



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

JARBAS DANTAS DA SILVA

Equações de Navier-Stokes em espaços de Besov-Morrey: um sistema fracionário
acoplado e problemas com viscosidade hereditária

Recife

2023

JARBAS DANTAS DA SILVA

Equações de Navier-Stokes em espaços de Besov-Morrey: um sistema fracionário acoplado e problemas com viscosidade hereditária

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): Prof. Dr. Claudio Cuevas

Coorientador (a): Prof. Dr. Bruno de Andrade

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586e Silva, Jarbas Dantas da
Equações de Navier-Stokes em espaços de Besov-Morrey: um sistema fracionário acoplado e problemas com viscosidade hereditária / Jarbas Dantas da Silva. – 2023.
89 f.: il., fig, tab.

Orientador: Claudio Cuevas.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Comportamento assintótico. I. Cuevas, Claudio (orientador).
II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-67

JARBAS DANTAS DA SILVA

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM ESPAÇOS DE BESOV-MORREY: UM SISTEMA FRACIONÁRIO ACOPLADO E PROBLEMAS COM VISCOSIDADE HEREDITÁRIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 14/04/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos (Co-orientador)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

"Confia ao Senhor as tuas obras, e teus pensamentos serão estabelecidos" (Provérbios 16:3).

A Ti agradeço, meu Deus, por ter me dado força para alcançar essa vitória tão desejada.

A toda a minha família, em especial minha mãe Josefa Dantas, meu pai Joacil Pontes, meus irmãos Jordão Joanes e Jordânia Dantas e meus avós, aos quais sempre serei grato.

À minha amada esposa Nathália Cordeiro por me apoiar em meus planos e projetos, sendo meu refugio em momentos difíceis. Também por estar sempre disposta a ajudar em tudo que preciso; você é meu presente de Deus.

Aos meus professores Claudio Cuevas e Bruno de Andrade, pela orientação, dedicação e pelo aprendizado que levarei comigo ao longo da minha vida acadêmica.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação do Dmat-UFPE, em especial, Isadora, Mário, Mateus, Rafael, Danilo e Micael, que fizeram parte dessa longa caminhada, saibam que torço pelo sucesso de todos.

Aos meus amigos de longas datas que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso, Luan, Hudson, Brito, Santiago, Silvano, Fagner, Vandeson, Felipe e minhas professoras da graduação Márcia e Gisélia, sempre irei guardar vocês no meu coração.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos as equações de Navier-Stokes em duas situações diferentes, o primeiro caso trata-se do problema fracionário em que temos o modelo de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes, o segundo diz respeito às equações de Navier-Stokes com viscosidade hereditária. Para o modelo acoplado provamos a existência de soluções brandas globais, com dados iniciais pequenos em espaços de Besov-Morrey críticos, e unicidade em um sentido específico. Os resultados apresentados nos permite obter soluções auto-similares desde que os dados iniciais sejam funções homogêneas com normas pequenas e considerando o caso do atrante químico sem taxa de degradação. Além disso, verificamos a estabilidade assintótica de soluções com o tempo tendendo ao infinito e obtemos uma classe de soluções assintoticamente auto-similares. Para as equações com viscosidade hereditária usamos a estrutura dos resolventes subordinados para aplicar a mesma metodologia do caso acoplado. Da mesma forma, garantimos com isso a existência e unicidade, também em um sentido específico, de soluções brandas globais ou locais, a depender do núcleo da equação integro-diferencial, com condições iniciais pequenas em espaços de Besov-Morrey. Para as soluções globais também obtemos resultados de estabilidade sob perturbação dos dados iniciais.

Palavras-chaves: modelos de quimiotaxia; equações de Navier-Stokes incompressíveis; boa colocação; comportamento assintótico; espaços de Besov-Morrey; viscosidade hereditária.

ABSTRACT

In this work, we study the Navier-Stokes equations considering two different situations, the first case is about the fractional problem where we have the Keller-Segel model coupled with the Navier-Stokes equations, the second case concerns the Navier-Stokes equations with hereditary viscosity. For the coupled model we prove the existence of global mild solutions with the small initial data in critical Besov-Morrey spaces, and uniqueness in a specific sense. Our results enable us to obtain the self-similar solutions provided the initial data are homogeneous functions with small norms and considering the case of chemical attractant without degradation rate. Moreover, we show the asymptotic stability of solutions as the time goes to infinity and obtain a class of asymptotically self-similar ones. For the equations with hereditary viscosity we use the structure of subordinate resolvents to apply the same methodology of the coupled case. Likewise, we ensure the existence and uniqueness, also in a specific sense, of either global or local mild solutions, depending on kernel of the integrodifferential equation, with small initial conditions in Besov-Morrey spaces. For the global solutions we also obtain stability results under perturbation of the initial data.

Keywords: chemotaxis models; incompressible Navier-Stokes equations; well-posedness; asymptotic behavior; Besov-Morrey spaces; hereditary viscosity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Setor $S_{\theta, \mu}$	37
Figura 2 – Triângulo Usado por KATO	42
Figura 3 – Região $R_0 = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T^*), \tau \in (0, t/\kappa)\}$	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplos de função de propagação, <i>creep</i> e função c em que c' é completamente positiva.	33
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}_+	Números reais não negativos
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
e_0	Função de Heavside
\mathbb{P}	Projeter de Leray
$E_\alpha(-t^\alpha A), E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)$	operadores de Mittag-Leffler
erfc	Função erro complementar
$\Gamma(p)$	Função Gamma
$B(p, q)$	Função Beta
$B(J, X)$	Funções limitadas de um intervalo J em X
$\rho(A)$	Resolvente de um operador A
M_α	Função de Mainardi de índice α
▲	Triângulo usado por KATO (ver Figura 2)
$\mathcal{M}_{p,\lambda}, \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma$	espaços de Morrey e Besov-Morrey
$BV(J; X)$	espaço das funções de variação fortemente limitada
$\mathcal{L}(X)$	operadores lineares limitados de um espaço de Banach X nele mesmo
$\mathcal{L}(X, Y)$	operadores lineares limitados de um espaço de Banach X em um espaço de Banach Y
$\ \cdot\ _X$	norma de um espaço de Banach X
$\mathcal{D}(A)$	domínio de um operador A
$\operatorname{Im}(A)$	imagem de um operador A
$\operatorname{supp}(\varphi)$	suporte de uma função φ
$\nabla \cdot u$	divergente de uma função u

∇u	gradiente de uma função u
$\nabla_x^j u$	derivada de multi-índice j de uma função u
${}_c D_t^\alpha u$	derivada fracionária de Caputo
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	transformada de Fourier e transformada de Fourier inversa
$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$	classe das funções rapidamente decrescentes e seu dual (distribuições temperadas)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	PROBLEMA ACOPLADO FRACIONÁRIO	14
1.1.1	Os fluidos e a quimiotaxia	15
1.2	EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE HEREDITÁRIA	17
1.2.1	Princípio da subordinação	18
1.3	OBJETIVOS PRINCIPAIS	20
2	PRELIMINARES	21
2.1	SEMIGRUPOS	21
2.2	SUBORDINAÇÃO	24
2.2.1	Família resolvente para equações de Volterra	24
2.2.5	Um pouco sobre integral de Riemann-Stieltjes	25
2.2.9	Funções completamente positivas	28
2.2.19	Princípio da subordinação	30
2.3	DERIVADA FRACIONÁRIA	34
2.4	OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	36
2.5	ESPAÇOS DE MORREY E BESOV-MORREY	38
2.6	OPERADOR CALOR	41
2.7	RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE	45
3	BOA COLOCAÇÃO GLOBAL PARA EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM QUIMIOTAXIA EM ESPAÇOS DE BESOV-MORREY CRÍTICOS	46
3.1	ESTIMATIVAS PARA OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	47
3.1.1	Estimativas para os operadores de Mittag-Leffler	48
3.2	PRINCIPAIS RESULTADOS	50
4	PROBLEMA DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE HEREDITÁRIA	68
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	68
4.2	PRINCIPAIS ESTIMATIVAS	70
4.2.2	Estimativas Lineares	71
4.2.6	Estimativas Bilineares	74

4.3	PRINCIPAIS RESULTADOS	76
4.4	APLICAÇÕES	84
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes vêm desempenhando, ao longo da história, um importante papel no que diz respeito à teoria da mecânica dos fluidos, o leitor pode consultar (LADYZHENSKAYA, 1969; LIONS, 1996) para a teoria matemática dessas equações. Além disso, a boa colocação para esse tipo de problema vem sendo bastante discutida para casos cada vez mais gerais e sofisticados, podemos citar aqui por exemplo as equações fracionárias (ver (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015)), o modelo acoplado ao sistema de Keller-Segel (ver (KOZONO; MIURA; SUGIYAMA, 2016)) e os fluidos não Newtonianos (ver (BARBU; SRITHARAN, 2003)).

1.1 PROBLEMA ACOPLADO FRACIONÁRIO

Neste trabalho, um dos problemas que estudaremos será o modelo quimiotático duplo de ordem fracionária sob o efeito do fluido de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} {}^c D_t^\alpha n + u \cdot \nabla n = \Delta n - \nabla \cdot (n \nabla c) - \nabla \cdot (n \nabla v), & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ {}^c D_t^\alpha c + u \cdot \nabla c = \Delta c - nc, & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ {}^c D_t^\alpha v + u \cdot \nabla v = \Delta v - \gamma v + n, & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ {}^c D_t^\alpha u + (u \cdot \nabla)u = \Delta u - \nabla p - nf, & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ n(x, 0) = n_0(x), c(x, 0) = c_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = v_0(x), u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

onde $N \geq 2$, $\gamma \geq 0$, ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária, segundo Caputo, de ordem $\alpha \in (0, 1)$. Os termos $n(x, t)$, $c(x, t)$, $v(x, t)$, $u(x, t)$ e $p(x, t)$ representam a densidade celular, concentração de oxigênio, concentração de atraente químico, velocidade e pressão do fluido, respectivamente. O parâmetro $\gamma \geq 0$ denota a taxa de degradação do atraente, enquanto $n_0 = n_0(x)$, $c_0 = c_0(x)$, $v_0 = v_0(x)$ e $u_0 = u_0(x)$ representam os dados iniciais.

As bactérias e micro-organismos, ambos vivem em fluidos viscosos em que a biologia da quimiotaxia está intimamente relacionada com a física predominante (ver (CHAE; KANG; LEE, 2013)). As descobertas experimentais, por sua vez, indicam que as interações quimiotaxia-

fluido podem nos levar a um tipo bem complexo de comportamento coletivo (ver (DOMBROWSKI et al., 2004; TUVAL et al., 2005)).

É importante destacar também que há um grande interesse no desenvolvimento da análise matemática fracionária para o modelo de quimiotaxia que é motivado pela compreensão de certos fenômenos biológicos. Observa-se que, em um nível macroscópico, a subdifusão anômala pode ser modelada como um movimento Browniano fracionário ou passeios aleatórios de tempo contínuo. Com isso podemos modificar a equação da difusão usando o operador fracionário temporal (ver e.g. Langlands e Henry (LANGLANDS; HENRY, 2010)).

O sistema (1.1) com $\alpha = 1$ foi proposto primeiro por Tuval et al. (TUVAL et al., 2005) para descrever a dinâmica de bactérias aeróbicas nadadoras vivendo em um fluido viscoso incompressível, que nadam em direção a uma maior concentração de oxigênio e atraente químico. O modelo de Tuval et al. e seus variantes receberam muita atenção da comunidade matemática ao longo dos últimos anos (ver e.g. (BRAUKHOFF, 2017; DUAN; XIANG, 2014; LANKEIT, 2016; TAO; WINKLER, 2012; ZHANG; LI, 2015)).

1.1.1 Os fluidos e a quimiotaxia

De um ponto de vista matemático o foco no estudo do sistema envolvendo o fluido e a quimiotaxia é o desenvolvimento de uma teoria qualitativa de soluções. A seguir daremos uma breve revisão de alguns resultados nesse contexto.

O modelo em 3D

$$\begin{cases} \partial_t n + u \cdot \nabla n = \delta \Delta n - \nabla \cdot (\chi(c)n \nabla c), \\ \partial_t c + u \cdot \nabla c = \mu \Delta c - \kappa(c)n, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p - n f, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

foi considerado por Duan et al. (DUAN; LORZ; MARKOWICH, 2010), eles provaram a existência de soluções clássicas desde que os dados iniciais (n_0, c_0, u_0) sejam uma pequena perturbação suave do estado constante $(n_\infty, 0, 0)$, com $n_\infty \geq 0$. Recentemente, (LORZ, 2012) estudou o caso de um modelo com quimiotaxia simples sob o efeito do fluido de Stokes linear e mostrou a existência de soluções globais em \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, com dados iniciais suficientemente pequenos. Chae et al. (CHAE; KANG; LEE, 2013) exploraram propriedades de boa colocação e critério de explosão local para soluções suaves de (1.2) em espaços H^m , com $m \geq 3$ em 2D

e 3D. Considerando (1.1) com $\alpha = 1$ e $v = 0$, Choe-Lkhagvasuren (CHOE; LKHAGVASUREN, 2017) mostrou a existência de solução branda global para dados iniciais pequenos (n_0, c_0, u_0) em espaços de Besov críticos $\dot{B}_{r,1}^{-2+3/r}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{3/r}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{-1+3/r}(\mathbb{R}^3)$ para $r \in [1, 3)$ (ver (ZHAO; ZHOU, 2018) para uma extensão dos resultados de (CHOE; LKHAGVASUREN, 2017) para $r \in [1, 6)$). Para o modelo (1.2), usando a técnica de localização de Fourier Zhang (ZHANG, 2014) obteve a boa colocação local para dados iniciais (n_0, c_0, u_0) em espaços de Besov não homogêneos $B_{p,r}^s(\mathbb{R}^N) \times B_{p,r}^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times B_{p,r}^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ com $1 < p < \infty$, $1 \leq r < \infty$ e $s > \frac{N}{p} + 1$ para $N = 2, 3$, generalizando assim o resultado anterior de Chae et al. (CHAE; KANG; LEE, 2013). Zhang também mostra um critério de explosão do tipo Beale-Kato-Majda com a ajuda de uma desigualdade logarítmica.

Se o fluxo de fluido é lento, as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas para equações de Stokes. Em (WINKLER, 2012) o autor considera (1.1) no caso $\alpha = 1$ com a equação de evolução de Stokes ao invés de uma equação de Navier-Stokes e obteve a existência de solução branda global para $(n_0, c_0, u_0) \in C^0(\bar{\Omega}) \times W^{1,q}(\Omega) \times D((-\mathbb{P}\Delta)^s)$, onde $q > N$, $s \in (3/4, 1)$, \mathbb{P} é a projeção de Leray-Helmholtz e Ω é um domínio limitado suave em \mathbb{R}^3 . Em contraste ao sistema quimiotaxia-Stokes, muitos poucos resultados de solução global estão disponíveis para o sistema quimiotaxia-Navier-Stokes não linear completo. Recentemente, para o caso tridimensional (em domínios convexos limitados) do fluido de Navier-Stokes com dados iniciais grandes, a existência de soluções brandas foi demonstrada por Winkler (WINKLER, 2016).

Usando o teorema da função implícita Kozono et al. (KOZONO; MIURA; SUGIYAMA, 2016) obteve a existência de soluções brandas globais para (1.1) considerando $\alpha = 1$, $N \geq 3$, dado inicial pequeno $n_0 \in L_{\omega}^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, $c_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ com $\nabla c_0 \in L_{\omega}^N(\mathbb{R}^N)$, $v_0 \in S'/\mathcal{P}$ com $\nabla v_0 \in L_{\omega}^N(\mathbb{R}^N)$ e $u_0 \in L_{\omega}^N(\mathbb{R}^N)$, e força pequena $f \in L_{\omega}^N(\mathbb{R}^N)$, onde \mathcal{P} denota o conjunto de polinômios com N variáveis. No caso $N = 2$, a condição $n_0 \in L_{\omega}^1(\mathbb{R}^2)$ é substituída por $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Eles também mostram a estabilidade assintótica de soluções com o tempo indo ao infinito e fornecem a existência de soluções auto-similares com funções homogêneas nos dados iniciais que por sua vez possuem normas pequenas na classe invariante por escala. Os resultados de Kozono et al. cobrem os resultados anteriores na literatura de Biller et al. (BILER et al., 2004), Corrias e Perthame (CORRIAS; PERTHAME, 2006), Kato (KATO, 1984), Kozono e Yamazaki (KOZONO; YAMAZAKI, 1999) e Yagi (YAGI, 1997). Recentemente Ferreira e Postigo (FERREIRA; POSTIGO, 2019) trataram a boa colocação global para (1.1) considerando $\alpha = 1$, $N \geq 2$ e dados iniciais pequenos em espaços de Besov-Morrey críticos; mais precisamente,

eles consideram

$$\begin{cases} n_0 \in \mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{N}{q}-2}(\mathbb{R}^N), \quad c_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{com } \nabla c_0 \in \mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r}-1}(\mathbb{R}^N), \\ v_0 \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ com } \nabla v_0 \in \mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r}-1}(\mathbb{R}^N), \quad u_0 \in \mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p}-1}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \nabla \cdot u_0 = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

e força $f \in \mathcal{M}_{N_1}^N(\mathbb{R}^N)$, onde os expoentes p, p_1, q, q_1, r, r_1 e N_1 satisfazem as condições de Kozono et al. (ver (KOZONO; MIURA; SUGIYAMA, 2016)). Comparando com esse ultimo trabalho podemos dizer que a classe de dados iniciais (1.3) e de forças f adotadas por (FERREIRA; POSTIGO, 2019) são mais gerais. Além disso a configuração de Besov-Morrey adotada em (FERREIRA; POSTIGO, 2019) permite fazer um significativo avanço na compreensão das equações quimiotaxia-Navier-Stokes. Vale ressaltar que os espaços de Besov-Morrey foram introduzidos por (KOZONO; YAMAZAKI, 1994) (ver também (MAZZUCATO, 2003)), que também garantiu a existência e unicidade de soluções globais para dois problemas de Cauchy, onde um deles é do tipo Navier-Stokes, com dados iniciais suficientemente pequenos nesses espaços.

1.2 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE HEREDITÁRIA

Neste trabalho estudamos também a equação de Navier-Stokes com viscosidade hereditária

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) ds = -\nabla p + f, & \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde u é o campo velocidade de um fluido em \mathbb{R}^N , p é a pressão hidrostática do fluido, f é uma força externa, u_0 é o campo velocidade no tempo inicial $t = 0$ e g representa uma função material. Do ponto de vista físico, esta equação descreve a dinâmica do campo velocidade de um fluido não-Newtoniano, viscoelástico, homogêneo, isotrópico e incompressível, o qual é completamente determinado pela função g , ver (BARBU; SRITHARAN, 2003; PRÜSS, 2013). Aplicações de fluidos não-Newtonianos são mencionadas nas mais diversas áreas, como por exemplo, indústrias alimentícias, sistemas de aquecimento/resfriamento e usinas energéticas, ver (CHHABRA; RICHARDSON, 1999) e referências citadas.

Ao contrário da clássica equação de Navier-Stokes, o estudo matemático das equações de Navier-Stokes com viscosidade hereditária é recente. Salvo melhor juízo, tal problema foi primeiramente apresentado em (BARBU; SRITHARAN, 2003), onde os autores estudaram a boa colocação local em subespaços de L^2 para uma versão tridimensional de (1.4). Em tal trabalho

foi provado ainda uma propriedade de velocidade de propagação finita do campo de vorticidade para a equação. Recentemente em (ANDRADE; SILVA; VIANA, 2021), os autores utilizaram as teorias de operadores setoriais e transformada de Laplace para estabelecer condições suficientes para boa colocação local e regularidade espacial de (1.4) em espaços de Lebesgue no caso dos chamados materiais do tipo potência, isto é, quando a função material é dada por

$$g(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad t > 0 \text{ e } \alpha \in (0, 1).$$

Em tal trabalho foi provado ainda um resultado de boa colocação global para dados iniciais com norma pequena. Outras referências que vale a pena citar aqui são (ANDRADE; SILVA; VIANA, 2021) e (AZEVEDO; POZO; VIANA, 2022; CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015) que tratam versões fracionárias para as equações de Navier-Stokes.

1.2.1 Princípio da subordinação

Na formulação de alguns problemas de equações diferenciais parciais é comum que nos deparemos com um operador do tipo resolvente. Nesse caso podemos utilizar o princípio da subordinação introduzido em (PRÜSS, 2013) para garantir tanto que esses operadores estão bem definidos como também uma boa estrutura que nos permita relacionar o operador resolvente da equação subordinada de Volterra com o da equação “subordinante”. Para que isso ocorra, é necessário o aprofundamento de uma teoria a parte que será melhor discutida no Capítulo 2.

Embora tenhamos interesse em casos mais gerais, veremos a seguir que na literatura é comum encontrar estudos em que o núcleo de uma equação de Volterra é uma função do tipo $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, $\beta > 0$; isso ocorre possivelmente devido ao grande interesse da comunidade científica na teoria das equações fracionárias. Em (BAZHLEKOVA, 2000), por exemplo, estuda-se os detalhes desse princípio para o problema de Cauchy abstrato fracionário, ${}_c D_t^\alpha u = Au$, $\alpha > 0$, em que A é um operador densamente definido em um espaço de Banach X ; entre outras propriedades (BAZHLEKOVA, 2000) discute a invertibilidade, fórmula inversa e semigrupo de Feller dos operadores subordinados. Em (BAZHLEKOVA, 2015) é estudada a equação diferencial fracionária

$$u'(t) = Au(t) + \gamma D_t^\alpha Au(t) + f(t), \quad t > 0, u(0) = a \in X, \quad (1.5)$$

onde A é um operador que gera um semigrupo fortemente contínuo em um espaço de Banach X , D_t^α é a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ e f é uma

função avaliada em X . No trabalho de Bazhlekova é provado que o problema (1.5) está bem posto e seu operador solução $S(t)$ possui a estrutura de subordinação

$$S(t) = \int_0^\infty \varphi(t, \tau) T(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

onde $T(t)$ é o C_0 -semigrupo gerado por A e $\varphi(t, \tau)$ é uma função densidade de probabilidade em cada variável. Uma outra estrutura de subordinação também é encontrada em (ABADIAS; MIANA, 2015, Teorema 12). Especificamente (ABADIAS; MIANA, 2015) apresenta o conceito de família resolvente (g_α, g_β) -regularizada, $\{S_{\alpha, \beta}(t)\}_{t \geq 0} \subset B(X)$, $\alpha, \beta > 0$, gerada por um operador linear A fechado e densamente definido num espaço de Banach X ; entre outras condições esses operadores devem satisfazer a equação integral

$$S_{\alpha, \beta}(t)x = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}x + A \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S_{\alpha, \beta}(s)x ds \right)$$

para todo $x \in X$ e $t > 0$. Por fim, citamos aqui (BAZHLEKOVA, 2019) que explora o resolvente do problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} cD_t^\beta u(x, t) &= -(-\Delta)^\alpha u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= v(x), \end{cases}$$

onde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ e $(-\Delta)^\alpha$ é o Laplaciano fracionário de acordo com a definição de Balakrishnan (ver (BALAKRISHNAN, 1960))

$$(-\Delta)^\alpha f = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda - \Delta)^{-1} (-\Delta) f d\lambda, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Nesse trabalho são estabelecidas algumas propriedades do núcleo de subordinação e representações em termos da função de Mainardi e densidades estáveis extremas de Lévy.

