



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Maria Franciele da Silva Santos Sousa

**CORREÇÃO DE VIÉS PARA O MODELO DE REGRESSÃO**  
 **$\mathcal{G}_I^0$ : Uma aplicação à extração de atributos em imagens SAR**

Recife  
2023

Maria Franciele da Silva Santos Sousa

**CORREÇÃO DE VIÉS PARA O MODELO DE REGRESSÃO**  
 **$\mathcal{G}_I^0$ : Uma aplicação à extração de atributos em imagens SAR**

Este trabalho foi apresentado à Pós-Graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento.**

Coorientador: **Prof. Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos.**

Recife

2023

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S725c Sousa, Maria Franciele da Silva Santos  
Correção de viés para o modelo de regressão G0I: uma aplicação à extração de atributos em imagens SAR / Maria Franciele da Silva Santos Sousa. – 2023.  
69 f.: il., fig, tab.

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2023.  
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística matemática. 2. Correção de viés. 3. Regressão. I. Nascimento, Abraão David Costa do (orientador). II. Título.

519.5                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2023-66

**MARIA FRANCIELE DA SILVA SANTOS SOUSA**

**CORREÇÃO DE VIÉS PARA O MODELO DE REGRESSÃO GoI: UMA APLICAÇÃO À  
EXTRAÇÃO DE ATRIBUTOS EM IMAGENS SAR.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Estatística.

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2023.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento  
Orientador

---

Profa. Dra. Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. Pedro Monteiro de Almeida Júnior  
Examinador Externo

*Dedico esse trabalho primeiramente a Deus. Como também aos meus pais, Francisco e Ângela, a meu esposo Luan, à minha irmã Ana Karielle e aos meus avós, Francisco (em memória), Raimunda (em memória), Antônio e Angelina.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda força, oportunidade, determinação e sabedoria que me fizeram chegar até aqui. Aos meus pais, Francisco e Ângela, sempre foram e são a minha base e alicerce em todos os momentos e, com certeza, meu maior incentivo e motivo de querer chegar tão longe. Aos meus avós, por estarem sempre presentes e torcendo por mim. A meu esposo, Luan, pela força, carinho e compreensão desde a formação acadêmica à pós-graduação. Seu companheirismo foi fundamental para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço aos meus orientadores, Abraão D. C. Nascimento e Josimar Mendes de Vasconcelos, pela dedicação, compreensão e paciência. Por contribuírem efetivamente com suas experiências na evolução desta dissertação e na minha formação profissional. Obrigada por todo ensinamento. Ao professor Josimar um agradecimento em especial pelo convite de estudar estatística (o pontapé inicial) e, por toda disponibilidade e paciência em se reunir e discutir sobre o trabalho. Obrigada e, peço desculpas, por todas as mensagens e reuniões marcadas, dia/noite, finais de semana. Minha imensa gratidão.

Gratidão à minha irmã caçula Ana Karielle por sempre acreditar em mim. À minha família, à família do meu esposo, que sempre me apoiaram e que direta ou indiretamente contribuíram para a minha caminhada.

Aos meus amigos de longa data, como também aos amigos e companheiros de graduação e mestrado. A Luciano (em memória), sei que estaria feliz por mim. A amiga Noemir, por todo apoio no início do mestrado. E um agradecimento em especial, aos que estiveram comigo nesses últimos dois anos: Clarice, Débora, Maria Júlia e Pedro, por todo apoio e ajuda. Vocês não sabem o quanto me ajudaram nesses dois anos de caminhada, sou muito grata. E aos demais colegas, Ludimila, Jhonathan, Raquel, João, Thalyta e Inácio, obrigada.

A todos os professores do Departamento de Estatística da UFPE. Especialmente, aqueles que participaram da minha formação durante o mestrado. À CAPES, pelo apoio financeiro. E, finalmente, aos membros da banca examinadora, por suas sugestões na finalização deste trabalho.

“Quem faz obras baseado no que sabe, no seu conhecimento, Deus lhe dá de presente um conhecimento que ele não sabia ter.”(FREEMAN, 2016).

## RESUMO

Os sistemas de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* - SAR) têm sido uma ferramenta bastante eficiente na resolução de problemas de sensoriamento remoto. Tais sistemas apresentam diversas vantagens; tais como, eles podem operar independentemente das condições atmosféricas e produzir imagens com alta resolução espacial. Entretanto, as imagens SAR são contaminadas por um tipo de interferência denominada ruído *speckle*, dificultando assim a análise e o processamento delas. Assim, a proposta de técnicas estatísticas que considere o ruído *speckle* se torna uma importante etapa para usuários do sistema SAR, em particular, modelos de regressão. Vasconcelos (2018) propôs o modelo de regressão GOI (RGOI), indicando que ele tem uma grande importância na interpretação de imagens de intensidade SAR. É sabido da Teoria Assintótica de primeira ordem que o viés do estimador de máxima verossimilhança é de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$ , podendo ser significativo para tamanhos de amostra pequenos ou moderados. Nesta dissertação, objetiva-se propor um estimador melhorado para os parâmetros de (RGOI) a partir da derivação do viés de segunda ordem proposto por Cox-Snell. Esta proposta encontra justificção uma vez que o processamento de imagens SAR é requerido o uso de janelas pequenas e moderadas, como no estudo de atributos na vizinhança de pixels para classificação e filtragem. Assim, a proposta de métodos de Teoria Assintótica de segunda ordem ou ordem superior se torna necessária. Nesta dissertação, apresentam-se os primeiros avanços nesta direção considerando o suposto da regressão GOI. Primeiramente, várias expressões em forma fechada para cumulantes de terceira ordem para RGOI são apresentadas. Subsequentemente, propõe-se uma expressão em forma fechada para viés de segunda ordem segundo a expressão de Cox-Snell. A fim de quantificar o desempenho da estimação melhorada, sua performance é quantificada comparativamente àquela das estimativas de máxima verossimilhança original. Finalmente uma aplicação a dados reais é realizada. Em todos os resultados numéricos, é possível observar a importância da proposta desta dissertação.

**Palavras-chave:** distribuição GOI; regressão GOI; correção de viés; imagem SAR; processamento em janelas pequenas.

## ABSTRACT

Synthetic Aperture Radar (SAR) systems have been a very efficient tool in solving sensing problems remote. Such systems have several advantages; such as, they can operate independently atmospheric conditions and produce images with high spatial resolution. However, SAR images are contaminated by a type of interference called speckle noise, thus making their analysis and processing difficult. Thus, the proposal to statistical techniques that consider speckle noise becomes an important step to users of the SAR system, in particular regression models. Vasconcelos (2018) proposed the GOI regression model (RGOI), indicating that it has a great importance in the interpretation of SAR intensity images. It is known from the First Order Asymptotic Theory that the bias of the maximum likelihood estimator is of order  $\mathcal{O}(n^{-1})$ , which can be significant for small and moderate sample sizes. In this dissertation, the objective is propose an improved estimator for the parameters of (RGOI) from the derivation of the second-order bias proposed by Cox-Snell. This proposal is justified by a since the processing of SAR images is required to use small and moderate windows, as in the study of attributes in the neighborhood of pixels for classification and filtering. Thus, the proposal of second-order or higher-order Asymptotic Theory methods becomes necessary. This dissertation presents the first advances in this direction. Considering the assumption of the GOI regression. First, several expressions in closed form for third-order cumulants for RGOI are presented. Subsequently, we propose a closed-form expression for second-order bias according to the expression by Cox-Snell. In order to quantify the performance of the improved estimation, its performance is quantified compared to that of maximum likelihood estimates original. Finally, an application to real data is performed. in all numerical results, it is possible to observe the importance of the proposal of this dissertation.

**Keywords:** GOI distribution; GOI regression; bias correction; image SAR; processing in small windows.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Número complexo
$\mathbb{R}_+$	Número real positivo
$A(\bullet, \bullet)$	Amplitude
$\phi(\bullet, \bullet)$	Fase
$I(\bullet, \bullet)$	Intensidades
$\Gamma$	Distribuição Gama
$\Gamma^{-1}$	Distribuição Gama inversa
$f_Z$	Função densidade de probabilidade
$\mathbb{E}(\bullet)$	Valor esperado
$B(\bullet, \bullet)$	Função beta
$g(\bullet)$	Função de ligação
$\ell(\bullet)$	Função de log-verossimilhança
$U(\bullet)$	Função score
$\Psi(x)$	Função digama
$c$	Constantes
$\kappa$	Cumulantes
$\mathcal{N}_p$	Distribuição Normal Multivariada
$\mathcal{O}(\bullet)$	Magnitude
$U^{(1)}$	Derivada de primeira ordem
$U^{(2)}$	Derivada de segunda ordem

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema AIRSAR . . . . .	18
Figura 2 – Geometria SAR . . . . .	18
Figura 3 – Baía de São Francisco (EUA) . . . . .	19
Figura 4 – Densidades da $\mathcal{G}_I^0$ . . . . .	22
Figura 5 – Desconto percentual do estudo de simulação sob a restrição de $\alpha$ . . . . .	34
Figura 6 – Média dos resultados da simulação de Monte Carlo do viés relativo absoluto do EMV, $\hat{\theta}$ e, sua versão corrigida, $\tilde{\theta}$ . . . . .	37
Figura 7 – Gráfico ajustado dos dados sob as intensidades $Z_{HH} \sim Z_{HV}$ e $Z_{VV} \sim Z_{HV}$ ( à esquerda os gráficos são do modelo usual e os da banda direita são do modelo corrigido). . . . .	42
Figura 8 – Gráficos de diagnóstico para dados de imagens SAR do modelo $Z_{HH} \sim Z_{HV}$ (painéis à esquerda os gráficos são do modelo usual e os gráficos da banda direita são do modelo corrigido). . . . .	43
Figura 9 – Gráficos de diagnóstico para dados de imagens SAR do modelo $Z_{VV} \sim Z_{HV}$ (painéis à esquerda os gráficos são do modelo usual e os gráficos da banda direita são do modelo corrigido) . . . . .	44
Figura 10 – Média dos resultados da simulação de Monte Carlo do viés relativo absoluto do EMV, $\hat{\theta}$ e, sua versão corrigida, $\tilde{\theta}$ . . . . .	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas para $\beta_0 = 1, 1$ . . . . .	35
Tabela 2	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas para $\beta_1 = 1, 1$ . . . . .	36
Tabela 3	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas quando $\beta_0 = \beta_1 = 1, 1$ . . . . .	36
Tabela 4	– Medidas de informação para dados SAR sintéticos quando $\beta_0 = \beta_1 = 1, 1$ . . . . .	38
Tabela 5	– Medidas estatísticas para o modelo $\mathcal{G}_I^0$ e o proposto com a correção de Cox-Snell com base em dados reais. . . . .	40
Tabela 6	– Estimativas dos parâmetros para dados reais de imagem SAR. . . . .	40
Tabela 7	– Medidas de informação para modelo de imagem SAR com base em dados reais. . . . .	40
Tabela 8	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas para $\beta_0 = 0, 5$ . . . . .	66
Tabela 9	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas para $\beta_1 = 0, 5$ . . . . .	67
Tabela 10	– Resultados das EMV e suas versões corrigidas quando $\beta_0 = \beta_1 = 0, 5$ . . . . .	67
Tabela 11	– Medidas de informação para dados SAR sintéticos quando $\beta_0 = \beta_1 = 0, 5$ . . . . .	69

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC	Critério de informação Akaike
AICc	AIC corrigido
BIC	Critério de informação bayesiano
BFGS	Algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno
EMV	Estimador de máxima verossimilhança
EQM	Erro quadrático médio
fdp	Função densidade de probabilidade
MM	Modelo multiplicativo
MV	Máxima verossimilhança
RQEMP	Raiz quadrada do erro quadrático médio de predição
SAR	Synthetic Aperture Radar
VAEP	Valor absoluto do erro de predição

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	14
1.1	Motivação	14
1.2	Contribuições desta dissertação	16
1.3	Plataforma computacional	17
1.4	Sensor AIRSAR( <i>Airborne Synthetic Aperture Radar</i> - AIRSAR)	17
1.5	Dados utilizados	17
1.6	Organização da dissertação	19
2	<b>REGRESSÃO <math>\mathcal{G}_I^0</math></b>	20
2.1	Distribuição $\mathcal{G}_I^0$	20
2.2	Modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$	22
2.2.1	Inferência baseada em verossimilhança para o modelo $\mathcal{G}_I^0$	23
2.2.2	Funções escore	23
2.2.3	Matriz de informação de Fisher	24
2.2.4	Inversa da matriz de informação de Fisher	25
2.2.5	Estimativas	26
3	<b>CORREÇÃO DE VIÉS</b>	27
3.1	Introdução	27
3.2	Correção de Cox-Snell	28
3.3	Correção de Cox-Snell dos EMV no modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$	29
4	<b>RESULTADOS E APLICAÇÕES</b>	33
4.1	Estudo com dados sintéticos	33
4.2	Aplicação a dados reais de imagens SAR	38
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	45
	<b>REFERÊNCIAS</b>	47
	<b>APÊNDICE A – INVERSA DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER E EXPRESSÃO DE COX-SNELL</b>	52
	<b>APÊNDICE B – RESULTADO DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO</b>	66

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

O sensoriamento remoto é um conjunto de técnicas cujo objetivo é coletar, processar e analisar informações de um meio físico, a partir da interação de um alvo com radiações eletromagnéticas (JENSEN, 2009). Sua utilização é de fundamental importância no contexto das sociedades atuais, por meio de tais técnicas é possível evidenciar dados geográficos e/ou históricos pertencentes aos espaços naturais e sociais, por exemplo, avaliação de impactos ambientais (SOUZA et al., 2021).

Dentre as técnicas de sensoriamento remoto, podemos citar os sistemas ópticos e o sistema de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* – SAR). Os sistemas ópticos, fornecem informações sobre a superfície terrestre de forma que as imagens dependam das condições atmosféricas existentes (CHAVES et al., 2003). Por outro lado, os sistemas de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* – SAR) têm como principal vantagem a capacidade de atuar independentemente da luminosidade e das condições climáticas, fornecendo imagens com alta resolução espacial. E, por esse motivo, o sistema SAR têm sido bastante utilizado no geo sensoriamento de regiões geográficas, principalmente aquelas de grandes dimensões continentais (LEE; POTTIER, 2017). Entre as diversas áreas de atuação do sistema SAR, podemos citar: monitoramento ambiental (FAN et al., 2015), mapeamento de superfícies terrestres (LING et al., 2021), planejamento urbano (ZHAI et al., 2016), e no reconhecimento de atividades agrícolas (SRIVASTAVA et al., 2011). Recentemente, Krestenitis et al. (2019) descrevem uma abordagem para imagens SAR por meio de redes neurais aplicados a identificação de poluição por derramamento de óleo. Tariq et al. (2021) obtiveram pela primeira vez imagens dos satélites *Sentinel* – 2 para avaliar áreas queimadas em incêndios florestais.

