior de erros ocorreu ao classificar os números racionais como na pesquisa de Bartolomeu (2010) os alunos têm pouco conhecimento para reconhecer diferentes representações e significados dos números racionais.

No 3º ano o número que mais se errou foi o $-1,5$ sendo classificado com irracional e em segundo lugar o $-\sqrt{7}$ sendo classificado com racional. Já na licenciatura foi o $-\frac{2}{3}$, um fracionário negativo e como segundo colocado $1,734999999999...$, que é um racional periódico.

5.2 Análise dos Questionamentos Exclusivos da Licenciatura

5.2.1 Análise da Questão 7

A questão solicitava que os licenciandos cita-se as dificuldades que consideram que os estudantes do ensino médio possam ter com relação a este conteúdo.

Segue algumas respostas dadas pelos licenciados.

“Identificar quais são os números reais, racionais, irracionais, e reais.”

“Diferenciar um número racional de um irracional e reconhecê-los quando em forma de fração.”

“Saber o que é real, irracional, racional, inteiro, natural, os alunos confundem muito real e irracional.”

“A maior dificuldade seria eles saberem diferenciar os números irracionais e racionais.”

“A falta de relacionar o conteúdo com o dia a dia.”

“De compreender na sua vida o real sentido da aplicação, além de ocorrer confusão com cada grupo de números.”

Observando as respostas dadas pelos futuros professores, notamos que a dificuldade de conceituar os conjuntos numéricos foram um dos resultados encontrados nas questões 1, 2 e 3, o que corrobora com o apresentado por Bartolomeu (2010) em sua pesquisa.

Os licenciandos ressaltaram também que não relacionar o conteúdo dos números reais com o cotidiano do aluno, dificultara a compreensão deste conjunto. O PCN trás que “estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, [...] e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (Brasil, 2000 p.44).”

5.2.2 *Análise da Questão 8*

A questão 8 teve por objetivo analisar as soluções dadas pelos futuros professores para amenizar as dificuldades dos alunos com relação aos números reais.

Segue algumas respostas dadas pelos licenciandos.

“Através da abordagem do conteúdo tentar ao máximo fazer com que eles possam diferenciar o universo de ambos os números, racionais quanto irracionais.”

“Trabalhar os conteúdos com conexões, ou seja, fazer com que os alunos saibam que $\frac{1}{2}=0,5$, por exemplo. Além disso, trazer situações problema para os discentes, de forma contextualizada.”