Nosso objetivo no presente trabalho é tratar a equação de Navier-Stokes com viscosidade hereditária em espaços mais gerais do que aqueles presentes na literatura atual, a saber, os espaços de Besov-Morrey. Nossa abordagem se baseia no princípio de subordinação desenvolvido em (PRÜSS, 2013). A ideia central é utilizar esta teoria para estabelecer propriedades de suavização para a família resolvente associada a equação (1.4) utilizando como base resultados similares já conhecidos para o clássico problema de Navier-Stokes. Até onde sabemos, este tratamento ainda não foi utilizado no estudo da equação (1.4). Neste sentido, nosso trabalho contribui com o desenvolvimento da teoria matemática destas equações.

1.3 OBJETIVOS PRINCIPAIS

Neste trabalho vamos determinar a existência e unicidade de soluções para dois problemas diferentes envolvendo as equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey e Besov-Morrey. No Capítulo 3, intitulado “boa colocação global para equações de quimiotaxia com fluido de Navier-Stokes em espaços críticos do tipo Besov-Morrey” vamos considerar o sistema fracionário (1.1). Nesse capítulo além da existência e unicidade de soluções brandas globais, também será obtido um resultado de estabilidade assintótica com o tempo tendendo ao infinito e uma classe de soluções assintoticamente auto-similares; vale ressaltar que um resumo dessa pesquisa foi publicado na referência (AZEVEDO et al., 2022). Já no Capítulo 4 vamos verificar a boa colocação e estabilidade assintótica (no caso da solução global) para a equação 1.4 com dados iniciais suficientemente pequenos, em norma, também sobre espaços de Besov-Morrey. Nesse capítulo faremos uso das ferramentas técnicas apresentadas no Capítulo 2 para obter uma boa estrutura de subordinação e estimar o operador solução, para isso o núcleo $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da equação 1.4 será tomado de tal forma que $1 * g$ seja uma função completamente positiva. A teoria da subordinação, os espaços de Besov-Morrey e outros assuntos importantes para uma melhor compreensão do nosso trabalho serão discutidos no Capítulo 2 com mais detalhes.

2 PRELIMINARES

No decorrer deste trabalho denotaremos por X um espaço de Banach e $C > 0$ uma constante genérica.

2.1 SEMIGRUPOS

Nesta seção apresentaremos resumidamente as principais definições e propriedades da teoria de semigrupos. O leitor poderá encontrar mais detalhes nos livros (PAZY, 1983; ENGEL; NAGEL, 2000). Denotaremos por $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de um espaço de Banach X_1 em um espaço de Banach X_2 , que por sua vez também é um espaço de Banach. Se $X_1 = X_2$ poderemos denotar $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ simplesmente por $\mathcal{L}(X_1)$. Em alguns momentos, quando estiver claro o espaço de Banach utilizado, representaremos as normas simplesmente por $\|\cdot\|$, ao invés de $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.1.1. *Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

$$(i) \quad T(0) = I,$$

$$(ii) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \text{ para cada } t, s \geq 0.$$

Agora, seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados (podendo ser denotado simplesmente por $T(t)$), o operador

$$A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$$

$$x \mapsto Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

é chamado *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$.

Se um semigrupo de operadores limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ também é fortemente contínuo, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X,$$

ele é chamado de *semigrupo de classe C_0* (ou *C_0 -semigrupo*). O resultado a seguir (ver (ENGEL; NAGEL, 2000, Lema 1.3) destaca algumas propriedades fundamentais do gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

Teorema 2.1.2. (PAZY, 1983, Teorema 2.4). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, as seguintes propriedades são satisfeitas.*

(i) Para $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(ii) Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$$

para cada $t \geq 0$.

(iii) Para cada $t \geq 0$ e $x \in X$, tem-se que $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ e

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x ds.$$

(iv) Para cada $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)A x ds.$$

Além das propriedades acima, vale destacar também que o gerador infinitesimal $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado e densamente definido (ver (PAZY, 1983, Corolário 2.5)).

Antes de introduzir o próximo resultado é importante ter em mente algumas definições.

Definição 2.1.3. Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dito do tipo (M, ω) com $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, se para cada $t \geq 0$, temos que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{t\omega}.$$

Em particular se um C_0 -semigrupo é do tipo $(1, 0)$ ele é chamado de *C_0 -semigrupo de contrações*.

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, define-se também o *conjunto resolvente* $\rho(A)$ como o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $\lambda I - A$ é invertível, $(\lambda I - A)^{-1} : \text{Im}(\lambda I - A) \rightarrow X$ é linear, limitado e densamente definido (ver (VRABIE, 2003, p. 51)). Denotaremos mais adiante o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ por $R(\lambda, A)$.

O teorema abaixo fornece condições necessárias e suficientes para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo (ver (VRABIE, 2003, Teorema 3.3.1)).

Teorema 2.1.4 (Teorema de Hille-Yosida). *Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo do tipo (M, ω) se e somente se:*

(i) A é fechado e densamente definido;

(ii) $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para cada $\lambda > \omega$ e $n \in \mathbb{N}$.

Na literatura é comum que o teorema acima seja atribuído a Feller-Miyadera-Phillips, isso ocorre porque a versão oficial do teorema de Hille-Yosida é mais particular (ver (ENGEL; NAGEL, 2000, Teorema 3.5 e Teorema 3.8)).

Uma vantagem em se garantir que um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo está em determinar existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy abstrato homogêneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, como pode se notar pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1.5. (PAZY, 1983, Capítulo 4, Teorema 1.3). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido com resolvente $\rho(A)$ não vazio. O problema (2.1) possui uma única solução $u(t)$, que é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, se e somente se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.*

No contexto em que é apresentado o teorema acima uma solução para o problema (2.1) é uma função

$$u \in C([0, +\infty), X) \cap C^1((0, +\infty), \mathcal{D}(A))$$

que satisfaz (2.1).

2.2 SUBORDINAÇÃO

2.2.1 Família resolvente para equações de Volterra

É importante deixar claro que todas as construções, definições e resultados apresentados nesta seção constam em (PRÜSS, 2013), logo não entraremos em detalhes.

Seja A um operador linear fechado, não necessariamente limitado em X , com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso, $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ não identicamente nula e considere a equação integral

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, \quad t \in J, \quad (2.2)$$

onde $f \in C(J; X)$, $J = [0, T]$.

Definição 2.2.2. *Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ de operadores lineares limitados em X é chamada resolvente para (2.2) (ou operador solução para (2.2)) se as seguintes condições são satisfeitas.*

(S1) $S(t)$ é fortemente contínuo em \mathbb{R}_+ e $S(0) = I$;

(S2) $S(t)$ comuta com A , ou seja, $S(t)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$;

(S3) a equação resolvente

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A), \quad t \geq 0,$$

é satisfeita. Por conveniência, pode-se denotar $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ simplesmente por $S(t)$.

Perceba que uma solução para o problema (2.1) deve satisfazer também a equação de Volterra

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s)ds, \quad t \geq 0,$$

e que dos Teoremas 2.1.2 e 2.1.5 a solução deve ser $u(t) = T(t)u_0$, em que $T(t)$ é o C_0 -semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A . Logo

$$T(t)u_0 = u_0 + \int_0^t AT(s)u_0ds, \quad t \geq 0;$$

juntando isso às demais propriedades de C_0 -semigrupos apresentadas na Seção 2.1 não é difícil perceber que um C_0 -semigrupo $T(t)$ é um caso particular de resolvente em que o núcleo da equação de Volterra associada é $a(t) = 1$.

Como em semigrupos, define-se também o tipo de um operador resolvente como a seguir.

Definição 2.2.3. (PRÜSS, 2013, Definição 1.5). Suponha que $S(t)$ é um resolvente para (2.2). Diz-se que $S(t)$ é limitado exponencialmente se existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0;$$

ω ou mais precisamente (M, ω) é chamado o tipo de $S(t)$.

A existência de um resolvente do tipo (M, ω) para a equação (2.2) pode ser caracterizada pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2.4. (PRÜSS, 2013, Teorema 1.3). Seja A um operador linear ilimitado em X com domínio denso $\mathcal{D}(A) \subset X$ e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\int_0^\infty e^{-\omega t} |a(t)| dt < \infty$. Então a equação (2.2) admite um resolvente $S(t)$ do tipo (M, ω) se e somente se as seguintes condições são satisfeitas.

(H1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo $\lambda > \omega$;

(H2) $H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda$ satisfaz as estimativas

$$\|H^{(n)}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Mn!(\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \lambda > \omega, n \in \mathbb{N}_0.$$

Perceba que se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo e $a(t) = 1$, o Teorema de Hille-Yosida torna-se um caso particular do teorema acima em que $H^{(n)} = R(\lambda, A)^{(n+1)}$.

2.2.5 Um pouco sobre integral de Riemann-Stieltjes

Considerando $J = [a, b]$, diz-se que uma função $k : J \rightarrow X$ é de *variação limitada* se

$$\left\| \sum_j [k(t_j) - k(s_j)] \right\| < \infty$$

para qualquer escolha finita de intervalos não sobrepostos (t_j, s_j) em J (ver (HILLE; PHILLIPS, 1957, Definição 3.2.4)). Já se a função k for de tal forma que

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^M \|k(t_j) - k(t_{j-1})\| : t_0 < t_1 < \dots < t_M, t_j \in J, M \in \mathbb{N} \right\} < \infty,$$

diz-se nesse caso que k é de *variação fortemente limitada*. O espaço das funções de J em X de variação fortemente limitadas serão denotadas daqui em diante por $BV(J; X)$.

Agora, sejam $F : J \rightarrow X$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{P} = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ uma partição de J e $\mathbb{T}_{\mathbb{P}} = \{t_1, \dots, t_n\}$ um subconjunto de $J = [a, b]$ em que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, admitindo a soma parcial

$$S(\mathbb{P}, \mathbb{T}_{\mathbb{P}}, F, \beta) := \sum_{i=1}^n F(t_i)[\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})],$$

definimos a *Integral de Riemann-Stieltjes* como a seguir.

Definição 2.2.6. (HILLE; PHILLIPS, 1957, Definição 3.3.1). Considerando $|\pi| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ e representando $S(\mathbb{P}, \mathbb{T}_{\mathbb{P}}, F, \beta)$ simplesmente por $S_{\pi}(F, \beta)$ o limite $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S_{\pi}(F, \beta)$, caso exista na topologia do espaço X , é definido como sendo a integral

$$\int_a^b F(\tau) d\beta(\tau).$$

Além disso se

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s F(\tau) d\beta(\tau)$$

existe, o mesmo é representado pela integral

$$\int_0^{+\infty} F(\tau) d\beta(\tau).$$

A importância de se considerar espaços de variação limitada muitas vezes estará relacionada à existência das integrais de Riemann-Stieltjes (ver (HILLE; PHILLIPS, 1957, Teorema 3.3.2) e (WIDDER, 1941, Teorema 4a)), assim como o uso de suas propriedades (ver (WIDDER, 1941, Teorema 4b)).

Vale destacar o seguinte resultado que será bastante utilizado neste trabalho.

Proposição 2.2.7. Sejam X um espaço de Banach, $F \in C([0, +\infty), X)$ e $\beta \in B([0, +\infty), \mathbb{R})$.

Se para $t > 0$

$$\int_0^t F(\tau) d\beta(\tau)$$

existe, o mesmo vale para $\int_0^{+\infty} F(\tau) d(\beta e_t)(\tau)$ e

$$\int_0^{+\infty} F(\tau) d(\beta e_t)(\tau) = \int_0^t F(\tau) d\beta(\tau) - F(t)\beta(t),$$

onde

$$e_t(\tau) := e_0(t - \tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau < t, \\ 0 & , \text{ se } \tau \geq t. \end{cases}$$

Demonstração. Fixo $t > 0$, é suficiente provar que para todo $s > t$

$$\int_0^s F(\tau)d(\beta e_t)(\tau) = \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) - F(t)\beta(t).$$

Seja $\varepsilon > 0$, como a integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^t F(\tau)d\beta(\tau)$ existe, podemos tomar uma partição \mathbb{P}_ε de $[0, t]$ e um conjunto finito $\mathbb{T}_\varepsilon \subset [0, t]$ de modo que para toda partição refinada $\mathbb{P} = \{x_0 = 0, \dots, x_n = t\} \supset \mathbb{P}_\varepsilon$ e todo conjunto refinado $\mathbb{T}_\mathbb{P} = \{t_1, \dots, t_n\} \supset \mathbb{T}_\varepsilon$, tal que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left\| S(\mathbb{P}, \mathbb{T}_\mathbb{P}, F, \beta) - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Além disso, digamos que a função β é limitada por $C > 0$, como F é contínua em t , existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F(t) - F(\xi)\|_X < \frac{\varepsilon}{2C} \quad (2.4)$$

sempre que $|t - \xi| < \delta$. Escolhendo $\tilde{x} \in [0, t]$ de modo que $|t - \tilde{x}| < \delta$ e $\tilde{t} \in [\tilde{x}, t]$, tomamos uma partição $\tilde{\mathbb{P}} = \{y_0, \dots, y_m\}$ de $[0, s]$ que refina $\mathbb{P}_\varepsilon \cup \{\tilde{x}\} \cup \{s\}$; em seguida para algum $t_s \in [t, s]$ construímos um conjunto $\tilde{\mathbb{T}} = \{s_1, \dots, s_m\} \supset \mathbb{T}_\varepsilon \cup \{\tilde{t}\} \cup \{t_s\}$ de modo que $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Dessa forma teremos

$$\begin{aligned} S(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{T}}, F, e_t\beta) - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) &= \sum_{i=1}^m F(s_i)[e_t(y_i)\beta(y_i) - e_t(y_{i-1})\beta(y_{i-1})] \\ &\quad - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) \\ &= \sum_{i=1}^m F(s_i)[e_t(y_i)\beta(y_i) - e_t(y_{i-1})\beta(y_{i-1})] - \sum_{i=1}^m F(s_i)e_t(y_i)\beta(y_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m F(s_i)e_t(y_i)\beta(y_{i-1}) - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) \\ &= \sum_{i=1}^m F(s_i)e_t(y_i)[\beta(y_i) - \beta(y_{i-1})] + \sum_{i=1}^m F(s_i)\beta(y_{i-1})[e_t(y_i) - e_t(y_{i-1})] \\ &\quad - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Note que para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, $y_j = t$, então teremos $e_t(y_i) = 1$, para $1 \leq i \leq j-1$ e $e_t(y_i) = 0$, caso contrário. Além disso $[e_t(y_i) - e_t(y_{i-1})]$ vale -1 , se $i = j$, e vale 0 , se $i \neq j$.

Substituindo essas informações em (2.5) obtemos que

$$\begin{aligned} S(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{T}}, F, e_t\beta) - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) &= \sum_{i=1}^{j-1} F(s_i)[\beta(y_i) - \beta(y_{i-1})] - F(s_j)\beta(y_{j-1}) \\ &\quad - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^j F(s_i)[\beta(y_i) - \beta(y_{i-1})] - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) - F(s_j)[\beta(t) - \beta(y_{j-1})] \\
&\quad + F(t)\beta(t) - F(s_j)\beta(y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^j F(s_i)[\beta(y_i) - \beta(y_{i-1})] - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t) - F(s_j)\beta(t).
\end{aligned}$$

Aplicando a norma em X acima e usando as desigualdades (2.3) e (2.4) chegamos que

$$\begin{aligned}
&\|S(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{T}}, F, e_t\beta) - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) + F(t)\beta(t)\|_X \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^j F(s_i)[\beta(y_i) - \beta(y_{i-1})] - \int_0^t F(\tau)d\beta(\tau) \right\|_X + \|F(t)\beta(t) - F(s_j)\beta(t)\|_X \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |\beta(t)|\|F(t) - F(s_j)\|_X \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado desejado. □

Em particular temos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.8. Considerando a função $w(t; \tau) = e^{-\tau}e_0(t - \tau)$, definida em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Como $T : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínuo e para cada $t > 0$ a aplicação $\tau \mapsto T(\tau)e^{-\tau}$ é contínua em $[0, t]$, pela Proposição 2.2.7 temos que

$$\int_0^{+\infty} T(\tau)d_\tau w(t; \tau) = -T(t)e^{-t} - \int_0^t T(\tau)e^{-\tau}d\tau,$$

para todo $t > 0$.

2.2.9 Funções completamente positivas

Antes de falar sobre equações subordinadas é importante destacar alguns conceitos e resultados importantes. Começaremos introduzindo algumas classes de funções, são elas: funções completamente monótonas, funções de Bernstein e funções do tipo *creep* (ou do inglês “creep functions”).

Definição 2.2.10. Uma função C^∞ , $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, é chamada completamente monótonas se

$$(-1)^n f^{(n)}(\lambda) \geq 0, \text{ para todo } \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0.$$

A classe das funções completamente monótonas será denotada por \mathcal{CM} .

Em outras palavras trata-se de uma classe de funções que alterna o sinal a medida que a derivamos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2.11. *São exemplos de funções completamente monótonas $f(\lambda) = \lambda^{-1}$, $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ e $h(\lambda) = \lambda^{-2}$; todas definidas em $(0, \infty)$.*

No decorrer das próximas seções utilizaremos conceitos de integrais de Riemann-Stieltjes e Laplace-Stieltjes sem entrar em detalhes, recomendamos a consulta de (HILLE; PHILLIPS, 1957; WIDDER, 1941; PRÜSS, 2013) para uma melhor compreensão.

Teorema 2.2.12 (Teorema de Bernstein). *Uma função C^∞ , $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é completamente monótona se, e somente se, existe uma função não decrescente $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} db(t), \quad \lambda > 0.$$

Normalizando $b(t)$ por “ $b(0) = 0$ e $b(t)$ contínua à esquerda”, $b(t)$ é unicamente determinada por f .

Para entender melhor o que é uma função normalizada recomendamos (WIDDER, 1941).

Definição 2.2.13. *Uma função C^∞ , $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, é chamada função de Bernstein se $\varphi(\lambda) \geq 0$ para $\lambda > 0$ e φ' é completamente monótona. A classe das funções de Bernstein será denotada por \mathcal{BF} .*

Exemplo 2.2.14. *São exemplos de função de Bernstein $f(\lambda) = 2\lambda$, $g(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$ e $h(\lambda) = \ln(\lambda + 1)$; todas definidas em $(0, \infty)$.*

O conjunto \mathcal{CM} é fechado para o produto de funções; contudo, o mesmo não vale para a classe \mathcal{BF} . Quanto à composição tem-se o resultado a seguir.

Proposição 2.2.15. (PRÜSS, 2013, Proposição 4.2). *Sejam $f \in \mathcal{CM}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{BF}$. Então*

- (i) $f \circ \varphi \in \mathcal{CM}$;
- (ii) $\psi \circ \varphi \in \mathcal{BF}$.

Definição 2.2.16. (PRÜSS, 2013, Definição 4.4). *Uma função $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função creep se $k(t)$ é não negativa, não decrescente e côncava. Uma função creep $k(t)$ possui a forma padrão*

$$k(t) = k_0 + k_\infty t + \int_0^t k_1(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

onde $k_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} k(t) \geq 0$, $k_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)/t = \inf_{t > 0} k(t)/t \geq 0$, e $k_1(t) = k'(t) - k_\infty$ é não negativa, não crescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) = 0$. A classe das funções do tipo creep será denotada por \mathcal{CF} .

Note que toda função de Bernstein é uma função creep, ou seja, $\mathcal{BF} \subset \mathcal{CF}$. Além disso, o seguinte resultado é comentado por (PRÜSS, 2013, p. 91).

Corolário 2.2.17. $\varphi \in \mathcal{BF}$ se, e somente se, $\varphi(\lambda) = \lambda \widehat{dk}(\lambda)$ para algum $k \in \mathcal{CF}$.

Agora, seja $\varphi(\lambda)$ uma função de Bernstein, da Proposição 2.2.15 segue que $(\frac{1}{z} \circ \varphi)(\lambda)$ é completamente monótona, então pelo Teorema de Bernstein existe $c \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\widehat{dc} = 1/\varphi(\lambda)$. Por outro lado, pelo Corolário 2.2.17 $\varphi(\lambda) = \lambda \widehat{dk}(\lambda)$, $\lambda > 0$, para algum $k \in \mathcal{CF}$. Então tem-se a relação

$$\widehat{dc}(\lambda) \widehat{dk}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

de onde, pela unicidade da transformada de Laplace, obtém-se

$$\int_0^t c(t-\tau) dk(\tau) = \int_0^t k(t-\tau) dc(\tau) = t, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

ou seja, $c(t)$ deve resolver a equação de Volterra do primeiro tipo (2.6).

Definição 2.2.18. (PRÜSS, 2013, Definição 4.5). Seja $c \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$. A medida dc é dita completamente positiva se existe uma função creep $k(t)$ tal que (2.6) é satisfeita. Se c é absolutamente contínua em cada intervalo $[0, \tau]$ e dc é completamente positiva então $c'(t)$ é chamada de função completamente positiva.

2.2.19 Princípio da subordinação

Agora, considere a equação de Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t b(t-\tau) Au(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (2.7)$$

onde A é linear, fechado e densamente definido, o núcleo $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ é tal que $\int_0^\infty |b(t)| e^{-\beta t} dt < \infty$, onde $\beta \geq 0$, e $c_p(t)$ é uma função completamente positiva. Definindo $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ por

$$\widehat{a}(\lambda) = \widehat{b} \left(\frac{1}{\widehat{c}_p(\lambda)} \right), \quad \lambda \geq \sigma, \quad (2.8)$$

onde

$$\sigma = \begin{cases} \widehat{c}_p^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right), & \text{se } \int_0^\infty c_p(t)dt > \frac{1}{\beta}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

a equação

$$\tilde{u}(t) = g(t) + \int_0^t a(t-\tau)A\tilde{u}(\tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

é dita *subordinada* da equação (2.7) via $c_p(t)$.

Supondo que a equação (2.7) admite uma família resolvente, nos perguntamos se o mesmo vale para a equação (2.9). Afim de estabelecer condições para que isso ocorra, (PRÜSS, 2013) apresenta o seguinte resultado.

Teorema 2.2.20. (PRÜSS, 2013, Teorema 4.1). *Seja A um operador linear, fechado e densamente definido em X , e sejam $a, b, c_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ satisfazendo a relação (2.8) tais que $\int_0^\infty |b(t)|e^{-\beta t}dt < \infty$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Assumindo que*

- (i) $c_p(t)$ é uma função completamente positiva;
- (ii) existe um resolvente $S_b(t)$ de (2.7) do tipo (M, ω_b) , $\omega_b \geq 0$;

então existe um resolvente $S_a(t)$ para (2.9). Além disso, definindo

$$\omega_a = \begin{cases} \widehat{c}_p^{-1}\left(\frac{1}{\omega_b}\right), & \text{se } \int_0^\infty c_p(t)dt > \frac{1}{\omega_b}, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

existe uma constante $M_a \geq 1$ tal que

$$\|S_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_a e^{\omega_a t}, \quad t > 0, \quad \text{se } \omega_b = 0 \text{ ou } \omega_b \widehat{c}_p(0) \neq 1,$$

$$\|S_a(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon t}, \quad t > 0, \quad \text{se } \omega_b > 0 \text{ e } \omega_b \widehat{c}_p(0) = 1,$$

para cada $\varepsilon > 0$.

Seja dc uma medida completamente positiva, $\varphi(\lambda) = 1/\widehat{dc}(\lambda)$ é chamada função de Bernstein associada à medida dc . Por sua vez, a função $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ obtida a partir da relação

$$\widehat{w}(\lambda; \tau) = \frac{e^{-\tau\varphi(\lambda)}}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

onde a transformada de Laplace está sendo tomada apenas sobre a primeira variável, é chamada *função de propagação* associada à medida completamente positiva dc . Neste contexto a função

creep $k \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\varphi(\lambda) = \lambda \widehat{dk}(\lambda)$ também desempenhará um papel importante e os termos

$$\kappa = k_0, \quad \omega = k_\infty, \quad \rho = \lim_{t \rightarrow 0^+} k_1(t) + k_\infty, \quad (2.10)$$

em que k_0, k_∞, k_1 são como na Definição 2.2.16, serão utilizados com bastante frequência daqui em diante.