Em contraste com a eficiência do sistema SAR em lidar com problemas reais de sensoriamento remoto, a formação de imagens SAR utiliza *iluminação coerente*<sup>1</sup>, como consequência, as imagens são corrompidas por um ruído, chamado ruído *speckle* (LEE; POTTIER, 2017). Esse fato dificulta consideravelmente a modelagem, a interpretação e o processamento das imagens resultantes. Assim, o estudo de modelos probabilísticos e o desenvolvimento de métodos inferenciais adequados se tornam fundamentais no processamento de dados de imagens SAR (NASCIMENTO et al., 2009). Na literatura encontramos algumas distribuições de probabilidade que lidam com o ruído *speckle* como, por exemplo, as distribuições Wishart (LEE et al., 1994) e Gama (FRERY et al., 1997).

<sup>1</sup> Em decorrência da característica coerente do sensor, a amplitude e a fase do sinal recebido (representado por um número complexo), são resultantes de uma soma vetorial (*coerente*) dos diversos elementos do alvo (FREITAS et al., 2005).

Dados chamados de polarimétricos *single-look*<sup>2</sup>, são obtidos pela emissão e recepção de pulsos polarizados nos sentidos horizontal e vertical (“H” e “V”, respectivamente), resultando em um vetor complexo, diga-se  $(R_{HH}, R_{HV}, R_{VH}, R_{VV}) \in \mathbb{C}^4$ , para cada entrada da imagem. Na prática, e considerando as condições do teorema de reciprocidade (ULABY; ELACHI, 1990), verifica-se que  $R_{HV} = R_{VH}$ . Dado um elemento associado ao  $k$ -ésimo canal  $k \in (HH, HV, VV)$ , tal elemento é definido por  $R_k = |R_k| \exp \{j\phi_k\}$ , para  $\phi_k \in [0, 2\pi]$  a fase de  $R_k$ . Nessa dissertação, consideramos um modelo condicional para intensidades  $R_k$ , em que,  $I_k = R_k^2$ .

Em estudos recentes, Gao (2010) propôs uma pesquisa que descreve quatro abordagens para a modelagem de intensidades, destacando-se uma classificada como modelagem multiplicativa. Segundo essa abordagem, o retorno SAR é o produto de duas variáveis aleatórias: uma descreve o efeito do ruído *speckle* e a outra o comportamento de relevo. Vários trabalhos na literatura de dados SAR indicaram a distribuição  $\Gamma$  como uma suposição estocástica para dados *singlelook* e *multilook* pouco texturados (GIERULL; SIKANETA, 2002). Contudo, em aplicações a dados reais de intensidade, o modelo  $\mathcal{G}_I^0$  proposto por Frery et al. (1997) tem se mostrado bastante significativo. Esse modelo se destaca por caracterizar áreas com diferentes graus de textura (de leve a fortemente texturados). A distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  é muito utilizada para descrever cenários urbanos (CHAN et al., 2016) e, muitas aplicações mostraram seu excelente desempenho no ajuste desse tipo de dado. Alguns resultados o propõem como um modelo universal para dados do tipo *speckle* (MEJAIL et al., 2001).

A distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  é indexada por três parâmetros, que indicam rugosidade ( $\alpha$ ), brilho ( $\gamma$ ) e o número de *looks* ( $\mathcal{L}$ ). O último parâmetro representa uma quantidade, que está relacionada ao sinal do ruído em imagens SAR (valores altos de  $\mathcal{L}$  indicam imagens mais suaves). Vários trabalhos têm sido propostos no sentido de colaborar quanto à inferência pontual na distribuição  $\mathcal{G}_I^0$ : baseada em máxima verossimilhança (MV) (FRERY et al., 2004), método dos momentos (FRERY et al., 2000) e, métodos robustos (FRERY et al., 2004);(FRERY et al., 1997); (BUSTOS et al., 2002);(ALLENDE et al., 2006). O método mais utilizado em aplicações envolvendo o SAR é o método MV, devido suas propriedades assintóticas, como centralidade e normalidade em grandes amostras.

Recentemente, alguns trabalhos têm sido endereçados no sentido de aplicar modelos de regressão ao processamento de imagens SAR. Nesse contexto, Vasconcelos (2018), introduziu o modelo  $\text{R}\mathcal{G}_I^0$  aplicado a dados de imagens SAR. Palm et al. (2019) propuseram uma regressão que estima a média dos sinais SAR por uma distribuição Rayleigh. E Nascimento et al. (2022), apresenta um modelo de regressão K-Bessel (KBR), na qual uma função da resposta de intensidade média é explicada por outras características (ou

<sup>2</sup> O processamento de um look simples resulta em uma única visualização em cada dimensão usando toda a largura de banda de sinal disponível.

covariáveis) determinadas em paralelo para prever o relevo em imagens de intensidades SAR.

Por mais que o estimador de máxima verossimilhança (EMV), seja frequentemente tendencioso para amostras finitas (tendo viés  $\mathcal{O}(n^{-1})$  <sup>3</sup>, em que  $n$  é o tamanho amostral (CORDEIRO; MCCULLAGH, 1991)), tal viés não é considerado em situações práticas, pois seu valor é desprezível em relação ao erro padrão, que tem  $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ . Contudo, tais vieses podem ser substanciais em situações em que são utilizados tamanhos de amostra pequenos ou moderados, por exemplo, há áreas no processamento de imagens SAR que demandam a utilização de janelas de tamanhos pequenos. Assim, a proposta de expressões analíticas para o viés do EMV são de suma importância.

Cox e Snell (1968) propuseram uma fórmula geral para o viés de segunda ordem do EMV. Desde então, vários trabalhos empregaram esta fórmula como um meio de obter estimadores melhorados para parâmetros de várias distribuições. Vasconcellos e Silva (2005) aplicaram-na à distribuição  $\mathcal{G}^0$  univariada, sendo frequentemente usada para modelar imagens SAR. Nesta dissertação, propõem-se versões de estimadores melhorados para os parâmetros da distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  segundo a abordagem de Cox-Snell.

Em particular, a derivação de expressões que possibilitem reduzir o viés se torna importante para a obtenção de estimadores mais precisos. Desta forma, apresentamos expressões de cumulantes de terceira ordem de forma fechada para o cálculo do viés de segunda ordem em expressão matricial a partir da expressão de Cox e Snell (1968).

## 1.2 Contribuições desta dissertação

### 1<sup>a</sup> Contribuição

Propor uma nova abordagem para derivar a inversa da matriz de informação de Fisher a fim de diminuir a complexidade e, conseqüentemente, reduzir o tempo de processamento de cálculos matriciais. O método então abordado é uma técnica de subdivisão de matrizes é, geralmente, utilizada a fim de isolar ou separar uma matriz de grande porte em blocos menores, no qual torna as manipulações algébricas e inversões mais simples. Além da subdivisão, utilizamos o determinante de Schur e a diagonalização de Aitken para o cálculo da inversão de uma matriz particionada em blocos (ZHANG, 2006).

### 2<sup>a</sup> Contribuição

<sup>3</sup>  $\mathcal{O}(\bullet)$  (“de ordem no máximo igual a”) são usados para comparar as ordens de magnitude de seqüências de constantes, detalhes verem (CORDEIRO; VASCONCELLOS, 1999)

Propor versões de estimadores melhorados de máxima verossimilhança do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  por meio da derivação matricial dos vieses de segunda ordem proposto por (COX; SNELL, 1968).

### 1.3 Plataforma computacional

#### Linguagem de programação

A linguagem de programação utilizada em nosso estudo para a produção de gráficos e estudo de simulação, foi a linguagem de programação R (CHAMBERS, 2008). O texto foi escrito no LATEX<sup>4</sup> e suas referências foram feitas com o BibTeX. Em particular, algumas funções foram criadas com as seguintes finalidades:

- Estimação dos parâmetros;
- Correção de viés por meio da expressão de Cox-Snell;
- Realização de simulações e experimentos reais.

### 1.4 Sensor AIRSAR (*Airborne Synthetic Aperture Radar - AIRSAR*)

O radar de abertura sintética aerotransportado (AIRSAR) foi projetado e construído pelo laboratório de propulsão à jato (*Jet Propulsion Laboratory-NASA-JPL*) em 1980 e sua primeira versão foi acoplada à aeronave CV-990. Entretanto, devido a um grave acidente em julho de 1985, a versão inicial do sistema foi completamente destruída. Após o ocorrido, uma nova versão conhecida por AIRSAR, foi desenvolvida pelo JPL, cuja imagem é exibida na Figura 1<sup>5</sup> e a Figura 2 representa a geometria de uma imagem por um sistema aerotransportado. A nova versão operou em modo polarimétrico sob as bandas  $P - (0, 45GHz)$ ,  $L - (1, 26GHz)$  e  $C - (5, 31GHz)$ , simultaneamente. O sensor AIRSAR serve como um banco de teste de tecnologia de radar da NASA para várias técnicas avançadas de SAR. O AIRSAR voou pela primeira vez em 1987 e continuou a realizar pelo menos uma campanha de voo a cada ano, seja nos Estados Unidos ou em missões internacionais (LEE; POTTIER, 2017).

### 1.5 Dados utilizados

Como base de dados, utilizamos uma imagem da Baía de São Francisco (EUA) capturada pelo sensor AIRSAR na banda  $\mathcal{L}$  e adotando o número de *looks* 4. Esta imagem PolSAR é utilizada em diversos estudos, devido apresentar três regiões notadamente

<sup>4</sup> Para mais informações e detalhes sobre o sistema de tipografia LATEX, visite <http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex>.

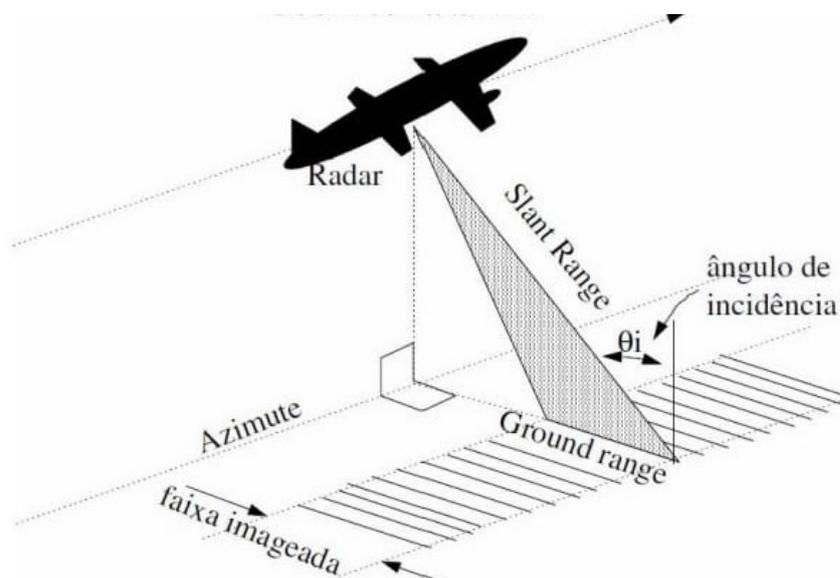
<sup>5</sup> Disponível em: <https://airsar.jpl.nasa.gov/>, Acesso em: 24 de nov. 2022.

Figura 1 – Sistema AIRSAR



Fonte: Projeto AIRSAR. <sup>5</sup>

Figura 2 – Geometria SAR



$\theta_i$  – ângulo de incidência

Azimute – direção de deslocamento da plataforma

*Ground range* – direção de alcance

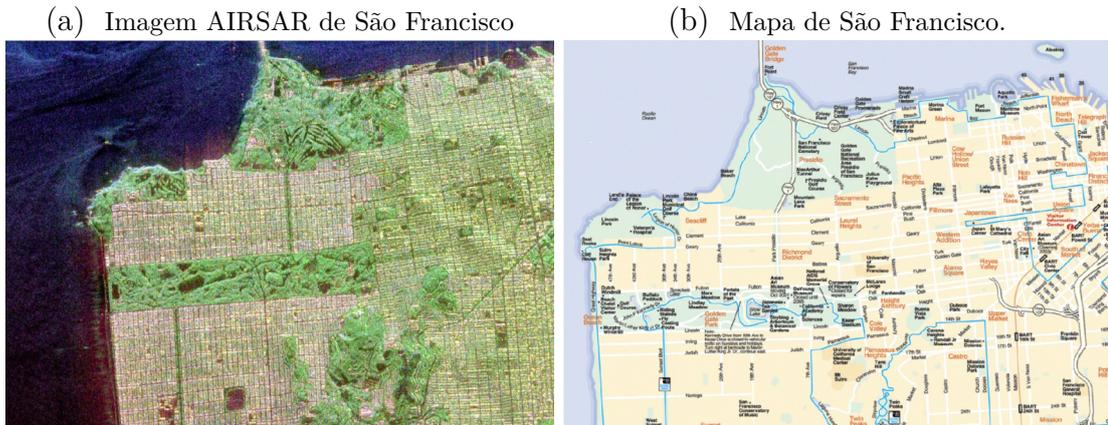
Fonte: CCRS (2022)

explicitas: oceano, floresta e áreas urbanas. A seguir, a Figura 3 <sup>6</sup>. apresenta a imagem com coloração conforme a representação de Pauli<sup>7</sup>, assim como um mapa especificando as regiões.

<sup>6</sup> Disponível em: <<https://earth.esa.int/web/polsarpro/data-sources/sample-datasets>>, Acesso em: 03 de jan.2023

<sup>7</sup> A representação de Pauli é reconhecida por delinear a imagem sobre as combinações HH+VV, HH-VV, HV as relacionando às cores azul, vermelho e verde. O que possibilita acrescentar coloração a uma imagem PolSAR permitindo destacar algumas de suas características importantes.

Figura 3 – Baía de São Francisco (EUA)

Fonte: esa(2023)<sup>6</sup>

## 1.6 Organização da dissertação

O restante desta dissertação está organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 2 faz uma abordagem sobre o modelo. Inicialmente, a distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  e algumas propriedades. Em seguida, apresenta o modelo de regressão proposto por Vasconcelos (2018), inferência de máxima verossimilhança, a derivação da matriz de informação de Fisher e sua inversa.
- O Capítulo 3 discorre sobre a correção de viés, faz-se uma revisão literária expondo os trabalhos mais relevantes a respeito do tema. Uma breve discussão sobre a correção proposta por (COX; SNELL, 1968). E por fim a formulação de uma expressão matricial para os vieses de segunda ordem dos EMVs do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  e um novo estimador de MV para o modelo.
- O Capítulo 4 aborda uma discussão numérica sobre os resultados apresentados com a proposta da correção de viés. Inicialmente, a proposta citada é submetida a dados sintéticos via simulação Monte Carlo. Em seguida, experimentos com dados reais de intensidade SAR são realizados.
- Capítulo 5 apresenta as considerações finais e perspectivas futuras.
- Finalmente, é apresentado os apêndices com as expressões matemáticas e resultados do estudo de simulação, respectivamente.

