



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA



**INVESTIGANDO AS IMAGENS CONCEITUAIS DE ESTUDANTES
UNIVERSITÁRIOS EM RELAÇÃO AO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO DE
UMA VARIÁVEL REAL**

DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

CARUARU, 2015

DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

**INVESTIGANDO AS IMAGENS CONCEITUAIS DE ESTUDANTES
UNIVERSITÁRIOS EM RELAÇÃO AO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO DE
UMA VARIÁVEL REAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de graduada em Matemática-Licenciatura, sob a orientação da Professora Dr^a Kátia Silva Cunha e co-orientação do Professor Me. José Marcos da Silva.

CARUARU, 2015

Catálogo na fonte:
Bibliotecária - Simone Xavier CRB/4-1242

H722i Holanda, Dorghislany Souza.
 Investigando as Imagens Conceituais de estudantes universitários em relação ao
 conceito de limite de função de uma variável real. /Dorghislany Souza Holanda. - Caruaru:
 O Autor, 2015.
 64f.; il. : 30 cm.

 Orientadora: Kátia Silva Cunha
 Coorientador: José Marcos da Silva
 Monografia (Trabalho de Conclusão de curso) – Universidade Federal de
 Pernambuco, CAA,Licenciatura em Matemática, 2015.
 Inclui referências bibliográficas

 1. Cálculo – estudo e ensino. 2.Funções (Matemática). 3. Conceito. I. Cunha, Kátia
 Silva. (Orientadora). II. Silva, José Marcos da. (Coorientador). III.Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2015-003)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

(Folha de Aprovação)

Banca Examinadora:

Dr^a Kátia Silva Cunha – UFPE - CAA
(Orientadora)

Me. José Marcos da Silva – UFPE – CAA
(Coorientador)

Dr^a Tânia Maria Goretti Donato Bazante – UFPE - CAA

Me. Tuanny da Silva Maciel – UFPB – CCEN

*Aos meus pais e professores, por tudo que me
ensinaram e me ajudaram a conquistar!*

Agradecimentos

*“Dêem graças em todas as circunstâncias,
porque esta é a vontade de Deus” (1Ts, 5:18)*

Agradeço a Deus, por todas as coisas, pelo Dom da Vida.

Aos meus pais, por estarem sempre ao meu lado, pelo incentivo, pela dedicação, por entenderem minha ausência por vezes constante... pelas orações e por acreditarem em mim!

Aos meus orientadores, Kátia Silva Cunha e José Marcos da Silva, agradeço especialmente. Pela vontade de trabalhar, por me ensinar, por torcer pelo meu crescimento, por acreditar em mim, eu agradeço pelas aprendizagens, pela caminhada, pelo apoio e dedico todo este trabalho.

Agradeço também a professora Cristiane de Arimatéa, pelo seu exemplo e pela sua ajuda e tantos outros professores, que com sua experiência, me inspiraram de alguma forma.

Em particular agradeço a Severino Barros de Melo e Valdir Bezerra, por terem participado de momentos determinantes na minha caminhada profissional.

Aos amigos de PIBID, amigos de turma e de disciplinas, pelos ‘aperreios’ compartilhados.

A todos os meus familiares, meu namorado, meu irmão, amigos antigos e amigos novos, pela alegria que sempre me trouxeram, por me aguentarem e, principalmente, por continuarem sendo meus mesmo na minha ausência.

Quero agradecer também a todos os alunos que colaboram para que essa pesquisa fosse realizada.

Enfim, a todos os professores que ensinaram, ensinam ou ensinarão a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I; a todos eu agradeço e dedico este trabalho.

Resumo

O presente trabalho teve por objetivo investigar os elementos que compõem a *Imagem Conceitual* acerca do conceito de limites de função de uma variável real de estudantes universitários do curso de Matemática - Licenciatura, inferidos mediante atividades que envolviam o conhecimento conceitual do Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa justifica-se já que diversos trabalhos vêm evidenciando os obstáculos em relação ao conceito formal de limite de função e a necessidade de se pensar novos métodos que contribuam para a aprendizagem dessa disciplina. Utilizamos a pesquisa bibliográfica para conhecer a literatura existente nessa área e fundamentamos nossas escolhas nas idéias de Tall e Vinner (1981, 1991) e em outros trabalhos relacionados à apreensão do conceito de limite. Para obtenção dos dados elaboramos e aplicamos um questionário com dezoito estudantes do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco no Campus de Caruaru. A análise dos dados releva uma lacuna entre as imagens conceituais evocadas pelos estudantes e o conceito formal de limites, por exemplo, na relação estática e dinâmica que permeia grande parte das dificuldades inerentes a compreensão do conceito, destacando a necessidade de uma maior reflexão no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Palavras-chave: Imagem Conceitual; Ensino de Cálculo; Limite de função; Conceito.

Abstract

The present work aimed investigate the elements that comprise the Conceptual image about the concept of limits of a real variable function, of university students of Degree course in Mathematics, inferred through activities involving the conceptual knowledge of Differential and Integral Calculus. The research is justified since several studies have evidenced the obstacles in relation to the formal concept of function limit and the need to think about new methods that contribute to the learning of this discipline. We use the literature to know the existing literature in this area and we base our choices on the ideas of Tall and Vinner (1981, 1991) and other works related to the concept of limit of apprehension. To obtain the data we developed and applied a questionnaire with eighteen undergraduate students of Mathematics - Degree from the Federal University of Pernambuco in the Campus of Caruaru. The analysis of data falls a gap between the conceptual images evoked by the students and the formal concept of limits, for example, the static and dynamic relationship that permeates much of the difficulty inherent in understanding the concept, highlighting the need for further reflection regarding the process teaching and learning of this discipline.

Keywords: Conceptual image; Calculus of education; Function limit; Concept.

Lista de Figuras

FIGURA 1- RESPOSTAS DOS ESTUDANTES SOBRE LIMITES	16
FIGURA 2- O PROBLEMA DE ENCONTRAR A RETA TANGENTE.....	22
FIGURA 3- O PROBLEMA DE DETERMINAR A ÁREA SOB UMA CURVA	23
FIGURA 4- IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL	28
FIGURA 5: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A10 – QUESTÃO 1	43
FIGURA 6: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 – QUESTÃO 1.....	43
FIGURA 7:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A15 – QUESTÃO 3	46
FIGURA 8:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A03 – QUESTÃO 3	47
FIGURA 9: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A09 – QUESTÃO 3	48
FIGURA 10:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 – QUESTÃO 3	49
FIGURA 11: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A14 – QUESTÃO 3	49
FIGURA 12: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A08 – QUESTÃO 4.....	50
FIGURA 13: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A16 – QUESTÃO 4	50
FIGURA 14: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A04 – QUESTÃO 4	50
FIGURA 15: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A01 – QUESTÃO 4	51
FIGURA 16: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A03 – QUESTÃO 4	51
FIGURA 17: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A13 – QUESTÃO 4	51
FIGURA 18: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A04 – QUESTÃO 5A	52
FIGURA 19:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A13 – QUESTÃO 5A	53
FIGURA 20:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A14 – QUESTÃO 5A.....	53
FIGURA 21:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A03 – QUESTÃO 5A.....	53
FIGURA 21:PROTOCOLO DE RESPOSTA DO ESTUDANTE A14 – QUESTÃO 5B	54

Sumário

Capítulo 1: Introdução	10
1.1 - Apresentando o Trabalho	11
1.2 – Revisão de Literatura	13
1.3 – Apresentando nossa Questão de Investigação	19
1.4 – Apresentando nossos Objetivos	19
Capítulo 2: Discussão Teórica	21
2.1 – Aspectos Históricos	22
2.2 – Referencial Teórico	26
Capítulo 3: Apresentando nossa Pesquisa	30
3.1 – Metodologia da Pesquisa	31
3.2 – Apresentando nossas Atividades	32
3.3 – Os participando e o local da pesquisa	40
Capítulo 4: Análise dos Resultados	45
4.1 – Questão 1	42
4.2 – Questão 2	43
4.3 – Questão 3	45
4.4 – Questão 4	49
4.5 – Questão 5	51
Capítulo 5: Considerações Finais	56
Referências Bibliográficas	60

Capítulo 1:

Introdução

1.1 – Apresentando o Trabalho

Há bastante tempo o processo de ensino e aprendizagem tem sido alvo de investigações em Educação Matemática e, quando se trata de pesquisas relacionadas ao Ensino Superior, a dificuldade no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral é uma questão que vem sendo amplamente discutida por diversos profissionais, sobretudo no que se refere à apreensão dos conceitos envolvidos. O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que depende de muitos domínios da Matemática e está presente em muitas outras áreas e ciências, que a utilizam como objeto ou como instrumento de trabalho, o que mostra a importância de se compreender bem seus conceitos.

Este trabalho foi motivado pela minha experiência como aluna do curso de Matemática - Licenciatura e, mais ainda, pela participação nos diversos grupos de pesquisa, extensão e ensino relacionados ao processo de ensino e aprendizagem em Educação Matemática. Dentro desses grupos, aprendi a ter um olhar questionador quanto às formas de ensino e um olhar pesquisador, em busca de construir um novo modelo de docência, através da análise dos processos reflexivos individuais e coletivos, na direção de proporcionar a aprendizagem dos estudantes. A escolha do tema foi também resultado da minha experiência na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, onde ocorreram as primeiras dificuldades da turma da qual eu fazia parte, desistências e grande número de reprovações.

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que foi desenvolvido por volta do século XVII, inicialmente a partir de estudos sobre taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área sob uma curva ou o volume de um sólido), e possui principalmente três conceitos envolvidos: o limite, a derivada e a integral. As aplicações do Cálculo são inúmeras e vão desde a taxa de variação com que a velocidade de certo corpo aumenta ou diminui, o cálculo do decaimento radioativo de um elemento químico, o trabalho realizado por uma força sobre um corpo qualquer, até a contração máxima que pode ocorrer a uma artéria na ocorrência de um espirro; essas e outras aplicações podem ser encontradas no livro "Cálculo Diferencial e Integral, vol.I" de Swokowski (2000). Diversas são as áreas de conhecimento que trabalham com o Cálculo Diferencial, como a Física

(onde se encontra as mais conhecidas aplicações), a Química, a Biologia, a Medicina, a Administração, a Astronomia, a Economia e, segundo Zuin (2001, p.34), até mesmo na Psicologia, na Linguística e nas Ciências Políticas, o Cálculo vem sendo empregado.

Disso surgiram as primeiras inquietações para o caminho da nossa pesquisa: se o Cálculo apresenta conceitos tão ricos, tão importantes também a outras áreas, então reduzir esses conceitos a um conjunto de regras e algoritmos, por si só, mecanizados só contribuirá para a construção de um ensino que visa à transmissão de conteúdo, que deixa o currículo fragmentado, e para o surgimento dos altos níveis de reprovação, deixando distante o caminho para a aprendizagem.

Segundo boletim informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (1995, p.5), o *“ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina”*, reforçando o dito anteriormente. As dificuldades comentadas pelo boletim são principalmente de origem epistemológica ou de origem didática, ou seja, na forma como se aprende, se apodera de um conhecimento e na forma como se ensina.

Muitas pesquisas, nacionais e internacionais, (CURY (2005), VIEIRA (1999), BARUFI (1999), ABREU (2011), MESSIAS (2012), LIRA (2008), DOMINGOS (2003), ALVES (2010), SIERPINSKA (1985), SANTOS (2005), NUNES(2001), CELESTINO (2008), ZUCHI (2005), VINNER(1997), TALL(1991), TALL e VINNER (1981, 1991)) têm ressaltado dificuldades acerca da aprendizagem dos conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Neste trabalho, trataremos especificamente sobre a dificuldade quanto à aprendizagem do conceito de limites de função de uma variável real, dada sua complexidade, abstração e sua importância para o entendimento de demais conceitos adjacentes. Ao nos debruçarmos sobre essas pesquisas, anteriormente citadas, vemos que para muitos estudantes calcular o limite de uma função resume-se a encontrar uma forma de substituir o valor dado na função utilizando-se de manipulações algébricas adequadas, o que evidencia o ensino altamente mecanizado, ou ainda que o limite “é quando a função vai se aproximando de um ponto, mas nunca chega”, evidenciando uma compreensão distorcida do conceito, que pode ter sido causada pela ausência de relação entre as noções intuitivas e formais do conceito. A simplificação desse conteúdo, por

vezes exagerada, pode acarretar, conforme pondera Vieira (1991), nesse tipo de confusão conceitual descrita acima. Segundo o mesmo autor, os entraves estão ligados também a dificuldade em correlacionar as noções intuitivas e formais desse conceito.