O resultado a seguir nos fornece uma boa ideia do comportamento de uma função de propagação.

Proposição 2.2.21. (PRÜSS, 2013, Proposição 4.9). *Seja dc completamente positiva, e seja w sua função de propagação associada. Então temos que*

(i) $w(\cdot; \cdot)$ é uma função Borel mensurável sobre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$;

(ii) $w(\cdot; \tau)$ é não decrescente, contínua à esquerda sobre \mathbb{R}_+ e

$$w(0; \tau) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t; \tau) = e^{-\omega\tau}, \quad \forall \tau > 0.$$

(iii) A função $w(t; \cdot)$ é não crescente, contínua à direita sobre \mathbb{R}_+ e

$$w(t; 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} w(t; \tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w(t; \tau) = 0, \quad \forall t > 0;$$

(iv) $w(t; \tau) = 0$ se, e somente se, $t \leq \kappa\tau$ e $\lim_{s \rightarrow \tau^-} w(\kappa\tau; s) = \lim_{s \rightarrow \kappa\tau^+} w(s; \tau) = e^{-\rho\tau}$, $\tau \geq 0$.

(v) A função $s(t; \mu)$ definida pela equação integral

$$s(t; \mu) + \mu \int_0^t s(t - \tau; \mu) dc(\tau) = 1, \quad t, \mu > 0,$$

pode ser representada como

$$s(t; \mu) = - \int_0^\infty e^{-\mu\tau} d_\tau w(t; \tau), \quad t, \mu > 0.$$

Exemplo 2.2.22. Na Tabela 1 vemos alguns exemplos de funções completamente positiva, creep e propagação associada à função de Bernstein $\varphi(\lambda)$; os termos $e_0(t)$ e $erfc(t)$ representam a função de Heaviside e a função erro complementar, respectivamente, a constante α pertence ao intervalo $(0, 1)$ e os números s_α e c_α denotam $\sin(\alpha\pi)$ e $\cos(\alpha\pi)$, nessa ordem.

Como podemos observar no resultado a seguir, a função de propagação desempenha um importante papel no estudo da estrutura do “resolvente subordinado”.

Tabela 1 – Exemplos de função de propagação, *creep* e função c em que c' é completamente positiva.

$\varphi(\lambda)$	$c(t)$	$k(t)$	$w(t; \tau)$
λ	t	1	$e_0(t - \tau)$
$1 + \lambda$	$1 - e^{-t}$	$1 + t$	$e^{-\tau} e_0(t - \tau)$
$\lambda + \sqrt{\lambda}$	$2\sqrt{t/\pi} + e^t \operatorname{erfc}\sqrt{t} - 1$	$1 + 2\sqrt{t/\pi}$	$\operatorname{erfc}(\tau/2\sqrt{t - \tau}) e_0(t - \tau)$
λ^α	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$	$\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}$	$1 - \pi^{-2} \int_0^\infty \frac{e^{-rt - \tau r^\alpha c_\alpha}}{r} \sin(\tau r^\alpha s_\alpha) dr$

Fonte: (PRÜSS, 2013, Tabela 4.1 e Tabela 4.2)

Corolário 2.2.23. (PRÜSS, 2013, Corolário 4.5). *Nas hipóteses do Teorema 2.2.20, e sendo $w(t; \tau)$ a função de propagação associada a $c \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Então os resolventes $S_a(t)$ e $S_b(t)$ de (2.7) e (2.9), respectivamente, são relacionados pela igualdade*

$$S_a(t) = - \int_0^\infty S_b(\tau) d_\tau w(t; \tau), \quad t > 0; \quad (2.11)$$

onde (2.11) é satisfeita no sentido forte.

Segue de um resultado do Prüss (ver (PRÜSS, 2013, Proposição 4.10)) que se dc for completamente positiva, sua função de propagação associada pode ser escrita como

$$w(t; \tau) = e^{-\omega\tau} w_0(t - \kappa\tau; \tau) + e^{-\rho\tau} e_0(t - \kappa\tau), \quad t, \tau > 0, \quad (2.12)$$

onde $w_0(\cdot; \tau)$ é não decrescente, contínua à esquerda, $w_0(t; \cdot)$ é contínua à direita, não crescente, $w_0(0+; \tau) = 0$ e $w_0(t; \tau) > 0$ se e somente se $t > 0$. Substituindo (2.12) em (2.11) e denotando

$$S_0(t) = \int_0^{t/\kappa} S_b(\tau) v(t; \tau) d\tau, \quad t > 0,$$

onde

$$\begin{aligned} v(t; \tau) = & e^{-\omega\tau} (\kappa\omega_0 t(t - \kappa\tau; \tau) - \omega_0 \tau(t - \kappa\tau; \tau)) \\ & + \omega w_0(t - \kappa\tau; \tau) + \rho e^{-\rho\tau} e_0(t - \kappa\tau), \quad t, \tau > 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

obtem-se uma estrutura ainda mais refinada, como podemos observar no seguinte teorema.

Teorema 2.2.24. (PRÜSS, 2013, Teorema 4.4) *Seja A um operador linear fechado densamente definido em X e $b, c_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ Laplace transformáveis. Se*

- (i) $c_p(t)$ é uma função completamente positiva, com função *creep* $k \in W^{2,1}_{loc}(0, \infty)$;
- (ii) existe um resolvente $S_b(t)$ para (2.7) do tipo (M, ω_b) . Então o resolvente $S_a(t)$ para (2.9) possui a estrutura

$$S_a(t) = S_b(t/\kappa) e^{-\rho t/\kappa} + S_0(t), \quad t > 0,$$

onde $S_0(t)$ é $\mathcal{L}(X)$ -contínuo em $(0, \infty)$, e em todo \mathbb{R}_+ se $\kappa > 0$ e $\rho < \infty$.

Tratando o operador A como o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, da teoria de semigrupo tem-se que $T(t)$ é um resolvente para a equação

$$v(t) = g(t) + \int_0^t \Delta v(s) ds,$$

em que $g \in C([0, T], X)$. Além disso, tomando $b \equiv 1$ em (2.8) tem-se que $a \equiv c$. Com essas informações, o Teorema 2.2.24 garante também o seguinte resultado (ver (PRÜSS, 2013, Teorema 4.2)).

Corolário 2.2.25. *Sejam $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ uma função completamente positiva com função creep $k \in W^{2,1}_{loc}(0, \infty)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então para $f \in C([0, T]; X)$, onde $T > 0$, a equação de Volterra*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, \quad t \geq 0,$$

possui um operador solução $S_a(t)$ dado por $S_a(0) = I$ e

$$S_a(t) = T\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} + S_0(t), \quad t > 0,$$

em que

$$S_0(t) = \int_0^{t/\kappa} T(\tau)v(t; \tau)d\tau, \quad t > 0,$$

onde a função $v(t; \tau)$ é definida em (2.13). Além disso $S_0(t)$ é $\mathcal{L}(X)$ -contínuo em $(0, \infty)$ e em todo \mathbb{R}_+ se $\kappa > 0$ e $\rho < \infty$.

2.3 DERIVADA FRACIONÁRIA

Nesta seção nos limitaremos apenas à definição de derivada fracionária segundo Caputo, mas antes precisamos relembrar algumas funções importantes. A função Gamma $\Gamma(p)$ definida como

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re}(p) > 0,$$

pode ser interpretada como uma extensão da função fatorial

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N},$$

ao semiplano complexo $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > 0\}$. Uma das propriedades da função Gamma consiste em satisfazer a equação

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$

para todo $p \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(p) > 0$.

Outra função que será bastante utilizada ao longo do trabalho é a *função Beta*, cuja representação integral é

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

em que $\operatorname{Re}(p) > 0$ e $\operatorname{Re}(q) > 0$. A função Gamma e a função Beta são relacionadas pela igualdade

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Para mais detalhes sobre essas funções, indicamos (MAINARDI, 2010).

Seja $\alpha > 0$, considere a função $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Assumindo $T > 0$ e $v \in L^1(0, T; X)$ define-se a *integral fracionária de Riemann-Liouville* de ordem α da função v como

$$J_t^\alpha v(t) := g_\alpha * v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Definição 2.3.1. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$ e $v \in C([0, T]; X)$ de modo que $g_{1-\alpha} * v \in W^{1,1}(0, T; X)$. A derivada fracionária de Caputo de ordem α da função v é dada pela expressão*

$${}_c D_t^\alpha v(t) := \frac{d}{dt} \left[J_t^{1-\alpha} (v(t) - v(0)) \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (v(s) - v(0)) ds \right].$$

Exemplo 2.3.2. *Considerando, por exemplo, $X = \mathbb{R}$ e $v(t) = t^\gamma$, supondo inicialmente $\gamma > -1$ e $\alpha \in (0, 1)$, perceba que $v \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ para qualquer $0 < T < \infty$ e*

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^\gamma ds &= t^{\gamma-\alpha} \int_0^1 \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^\gamma ds \\ &= t^{\gamma+1-\alpha} \int_0^1 (1-r)^{-\alpha} r^\gamma dr \\ &= t^{\gamma+1-\alpha} B(1-\alpha, \gamma+1) \\ &= t^{\gamma+1-\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2+\gamma-\alpha)}, \end{aligned}$$

logo

$$J_t^{1-\alpha} v(t) = t^{\gamma+1-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2+\gamma-\alpha)}.$$

Em particular se $\gamma > 0$, $v \in C([0, T]; \mathbb{R})$ para cada $T > 0$ e $v(0) = 0$, então

$$\begin{aligned} {}_c D_t^\alpha v(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^\gamma ds \right] \\ &= (1+\gamma-\alpha) t^{\gamma-\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\gamma-\alpha)} \\ &= t^{\gamma-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Para uma melhor exploração da teoria de derivadas fracionárias sugerimos a leitura de (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

2.4 OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Antes de introduzir os principais resultados, é importante ter em mente a seguinte definição.

Definição 2.4.1. (CARVALHO-NETO, 2013, Definição 1.20) *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. O operador A é chamado de operador setorial se existir $\theta \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$S_{\theta, \mu} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg(\lambda - \mu)| \leq \pi\} \subset \rho(A)$$

(ver Figura 1) e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \lambda \in S_{\theta, \mu} \setminus \{\mu\}.$$

Além disso se $\mu = 0$, A é chamado de operador setorial positivo.

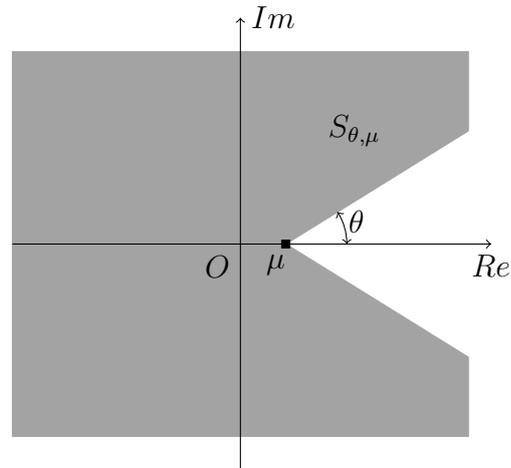
Se A é um operador setorial, então $-A$ gera um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ (ver (CARVALHO-NETO, 2013, Teorema 1.22)); se, além disso, A é um operador setorial positivo, para $q \geq 0$ o operador de potência fracionária A^{-q} é definido como

$$A^{-q} := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty s^{q-1} T(s) ds, & \text{para } q > 0, \\ I, & \text{para } q = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

e $A^q := (A^{-q})^{-1}$. O leitor pode conferir mais propriedades sobre operadores fracionários em (CARVALHO-NETO, 2013; PAZY, 1983).

Considerando agora $\alpha \in (0, 1)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo, para cada $t \geq 0$ tome

$$E_\alpha(-t^\alpha A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda \quad (2.15)$$

Figura 1 – Setor $S_{\theta,\mu}$ 

Fonte: CARVALHO-NETO (2013)

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) := \frac{t^{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} (\lambda^\alpha + A)^{-1} d\lambda \quad (2.16)$$

onde, para $\epsilon > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$, Ha é o caminho

$$Ha := \{te^{i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\} \cup \{\epsilon e^{it} : t \in [-\theta, \theta]\} \cup \{te^{-i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\}.$$

O teorema seguinte garante que se $Ha \subset \rho(-A)$, então os operadores (2.15) e (2.16) estão bem definidos; nesse caso são chamados de operadores de Mittag-Leffler.

Teorema 2.4.2. (CARVALHO-NETO, 2013, Teorema 2.41) *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo. Os operadores $E_\alpha(-t^\alpha A)$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)$ definidos em (2.15) e (2.16), tais que $Ha \subset \rho(-A)$, estão bem definidos e $E_\alpha(-t^\alpha A)$ é fortemente contínuo, isto é, para cada $x \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(-t^\alpha A)x - x\| = 0.$$

Demonstração. Ver (CARVALHO-NETO, 2013, p. 48). □

Para $\alpha \in (0, 1)$ define-se também a *função de Mainardi* de índice α , $M_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pela expressão

$$M_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha(1 + n))}.$$

Dentre várias propriedades da função de Mainardi, é importante destacar a seguinte.

Proposição 2.4.3. (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015, Proposição 2). *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e $-1 < r < \infty$, se restringimos M_α à reta real positiva, então $M_\alpha(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e*

$$\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}.$$

Demonstração. A prova desse resultado pode ser vista em (MAINARDI, 2010, p. 251). \square

A Proposição 2.4.3 juntamente com o teorema a seguir desempenharão um papel importante no desenvolvimento do Capítulo 3.

Teorema 2.4.4. (CARVALHO-NETO, 2013, Teorema 2.42) *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 2.4.2 e sendo $\{T(t) : t \geq 0\}$ o C_0 -semigrupo gerado por $-A$, os operadores em $\{E_\alpha(-t^\alpha A) : t \geq 0\}$ e $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) : t \geq 0\}$ podem ser reescritos como*

$$E_\alpha(-t^\alpha A) = \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad t \geq 0,$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad t \geq 0.$$

2.5 ESPAÇOS DE MORREY E BESOV-MORREY

Nesta seção faremos um breve resumo da teoria de espaços de Morrey e Besov-Morrey. Para mais detalhes recomendamos (KATO, 1992; FERREIRA; POSTIGO, 2019; KOZONO; YAMAZAKI, 1994; ALMEIDA; PRECIOSO, 2015).

Definição 2.5.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < N$, o espaço de Morrey de índices p e λ , $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, ou simplesmente $\mathcal{M}_{p,\lambda}$, é definido como*

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) : \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} < \infty \right\},$$

onde

$$\|f\|_{L^p(B_R(x_0))} = \left(\int_{B_R(x_0)} \|f(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| \leq R\},$$

juntamente com a norma dada por

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}.$$

Essa norma, por sua vez, satisfaz a relação de escala

$$\|f(\gamma \cdot)\|_{p,\lambda} = \gamma^{-\left(\frac{N-\lambda}{p}\right)} \|f\|_{p,\lambda}.$$

É importante destacar que os espaços $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ são espaços de Banach que contém os espaços L^p e L^p_w (L^p -fraco) tal que vale a cadeia de inclusões

$$L^p(\mathbb{R}^N) \subsetneq L^p_w(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^N),$$

em que $r < p$ e $\lambda = N(1 - r/p)$ (ver (ALMEIDA; PRECIOSO, 2015, p. 343)). O caso $p = \infty$ também pode ser adicionado aos espaços de Morrey de modo que $\mathcal{M}_{\infty,\lambda} = L^\infty$.

Outra propriedade importante dos espaços de Morrey é a seguinte.

Lema 2.5.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leq p_j \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_j < N$, $j = 1, 2, 3$. Se $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$ então*

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{p_1,\lambda_1} \|g\|_{p_2,\lambda_2}.$$

Considere agora $\varphi \in C_0^\infty$, tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N : 2^{-1} < |\xi| < 2\}$ e

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ considere a função φ_k definida por $\varphi_k(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^{-k}\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, em que \mathcal{F}^{-1} denota a transformada de Fourier inversa; para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < N$ e $s \in \mathbb{R}$, defina a quantidade

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{p,\lambda})^r \right)^{\frac{1}{r}}, & 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r < \infty, s \in \mathbb{R}, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{p,\lambda}), & 1 \leq p \leq \infty, r = \infty, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chama-se *espaço de Besov-Morrey homogêneo* $\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s(\mathbb{R}^N)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s$) o conjunto

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P} : \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s} < \infty\},$$

onde \mathcal{P} é o conjunto de polinômios com n variáveis, juntamente com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s}$.

Os espaços de Besov-Morrey homogêneos também são espaços de Banach e para $\lambda = 0$ os espaços de Besov-Morrey coincidem com os espaços de Besov homogêneos, mais precisamente

$$\mathcal{N}_{p,0,r}^s = \dot{B}_{q,r}^s.$$

Sejam $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < N$ e $1 \leq p < \infty$, define-se o *espaço de Sobolev-Morrey homogêneo* como o conjunto $\mathcal{M}_{p,\lambda}^s = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \mathcal{M}_{p,\lambda}$ munido com a norma

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f\|_{p,\lambda},$$

onde o Laplaciano fracionário $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ é um caso particular de (2.14). Assim como o espaço de Morrey, os espaços de Sobolev-Morrey possuem a seguinte relação de escala

$$\|f(\gamma \cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \gamma^{s - \frac{N-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}.$$

Outra característica importante (ver (FERREIRA; POSTIGO, 2019, p. 1437)) é a de que pode-se reescrever os espaços de Besov-Morrey como espaços de interpolação real

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s = (\mathcal{M}_{q,\lambda}^{s_1}, \mathcal{M}_{q,\lambda}^{s_2})_{\theta,r},$$

para todo $s_1 \neq s_2$, $0 < \theta < 1$ e $s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$. Aqui $(X, Y)_{\theta,r}$ representa o espaço de interpolação real entre os espaços X e Y construído via K-método, para mais detalhes recomendamos a leitura de (BENNETT; SHARPLEY, 1988). Mantendo as mesmas condições das linhas anteriores sobre s , s_1 , s_2 e θ , também vale que

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^s = (\mathcal{N}_{q,\lambda,r_1}^{s_1}, \mathcal{N}_{q,\lambda,r_1}^{s_2})_{\theta,r}.$$

Para concluir esta seção, vejamos algumas inclusões importantes.

Lema 2.5.3. (ALMEIDA; PRECIOSO, 2015, Lema 2.1). *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leq p_i < \infty$ e $0 \leq \lambda_i < N$, $i \in \{1, 2, 3\}$.*

(i) *Se $(N - \lambda_1)/p_1 = (N - \lambda_2)/p_2$ e $p_2 \leq p_1$,*

$$\mathcal{M}_{p_1,\lambda_1} \subset \mathcal{M}_{p_2,\lambda_2} \text{ e } \mathcal{N}_{p_1,\lambda_1,1}^0 \subset \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1} \subset \mathcal{N}_{p_1,\lambda_1,\infty}^0.$$

(ii) *Se $p_2 \leq p_1$, $s_1 \leq s_2$ são tais que $s_2 - \frac{N - \lambda_2}{p_2} = s_1 - \frac{N - \lambda_1}{p_1}$ então para $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$*

$$\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{s_2} \subset \mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}$$

e para cada $1 \leq r_2 \leq r_1 \leq \infty$,

$$\mathcal{N}_{p_2,\lambda_2,r_2}^{s_2} \subset \mathcal{N}_{p_1,\lambda_1,r_1}^{s_1} \text{ e } \mathcal{N}_{p_2,\lambda_2,r_2}^{s_2} \subset \dot{B}_{\infty,r_2}^{s_2 - \frac{n-\lambda_2}{p_2}}.$$

2.6 OPERADOR CALOR

Para cada $t > 0$ considere a função

$$\begin{aligned} g_t : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Agora, seja $1 \leq p < \infty$, defina uma família de operadores limitados em $L^p(\mathbb{R}^N)$ como $G(0) = I$ (operador identidade sobre o espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$) e $G(t)f = g_t * f$ para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$. A proposição a seguir garante que a família $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ construída acima é um C_0 -semigrupo sobre o espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$; esse semigrupo, por sua vez, é conhecido na literatura como *semigrupo do calor*.

Proposição 2.6.1. (ENGEL; NAGEL, 2000, p. 69). *A família acima definida forma um C_0 -semigrupo sobre $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, e seu gerador infinitesimal A coincide com o fecho do operador Laplaciano*

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, \dots, x_n)$$

definido para cada f no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Nos perguntamos aqui se os operadores $G(t)$ considerados acima não podem ser estendidos a espaços de Banach mais fracos de modo que, ainda assim, constituam um C_0 -semigrupo. Em (KATO, 1992) é feito o estudo desses operadores em espaços de Morrey $\mathcal{M}_{p,\lambda}$. Considerando o subespaço de $\mathcal{M}_{p,\lambda}$

$$\ddot{\mathcal{M}}_{p,\lambda} = \{f \in \mathcal{M}_{p,\lambda} : \|\tau_y f - f\|_{p,\lambda} \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

em que τ_y denota a translação em y , isto é, $\tau_y f(x) = f(x-y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, do Teorema de Banach-Steinhaus tem-se que $\ddot{\mathcal{M}}_{p,\lambda}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{M}_{p,\lambda}$. Um resultado apresentado mais adiante nos garantirá que os operadores $G(t)$ constituem um C_0 -semigrupo no subespaço definido acima.

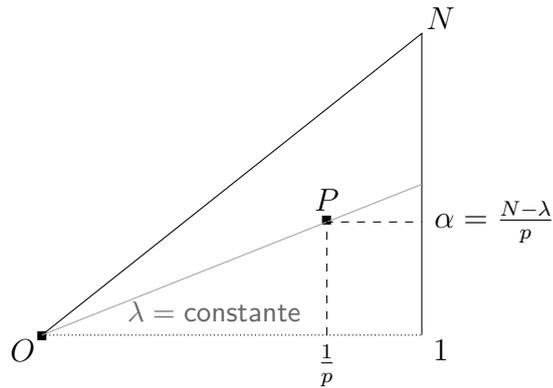
Para $(N - \lambda)/p > 0$, KATO reescreve os espaços de Morrey como

$$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}_{p,\lambda}, \quad P = \left(\frac{1}{p}, \frac{(N - \lambda)}{p} \right) \in \blacktriangle,$$

em que \blacktriangle denota o triângulo retângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, N)$, com o lado inferior excluído (exceto na origem), veja a Figura 2; (KATO, 1992) também denota a norma $\|f\|_{p,\lambda}$ por $\|f; P\|$ (com $\|f; O\| = \|f\|_\infty$).

Um dos resultados de (KATO, 1992) é o seguinte.

Figura 2 – Triângulo Usado por KATO



Fonte: KATO (1992)

Lema 2.6.2. (KATO, 1992, Lema 2.1). Sejam $P_1, P_2 \in \blacktriangle$, onde P_2 é um ponto que está no segmento $[OP_1]$ ou do lado direito desse segmento. Considere também $\alpha_1 = y(P_1)$ e $\alpha_2 = y(P_2)$ (coordenadas do eixo y dos pontos P_1 e P_2) tais que $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq N$. Se $t > 0$, os operadores $G(t)$, $W(t) = \nabla G(t)$ e $\partial_t G(t)$ são limitados de $\mathcal{M}(P_1)$ para $\ddot{\mathcal{M}}(P_2) \subset \mathcal{M}(P_2)$ e dependem continuamente de t (em norma). Além disso, para cada $f \in \mathcal{M}(P_1)$

- (i) $t^{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \|G(t)f; P_2\| \leq C \|f; P_1\|$, com $C = 1$ se $P_1 = P_2$,
- (ii) $t^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \|W(t)f; P_2\| \leq C \|f; P_1\|$,
- (iii) $t^{1 + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \|\partial_t G(t)f; P_2\| \leq C \|f; P_1\|$,

em que as constantes representadas por C dependem de P_1, P_2, α_1 e α_2 .