## 2 REGRESSÃO $\mathcal{G}_I^0$

As imagens SAR são originadas por pulsos polarizados (nas direções horizontais, “H”, e verticais, “V”) enviados a uma superfície geográfica e ecos são retornados e registrados (LEE; POTTIER, 2017). Cada imagem é produzida de modo que cada pixel é representado por um número complexo, denominado canal de polarização. Este canal pode assumir um dentre os quatro estados: (i) horizontal-horizontal (HH), (ii) horizontal-vertical (HV), (iii) vertical- horizontal (VH) e (iv) vertical-vertical (VV). Segundo Almeida-Junior e Nascimento (2021), um canal de polarização associado a entrada  $(m, n)$  de uma imagem SAR multilook é definido como

$$R(m, n) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{N(m, n)} A_{l,k}(m, n) \exp \{ \mathbf{j} \phi_{l,k}(m, n) \}, \quad (2.1)$$

em que  $\mathcal{L}$  é o número de *looks*,  $N(m, n)$  é o número de *scatters* em cada célula de resolução,  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária e  $A_{l,k}(m, n)$  e  $\phi_{l,k}(m, n)$  representam a amplitude e a fase no  $k$ -ésimo scatter e no  $l$ -ésimo *look* para a célula  $(m, n)$ , respectivamente. Além disso,  $A(m, n) = \sqrt{R(m, n)^* R(m, n)}$  e  $I(m, n) = A(m, n)^2$  representam a amplitude e a intensidade de  $R(m, n)$ , respectivamente, e  $(\cdot)^*$  é o conjugado do número complexo. Devido à formação física das imagens, o interesse do detalhamento de imagens SAR sob uma perspectiva *multilook* tem crescido bastante nos últimos anos.

Obtidas a partir de uma *iluminação coerente* de ecos retornados, imagens SAR são fortemente contaminadas por um ruído *speckle* (NASCIMENTO et al., 2009). Este ruído fornece imagens com aspecto granuloso, impondo desvios das propriedades clássicas de aditividade e distribuição gaussiana. Portanto, dificulta tanto a interpretação como a modelagem e análise no processamento dessas imagens. Nesse sentido, a modelagem multiplicativa (MM) é a mais utilizada na literatura para descrever dados típicos de imagens com aspecto granuloso, devido essa modelagem apresentar uma estrutura descritiva próxima à formação física da imagem (OLIVER; QUEGAN, 2004). Nesta seção, assumimos a distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  como modelo para descrever intensidades  $I(\bullet, \bullet)$  sobre uma abordagem de regressão.

### 2.1 Distribuição $\mathcal{G}_I^0$

Seja o modelo  $Z = I(m, n)$  de intensidades SAR seguindo uma abordagem MM, digamos  $Z \in \mathbb{R}_+$ . Então, a variável aleatória  $Z$  é definida como o produto de duas variáveis aleatórias positivas e independentes, tais que uma descreve o retroespalhamento do terreno

e fornece informações sobre a área mapeada (como relevo e umidade), digamos  $X$ , a outra representa o ruído speckle, digamos  $Y$ . Assumindo

$$Z = X \times Y,$$

em que  $X \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$  e  $Y \sim \Gamma(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ . Frery et al. (1997) propuseram a distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  com função densidade de probabilidade (fdp) dada por

$$f_Z(Z; \alpha, \gamma, \mathcal{L}) = \frac{\mathcal{L}^\mathcal{L} \Gamma(\mathcal{L} - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(\mathcal{L})} Z^{\mathcal{L}-1} [\gamma + \mathcal{L}Z]^{\alpha-\mathcal{L}}, \quad (2.2)$$

com  $-\alpha > 0$ ,  $\gamma = \mu(-\alpha - 1) > 0$  e  $\mathcal{L} > 0$ , representando o ruído, brilho e o número de *looks*, respectivamente. Neste caso,  $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, \mathcal{L})$ . A seguir, algumas propriedades importantes

Frery et al. (1997) propuseram o  $n$ -ésimo momento ordinário da distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  no Lema que segue.

**Lema 2.1.1.** *Seja  $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, \mathcal{L})$ . O  $k$ -ésimo momento não central de  $Z$  é dado por*

$$\mathbb{E}(Z^k) = \left(\frac{\gamma}{\mathcal{L}}\right)^k \frac{B(\mathcal{L} + k, -\alpha - k)}{B(\mathcal{L}, -\alpha)},$$

para  $\alpha < -k$ ; caso contrário, é infinito. Na expressão acima,  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  é a função beta.

Conseqüentemente, do Lema 2.1.1, decorrem-se as seguintes quantidades:

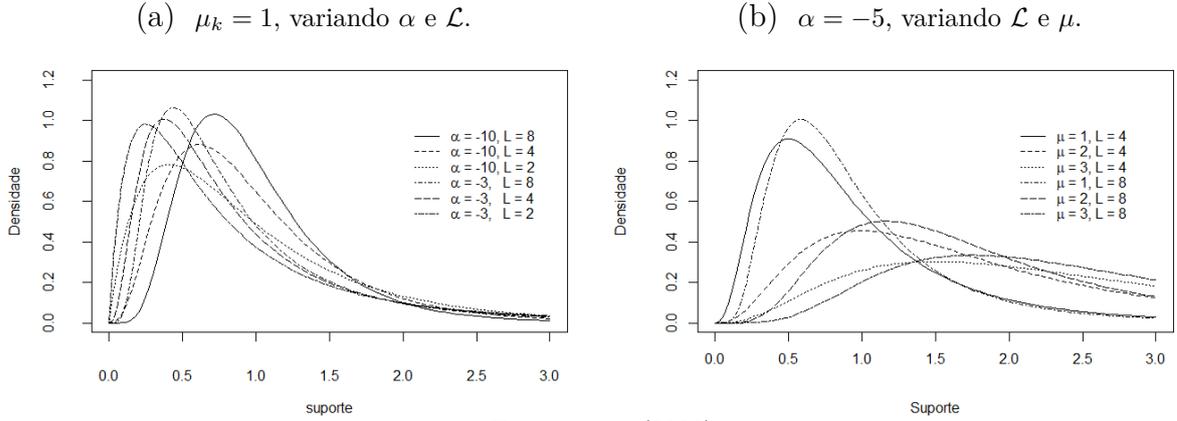
$$\mu = \mathbb{E}(Z) = \frac{\gamma}{(-\alpha - 1)} \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z) = \mu^2 \left[ \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\right) \frac{\mathcal{L} + 1}{\mathcal{L}} - 1 \right],$$

para  $\alpha < -2$ . Vasconcelos (2018) derivou o momento inverso e caracterizou a distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  como família escala, como se segue nos Lemas subsequentes.

**Lema 2.1.2.** *Seja  $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, \mathcal{L})$ . Então, o  $k$ -ésimo momento inverso de  $T = (\gamma + \mathcal{L}Z)$  é dado*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T^k}\right) = \frac{1}{\gamma^k} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-\alpha + i}{-\alpha + \mathcal{L} + i}\right).$$

**Lema 2.1.3.** *A distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  é uma família escala.*

Figura 4 – Densidades da  $\mathcal{G}_I^0$ 

Fonte: Autor(2023).

## 2.2 Modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$

Em diversas situações, faz-se necessário analisar o impacto de um conjunto de variáveis sobre média de outra. Uma forma de quantificar tal relação é através de modelos de regressão. No contexto de imagens SAR polarimétricas, cada pixel é associado a no mínimo três retornos dos canais de polarização e seus atributos associados (tal como a intensidade) podem ser modelados e preditos. Parte da literatura, faz a modelagem marginal de um canal sem considerar o efeito dos demais. Em contraste, Vasconcelos (2018) apresentou evidências de que a abordagem preditiva por regressão é mais razoável para analisar a dependência linear apresentada nos canais de polarização extraídos de imagens SAR (como intensidades).

Seja  $Z_k$  uma variável aleatória tal que

$$Z_k = \exp(x_k^\top \boldsymbol{\beta}) \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

em que  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$  é o vetor de coeficientes de regressão,  $\mathbf{x}_k = (1, x_{k1}, \dots, x_{kp})^\top$  o vetor  $p < n$  de variáveis explicativas (conhecidas) e  $\varepsilon_k \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, -(\alpha + 1), \mathcal{L})$ . Do Lema 2.1.3, temos  $[Z_k | x_k] \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma_k, \mathcal{L})$ , com  $\gamma_k = \mu_k(-\alpha - 1)$ ,  $\mu_k = g^{-1}(\eta_k)$  e  $\eta_k = \mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\beta}$ , e  $g(\bullet)$  é uma função de ligação de valor positivo. Existem várias funções de ligação na literatura (YOUNG et al., 1987), (FERRARI; CRIBARI-NETO, 2004), (MCCULLAGH; NELDER, 1989), (ATKINSON, 1986), por questões de tratabilidade analítica e interpretativa, consideraremos

$$g(x) = \log(x).$$

Assim, assumiremos que  $n$  intensidades SAR de um determinado canal são descritas pelas variáveis aleatórias  $Z_1, \dots, Z_n$  tal que  $Z_k \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma_k, \mathcal{L})$ , tem média  $\mu_k =$

$\exp(\mathbf{x}_k^\top \boldsymbol{\beta})$  e o vetor  $\mathbf{x}_k$  de características associadas a  $Z_k$ .

### 2.2.1 Inferência baseada em verossimilhança para o modelo $\mathcal{G}_I^0$

Considere uma amostra aleatória  $(Z_1|x_1), \dots, (Z_n|x_n)$  de tamanho  $n$  tal que  $Z_k \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma_k, \mathcal{L})$ . Das expressões (2.2) e (2.3), o logaritmo da função de verossimilhança (função de log-verossimilhança) em  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \alpha, \mathcal{L})^\top$  é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^n \ell_k(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_k(\boldsymbol{\theta}) = & \mathcal{L} \log(\mathcal{L}) + \log \Gamma(\mathcal{L} - \alpha) - \alpha \log(\mu_k) - \alpha \log(-\alpha - 1) - \log \Gamma(-\alpha) \\ & - \log \Gamma(\mathcal{L}) + (\mathcal{L} - 1) \log(z_k) + (\alpha - \mathcal{L}) \log(t_k), \end{aligned}$$

$t_k = \gamma_k + \mathcal{L}z_k$  tal que  $z_k$  é uma saída de  $Z_k$ .

### 2.2.2 Funções escore

A função escore obtida da diferenciação da log-verossimilhança com relação aos parâmetros é dada por

$$U(\boldsymbol{\theta}) = (U_\beta, U_\alpha, U_\mathcal{L})^\top = \left( \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathcal{L}} \right)^\top,$$

determinado por:

$$U_\beta = \alpha \mathbf{X}^\top \mathbf{E}(\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\mu}^*), \quad (2.5)$$

$$U_\alpha = nU_1(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{T_k}{\mu_k} \right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right), \quad (2.6)$$

$$U_\mathcal{L} = nU_2(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{Z_k}{T_k} \right), \quad (2.7)$$

Sendo  $\mathbf{X}$  uma matriz  $n \times p$  cuja  $k$ -ésima linha é  $\mathbf{x}_k^\top$ ,  $g'(x) = dg(x)/dx$ ,  $c_1 = (\mathcal{L} - \alpha)(-\alpha - 1)$ ,  $\mathbf{E} = \text{diag}(\partial \mu_k / \partial \eta_k) = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_k), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$ ,  $\mathbf{T}^* =$

$(T_1^*, \dots, T_k^*, \dots, T_n^*)^\top$ , com  $T_k^* = -c_1/\alpha T_k$  e  $\boldsymbol{\mu}^* = (1/\mu_1, \dots, 1/\mu_k, \dots, 1/\mu_n)^\top$ . E  $\Psi(x) = d \log \Gamma(x)/dx$  é a função digama,

$$U_1(\alpha, \mathcal{L}) = -\Psi(\mathcal{L} - \alpha) + \Psi(-\alpha) - \log(-\alpha - 1) + \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)},$$

$$U_2(\alpha, \mathcal{L}) = \log(\mathcal{L}) + 1 + \Psi(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi(\mathcal{L}).$$

Para mais detalhes ver Apêndice A.

### 2.2.3 Matriz de informação de Fisher

Para determinar a matriz de informação de Fisher, considere inicialmente a matriz  $\widetilde{\mathbf{X}}$  de dimensão  $(n+2) \times (p+2)$  dada por

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Em que  $\mathbf{X}$  é a matriz de variáveis explicativas. Por outro lado, seja  $\widetilde{\mathbf{M}}$  a matriz  $(n+2) \times (n+2)$  definida como

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\beta\beta} & \mathbf{M}_{\beta\alpha} & \mathbf{M}_{\beta\mathcal{L}} \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta} & \mathbf{M}_{\alpha\alpha} & \mathbf{M}_{\alpha\mathcal{L}} \\ \mathbf{M}_{\mathcal{L}\beta} & \mathbf{M}_{\mathcal{L}\alpha} & \mathbf{M}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{M}_{\beta\beta} = \text{diag}\{m_1, \dots, m_k, \dots, m_n\}$ ,  $\mathbf{M}_{\beta\alpha} = c_2 \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*$ ,  $\mathbf{M}_{\alpha\alpha} = nc_3$ ,  $\mathbf{M}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} = nc_4$ ,  $\mathbf{M}_{\beta\mathcal{L}} = \mathbf{M}_{\alpha\mathcal{L}} = 0$  e

$$m_k = \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2.$$

Então, podemos definir a matriz de informação de Fisher para  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \alpha, \mathcal{L})^\top$  como

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\mathcal{L}} \\ \bullet & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\mathcal{L}} \\ \bullet & \bullet & \mathbf{K}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{\mathbf{X}}. \quad (2.8)$$

Observa-se que os parâmetros  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\alpha$  não são ortogonais, diante do fato de  $\theta_i$  e  $\theta_j$  em  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$  são ortogonais denotado por  $\theta_i \perp \theta_j$ , se e somente se,  $\mathbb{E} [\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_j \partial \theta_i] = 0$ , para todo  $i \neq j$ . Por outro lado, temos que  $\boldsymbol{\beta} \perp \mathcal{L}$  e  $\alpha \perp \mathcal{L}$ .