Ainda nesse capítulo, apresentaremos nossa revisão de literatura, que mostra alguns resultados de pesquisas cujo foco foi o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de função real de uma variável, nossa questão de investigação e nossos objetivos.

1.2 - Revisão de Literatura

A revisão de literatura caracteriza-se como um pequeno panorama das pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo. Inicialmente, buscamos trabalhos referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, doravante denominado Cálculo I, no que se referia ao processo de ensino e aprendizagem de limite. É a partir desse primeiro levantamento que fica evidente a maior preocupação dos pesquisadores da área: a compreensão do conceito de limite. Destacaremos aqui algumas dessas pesquisas - pois como dito anteriormente são várias - que trazem discussões interessantes para o nosso trabalho.

Ao se pesquisar sobre o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo I, alguns autores tinham por objetivo entender quais os obstáculos que faziam com que os estudantes não conseguissem aprender efetivamente nessa disciplina. Cury (2005) aponta que essa dificuldade se caracteriza como herança do Ensino Básico, onde os conteúdos de Matemática são vistos com muitos “macetes” e fórmulas decoradas, sem a compreensão do conceito básico. Sabemos que existe uma parte dessa disciplina que estuda processos algorítmicos com fórmulas que nos ajudam a resolver os problemas. A dificuldade surge, segundo o estudo, quando o ensino do Cálculo é reduzido a esses procedimentos. O aspecto repetitivo também aparece na conclusão de Cury como um obstáculo a construção do conhecimento, pois a repetição de um exercício (ou alguns exercícios) não ajuda no desenvolvimento de habilidades e não incentiva a conexão com os conceitos estudados.

O que o trabalho acima discute é sobre a importância de pensar a Matemática, para que o aluno entenda o porquê dos conceitos e de onde eles surgiram. Para isso, é preciso, segundo a mesma pesquisa, liberta-se dos laços de um ensino passo a passo, que conduz a uma aprendizagem procedimental em detrimento do conhecimento matemático relacional, que leva o indivíduo a estabelecer sempre mais conexões entre os vários conceitos estudados. Ainda em relação ao conhecimento procedimental, Barufi (1999, p.162) nos diz que,

A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a idéia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: pra que serve isto?

Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de limites, o que segundo Barufi (1999) e Cury (2005) é muito frequente nos cursos de Cálculo, tal significação não o impede de ter sucesso nas atividades operatórias, mas pode contribuir para o insucesso nas atividades conceituais e, conseqüentemente, a não aprendizagem.

Também parece haver um consenso entre esses trabalhos que há um número elevado de reprovações nessa disciplina e uma recorrente explicação por parte dos alunos, que dizem ser a disciplina muito difícil e abstrata. Abreu (2011) relata que, em sua experiência como professor, sempre percebeu uma inquietação por parte dos estudantes depois da explicação de um conteúdo que não fosse seguido por um exemplo. O exemplo solicitado serviria como receita para que eles resolvessem exercícios semelhantes e qualquer atividade que extrapolasse essa possibilidade seria em uma fonte de dificuldades. Segundo o autor, essa prática se torna ainda mais evidente em disciplinas onde o conceito de Cálculo I precise ser aplicado e interpretado, que são, para ele,

[...] atividades com maior possibilidade didática, alguns alunos simplesmente “copiam” a resolução dos exercícios. Normalmente, esses alunos assim o fazem como uma tentativa de solução reducionista pensando em generalizações que possam ser aplicados em exercícios que, no seu entendimento, possam ser semelhantes. A proposta do aluno seria a de se concentrar no método e não na idéia da solução. (ABREU, 2001, p. 18)

Os problemas mencionados acima indicam uma divergência entre as operações algorítmicas e os conceitos e definições. Percebendo essa dificuldade nos estudantes, o pesquisador realizou um trabalho que levasse em consideração o rigor matemático, com o qual a disciplina de Cálculo I pode e deve ser administrada, mas também a intuição dos estudantes ao analisarem questões e problemas. Para ele, a intuição e o rigor podem estar relacionados às Imagens Conceituais e às Definições Conceituais definidas por Tall e Vinner (1981), da qual falaremos mais tarde.

O trabalho de Messias (2012) buscou investigar acerca dos elementos que compõem a Imagem Conceitual de estudantes universitários relativos ao conceito de limite de função. Também fundamentada na teoria de Tall e Vinner (1981), a pesquisadora aplica um questionário contendo tarefas que envolviam aspectos conceituais e encontrou, dentre outras coisas, a dificuldade, por parte dos estudantes, em relacionar o limite como estático ou dinâmico e essa dificuldade fazia parte da imagem conceitual dos investigados.

Em seu artigo “*Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite*”, Vieira (1999) mostra o resultado parcial de uma pesquisa feita com estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade de Aveiro, que buscava investigar o motivo das confusões – como foi denominado - em relação ao conceito de limite de função. Vieira utilizou-se de um questionário que aborda de várias formas a definição de limite de uma função real de variável real, num ponto, seguindo, essa proposta, o percurso histórico da evolução do conceito de limite. Como resultado, encontrou confusões conceituais, dificuldades de expressão escrita e de manipulação simbólica. Ao solicitar, por exemplo, que os estudantes dissessem em poucas palavras o que entendem por limite, ou seja, para que explicassem qual o significado para esses da expressão “*o limite de uma função f quando x tende a t é um número L* ”, encontrou as seguintes respostas:

- Nunca ninguém me perguntou isto e nunca me tinha apercebido das dúvidas que poderia ter sobre limites. Realmente senti-me confusa (...). Quando o limite dá $\pm\infty$ existe ou não o limite? o limite tem de ser um valor?
 - Os ∞ e $\delta\delta$ é que é uma complicação; só sei isto com as sucessões.
 - Limite de uma função num ponto é o valor que essa função admite numa vizinhança desse ponto. [Muitas respostas deste tipo]
 - Limite de uma função é um ponto extremo do seu contradomínio quando o x tende para um extremo do seu domínio.
 - Limite é o valor de y mais alto ou mais baixo (sic) quando se vai tomando valores de t .
 - Limite é o número máximo que uma função pode ter quando $x \rightarrow t$.
 - Quando uma determinada função tende para um determinado domínio, essa função terá significado até ao número determinado. Atingindo aí o seu máximo. Por vezes uma determinada função nunca chega a ter limite, o caso quando $L = +\infty$.
 - Uma função tem por limite um número L , quando é limitada arbitrariamente por valores de x .
 - Limite é o valor que uma função não pode ultrapassar.
- $\lim_{x \rightarrow t} f'(x) = L$
- significa que a derivada da função $f(x)$ no ponto t tem o valor de L .
- Limite é algo que é atingido no fim, algo propriamente definido pela função de $x \rightarrow t$.
 - O limite é o número mais próximo de t que está definido pela função f .
 - O limite é uma vizinhança de um ponto.

Figura 01 – Respostas dos estudantes sobre limites

FONTE: artigo “Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite”, VIEIRA (1999, p.02)

Pode-se afirmar, a partir desse quadro, que o conceito de função não foi compreendido por esses estudantes participantes da pesquisa. O pesquisador discute que a forma como esse conteúdo é muitas vezes ensinado, seguindo o mesmo tratamento adotado por muitos livros didáticos, ou seja, centrado na definição dos conceitos, dificulta ao aluno conferir-lhes significado e aplicações. Essa afirmação do ensino tradicional sufoca os sujeitos com regras,

definições e formalismos totalmente abstraídos em detrimento da capacidade de pensar, de criar, substituindo a lógica do sujeito pela necessidade de repetir um algoritmo para alcançar um desempenho que é esperado. Vieira (1991), ressalta que a grande quantidade de conceitos - limite inferior, limite superior, supremo mínimo, máximo, limite segundo Cauchy, limite de funções compostas, limites infinitos, limite no infinito, teorema do confronto, etc. - e o pouco tempo podem ser justificativas usadas para esse ensino operacional que destrói a aprendizagem conceitual.

Sierpiska (1985) desejou verificar quais as dificuldades epistemológicas relativas à noção de limite e, para isso, dividiu seu trabalho em duas etapas, onde a primeira desejava identificar a tangente como limite de uma secante variável e, na segunda parte, a autora propôs um problema que consistia em encontrar a equação da tangente na curva $y = \sin x$ no ponto $x = 0$. Atentemos ao fato de que essas questões não dizem diretamente ao estudante “*calcule o limite de*”, elas não estão interessadas nos procedimentos ou nas fórmulas que o sujeito vai usar, mas em porque ela vai usar, ou como ele utiliza dos seus conhecimentos de limite de função para resolver o problema. Mediante a análise das respostas dadas pelos quatro estudantes participantes da pesquisa, Sierpiska propôs uma lista de obstáculos relativos ao conceito de limite, nomeados como: a) horror ao infinito; b) obstáculo ligado à noção de função; c) obstáculo geométrico; d) obstáculo lógico; e) obstáculo de símbolo. A autora comenta também que “*o conjunto de obstáculos que nos parece mais importante é o que resulta da recusa dos conjuntos infinitos. Trata-se de horror ao infinito*” (SIERPINSKA, 1985, p.39). Isso ocorre, segundo a mesma, por não se aceitar conjuntos infinitos e com isso não compreender o limite nesses conjuntos.

Vale destacar também o obstáculo ligado a noção de função, que foi percebido pela pesquisadora quando os estudantes associavam a convergência com a monotonicidade e movimento, ou seja, os alunos vêem o limite aplicável a funções monótonas. Esses problemas também foram discutidos por Nunes (2001) e Santos (2005). Outro momento no qual surge a dificuldade com a noção de função aparece quando os estudantes confundem a idéia de que uma sequência tem limite se é limitada.

Historicamente, o conceito de limite também apresentou obstáculos para os matemáticos da época – falaremos sobre isso no próximo capítulo – desde a Grécia Clássica até os estudos de Newton, que apesar da sua inegável contribuição para o desenvolvimento desta área da

Matemática, também apresentou dificuldades em apresentar a noção de limite. Tall (1991) destaca que os processos mentais requeridos para a compreensão do conceito de limite de função demandam certo amadurecimento cognitivo que é formado progressivamente ao longo dos estudos. Tradicionalmente, o conceito de limite é o primeiro conceito ensinado na disciplina de Cálculo I, abordado como pré-requisito para a compreensão dos demais conceitos, derivada e integral. É visto inicialmente de forma intuitiva, muitas vezes utilizando-se de gráficos e tabelas, para então chegar à definição formal. Os termos utilizados aqui são geralmente comuns ao cotidiano dos estudantes, são termos informais – do ponto de vista matemático – que contribuem para a compreensão intuitiva como “*estar próximo de*”, “*tender para*”, “*barreira*”, “*tão próximo, mas diferente*”, porém, se não forem abordados de forma adequada acabam por construir imagens erradas pelo aluno. O que acontece é que essas expressões têm um significado cotidiano diferente do significado matemático o que pode causar uma sobreposição ou, como preferiu chamar Celestino (2008), uma imbricação de concepções. Celestino, ao citar Willians (2001), nos trás a seguinte contribuição:

Os significados cotidianos dos termos podem influenciar as percepções dos estudantes sobre estes termos em um contexto matemático. Há uma ambiguidade na maneira como o conceito de Limite pode ser percebido. Pode-se focar no processo de aproximar o limite e, então, considerá-lo como um procedimento que nunca chega ao fim. Mas pode-se pensar no Limite como uma entidade estática com as quais funções podem ser comparadas. (p.19)

Celestino relata que se chegou a essas conclusões depois de analisar as respostas de alguns estudantes que entendiam que as funções contínuas alcançam seus limites, mas que esses mesmos alunos não estavam seguros se é correto dizer que o limite foi alcançado quando se aplica o processo algébrico para determinar o limite. O trabalho realizado por Marcos Celestino (2008) está inserido na linha de pesquisa Epistemologia e Didática da Matemática e tinha por objetivo investigar as concepções dos alunos do ensino superior sobre limites e as possíveis imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções. Utilizando de questionário e software, o pesquisador conseguiu observar nas respostas dadas pelos participantes obstáculos semelhantes com as que Willians descreveu; foram elas:

- a) “limite... atinge ou não”?,
- b) associar o limite a um movimento físico e o obstáculo do símbolo *lim*, e

c) significado dos termos cotidianos influenciando as percepções dos estudantes sobre esses termos em um contexto matemático.