As estimativas acima desempenham um papel importante na teoria desenvolvida por (KATO, 1992), onde se consegue soluções para o problema de Navier-Stokes em espaços de Banach específicos utilizando um argumento de ponto fixo.

Além disso, (KATO, 1992) também verifica as seguintes equivalências.

Lema 2.6.3. (KATO, 1992, Lema 3.1) Seja $f \in \mathcal{M}(P)$. As seguintes condições são equivalentes.

- (i) $f \in \ddot{\mathcal{M}}(P)$.
- (ii) $\|\tau_y f - f; P\| \rightarrow 0$, sempre que $y \rightarrow 0$.
- (iii) $\|G(t)f - f; P\| \rightarrow 0$, sempre que $t \rightarrow 0^+$.

Como consequência do Lema 2.6.3 o corolário abaixo garante que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo no espaço $\ddot{\mathcal{M}}(P)$.

Corolário 2.6.4. (KATO, 1992, Corolário 3.2). $\ddot{\mathcal{M}}(P)$ é o subespaço fechado maximal de $\mathcal{M}(P)$ onde a família τ_y forma um grupo fortemente contínuo e, ao mesmo tempo, o subespaço maximal onde $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

Em particular, tomando $X = \ddot{\mathcal{M}}(P)$ na Proposição 2.2.25, o corolário anterior nos garante o seguinte resultado.

Corolário 2.6.5. Se $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ é uma função completamente positiva com função creep $k \in W^{2,1}_{loc}(0, \infty)$ e $g \in C([0, T]; \ddot{\mathcal{M}}(P))$, para algum $T > 0$, a equação de Volterra

$$u(t) = g(t) + \int_0^t a(t-s) \Delta u(s) ds, \quad t \geq 0,$$

possui um operador solução $S(t)$ dado por $S(0) = I$ e

$$S(t) = G\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} + S_0(t), \quad t > 0,$$

em que

$$S_0(t) = \int_0^{t/\kappa} G(\tau) v(t; \tau) d\tau,$$

onde a função $v(t; \tau)$ é definida em (2.13). Além disso $S_0(t)$ é $\mathcal{L}(X)$ -contínuo em $(0, \infty)$ e em todo \mathbb{R}_+ se $\kappa > 0$ e $\rho < \infty$.

Esse ultimo corolário desempenhará um papel importante no Capítulo 4, assim como o próximo lema, que diz respeito às estimativas do operador calor considerando os espaços de Morrey e Besov-Morrey. Assim como (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), denotaremos daqui em diante $\tau_{p,\lambda} = (N - \lambda)/p$, para $0 \leq \lambda < N$ e $1 \leq p \leq \infty$, e ∇_x^k a derivada sobre o \mathbb{R}^N de multi-índice k .

Lema 2.6.6. (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, Lema 2.2) Sejam j um multi-índice, $s_1 \leq s_2$, $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < N$. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j G(t) f\|_{\mathcal{M}_{p_2, \lambda}} &\leq C t^{-\frac{|j|}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda} - \tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1, \lambda}}, \\ \|\nabla_x^j G(t) f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_2}} &\leq C t^{-\frac{|j| + (s_2 - s_1)}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda} - \tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

para cada $f \in \mathcal{S}'$ e $t > 0$.

Do lema anterior e usando teoria de interpolação é possível verificar também o resultado a seguir.

Corolário 2.6.7. *Sejam j um multi-índice, $s_1 < s_2$, $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $0 \leq \lambda < N$ e $1 \leq r \leq \infty$, então para cada $f \in \mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}$*

$$\|\nabla_x^j G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{|j|+(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}}, \quad (2.18)$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Como $s_1 < s_2$, $s_1 < 2s_2 - s_1$ (em particular $2s_2 - s_1 \neq s_1$) e $(2s_2 - s_1)(\frac{1}{2}) + s_1(\frac{1}{2}) = s_2$, de (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, p. 1437-1438)

$$(\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1}, \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1})_{\frac{1}{2}, 1} = \mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2} \subset \mathcal{N}_{p_2, \lambda, \infty}^{s_2} = (\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1}, \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1})_{\frac{1}{2}, \infty}. \quad (2.19)$$

Denotando $X = \mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2}$ observe que:

- (i) de (BENNETT; SHARPLEY, 1988, p. 300, Proposição 1.8), X é um espaço intermediário entre $\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1}$ e $\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1}$;
- (ii) de (BENNETT; SHARPLEY, 1988, p. 309-310, Definição 2.2) e (2.19), X é de classe $\theta = \frac{1}{2}$;
- (iii) para $f \in X$, $\|f\|_X = \|f\|_{\frac{1}{2}, 1}$, onde $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}, 1}$ representa a norma do espaço intermediário obtido pelo K-método $(X_0, X_1)_{\frac{1}{2}, 1}$, que no nosso caso são $X_0 = \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1}$ e $X_1 = \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1}$.

Agora, seja $f \in \mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}$, como $s_1 \leq 2s_2 - s_1$ e $s_1 \leq s_1$, pelo Lema 2.6.6 $\nabla_x^j G(t)f \in \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1} \cap \mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1}$. Logo, de (i), (ii), (iii) e (BENNETT; SHARPLEY, 1988, p. 316, Proposição 2.10)

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2}} &\leq C \|\nabla_x^j G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{2s_2-s_1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_x^j G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, r}^{s_1}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ct^{\frac{1}{2} \left[-\frac{|j|+(2s_2-s_1)-s_1}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda}) \right]} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad t^{\frac{1}{2} \left[-\frac{|j|}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda}) \right]} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, r}^{s_1}}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a última desigualdade é devido à estimativa (2.17). Finalmente, simplificando (2.20) obtemos (2.18). \square

2.7 RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Nessa seção, vamos enunciar os principais resultados que utilizaremos para garantir a existência e unicidade dos problemas apresentados nos capítulos subsequentes. Como referência recente, sugerimos aqui a leitura de (ARGAWAL; JLELI; SAMET, 2018).

Teorema 2.7.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam X um espaço métrico não vazio e $S : X \rightarrow X$ uma contração estrita, ou seja, existe $C < 1$ tal que*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq Cd(v_1, v_2)$$

para todo $v_1, v_2 \in X$. Então o operador S possui um único ponto fixo $u = Su$.

Os lemas a seguir são consequências do teorema anterior e suas demonstrações seguem um padrão comumente encontrado na literatura (ver (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015; FERREIRA; PRECIOSO, 2011)).

Lema 2.7.2. *Sejam X e Y espaços de Banach, $\mathcal{T} : Y \rightarrow X$ um operador linear limitado e $\mathcal{B} : X \times X \rightarrow X$ um operador bilinear limitado, isto é, existe $K > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_X \leq K\|u\|_X\|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{2K}$ e $u_0 \in Y$ tal que $\|u_0\|_Y < \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{T}\|}$ existe um único $u \in B_\varepsilon := \{u \in X : \|u\|_X < \varepsilon\}$ tal que

$$u = \mathcal{T}(u_0) + \mathcal{B}(u, u).$$

Em particular o lema acima nos garante que, nas hipóteses apresentadas, a aplicação $u_0 \mapsto u$ definida sobre o conjunto $\{u_0 \in Y : \|u_0\|_Y < \varepsilon/(2\|\mathcal{T}\|)\}$ está bem definida. Mais do que isso, essa função é Lipschitz contínua, como é apresentado no próximo lema.

Lema 2.7.3 (Dependência Contínua). *Sejam u_0 e \tilde{u}_0 nas condições do Lema 2.7.2, os respectivos pontos fixos $u \in B_\varepsilon$ e $\tilde{u} \in B_\varepsilon$ fornecidos por esse mesmo lema devem satisfazer a desigualdade*

$$\|u - \tilde{u}\|_X \leq \frac{\|\mathcal{T}\|}{(1 - 2K\varepsilon)} \|u_0 - \tilde{u}_0\|_Y.$$

3 BOA COLOCAÇÃO GLOBAL PARA EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM QUIMIOTAXIA EM ESPAÇOS DE BESOV-MORREY CRÍTICOS

Neste capítulo, desenvolveremos os resultados referentes ao problema (1.1) que em resumo são: a boa colocação em espaços de Morrey, a auto-similaridade e a estabilidade assintótica. Este capítulo é organizado como a seguir. Na próxima seção será apresentada a formulação integral para o nosso problema e faremos o estudo das principais estimativas para os operadores de Mittag-Leffler. Por último, na Seção 3.2 apresentaremos os principais teoremas e suas respectivas provas.

Somente neste capítulo representaremos por $\mathcal{M}_{p_1}^p$ o espaço $\mathcal{M}_{p_1, \lambda}$ explorado na Seção 2.5 para $\lambda = N(1 - p_1/p)$ e denotaremos o espaço $\mathcal{N}_{p, N(1-p_1/p), r}^s$ simplesmente por $\mathcal{N}_{p, p_1, r}^s$, para $1 \leq r \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$.

Observação 3.0.1. *Da desigualdade Hölder (Lema 2.5.2), sejam $1 \leq p_1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q \leq \infty$ e $1 \leq r_1 \leq r \leq \infty$. Se $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$, então*

$$\|fg\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (3.1)$$

para todo $f \in \mathcal{M}_{p_1}^p$ e $g \in \mathcal{M}_{q_1}^q$.

Observação 3.0.2. *Do Lema 2.6.6, sejam $1 \leq p_1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q_1 \leq q < \infty$. Se $p \geq q$ e $\frac{p}{p_1} \geq \frac{q}{q_1}$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (3.2)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}. \quad (3.3)$$

Além disso, para $1 \leq q_1 \leq q < \infty$, vale também

$$\|G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{N}{2q}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (3.4)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{N}{2q}-\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}. \quad (3.5)$$

Observação 3.0.3. *Para $s < 0$ temos as seguintes equivalência de normas (ver (MAZZUCATO, 2003)).*

$$\|u\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, \infty}^s} \cong \sup_{t>0} t^{-\frac{s}{2}} \|G(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \quad (3.6)$$

3.1 ESTIMATIVAS PARA OS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Aqui e no que segue, definimos $G_\gamma(t) = e^{-t\gamma}G(t)$ como o semigrupo do calor amortecido e denotamos por \mathbb{P} o projetor de Leray-Helmholtz no espaço de campos vetoriais solenoidais. Aplicando \mathbb{P} na quarta equação em (1.1) e usando o princípio de Duhamel, o sistema (1.1) pode ser formalmente convertido na seguinte formulação integral

$$\left\{ \begin{array}{l} n(t) = E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \cdot \nabla n)(s) ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(n \nabla c + n \nabla v)(s) ds \\ := E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0 + \mathcal{B}_{4,1}^1(u, n)(t) + \mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)(t) + \mathcal{B}_{1,3}^1(n, v)(t), \\ c(t) = E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \cdot \nabla c + nc)(s) ds \\ := E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0 + \mathcal{B}_{4,2}^2(u, c)(t) + \mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)(t), \\ v(t) = E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))v_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha (\Delta - \gamma))(u \cdot \nabla v - n)(s) ds \\ := E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))v_0 + \mathcal{B}_{4,3}^3(u, v)(t) + \mathcal{L}_3(n)(t), \\ u(t) = E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(u \cdot \nabla)u(s) ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(nf)(s) ds \\ := E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 + \mathcal{B}_{4,4}^4(u, u)(t) + \mathcal{L}_4(n)(t). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Como já vimos, $\{E_\alpha(t^\alpha \cdot) : t \geq 0\}$ e $\{E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \cdot) : t \geq 0\}$ são denominadas famílias de Mittag-Leffler, precisaremos, em particular, dos operadores

$$\begin{aligned} E_\alpha(t^\alpha \Delta) &= \int_0^\infty M_\alpha(s)G(st^\alpha)ds, \\ E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) &= \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)G(st^\alpha)ds, \\ E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma)) &= \int_0^\infty M_\alpha(s)G_\gamma(st^\alpha)ds, \\ E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha (\Delta - \gamma)) &= \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)G_\gamma(st^\alpha)ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $M_\alpha(\cdot)$ é a função de Mainardi definida na página 37.

Uma 4-upla (n, c, v, u) satisfazendo (3.7) é chamada solução branda de (1.1).

3.1.1 Estimativas para os operadores de Mittag-Leffler

Demonstraremos as estimativas lineares para os operadores de Mittag-Leffler sob a condição a seguir.

Condição 3.1.2. *Assuma que $N \geq 2$ e $\gamma \geq 0$. Para $N \geq 3$, suponha que os expoentes p, q e r satisfazem, exclusivamente, (i), (ii) ou (iii), onde*

$$(i) \frac{N}{2} < q < N, N < p < \frac{Nq}{N-q}, N < r < \frac{Nq}{N-q},$$

$$(ii) q = N, N < p < \infty, N < r < \infty,$$

$$(iii) N < q < 2N, N < p < \frac{Nq}{q-N}, q \leq r < \frac{Nq}{q-N}.$$

No caso $N = 2$ assumimos que p, q e r satisfazem a condição (iii) acima.

Além disso, suponha também que p_1, q_1, r_1 e N_1 satisfazem as seguintes condições:

$$(a) 1 \leq p_1 \leq p, 1 \leq q_1 \leq q, 1 \leq r_1 \leq r, 1 \leq N_1 \leq N,$$

$$(b) \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_1} \leq 1, \frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1,$$

$$(c) \frac{p}{p_1} \leq \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1},$$

$$(d) p_1 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1} \right) \leq p \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} \right).$$

Além disso vamos utilizar a notação

$$s(a, b) = \frac{ab}{a+b}.$$

O próximo lema nos fornece estimativas para os operadores de Mittag-Leffler em espaços de Morrey, somente aqui denotaremos a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ por $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$.

Lema 3.1.3. *Supondo que a Condição 3.1.2 seja satisfeita, temos que*

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{s(p_1,q_1)}^{s(p,q)} \rightarrow \mathcal{M}_{q_1}^q} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{s(r_1,q_1)}^{s(r,q)} \rightarrow \mathcal{M}_{q_1}^q} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.10)$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p \rightarrow L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.11)$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{s(p_1,r_1)}^{s(p,r)} \rightarrow \mathcal{M}_{r_1}^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.12)$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q \rightarrow L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2q}}, \quad (3.13)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q \rightarrow \mathcal{M}_{r_1}^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.14)$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))\|_{\mathcal{M}_{s(p_1,r_1)}^{s(p,r)} \rightarrow \mathcal{M}_{r_1}^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.15)$$

$$\|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{p_1/2}^{p/2} \rightarrow \mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.16)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q \rightarrow \mathcal{M}_{r_1}^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) - \frac{\alpha}{2}}, \quad (3.17)$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)\|_{\mathcal{M}_{s(N_1,q_1)}^{s(N,q)} \rightarrow \mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p})}. \quad (3.18)$$

Demonstração. Da Condição 3.1.2, segue que $1 \leq s(p_1, q_1) \leq s(p, q) \leq q$ e $\frac{q}{q_1} \geq \frac{s(p,q)}{s(p_1,q_1)}$.

Então usando (3.8), (3.3) e a Proposição 2.4.3 obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla \cdot G(st^\alpha)g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{s(p_1,q_1)}^{s(p,q)}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2p})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha N}{2p})} \|g\|_{\mathcal{M}_{s(p_1,q_1)}^{s(p,q)}}, \end{aligned}$$

que resulta em (3.9). Para provar (3.10) inicialmente observamos que $1 \leq s(r_1, q_1) \leq s(r, q) \leq q$ e $\frac{q}{q_1} \geq \frac{s(r,q)}{s(r_1,q_1)}$. Daí, usando (3.8) e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2r}} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{s(r_1,q_1)}^{s(r,q)}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2r})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha N}{2r})} \|g\|_{\mathcal{M}_{s(r_1,q_1)}^{s(r,q)}}. \end{aligned}$$

Usando (3.8), (3.5) e o fato de que $\frac{1}{2}(1 - \frac{N}{p}) > -1$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla \cdot G(st^\alpha)g\|_{L^\infty} ds \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2}(1 - \frac{N}{p})} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2p})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{p}))} \|g\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}, \end{aligned}$$

logo obtemos também a desigualdade (3.11). Para obter (3.12) observamos que $1 \leq s(p_1, r_1) \leq s(p, r) \leq r$ e $\frac{r}{r_1} \geq \frac{s(p, r)}{s(p_1, r_1)}$. Usando (3.8) e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{s(p_1, r_1)}^{s(p, r)}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2p})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{p}))} \|g\|_{\mathcal{M}_{s(p_1, r_1)}^{s(p, r)}}. \end{aligned}$$

(3.13) segue de (3.4) procedendo de modo análogo a (3.11). Para provar (3.14) observamos que da condição 3.1.2, temos que $r \geq q$ e $N(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) < 1$, então usando (3.8) e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{r_1}^q} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &= Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - N(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})))} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}. \end{aligned}$$

A prova de (3.15) é similar a (3.12). Para provar (3.16) usamos (3.8) e (3.3) para obter

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{p_1/2}^{p/2}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{N}{2p})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{N}{p}))} \|g\|_{\mathcal{M}_{p_1/2}^{p/2}}. \end{aligned}$$

A prova de (3.17) é similar a de (3.14). Finalmente, para obter (3.18) notamos que $p > s(q, N)$ e $\frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p}) < 2$, então

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \Delta)g\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p})} \int_0^\infty s^{1 - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p})} M_\alpha(s) ds \|g\|_{\mathcal{M}_{s(N_1, q_1)}^{s(N, q)}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p})} \|g\|_{\mathcal{M}_{s(N_1, q_1)}^{s(N, q)}}. \end{aligned}$$

Com isso, completamos a prova do Lema 3.1.3. □

3.2 PRINCIPAIS RESULTADOS

A meta deste capítulo é estender os resultados obtidos recentemente em (FERREIRA; POSTIGO, 2019) (ver também (KOZONO; MIURA; SUGIYAMA, 2016)) para o problema de quimiotaxia e fluido acoplado fracionário. Para ser mais preciso, devemos provar a boa colocação global para o modelo de quimiotaxia sob efeito do fluido não linear de Navier-Stokes (1.1) fracionário em todo o espaço \mathbb{R}^N com dados iniciais pequenos em espaços de Besov-Morrey críticos dados em (1.3) (ver Teorema 3.2.1). Os resultados apresentados também nos permitem obter soluções auto-similares desde que os dados iniciais n_0, c_0, v_0, u_0 e f sejam funções homogêneas de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1 , respectivamente, com normas pequenas em classes invariantes

por escala e considerando o caso do atraente químico sem taxa de degradação (ver Corolário 3.2.5). Além disso, mostramos que as soluções são assintoticamente estáveis para pequenas perturbações dos dados iniciais (ver Teorema 3.2.6). Como um subproduto, obtemos também uma classe de soluções assintoticamente auto-similares quando $\gamma = 0$ (ver Corolário 3.2.7). Antes de entrar em detalhes é importante mencionar que nossos resultados constituem um primeiro passo na direção de uma teoria de existência abrangente para o sistema fracionário acoplado (1.1). Note que cobrimos aqui também os resultados obtidos previamente sobre o sistema de Keller-Segel fracionário de Azevedo et al. (AZEVEDO; CUEVAS, 2019). Por outro lado, se ignoramos o efeito da quimiotaxia, i.e. $n = c = v = 0$, então o sistema (1.1) se reduz à equação de Navier-Stokes incompressível fracionária com a soma das forças externas sendo nula, para esse caso os resultados ainda são recentes (ver (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015; LEMARIÉ-RIEUSSET, 2002)).

Realizamos uma análise de escala para encontrar a configuração funcional adequada. Apesar de que o sistema (1.1) não possui uma propriedade de escala, pode-se considerar uma escala intrínseca que é herdada do caso sem taxa de degradação do atraente químico, isto é $\gamma = 0$. Assuma temporariamente $\gamma = 0$ e f uma distribuição homogênea de grau -1 . Se (n, c, v, u, p) é uma solução para (1.1) que é suficientemente regular, o mesmo ocorre para $(n_\sigma, c_\sigma, v_\sigma, u_\sigma, p_\sigma)$ com dados iniciais $(\sigma^2 n_0(\sigma x), c_0(\sigma x), v_0(\sigma x), \sigma u_0(\sigma x))$, para cada $\sigma > 0$, onde $n_\sigma(x, t) := \sigma^2 n(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$, $c_\sigma(x, t) := c(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$, $v_\sigma(x, t) := v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$, $u_\sigma(x, t) := \sigma u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ e $p_\sigma(x, t) := \sigma^2 p(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$. Isso nos leva a considerar funções escalas

$$(n, c, v, u) \rightarrow (n_\sigma, c_\sigma, v_\sigma, u_\sigma) \quad (3.19)$$

e

$$(n_0, c_0, v_0, u_0) \rightarrow (\sigma^2 n_0(\sigma x), c_0(\sigma x), v_0(\sigma x), \sigma u_0(\sigma x)).$$

Os espaços funcionais invariantes por essas funções são chamados críticos para (1.1) e as soluções invariantes por (3.19) são denominadas auto-similares. Então, para (n, c, v, u) ser uma solução auto-similar, é necessário que os dados iniciais n_0, c_0, v_0, u_0 e a força f sejam homogêneos de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1 , respectivamente. Motivados pela análise de escala acima, consideramos os dados iniciais críticos n_0, c_0, v_0 e u_0 como em (1.3) e a força $f \in \mathcal{M}_{N_1}^N(\mathbb{R}^N)$. Iremos agora assumir a seguinte condição introduzida em (KOZONO; MIURA; SUGIYAMA, 2016, Teorema 1) e (FERREIRA; POSTIGO, 2019, Hipótese 1).

As soluções serão obtidas em um espaço crítico \mathcal{X}^α definido como a seguir. Vamos inicialmente definir os espaços

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1^\alpha &= \{n : t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} n \in B((0, \infty); \mathcal{M}_{q_1}^q)\}, \\ \mathcal{X}_2^\alpha &= \{c : c \in B((0, \infty); L^\infty) \text{ com } t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \nabla c \in B((0, \infty); \mathcal{M}_{r_1}^r)\}, \\ \mathcal{X}_3^\alpha &= \{v : v(\cdot, t) \in S'/\mathcal{P} \text{ para } t > 0 \text{ e } t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \nabla v \in B((0, \infty); \mathcal{M}_{r_1}^r)\}, \\ \mathcal{X}_4^\alpha &= \{u : t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} u \in B((0, \infty); \mathcal{M}_{p_1}^p)\},\end{aligned}$$

que são espaços de Banach munidos com as respectivas normas

$$\begin{aligned}\|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} = \sup_{t>0} \|c(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla c(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \\ \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \quad \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} = \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}.\end{aligned}$$

Em seguida, vamos introduzir os espaços \mathcal{X}^α e \mathcal{I}^α como

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^\alpha &:= \{(n, c, v, u) : n \in \mathcal{X}_1^\alpha, c \in \mathcal{X}_2^\alpha, v \in \mathcal{X}_3^\alpha, u \in \mathcal{X}_4^\alpha\}, \\ \mathcal{I}^\alpha &:= \{(n_0, c_0, v_0, u_0) : n_0, c_0, v_0 \text{ e } u_0 \text{ como em (1.3)}\},\end{aligned}$$

que são espaços de Banach com as normas

$$\begin{aligned}\|(n, c, v, u)\|_{\mathcal{X}^\alpha} &:= \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} + \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} + \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} + \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha}, \\ \|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}^\alpha} &:= \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{\frac{N}{q} - 2}} + \|c_0\|_{L^\infty} + \|\nabla c_0\|_{\mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r} - 1}} \\ &\quad + \|\nabla v_0\|_{\mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r} - 1}} + \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, \infty}^{\frac{N}{p} - 1}}.\end{aligned}$$

Nosso primeiro resultado de boa colocação é o seguinte.