Para uma amostra suficientemente grande e satisfazendo as condições de regularidade usuais (BICKEL; DOKSUM, 2015), segue-se que  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_{p+1}(0, \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$ , no qual,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é o EMV de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D}$  representa a convergência em distribuição quando  $n$  é suficientemente grande, e  $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  indica a distribuição normal multivariada com média  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

#### 2.2.4 Inversa da matriz de informação de Fisher

Nesta seção apresentamos uma contribuição de nosso estudo, em que simplifica o processo para formulação de uma matriz inversa. Para determinar a inversa da matriz de informação de Fisher  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  consideramos um método de subdivisão de matrizes, isto é, particionar a matriz em blocos que torna o processo algébrico mais simples e fácil de manipular, principalmente, para matrizes com ordens grandes. Segundo Anton e Busby (2006), podemos particionar a matriz de modo que

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

em que,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X} & c_2 \mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^* \\ \bullet & nc_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{tal que } \mathbf{B} = \mathbf{B}^\top \text{ e } \mathbf{D} = nc_4.$$

E por Anderson e Anderson (1958) e Rencher e Schaalje (2008) a matriz  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$  é positiva definida e não singular, respectivamente. Além disso, a submatriz  $\mathbf{A}$  é também simétrica positiva e definida (LEISERSON et al., 1994). Diante dos resultados, podemos considerar o conceito de determinante ou complemento de Schur (SCHUR, 1918). Esse determinante desempenha um papel muito importante na Estatística, Análise Numérica, Álgebra Linear e em diversas outras áreas da Matemática e suas aplicações (ZHANG, 2006). O complemento de Schur para a matriz  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$  é definido por

$$(\mathbf{K}/\mathbf{A}) = \mathbf{D} - \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

Obtemos a inversa da matriz de informação de Fisher  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  por meio do processo de inversão de Banachiewicz e pela diagonalização de Aitken, para mais detalhes ver Banachiewicz (1937) e Zhang (2006). E então, a inversa é dada por

$$\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\beta\beta} & \mathbf{K}^{\beta\alpha} & \mathbf{K}^{\beta\mathcal{L}} \\ \bullet & \mathbf{K}^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}^{\alpha\mathcal{L}} \\ \bullet & \bullet & \mathbf{K}^{\mathcal{L}\mathcal{L}} \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{K}^{\beta\beta} = (\alpha \mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} + \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\vartheta}^{-1} \boldsymbol{\xi}^\top$ ,  $\mathbf{K}^{\beta\alpha} = -\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\vartheta}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}^{\alpha\alpha} = \boldsymbol{\vartheta}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}^{\mathcal{L}\mathcal{L}} = \mathbf{D}^{-1}$ , com  $\mathbf{D} = nc_4$ ,

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{c_2}{\alpha} (\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*)$$

e

$$\boldsymbol{\vartheta} = nc_3 - \frac{c_2^2}{\alpha} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*)^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*).$$

Os cálculos da matriz de informação de Fisher estão apresentados com maiores detalhes no Apêndice A. Tais métodos então descritos, como subdivisão de matrizes, complemento de Schur e o método de inversão considerado são muito utilizados, principalmente na estatística, por facilitar e de certa forma diminuir o processo para encontrar a inversa de uma matriz de grande magnitude, tendo assim um menor custo analítico.

### 2.2.5 Estimativas

As EMV de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\mathcal{L}$  são obtidas com a solução do sistema não linear  $(U_\alpha, U_\beta, U_\mathcal{L}) = (0, \mathbf{0}, 0)$ . Na prática, as estimativas são obtidas através da maximização numérica da função logarítmica (2.4) por meio de um algoritmo de otimização não linear; por exemplo, o método de Newton-Raphson ou um algoritmo quase-Newton, como BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*)(PRESS et al., 2007).

Para utilização do método iterativo precisamos determinar as estimativas iniciais dos parâmetros. Para o parâmetro  $\beta$  as estimativas iniciais foram consideradas as estimativas de mínimos quadrados ordinários, obtido a partir de uma regressão das respostas transformadas  $g(z_1), g(z_2), \dots, g(z_n)$ , isto é,  $(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}^{-1}) \mathbf{X}^\top \log(z)$ , em que  $\log(z) = [\log(z_1), \dots, \log(z_k), \dots, \log(z_n)]^\top$ . A estimativa preliminar de  $\alpha$  fixando o valor de  $\mathcal{L}$ , foi obtido igualando a função escore de (2.2) ao vetor nulo, como se segue

$$U_\alpha = n [\Psi(-\alpha) - \Psi(\mathcal{L} - \alpha) - \log(\gamma)] + \sum_{k=1}^n \log(T_k) = 0$$

e

$$U_\gamma = -\frac{n\alpha}{\gamma} + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} = 0.$$

Através de  $U_\gamma$  o chute inicial de  $\alpha$  é dado por  $\alpha = \mathcal{L} \frac{S}{S - \frac{n}{\gamma}}$ , com  $S = \sum_{k=1}^n 1/T_k$ , e  $\gamma$  é obtido da equação não linear

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{T_k}{\gamma}\right) = \Psi\left(\mathcal{L} \frac{S}{S - \frac{n}{\gamma}}\right) - \Psi\left(\mathcal{L} \left(1 + \frac{S}{S - \frac{n}{\gamma}}\right)\right).$$

### 3 CORREÇÃO DE VIÉS

#### 3.1 Introdução

Uma revisão da literatura dos estimadores de máxima verossimilhança de amostras finitas ou moderadas têm sido frequentemente abordado em pesquisas estatísticas. Estes estimadores possuem propriedades assintóticas razoáveis, tais como, consistência, invariância e eficiência assintótica. Porém, uma propriedade indesejável é que eles são viesados para os verdadeiros valores dos parâmetros quando o tamanho da amostra  $n$  é pequeno. Para uma amostra de tamanho  $n$  grande, os EMV têm vieses de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$ , os quais são comumente desconsiderados quando comparado ao erro padrão de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ . Todavia, quando trabalhamos com tamanho de amostra pequeno ou mesmo moderado, esse viés pode ter magnitude expressiva quando comparado ao erro padrão. Nesse sentido, o viés de segunda ordem pode ser apreciável ou até mesmo da mesma magnitude do erro padrão, tratando-se de amostras finitas ou moderadas. Por esse motivo, fórmulas que permitem a correção do viés são extremamente importantes.

Em um modelo com parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$   $p$ -dimensional, o viés assintótico do estimador de máxima verossimilhança para o  $i$ -ésimo parâmetro de  $\boldsymbol{\theta}_i$  pode ser escrito como

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) = \frac{b_1(\boldsymbol{\theta}_i)}{n} + \frac{b_2(\boldsymbol{\theta}_i)}{n^2} + \dots, \quad (3.1)$$

em que  $b_1(\boldsymbol{\theta}_i)$ ,  $b_2(\boldsymbol{\theta}_i)$ , etc., são funções de  $\boldsymbol{\theta}_i$  e  $n$  é interpretado como o número de observações. Assim,  $B(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) = \mathcal{O}(n^{-1})$  e o termo  $b_1(\boldsymbol{\theta}_i)/n$  é chamado de viés de segunda ordem do estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

A proposta de correção de viés têm sido bastante abordada na literatura estatística. Historicamente, o primeiro a tratar do viés de segunda ordem foi Bartlett (1953), que em seu artigo apresenta uma expressão para o viés de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  para o EMV no caso uniparamétrico. Posteriormente, Haldane (1953) e Haldane e Smith (1956), forneceram expressões de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  para os primeiros quatro cumulantes em amostras aleatórias de um ou dois parâmetros desconhecidos. Shenton e Wallington (1962), desenvolveram uma expressão geral para os vieses de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  dos estimadores de momentos e de máxima verossimilhança no contexto biparamétrico. Bowman (1965), apresentou expressões para o viés do EMV de ordem até  $\mathcal{O}(n^{-2})$  e covariâncias de mesma ordem para o caso multiparamétrico. Cox e Snell (1968), obteve uma expressão geral para o viés de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  dos EMVs no caso uniparamétrico e multiparamétrico.

Nos últimos anos, tem havido grande interesse acerca de encontrar fórmulas fe-

chadas para os vieses de segunda ordem dos EMVs de modelos de regressão. Box (1971) apresentou os vieses de segunda ordem dos EMVs em modelos não-lineares em que a covariância é conhecida. Cook et al. (1986) forneceram os vieses dos EMVs em um modelo de regressão normal não-linear. Young e Bakir (1987) exibiram uma correção de viés para o modelo de regressão log-gama generalizada e mostraram que essa correção melhora as estimativas. Posteriormente, Cordeiro e McCullagh (1991) obtiveram uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMVs em modelos lineares generalizados. Expressões para os vieses de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  dos EMVs em modelos de regressão heterocedásticos são encontrados em Cordeiro (1993). Cordeiro e Vasconcellos (1997) obtiveram uma fórmula geral para calcular o viés de segunda ordem em uma classe de modelos de regressão multivariados, em seguida, Cordeiro e Vasconcellos (1999) obtêm os vieses de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  dos EMVs no modelo de regressão Von Mises. Cordeiro et al. (2000), fornecem os vieses de segunda ordem dos EMVs em forma matricial para modelos de regressão multivariados não-lineares com erro  $t$ -Student. Cordeiro et al. (2000), derivam uma fórmula geral dos vieses de segunda ordem em uma classe de modelos de regressão não-linear simétricos. Em Cribari-Neto e Vasconcellos (2002) estuda o comportamento dos EMVs dos parâmetros da distribuição beta, em amostras finitas. Uma fórmula para os vieses de segunda ordem dos EMVs em um modelo de regressão não-linear  $t$ -Student, em que o grau de liberdade é desconhecido foi dada por Vasconcellos e Silva (2005). Logo após, Ospina et al. (2006) derivaram expressões de forma fechada para os vieses de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$  em um modelo de regressão beta, tal resultado foi generalizado por Simas et al. (2010). E mais recentemente, em Silva et al. (2017) é apresentado correção de viés em modelos não lineares generalizados de séries de potência. Melo Tatiane FN e Ferrari (2018), apresentam a correção de viés para um modelo de regressão elíptica multivariado. E Medeiros et al. (2021) consideram duas estratégias diferentes de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros que indexam o modelo de regressão beta prime.

### 3.2 Correção de Cox-Snell

A fórmula geral para determinar os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança de modelos multiparamétricos, com vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$  foi desenvolvida por Cox e Snell (1968) e dada por

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}_a) = \sum_{r,s,u} \kappa^{ar} \kappa^{su} \left( \kappa_{rs,u} + \frac{1}{2} \kappa_{rsu} \right), \quad (3.2)$$

tal que,  $\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_a) = \mathbf{b}_1(\boldsymbol{\theta}_a)/n$ , o viés de segunda ordem. E os índices  $a, r, s, u$  indexam os parâmetros do modelo e  $\kappa^{ar}$  é o elemento correspondente a entrada  $(a, r)$  da inversa da matriz de informação de Fisher  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$  e os cumulantes  $\kappa_{\bullet\bullet,\bullet}$  e  $\kappa_{\bullet\bullet,\bullet}$  serão definidos na próxima seção. Para calcular o viés basta conhecer a inversa da matriz de informação de Fisher e

os cumulantes  $\kappa_{rs,u}, \kappa_{rsu}$  com relação aos parâmetros do modelo. Além disso, a expressão  $(\kappa_{rs,u} + \kappa_{rsu}/2)$  em (3.2) pode ser substituída por  $(\kappa_{rs}^{(u)} - \kappa_{rsu}/2)$ , como consequência da identidade de Bartlett  $\kappa_{rs,u} + \kappa_{rsu} - \kappa_{rs}^{(u)} = 0$ .

Então, a partir de (3.2) podemos definir um estimador corrigido  $\tilde{\theta}$  como

$$\tilde{\theta}_a = \hat{\theta}_a - \hat{B}(\hat{\theta}_a), \quad (3.3)$$

tal que  $\hat{B}(\hat{\theta}_a)$  é o viés estimado de  $\hat{\theta}$ . É possível mostrar que o viés do EMV corrigido  $\tilde{\theta}$  é

$$\mathbb{E}(\tilde{\theta}) = \theta + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

isto é, o novo estimador  $\tilde{\theta}$  tem viés de segunda ordem, o que o torna preferível em relação ao EMV não corrigido  $\hat{\theta}$  que tem viés de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$ .

A seguir, discutiremos uma das principais contribuições da pesquisa realizada nesse trabalho, a correção de Cox-Snell dos EMVs no modelo de  $\mathcal{RG}_I^0$ .

### 3.3 Correção de Cox-Snell dos EMV no modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$

O objetivo desta seção é obter expressões matriciais para os vieses de segunda ordem dos EMV do modelo da  $\mathcal{RG}_I^0$  apresentado na Seção 2.2. Para isto, utilizaremos a fórmula geral dada em (3.2) desenvolvida por Cox e Snell (1968) para determinar o viés de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1})$ .

Inicialmente, consideramos a função densidade de probabilidade(fdp) e a função de log-verossimilhança dada em (2.2) e (2.4), respectivamente; e suponhamos que seja diferencial até terceira ordem. E mais, as derivadas da função de log-verossimilhança com relação aos parâmetros desconhecidos são indicados por índices, onde  $r, s, u$  indicam os derivados em relação aos componentes de  $\beta$ ; já o  $\alpha$  é utilizado para denotar as derivadas em relação ao parâmetro  $\alpha$ . Apresentaremos a correção de viés apenas para os parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$ , considerando o parâmetro  $\mathcal{L}$  como constante, essa suposição tem amparo na prática de processamento de imagens SAR. Desse modo, podemos definir as derivadas de terceira ordem com reação a  $\alpha$  e  $\beta$  como:

$$U_{\beta_r\beta_s\beta_u} = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_u}, \quad U_{\beta_r\beta_s\alpha} = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \alpha}, \quad U_{\beta_r\alpha\alpha} = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \alpha^2}, \quad U_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \alpha^3}, \text{ etc.}$$

Usaremos também a notação introduzida por Lawley (1956) para definir os momentos dessas derivadas como sendo:

$$\kappa_{\beta_r\beta_s\beta_u} = \mathbb{E}[U_{\beta_r\beta_s\beta_u}], \quad \kappa_{\beta_r\beta_s\alpha} = \mathbb{E}[U_{\beta_r\beta_s\alpha}], \quad \kappa_{\beta_r\alpha\alpha} = \mathbb{E}[U_{\beta_r\alpha\alpha}], \quad \kappa_{\beta_r\beta_s,\alpha} = \mathbb{E}[U_{\beta_r\beta_s}U_\alpha],$$

continuadamente. Por fim, as derivadas desses momentos são denotados por:

$$\kappa_{\beta_r\beta_s}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\beta_r\beta_s}}{\partial \beta_u}, \quad \kappa_{\beta_r\beta_s}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\beta_r\beta_s}}{\partial \alpha}, \quad \kappa_{\beta_r\alpha}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\beta_r\alpha}}{\partial \beta_u}, \quad \kappa_{\beta_r\alpha}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\beta_r\alpha}}{\partial \alpha},$$

sucessivamente. Todas essas quantidades são apresentadas no Apêndice A.