Partindo dessa revisão, percebemos o que essas pesquisas têm em comum: a dificuldade na aprendizagem do conceito na disciplina de Cálculo, especificamente no que se diz respeito ao conceito de limite de uma função. Vimos que essas barreiras podem acontecer no ensino de limites por vários motivos. Acreditamos que eles surgem principalmente devido ao ensino totalmente concentrado em procedimentos e exercícios repetitivos prontos nos livros didáticos e pela falta de uma discussão conceitual, que geralmente dá espaço para apresentações de definições que pouco fazem sentido para os estudantes.

1.3 Apresentando nossa Questão de Investigação

Diante deste cenário, e considerando a importância do conceito de limite de função, nossa pesquisa deseja investigar aspectos referentes à aprendizagem de limite de função de uma variável real – especificamente –, para tentar responder a seguinte questão:

Quais os elementos que compõem a Imagem Conceitual de um estudante de Licenciatura em Matemática em relação ao conceito de limite de função de uma variável real?

Utilizaremos como principal referencial teórico os estudos de Imagem Conceitual e Definição Conceitual apresentadas por Tall e Vinner (1981) e Vinner (1997), para mostrar a diferença entre o processo pelo qual um determinado conceito é concebido e quando ele é formalmente definido.

1.4 Apresentando nossos Objetivos

Objetivo Geral:

- Investigar os elementos que compõem a Imagem Conceitual acerca do conceito de limites de função de uma variável real, de estudantes universitários do curso de Matemática - Licenciatura, inferidos mediante atividades que envolvam o conhecimento conceitual do Cálculo I.

Objetivos específicos:

- Investigar, em trabalhos já realizados, quais as dificuldades em relação à apreensão do conceito de limite de função de uma variável real;
- Elaborar um questionário que envolva o conhecimento conceitual do Cálculo I, especificamente do conceito de limite de função de uma variável real;
- Aplicar e analisar o questionário buscando entender os elementos que compõem a Imagem Conceitual de cada estudante, em cada questão proposta, e as relações desses com a definição conceitual formada.

Como contribuição educacional, o estudo das imagens e definições conceituais poderá contribuir para a construção de novas sequências de ensino para remediar as dificuldades inerentes ao entendimento desse conceito e, acreditamos também, poderá subsidiar pesquisas futuras e possíveis mudanças no trabalho dos professores, tendo em vista que as imagens conceituais evocadas pelos estudantes.

Capítulo 2:
Discussão Teórica

Nesse capítulo, apresentaremos um resumo dos estudos que realizamos na primeira etapa da nossa pesquisa - pesquisa bibliográfica –, com o objetivo de analisar os aspectos históricos que envolveram a construção do conceito de limite de funções, e também discutiremos sobre a teoria de Imagem Conceitual e Definição Conceitual dos pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner (1981, 1991).

Na seção 2.1, não desejamos expor toda a história da construção do conceito de limite, mas, apresentar de forma breve alguns matemáticos que ajudaram nessa construção e em que momento cada um esteve presente nesse percurso, que não foi tão exato quanto se imagina.

2.1 Aspectos Históricos

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que foi desenvolvido por volta do século XVII por estudiosos da Grécia, França, Alemanha e Inglaterra, dentre os quais destacam-se: Pierre de Fermat, René Descartes, Gottfried Leibniz e Isaac Newton, sendo esses dois últimos considerados os inventores do mesmo.

O nome diferencial surgiu do problema de resolver e encontrar o coeficiente da reta tangente a uma curva dada (ver Figura 1), e o nome integral, do problema de encontrar a área sob uma curva (ver Figura 2).

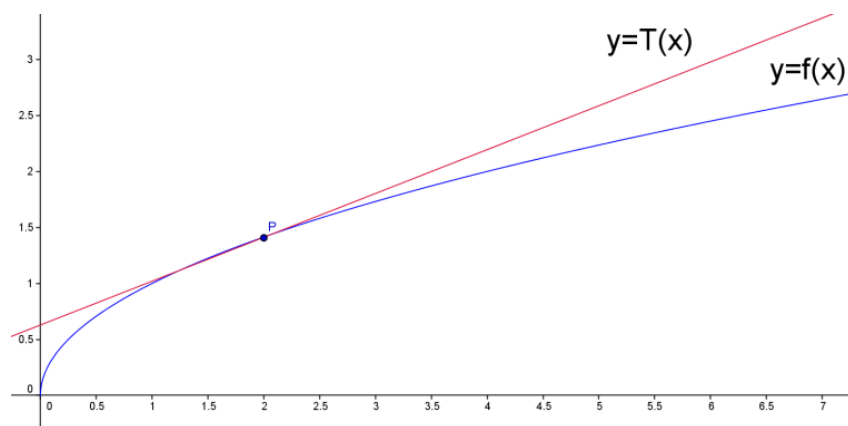


Figura 2 – O problema de encontrar a reta tangente a uma curva dada levou ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

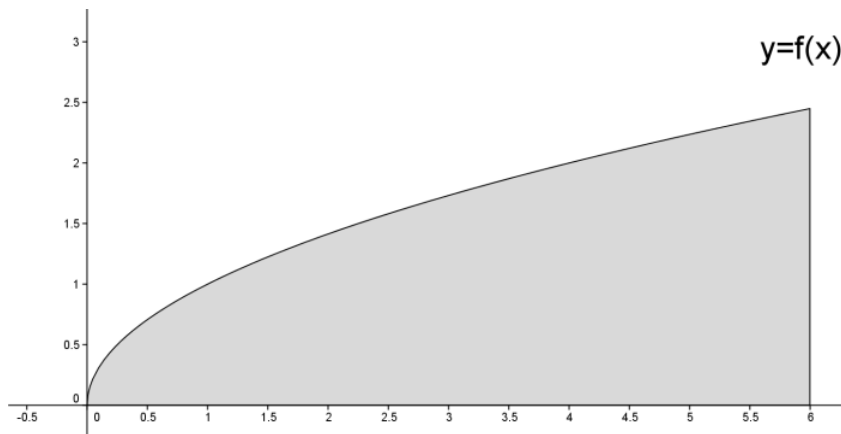


Figura 3 – O problema de determinar a área sob uma curva dada levou ao desenvolvimento do Cálculo Integral.

As aplicações do Cálculo são inúmeras e estão presentes em várias áreas, não somente nas exatas; vão desde a taxa de variação com que a velocidade de certo corpo aumenta ou diminui, até a contração máxima que pode ocorrer a uma artéria na ocorrência de um espirro (para que a artéria não se contraia demais e você não morra na ocorrência do mesmo). O objeto fundamental de estudo do cálculo são as funções, e mais especificamente o Cálculo I desenvolve o estudo das funções reais de uma variável real usando as técnicas de limite e continuidade, derivação e integração.

Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo; de fato, dentro da própria disciplina outros conceitos, como derivada e integral, são definidos a partir dele. Apesar disso, as noções de limite, por muito tempo, foram confusas, com idéias vagas e muitas vezes filosóficas até para os grandes matemáticos já mencionados.

Segundo a Enciclopédia de Ciência Ilustrada (1969, p.1516), a idéia de limite surge inicialmente na Grécia Antiga, por volta do século V a.C., com o chamado Paradoxo de Zenão, ou também conhecido pelo paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Zenão desafia os filósofos gregos com a seguinte história: o veloz Aquiles corre para alcançar uma tartaruga que se afasta dele, mas quando chega ao lugar de onde a tartaruga partiu ela já não está mais lá; a distância entre eles agora é menor, mas novamente, enquanto Aquiles corre, a tartaruga também se desloca e assim sucessivamente, de forma que, mesmo com toda pressa Aquiles nunca atingiria a tartaruga.

Neto (2006) explica em sua pesquisa o Paradoxo de Zenão da seguinte forma:

Supondo que Aquiles corresse 10 vezes mais rápido a tartaruga, para compensar essa vantagem, a tartaruga é colocada em uma posição muito à frente deste, digamos 1000 metros. Quando Aquiles percorre os 1000 metros e chega onde se encontrava inicialmente a tartaruga, esta, por sua vez, percorre um décimo do que percorreu Aquiles, isto é, $1/10$ de 1000, que é igual a 100 metros. A tartaruga fica, portanto, ainda 100 metros à frente. Aquiles, então, percorre esses 100 metros. Porém a tartaruga, nesse tempo, se desloca $1/10$ de 100 metros, ou seja, 10 metros à frente dele. Aquiles não se dá por vencido, percorre 10 metros, mas, pacientemente, a tartaruga percorre um décimo de 10 metros, ou seja, fica um metro à frente de Aquiles, e assim por diante. De maneira que Aquiles sempre se aproximará da tartaruga, porém, sem jamais alcançá-la.

O paradoxo de Zenão (490 – 430 a.C.) foi um passo significativo para a idéia de definição de limite e, 24 séculos depois, essa idéia se consolidaria evidenciando que as posições – de Aquiles e da tartaruga – convergem, ou seja, aproximam-se de um mesmo número. Para Boyer (1999, p.51), “*o método adotado por Zenão era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo*”.

A contribuição dos gregos para a evolução do conceito de limite teve participação de Eudoxo (408-355 a.C.) com o cálculo de comprimentos, áreas e volumes usando o método da exaustão, que é a aproximação de figuras limitadas por linhas curvas e outras com limites retos. Entretanto, é com Arquimedes (287 – 212 a.C.) que esse processo se consolida, definindo a área do círculo como limite de polígonos inscritos e circunscritos, determinando como consequência o valor de π e encontrando as séries infinitas. A quadratura da parábola é o tratado mais popular de Arquimedes e, conforme Boyer (1999, p.88), era um “*dos tratados que se ocupava principalmente com o método da exaustão*”.

Houve ainda contribuições dos trabalhos de Pierre de Fermat (1601 – 1665) e de René Descartes (1596 – 1660), no estudo de curvas, superfícies e sólidos. Fermat desenvolveu um método para achar tangentes de curvas da forma $y = x^n$ e chegou a um teorema sobre a área acima dessas curvas. Ele resolveu e estabeleceu resultados para valores positivos e negativos de n , exceto para $n = -1$. Fermat trabalhou bastante com aspectos da análise infinitesimal.

Mas foi apenas em pleno século XVII que ocorreu a formalização do Cálculo Diferencial e Integral com os trabalhos, independentes, de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716). Abaixo o quadro sintetiza alguns trabalhos realizados por eles:

- Em 1666, Newton escreve seu tratado sobre *fluxions*, no qual ele associa o movimento de uma partícula sobre uma curva com duas linhas horizontal e vertical. Essas linhas eram as fluxões de x e y . Foram as primeiras noções de derivada.
- Leibniz não se preocupou com movimentos, mas com incrementos cada vez menores das variáveis x e y . Credita-se a ele a notação clássica dx e dy .
- Em seu *Principia Mathematica* (1687), Newton foi o primeiro a reconhecer que o limite deve ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura e afins. Boyer (1999, p. 274) mostra que Newton tentou dar uma definição precisa do conceito de limite: “*quantidades, e as razões das quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do final desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais*”.
- Leibniz foi o matemático que mais contribuiu para as notações e as fórmulas básicas da derivada e da integral e para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Nota-se que os trabalhos de Newton foram os primeiros a trazer o conceito de limite e ainda assim de forma bastante intuitiva. Na definição mostrada acima, tentativa de Newton, percebe-se essa intuição presente na expressão “convergem continuamente” e “qualquer diferença dada”. Essa forma intuitiva poderia conduzir a erros de cálculo e de interpretação, o que acabou levando seu trabalho a ser alvo de muitas críticas na época. No trabalho de Abreu (2011), retiramos a seguinte passagem:

Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente para os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle (1652 – 1719), podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual a parte, pois uma grandeza x somada ao seu diferencial dx era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais

eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon (1654 - 1722), com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada. (BRITO, CARDOSO, 1997, p. 138)

No trecho acima, vemos críticas enfrentadas por Newton e Leibniz depois de publicarem seus trabalhos.

A história do Cálculo não termina por aqui e o caminho para se chegar a definição de limite que temos hoje ainda teve a participação de vários matemáticos, como Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), e outros.

O objetivo dessa redação é mostrar que mesmo entre os grandes matemáticos, a compreensão do conceito de limite não aconteceu de forma linear, nem tão pouco surgiu com definições prontas. Com base nesses fatos, podemos afirmar que, um ensino que prioriza a aprendizagem de procedimentos, definições e exercícios repetitivos, não contribui para a aprendizagem do estudante; principalmente quando se trata de conceitos mais abstratos como o de limite. Buscamos também evidenciar, nesta seção, que as primeiras manifestações de limite aconteceram em situações diferentes do próprio cálculo e sem o rigor por ele exigido. É com base nesses argumentos que apresentaremos a partir de agora nosso referencial teórico.