Teorema 3.2.1. *Seja $N \geq 2$ e considerando os expoentes p, p_1, q, q_1, r, r_1 e N_1 como na Condição 3.1.2. Suponha que os dados iniciais $(n_0, c_0, v_0, u_0) \in \mathcal{I}^\alpha$ e a força externa $f \in \mathcal{M}_{N_1}^N(\mathbb{R}^N)$. Existe uma constante positiva ε , $\delta = \delta(\varepsilon)$, e K_1 tais que o problema (1.1) possui uma única solução branda global $(n, c, v, u) \in \mathcal{X}^\alpha$ satisfazendo $\|(n, c, v, u)\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq 2K_1\varepsilon$ sempre que $\|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}^\alpha} \leq \delta$. Além disso, a função $F : \mathcal{I}^\alpha \rightarrow \mathcal{M}_{N_1}^N(\mathbb{R}^N)$ que leva cada dado inicial em sua respectiva solução é localmente Lipschitz contínua.*

Para a demonstração do Teorema 3.2.1 precisaremos de três lemas que, de forma resumida, vão nos permitir utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver (FERREIRA; POSTIGO, 2019, Lema 4.1)).

Lema 3.2.2. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.1, existem constantes positivas C_i 's, $i = 1, \dots, 7$ tais que*

$$\|\mathcal{B}_{4,1}^1(u, n)\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \leq C_1 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha}, \quad (3.20)$$

$$\|\mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \leq C_2 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}, \quad (3.21)$$

$$\|\mathcal{B}_{1,3}^1(n, v)\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \leq C_3 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha}, \quad (3.22)$$

$$\|\mathcal{B}_{4,2}^2(u, c)\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \leq C_4 \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha}, \quad (3.23)$$

$$\|\mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \leq C_5 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}, \quad (3.24)$$

$$\|\mathcal{B}_{4,3}^3(u, v)\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} \leq C_6 \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha}, \quad (3.25)$$

$$\|\mathcal{B}_{4,4}^4(u, \tilde{u})\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \leq C_7 \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_4^\alpha}, \quad (3.26)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1^\alpha$, $c \in \mathcal{X}_2^\alpha$, $v \in \mathcal{X}_3^\alpha$ e $u, \tilde{u} \in \mathcal{X}_4^\alpha$, onde os operadores $\mathcal{B}_{i,j}^k$'s são dados em (3.7).

Demonstração. Usando (3.9) e a desigualdade de Hölder (Observação 3.0.1) obtemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{4,1}^1(u, n)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(un)(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} \|(un)(s)\|_{\mathcal{M}_{s(p_1, q_1)}^{s(p, q)}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} \|u(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{q} - 3)} ds \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha}. \end{aligned}$$

Dos itens (i), (ii) e (iii) da Condição 3.1.2, temos que $1 - \frac{N}{p} > 0$ e $N(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > 1$, logo $\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{p} - \frac{N}{q}) < 1$. Portanto

$$t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{4,1}^1(u, n)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \leq CB \left(1 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{N}{p} + \frac{N}{q} - 3\right), \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{N}{p}\right)\right) \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha},$$

de onde obtemos (3.20).

Para provar (3.21), usamos (3.10) e a Observação 3.0.1, então tendo em mente que $1 - \frac{N}{r} > 0$, $N(\frac{1}{r} + \frac{1}{q}) > 1$ e $\frac{\alpha}{2}(3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{r}) < 1$ inferimos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} \|(n \nabla c)(s)\|_{\mathcal{M}_{s(r_1, q_1)}^{s(r, q)}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|(\nabla c)(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} ds \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} B \left(1 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3\right), \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{N}{r}\right)\right) \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}. \end{aligned}$$

De modo similar

$$\|\mathcal{B}_{1,3}^1(n, v)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \leq Ct^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} B\left(1 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3\right), \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{N}{r}\right)\right) \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha},$$

logo (3.22) também é verificado.

Usando (3.11), a desigualdade de Hölder e o fato de que $1 - \frac{N}{p} > 0$ e $\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{N}{p}\right) < 1$ temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{4,2}^2(u, c)(t)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(uc)(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} \|(uc)(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} \|u(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} s^{-\frac{\alpha N}{2p}-\frac{\alpha}{2}} ds \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \\ &\leq CB\left(1 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{p} - 1\right), \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{N}{p}\right)\right) \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Temos as seguintes estimativas para $\nabla \mathcal{B}_{4,2}^2$:

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{B}_{4,2}^2(u, c)(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^{r_1}} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \cdot \nabla c)(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^{r_1}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} \|(u \cdot \nabla c)(s)\|_{\mathcal{M}_{s(p_1, r_1)}^{s(p, r)}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} \|u(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|\nabla c(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^{r_1}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)-1} s^{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{p} + \frac{N}{r} - 2\right)} ds \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2r}-\frac{\alpha}{2}} B\left(1 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{p} + \frac{N}{r} - 2\right), \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{N}{p}\right)\right) \\ &\quad \times \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28) obtemos (3.23). Podemos estimar $\mathcal{B}_{1,2}^2$ e $\nabla \mathcal{B}_{1,2}^2$ como a seguir: Usando (3.13), a desigualdade de Hölder e o fato de que $\alpha\left(1 - \frac{N}{2q}\right) > 0$ e $1 + \alpha\left(\frac{N}{2q} - 1\right) > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)(t)\|_{L^\infty} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha\left(1-\frac{N}{2q}\right)-1} \|(nc)(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha\left(1-\frac{N}{2q}\right)-1} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha\left(1-\frac{N}{2q}\right)-1} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} ds \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \\ &\leq CB\left(1 + \alpha\left(\frac{N}{2q} - 1\right), \alpha\left(1 - \frac{N}{2q}\right)\right) \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Visto que $1 > N(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$ e $\alpha(1 - \frac{N}{2q}) < 1$ usando (3.14) inferimos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}))^{-1}} \|(nc)(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}))^{-1}} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}))^{-1}} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} ds \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2r}-\frac{\alpha}{2}} B\left(1-\alpha+\frac{\alpha N}{2q}, \frac{\alpha}{2}\left(1-N\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\right)\right) \\
&\quad \times \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Das estimativas (3.29) e (3.30) obtemos (3.24). Agora usando (3.15) e procedendo de modo análogo a (3.28), conseguimos estimar $\nabla \mathcal{B}_{4,3}^3(u, v)$ em $\mathcal{M}_{r_1}^r$ como

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathcal{B}_{4,3}^3(u, v)(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})^{-1}} \|u(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|\nabla v(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2r}-\frac{\alpha}{2}} B\left(1+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{p}+\frac{N}{r}-2\right), \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)\right) \\
&\quad \times \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|v\|_{\mathcal{X}_3^\alpha}, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

que nos dá (3.25).

Usando (3.16) e (3.1) temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_{4,4}^4(u, \tilde{u})(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})^{-1}} \|(u\tilde{u})(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1/2}^{p/2}} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})^{-1}} \|u(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|\tilde{u}(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})^{-1}} s^{\frac{\alpha N}{p}-\alpha} ds \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2p}-\frac{\alpha}{2}} B\left(1-\alpha+\frac{\alpha N}{p}, \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{N}{p}\right)\right) \|u\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_4^\alpha},
\end{aligned}$$

de onde obtemos (3.26). Com isso completamos a prova do Lema 3.2.2. \square

Lema 3.2.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.1, existem constantes positivas C_8 e C_9 tais que*

$$\|\mathcal{L}_3(n)\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} \leq C_8 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha}, \tag{3.32}$$

$$\|\mathcal{L}_4(n)\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \leq C_9 \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha}, \tag{3.33}$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1^\alpha$, onde os operadores \mathcal{L}'_j s são dados em (3.7).

Demonstração. Usando (3.17) e levando em conta que $1 > N(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$ e $\alpha(1 - \frac{N}{2q}) < 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{L}_3(n)(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))n(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})) - 1} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} ds \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}} B\left(1 + \frac{\alpha N}{2q} - \alpha, \frac{\alpha}{2}\left(1 - N\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\right)\right) \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha}, \end{aligned}$$

com isso conseguimos (3.32). Provaremos agora (3.33). Tendo em mente que $1 > N(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ e $\frac{\alpha N}{2q} - \alpha + 1 > 0$ e usando (3.18) e (3.1) obtemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_4(n)(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)n(s)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})) - 1} \|n(s)f\|_{\mathcal{M}_{s(N_1, q_1)}^{s(N, q)}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})) - 1} \|n(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \|f\|_{\mathcal{M}_{N_1}^N} \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} ds \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \|f\|_{\mathcal{M}_{N_1}^N} \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} B\left(1 + \frac{\alpha N}{2q} - \alpha, \frac{\alpha}{2}\left(1 - N\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\right)\right) \|f\|_{\mathcal{M}_{N_1}^N} \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha}, \end{aligned}$$

completando assim a prova do Lema 3.2.3. \square

Lema 3.2.4. *Suponha que os dados iniciais (n_0, c_0, v_0, u_0) pertencem a \mathcal{I}^α e que a Condição 3.1.2 é satisfeita. Então existem constantes positivas C_{10}, C_{11}, C_{12} e C_{13} tais que*

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \leq C_{10} \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{\frac{N}{q}-2}}, \quad (3.34)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \leq C_{11} \left(\|c_0\|_{L^\infty} + \|\nabla c_0\|_{\mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r}-1}} \right), \quad (3.35)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))v_0\|_{\mathcal{X}_3^\alpha} \leq C_{12} \|\nabla v_0\|_{\mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r}-1}}, \quad (3.36)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \leq C_{13} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, \infty}^{\frac{N}{p}-1}}. \quad (3.37)$$

Demonstração. Em vista de (3.6) temos que

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \leq t^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} \frac{\Gamma(\frac{N}{2q})}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha N}{2q})} \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{\frac{N}{q}-2}},$$

de onde obtemos que (3.34).

Por (NAGAI; YAMADA, 2007, Lema 3.1), temos que

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0\|_{L^\infty} \leq C \|c_0\|_{L^\infty}. \quad (3.38)$$

Tendo em mente que $r > N$ e usando a equivalência (3.6) obtemos que

$$\|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \leq t^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{N}{2r})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha N}{2r})} \|\nabla c_0\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r}-1}}. \quad (3.39)$$

As estimativas (3.38) e (3.39) são responsáveis pela desigualdade (3.35). A desigualdade (3.36) é similar a (3.39). Levando em conta que $p > N$ e usando (3.6) temos que

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq t^{\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{N}{2p})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha N}{2p})} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p}-1}},$$

obtemos assim (3.37). Isso completa a prova do Lema 3.2.4. \square

Prova do Teorema 3.2.1. Começamos definindo

$$y = (E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0, E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0, E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0, E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0)$$

e para $x = (n, c, v, u) \in \mathcal{X}^\alpha$, denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(x) &= \mathcal{B}_{4,1}^1(u, n) + \mathcal{B}_{1,2}^1(n, c) + \mathcal{B}_{1,3}^1(n, v), \\ \mathcal{B}_2(x) &= \mathcal{B}_{4,2}^2(u, c) + \mathcal{B}_{1,2}^2(n, c), \\ \mathcal{B}_3(x) &= \mathcal{B}_{4,3}^3(u, v) + (\mathcal{L}_3 \circ (E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0 + \mathcal{B}_1))(x), \\ \mathcal{B}_4(x) &= \mathcal{B}_{4,4}^4(u, u) + (\mathcal{L}_4 \circ (E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0 + \mathcal{B}_1))(x). \end{aligned}$$

Do Lema 3.2.2, temos que os operadores $\mathcal{B}_{i,j}^k$'s são bilineares e contínuos. Pelo Lema 3.2.3 temos também que \mathcal{L}_3 e \mathcal{L}_4 são operadores lineares contínuos. Em seguida, definimos $K_1 = 1 + C_8 + C_9$, $K_2 = (C_8 + C_9)(C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^7 C_i$ e $C_0 = \max\{C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}\}$. Em vista do Lema 3.2.4 temos também que $\|y\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq C_0 \|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}^\alpha} \leq \varepsilon$ sempre que $\|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}^\alpha} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{C_0}$. Se $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K_1K_2}$, então (FERREIRA; POSTIGO, 2019, Lema 4.1) implica que existe uma única solução $(n, c, v, u) \in \mathcal{X}^\alpha$ de (1.1) tal que $\|(n, c, v, u)\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq 2K_1\varepsilon$. Sejam $x = (n, c, v, u)$ e $\bar{x} = (\bar{n}, \bar{c}, \bar{v}, \bar{u})$ duas soluções correspondentes aos dados iniciais $x_0 = (n_0, c_0, v_0, u_0)$ e $\bar{x}_0 = (\bar{n}_0, \bar{c}_0, \bar{v}_0, \bar{u}_0)$, respectivamente, pela representação (3.7) obtemos que

$$\|x - \bar{x}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq \frac{C}{1 - 4K_1K_2\varepsilon} \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\mathcal{I}^\alpha},$$

então a continuidade da função $x_0 \mapsto x$ é garantida. Com isso a prova fica completa. \square

Visto que o espaço \mathcal{X}^α é crítico com respeito à escala, podemos obter soluções auto-similares.

Corolário 3.2.5. *Seja $N \geq 3$ e $\gamma = 0$. Assuma que (n_0, c_0, v_0, u_0) e f são como no Teorema 3.2.1. Suponha também que n_0, c_0, v_0, u_0 e f são funções homogêneas de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1 , respectivamente. Então, a solução (n, c, v, u) obtida por meio do Teorema 3.2.1 é auto-similar.*

Demonstração. A solução obtida através do Teorema 3.2.1 é o limite em \mathcal{X}^α da sequência de iterações

$$(n^{(1)}, c^{(1)}, v^{(1)}, u^{(1)}) = (E_\alpha(t^\alpha \Delta)n_0, E_\alpha(t^\alpha \Delta)c_0, E_\alpha(t^\alpha \Delta)v_0, E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0)$$

e

$$\begin{aligned} n^{(m+1)} &= n^{(1)} + \mathcal{B}_{4,1}^1(u^{(m)}, n^{(m)}) + \mathcal{B}_{1,2}^1(n^{(m)}, c^{(m)}) + \mathcal{B}_{1,3}^1(n^{(m)}, v^{(m)}), \\ c^{(m+1)} &= c^{(1)} + \mathcal{B}_{4,2}^2(u^{(m)}, c^{(m)}) + \mathcal{B}_{1,2}^2(n^{(m)}, c^{(m)}), \\ v^{(m+1)} &= v^{(1)} + \mathcal{B}_{4,3}^3(u^{(m)}, v^{(m)}) + \mathcal{L}_3(n^{(m)}), \\ u^{(m+1)} &= u^{(1)} + \mathcal{B}_{4,4}^4(u^{(m)}, u^{(m)}) + \mathcal{L}_4(n^{(m)}). \end{aligned}$$

Por hipótese temos que n_0, c_0, v_0, u_0 e f são funções homogêneas de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1 , respectivamente. Além disso, da definição do semigrupo do calor, não é difícil verificar que se $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função homogênea de grau $-k$, para $\sigma > 0$

$$\sigma^k G(\sigma^2 t)g(\sigma x) = (G(t)g)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Então temos que

$$\begin{aligned} \sigma^2 n^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \int_0^\infty M_\alpha(s) \sigma^2 (G(\sigma^2 s t^\alpha) n_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) n_0)(x) ds = n^{(1)}(x, t), \\ c^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) c_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) c_0)(x) ds = c^{(1)}(x, t), \\ v^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) v_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) v_0)(x) ds = v^{(1)}(x, t), \\ \sigma u^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \int_0^\infty M_\alpha(s) \sigma (G(\sigma^2 s t^\alpha) u_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) u_0)(x) ds = u^{(1)}(x, t), \end{aligned}$$

onde na terceira seqüência de igualdades percebemos a importância de se tomar $\gamma = 0$. Então temos que

$$\begin{cases} n^{(1)}(x, t) = \sigma^2 n^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t), \\ c^{(1)}(x, t) = c^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t), \\ v^{(1)}(x, t) = v^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t), \\ u^{(1)}(x, t) = \sigma u^{(1)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t), \end{cases} \quad (3.40)$$

ou seja, $(n^{(1)}, c^{(1)}, v^{(1)}, u^{(1)})$ é invariante por (3.19).

A seguir, provaremos que $(n^{(2)}, c^{(2)}, v^{(2)}, u^{(2)})$ é invariante por (3.19). Usando a primeira e quarta igualdade de (3.40), temos que

$$\begin{aligned} u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)}(z, s) &= \sum_{i=1}^N u_i^{(1)}(z, s) \frac{\partial}{\partial z_i} (n^{(1)}(z, s)) \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma u_i^{(1)}(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) \sigma^2 \frac{\partial}{\partial z_i} (n^{(1)}(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s)) \\ &= \sigma^4 u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)}(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da mesma forma, também temos de (3.40) que

$$\nabla \cdot n^{(1)} \nabla c^{(1)}(z, s) = \sigma^4 \nabla \cdot (n^{(1)} \nabla c^{(1)})(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s), \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot n^{(1)} \nabla v^{(1)}(z, s) = \sigma^4 \nabla \cdot (n^{(1)} \nabla v^{(1)})(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s), \quad (3.43)$$

$$(u^{(1)} \cdot \nabla c^{(1)})(z, s) = \sigma^2 (u^{(1)} \cdot \nabla c^{(1)})(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s), \quad (3.44)$$

$$(n^{(1)} c^{(1)})(z, s) = \sigma^2 (n^{(1)} c^{(1)})(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s). \quad (3.45)$$

De (3.41), obtemos

$$\begin{aligned} &\sigma^4 (E_{\alpha, \alpha}(\sigma^2 (t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\ &= \sigma^4 \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) G(r \sigma^2 (t-s)^\alpha) (u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s)(\sigma x) dr \\ &= \sigma^4 \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi r \sigma^2 (t-s)^\alpha)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|\sigma x - y|^2}{4r \sigma^2 (t-s)^\alpha}} (u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dy dr \\ &= \sigma^4 \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi r (t-s)^\alpha)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4r (t-s)^\alpha}} (u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dz dr \\ &= \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi r (t-s)^\alpha)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4r (t-s)^\alpha}} (u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(z, s) dz dr \\ &= \int_0^\infty \alpha r M_\alpha(r) G(r (t-s)^\alpha \Delta) (u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(s)(x) dz dr \\ &= (E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(s))(x). \end{aligned} \quad (3.46)$$

De modo análogo, das igualdades (3.42)-(3.45) temos que

$$\begin{aligned}
& \sigma^4(\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} \nabla c^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\
&= (\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} \nabla c^{(1)})(s))(x), \\
& \sigma^4(\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} \nabla v^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\
&= (\nabla \cdot E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} \nabla v^{(1)})(s))(x), \tag{3.47} \\
& \sigma^2(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla c^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\
&= (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla c^{(1)})(s))(x), \\
& \sigma^2(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} c^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) = (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(n^{(1)} c^{(1)})(s))(x).
\end{aligned}$$

Usando (3.46) e a definição do operador $\mathcal{B}_{4,1}^1$ temos

$$\begin{aligned}
& \sigma^2 \mathcal{B}_{4,1}^1(u^{(1)}, n^{(1)})(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \\
&= -\sigma^2 \int_0^{\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t} (\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t\sigma^{\frac{2}{\alpha}} - s)^\alpha \Delta)(u \cdot \nabla n)(s)(\sigma x) ds \\
&= -\sigma^2 \int_0^{\sigma^{\frac{2}{\alpha}} t} \sigma^{2(\frac{\alpha-1}{\alpha})} \left(t - \left(\frac{s}{\sigma^{\frac{2}{\alpha}}}\right)\right) E_{\alpha,\alpha} \left(\sigma^2 \left(t - \left(\frac{s}{\sigma^{\frac{2}{\alpha}}}\right)\right)^\alpha \Delta\right) (u \cdot \nabla n)(s)(\sigma x) ds \\
&= -\sigma^2 \int_0^t \sigma^{2(\frac{\alpha-1}{\alpha})} (t-r)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-r)^\alpha \Delta)(u \cdot \nabla n)(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} r)(\sigma x) \sigma^{\frac{2}{\alpha}} dr \\
&= -\int_0^t (t-r)^{\alpha-1} (E_{\alpha,\alpha}((t-r)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla n^{(1)})(r))(x) dr \\
&= \mathcal{B}_{4,1}^1(u^{(1)}, n^{(1)})(x, t). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

De modo semelhante, usando (3.47), provamos também que

$$\begin{cases} \sigma^2 \mathcal{B}_{1,2}^1(n^{(1)}, c^{(1)})(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) = \mathcal{B}_{1,2}^1(n^{(1)}, c^{(1)})(x, t), \\ \sigma^2 \mathcal{B}_{1,3}^1(n^{(1)}, v^{(1)})(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) = \mathcal{B}_{1,3}^1(n^{(1)}, v^{(1)})(x, t), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{4,2}^2(u^{(1)}, c^{(1)})(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) = \mathcal{B}_{4,2}^2(u^{(1)}, c^{(1)})(x, t), \\ \mathcal{B}_{1,2}^2(n^{(1)}, c^{(1)})(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) = \mathcal{B}_{1,2}^2(n^{(1)}, c^{(1)})(x, t). \end{cases} \tag{3.49}$$

Então, de (3.48)-(3.49), deduzimos as igualdades

$$\begin{cases} n^{(2)}(x, t) = \sigma^2 n^{(2)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t), \\ c^{(2)}(x, t) = c^{(2)}(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t). \end{cases} \tag{3.50}$$

Além disso as identidades

$$\sigma^2(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla v^{(1)})(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) = (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u^{(1)} \cdot \nabla v^{(1)})(s))(x),$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)n^{(1)}(\sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}s))(\sigma x) &= (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)n^{(1)}(s))(x), \\ \sigma^3(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(u^{(1)} \cdot \nabla)u^{(1)}(\sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}s))(\sigma x) &= (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(u^{(1)} \cdot \nabla)u^{(1)}(s))(x) \end{aligned}$$

e

$$\sigma^3(E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2(t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(n^{(1)}f)(\sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}s))(\sigma x) = (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)\mathbb{P}(n^{(1)}f)(s))(x),$$

são responsáveis pelas igualdades

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{4,3}^3(u^{(1)}, v^{(1)})(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t) = \mathcal{B}_{4,3}^3(u^{(1)}, v^{(1)})(x, t), \\ \mathcal{L}_3(n^{(1)})(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t) = \mathcal{L}_3(n^{(1)})(x, t), \end{cases} \quad (3.51)$$

e

$$\begin{cases} \sigma \mathcal{B}_{4,4}^4(u^{(1)}, u^{(1)})(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t) = \mathcal{B}_{4,4}^4(u^{(1)}, u^{(1)})(x, t), \\ \sigma \mathcal{L}_4(n^{(1)})(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t) = \mathcal{L}_4(n^{(1)})(x, t). \end{cases} \quad (3.52)$$

Assim, de (3.51) e (3.52), deduzimos também que

$$\begin{cases} v^{(2)}(x, t) = v^{(2)}(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t), \\ u^{(2)}(x, t) = \sigma u^{(2)}(\sigma x, \sigma_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}t). \end{cases} \quad (3.53)$$

Tendo em vista (3.50) e (3.53) temos que $(n^{(2)}, c^{(2)}, v^{(2)}, u^{(2)})$ é invariante por (3.19). Por meio de um argumento de indução, podemos checar que $(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)})$ satisfaz a propriedade de escala (3.19), para todo $m \in \mathbb{N}$. Visto que (n, c, v, u) é o limite em \mathcal{X}^α da sequência $\{(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)})\}_{m \in \mathbb{N}}$ e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^\alpha}$ é invariante por escala (ver seção “propriedades de escala” em (MAZZUCATO, 2003)) inferimos que a solução (n, c, v, u) é auto-similar. Fica portando provado o Corolário 3.2.5. \square

Agora apresentaremos um resultado de estabilidade assintótica para as soluções do sistema (1.1).