Seja  $B(\hat{\theta}_a)$  o viés  $O(n^{-1})$  do EMV para  $a$ -ésima componente do vetor de parâmetros  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k, \hat{\theta}_{k+1}) = (\hat{\beta}^\top, \alpha)^\top$ . Então, da fórmula geral dada em (3.2) obtemos o viés de segunda ordem pela expressão a seguir

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}_a) = & \sum_{r,s,u} \kappa^{ar} \kappa^{su} \left\{ \kappa_{rs}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rsu} \right\} + \sum_{\alpha,s,u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{su} \left\{ \kappa_{\alpha s}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha su} \right\} \\ & + \sum_{r,\alpha,u} \kappa^{ar} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} + \sum_{r,s,\alpha} \kappa^{ar} \kappa^{s\alpha} \left\{ \kappa_{rs}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rs\alpha} \right\} \\ & \sum_{\alpha,\alpha,u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} \right\} + \sum_{\alpha,s,\alpha} \kappa^{a\alpha} \kappa^{s\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha s}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha s\alpha} \right\} \\ & + \sum_{r,\alpha,\alpha} \kappa^{ar} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} \right\} + \sum_{\alpha,\alpha,\alpha} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

E, de (2.5), notemos que as entradas com relação a  $\beta$  e  $\alpha$  são todas diferentes de zero, logo, todos os termos (3.4) devem ser considerados. Tais termos são deduzidos dos momentos e cumulantes apresentados no Apêndice A. Após alguns cálculos algébricos, expressamos o viés de ordem  $O(n^{-1})$  com relação a  $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$  na forma matricial por

$$\begin{aligned} B(\hat{\beta}) = & e_a^\top K^{\beta\beta} X^\top M_1 \delta_{\beta\beta} + e_a^\top K^{\beta\alpha} \text{tr} \left( M_2 X K^{\beta\beta} X^\top \right) + \\ & e_a^\top K^{\beta\beta} \left( X^\top M_2 X \right) K^{\beta\alpha} + e_a^\top K^{\beta\beta} \left( X^\top M_3 X \right) K^{\beta\alpha} + \\ & e_a^\top K^{\beta\alpha} \text{diagonal}(M_4) X K^{\beta\alpha} + e_a^\top K^{\beta\alpha} \text{diagonal}(M_5) X K^{\beta\alpha} + \\ & e_a^\top K^{\beta\beta} X^\top \text{diagonal}(M_5)^\top K^{\alpha\alpha} + e_a^\top K^{\beta\alpha} K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6). \end{aligned}$$

Reorganizando, temos

$$\begin{aligned} B(\hat{\beta}) = & K^{\beta\beta} X^\top \left[ M_1 \delta_{\beta\beta} + (M_2 + M_3) X K^{\beta\alpha} + \text{diagonal}(M_5)^\top K^{\alpha\alpha} \right] + \\ & K^{\beta\alpha} \left[ \text{tr} \left( M_2 X K^{\beta\beta} X^\top \right) + K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6) + [\text{diagonal}(M_4 + M_5)] X K^{\beta\alpha} \right], \end{aligned}$$

em que,  $K^{\beta\beta}$  e  $K^{\beta\alpha}$  são os vetores  $p \times p$  e  $p \times 1$ , que corresponde aos parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  da matriz de informação de Fisher, respectivamente. E  $\delta_{\beta\beta}$  é o vetor  $n \times 1$  obtido da diagonal principal da matriz  $XK^{\beta\beta}X^\top$ , e  $\text{diagonal}(\bullet)$  é o vetor linha formado com as entradas da diagonal principal de uma matriz quadrada.

Definindo  $\tilde{\delta}$  o vetor  $(n+1)$  como

$$\tilde{\delta} = \begin{bmatrix} M_1\delta_{\beta\beta} + (M_2 + M_3)X\kappa^{\beta\alpha} + \text{diagonal}(M_5)^\top \kappa^{\alpha\alpha} \\ \text{tr}(M_2XK^{\beta\beta}X^\top) + \kappa^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6) + [\text{diagonal}(M_4 + M_5)] X\kappa^{\beta\alpha} \end{bmatrix};$$

e considerando também o bloco superior  $p \times (p+1)$  da matriz  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  dado por

$$\mathbf{K}^{\beta*} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\beta\beta} & \mathbf{K}^{\beta\alpha} \end{pmatrix}.$$

O viés de ordem  $O(n^{-1})$  de  $\hat{\beta}$  pode ser expresso como

$$B(\hat{\beta}) = \mathbf{K}^{\beta*} \tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\delta}. \quad (3.5)$$

Similarmente, expressamos o viés de ordem  $O(n^{-1})$  com relação a parâmetro  $\alpha$  na forma matricial como

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) &= K^{\alpha\beta} X^\top M_1 \delta_{\beta\beta} + K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_2 X K^{\beta\beta} X^\top) + \\ &K^{\alpha\beta} (X^\top M_2 X) K^{\beta\alpha} + K^{\alpha\beta} (X^\top M_3 X) K^{\beta\alpha} + \\ &K^{\alpha\alpha} \text{diagonal}(M_4) X K^{\beta\alpha} + K^{\alpha\alpha} \text{diagonal}(M_5) X \kappa^{\beta\alpha} + \\ &K^{\alpha\beta} X^\top \text{diagonal}(M_5)^\top K^{\alpha\alpha} + K^{\alpha\alpha} K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) &= K^{\alpha\beta} X^\top \left[ M_1 \delta_{\beta\beta} + (M_2 + M_3) X K^{\beta\alpha} + \text{diagonal}(M_5)^\top K^{\alpha\alpha} \right] + \\ &K^{\alpha\alpha} \left[ \text{tr}(M_2 X K^{\beta\beta} X^\top) + K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6) + [\text{diagonal}(M_4 + M_5)] X K^{\beta\alpha} \right]. \end{aligned}$$

De modo análogo, considerando  $1 \times (p+1)$  o bloco inferior da matriz  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  dado por

$$\mathbf{K}^{\alpha*} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\alpha\beta} & \mathbf{K}^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$$

O viés de ordem  $O(n^{-1})$  de  $\hat{\alpha}$  pode ser expresso como

$$B(\hat{\alpha}) = \mathbf{K}^{\alpha*} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\boldsymbol{\delta}}. \quad (3.6)$$

Assim, de (3.5) e (3.6) concluímos que o viés de ordem  $O(n^{-1})$  do EMV do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \alpha)^\top$  do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$ , tem a forma

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\boldsymbol{\delta}} = (\widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{\mathbf{X}})^{-1} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \quad (3.7)$$

Definindo  $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = \widetilde{\mathbf{M}}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{\delta}}$  a expressão (3.7) torna-se

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{\mathbf{X}})^{-1} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3.8)$$

Portanto, a componente  $B(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  pode ser estimado através de uma regressão linear ponderada. A partir da expressão (3.7), definimos um estimador de máxima verossimilhança corrigido  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  da seguinte maneira:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

em que  $\hat{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  denota o EMV de  $B(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ , isto é, os parâmetros desconhecidos são substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança. Este é o procedimento da correção de viés. E espera-se que o estimador corrigido  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  apresente melhores propriedades em amostras finitas quando comparado ao estimador usual  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

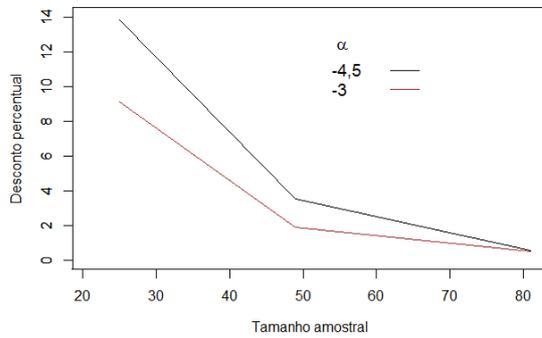
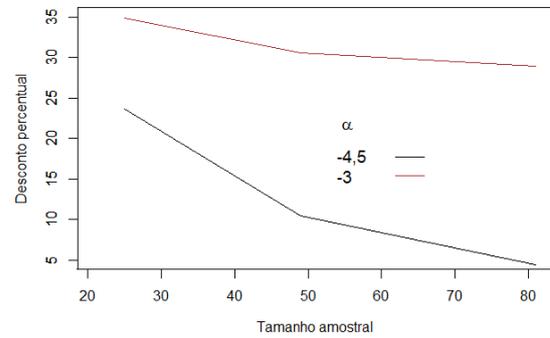
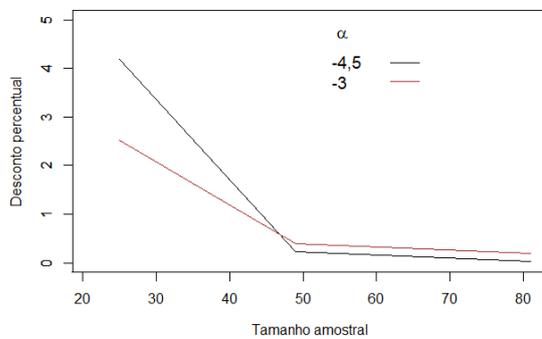
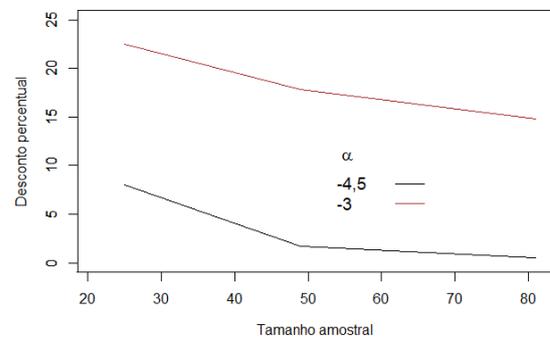
## 4 RESULTADOS E APLICAÇÕES

### 4.1 Estudo com dados sintéticos

O estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  dado nas Equações (2.5), (2.6) e (2.7) não tem forma fechada, portanto, métodos numéricos iterativos são necessários. Em nosso estudo, consideramos o método quase-Newton, conhecido como BFGS (PRESS et al., 2007).

Inicialmente, realiza-se um estudo de simulação em que os dados são gerados a partir da distribuição  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, e^{\beta_0 + \beta_1 x_1}, \mathcal{L})$ , com tamanhos de amostra  $n = \{25, 49, 81\}$ . E como cenários, escolhemos  $\alpha = \{-4, 5; -3\}$  (cenários frequentemente associados a áreas urbanas e florestas densas),  $\beta_0 = \beta_1 = \{0, 5; 1, 1\}$  e  $\mathcal{L} = \{4, 8\}$  (número de *looks* utilizados com frequências em imagens SAR). Dentro do estudo, adotamos algumas suposições necessárias para a realização da simulação, entre elas  $\mu = 1$ , este parâmetro pode ser entendido como uma quantidade conhecida dada pela média amostral das intensidades observadas e Freitas et al. (2005) adotaram  $\mu = 1$  para cenários SAR polarimétricos. Utilizamos 10.000 replicações de Monte Carlo e, em cada uma, computamos para  $\theta$ , a média das estimativas de MV, viés, viés relativo, variância e o erro quadrático médio (EQM). E seguindo essas suposições, computamos também a média do EMV, viés, viés relativo, variância e o erro quadrático médio (EQM) para a versão corrigida segundo Cox-Snell,  $\tilde{\theta}$ . Além das medidas já citadas, para título de comparação, foi computado os critérios de informação: Critério de informação de Akaike (AIC) e sua versão corrigida AICc, e critério de informação bayesiano (BIC) do EMV,  $\hat{\theta}$ , e sua versão corrigida segundo Cox-Snell,  $\tilde{\theta}$ .

Diante de todas as considerações e tendo em vista que o parâmetro  $\alpha \in (-\infty, -2)$ , muitas vezes a EMV em nossa análise excede o previsto. Assim, para melhorar a EMV do parâmetro supomos uma restrição para  $\alpha$ . Foi considerado o valor absoluto de  $(\hat{\alpha} - \alpha) < -3\alpha$ . Tal restrição foi contabilizada em cada simulação como  $[\sum \text{contagem}/10.000] \%$ , tal que *contagem* varia de 1 a 10.000. Como resultado, temos o desconto percentual para cada tamanho amostral. Ademais, consideramos apenas os resultados em que o desconto percentual foi inferior a 35% e, expressamos graficamente na Figura 5.

Figura 5 – Desconto percentual do estudo de simulação sob a restrição de  $\alpha$ .(a)  $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$  e  $\mathcal{L} = 4$ .(b)  $\beta_0 = \beta_1 = 1,1$  e  $\mathcal{L} = 4$ .(c)  $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$  e  $\mathcal{L} = 8$ .(d)  $\beta_0 = \beta_1 = 1,1$  e  $\mathcal{L} = 8$ .

Fonte: Autor(2023).

As Tabelas 1 a 3 a seguir apresentam o desempenho do EMV para suas versões não-corrigida,  $\hat{\theta}$  e corrigida via Cox-Snell,  $\tilde{\theta}$ . Consta nos resultados o viés, a variância e a raiz do erro quadrático médio. A Tabela 1 apresenta o desempenho da simulação para o parâmetro  $\beta_0 = 1,1$  quando  $\alpha = \{-4,5; -3\}$  e  $\mathcal{L} = \{4,8\}$ . A Tabela 2 apresenta o desempenho da simulação para  $\beta_1 = 1,1$  com as mesmas condições para  $\alpha$  e  $\mathcal{L}$  e, na Tabela 3, temos o desempenho de  $\alpha = \{-4,5; -3\}$  quando  $\beta_0 = \beta_1 = 1,1$  e  $\mathcal{L} = \{4,8\}$ . Em cada tabela, observamos que os EMV em sua versão corrigida,  $\tilde{\theta}$ , apresenta vieses menores comparado aos EMV sem correção,  $\hat{\theta}$ , em cada cenário e para todos os tamanhos amostrais considerados. Disto, evidencia-se a razoabilidade da correção de viés proposta. Adicionalmente, no Apêndice B, apresentamos os resultados do estudo para  $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$  sobre as mesmas especificações de  $\alpha$  e  $\mathcal{L}$ .

Analisando os resultados da raiz do erro quadrático médio, podemos notar que o erro para amostra  $n = 25$  é sempre menor para a versão corrigida  $\tilde{\theta}$  comparado a sua versão não corrigida  $\hat{\theta}$ . Observamos que para o intercepto  $\beta_0$  para os tamanhos amostrais  $n = 49$  e  $81$  o erro se iguala. Assim como, para o parâmetro de inclinação  $\beta_1$ . E para o parâmetro de incômodo  $\alpha$  o erro do EMV na sua versão corrigida é sempre menor comparado a versão não corrigida. De forma resumida, o erro quadrático médio é significativo quando a amostra é de tamanho pequeno ou moderado e, decresce à medida que o tamanho da

amostra aumenta. E comparando pelo número de *looks* observamos que para o parâmetro  $\alpha$  as estimativas são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro em  $\mathcal{L} = 8$ . Isso se justifica na prática de processamento de imagem SAR, pois este caso endereça imagens menos ruidosas.

Nas Figuras 6 e 10 no Apêndice B, expomos o comportamento do viés relativo absoluto de cada cenário. E, por fim, as Tabelas 4 e 11 no Apêndice B, apresentam os resultados da simulação das estatísticas dos critérios de informação para cada cenário. Podemos notar também que a versão corrigida de Cox-Snell apresenta um resultado melhor para os critérios comparado a versão não corrigida do EMV em cada cenário, principalmente, para a amostra de tamanho  $n = 25$ . E à medida que aumenta a amostra e o número de *looks* alguns resultados para a versão corrigida e não corrigida são iguais.