2.2 – Referencial Teórico

Para fundamentar nosso estudo, utilizamos o suporte teórico defendido por David Tall e Shlomo Vinner (1981, 1991) de “*Imagem Conceitual e Definição Conceitual*”, evidenciando nesse aspecto que grande parte das dificuldades relacionadas à aprendizagem do Cálculo I dizem respeito a sua apreensão conceitual.

Tais autores defendem que a apresentação de um novo conceito não deve ser feita a partir de sua definição e suas propriedades; para que esse conceito possa ser entendido é preciso que o

estudante tenha, anteriormente, certa familiaridade com ele. Segundo Tall (1992), a construção de um novo conceito ou a apropriação de uma ideia não acontece de forma linear em nosso cérebro: existe uma estrutura cognitiva extremamente complexa para essa apropriação. Quando pensamos sobre uma nova informação o nosso cérebro evoca diferentes imagens, acionando uma rede de conhecimentos prévios e definições pré-estabelecidas relacionadas a essa nova idéia.

A *Imagem Conceitual*, segundo essa teoria, são representações visuais, experiência, impressões, propriedades que estão ligadas ao conceito. Nas palavras de Tall e Vinner,

Usaremos o termo Imagem Conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos e amadurece. (1981, p.152, traduzido)

Discorre da citação acima, que a imagem conceitual é individual e pode mudar ao longo dos anos, ou seja, a forma como cada um constrói uma aprendizagem é muito particular e sempre está impregnada de referências pessoais e valores e, mais ainda, ela varia com o tempo, sempre que o indivíduo passa por novas situações. Além disso, por ser uma formação pessoal, ela não é necessariamente coerente, podendo conter propriedades e/ou interpretações contraditórias.

[...] adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor uma definição de um conceito não garante seu entendimento. Entender, assim supomos, significa apresentar uma imagem conceitual. Determinado significado deve estar associado às palavras. (VINNER, 1991, p. 69, traduzido)

Com base nesse argumento, afirmamos que, quando um estudante não consegue expressar em palavras o que entendeu sobre determinado conceito – ele apenas repete uma definição decorada de livros -, ele não conseguiu construir imagens, isto é, as experiências vividas por ele nesse processo não foram suficiente para que ele relacionasse aprendizagem e construísse uma imagem.

No que concerne à *Definição Conceitual* – que é construída a partir das imagens conceituais – Meyer (2003, p.6), baseado nos trabalhos de Tall e Vinner, defini como:

[...] a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição conceitual pode ser aprendida pelo indivíduo de uma forma rotinizada ou de uma forma mais significativa, relacionando-a em maior ou menor grau com a definição formal de um conceito científico. Pode também constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual.

A *Definição Conceitual* é uma forma de palavras usadas para especificar um conceito. Segundo Cornu (1983, p.66) a noção de definição conceitual: “(...) *consiste nas frases apreendidas mecanicamente, mais ou menos ligadas ao conceito; pode ser uma reconstrução, uma reformulação pessoal de uma definição matemática*”. Essa construção é própria ao indivíduo: “*ela não coincide sempre com a definição formal do conceito, ou seja, com a definição comumente admitida pela comunidade matemática*”.

Podemos dizer de forma bastante simplificada que definição conceitual é a definição dada pelo aluno sobre um determinado conceito matemático. Esta definição é gerada a partir das imagens conceituais já desenvolvidas pelos alunos anteriormente. Em resumo:

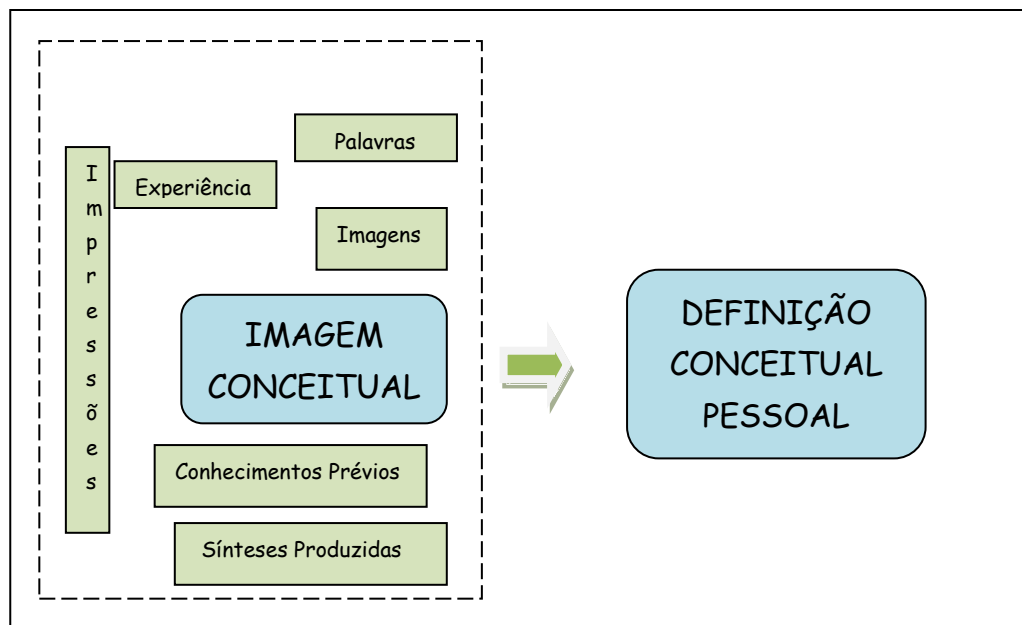


Figura 4: relações entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual.

Segundo Tall e Vinner, a dificuldade em formar uma imagem conceitual apropriada e os efeitos negativos de uma imagem conceitual inapropriada que apresentam conflitos, podem

atingir seriamente o desenvolvimento de uma teoria formal na mente do indivíduo, impossibilitando a construção de uma definição conceitual adequada que garanta a sua aprendizagem.

A aprendizagem do Cálculo I envolve conhecimentos conceituais e procedimentais. Procedimentais porque o limite, a derivada e a integral podem ser vistos como ferramentas quando se trabalha para resolver problemas e, principalmente, quando esses são usados para modelar situações reais. O conhecimento conceitual é caracterizado por ser rico em relações, pode ser pensado como uma rede conexa de conhecimentos, uma network na qual as relações de ligação são tão proeminentes quanto às partes discretas da informação (DREYFUS, 1991). É o conhecimento conceitual que dá sentido e aplicação ao conceito de limites, por exemplo, tão questionado pelos estudantes.

Convém salientar que a discussão acerca desses tipos de conhecimento do Cálculo nos mostra que diferente do procedimento, que se aprende repetindo métodos, o conhecimento conceitual precisa de mais relações, mais reflexões do que exercícios. Essa apreensão conceitual não é algo simples, nem acontece rapidamente, mas é importante deixar que o sujeito construa a sua definição conceitual pessoal, e somente quando a aprendizagem tiver ocorrido, efetivamente, a definição conceitual formal deve ser apresentada. Quando se trabalha dessa forma, o professor está contribuindo para a formação crítica, autônoma, lógica e criativa do estudante, fatores de extrema importância.

Capítulo 3:

Apresentando nossa Pesquisa

Neste capítulo, trataremos das opções metodológicas da nossa pesquisa e das atividades realizadas para tentar alcançar nosso objetivo; apresentaremos também o grupo participante e o local onde aconteceram nossas atividades. A partir das discussões referentes ao ensino e a aprendizagem do conceito de limite e os aspectos da teoria de Imagem Conceitual e Definição Conceitual, principalmente a questão da formação da imagem conceitual, elaboramos nossa questão de investigação:

Quais os elementos que compõem a Imagem Conceitual de um estudante de Licenciatura em Matemática em relação ao conceito de limite de função de uma variável real?

A partir dessa questão, surgiram nossas hipóteses que nos levaram a traçar objetivos para seguir nossa investigação. Assim, nosso trabalho tem por objetivo geral “*investigar os elementos que compõem a Imagem Conceitual acerca do conceito de limites de função de uma variável real, de estudantes universitários do curso de Matemática - Licenciatura, inferidos mediante atividades que envolvam o conhecimento conceitual do Cálculo*”. Apresentaremos agora os caminhos que percorremos para alcançá-lo.

3.1 – Metodologia da Pesquisa

Adotamos inicialmente a Pesquisa Bibliográfica para mapear os trabalhos que já foram realizados nessa área de estudo e considerar questões relacionadas ao nosso objeto de pesquisa. Autores como Macedo (1995) apontam como vantagem o uso da pesquisa bibliográfica por ela dar direção a novos caminhos que não foram pesquisados e por esta, ao revisar a literatura existente, demarcarem a relevância do problema em questão. Durante a pesquisa bibliográfica, também procuramos nos apropriar, tanto quanto possível, de termos e conceitos relacionados à imagem conceitual e definição conceitual conforme proposto por Tall e Vinner (1981, 1991).

Após essa fase de estudos, e tendo conhecido alguns dos problemas que geram as dificuldades na disciplina de Cálculo I, partimos para uma pesquisa de campo¹ com estudantes de Matemática - Licenciatura. Mais tarde, detalharemos o contexto em que a pesquisa de campo foi realizada. Com essa etapa, nosso intuito foi analisar as Imagens Conceituais evocadas pelos estudantes ao resolverem tarefas de caráter conceitual, sobre o objeto de estudo em questão.

Nossa pesquisa tem, portanto, um caráter exploratório e apresenta aspectos de uma pesquisa principalmente qualitativa, mas também quantitativa. Segundo Neves (1996, p.1):

Os estudos quantitativos geralmente procuram seguir com rigor um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas e variáveis que são objeto de definição operacional), a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo do seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos [...] Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto do pesquisador com a situação objeto de estudo.

Neves (IDEM) também defende que essas pesquisas, qualitativas e quantitativas, não são excludentes, e embora tenham uma forma e uma ênfase que diferem, a pesquisa qualitativa pode contribuir com uma mistura “*de procedimentos de cunho racional e intuitivo capazes de ajudar na compreensão dos fenômenos*” (p. 2). Assim, nosso instrumento para coletar as informações foi uma atividade com questões abertas que envolvessem principalmente problemas conceituais, detalhadas a seguir.

3.2 – Apresentando nossas Atividades

Como desejávamos investigar sobre as imagens conceituais relacionadas ao conceito de limite e, por consequência, quais as definições conceituais pessoais formadas pelos mesmos, nossas atividades foram aplicadas a estudantes que já haviam estudado a disciplina de Cálculo I.

¹ “é aquela que exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorreu e reunir um conjunto de informações a serem documentadas” (GONSALVES, 2007, p.68).

Nessa perspectiva, as atividades foram elaboradas e aplicadas individualmente, e cada uma apresenta habilidades e propriedades diferentes da disciplina. A seguir, as questões e seus objetivos serão destacados.

- **1ª questão – definição de limite**

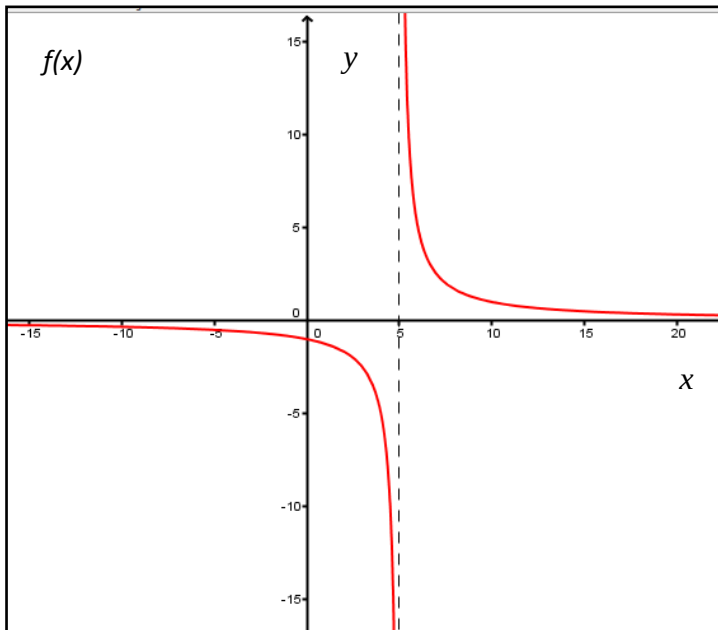
Explique o que significa dizer: dada uma função f , o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a , é igual a L .