Teorema 3.2.6. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.1. Assuma que (n, c, v, u) e $(\bar{n}, \bar{c}, \bar{v}, \bar{u})$ são duas soluções dadas pelo Teorema 3.2.1 correspondentes aos dados iniciais (n_0, c_0, v_0, u_0) e $(\bar{n}_0, \bar{c}_0, \bar{v}_0, \bar{u}_0)$ respectivamente. Temos que*

$$\begin{cases} E_\alpha(t^\alpha \Delta)(n_0 - \bar{n}_0) = o(t^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha}) \text{ em } \mathcal{M}_{q_1}^q, t \rightarrow \infty, \\ E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0) = o(1) \text{ em } L^\infty, t \rightarrow \infty, \\ \nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0) = o(t^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}}), \text{ em } \mathcal{M}_{r_1}^r, t \rightarrow \infty, \\ \nabla E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0) = o(t^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}}) \text{ em } \mathcal{M}_{r_1}^r, t \rightarrow \infty, \\ E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0) = o(t^{\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}) \text{ em } \mathcal{M}_{p_1}^p, t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.54)$$

se e somente se

$$\left\{ \begin{array}{l} n(t) - \bar{n}(t) = o(t^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha}) \text{ em } \mathcal{M}_{q_1}^q, \quad t \rightarrow \infty, \\ c(t) - \bar{c}(t) = o(1) \text{ em } L^\infty, \quad t \rightarrow \infty, \\ \nabla c(t) - \nabla \bar{c}(t) = o(t^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}}) \text{ em } \mathcal{M}_{r_1}^r, \quad t \rightarrow \infty, \\ \nabla v(t) - \nabla \bar{v}(t) = o(t^{\frac{\alpha N}{2r} - \frac{\alpha}{2}}) \text{ em } \mathcal{M}_{r_1}^r, \quad t \rightarrow \infty, \\ u(t) - \bar{u}(t) = o(t^{\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}}) \text{ em } \mathcal{M}_{p_1}^p, \quad t \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos que (3.54) implica (3.55). Sejam (n, c, v, u) e $(\bar{n}, \bar{c}, \bar{v}, \bar{u})$ duas soluções brandas obtidas pelo Teorema 3.2.1. Lembre-se que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^\alpha}$ dessas soluções são limitadas por $2K_1\varepsilon$, onde $K_1 = 1 + C_8 + C_9$. Vamos intruzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(t) - \bar{n}(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \\ A_2 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|c(t) - \bar{c}(t)\|_{L^\infty}, \\ A_3 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla c(t) - \nabla \bar{c}(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \\ A_4 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t) - \nabla \bar{v}(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \\ A_5 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \end{aligned}$$

Observe que $A_i < \infty$, $i = 1, \dots, 5$. Em seguida, devemos estimar a norma $\mathcal{M}_{q_1}^q$ da diferença $t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha}(n - \bar{n})$. Obtemos então a desigualdade

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(t) - \bar{n}(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(n_0 - \bar{n}_0)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\quad + t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{4,1}^1(u - \bar{u}, n)(t) - \mathcal{B}_{4,1}^1(\bar{u}, n - \bar{n})(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\quad + t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{1,2}^1(n - \bar{n}, c)(t) - \mathcal{B}_{1,2}^1(\bar{n}, c - \bar{c})(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\quad + t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{1,3}^1(n - \bar{n}, v)(t) - \mathcal{B}_{1,3}^1(\bar{n}, v - \bar{v})(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &:= t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(n_0 - \bar{n}_0)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + J_{4,1}^1(t) \\ &\quad + J_{1,2}^1(t) + J_{1,3}^1(t). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Usando a prova do Lema 3.2.2, temos as seguintes cotas para os termos $J_{4,1}^1$, $J_{1,2}^1$ e $J_{1,3}^1$:

$$\begin{aligned}
J_{4,1}^1(t) &\leq t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{4,1}^1(u - \bar{u}, n)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{4,1}^1(\bar{u}, n - \bar{n})(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\
&\quad + Ct^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_4^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha N}{2p} - \frac{\alpha}{2}} \|n(s) - \bar{n}(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{q} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{q} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \\
&\quad \times \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds, \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^1(t) &\leq t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{1,2}^1(n - \bar{n}, c)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\mathcal{B}_{1,2}^1(\bar{n}, c - \bar{c})(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|c\|_{\mathcal{X}_2^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} s^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(s) - \bar{n}(s)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\quad + Ct^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|\bar{n}\|_{\mathcal{X}_1^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} s^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla(c - \bar{c})(s)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds \\
&\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(c - \bar{c})(ts)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

De modo similar, temos que

$$\begin{aligned}
J_{1,3}^1(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} + \frac{N}{q} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{r} + \frac{N}{q} - 3)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(v - \bar{v})(ts)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds. \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Tendo em mente (3.57), (3.58) e (3.59) e calculando o limite superior em (3.56) obtemos

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq 2K_1 \varepsilon \left((A_1 + A_5) C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{q} - 3)} ds \right. \\
&\quad + (A_1 + A_3) C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} ds \\
&\quad \left. + (A_1 + A_4) C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{r})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{q} + \frac{N}{r} - 3)} ds \right) \\
&\leq 2K_1 \varepsilon ((A_1 + A_5)C_1 + (A_1 + A_3)C_2 + (A_1 + A_4)C_3). \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned}
J_{4,2}^2(t) &:= \|\mathcal{B}_{4,2}^2(u - \bar{u}, c)(t) + \mathcal{B}_{4,2}^2(\bar{u}, c - \bar{c})(t)\|_{L^\infty}, \\
J_{1,2}^2(t) &:= \|\mathcal{B}_{1,2}^2(n - \bar{n}, c)(t) + \mathcal{B}_{1,2}^2(\bar{n}, c - \bar{c})(t)\|_{L^\infty}, \\
\tilde{J}_{4,2}^2(t) &:= t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{B}_{4,2}^2(u - \bar{u}, c)(t) + \nabla \mathcal{B}_{4,2}^2(\bar{u}, c - \bar{c})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \\
\tilde{J}_{1,2}^2(t) &:= t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{B}_{1,2}^2(n - \bar{n}, c)(t) + \nabla \mathcal{B}_{1,2}^2(\bar{n}, c - \bar{c})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}.
\end{aligned}$$

Então

$$\|c(t) - \bar{c}(t)\|_{L^\infty} \leq \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0)\|_{L^\infty} + J_{4,2}^2(t) + J_{1,2}^2(t), \quad (3.61)$$

$$t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla(c - \bar{c})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \leq t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} + \tilde{J}_{4,2}^2(t) + \tilde{J}_{1,2}^2(t). \quad (3.62)$$

Observe que valem as seguintes limitações para os termos $J_{4,2}^2$, $J_{1,2}^2$, $\tilde{J}_{4,2}^2$ e $\tilde{J}_{1,2}^2$:

$$\begin{aligned}
J_{4,2}^2(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha N}{2p}-\frac{\alpha}{2}} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2p}+\frac{\alpha}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha N}{2p}-\frac{\alpha}{2}} \|c(ts) - \bar{c}(ts)\|_{L^\infty} ds,
\end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^2(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\alpha(1-\frac{N}{2q})-1} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q}+\alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\alpha(1-\frac{N}{2q})-1} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} \|c(ts) - \bar{c}(ts)\|_{L^\infty} ds,
\end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{4,2}^2(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p}+\frac{N}{r}-2)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2p}+\frac{\alpha}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p}+\frac{N}{r}-2)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2r}+\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \|\nabla(c - \bar{c})(ts)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} ds,
\end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{1,2}^2(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q}+\alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds \\
&\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q}-\alpha} \|c(ts) - \bar{c}(ts)\|_{L^\infty} ds.
\end{aligned} \quad (3.66)$$

Calculamos então o limite superior em (3.61) (resp., (3.62)), e então usamos (3.63), (3.64) (resp., (3.65), (3.66)), na sequência, para obter

$$A_2 \leq 2K_1 \varepsilon ((A_5 + A_2)C_4 + (A_1 + A_2)C_5),$$

$$A_3 \leq 2K_1 \varepsilon ((A_5 + A_3)C_4 + (A_1 + A_2)C_5).$$

Além disso, podemos verificar que

$$t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p} \leq t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p} + J_{4,3}^3(t) + L^3(t), \quad (3.67)$$

$$t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} + J_{4,4}^4(t) + L^4(t), \quad (3.68)$$

onde

$$\begin{aligned} J_{4,3}^3(t) &= t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{B}_{4,3}^3(u - \bar{u}, v)(t) + \nabla \mathcal{B}_{4,3}^3(\bar{u}, v - \bar{v})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p}, \\ L^3(t) &= t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{L}_3(n - \bar{n})(t)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p}, \\ J_{4,4}^4(t) &= t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|\mathcal{B}_{4,4}^4(u - \bar{u}, u)(t) + \mathcal{B}_{4,4}^4(\bar{u}, u - \bar{u})(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}, \\ L^4(t) &= t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|\mathcal{L}_4(n - \bar{n})(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \end{aligned}$$

Também temos as seguintes estimativas para $J_{4,3}^3$, $J_{4,4}^4$, L^3 e L^4 :

$$\begin{aligned} J_{4,3}^3(t) &\leq 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{r}-2)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds \\ &\quad + 2K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{p} + \frac{N}{r}-2)} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \times \|\nabla v(ts) - \nabla \bar{v}(ts)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^p} ds, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$L^3(t) \leq C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds, \quad (3.70)$$

$$J_{4,4}^4(t) \leq 4K_1 \varepsilon C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{N}{p})-1} s^{\frac{\alpha N}{p} - \alpha} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} ds, \quad (3.71)$$

$$L^4(t) \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{N_1}^N} \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})) - 1} s^{\frac{\alpha N}{2q} - \alpha} (ts)^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|n(ts) - \bar{n}(ts)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} ds. \quad (3.72)$$

Tomando $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (3.67) e (3.68), e usando (3.69), (3.70) e (3.71), (3.72), obtemos

$$A_4 \leq 2K_1 \varepsilon C_6 (A_5 + A_4) + C_8 A_1, \quad (3.73)$$

$$A_5 \leq 4K_1 \varepsilon C_7 A_5 + C_9 A_1. \quad (3.74)$$

Recordando que $K_2 = (C_8 + C_9)(C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^7 C_i$ (ver a prova do Teorema 3.2.1), somando todos os A_i 's e tendo em mente (3.60) chegamos que $\sum_{i=1}^5 A_i \leq 4K_1 K_2 \varepsilon \sum_{i=1}^5 A_i$. Visto que $4K_1 K_2 \varepsilon < 1$, segue que $A_i = 0$, $i = 1, \dots, 5$.

Resta provar a recíproca, isto é (3.55) implica (3.54). Procedendo de modo análogo ao que foi feito em linhas precedentes, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(n_0 - \bar{n}_0)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq A_1 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_{4,1}^1(t) + J_{1,2}^1(t) + J_{1,3}^1(t)) \\ &\leq A_1 + 2K_1 \varepsilon ((A_1 + A_5)C_1 + (A_1 + A_3)C_2 \\ &\quad + (A_1 + A_4)C_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0)\|_{L^\infty} &\leq A_2 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_{4,2}^2(t) + J_{1,2}^2(t)) \\ &\leq A_2 + 2K_1 \varepsilon ((A_5 + A_2)C_4 + (A_1 + A_2)C_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)(c_0 - \bar{c}_0)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq A_3 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (\tilde{J}_{4,2}^2(t) + \tilde{J}_{1,2}^2(t)) \\ &\leq A_3 + 2K_1 \varepsilon ((A_5 + A_3)C_4 + (A_1 + A_2)C_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq A_4 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_{4,3}^3(t) + L^3(t)) \\ &\leq A_4 + 2K_1 \varepsilon (A_5 + A_4)C_6 + C_8 A_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq A_5 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_{4,4}^4(t) + L^4(t)) \\ &\leq A_5 + 4K_1 \varepsilon C_7 A_5 + C_9 A_1. \end{aligned}$$

Por hipótese $A_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, 5$, então (3.54) fica verificado. Com isso finalizamos a demonstração. \square

Como consequência, considerando o caso $\gamma = 0$, o Teorema 3.2.6 fornece uma classe de soluções assintoticamente auto-similares no infinito. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.7. *Seja $N \geq 3$ e assuma que (n_0, c_0, v_0, u_0) e f são como no Teorema 3.2.1. Sejam (n, c, v, u) e $(\bar{n}, \bar{c}, \bar{v}, \bar{u})$ duas soluções com dados iniciais (n_0, c_0, v_0, u_0) e $(n_0 + \varphi_1, c_0 + \varphi_2, v_0 + \varphi_3, u_0 + \varphi_4)$, respectivamente, com $\varphi_i \in C_0^\infty$. Então, no caso $\gamma = 0$, a solução perturbada $(\bar{n}, \bar{c}, \bar{v}, \bar{u})$ é atraída para a solução auto-similar (n, c, v, u) no sentido de (3.55).*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.6, é suficiente provar as seguintes propriedades:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_1\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} = 0, \quad (3.75)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_2\|_{L^\infty} = 0, \quad (3.76)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_2\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} = 0, \quad (3.77)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_3\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} = 0, \quad (3.78)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_4\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = 0. \quad (3.79)$$

Para obter (3.75), tomamos l tal que $\frac{qN}{2q+N} < l < \frac{N}{2}$ se $N \geq 4$ e $1 < l < \frac{3}{2}$ se $N = 3$. Usando (3.2) obtêm-se

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha N}{2q} + \alpha} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_1\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq Ct^{-\alpha(\frac{N}{2l}-1)} \int_0^\infty s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{l}-\frac{1}{q})} M_\alpha(s) ds \|\varphi_1\|_l \\ &\leq Ct^{-\alpha(\frac{N}{2l}-1)} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{q}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{q}\right)\right)} \|\varphi_1\|_l, \end{aligned}$$

que resulta em (3.75). Para verificar (3.76) usamos (3.4) e obtemos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_2\|_{L^\infty} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2q}} \int_0^\infty s^{-\frac{N}{2q}} M_\alpha(s) ds \|\varphi_2\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2q}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{N}{2q}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha N}{2q}\right)} \|\varphi_2\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \end{aligned}$$

fica provado então (3.76).

As provas de (3.77) e (3.78) são análogas, logo basta verificar (3.77). Para isso tomamos l tal que $\frac{Nr}{r+N} < l < r$, então por (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha N}{2r} + \frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_2\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2l}} \int_0^\infty s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{l}-\frac{1}{r})} M_\alpha(s) ds \|\varphi_2\|_l \\ &= Ct^{-\frac{\alpha N}{2l}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)\right)} \|\varphi_2\|_l. \end{aligned}$$

Para provar (3.79), tomamos l tal que $\frac{Np}{2p+N} < l < N$, então usando (3.2) inferimos que

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha N}{2p} + \frac{\alpha}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)\varphi_4\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{l}-1)} \int_0^\infty s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{l}-\frac{1}{p})} M_\alpha(s) ds \|\varphi_4\|_l \\ &= Ct^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{N}{l}-1)} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{p}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{p}\right)\right)} \|\varphi_4\|_l. \end{aligned}$$

Isso conclui a prova de (3.79). □

4 PROBLEMA DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE HEREDITÁRIA

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Considere a equação de Navier-Stokes com viscosidade hereditária

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \int_0^t g(t-s) \Delta u(s, x) ds = -\nabla p + f(t) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Aplicando o operador de Leray \mathbb{P} na equação acima obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \int_0^t g(t-s) Au(s) ds + F(t, u(t)) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.1)$$

de modo que $A := \Delta$ é o operador Laplaciano e $F(t, u(t)) = \mathbb{P}(f(t) - u(t) \cdot \nabla u(t))$, para cada $t > 0$.

Considere agora os problemas

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \int_0^t g(t-s) Au(s) ds, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Aplicando a integral de 0 a t nos sistemas acima obtemos, respectivamente, as equações de Volterra

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s) ds, \quad t \geq 0,$$

e

$$u(t) = u_0 + \int_0^t a(t-s) Au(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

onde $a \equiv 1 * g$. Pelo Corolário 2.6.5 se $a(t) = (1 * g)(t)$ é uma função completamente positiva, então, considerando o espaço de Banach $X = \mathcal{M}_{p,\lambda}$, em que $0 < \lambda \leq N$ e $1 \leq p \leq \infty$, a equação (4.2) possui um resolvente $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ com a seguinte estrutura

$$S(t) = G\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{pt}{\kappa}} + S_0(t), \quad t > 0, \quad (4.3)$$

onde κ e ρ são definidos em 2.10. Além disso o operador $S_0(t)$, que é $\mathcal{L}(\ddot{\mathcal{M}}_{p,\lambda})$ -contínuo em $(0, +\infty)$, possui a estrutura

$$S_0(t) = \int_0^{t/\kappa} G(\tau)v(t; \tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

onde $v(t; \tau)$ é a função definida em (2.13) que depende da função de propagação $w(t; \tau)$ associada à função *creep* $k(t)$. Além disso em (4.3), o termo $e^{-\rho t/\kappa}$ deve ser interpretado como 0, se $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$.

Exemplo 4.1.1 (Fluido Newtoniano). *Considerando $g(t) = \delta(t)$ na equação (4.1) temos que $(1 * g)(t) = 1$, para cada $t > 0$. Além disso $1 \equiv c'$ para $c(t) = t$ e tomando $k(t) = 1$ temos que*

$$\int_0^t k(t - \tau)dc(\tau) = t, \quad t > 0.$$

Logo $a(t) = 1$ é uma função completamente positiva com função *creep* $k(t) = 1$ (veja a Tabela 1). Observe que mesmo nosso problema se tratando de um Fluido Newtoniano a função *creep* a ser considerada é referente ao Sólido de Hooke e a função de propagação associada será $w(t; \tau) = e_0(t - \tau)$, isso acontece devido à condição de que $1 * g \equiv a$, ou seja, a função a é “Volterra-dependente” da função g .

Exemplo 4.1.2. *Considere $g(t)$ tal que $(1 * g)(t) = e^{-t}$, para todo $t > 0$, onde podemos verificar que $a(t) = (1 * g)(t) = e^{-t}$ é uma função completamente positiva. De fato, note que $a \equiv c'$ para $c(t) = 1 - e^{-t}$ que é absolutamente contínua em cada intervalo $[0, \tau]$. Além disso tomando $k(t) = 1 + t$ (ver Tabela 1) temos que*

$$\begin{aligned} \widehat{k}(\lambda)\widehat{dc}(\lambda) &= \widehat{k}(\lambda)\widehat{c}'(\lambda) \\ &= \widehat{(1 + t)}(\lambda)\widehat{e^{-t}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace acima chegamos que

$$\int_0^t k(t - \tau)dc(\tau) = t, \quad t > 0.$$

Logo $a(t)$ é uma função completamente positiva e $k(t) = 1 + t$ é sua função *creep* associada. Pela Tabela 1 também notamos que a função de propagação para essa função *creep* é $w(t; \tau) = e^{-\tau}e_0(t - \tau)$, onde $e_0(t)$ representa a função de Heaviside.

Sabendo que S é do tipo (M, ω_a) , para algum $\omega_a \geq 0$ que é obtido no Teorema 2.2.20, de (PRÜSS, 2013, p. 43) temos que vale a igualdade

$$\widehat{S}(\lambda) = (I - \widehat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda, \quad \lambda > \text{Re } \omega_a.$$

Então, aplicando integral de 0 a t no Problema 4.1, tomando a transformada de Laplace e utilizando a identidade acima, através de um processo em que se recupera a função u percebemos que uma solução clássica para o Problema (4.1), sob condições adequadas deve satisfazer a formulação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds, \text{ para cada } t \in [0, T^*), \quad (4.5)$$

onde nessa e nas próximas seções T^* será interpretado como $T^* = \infty$ ou $T^* < \infty$.

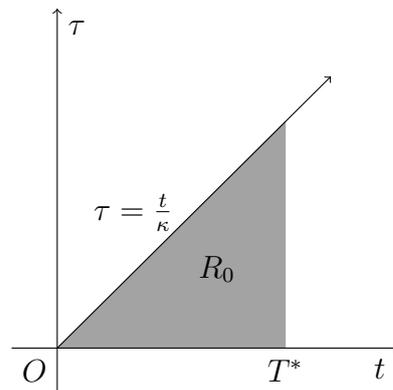
Considerando uma função $f : [0, T^*) \times X \rightarrow X$ e X um espaço de Banach, dizemos que uma aplicação $u : [0, T^*) \rightarrow X$ é uma *solução branda* para (4.1) se ela satisfaz (4.5), em que $S : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ possui a estrutura (4.3). A solução é dita *global* se $T^* = \infty$ e *local* se $T^* < \infty$.

Neste capítulo estamos interessados no caso em que $f \equiv 0$, então poderemos reescrever a equação (4.5) como

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(s)ds.$$

4.2 PRINCIPAIS ESTIMATIVAS

Figura 3 – Região $R_0 = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T^*), \tau \in (0, t/\kappa)\}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Daqui em diante $S(t)$ e $v(t; \tau)$ serão interpretados como na Seção 4.1 e associados a uma determinada função *creep* $k(t)$ e uma função completamente positiva $a(t) = c'(t)$, que no nosso caso trata-se da função $(1 * g)(t)$. Como primeiro objetivo desta seção buscaremos estimar o operador $S(t)$ nos espaços de Morrey e Besov-Morrey. Para garantir que a integral (4.4) também seja incluído nos nossos cálculos de estimativas introduziremos a seguinte condição sobre a função $v(t; \tau)$.

Condição 4.2.1. Considerando $(1 * g)(t)$ uma função completamente positiva com uma função creep associada $k(t)$ e $v(t; \tau)$ a função estabelecida em (4.4), suponha que existem $c_1, c_2 \geq 0$ e $\eta \in \mathbb{R}$ de modo que a função v satisfaz a desigualdade $|v(t; \tau)| \leq c_1 e^{-\frac{c_2 \tau}{t}} t^{-\eta}$, para todo $(t, \tau) \in R_0$ (ver Figura 3).