Tabela 1 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas para  $\beta_0 = 1, 1$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	$\hat{\beta}_0$	1,09448	-0,00552	0,08726	0,29545	1,07929	-0,02071	0,07797	0,280	
		$\tilde{\beta}_0$	1,09464	-0,00536	0,08726	0,29545	1,07951	-0,02049	0,07798	0,280
	25	$\hat{\beta}_0$	1,09158	-0,00842	0,04409	0,21014	1,08777	-0,01223	0,03685	0,19235
		$\tilde{\beta}_0$	1,09165	-0,00835	0,04408	0,21012	1,08789	-0,01211	0,03685	0,19235
	49	$\hat{\beta}_0$	1,09391	-0,00609	0,02591	0,16108	1,09045	-0,00955	0,02099	0,14519
		$\tilde{\beta}_0$	1,09394	-0,00606	0,02591	0,16108	1,09053	-0,00947	0,02099	0,14519
$\alpha = -4,5$	$\hat{\beta}_0$	1,1114	0,0114	0,07201	0,26859	1,08721	-0,01279	0,06057	0,24644	
		$\tilde{\beta}_0$	1,11125	0,01125	0,07201	0,26858	1,0874	-0,0126	0,06058	0,24645
	25	$\hat{\beta}_0$	1,09904	-0,00096	0,03464	0,18612	1,09137	-0,00863	0,02793	0,16735
		$\tilde{\beta}_0$	1,09909	-0,00091	0,03464	0,18612	1,09146	-0,00854	0,02793	0,16734
	49	$\hat{\beta}_0$	1,09608	-0,00392	0,02012	0,1419	1,09561	-0,00439	0,01649	0,12849
		$\tilde{\beta}_0$	1,0961	-0,0039	0,02012	0,1419	1,09566	-0,00434	0,01649	0,12849
81	$\hat{\beta}_0$	1,09608	-0,00392	0,02012	0,1419	1,09561	-0,00439	0,01649	0,12849	
	$\tilde{\beta}_0$	1,0961	-0,0039	0,02012	0,1419	1,09566	-0,00434	0,01649	0,12849	

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).

Fonte: Autor(2023).

Tabela 2 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas para  $\beta_1 = 1, 1$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	$\hat{\beta}_1$	1,07895	-0,02105	0,05805	0,24185	1,09075	-0,00925	0,05172	0,22761	
		$\tilde{\beta}_1$	1,07897	-0,02103	0,05804	0,24183	1,09084	-0,00916	0,05172	0,2276
	25	$\hat{\beta}_1$	1,08651	-0,01349	0,02337	0,15347	1,09824	-0,00176	0,01999	0,1414
		$\tilde{\beta}_1$	1,08652	-0,01348	0,02337	0,15347	1,0983	-0,0017	0,01999	0,1414
	49	$\hat{\beta}_1$	1,09109	-0,00891	0,01174	0,10872	1,09947	-0,00053	0,0096	0,09798
		$\tilde{\beta}_1$	1,0911	-0,0089	0,01174	0,10872	1,09952	-0,00048	0,0096	0,09798
$\alpha = -4,5$	$\hat{\beta}_1$	1,08222	-0,01778	0,05441	0,23394	1,10523	0,00523	0,0461	0,21477	
		$\tilde{\beta}_1$	1,08225	-0,01775	0,05441	0,23393	1,10519	0,00519	0,0461	0,21477
	25	$\hat{\beta}_1$	1,09482	-0,00518	0,02156	0,14692	1,10119	0,00119	0,01899	0,13781
		$\tilde{\beta}_1$	1,09483	-0,00517	0,02156	0,14692	1,10116	0,00116	0,01899	0,13781
	49	$\hat{\beta}_1$	1,09777	-0,00223	0,01157	0,10759	1,10084	0,00084	0,01015	0,10075
		$\tilde{\beta}_1$	1,09778	-0,00222	0,01157	0,10759	1,10082	0,00082	0,01015	0,10075
81	$\hat{\beta}_1$	1,09777	-0,00223	0,01157	0,10759	1,10084	0,00084	0,01015	0,10075	
	$\tilde{\beta}_1$	1,09778	-0,00222	0,01157	0,10759	1,10082	0,00082	0,01015	0,10075	

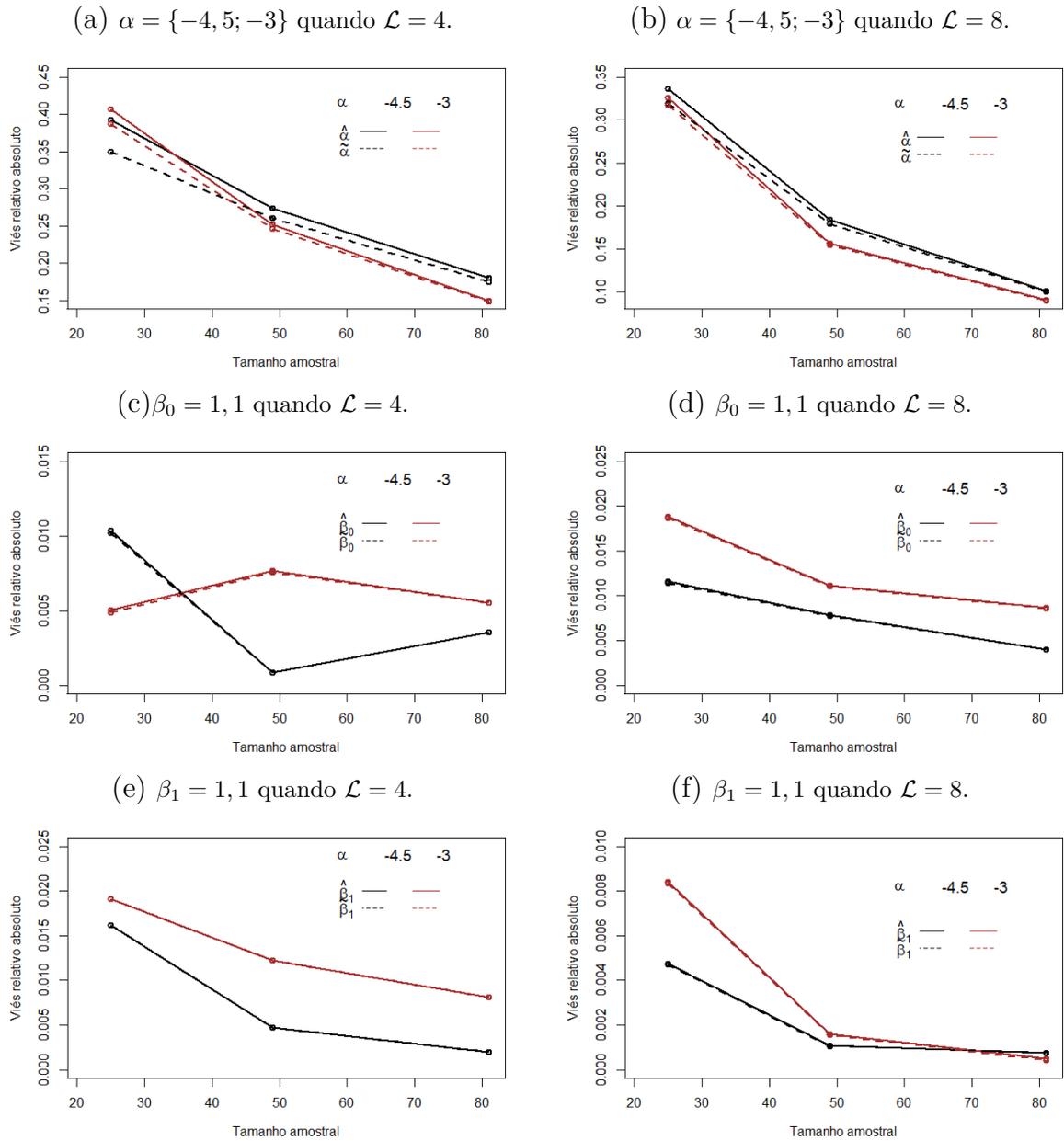
$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).  
Fonte: Autor(2023).

Tabela 3 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas quando  $\beta_0 = \beta_1 = 1, 1$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	$\hat{\alpha}$	-4,22076	-1,22076	4,2165	2,38888	-3,97842	-0,97842	2,96437	1,98032	
		$\tilde{\alpha}$	-4,16089	-1,16089	3,84831	2,27947	-3,95365	-0,95365	2,84515	1,93768
	25	$\hat{\alpha}$	-3,75493	-0,75493	2,25406	1,68047	-3,46885	-0,46885	1,11986	1,15745
		$\tilde{\alpha}$	-3,740	-0,740	2,17456	1,6499	-3,46364	-0,46364	1,10519	1,14898
	49	$\hat{\alpha}$	-3,44805	-0,44805	1,05956	1,12264	-3,27026	-0,27026	0,53397	0,77911
		$\tilde{\alpha}$	-3,44404	-0,44404	1,0448	1,11444	-3,26861	-0,26861	0,5315	0,77695
$\alpha = -4,5$	$\hat{\alpha}$	-6,26575	-1,76575	11,81462	3,86426	-6,01522	-1,51522	8,7093	3,31741	
		$\tilde{\alpha}$	-6,07298	-1,57298	9,94211	3,52369	-5,93822	-1,43822	8,11897	3,19178
	25	$\hat{\alpha}$	-5,73344	-1,23344	7,36328	2,98071	-5,3263	-0,8263	3,96656	2,15623
		$\tilde{\alpha}$	-5,67039	-1,17039	6,81947	2,86169	-5,30481	-0,80481	3,85404	2,12173
	49	$\hat{\alpha}$	-5,31015	-0,81015	3,9615	2,14892	-4,95584	-0,45584	1,76988	1,4063
		$\tilde{\alpha}$	-5,28791	-0,78791	3,81765	2,10676	-4,94844	-0,44844	1,74855	1,3963
81	$\hat{\alpha}$	-5,31015	-0,81015	3,9615	2,14892	-4,95584	-0,45584	1,76988	1,4063	
	$\tilde{\alpha}$	-5,28791	-0,78791	3,81765	2,10676	-4,94844	-0,44844	1,74855	1,3963	

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).  
Fonte: Autor(2023).

Figura 6 – Média dos resultados da simulação de Monte Carlo do viés relativo absoluto do EMV,  $\hat{\theta}$  e sua versão corrigida,  $\tilde{\theta}$ .



Fonte: Autor(2023).

Tabela 4 – Medidas de informação para dados SAR sintéticos quando  $\beta_0 = \beta_1 = 1, 1$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$			$\mathcal{L} = 8$		
		AIC	CAIC	BIC	AIC	CAIC	BIC
$\alpha = -3$	$\hat{\theta}$	-136,7225	-134,7225	-131,847	-134,1729	-132,1729	-129,2974
	$\tilde{\theta}$	-136,723	-134,723	-131,8475	-134,1731	-132,1731	-129,2976
	$\hat{\theta}$	-280,4538	-279,5447	-272,8865	-276,9827	-276,0736	-269,4154
	$\tilde{\theta}$	-280,4539	-279,5448	-272,8866	-276,9828	-276,0737	-269,4155
	$\hat{\theta}$	-473,7003	-473,1739	-464,1225	-467,8884	-467,3621	-458,3106
	$\tilde{\theta}$	-473,7003	-473,174	-464,1225	-467,8884	-467,3621	-458,3106
$\alpha = -4,5$	$\hat{\theta}$	-140,2655	-138,2655	-135,39	-135,4811	-133,4811	-130,6056
	$\tilde{\theta}$	-140,2667	-138,2667	-135,3912	-135,4816	-133,4816	-130,6061
	$\hat{\theta}$	-285,4175	-284,5084	-277,8502	-276,1806	-275,2715	-268,6133
	$\tilde{\theta}$	-285,4179	-284,5089	-277,8507	-276,1808	-275,2717	-268,6135
	$\hat{\theta}$	-479,5975	-479,0711	-470,0197	-464,1179	-463,5916	-454,5401
	$\tilde{\theta}$	-479,5976	-479,0713	-470,0198	-464,1179	-463,5916	-454,5401

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).

Fonte: Autor(2023).

Observa-se nas Tabelas 1, 2 e 3 como também nas Figuras 6 e 10 que o viés e o viés relativo é mais significativo para o parâmetro  $\alpha$  enquanto os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  apresentam resultados bem próximos para todos os tamanhos de amostras. Além disso, os cenários que apresentam melhores desempenhos são quando  $n = 25$ .

Segue-se uma conclusão deste primeiro estudo numérico. Como mencionado, os vieses são substanciais em métodos que requerem menores tamanhos amostrais. Neste sentido, os estimadores corrigidos, diga-se  $\tilde{\beta}_0$ ,  $\tilde{\beta}_1$  e  $\tilde{\alpha}$ , destacados neste estudo, possuem melhor desempenho que os estimadores não corrigidos. Adicionalmente, como esperado, os EMVs corrigidos e não corrigidos são assintoticamente semelhantes. Portanto, a proposta de corrigir o viés fornece estimadores melhorados.

## 4.2 Aplicação a dados reais de imagens SAR

Nesta seção, aplicamos o modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  para o processamento de dados reais de imagens SAR e comparamos os ajustes do modelo com a correção de Cox-Snell apresentada na Seção 3.3. Para nosso estudo, consideramos uma amostra de tamanho 49 com dados extraídos de áreas urbanas das regiões da Baía de São Francisco (EUA). Descrevemos intensidades devido aos canais de polarização  $Z_{HH}$  e  $Z_{VV}$  em termos de intensidades do canal  $Z_{HV}$ . Formamos dois modelos de regressão linear simples sob as funções de ligação:

$$\mu_{HH} = \mathbb{E}(Z_{HH} | Z_{HV}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 Z_{HV})$$

$$\mu_{VV} = \mathbb{E}(Z_{VV} | Z_{HV}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 Z_{HV})$$

A seguir, pretendemos descrever as intensidades SAR obtidas por o sensor AIRSAR (LEE; POTTIER, 2017) de cenas das regiões da Baía de São Francisco (EUA). Para este estudo, o modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  está equipado pela seguinte função de ligação:

$$\log(\mu_k) = \beta_0 + \beta_1 x_k,$$

em que a variável resposta é  $Z_k \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \mu_k(-\alpha - 1))$  e a rugosidade  $\alpha$  é um parâmetro incômodo. Para quantificar o desempenho dos ajustes considerados, usamos as medidas: Valor absoluto do erro de predição (VAEP) e a Raiz quadrada do erro quadrático médio de predição (RQEMP) dados por:

$$\text{VAEP} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Z_k - \hat{Z}_k| \quad \text{e} \quad \text{RQEMP} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Z_k - \hat{Z}_k)^2},$$

respectivamente, ver Tabela 5. As EMV para os parâmetros envolvidos são apresentados na Tabela 6. Os modelos ajustados são dados por

$$Z_{HH} \sim Z_{HV} : \begin{cases} \hat{\mu}_{HH,k} = \exp(-3.4371 + 1.3908 Z_{HV,k}) \\ \tilde{\mu}_{HH,k} = \exp(-3.4311 + 1.3884 Z_{HV,k}), \end{cases}$$

$$Z_{VV} \sim Z_{HV} : \begin{cases} \hat{\mu}_{VV,k} = \exp(-3.4851 + 2.2811 Z_{HV,k}) \\ \tilde{\mu}_{VV,k} = \exp(-3.4790 + 2.2772 Z_{HV,k}). \end{cases}$$

Além disso, foram quantificadas as medidas de critérios de informação: critério de informação de Akaike (AIC) e sua versão corrigida AICc, e critério de informação bayesiano (BIC) e o modelo com a correção proposta apresenta o resultado mais aceitável como mostra a Tabela 7.