Essa questão buscava identificar os aspectos de Definição Conceitual e Imagem Conceitual com a escrita livre do estudante. Estávamos interessados em verificar como o aluno interpreta a existência de um limite de uma função em um ponto. Não foi apresentada a palavra conceito ou definição nesse momento para não influenciar o estudante a usar fórmulas prontas de livros didáticos e, dessa forma, o caminho como cada estudante fosse delineando sua explicação, seu pensamento sobre a pergunta poderia indicar que imagens e definição ele tem sobre o tema. Ela teve embasamento nas pesquisas realizadas por Tall e Vinner (1981) e Zuchi (2005).

De acordo com os resultados de Tall e Vinner (1981), o conceito apresentado pela maioria dos estudantes é dinâmico, pois vêem o limite como algo que se aproxima de um ponto, sem nunca alcançá-lo. Esta situação também foi evidenciada por Zuchi (2005).

- **2ª questão – do gráfico para o cálculo**

Observe os gráficos das funções abaixo e determine, caso exista, os seguintes limites:



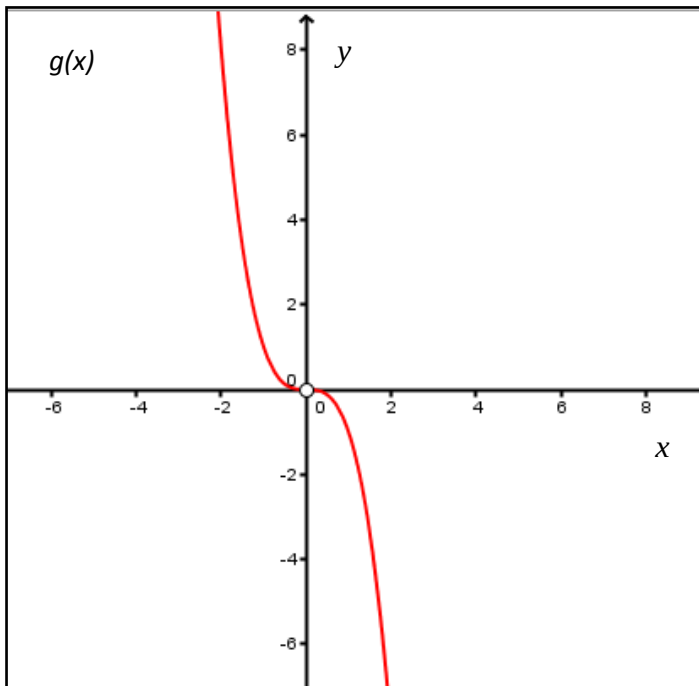
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$$

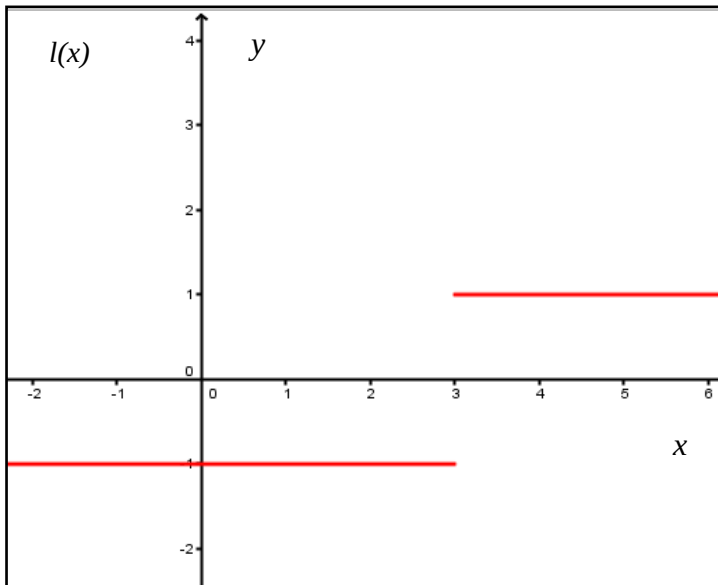
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) =$$

- Nos próximos dois casos temos também, além do gráfico, a lei de formação da função.
Determine, caso exista, os seguintes limites:



$$l(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}, x \neq 3$$

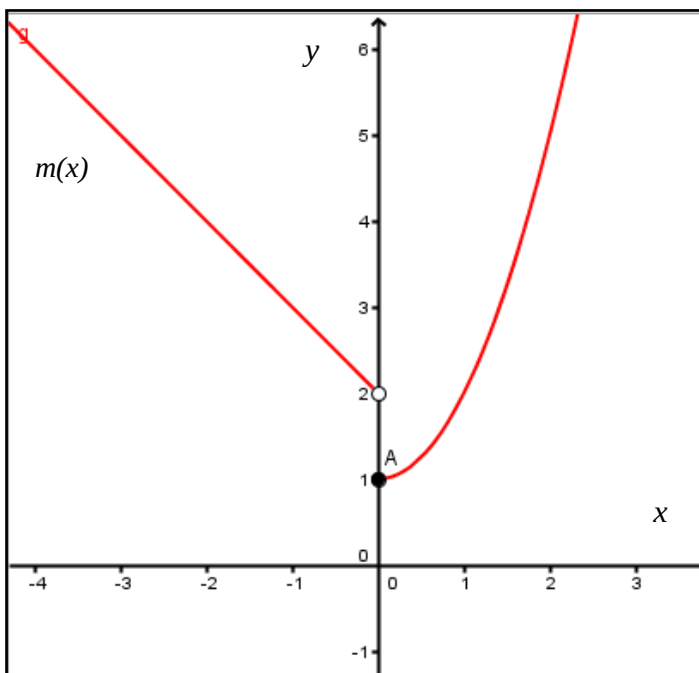
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} l(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} l(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} l(x) =$$



$$m(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < 0 \\ 1 + x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) =$$

Essa atividade explora as expressões matemáticas e a aprendizagem gráfica associadas ao conceito de limite. Como discutimos nos capítulos anteriores, o ensino de Cálculo I muitas vezes acontece de forma repetitiva, com muitos exemplos procedimentais, que não contribuem para uma reflexão sobre o conteúdo, mas sim uma memorização para repetição. Inclusive os livros didáticos trazem poucas atividades diferenciadas.

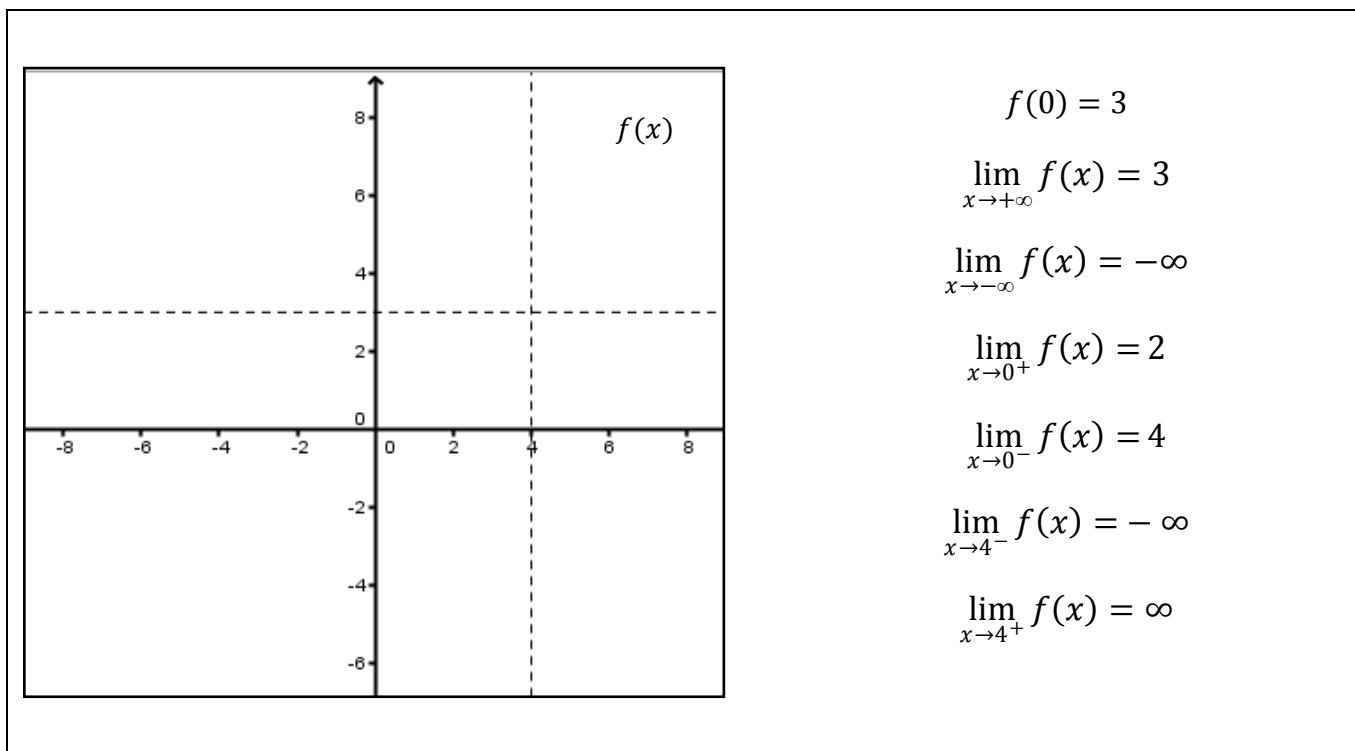
Nessa junção algébrica e gráfica, o objetivo da questão era investigar como o aluno interpreta geometricamente a existência do limite de uma função. Os gráficos acima trabalham com limites em um ponto, limites infinitos e limites no infinito. Os limites no infinito e infinitos são (AMORIN, 2011; SIERPINSKA, 1985) os mais difíceis para visualização pelos estudantes; acreditamos que com esse tipo de atividade o professor pode ajudar a criar a imagem desses limites e construir também uma habilidade para questões gráficas. Os gráficos ainda apresentam descontinuidade em pontos onde o limite existe, propositalmente, para investigarmos a imagem conceitual que os alunos construíram sobre a existência do limite no ponto.

Os Gráficos 3 e 4 também apresentam a sua lei de formação e seu domínio.

Essa questão tem como referência as discussões nos trabalhos de Amorin (2011) e Sierpinska (1985) e nas atividades realizadas por Abreu (2011) sobre limites de função. Norteou-se também, essa e a próxima questão, nas considerações de Juter (2006) sobre as Imagens Conceituais evocadas de estudantes em relação ao comportamento da função próximo e no próprio valor do limite.

- **3ª questão – construir o gráfico da função**

Utilize as informações abaixo para construir o gráfico da função $f(x)$:



Questão retirada do livro de Stewart, Cálculo, Vol. I, 2011, p. 127.

Na questão anterior, saímos do gráfico para determinar os limites e aqui queremos construir o gráfico da função a partir das informações dadas. São duas competências que o Cálculo propõe e que muitas vezes não consegue alcançar. Nessa questão, também é possível explorar a imagem algébrica e gráfica do estudante em relação a limites laterais e infinitos. Dessa forma, eles precisaram analisar o comportamento na vizinhança para construir o gráfico. Para ajudar nessa construção, colocamos um sistema de eixos com as respectivas assíntotas.

O objetivo principal dessa questão era explorar quais imagens conceituais os alunos haviam formado a partir da simbologia e se essas imagens poderiam ser transportadas para a representação gráfica, se tratando de limites laterais, infinitos e no infinito.

- **4ª questão – aplicação de limites**

(Questão retirada do livro “Cálculo: volume I” de Vilches e Corrêa, p.122) O custo em u.m. (unidades monetárias) para remover $x\%$ dos detritos tóxicos despejados num aterro é dado por:

$$s(x) = \frac{0,8x}{100 - x}$$

para $0 < x < 100$.

(a) Determine o custo referente à remoção de 20%, 40% e 60% dos detritos.

(b) O que acontece quando o valor percentual se aproxima de 100 pela esquerda? O que isso significa?

Em sua pesquisa, Abreu (2011) relata que em sua experiência como professor de Cálculo I, percebeu um descompasso entre a forma como o conceito era formalmente apresentado e a maneira como o aluno se apropriava dele. Nas palavras do autor, “os alunos conseguiam, até sem maiores dificuldades, resolver questões que envolviam cálculo de limite. A dificuldade aparecia no momento de contextualizar estas questões” (ABREU, p. 14). Os estudantes dessa pesquisa não

conseguiram relacionar qualquer problema com o conceito de limites, por exemplo. Esse bloqueio estaria, segundo o mesmo, relacionada a Imagem Conceitual que esses alunos constroem.

Concerne frisar que essas mesmas considerações aparecem não somente no trabalho de Abreu, mas em tantos outros trabalhos já citados, o que evidencia a preocupação e a necessidade de uma mudança nos processos de ensino de Cálculo I.