4.2.2 Estimativas Lineares

Lema 4.2.3. Sejam κ e ρ como em (2.10), $0 \leq \lambda < N$, $1 \leq \tilde{q} \leq q \leq \infty$ e j um multi-índice tais que $1 - \frac{|j|}{2} - \frac{(\tau_{\tilde{q}, \lambda} - \tau_{q, \lambda})}{2} > 0$. Assuma também que $v(t; \tau)$ satisfaz a Condição 4.2.1 e considere $f \in \mathcal{M}_{\tilde{q}, \lambda}$. Se $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ (ou se $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$), então existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla_x^j S(t)f\|_{q, \lambda} \leq C t^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda})}{2}} \|f\|_{\tilde{q}, \lambda}, \quad t \in (0, T^*).$$

Para o caso $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $1 - \eta \geq 0$, $C = C(\rho, \kappa, \eta) > 0$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{M}_{\tilde{q}, \lambda}$

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j S(t)f\|_{q, \lambda} &= \left\| \nabla_x^j \left(G\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f + S_0(t)f \right) \right\|_{q, \lambda} \\ &\leq \left\| \nabla_x^j G\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right\|_{q, \lambda} + \|\nabla_x^j S_0(t)f\|_{q, \lambda} \\ &= I(t) + J(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Vamos tratar cada parcela da soma acima separadamente, de modo que $I(t)$ deve ser considerada apenas no caso em que $\rho < \infty$ e $\kappa > 0$. Começando por $J(t)$, temos

$$\begin{aligned} J(t) &= \left\| \nabla_x^j \int_0^{\frac{t}{\kappa}} G(\tau) v(t; \tau) f d\tau \right\|_{q, \lambda} \\ &= \left\| \int_0^{\frac{t}{\kappa}} \nabla_x^j G(\tau) v(t; \tau) f d\tau \right\|_{q, \lambda} \\ &\leq \int_0^{\frac{t}{\kappa}} |v(t; \tau)| \|\nabla_x^j G(\tau) f\|_{q, \lambda} d\tau \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{\kappa}} e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} t^{-\eta} \tau^{-\frac{|j|}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda})} \|f\|_{\tilde{q}, \lambda} d\tau \\ &\leq C \|f\|_{\tilde{q}, \lambda} t^{-\eta} \int_0^{\infty} e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} \tau^{-\frac{|j|}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda})} d\tau \\ &= C \|f\|_{\tilde{q}, \lambda} t^{-\eta} \int_0^{\infty} e^{-s} \left(\frac{t}{c_2} s\right)^{\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda}))} \frac{t}{c_2} ds \\ &= C \|f\|_{\tilde{q}, \lambda} t^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda})}{2}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda}))} ds \\ &= C \Gamma\left(\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda})) + 1\right) t^{-\eta+1+\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda}))} \|f\|_{\tilde{q}, \lambda} \\ &= C t^{-\eta+1+\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\tilde{q}, \lambda}-\tau_{q, \lambda}))} \|f\|_{\tilde{q}, \lambda}, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é devido ao Lema 2.6.6. Então

$$J(t) \leq Ct^{-\eta+1+\frac{1}{2}(-|j|-(\tau_{\bar{q},\lambda}-\tau_{q,\lambda}))} \|f\|_{\bar{q},\lambda}, \quad t \in (0, T^*), \quad (4.7)$$

o que prova o caso $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$. Supondo agora que $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$ devemos considerar também a parcela

$$I(t) = \left\| \nabla_x^j \left(G \left(\frac{t}{\kappa} \right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right) \right\|_{q,\lambda} = e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} \left\| \nabla_x^j G \left(\frac{t}{\kappa} \right) f \right\|_{q,\lambda},$$

donde pelo Lema 2.6.6 chegamos que

$$\begin{aligned} I(t) &\leq C e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} t^{-\frac{|j|}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{\bar{q},\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\bar{q},\lambda} \\ &\leq C(\rho, \kappa, \eta) t^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{\bar{q},\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\bar{q},\lambda}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Logo, substituindo (4.7) e (4.8) em (4.6) também obtemos a estimativa desejada. \square

Quanto ao comportamento do operador $S(t)$ em espaços de Besov-Morrey, temos o resultado a seguir.

Lema 4.2.4. *Sejam $0 \leq \lambda < N$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $s_1 \leq s_2$, $1 \leq r \leq \infty$ e j um multi-índice tais que $1 - \frac{|j|}{2} - \frac{(s_2-s_1)}{2} - \frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2} > 0$. Assuma também que $v(t; \tau)$ satisfaz a Condição 4.2.1 e considere $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}$. Se $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ (ou se $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$), então existe $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla_x^j S(t)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} \leq Ct^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}}, \quad t \in (0, T^*).$$

Para o caso $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $1 - \eta \geq 0$, $C = C(\rho, \kappa, \eta) > 0$.

Demonstração. Como a prova será análoga à do Lema 4.2.3 omitiremos alguns detalhes. Seja $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}$

$$\|\nabla_x^j S(t)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} \leq \left\| \nabla_x^j \left(G \left(\frac{t}{\kappa} \right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right) \right\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} + \|\nabla_x^j S_0(t)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}}. \quad (4.9)$$

Desenvolvendo o segundo termo da soma acima temos

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j S_0(t)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} &\leq \int_0^{\frac{t}{\kappa}} |v(t; \tau)| \|\nabla_x^j G(\tau)f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} d\tau \\ &\leq C \int_0^\infty e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} t^{-\eta} \tau^{-\frac{|j|+(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}} d\tau \\ &= C\Gamma \left(\frac{1}{2}(-|j| - (s_2 - s_1) - (\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda})) + 1 \right) \\ &\quad \times t^{-\eta+1+\frac{1}{2}(-|j|-(s_2-s_1)-(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda}))} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}} \\ &= Ct^{-\eta+1+\frac{1}{2}(-|j|-(s_2-s_1)-(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda}))} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

para todo $t \in (0, T^*)$, de modo que a segunda desigualdade é devido ao Lema 2.6.6; verificamos então o caso $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$. Supondo agora que $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$ temos também que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^j \left(G \left(\frac{t}{\kappa} \right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right) \right\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} &\leq e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} \left\| \nabla_x^j G \left(\frac{t}{\kappa} \right) f \right\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,r}^{s_2}} \\ &\leq C e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} t^{-\frac{|j|+(s_2-s_1)}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}} \\ &\leq C(\rho, \kappa, \eta) t^{-\eta+1 - \frac{|j|+(s_2-s_1)}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^{s_1}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

para todo $t \in (0, T^*)$, onde a segunda desigualdade também é obtida a partir do Lema 2.6.6. Finalmente, substituindo (4.10) e (4.11) em (4.9) obtemos a estimativa desejada. \square

Lema 4.2.5. *Sejam $0 \leq \lambda < N$, $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $\sigma < 0$ e j um multi-índice tais que $1 - \frac{|j|-\sigma}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda}) > 0$. Assuma também que $v(t; \tau)$ satisfaz a Condição 4.2.1 e considere $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma$. Se $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ (ou $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$), então existe $C > 0$ tal que*

$$\left\| \nabla_x^j S(t) f \right\|_{q,\lambda} \leq C t^{-\eta+1 - \frac{|j|-\sigma}{2} - \frac{(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda})}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma}, \quad t \in (0, T^*).$$

Para $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $\eta - 1 \geq 0$, $C = C(\rho, \kappa, \eta) > 0$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma$, para cada $t \in (0, T^*)$

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^j S(t) f \right\|_{q,\lambda} &= \left\| \nabla_x^j G \left(\frac{t}{\kappa} \right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f + \nabla_x^j S_0(t) f \right\|_{q,\lambda} \\ &\leq \left\| \nabla_x^j G \left(\frac{t}{\kappa} \right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right\|_{q,\lambda} + \left\| \nabla_x^j S_0(t) f \right\|_{q,\lambda}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tratando cada parcela da soma acima separadamente, começando pela segunda, temos

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^j S_0(t) f \right\|_{q,\lambda} &= \left\| \nabla_x^j \int_0^{\frac{t}{\kappa}} G(\tau) v(t; \tau) f d\tau \right\|_{q,\lambda} \\ &\leq \int_0^{\frac{t}{\kappa}} |v(t; \tau)| \left\| \nabla_x^j G(\tau) f \right\|_{q,\lambda} d\tau \end{aligned}$$

Como $\mathcal{N}_{q,\lambda,1}^0 \subset \mathcal{M}_{q,\lambda} \subset \mathcal{N}_{q,\lambda,\infty}^0$ obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^j S_0(t) f \right\|_{q,\lambda} &\leq \int_0^{\frac{t}{\kappa}} |v(t; \tau)| \left\| \nabla_x^j G(\tau) f \right\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,1}^0} d\tau \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{\kappa}} e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} t^{-\eta} \left\| \nabla_x^j G(\tau) f \right\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,1}^0} d\tau \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{\kappa}} e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} t^{-\eta} \tau^{-\frac{|j|-\sigma}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ct^{-\eta} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma} \int_0^\infty e^{-c_2 \frac{\tau}{t}} \tau^{-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})} d\tau \\
&= Ct^{-\eta} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma} \int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{c_2} t\right)^{-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \frac{t}{c_2} ds \\
&= C \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma} t^{-\eta+1-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2}} ds \\
&= C\Gamma\left(1-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})\right) t^{-\eta+1-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma},
\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade é devido ao Corolário 2.6.7. Então

$$\|\nabla_x^j S_0(t)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\eta+1-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma}; \quad (4.13)$$

com isso fica provado o caso $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$. Supondo agora que $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $1 - \eta \geq 0$ temos também que

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla_x^j G\left(\frac{t}{\kappa}\right) e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} f \right\|_{q,\lambda} &= e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} \|\nabla_x^j G\left(\frac{t}{\kappa}\right) f\|_{q,\lambda} \\
&\leq e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} \|\nabla_x^j G\left(\frac{t}{\kappa}\right) f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,1}^0} \\
&\leq C e^{-\frac{\rho t}{\kappa}} t^{-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma} \\
&\leq C(\rho, \kappa, \eta) t^{-\eta+1-\frac{|j|-\sigma}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p,\lambda}-\tau_{q,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma},
\end{aligned} \quad (4.14)$$

para cada $t \in (0, T^*)$, onde a segunda desigualdade é devido ao Corolário 2.6.7. Assim, substituindo (4.14) e (4.13) em (4.12) obtemos o resultado desejado. \square

4.2.6 Estimativas Bilineares

Nesta seção vamos explorar as estimativas do operador bilinear

$$\mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t)) := \int_0^t S(t-s) \mathbb{P}(u \cdot \nabla \tilde{u})(s) ds \quad (4.15)$$

em espaços de Morrey. Denotaremos $s(q_1, q_2)$ como no capítulo anterior.

Lema 4.2.7. *Sejam $0 \leq \lambda < N$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, $s(q_1, q_2) = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \geq 1$ e j um multi-índice tais que $1 - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} > 0$. Supondo também que $v(t; \tau)$ satisfaz a Condição 4.2.1, onde $2 - \eta - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} > 0$, tome $u(t) \in \mathcal{M}_{q_1, \lambda}$ e $\nabla \tilde{u}(t) \in \mathcal{M}_{q_2, \lambda}$. Se a e $b \in \mathbb{R}$ são tais que $a + b < 1$, então existe $C > 0$ tal que, para $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ (ou para $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $0 \leq \eta - 1 < \frac{1}{2}(-|j| - \tau_{q_1, \lambda}) + 1$)*

$$\|\nabla_x^j \mathcal{B}(u, \tilde{u})(t)\|_{q_2, \lambda} \leq C t^{-\eta+2-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}-a-b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda},$$

para cada $t \in (0, T^*)$. Para o caso em que $\kappa > 0$, $\rho < \infty$ e $0 \leq \eta - 1 < \frac{1}{2}(-|j| - \tau_{q_1, \lambda}) + 1$, $C = C(\rho, \kappa, \eta) > 0$.

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração, vamos verificar que

$$\|F(u, v)\|_{p, \lambda} \leq \|u\|_{r, \lambda} \|\nabla v\|_{s, \lambda},$$

onde $F(u, v) = \mathbb{P}(u \cdot \nabla v)$, sempre que $u \in \mathcal{M}_{r, \lambda}$, $\nabla v \in \mathcal{M}_{s, \lambda}$ e $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$. De fato, por Kato (1984, p. 474) temos que a estimativa

$$\|F(u, v)\|_p \leq \|u\|_r \|\nabla v\|_s$$

é obtida simplesmente pela desigualdade de Hölder. Então nas condições acima

$$\begin{aligned} \|F(u, v)\|_{p, \lambda} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|F(u, v)\|_{L^p(B_R(x))} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{r}} R^{-\frac{\lambda}{s}} \|F(u, v)\|_{L^p(B_R(x))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{r}} R^{-\frac{\lambda}{s}} \|u\|_{L^r(B_R(x))} \|\nabla v\|_{L^s(B_R(x))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} R^{-\frac{\lambda}{s}} \|u\|_{r, \lambda} \|\nabla v\|_{L^s(B_R(x))} \\ &= C \|u\|_{r, \lambda} \|\nabla v\|_{s, \lambda}. \end{aligned}$$

Voltando à demonstração do Lema 4.2.7, como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r(q_1, q_2)}$ e $1 \leq r(q_1, q_2) \leq q_2$, usando o Lema 4.2.3 temos

$$\begin{aligned} &\|\nabla_x^j \mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t))\|_{q_2, \lambda} \\ &\leq \int_0^t \|\nabla_x^j S(t-s) \mathbb{P}(u \cdot \nabla \tilde{u})(s)\|_{q_2, \lambda} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}(u \cdot \nabla \tilde{u})(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|u(s)\|_{q_1, \lambda} \|\nabla \tilde{u}(s)\|_{q_2, \lambda} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} s^{-a-b} \sup_{s \in (0, T^*)} s^a \|u(s)\|_{q_1, \lambda} \sup_{s \in (0, T^*)} s^b \|\nabla \tilde{u}(s)\|_{q_2, \lambda} ds \\ &= C \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda} t^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}-a-b} \\ &\quad \times \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-a-b} ds \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade acontece porque

$$\|F(u, \tilde{u})\|_{s(q_1, q_2), \lambda} \leq \|u\|_{q_1, \lambda} \|\nabla \tilde{u}\|_{q_2, \lambda}.$$

As condições impostas sobre j , $\tau_{q_1, \lambda}$, η , a e b faz com que possamos utilizar a função beta, de modo que teremos

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x^j \mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t))\|_{q_2, \lambda} \\ & \leq CB \left(-\eta + 2 - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, -a - b + 1 \right) \\ & \quad \times t^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}-a-b+1} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda} \\ & = Ct^{-\eta+2-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}-a-b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda}, \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, T^*)$. Com isso fica provado o caso em que $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$. Supondo agora $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $0 \leq \eta - 1 < \frac{1}{2}(-|j| - \tau_{q_1, \lambda}) + 1$, aplicando novamente o Lema 4.2.3 obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x^j \mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t))\|_{q_2, \lambda} \\ & \leq \int_0^t C(t-s)^{-\eta+1-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}(u \cdot \nabla \tilde{u})(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\ & \leq CB \left(-\eta + 2 - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, -a - b + 1 \right) \\ & \quad \times t^{-\eta+2-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}-a-b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda}, \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, T^*)$, isso conclui a demonstração. \square

Como também temos que $1 \leq s(q_1, q_2) \leq q_1$, podemos utilizar o Lema 4.2.3 novamente, de modo que repetindo toda a prova do lema anterior conseguimos o seguinte resultado.

Lema 4.2.8. *Sejam $0 \leq \lambda < N$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, $s(q_1, q_2) \geq 1$ e j um multi-índice tais que $1 - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} > 0$. Supondo também que $v(t; \tau)$ satisfaz a Condição 4.2.1, com $2 - \eta - \frac{|j|}{2} - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} > 0$, tome $u(t) \in \mathcal{M}_{q_1, \lambda}$, $\nabla \tilde{u}(t) \in \mathcal{M}_{q_2, \lambda}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $-a - b + 1 > 0$. Se $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ (ou se $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $0 \leq \eta - 1 < \frac{1}{2}(-|j| - \tau_{q_2, \lambda}) + 1$), então existe $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla_x^j \mathcal{B}(u, \tilde{u})(t)\|_{q_1, \lambda} \leq Ct^{-\eta+2-\frac{|j|}{2}-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}-a-b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2, \lambda}$$

para cada $t \in (0, T^*)$. Para $\rho < \infty$, $\kappa > 0$ e $0 \leq \eta - 1 < \frac{1}{2}(-|j| - \tau_{q_2, \lambda}) + 1$, $C = C(\rho, \kappa, \eta) > 0$.

4.3 PRINCIPAIS RESULTADOS

Tomando $\eta \in \mathbb{R}$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$ e $0 \leq \lambda < N$, denotamos $a, b > 0$ como

$$a := \frac{3}{2} - \eta - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, \quad (4.16)$$

$$b := 2 - \eta - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} \quad (4.17)$$

e definimos o espaço de Banach

$$X^\eta := \{u : t^a u \in B((0, T^*); \dot{\mathcal{M}}_{q_1, \lambda}), t^b \nabla u \in B((0, T^*); \dot{\mathcal{M}}_{q_2, \lambda})\} \quad (4.18)$$

munido com a norma

$$\|u\|_{X^\eta} := \sup_{t \in [0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1, \lambda} + \sup_{t \in [0, T^*)} t^b \|\nabla u(t)\|_{q_2, \lambda}.$$

O principal objetivo neste capítulo será demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 4.3.1. (*Teorema de Existência e Unicidade*)

Sejam $v(t; \tau)$ e η sob a Condição 4.2.1, considere $1 \leq p \leq q_1$, $q_2 < \infty$ e $0 \leq \lambda < N$ tais que

(i) $s(q_1, q_2) \geq 1$,

(ii) $\tau_{q_1, \lambda} + \tau_{q_2, \lambda} > 5 - 4\eta$,

(iii) $\sigma := \tau_{p, \lambda} + 4\eta - 5 < 0$,

(iv) $\min\{a, b\} > 0$, onde a e b são introduzidos em (4.16) e (4.17), respectivamente.

(1) Se $\kappa = 0$ ou $\rho = \infty$ assuma que:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, -\frac{3}{2} + 2\eta + \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, 1 - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}, -2 + 2\eta + \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} \right\} > 0.$$

(2) Se $\kappa > 0$ e $\rho < \infty$, assuma (1) e também que:

$$0 \leq \eta - 1 < \min \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}, 1 - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} \right\}.$$

Além disso assuma que $1 \leq r \leq \infty$ e considere o espaço de Banach X^η definido em (4.18).

Nessas condições existem constantes positivas ε e $\delta(\varepsilon)$ tais que, para cada $u_0 \in \mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma$, que satisfaz $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma} < \delta$, existe uma única função $u \in X^\eta$, satisfazendo $\|u\|_{X^\eta} < \varepsilon$, que é solução branda para o problema (4.1). Além disso, a função que associa uma solução para cada dado inicial é localmente Lipschitz contínua.

Demonstração. Dividiremos a prova em duas partes principais. Primeiro mostraremos que o operador bilinear $\mathcal{B} : X^\eta \times X^\eta \rightarrow X^\eta$, definido em (4.15), é limitado, depois mostraremos que o mesmo vale para o operador linear $S(\cdot) : \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma \rightarrow X^\eta$. Por fim, utilizaremos o Lema 2.7.2 e o Lema 2.7.3 para concluir a demonstração.

Vamos tratar aqui apenas a situação em que $\rho < \infty$ e $\kappa > 0$, para o caso $\rho = \infty$ ou $\kappa = 0$ basta repetir o mesmo argumento, mas sem utilizar a condição (2).

Os itens (i), (ii), (iv), (1) e (2) nos permite usar o Lema 4.2.7 para $j = 1$. Então existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\nabla \mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t))\|_{q_2,\lambda} \leq C_1 t^{-\eta + \frac{3}{2} - \frac{\tau_{q_1,\lambda}}{2} - a - b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1,\lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2,\lambda},$$

para cada $t \in (0, T^*)$. Substituindo o valor de a definido em (4.16) obtemos que

$$t^b \|\nabla \mathcal{B}(u, \tilde{u})(t)\|_{q_2,\lambda} \leq C_1 \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1,\lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2,\lambda}, \quad (4.19)$$

para todo $t \in (0, T^*)$.

Da mesma forma, os itens (i), (ii), (iv), (1) e (2) nos permite usar o Lema 4.2.8 para $|j| = 0$. Logo existe $C_2 > 0$ de modo que

$$\|\mathcal{B}(u, \tilde{u})(t)\|_{q_1,\lambda} \leq C_2 t^{-\eta + 2 - \frac{\tau_{q_2,\lambda}}{2} - a - b} \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1,\lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2,\lambda},$$

para todo $t \in (0, T^*)$. Substituindo o valor b definido em (4.17) obtemos que

$$t^a \|\mathcal{B}(u(t), \tilde{u}(t))\|_{q_1,\lambda} \leq C_2 \sup_{t \in (0, T^*)} t^a \|u(t)\|_{q_1,\lambda} \sup_{t \in (0, T^*)} t^b \|\nabla \tilde{u}(t)\|_{q_2,\lambda}, \quad (4.20)$$

para todo $t \in (0, T^*)$.

Das estimativas (4.19) e (4.20) inferimos que existe $K > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}(u, \tilde{u})\|_{X^\eta} \leq K \|u\|_{X^\eta} \|\tilde{u}\|_{X^\eta},$$

para todo $u, \tilde{u} \in X^\eta$; o que prova a primeira parte da demonstração.

Assim como no caso anterior, para provar que o operador $S(\cdot)$ é limitado trataremos apenas a situação em que $\rho < \infty$ e $\kappa > 0$. Seja $u_0 \in \mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma$, as suposições (iii), (1) e (2) nos permite utilizar o Lema 4.2.5 tomando $|j| = 0$, $q = q_1$ e p o mesmo das condições deste teorema. Então existe $C > 0$ tal que

$$\|S(t)u_0\|_{q_1,\lambda} \leq C t^{-\eta + 1 + \frac{\sigma}{2} - \frac{(\tau_{p,\lambda} - \tau_{q_1,\lambda})}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,r}^\sigma},$$

para cada $t \in (0, T^*)$. Substituindo (iii) obtemos que

$$t^a \|S(t)u_0\|_{q_1, \lambda} \leq C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma}, \quad (4.21)$$

para todo $t \in (0, T^*)$.

Da mesma forma, os itens (iii), (1) e (2) nos permitem usar o Lema 4.2.5 para $j = 1$, $q = q_2$ e p como nas condições deste teorema. Então, também temos que

$$\|\nabla S(t)u_0\|_{q_2, \lambda} \leq C t^{-\eta + \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2} - \frac{(\tau_{p, \lambda} - \tau_{q_2, \lambda})}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma},$$

para algum $C > 0$ e todo $t \in (0, T^*)$. De modo análogo ao caso anterior, substituímos (iii) e obtemos que

$$t^b \|\nabla S(t)u_0\|_{q_2, \lambda} \leq C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma}, \quad (4.22)$$

para todo $t \in (0, T^*)$. Aplicando $\sup_{t \in (0, T^*)}$ nas estimativas (4.21) e (4.22), e somando em seguida, obtemos que existe $C > 0$ de modo que

$$\|S(\cdot)u_0\|_{X^\eta} \leq C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma}.$$

Tomando no Lema 2.7.2, $Y = \mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma$, $X = X^\eta$, $\mathcal{T} : Y \rightarrow X$ o operador definido como $\mathcal{T}u_0 = S(\cdot)u_0$, $\mathcal{B} : X^\eta \times X^\eta \rightarrow X^\eta$ o operador bilinear estabelecido em (4.15) e $\delta = \varepsilon/(2\|\mathcal{T}\|)$, em que $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $0 < \varepsilon < 1/(2K)$, concluímos que para cada $u_0 \in \mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma$, que satisfaça $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma} < \delta$, existe uma única solução branda para o problema (4.1), $u \in X^\eta$, satisfazendo $\|u\|_{X^\eta} < \varepsilon$. Além disso o Lema 2.7.3 nos garante que a função que leva cada dado inicial em sua respectiva solução é Lipschitz contínua. \square

Considere agora o espaço de Banach

$$X_c^\eta := \{u : t^a u \in BC((0, T^*); \ddot{\mathcal{M}}_{q_1, \lambda}), t^b \nabla u \in BC((0, T^*); \ddot{\mathcal{M}}_{q_2, \lambda})\},$$

se a solução for global, ou seja $T^* = \infty$, temos ainda o seguinte resultado de estabilidade assintótica.