Tabela 5 – Medidas estatísticas para o modelo  $\mathcal{G}_I^0$  e o proposto com a correção de Cox-Snell com base em dados reais.

Modelo	$Z_{HH} \sim Z_{HV}$		
	VAEP	QEMP	$\sqrt{QEMP}$
$\mathcal{G}_I^0$	0,0176	0,7043	0,0212
Cox-Snell	0,0176	0,6999	0,0212

Modelo	$Z_{VV} \sim Z_{HV}$		
	VAEP	QEMP	$\sqrt{QEMP}$
$\mathcal{G}_I^0$	0,0181	0,7367	0,0226
Cox-Snell	0,0181	0,7312	0,0226

Fonte: Autor(2023).

Tabela 6 – Estimativas dos parâmetros para dados reais de imagem SAR.

Parâmetro	$Z_{HH} \sim Z_{HV}$		$Z_{VV} \sim Z_{HV}$	
	EMV	COX-SNELL	EMV	COX-SNELL
$\alpha$	-7,0117	-5,6775	-6,8014	-5,4673
$\beta_0$	-3,4371	-3,4311	-3,4851	-3,4790
$\beta_1$	1,3908	1,3884	2,2811	2,2772

Fonte: Autor(2023).

Tabela 7 – Medidas de informação para modelo de imagem SAR com base em dados reais.

Modelo	$Z_{HH} \sim Z_{HV}$		
	AIC	CAIC	BIC
$\mathcal{G}_I^0$	-232,9854	-232,4520	-227,3099
Cox-Snell	-233,6369	-233,1035	-227,9614

Modelo	$Z_{VV} \sim Z_{HV}$		
	AIC	CAIC	BIC
$\mathcal{G}_I^0$	-226,9800	-226,4466	-221,3045
Cox-Snell	-228,3462	-227,8129	-222,6707

Fonte: Autor(2023).

Assim como no estudo de simulação, os resultados obtidos para a versão corrigida apresentam melhores desempenhos comparado a versão não corrigida para dados SAR reais. Na Tabela 5, observemos que o modelo proposto sob a correção, apresenta melhores desempenhos em relação a medida  $QEMP$ . No que diz respeito as medidas de informação, ver Tabela 7, o modelo com a correção apresenta melhores resultados em todos os critérios considerados comparado ao modelo de  $R\mathcal{G}_I^0$  para  $Z_{HH} \sim Z_{HV}$  e  $Z_{VV} \sim Z_{HV}$ . Portanto, os resultados mostram que para dados reais de intensidades SAR a correção de viés produz estimativas melhoradas.

Por fim, uma análise baseada em resíduos. A análise residual geralmente é feita em termos de resíduos comuns, variantes padronizadas ou resíduo *deviance*. Neste caso, Vasconcelos (2018) deduziu o  $k$ -ésimo resíduo padronizado como:

$$r_k = \frac{Z_k - \hat{\mu}_k}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(Z_k)}},$$

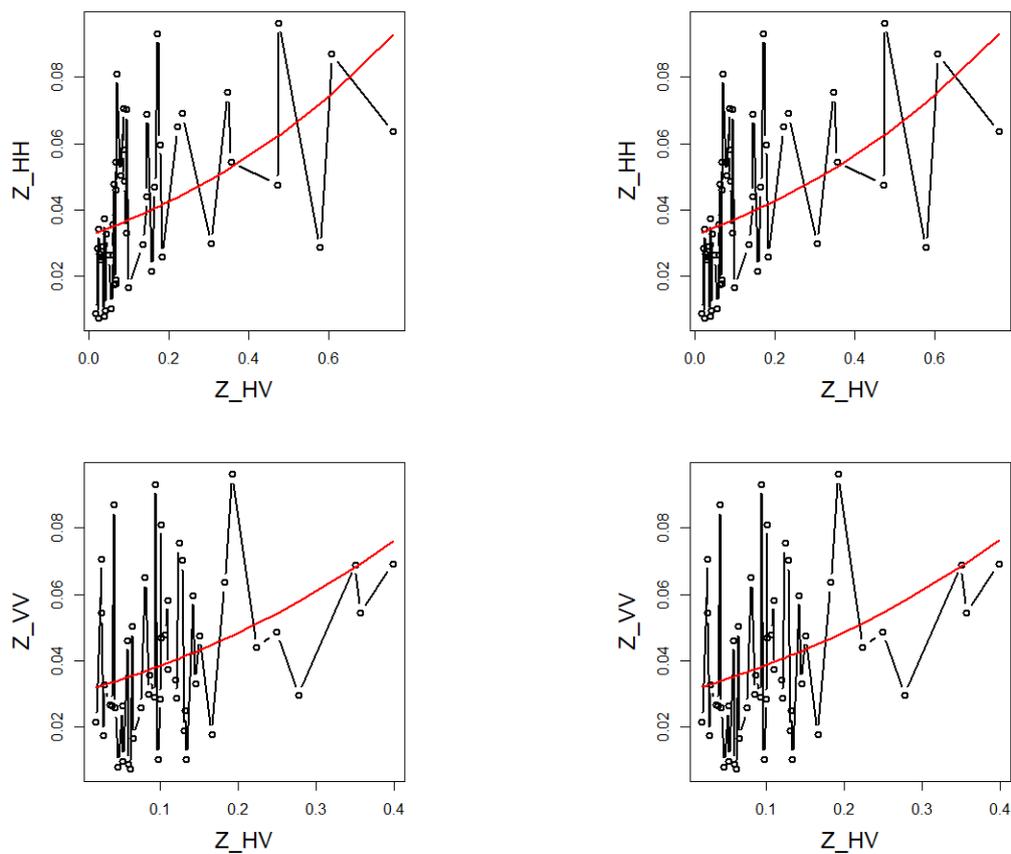
em que  $\hat{\mu}_k = g^{-1}(x_k^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})$  e

$$\text{Var}(Z_k) = \hat{\mu}_k^2 \left[ \left( \frac{\hat{\alpha} + 1}{\hat{\alpha} + 2} \right) \frac{\mathcal{L} + 1}{\mathcal{L}} - 1 \right].$$

Quando a distribuição dos resíduos não é conhecida, plotagens com envelopes simulados são uma ferramenta de diagnóstico muito utilizada (ATKINSON, 1986). O principal objetivo é tornar o gráfico o melhor possível e, os envelopes simulados podem ser usados para decidir se os resíduos observados são consistentes com o modelo ajustado.

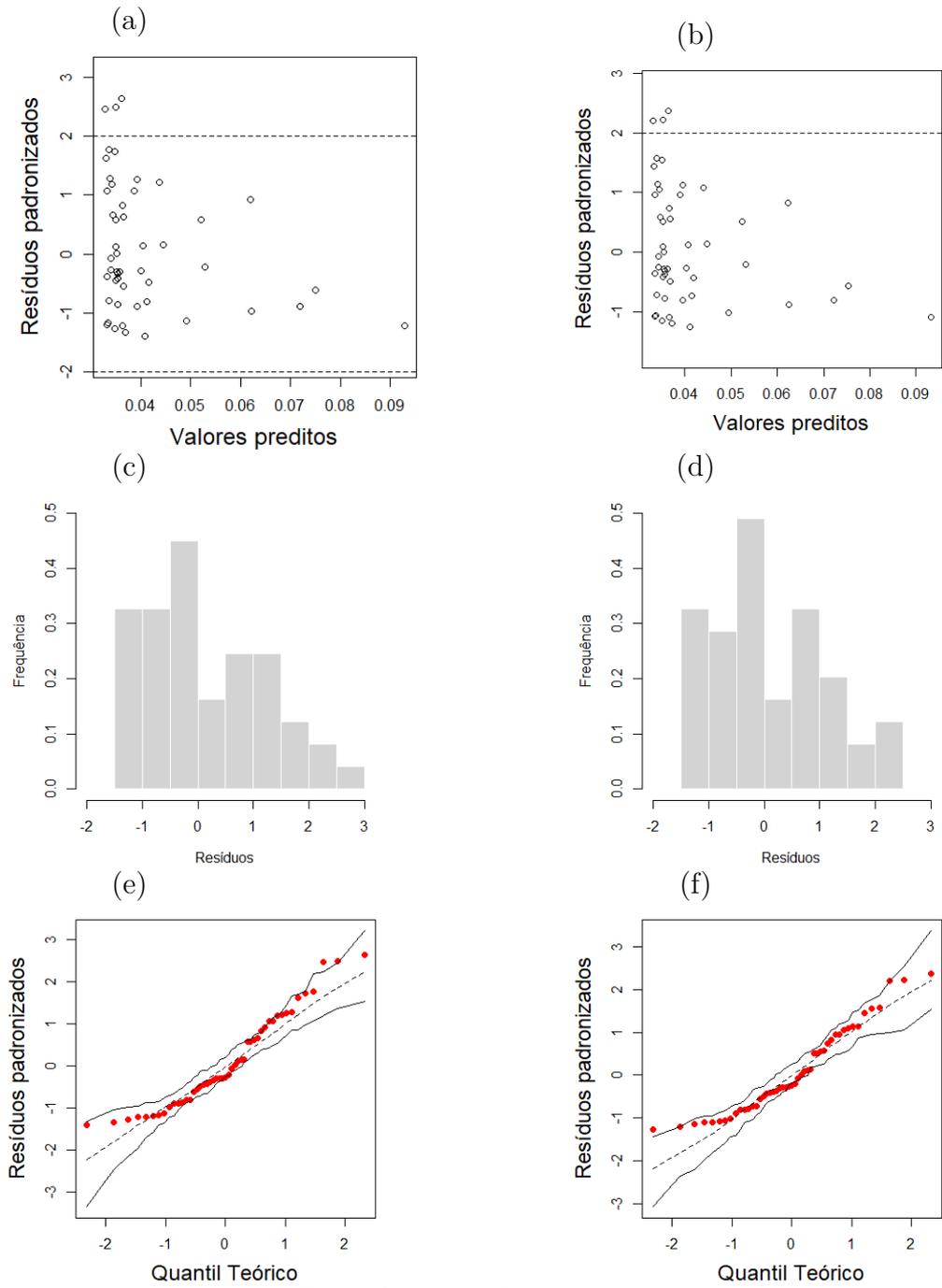
As Figuras 8 e 9, apresentam os gráficos: resíduos padronizados versus previstos, histograma dos resíduos e o gráfico Q-Q normal de resíduos de desvio absoluto com uma simulação envelope, para o modelo usual e o modelo proposto com a correção de viés. E, na Figura 7 temos os gráficos ajustados para a versão não-corrigida e corrigida do modelo. E ambos têm indicativos de que o modelo proposto com a correção de viés, seja útil no processamento de imagens.

Figura 7 – Gráfico ajustado dos dados sob as intensidades  $Z_{HH} \sim Z_{HV}$  e  $Z_{VV} \sim Z_{HV}$  (à esquerda os gráficos são do modelo usual e os da banda direita são do modelo corrigido).



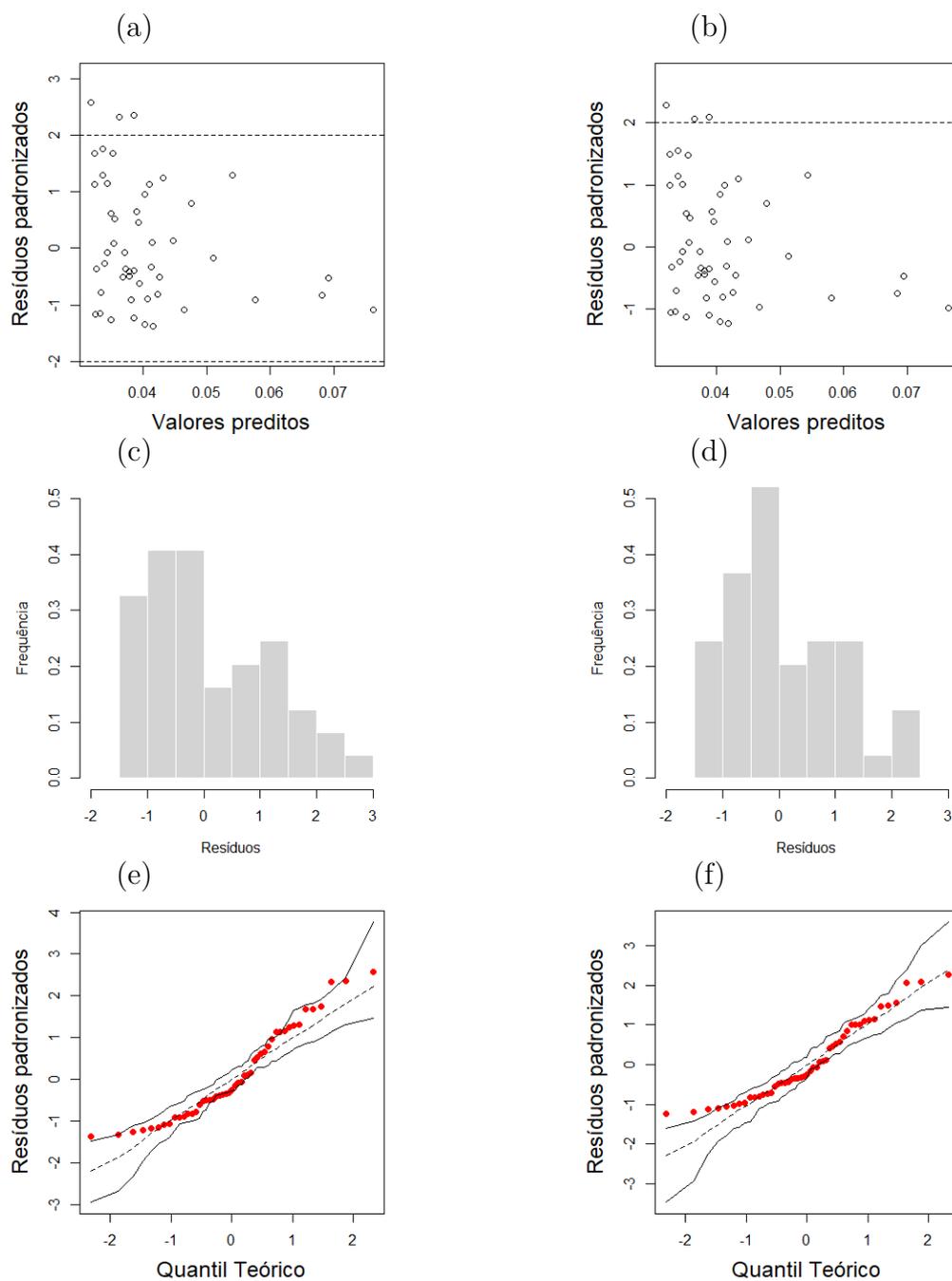
Fonte: Autor(2023).

Figura 8 – Gráficos de diagnóstico para dados de imagens SAR do modelo  $Z_{HH} \sim Z_{HV}$  (painéis à esquerda os gráficos são do modelo usual e os gráficos da banda direita são do modelo corrigido).



Fonte: Autor(2023).