Com base nesses argumentos, a questão acima foi retirada do livro “*Cálculo: volume I*” de Vilches e Corrêa, com o objetivo de investigar a compreensão dos estudantes ao aplicarmos o conceito de limite em uma situação.

Conforme Moysés (1997, p.68), o contexto “[...] *permite que não se perca o fio condutor ao se resolver um problema de matemática*”. Contextualizar um problema da Matemática oferece significado aos conteúdos dessa disciplina e permite que o estudante visualize a sua aprendizagem, pois, segundo o mesmo autor, quando é possível usar artifícios da Matemática para resolver um problema, responder a uma situação, então esse conteúdo foi de fato apreendido pelo indivíduo.

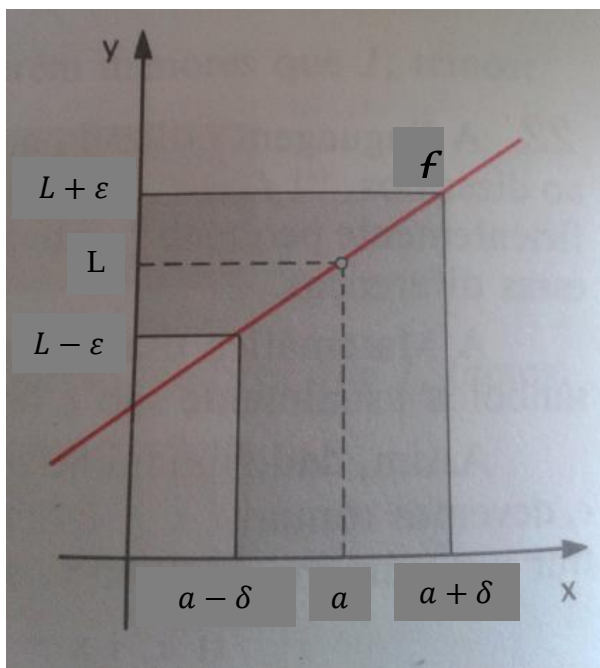
O Cálculo I não é uma disciplina de procedimentos para o próprio Cálculo, antes é uma área da Matemática que apresenta conceitos aplicáveis e totalmente essenciais a várias outras áreas, inclusive a ela mesma. Nesse sentido, torna-se importante avaliarmos os estudantes que fizeram a disciplina quanto a resolução de problemas que envolve o conceito de limite.

- **5ª questão – definição formal de limites**

Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente o próprio a , ilustrada abaixo. Então,

a) *O que acontece quando a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena?*

b) *Usando o item a) discuta qual o significado da frase: a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando a distância de x a a suficientemente pequena, mas diferente de zero.*



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar – Gelson Iezzi,.

Decorre da teoria de Tall e Vinner (1991) que ao se deparar com um novo conceito, o indivíduo constrói representações visuais, experiência, impressões que formam sua Imagem Conceitual sobre determinado conteúdo, e é a partir dessas imagens que ele constrói sua Definição Conceitual, que não é necessariamente a definição formal divulgada pela comunidade matemática. Trabalhar com atividades que exijam do estudante a exposição dessa definição contribui para um maior acompanhamento, por parte do professor, que pode, tendo percebido confusões nas respostas, buscar um caminho alternativo para trabalhar determinado conceito.

Nesse sentido, a supracitada questão trabalha indiretamente com a definição formal e busca analisar se os estudantes conseguem argumentar a definição de limite, se conseguem perceber a presença e a importância dos intervalos na definição e se conseguem formar uma definição conceitual pessoal coerente sobre tal conceito.

3.3 – Os Participantes e Local da Pesquisa

Nosso campo de pesquisa foi uma turma do curso de Matemática - Licenciatura, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, da Universidade Federal de Pernambuco no Centro Acadêmico do Agreste - CAA em Caruaru, Pernambuco. A turma continha 25 estudantes matriculados, dos quais apenas 18 frequentavam regularmente. Desses, 15 eram do curso de Matemática e os outros 3 do curso de Física que conseguiram vaga nessa turma.

A disciplina de Cálculo I, no CAA, é um componente curricular obrigatório, ofertado no terceiro período do curso de Matemática, com carga horária de 60 horas/aula compreendendo os conteúdos: limites, continuidade, derivada e integral. Os estudantes participantes tiveram uma hora/aula para responderem o questionário dessa pesquisa e assinaram autorizando que os dados analisados fossem divulgados com finalidade acadêmica, mantendo o anonimato dos mesmos.

No próximo capítulo apresentaremos a análise dessas atividades.

Capítulo 4:

Análise dos Resultados

A partir de agora, faremos a análise dos dados das atividades respondidas pelos estudantes participantes da pesquisa. Faremos uma análise qualitativa e quantitativa das respostas, utilizando do nosso referencial teórico e retornando sempre a nossa questão de investigação, em busca de tentar respondê-la.

Salientamos que, quando falamos sobre imagens conceituais, estamos nos referindo a alguns elementos que compõem a imagem conceitual dos estudantes, pois, como foi discutido anteriormente, não é possível falar da imagem global de um estudante que está sempre em construção.

4.1 - Questão 1

Nessa questão pedíamos que o estudante explicasse o que significa dizer: dada uma função f , o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a , é igual a L . Observamos que nenhum estudante deixou de responder essas atividades e apenas um deles deu uma resposta simbólica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

As outras respostas estão categorizadas no quadro a seguir – as categorizações estão baseadas nas próprias respostas dos estudantes não tendo sido pré-definida nenhuma classificação:

	Imagem conceitual evocada “dada uma função f , o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a , é igual a L .”	Quantidade	Percentual
1	O limite se aproxima, ou tende, a um valor, sem alcançá-lo.	12	66,7%
2	A função assume o valor de L quando aplicamos valores de a em x .	4	16,7%

Observamos que mais de 60% dos estudantes investigados apresentou definições informais em que o limite se aproxima de um valor ou tende a um valor, sem alcançá-lo. Tomemos como exemplo as respostas dos estudantes,

Figura 5 – Protocolo de resposta do Estudante A10 – Questão 1

Figura 6 – Protocolo de resposta do Estudante A01 – Questão 1

Esses estudantes apresentam uma noção dinâmica de limite de uma função; Tall e Vinner (1981) e Zuchi (2005) já encontraram resultados semelhantes e mencionaram em pesquisas o fato de os estudantes não considerarem o conceito estático de limite, ou seja, o próprio valor do limite.

Os estudantes A15, A03 e A17 disseram que a função assume o valor de L quando aplicamos valores de a em x ; mostrando erro conceitual da definição de limite.

Em um dos questionários essa resposta estava incompleta não sendo possível sua análise.

Em geral, a maioria dos resultados da pesquisa apontam para o problema da dicotomia dinâmica/estática do conceito dinâmico de limites.

4.2 - Questão 2

Solicitamos aos estudantes que a partir das informações dadas no gráfico de uma função, determinassem se existia e qual era o limite da função em algumas situações. O objetivo aqui era analisar elementos da intuição gráfica e algébrica dos estudantes.

No primeiro gráfico, 72,2% dos estudantes respondeu corretamente a existência dos limites laterais e do limite no ponto, justificando corretamente que como os limites laterais eram diferentes então o limite no ponto não existia, e somente dois desses erraram o $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$. Contrapondo a isto, no segundo gráfico, apenas 44% dos estudantes conseguiu responder corretamente o $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Acreditamos que, como o gráfico da função g não está definido em $x = 0$ os estudantes podem ter associado a existência do limite à imagem da função.

Em relação ao limite quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, no primeiro gráfico, o índice de acerto foi de 60%, caindo no segundo gráfico para 39%. Nele, o limite da função $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. Todas as respostas erradas disseram o contrário, o que pode indicar uma falta de atenção dos estudantes que associaram o crescimento da variável ao crescimento da função. Esse mesmo erro é cometido por 61% dos estudantes no item dois da última função m ; esses dizem que quando a x tende a $-\infty$, a função também tenderá.

Os Gráficos 3 e 4, das funções l e m , respectivamente, além do gráfico, apresentamos também a lei de formação e o domínio para ajudar nas respostas e ainda, possivelmente, perceber se os estudantes acertariam mais quando conhecessem a função em questão. Apesar de não ser objeto de estudo dessa pesquisa, a idéia de continuidade está presente principalmente nesses dois gráficos que analisaremos a seguir.

Os itens que trabalhavam com limites no infinito tiveram índices de acerto de 67% na terceira função e, dentre os que erraram, a resposta que mais apareceu foi que o limite daria infinito. Disso, podemos inferir que existe uma dificuldade por parte de alguns estudantes em analisar, a partir do gráfico, o comportamento de uma função. Nessa mesma questão, tínhamos $\lim_{x \rightarrow 3} l(x)$ onde 3 não fazia parte do domínio da função l . Dos dezoito estudantes participantes, doze (equivalente a 66,7%) acertaram os limites laterais e no ponto, um deles não respondeu e os outros cinco não conseguiram interpretar corretamente a aproximação lateral, isto é, quando x se aproximava de 3 pela direita e pela esquerda dando como resposta o limite igual a 0.

Não podemos afirmar que a presença da lei de formação das funções e o domínio ajudaram nas respostas dos estudantes, apesar de que em dois questionários existem cálculos realizados no canto da folha utilizando as técnicas limites. Precisariamos investigar, talvez entrevistando os estudantes, para analisar esse ponto.

O último gráfico, função m , trás aspectos interessantes por ser uma função definida por parte e descontínua em $x = 0$. Uma situação que gostaríamos de destacar são as respostas do estudante A02 que, apesar de ter respondido corretamente que $\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = 2$ encontrando valores diferentes, afirma que $\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = 0$, valor este que sequer aparece nos limites laterais. Ponderamos que a descontinuidade em $x = 0$ seja a causa dessa confusão, mostrando também nessa questão, uma associação entre continuidade e existência de limite.

4.3 - Questão 3

O objetivo principal dessa questão era explorar quais imagens conceituais os alunos haviam formado a partir da simbologia e se essas imagens poderiam ser transportadas para a representação gráfica, tratando-se de limites laterais, infinitos e no infinito. O estudante deveria observar o comportamento da função f na vizinhança $x = 4$ e $x = 0$ e também quando x se tornava muito grande ou muito pequeno para esboçar o gráfico da função.

Essa atividade foi retirada do livro de Cálculo I de Stewart (2011, p.127) e nele é apresentada uma resposta para ela. Apesar disso, note que não há informação, por exemplo, sobre raízes da função ou concavidades, e dessa forma o aluno tem uma liberdade maior para responder a questão, podendo inclusive considerar uma resposta diferente da apresentada. Dois estudantes (11,1%) conseguiram construir o gráfico corretamente, segundo a resposta dada por Stewart (idem); dois estudantes deixaram em branco e os demais apresentaram respostas confusas, corretas ou parcialmente corretas.

Apresentaremos algumas respostas parcialmente corretas para explicitar os erros mais comuns.

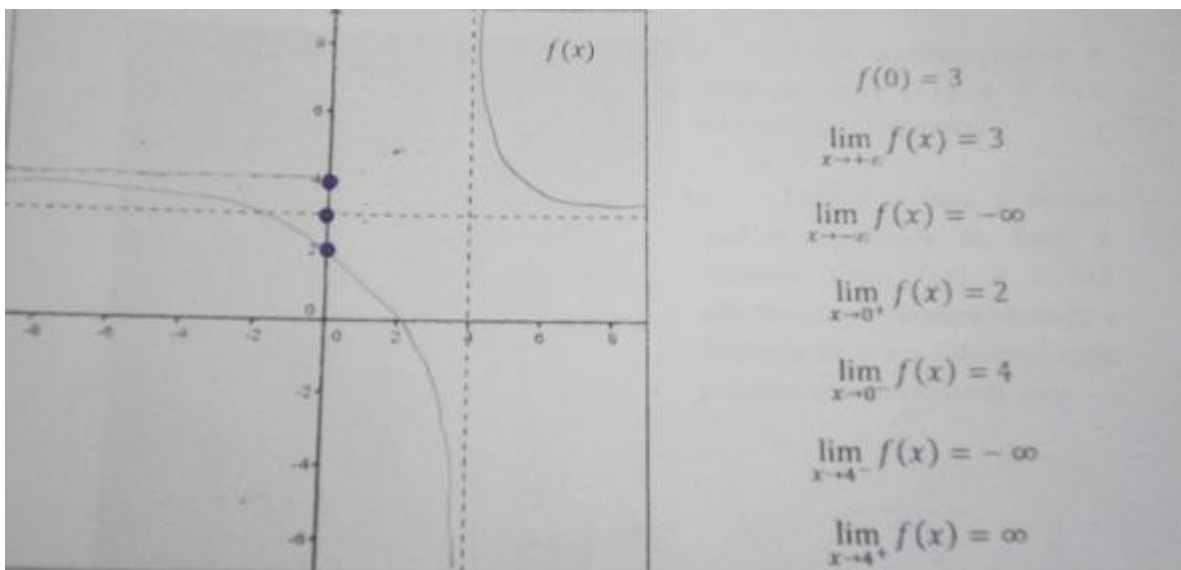


Figura 7 - Protocolo de resposta do Estudante A15 – Questão 3

A Figura 7 mostra a resposta do Estudante A15, que interpretou corretamente o comportamento da função quando $x \rightarrow \infty$ e nas aproximações laterais. Por outro lado, quando se trata do comportamento de $x \rightarrow -\infty$, ele parece interpretar que o gráfico se aproxima de 4, inclusive usa uma reta pontilhada em $y = 4$, como se quisesse esboçar uma assíntota. Na questão é dada a informação $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$. Esse estudante também usa ‘bolinhas pintadas’ – notação utilizada geralmente para denotar imagem da função - em $y = 2$, $y = 3$ e $y = 4$, deixando confuso seu gráfico; no caso dessa função, a imagem de $x = 0$ é 3.