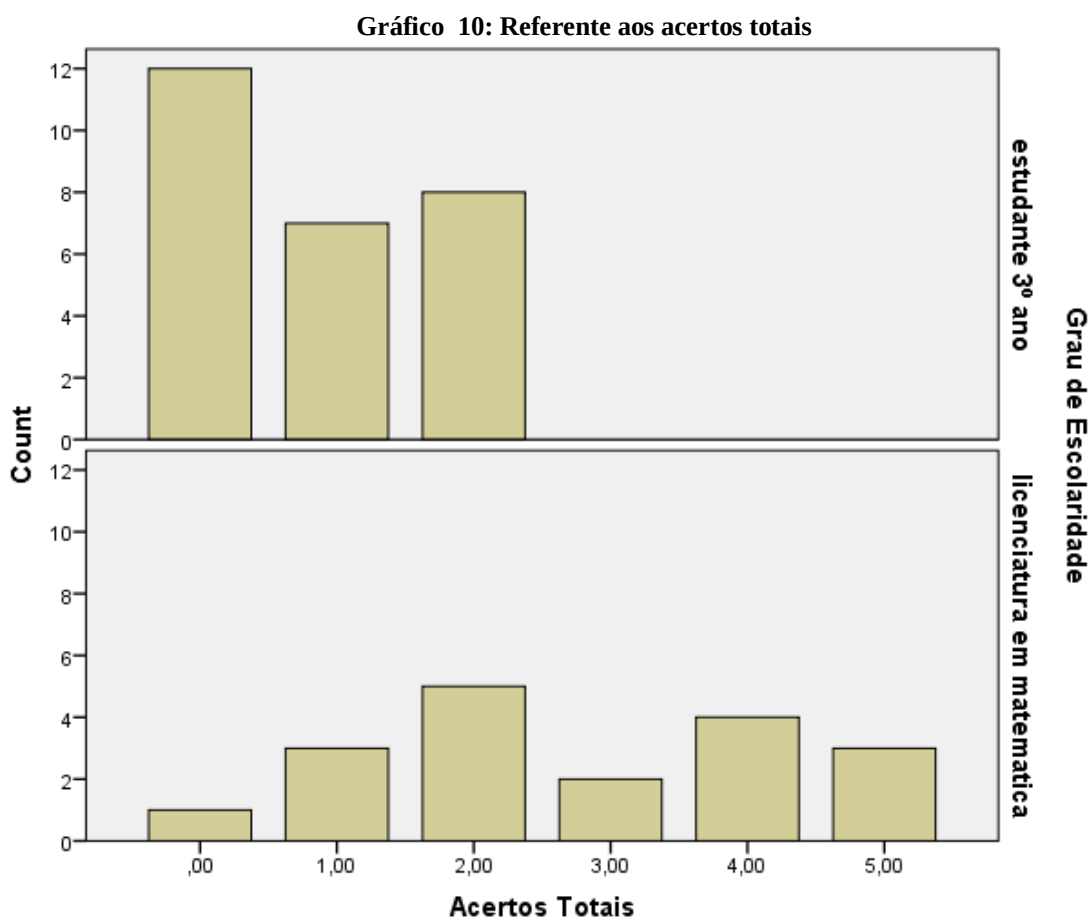
“Estudar, junto com os alunos, os números racionais e irracionais mostrando na reta numérica e mostrar e fazê-los compreender que fração também é um número.”

Observemos que os futuros professores ressaltam a necessidade dos estudantes associarem a fração ao seu valor em decimal, de distinguir o conjunto racional do irracional, além de contextualizar para que o estudante possa associar o conteúdo com as necessidades no seu cotidiano.

5.3 Análise dos acertos totais

O gráfico 10 mostra o número de estudantes de acordo com a quantidade de questões que certas.

Veja o gráfico:



Observemos que os estudantes do 3º ano acertaram no máximo duas questões, sendo 8 (29,62%) dos estudantes ficaram neste índice. A maioria dos estudantes 12 (44,44%) dos alunos erraram todas as questões. E 7 (25,92%) dos estudantes acertaram uma questão.

Já na licenciatura a maior índice de acertos foi de duas questões, sendo 5 (27,77%) dos licenciandos ficaram neste indicador. Aqui também tivemos 2 (11,11%) alunos que acertaram três questões, 4 (22,22%) licenciandos acertaram quatro questões e 3 (16,66%) licenciandos acertaram cinco questões. Vale ressaltar que de ambos os grupos ninguém acertou as seis questões.

O índice de acertos totais dos licenciandos foi significativo quando comparado com o 3º ano, isso nos mostra que no 5º período do curso os futuros professores já possuem uma maturidade com relação ao conteúdo conjunto dos números reais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo a realização de uma pesquisa a fim de investigar quais os conhecimentos com relação ao conjunto dos números reais compreendidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública e o 5º período de licenciatura em matemática na UFPE-CAA.

De acordo com a revisão de literatura, os documentos oficiais norteadores da educação básica e o resultado da pesquisa, são muitas as dificuldades dos estudantes quando se trata de números reais. As principais dificuldades encontradas foram com relação à definição dos conjuntos numéricos, localizar números na reta numérica, ordenação, classificação dos números, resultado parecido com o encontrado por Medeiros (2010) e Bartolomeu (2010).

Quando se trata da definição dos conjuntos racionais, irracionais e reais, os resultados da licenciatura e educação básica são bem próximos, isso nos mostra que mesmo estando em um curso de licenciatura em matemática no terceiro ano do curso os estudantes ainda apresentam uma defasagem na definição.