Teorema 4.3.2. *Sejam u, \bar{u} duas soluções brandas globais para o Problema (4.1) dadas pelo Teorema 4.3.1 com condições iniciais u_0 e \bar{u}_0 , respectivamente. Supondo $u, \bar{u} \in X_c^\eta$, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^a \|S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_1, \lambda} + t^b \|\nabla S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_2, \lambda}) = 0 \quad (4.23)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda} + t^b \|\nabla(u(t) - \bar{u}(t))\|_{q_2, \lambda}) = 0. \quad (4.24)$$

Demonstração. Sejam u e \bar{u} soluções dadas pelo Teorema 4.3.2 com condições iniciais u_0 e \bar{u}_0 , isto é,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(s)ds \quad (4.25)$$

e

$$\bar{u}(t) = S(t)\bar{u}_0 + \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})(s)ds. \quad (4.26)$$

Subtraindo (4.26) de (4.25) temos

$$u(t) - \bar{u}(t) = S(t)(u_0 - \bar{u}_0) + \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(s)ds - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})(s)ds. \quad (4.27)$$

Aplicando $t^a \|\cdot\|_{q_1, \lambda}$ acima obtemos

$$t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda} \leq t^a \|S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_1, \lambda} + t^a \|\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda}. \quad (4.28)$$

Supondo inicialmente (4.23), é claro que, ao aplicar o limite com t tendendo ao infinito em (4.28) o primeiro termo da soma, que fica do lado direito da desigualdade, é anulado. Vamos nos dedicar então ao segundo termo; note que

$$\begin{aligned} t^a \|\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda} &= t^a \|\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(u, \bar{u})(t) \\ &\quad + \mathcal{B}(u, \bar{u})(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda} \\ &\leq t^a \|\mathcal{B}(u, u - \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda} + t^a \|\mathcal{B}(u - \bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda} \\ &\leq Ct^a \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}(u \cdot \nabla(u - \bar{u}))(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\ &\quad + Ct^a \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}((u - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u})(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\ &\leq Ct^a \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} s^{-a-b} \sup_{s>0} s^a \|u(s)\|_{q_1, \lambda} s^b \|\nabla(u(s) - \bar{u}(s))\|_{q_2, \lambda} ds \\ &\quad + Ct^a \int_0^t (t-s)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} s^{-a-b} s^a \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{q_1, \lambda} \sup_{s>0} s^b \|\nabla \bar{u}(s)\|_{q_2, \lambda} ds \\ &\leq Ct^a \|u\|_{X_\eta} t^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}-a-b} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-a-b} s^b \|\nabla(u(s) - \bar{u}(s))\|_{q_2, \lambda} ds \\ &\quad + Ct^a \|\bar{u}\|_{X_\eta} t^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}-a-b} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-a-b} s^a \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{q_1, \lambda} ds \\ &= C \|u\|_{X_\eta} t^{2-\eta-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}-b} \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^b \|\nabla(u(\xi t) - \bar{u}(\xi t))\|_{q_2, \lambda} d\xi \\ &\quad + C \|\bar{u}\|_{X_\eta} t^{2-\eta-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}-b} \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^a \|u(\xi t) - \bar{u}(\xi t)\|_{q_1, \lambda} d\xi \\ &\leq C\varepsilon \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^b \|\nabla(u(\xi t) - \bar{u}(\xi t))\|_{q_2, \lambda} d\xi \\ &\quad + C\varepsilon \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^a \|u(\xi t) - \bar{u}(\xi t)\|_{q_1, \lambda} d\xi, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde na última desigualdade usou-se que $2 - \eta - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} - b = 0$ e que $u, \bar{u} \in B_\varepsilon$. Seja $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real tal que

$$t_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Por continuidade, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_n(\xi) = (1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t_n)^b \|\nabla(u(\xi t_n) - \bar{u}(\xi t_n))\|_{q_2, \lambda},$$

é mensurável em $(0, 1)$ munido com a medida de Borel. Além disso para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n é não negativa e

$$f_n(\xi) \leq g(\xi) := 2(1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} \varepsilon$$

para todo $\xi \in (0, 1)$, onde $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, por se tratar do integrando da função beta, que pode ser aplicada devido às condições (ii) e (iv). Com essas informações, utilizando conceitos de teoria da medida obtemos que

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t_n)^b \|\nabla(u(\xi t_n) - \bar{u}(\xi t_n))\|_{q_2, \lambda} d\xi \\ & \leq \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} \limsup_{n \rightarrow \infty} (\xi t_n)^b \|\nabla(u(\xi t_n) - \bar{u}(\xi t_n))\|_{q_2, \lambda} d\xi. \end{aligned}$$

De modo análogo também temos que

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t_n)^a \|u(\xi t_n) - \bar{u}(\xi t_n)\|_{q_1, \lambda} d\xi \\ & \leq \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} \limsup_{n \rightarrow \infty} (\xi t_n)^a \|u(\xi t_n) - \bar{u}(\xi t_n)\|_{q_1, \lambda} d\xi. \end{aligned}$$

Combinando (4.28) com (4.29) e aplicando $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em seguida, das desigualdades obtidas acima temos que

$$A_1 \leq C_1 \varepsilon (A_1 + A_2), \quad (4.30)$$

onde

$$A_1 := \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda}$$

e

$$A_2 := \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^b \|\nabla(u(t) - \bar{u}(t))\|_{q_2, \lambda};$$

observe que $A_1 < \infty$ e $A_2 < \infty$, visto que $u, \bar{u} \in B_\varepsilon$. Por outro lado, tomando $t^b \|\nabla \cdot\|_{\mathcal{M}_{q_2, \lambda}}$ em (4.27) obtemos

$$\begin{aligned} t^b \|\nabla(u(t) - \bar{u}(t))\|_{q_2, \lambda} & \leq t^b \|\nabla S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_2, \lambda} \\ & \quad + t^b \|\nabla(\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t))\|_{q_2, \lambda}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Desenvolvendo o segundo termo da soma acima temos

$$\begin{aligned}
t^b \|\nabla(\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t))\|_{q_2, \lambda} &= t^b \|\nabla(\mathcal{B}(u, u)(t) - \mathcal{B}(u, \bar{u})(t) \\
&\quad + \nabla(\mathcal{B}(u, \bar{u})(t) - \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t))\|_{q_2, \lambda} \\
&\leq t^b \|\nabla \mathcal{B}(u, u - \bar{u})(t)\|_{q_2, \lambda} + t^b \|\nabla \mathcal{B}(u - \bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_2, \lambda} \\
&\leq Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}(u \cdot \nabla(u - \bar{u}))(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\
&\quad + Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|\mathbb{P}((u - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u})(s)\|_{s(q_1, q_2), \lambda} ds \\
&\leq Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} s^{-a-b} \sup_{s>0} s^a \|u(s)\|_{q_1, \lambda} s^b \|\nabla(u(s) - \bar{u}(s))\|_{q_2, \lambda} ds \\
&\quad + Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} s^{-a-b} \sup_{s>0} s^a \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{q_1, \lambda} \sup_{s>0} s^b \|\nabla \bar{u}(s)\|_{q_2, \lambda} ds \\
&\leq Ct^b \|u\|_{X_\eta} t^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} - a - b} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-a-b} s^b \|\nabla(u(s) - \bar{u}(s))\|_{q_2, \lambda} ds \\
&\quad + Ct^b \|\bar{u}\|_{X_\eta} t^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} - a - b} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-a-b} s^a \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{q_1, \lambda} ds \\
&= C \|u\|_{X_\eta} t^{\frac{3}{2} - \eta - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} - a} \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^b \|\nabla(u(\xi t) - \bar{u}(\xi t))\|_{q_2, \lambda} d\xi \\
&\quad + C \|\bar{u}\|_{X_\eta} t^{\frac{3}{2} - \eta - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} - a} \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^a \|u(\xi t) - \bar{u}(\xi t)\|_{q_1, \lambda} d\xi, \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^b \|\nabla(u(\xi t) - \bar{u}(\xi t))\|_{q_2, \lambda} d\xi \\
&\quad + C\varepsilon \int_0^1 (1 - \xi)^{-\eta + \frac{1}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^a \|u(\xi t) - \bar{u}(\xi t)\|_{q_1, \lambda} d\xi,
\end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usou-se que $\frac{3}{2} - \eta - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} - a = 0$ e que $u, \bar{u} \in B_\varepsilon$. Aplicando $\limsup_{t \rightarrow +\infty}$ em (4.31) e usando o mesmo argumento anterior, obtemos também que

$$A_2 \leq C_2 \varepsilon (A_1 + A_2). \quad (4.32)$$

Por construção C_1 e C_2 são as constantes que satisfazem $C_1 + C_2 = K$ na demonstração do Teorema 4.3.1.

Somando (4.30) e (4.32) obtemos que

$$0 \leq (A_1 + A_2) \leq (C_1 + C_2) \varepsilon (A_1 + A_2)$$

ou seja

$$0 \leq [1 - K\varepsilon](A_1 + A_2) \leq 0, \quad (4.33)$$

onde a primeira desigualdade ocorre porque $1 - K\varepsilon > 0$; já que do Lema 2.7.2 $\varepsilon < 1/(2K) < 1/K$. Então (4.33) implica que $A_1 + A_2 = 0$, e como $A_1 \geq 0$ e $A_2 \geq 0$ só podemos ter que $A_1 = A_2 = 0$. Note que, como as funções dentro de A_1 e A_2 são não negativas esses termos ainda se anulam se trocarmos $\limsup_{t \rightarrow +\infty}$ por $\lim_{t \rightarrow +\infty}$.

Reciprocamente, supomos agora que $A_1 = A_2 = 0$, isolando o termo $S(t)(u_0 - \bar{u}_0)$ em (4.27) obtemos

$$S(t)(u_0 - \bar{u}_0) = (u(t) - \bar{u}(t)) - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(s)ds + \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})(s)ds. \quad (4.34)$$

Aplicando $t^a \|\cdot\|_{q_1, \lambda}$ em (4.34) obtemos

$$\begin{aligned} t^a \|S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_1, \lambda} &\leq t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda} + t^a \|\mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u})(t) - \mathcal{B}(u, u)(t)\|_{q_1, \lambda} \\ &\leq t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda} + t^a \|\mathcal{B}(u, u - \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda} \\ &\quad + t^a \|\mathcal{B}(u - \bar{u}, \bar{u})(t)\|_{q_1, \lambda}. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga ao primeiro caso obtemos

$$\begin{aligned} t^a \|S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_1, \lambda} &\leq t^a \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q_1, \lambda} \\ &\quad + C_1 \|u\|_{X^\eta} \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^b \|\nabla(u - \bar{u})(\xi t)\|_{q_2, \lambda} d\xi \\ &\quad + C_1 \|\bar{u}\|_{X^\eta} \int_0^1 (1-\xi)^{-\eta+1-\frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \xi^{-a-b} (\xi t)^a \|(u - \bar{u})(\xi t)\|_{q_1, \lambda} d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando $\limsup_{t \rightarrow +\infty}$ acima chegamos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^a \|S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_1, \lambda} \leq A_1 + C_1 \varepsilon (A_1 + A_2) = 0.$$

De modo análogo obtemos também que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^b \|\nabla S(t)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q_2, \lambda} \leq A_2 + C_2 \varepsilon (A_1 + A_2) = 0.$$

□

Corolário 4.3.3. *Sejam $u_0 \in \mathcal{N}_{p, \lambda, r}^\sigma$ e $\varphi \in C_0^\infty$. Nas condições do Teorema 4.3.1, a solução \bar{u} referente à condição inicial perturbada $\bar{u}_0 = u_0 + \varphi$ é atraída para a solução u com condição inicial u_0 no sentido de (4.24).*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.2 é suficiente provar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^a \|S(t)\varphi\|_{q_1, \lambda} = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^b \|\nabla S(t)\varphi\|_{q_2, \lambda}. \quad (4.35)$$

Escolhendo $1 \leq l \leq q_1$ tal que

$$-2\eta + \frac{5}{2} < \frac{\tau_{l, \lambda}}{2} < \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2} + 1.$$

temos pelo Lema 4.2.3, para $|j| = 0$, que

$$\begin{aligned} t^a \|S(t)\varphi\|_{q_1, \lambda} &= t^{-\eta + \frac{3}{2} - \frac{\tau_{q_1, \lambda}}{2}} \|S(t)\varphi\|_{q_1, \lambda} \\ &\leq t^{-2\eta + \frac{5}{2} - \frac{\tau_{l, \lambda}}{2}} \|\varphi\|_{l, \lambda}. \end{aligned}$$

Aplicando $\lim_{t \rightarrow +\infty}$ acima obtemos a primeira igualdade em (4.35). Agora vamos escolher $1 \leq r \leq q_2$ tal que

$$-2\eta + \frac{5}{2} < \frac{\tau_{r, \lambda}}{2} < \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Utilizando novamente o Lema 4.2.3, para $|j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} t^b \|\nabla S(t)\varphi\|_{q_2, \lambda} &= t^{-\eta + 2 - \frac{\tau_{q_2, \lambda}}{2}} \|\nabla S(t)\varphi\|_{q_2, \lambda} \\ &\leq t^{-2\eta + \frac{5}{2} - \frac{\tau_{r, \lambda}}{2}} \|\varphi\|_{r, \lambda}. \end{aligned}$$

Aplicando $\lim_{t \rightarrow +\infty}$ acima obtemos a segunda igualdade de (4.35).

□

4.4 APLICAÇÕES

A seguir temos dois exemplos em que $\rho < \infty$ e $\kappa > 0$.

Exemplo 4.4.1. *Considerando as equações, já projetadas,*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u \cdot \nabla u - \int_0^t \Delta u(t-s, x) dh(s) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (4.36)$$

onde $h(s) = e_0(s) + e^{-s}$, temos que $(1 * dh)(t) = e^{-t}$, que é uma função completamente positiva. Pela Tabela 1 a função creep associada é dada por $k(t) = 1 + t$ e a função de propagação é $w(t; \tau) = e^{-\tau} e_0(t - \tau)$, $t \geq 0$, $\tau \geq 0$.

Pelo Corolário 2.2.23 e o Exemplo 2.2.8 temos que

$$S(t) = G(t)e^{-t} + \int_0^t G(\tau)e^{-\tau} d\tau,$$

logo, comparando com a estrutura de subordinação dada pelo Teorema 2.2.24, temos que $v(t; \tau) = e^{-\tau}$, para todo $t > 0$ e $\tau \in (0, t)$. Tendo em vista a solução local vamos utilizar que para $t \in (0, 1)$

$$e^{-\tau} \leq e^{-\frac{\tau}{t}} t^{-1}$$

sempre que $\tau \in (0, t)$. A desigualdade acima ocorre porque $te^{\frac{\tau}{t}(1-t)} \leq te^{(1-t)} \leq 1$, para todo $t \in (0, 1)$. Então para todo $T > 0$ existe $C_T > 0$ de modo que

$$e^{-\tau} \leq C_T e^{-\frac{\tau}{t}} t^{-1}, \quad t \in (0, T), \quad \tau \in (0, t).$$

Tomando então $\eta = 1$, o item (2) do Teorema 4.3.1 é satisfeito. Além disso, perceba que tomando $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, $0 \leq \lambda < N$ e $1 \leq p \leq \min\{q_1, q_2\}$ tais que $\tau_{q_1, \lambda} < 1$, $\tau_{q_2, \lambda} < 2$, $\tau_{p, \lambda} < 1$ e $\tau_{q_1, \lambda} + \tau_{q_2, \lambda} > 1$ as demais suposições são satisfeitas. Portanto, conseguimos garantir existência e unicidade de soluções brandas para o Problema 4.36 nas condições do Teorema 4.3.1.

Exemplo 4.4.2. Para o caso Newtoniano

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u \cdot \nabla u - \int_0^t \Delta u(t-s, x) dh(s) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $h(s) = e_0(s)$, temos que $(1 * dh)(t) = 1$, que é uma função completamente positiva. Do Exemplo 4.1.1 vimos que a função de propagação para esse caso é $w(t; \tau) = e_0(t - \tau)$, então do Corolário 2.2.23 e da Proposição 2.2.7

$$S(t) = - \int_0^\infty G(\tau) d(e_0(t - \tau)) = G(t), \quad t > 0.$$

Logo $v(t; \tau) = 0$, para todo $t > 0$ e $\tau \in (0, t)$, e a Condição 4.2.1 será satisfeita para qualquer valor de η , em particular podemos tomar η como no exemplo anterior garantindo assim o mesmo resultado de existência e unicidade, agora para $T^* = \infty$ (solução global).

REFERÊNCIAS

- ABADIAS, L.; MIANA, P. J. A subordination principle on Wright functions and regularized resolvent families. *Journal of Function Spaces*, v. 2015, 2015.
- ALMEIDA, M. F. de; PRECIOSO, J. C. Existence and symmetries of solutions in Besov-Morrey spaces for a semilinear heat-wave type equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 432, p. 338–355, 2015.
- ANDRADE, B. de; SILVA, C.; VIANA, A. L^q -solvability for an equation of viscoelasticity in power type material. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, v. 72, n. 1, 2021.
- ARGAWAL, P.; JLELI, M.; SAMET, B. *Fixed Point Theory in Metric Spaces: Recent advances and applications*. [S.l.]: Springer, 2018.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis. *Mathematische Nachrichten*, v. 292, p. 462–480, 2019.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; DANTAS, J.; SILVA, C. On the fractional chemotaxis Navier-Stokes system in the critical spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, v. 28, n. 1, p. 538–559, 2022.
- AZEVEDO, J.; POZO, J. C.; VIANA, A. Global solutions to the non-local Navier-Stokes equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, v. 27, n. 5, p. 2515–2535, 2022.
- BALAKRISHNAN, A. V. Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 10, n. 2, p. 419–437, 1960.
- BARBU, V.; SRITHARAN, S. S. Navier-Stokes equation with hereditary viscosity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, v. 54, n. 3, p. 449–461, 2003.
- BAZHLEKOVA, E. G. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 3, n. 3, p. 213–230, 2000.
- BAZHLEKOVA, E. G. Subordination principle for a class of fractional order differential equations. *Mathematics*, v. 3, n. 2, p. 412–427, 2015.
- BAZHLEKOVA, E. G. Subordination principle for space-time fractional evolution equations and some applications. *Integral Transforms and Special Functions*, v. 30, n. 6, p. 431–452, 2019.
- BENNETT, C.; SHARPLEY, R. *Interpolation of operators*. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1988. (Pure and Applied Mathematics, vol. 129).
- BILER, P.; M., C.; GUERRA, I.; KARCH, G. Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles. *Mathematische Annalen*, v. 330, n. 4, p. 693–708, 2004.
- BRAUKHOFF, M. Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier-Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic growth. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, v. 34, p. 1013–1039, 2017.

- CARVALHO-NETO, P. M. de. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- CARVALHO-NETO, P. M. de; PLANAS, G. Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n . *Journal of Differential Equations*, v. 259, p. 2948–2980, 2015.
- CHAE, M.; KANG, K.; LEE, J. Existence of smooth solutions to coupled chemotaxis-fluid equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 33, n. 6, p. 2271–2297, 2013.
- CHHABRA, R.; RICHARDSON, J. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999. (Fundamentals and Engineering Applications).
- CHOE, H. J.; LKHAGVASUREN, B. Global existence result for chemotaxis Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 446, n. 2, p. 1415–1426, 2017.
- CORRIAS, L.; PERTHAME, B. Critical space for the parabolic-parabolic Keller-Segel model in \mathbb{R}^d . *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, v. 342, p. 745–750, 2006.
- DOMBROWSKI, C.; CISNEROS, L.; CHATKAEW, S.; GOLDSTEIN, R. E.; KESSLER, J. O. Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 9, 2004.
- DUAN, R.; LORZ, A.; MARKOWICH, P. Global solutions to the coupled chemotaxis-fluid equations. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 35, n. 9, p. 1635–1673, 2010.
- DUAN, R.; XIANG, Z. A note on global existence for the chemotaxis-Stokes model with nonlinear diffusion. *International Mathematics Research Notices (IMRN)*, v. 2014, p. 1833–1852, 2014.
- ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer Verlag, 2000.
- FERREIRA, L. C.; POSTIGO, M. Global well-posedness and asymptotic behavior in Besov-Morrey spaces for chemotaxis-Navier-Stokes fluids. *Journal of Mathematical Physics*, v. 60, 2019.
- FERREIRA, L. C. F.; PRECIOSO, J. C. Existence and asymptotic behaviour for the parabolic-parabolic keller-segel system with singular data. *Nonlinearity*, v. 24, p. 1433–1449, 2011.
- HILLE, E.; PHILLIPS, R. S. *Functional Analysis and Semi-Groups*. United States of America: American Mathematical Society, 1957. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume 31).
- KATO, T. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, v. 187, p. 471–480, 1984.
- KATO, T. Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, v. 22, n. 2, p. 127–155, 1992.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North Holland: Elsevier, 2006. (Mathematics Studies).

- KOZONO, H.; MIURA, M.; SUGIYAMA, Y. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid. *Journal of Functional Analysis*, v. 270, n. 5, p. 1663–1683, 2016.
- KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. Semilinear heat equations and the Navier–Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 19, n. 5–6, p. 959–1014, 1994.
- KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. Uniqueness criterion of weak solutions to the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains. *Nonlinear Analysis*, v. 38, n. 8, p. 959–970, 1999.
- LADYZHENSKAYA, O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. 2. ed. New York: Science Publishers, 1969.
- LANGLANDS, T. A.; HENRY, B. I. Fractional chemotaxis diffusion equations. *Physical Review E*, v. 81, n. 5, 2010.
- LANKEIT, J. Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 26, n. 11, p. 2071–2109, 2016.
- LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. Recent developments in the Navier-Stokes problem. *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, v. 431, 2002.
- LIONS, P. L. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics Vol. I: Incompressible Models*. New York: Oxford University Press, 1996. (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 3).
- LORZ, A. A coupled Keller-Segel-Stokes model: global existence for small initial data and blow-up delay. *Communications in Mathematical Sciences*, v. 10, p. 555–574, 2012.
- MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London: Imperial College Press, 2010.
- MAZZUCATO, A. Besov-Morrey spaces: Function space theory and applications to non-linear PDE. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 355, n. 4, p. 1297–1364, 2003.
- NAGAI, T.; YAMADA, T. Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 336, p. 704–726, 2007.
- PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer, 1983.
- PRÜSS, J. *Evolutionary integral equations and applications*. [S.l.]: Birkhäuser, 2013. v. 87.
- TAO, Y.; WINKLER, M. Global existence and boundedness in a Keller-Segel-Stokes model with arbitrary porous medium diffusion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 32, p. 1901–1914, 2012.
- TUVAL, I.; CISNEROS, L.; DOMBROWSKI, C.; WOLGEMUTH, C. W.; KESSLER, J. O.; GOLDSTEIN, R. E. Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, v. 102, p. 2277–2282, 2005.

VRABIE, I. I. *C_0 -Semigroups and Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2003. (North-Holland Mathematics Studies, Volume 191).

WIDDER, D. *The Laplace Transform*. Princeton: Princeton University Press, 1941.

WINKLER, M. Global large-data solutions in a chemotaxis-Navier-Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 37, p. 319–351, 2012.

WINKLER, M. Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis-Navier-Stokes system. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, v. 33, p. 1329–1352, 2016.

YAGI, A. Norm behavior of solutions to the parabolic system of chemotaxis. *Mathematica japonicae*, v. 45, p. 241–265, 1997.

ZHANG, Q. Local well-posedness for the chemotaxis-Navier-Stokes equations in Besov spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 17, p. 89–100, 2014.

ZHANG, Q.; LI, Y. Global weak solutions for the three-dimensional chemotaxis-Navier-Stokes system with nonlinear diffusion. *Journal of Differential Equations*, v. 259, p. 3730–3754, 2015.

ZHAO, J.; ZHOU, J. Temporal decay in negative Besov spaces for the 3d coupled chemotaxis-fluid equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 42, p. 160–179, 2018.