Já o Estudante A03, Figura 8, usa a notação de pontinho, mas deixa claro que não está se referindo a ele como domínio. Apenas dois estudantes usaram essa notação. Veja como ele escreve:

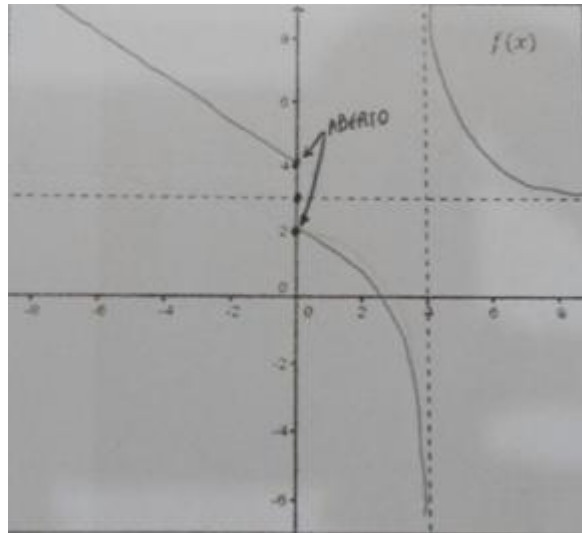


Figura 8 – Protocolo de resposta do Estudante A03 – Questão 3

O erro do A03 é referente ao limite quando x se torna cada vez menor, isto é, quando $x \rightarrow -\infty$ que o estudante interpretou que $f(x) \rightarrow \infty$. Problemas com limites no infinito aconteceram em 87,5% dos questionários respondidos, lembrando que dois estudantes não tentaram responder essa questão. Resultado semelhante foi encontrado nas pesquisas de Sierpinska (1985, p. 39), “o conjunto de obstáculos que nos parece mais importante é o que resulta da recusa dos conjuntos infinitos. Trata-se de horror ao infinito”, e também nas pesquisas de Abreu (2011), Messias (2012), que em questões semelhantes perceberam essas barreiras.

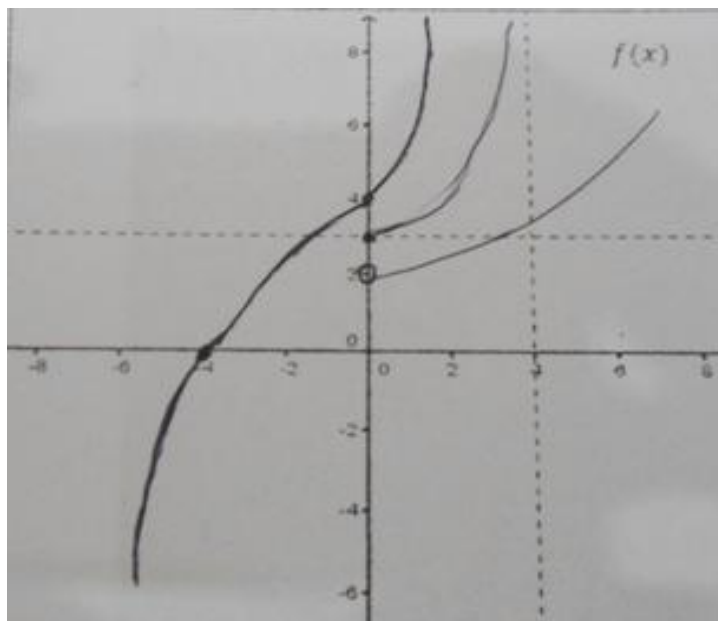


Figura 9 – Protocolo de resposta do Estudante A09 – Questão 3

O caso da Figura 9 acima exemplifica os erros ocorridos nos limites laterais da função f . O estudante não respeitou a assíntota $x = 4$ e também não interpretou corretamente o comportamento da função quando $x \rightarrow \infty$ (o gráfico deveria se aproxima cada vez mais da assíntota $y = 3$). Nesse exemplo, os limites laterais e também no infinito não foram bem respondidos. Casos como esse aconteceram em 75% das atividades (doze atividades).

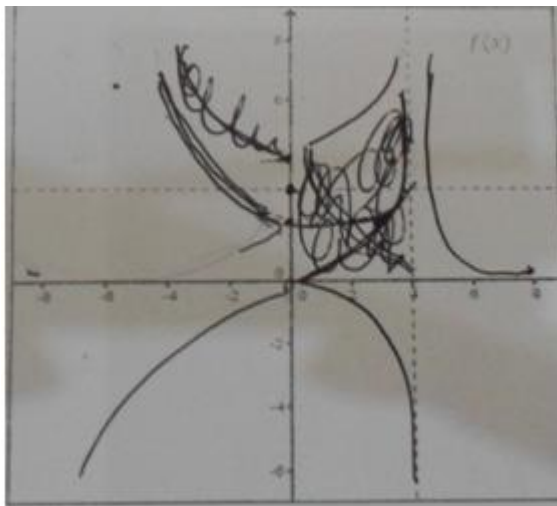


Figura10 – Protocolo de resposta do Estudante A01
- Questão 3

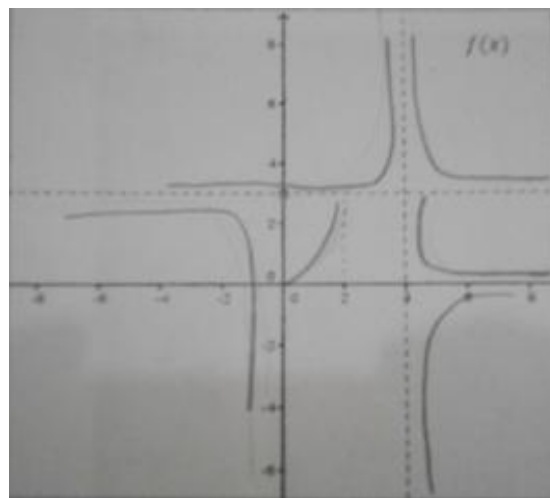


Figura 11–Protocolo de resposta do Estudante A14
- Questão 3

Destacamos ainda o gráfico do Estudante A01, Figura 10. Encontramos novamente problemas com assíntotas, o estudante interpreta o comportamento da função quando $x \rightarrow \infty$ como $f(x) \rightarrow 0$ e ainda, a atividade afirma que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, mas na imagem acima parece se aproximar de 0. Há ainda aqueles que não conseguiram responder a questão corretamente, apresentando um gráfico com informações confusas, como a Figura 11 do Estudante A14, e em outras duas atividades analisadas.

A transposição do cálculo para o gráfico apresentou nessa atividade um índice baixo de acertos, o que evidencia a dificuldade dos estudantes em visualizarem o comportamento de uma função quando se fala dos limites dela.

4.4 – Questão 4

Essa atividade envolvia uma situação de contextualização do cálculo de limite de função. É dada inicialmente uma função que calcula em u.m. (unidades monetárias) o custo para remover detritos tóxicos despejados em um aterro; a variável x é o percentual de detrito a ser removido. Em seguida, foi solicitado ao estudante: calcular o custo referente a remoção de 20%, 40% e 60%

e analisar o que acontece quando o valor percentual – o valor de x - se aproxima de 100 por valores menores que 100.

Já discutimos anteriormente a relevância de trabalhar o ensino de cálculo com problemas contextualizados. Como afirma Moysés (1997, p.68) contextualizar um problema da Matemática oferece significado aos conteúdos dessa disciplina e permite que o estudante visualize a sua aprendizagem. Quando um estudante consegue argumentar sobre o conceito de limite e utilizá-lo para explicar determinadas situações, então acreditamos que ele o compreendeu completamente.

Para nossa preocupação, 50% dos participantes não respondeu essa questão. Dos outros nove participantes, A12 respondeu apenas a letra **a** e A14 calculou o limite da função para valores de x se aproximando de 100, entretanto não inferiu nenhum comentário a respeito do resultado.

Um dos aspectos que consideramos relevante na análise dessa atividade foi o tipo de resposta apresentada, isto é, se a resposta trazia uma análise somente do cálculo do limite ou se ela levantava considerações a respeito da situação em questão. Nesse sentido, apresentamos abaixo as explicações dadas pelos estudantes:

Figura 12 – Protocolo de resposta do Estudante A08 – Questão 4

Figura 13 – Protocolo de resposta do Estudante A16

- Questão 4

Figura 14 – Protocolo de resposta do Estudante A04

- Questão 4

As figuras acima mostram que a análise feita pelo estudante é somente conceitual. Ele indica o que está acontecendo algebricamente, mas dá um significado à situação. Já as figuras mostram as respostas dos estudantes que apresentam o cálculo do limite e tentam explicar o que aquele resultado significa.

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} S(x) = +\infty$$

que o custo torna-se cada vez mais inviável.

Figura 15 – Protocolo de resposta do Estudante A01 – Questão 4

$$b) \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{0,8x}{100-x} = +\infty$$

Isso quer dizer que quanto mais detritos forem retirados maior será o custo.

Figura 16 – Protocolo de resposta do Estudante A03 – Questão 4

$$b) \lim_{x \rightarrow 100^+} \frac{0,3x}{100-x} = +\infty$$

Significa que o custo em m. vai crescer infinitamente (positivo).

Figura 17 – Protocolo de resposta do Estudante A13 – Questão 4

4.5 – Questão 5

A última questão da atividade trabalha indiretamente com a definição formal de limites. Busca verificar se os estudantes conhecem e se formaram imagens conceituais sobre a noção de intervalos, que define formalmente o conceito de limites. Para tanto, utilizamos da noção de distâncias.

Apenas três (16,7%) estudantes não responderam essa questão e outros três deles responderam apenas a letra *a*: A09 “*significa que o limite do erro está quase irreconhecível*”, A10 e A15 “*o valor de ϵ diminui*” “*o valor de ϵ é pequeno*”. O Estudante A09 foge do conceito de limite ao dar sua resposta, A10 e A15, observam que o valor de ϵ também diminuirá, mas não argumenta sobre o fato.

Para melhor analisarmos as respostas dadas, optamos por categorizá-las segundo a imagem apresentada pelos estudantes, como segue:

- Respostas da letra *a*

	Imagem conceitual evocada “O que acontece quando a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena?”	Quantidade	Percentual
1	A distância entre $f(x)$ e L tende a se igualar a 0.	2	11,1%
2	Os valores da função se aproximam de L , mas não são iguais a L .	2	11,1%
3	A distância entre x e a fica arbitrariamente pequena.	2	11,1%
4	A função se aproxima do limite, mas não é contínua nesse ponto.	1	5,5%
5	A função se aproxima do seu limite.	3	16,7%
6	Significa que existe um ϵ num intervalo também arbitrariamente pequeno.	1	5,5%
7	Tenderá à a .	1	5,5%

Observamos que cinco participantes limitaram-se a tentar descrever ou reescrever a questão (Categorias 1 e 5), como no caso dos estudantes A04 e A13.