Em contrapartida quando se tratou de ordenar, classificar e localizar os números, os resultados da licenciatura foram significativos, podemos perceber que os estudantes não conseguem definir de forma satisfatória, contudo resolvem os problemas com mais facilidade que os alunos de 3º ano.

Quando questionamos os estudantes de licenciatura sobre que dificuldades eles consideravam que os estudantes do ensino médio poderiam ter com relação ao conteúdo de números apresentados. Obtemos que as dificuldades estarão relacionadas quanto a diferenciação dos conjuntos, resultados que obtemos da pesquisa. Além do problema com relação à localização dos números na reta numérica.

Já com relação ao que pensam sobre essas dificuldades enquanto futuros professores, observamos como propostas a abordagem dos conjuntos dos racionais e irracionais dando ênfase na distinção de cada um deles, além do trabalho em sala de aula com esse conteúdo sempre contextualizando com o cotidiano do aluno.

As questões que obtemos o maior índice de erro no ensino médio foi a questão 4 que solicitava a ordenação de algumas frações, a questão 5 que tratava da localização de pontos na reta e a questão 6 que era para classificar alguns números em racionais e irracionais, mostrando que mesmo os alunos ano termino do 3º ano do ensino médio não conseguem ordenar, classificar e localizar os números na reta numérica.

Na licenciatura a maior incidência de erros foi na questão 5 que abordava a ideia de localizar os números na reta e a questão 6 de classificá-los como racionais e irracionais.

Com relação aos exemplos das questões 1, 2 e 3 que propunham a definição dos diferentes conjuntos numéricos e alguns exemplos de números, obtemos que as representações mais exemplificadas na questão 1 no ensino médio foram retiradas dos números naturais, enquanto que nos estudantes de licenciatura dos fracionários e reais. Na questão 2 tanto no ensino médio como na licenciatura prevaleceu o conjunto dos números inteiros. E na questão 3 no ensino médio foi o conjunto dos naturais e na licenciatura foi o conjunto dos reais.

Obtemos como média de acertos dos estudantes do ensino médio 0,85, contra 2,77 da licenciatura, sendo um resultado significativo de um grupo para o outro, o que realmente era esperado. Mesmo assim, o total de pontos conseguidos seria 6 o que aponta uma média de acertos para os estudantes de licenciatura menor que 50%. Dessa forma, reiteramos os resultados de pesquisas como Penteado (2004) e Bartolomeu (2010) que se faz necessário uma discussão maior dessas propriedades dos números reais.

O conteúdo conjunto dos números reais como orienta o PCN “estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos.” Percebemos que os reais é base para diversos conteúdos matemáticos sendo assim, deve ser abordado de forma a proporcionar ao aluno o conhecimento da definição, de como operar, de como classificar a fim do aluno conseguir aplicá-lo no dia a dia, dentre as formas de aplicação ressalta-se a utilização nas medições.

Após esse trabalho, entendemos que ainda há necessidade de um maior aprofundamento sobre essa temática, inclusive com os licenciandos em matemática nesse sentido acreditamos ser importante:

- propor momentos de formação e instrumentalização dos estudantes, dando-lhes oportunidade de rever essas propriedades (densidade, infinitude, ordenação, entre outras) em cursos de extensão;

- estimular a partir de práticas alternativas a reflexão sobre as possíveis conexões entre os campos conceituais de matemática fazendo referências as diferentes representações de conjuntos numéricos;

- discutir e analisar diferentes conceitos e definições de conjuntos numéricos além de propor práticas alternativas para o trabalho com o conjunto dos números reais.