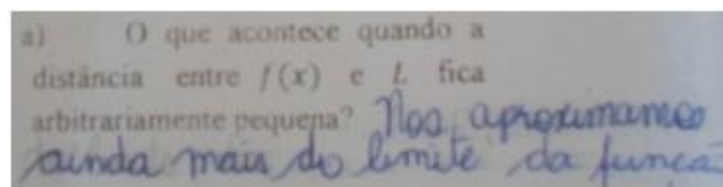


Figura 18 – Protocolo de resposta do Estudante A04 – Questão 5a

Figura 19 – Protocolo de resposta do Estudante A13 – Questão 5a

Novamente a imagem da continuidade aparece em uma resposta (Categoria 4). O estudante escreve,

Figura 20 – Protocolo de resposta do Estudante A14 – Questão 5a

As partes “fica a uma distância pequena de L , significa dizer que a função não é contínua neste ponto”, “significa que chega muito perto do L , mas não é contínua no ponto” evidenciam a relação de dependência entre limite e continuidade na imagem desse participante. Parece haver também uma confusão quanto a existência ou não do limite nos fragmentos “tem limite,...” e “... a função se aproxima do limite mas existe um buraco que a impede”. Em momento algum é feita referência a intervalos ou a definição formal de limite. Precisaríamos investigar mais a fundo, possivelmente conversando com o Estudante A14, para entender sua resposta.

Pudemos observar somente na resposta do Estudante A03, Figura 21, uma noção, ao menos intuitiva, que a definição de limites está relacionada com os intervalos tomados quando escreve “significa que definimos um ϵ arbitrariamente pequeno”.

Figura 21 – Protocolo de resposta do Estudante A03 – Questão 5a

- Respostas da letra b

	Imagem conceitual evocada “Qual o significado da frase: a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando a distância de x a a suficientemente pequena, mas diferente de zero.”	Quantidade	Percentual
1	O valor de x se aproxima do valor de a , mas nunca será igual a a .	2	11,1%
2	(descrevem ou reescrevem a questão, apenas redigindo de outra maneira).	3	16,7%
3	Existem os limites laterais e, portanto existe o limite.	4	22,2%
4	Relaciona distancias pequenas com ϵ e δ .	1	5,5%
5	Resposta aleatória (não evocam imagens conceituais a respeito da questão)	2	11,1%

O motivo do gráfico na questão seria para instigar os estudantes a pensarem sobre intervalos cada vez menores, e vimos que 22,2% desses relacionaram a frase da questão com limites laterais. Dois estudantes ainda apresentaram respostas que não evocam imagem sobre a definição formal do conceito de limites, como, “*significa dizer que a não pertence ao domínio da função $f(x)$, pois estamos falando de limites*” ou “*não podemos considerar um distância igual a zero, pois nesse caso não teremos um intervalo e sim um ponto.*”

Queremos destacar a resposta do Estudante A14, Figura 22, que, de forma intuitiva, fala sobre distâncias e as relaciona com ϵ e δ .

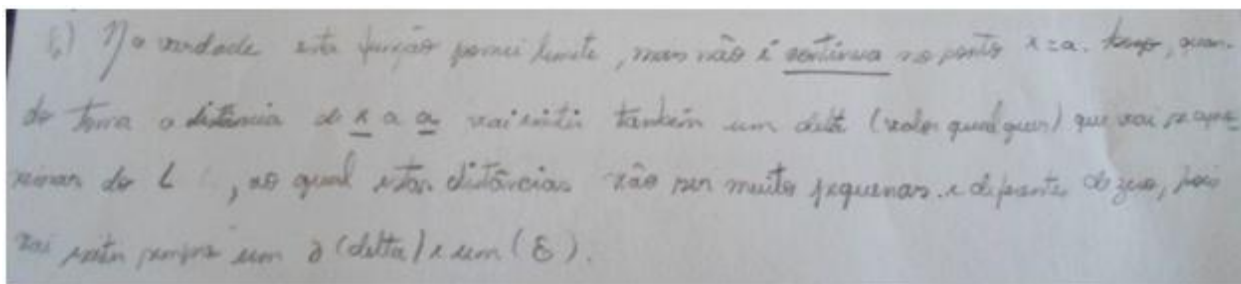


Figura 22 - Protocolo de resposta do Estudante A14 – Questão 5b

Observe que as imagens evocadas pelo estudante parecem confusas, principalmente na frase “*também um delta (valor qualquer) vai se aproximar do L* ”, mas é importante notar que ela nos mostra elementos da definição formal que, se bem organizados, responderiam nossa pergunta. Como já foi dito, as imagens conceituais são individuais e podem ser confusas no processo de aprendizagem, formando, portanto, uma definição pessoal confusa. O trabalho com questões que a façam expor essas imagens ajuda o professor a melhor intervir no processo.

Nosso objetivo não era que os estudantes escrevessem corretamente a definição formal de limites; queríamos analisar as imagens conceituais acerca de e investigar se a noção de intervalo estaria presente entre as respostas. Encontramos resultados ainda mais negativos que nas atividades anteriores.

Abaixo a definição formal dada por Stewart (2011, p. 98) para compararmos os elementos trazidos nela e na resposta da figura 22:

Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente o próprio a . Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Capítulo 5:

Considerações Finais

Propusemo-nos nessa pesquisa a investigar os elementos que compõem as Imagens Conceituais dos estudantes universitários do curso de Matemática - Licenciatura e, para tanto, baseados na Teoria de Imagem Conceitual e Definição Conceitual, nortearmos nossos estudos, elaboramos e aplicamos um questionário com atividades sobre o conceito de limite de função com uma variável real.

Em nossa Revisão de Literatura, pudemos perceber que o ensino de Cálculo I tem sido alvo de investigações em Educação Matemática, principalmente no que se refere à apreensão de conceitos de limite de função. Tall e Vinner (1981) tendo encontrando essas dificuldades em seu trabalho com a matemática avançada construíram uma Teoria, chamada Imagem Conceitual e Definição Conceitual, na qual um conceito somente se torna conhecimento para um indivíduo se esse tiver experiências anteriores que o faça construir imagens conceituais e definições conceituais; ele precisa familiarizar-se com esse conceito antes de sua formalização.

Segundo Vinner (1997), a definição formal cria um problema sério na aprendizagem da Matemática. Ela representa um conflito entre a estrutura da Matemática, como ela é vista pelo matemático profissional, e os processos cognitivos de aquisição de conceito. Com isso, Vinner não quis abolir as definições no ensino de Matemática, mas justificar que iniciar o processo de ensino com elas não contribuirá para a aprendizagem do estudante; esse processo deve ser gradual e a maneira que se desenvolve as imagens e as definições pessoais de cada estudante.

A partir da análise dos questionários, concluímos que as principais Imagens Conceituais evocadas pelos estudantes foram:

- Aspecto dinâmico do limite: idéia de aproximação em relação a determinado valor, sem alcançá-lo;
- Não conseguir visualizar limites infinitos e no infinito a partir do gráfico e do gráfico para a álgebra (SIERPINSKA, 1985);
- Crescimento da variável relacionado ao crescimento da função; quando x tende para o infinito a função também;
- Não continuidade implica na não existência do limite;
- O limite da função existe se não houve ‘saltos’ ou ‘buracos’ no gráfico da função;

- As expressões “tender para” e “se aproximar de” implicam na idéia de que a função se aproxima do limite à medida que x se aproxima de um número a , ou seja, $f(x)$ deve ser necessariamente diferente de L . (Resultado encontrado por TALL; VINNER, 1981)
- Ter limite é assumir um valor;
- Não saber interpretar o resultado do limite dentro de um contexto;
- Para o limite existir, seus limites laterais devem ser iguais.

A maioria das Imagens Conceituais apresentadas pelos sujeitos investigados, e algumas definições dadas na primeira e na última questão, apresentam alguma confusão conceitual. Elas não são erradas, pois não existem imagens conceituais erradas – como discutido -, entretanto apresentam uma lacuna (chamada *gap* pelos pesquisadores) com a definição formal. A partir da análise da atividade concluímos que os alunos parecem apenas ter facilidade em interpretar a existência do limite em questões do gráfico para a álgebra (REIS, 2001; ABREU, 2011; MEYER, 2003) e se mostraram confusos quando transitavam em outras representações.

Na questão 5, os resultados também não foram positivos. Somente um estudante conseguiu levantar elementos ou imagens da definição formal de limites.

Como já mencionamos, há um grande desajuste entre executar o cálculo do limite e entender seu significado (CORNU, 1991), especificamente quando se trata das expressões “tender a” e “ter limite”. Realizar corretamente o cálculo do limite de uma função não garante a aprendizagem do mesmo e os resultados da pesquisa nos mostram a importância de se trabalhar com problemas conceituais, para acompanhar a aprendizagem do estudante. Surgem dessas considerações outras duas perguntas: qual o prejuízo desse ensino para a formação do futuro professor de matemática? Quais as contribuições do Cálculo I para o trabalho do professor de matemática na educação básica?

Acreditamos que os resultados dessa pesquisa poderão subsidiar pesquisas futuras e possíveis mudanças no trabalho dos professores, tendo em vista que as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes dessa pesquisa acerca do conceito de limite de função servirão de base para a elaboração de propostas para viabilizar a aprendizagem desse conceito, de maneira a evitar os possíveis conflitos relacionados a essas evocações.

Não tivemos a intenção, nesse trabalho, de encerrar a discussão em torno do ensino de Cálculo I, ao contrário, abrir caminhos para novas investigações e novos olhares. Também sabemos que existem outros aspectos que precisam ser analisados para poder pensar uma nova forma de ensinar Cálculo I para professores em formação, por exemplo, como é composto o currículo dessa disciplina, quais os livros didáticos que são utilizados, como os professores em formação podem se utilizar do Cálculo para compreender melhor a Matemática Elementar do Ensino Básico, dentre outros.

Por fim, concluímos nosso trabalho na esperança que ele seja uma leitura agradável e útil para professores e que ele possa ser a razão de maiores reflexões e, por consequência, mudanças positivas no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Referências Bibliográficas

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limite e continuidade em ambientes computacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

AMORIN, L. I. F. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza Gomide. – 2 ed. - São Paulo: Edgard Blucher, 488p. 1999.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior.** Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

CIVITA, V. **Enciclopédia de Ciência Ilustrada.** – v.11 - São Paulo: Abril Cultural, 1969.

CORNU, B. **Limits.** In: TALL, D. O. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, p.153 – 166, 1983.

CURY, H. N. **Concepções e crenças dos professores de Matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados.** Bolema, Ano 12, nº13, p. 29 – 43, 2005.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de Conceitos Matemática Avançados – A Matemática no Início do Superior.** Tese de Doutorado em Ciências de Educação. Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes.** In: TALL, D. O. *Advanced Mathematical Thinking.* Londres: Kluwer, p. 95 – 123, 1991.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** – 4 ed. – 12º reimpr. São Paulo: Atlas, 2009.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades.** Revista de administração de empresas. São Paulo, 1995.

GONSALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica.** – 4 ed. – 96 p. Campinas, SP: Editora Alínea, 2007.

LIRA, A. F. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com a utilização de objetos digitais.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

MACEDO, N. D. de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica: guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa.** – 2. Ed. revista- São Paulo: Edições Loyola, 1995.

MESSIAS, M. A. V. F.; COSTA, A. C. **Limite de Função: Conceito Imagem x Conceito Definição.** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador – BA, 2010.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual.** Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2003.

MOYSÉS, L. **Contextualizar a matemática: o grande desafio do professor.** In: Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática (Coleção Magistério: formação e trabalho pedagógico). Campinas: Papirus, p. 65-73, 1997.

NETO, J. P. S. **Um estudo sobre o ensino de limite: um tratamento computacional com aplicações.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

NEVES, J. L. **Pesquisa Qualitativa: características, usos e possibilidades.** Caderno de pesquisas em Administração. São Paulo, v. 1. n. 3. Minas Gerais, 1996.

NUNES, M. N. F. **Sequências numéricas: um estudo da convergência através de atividades.** Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 2001

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores – pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas, 2001.

SANTOS, M. G. **Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite.** Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo, 2005.

SIERPINSKA, A. **Obstacles epistemologiques relatives a la notion de limite.** RDM – v.6, nº 1, p. 5 – 67, 1985.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica.** – v.1 – São Paulo: Makron Books, 2000.

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking.** Londres: Kluwer, 1991.

TALL, D. O. **The Transition to Advanced Mathematical Thinking.** In: Grouws D. A. Ed. New York: Macmillan, p. 495 – 511, 1992.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity**. Londres: Kluwer, p. 151 – 169, 1981.

VIEIRA, D. J. C. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite**. Departamento de Matemática. Universidade de Aveiro. Revista Millenium, v. 16. 1999.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics**. In. Advanced Mathematical Thinking (Ed. David Tall). Londres: Kluwer, p. 65 – 81, 1991.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência Didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.

ZUIN, E. S. L. **Cálculo, uma abordagem histórica**. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. (Orgs) Educação Matemática: a prática educative sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 13 – 38, 2001.