Pretendemos com essas proposições, oferecer maiores subsídios para os futuros professores de Matemática da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, E. PATERLINE, R.A. *descoberta da incomensurabilidade*. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270012/hp5270012.html>. Acesso em: 15 jun. 2014.
- BARTOLOMEU, Vivaldo de Souza. Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais. São Paulo: PUC/SP, 2010. (*Dissertação de Mestrado Profissional*).
- BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros curriculares nacionais Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros curriculares nacionais mais Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2002.
- BURIOL, T. GAZZONI, A. Números racionais e irracionais e suas representações decimais. *Disciplinarum Scientia*. Série: Ciências Exatas, S. Maria, v.2, n.1, p.85-98, 2001. Disponível em: <<http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2001/numeros.pdf>> Acesso em: 04 ago. 2014.
- CEZAR, Mariana. Concepções acerca do conceito de Números Reais: uma breve reflexão sobre seu ensino na Educação Básica. São Mateus: Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica do DECH/CEUNES da Universidade Federal do Espírito Santo, 2011 (*Monografia*).
- COBIANCHI, A. DIAS, M. *Correlação do lógico e do histórico no ensino dos números reais*. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/reais-web/reais_texto_correlacao_logico2.htm>. Acesso em: 27 jun. 2014.
- CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- DAVID, Maria Manuela M. S.; MOREIRA, Plínio Cavalcanti. *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- DIAS, Marisa da Silva. Reta real: conceito imagem e conceito definição. São Paulo: PUC/SP, 2002 (*Dissertação de Mestrado*).

EVES, Howard; *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.(tradução: Hygino H. Domingues)

MEDEIROS, Jozan. Uma abordagem dos números reais. Campina Grande: UEPB/PB, 2010. (*Dissertação de Mestrado*).

PENTEADO, Cristina Berndt. Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade. São Paulo: PUC/SP, 2004. (*Dissertação de Mestrado*).

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. *Parâmetros para a Educação Básica no Estado de Pernambuco*, 2012.Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/parametros_curriculares_concepcoes.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2014.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SOUTO, Alexandre. Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010. (*Dissertação de Mestrado*).

TANGERINO, S. R. Introdução à sequência de números reais e seu contexto histórico. Campo Mourão: Programa de Pós graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011(*monografia*).

APÊNDICE A – Perfil dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio

Iniciais do Nome: _____

Sexo: ()F ()M

Idade: _____anos

Você sempre estudou em escola pública? Sim() Não()

Em relação as aulas de Matemática:

Ficou sem professor durante algum período letivo? Sim() Não()

O professor de matemática utiliza o livro didático? Sim() Não()

APÊNDICE B – Perfil dos estudantes do 5º período Matemática-Licenciatura

Iniciais do Nome: _____

Sexo: ()F ()M Idade: _____anos

Em relação à Educação Básica:

Você sempre estudou em escola pública? Sim() Não()

Se não. Quando foi e que anos você cursou? _____

Ficou sem professor de matemática durante algum período letivo? Sim() Não()

Se sim. Em que anos e por quanto tempo? _____

Em relação à Educação Superior

Período de ingresso na UFPE: _____

Semestre em curso: _____

Disciplinas que abordam a temática no curso: _____

e-mail para contato posterior: _____

APÊNDICE C – Questões aplicadas na Licenciatura e Ensino Médio

1. O que são números racionais? Dê 4 exemplos.

2. O que são números irracionais? Dê 4 exemplos.

3. O que são números reais? Dê 4 exemplos.

4. Escreva os números $\frac{6}{3}, \frac{4}{8}, \frac{14}{16}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ em ordem crescente.

5. Represente na reta real os números $A = \sqrt{5}$; $B = 5$; $C = \pi$; $D = -2,8$; $E = -\frac{3}{4}$; $F = -\sqrt{2}$; $G = 1,272272227\dots$; $H = -0,5$; $I = -1$; e $J = 0,3333\dots$;



6. Dentre os números abaixo identifique os números irracionais por (I) e os números racionais por (R).

() -6

() -1,5

() -2,171171117...

() 0

() $\frac{-2}{3}$

() 1,7349999999...

() $\frac{\sqrt{2}}{4}$

() $\sqrt{7}$

() $\sqrt{9}$

() 2,010010001234...

APÊNDICE D – Questões aplicadas apenas na Licenciatura

7. Que dificuldades você considera que os estudantes do ensino médio possam ter com relação ao conteúdo de números apresentados?

8. Como professor, como você poderia amenizar esta dificuldade?