Figura 9 – Gráficos de diagnóstico para dados de imagens SAR do modelo  $Z_{VV} \sim Z_{HV}$  (painéis à esquerda os gráficos são do modelo usual e os gráficos da banda direita são do modelo corrigido)



Fonte: Autor(2023).

Em suma, os resultados então apresentados nesta seção evidencia que o estimador corrigido apresenta melhores propriedades ao lidar com atributos extraídos de imagens SAR. Assim como, o ajuste do modelo com base nos resíduos é mais significativo para o modelo na versão corrigida. De modo geral, a proposta de correção se torna significativa para o pre-processamento de dados SAR.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma geral, esta dissertação revisita o proposto em Vasconcelos (2018), no qual se levanta evidências de que o modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$  é razoável para descrever intensidades SAR. A partir dessa abordagem de descrever intensidades pelo modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$ , propô-se um estimador corrigido para os parâmetros do modelo.

No Capítulo 2, propomos uma nova abordagem para derivar a inversa da matriz de informação de Fisher a fim de diminuir a complexidade e, conseqüentemente, reduzir o tempo de processamento de cálculos matriciais. No capítulo 3, derivamos uma expressão em forma matricial para o viés de segunda ordem de (COX; SNELL, 1968) para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$ . Em particular, estimadores melhorados para a média de retorno das intensidades SAR foram obtidos. Mostramos que a expressão para tal viés pode ainda ser expressa como o vetor de coeficientes estimados em uma regressão linear ponderada, facilitando assim os cálculos.

Além dessas contribuições, no Capítulo 4 estudos de simulação foram feitos com a finalidade de verificar o efeito da correção de viés no modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$ , dos quais podemos tirar as seguintes conclusões; de modo geral, os resultados das simulações de Monte Carlo para a correção de viés mostraram que, entre os estimadores em estudo, o estimador de máxima verossimilhança corrigido via Cox-Snell é o mais eficaz, em termos do viés, viés relativo, e raiz do erro quadrático médio para os EMV. Ainda, utilizando como figuras de mérito os critérios de informação, obtivemos melhores desempenhos para a versão corrigida comparada a não corrigida. Em particular, percebe-se que para os parâmetros de regressão as estimativas produziram pouca melhoria, enquanto, que para o parâmetro  $\alpha$ , as estimativas são bastante significativas. Vale-se ressaltar que o parâmetro  $\alpha$  é muito importante para o processamento de imagens SAR visto que ele tem uma relação direta com o tipo de terreno sob processamento.

E, na aplicação em dados reais consideramos como intensidades SAR, a imagem AIRSAR da Baía de São Francisco (EUA), devido aos canais de polarização  $Z_{HH}$  e  $Z_{VV}$  em termos de intensidades do canal  $Z_{HV}$ . Como medidas de comparação, foi considerado o Valor absoluto do erro de predição (VAEP) e a Raiz quadrada do erro quadrático médio de predição (RQEMP), além das medidas de informação AIC, CAIC e BIC. E, também para complementar a análise da aplicação de imagens SAR, consideramos o estudo de diagnóstico do modelo. Podemos observar que em termos dessas medidas, o modelo com a estimativa melhorada apresenta melhores resultados.

Em suma, concluímos que estimadores obtidos por meio da correção de viés podem ser indicados como uma alternativa eficiente para se estimar os parâmetros do modelo

de regressão  $\beta_0, \beta_1$  e  $\alpha$  da distribuição  $\mathcal{G}_I^0$ . Estimativas menos viesadas foram obtidas, principalmente em pequenos tamanhos de amostra, tornando as expressões de viés como quantidades importantes no nível de pré-processamento de imagens.

Como trabalhos futuros, tem-se outras frentes de atuação: (i) correções por computação intensiva (tais como bootstrap paramétrico e não paramétrico); (ii) estimação intervalar: ICA (intervalo de confiança assintótico), ICBt, (intervalo de confiança bootstrap) e ICP (intervalo de confiança bootstrap percentil); (iii) correções de David-Firth (FIRTH, 1993) e baseada em verossimilhança perfilada modificada (BARNDORFF-NIELSEN, 1994) e (SEVERINI, 2000); (iv) estimação robusta e (v) estimação bayesiana.

## REFERÊNCIAS

- ALLENDE, H.; FRERY, A. C.; GALBIATI, J.; PIZARRO, L. M-estimators with asymmetric influence functions: the distribution case. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 76, n. 11, p. 941–956, 2006.
- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. Arma process for speckled data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2021.
- ANDERSON, T. W.; ANDERSON, T. *An introduction to multivariate statistical analysis*. [S.l.: s.n.], 1958. v. 2.
- ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra linear contemporânea*. [S.l.]: Bookman Editora, 2006.
- ATKINSON, A. Masking unmasked. *Biometrika*, v. 73, n. 3, p. 533–541, 1986.
- BANACHIEWICZ, T. Zur berechnung der determinanten, wie auch der inversen, und zur daruaf basierten auflsung der systeme linearer gleichungen. *Acta Astronomica*, v. 3, p. 41, 1937.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Adjusted versions of profile likelihood and directed likelihood, and extended likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 56, n. 1, p. 125–140, 1994.
- BARTLETT, M. Approximate confidence intervals. *Biometrika*, v. 40, n. 1/2, p. 12–19, 1953.
- BICKEL, P. J.; DOKSUM, K. A. *Mathematical statistics: basic ideas and selected topics*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2015.
- BOWMAN, K. O. *Biases and covariances of maximum likelihood estimators*. [S.l.]: Union Carbide Corporation, Nuclear Division, 1965.
- BOX, M. Bias in nonlinear estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 33, n. 2, p. 171–190, 1971.
- BUSTOS, O. H.; LUCINI, M.; FRERY, A. C. M-estimators of roughness and scale for-modelled sar imagery. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2002, n. 1, p. 1–10, 2002.
- CHAMBERS, J. M. *Software for data analysis: programming with R*. [S.l.: s.n.], 2008. v. 2.
- CHAN, D.; CASSETTI, J.; FRERY, A. C. Texture parameter estimation in monopolarized sar imagery, for the single look case, using extreme value theory. p. 3266–3269, 2016.
- CHAVES, J. M.; SANO, E. E.; GUIMARÃES, E. M.; SILVA, A. B.; MENESES, P. R. Sinergismo entre dados ópticos e de radar para o estudo geológico na região de bezerra-cabeceiras, goiás. *Revista Brasileira de Geociências*, v. 33, p. 137–146, 2003.

- COOK, R. D.; TSAI, C.-L.; WEI, B. Bias in nonlinear regression. *Biometrika*, v. 73, n. 3, p. 615–623, 1986.
- CORDEIRO, G. M. Bartlett corrections and bias correction for two heteroscedastic regression models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 22, n. 1, p. 169–188, 1993.
- CORDEIRO, G. M.; FERRARI, S. L.; URIBE-OPAZO, M. A.; VASCONCELLOS, K. L. Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics & probability letters*, v. 46, n. 4, p. 317–328, 2000.
- CORDEIRO, G. M.; MCCULLAGH, P. Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 53, n. 3, p. 629–643, 1991.
- CORDEIRO, G. M.; VASCONCELLOS, K. L. Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics & probability letters*, v. 35, n. 2, p. 155–164, 1997.
- CORDEIRO, G. M.; VASCONCELLOS, K. L. Theory & methods: Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von mises regression models. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, n. 2, p. 189–198, 1999.
- COX, D. R.; SNELL, E. J. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 30, n. 2, p. 248–265, 1968.
- CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 72, n. 2, p. 107–118, 2002.
- FAN, J.; ZHANG, F.; ZHAO, D.; WANG, J. Oil spill monitoring based on sar remote sensing imagery. *Aquatic Procedia, Elsevier*, v. 3, p. 112–118, 2015.
- FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of applied statistics*, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004.
- FIRTH, D. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, v. 80, n. 1, p. 27–38, 1993.
- FREEMAN, M. *Documnetário: A História de Deus*. 2016. [Http://www.starplus.com/pt-br](http://www.starplus.com/pt-br), acesso em: 03 de jan.2023.
- FREITAS, C. C.; FRERY, A. C.; CORREIA, A. H. The polarimetric G distribution for sar data analysis. *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, v. 16, n. 1, p. 13–31, 2005.
- FRERY, A.; JACOBO-BERLLES, J.; BUSTOS, H.; MEJAIL, M. Parametric roughness estimation in amplitude sar images under the multiplicative model. *Revista de teledetección: Revista de la Asociación Española de Teledetección*, n. 13, p. 4, 2000.
- FRERY, A.; SANT'ANNA, S.; MASCARENHAS, N.; BUSTOS, O. Robust inference techniques for speckle noise reduction in 1-look amplitude sar images. *Applied Signal Processing*, 1997.

- FRERY, A. C.; CRIBARI-NETO, F.; SOUZA, M. O. D. Analysis of minute features in speckled imagery with maximum likelihood estimation. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2004, n. 16, p. 1–16, 2004.
- FRERY, A. C.; MULLER, H.-J.; YANASSE, C. d. C. F.; SANT'ANNA, S. J. S. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, v. 35, n. 3, p. 648–659, 1997.
- GAO, G. Statistical modeling of sar images: A survey. *Sensors*, v. 10, n. 1, p. 775–795, 2010.
- GIERULL, C. H.; SIKANETA, I. C. Estimating the effective number of looks in interferometric sar data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 40, n. 8, p. 1733–1742, 2002.
- HALDANE, J. The estimation of two parameters from a sample. *The Indian Journal of Statistics*, p. 313–320, 1953.
- HALDANE, J.; SMITH, S. M. The sampling distribution of a maximum-likelihood estimate. *Biometrika*, v. 43, n. 1/2, p. 96–103, 1956.
- JENSEN, J. R. *Remote sensing of the environment: An earth resource perspective 2/e*. [S.l.]: Pearson Education India, 2009.
- KRESTENITIS, M.; ORFANIDIS, G.; IOANNIDIS, K.; AVGERINAKIS, K.; VROCHIDIS, S.; KOMPATSIARIS, I. Early identification of oil spills in satellite images using deep cnns. *International Conference on Multimedia Modeling*, p. 424–435, 2019.
- LAWLEY, D. N. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, v. 43, n. 3/4, p. 295–303, 1956.
- LEE, J.-S.; GRUNES, M. R.; KWOK, R. Classification of multi-look polarimetric sar imagery based on complex wishart distribution. *International Journal of Remote Sensing*, v. 15, n. 11, p. 2299–2311, 1994.
- LEE, J.-S.; POTTIER, E. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; CORMEN, T. H.; STEIN, C. *Introduction to algorithms*. [S.l.]: MIT press, 1994. v. 3.
- LING, J.; ZHANG, H.; LIN, Y. Improving urban land cover classification in cloud-prone areas with polarimetric sar images. *Remote Sensing*, v. 13, n. 22, p. 4708, 2021.
- MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. *Generalized linear models*. chapman and hall. London, UK, 1989.
- MEDEIROS, F. M.; ARAÚJO, M. C.; BOURGUIGNON, M. Improved estimators in beta prime regression models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, p. 1–14, 2021.
- MEJAIL, M. E.; FRERY, A. C.; JACOBO-BERLLES, J.; BUSTOS, O. Approximation of distributions for sar images: proposal, evaluation and practical consequences. *Latin American Applied Researches*, v. 31, n. 2, p. 83–92, 2001.

- MELO TATIANE FN E FERRARI, S. L. e. P. A. G. Estimativa aprimorada em um modelo elíptico multivariado geral. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, v. 32, n. 1, p. 44–68, 2018.
- NASCIMENTO, A.; ALMEIDA-JUNIOR, P.; VASCONCELOS, J.; BORGES-JUNIOR, A. K-bessel regression model for speckled data. *Journal of Applied Statistics*, p. 1–24, 2022.
- NASCIMENTO, A. D.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 2009.
- OLIVER, C.; QUEGAN, S. *Understanding synthetic aperture radar images*. [S.l.]: SciTech Publishing, 2004.
- OSPINA, R.; CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 2, p. 960–981, 2006.
- PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J.; PETTERSSON, M. I.; MACHADO, R. Rayleigh regression model for ground type detection in sar imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 16, n. 10, p. 1660–1664, 2019.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- RENCHER, A. C.; SCHAALJE, G. B. *Linear models in statistics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- SCHUR, J. Uber potenzreihen, die im innern des einheitskreises beschränkt sind. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, v. 1918, n. 148, p. 122–145, 1918.
- SEVERINI, T. A. Likelihood methods in statistics. 2000.
- SHENTON, L.; WALLINGTON, P. The bias of moment estimators with an application to the negative binomial distribution. *Biometrika*, v. 49, n. 1/2, p. 193–204, 1962.
- SILVA, P. G.; CYSNEIROS, A. H.; CORDEIRO, G. M. Bias correction in power series generalized nonlinear models. 2017.
- SIMAS, A. B.; BARRETO-SOUZA, W.; ROCHA, A. V. Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 54, n. 2, p. 348–366, 2010.
- SOUZA, A. P. D.; TEODORO, P. E.; TEODORO, L. P. R.; TAVEIRA, A. C.; OLIVEIRA-JÚNIOR, J. F. de; DELLA-SILVA, J. L.; BAIO, F. H. R.; LIMA, M.; JUNIOR, C. A. da S. Application of remote sensing in environmental impact assessment: A case study of dam rupture in brumadinho, minas gerais, brazil. *Environmental Monitoring and Assessment*, v. 193, n. 9, p. 1–18, 2021.

- SRIVASTAVA, H. S.; PATEL, P.; SHARMA, K.; KRISHNAMURTHY, Y.; DADHWAL, V. A semi-empirical modelling approach to calculate two-way attenuation in radar backscatter from soil due to crop cover. *Current Science*, p. 1871–1874, 2011.
- TARIQ, A.; SHU, H.; GAGNON, A. S.; LI, Q.; MUMTAZ, F.; HYSA, A.; SIDDIQUE, M. A.; MUNIR, I. Assessing burned areas in wildfires and prescribed fires with spectral indices and sar images in the margalla hills of pakistan. *Forests*, v. 12, n. 10, p. 1371, 2021.
- ULABY, F. T.; ELACHI, C. Radar polarimetry for geoscience applications. 1990.
- VASCONCELLOS, K. L.; SILVA, S. G. D. Corrected estimates for student t regression models with unknown degrees of freedom. *Journal of statistical computation and simulation*, v. 75, n. 6, p. 409–423, 2005.
- VASCONCELOS, J. M. d. Essays on new models and the mellin transform: experiments in survival and radar data, [master's thesis]. *Universidade Federal de Pernambuco.*, 2018.
- YOUNG, D. H.; AL-ABOOD, A. M.; BAKIR, S. T. Bias corrected pearson estimators for the shape parameter in gamma regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 27, n. 3, p. 233–241, 1987.
- YOUNG, D. H.; BAKIR, S. T. Bias correction for a generalized log-gamma regression model. *Technometrics*, v. 29, n. 2, p. 183–191, 1987.
- ZHAI, W.; SHEN, H.; HUANG, C.; PEI, W. Fusion of polarimetric and texture information for urban building extraction from fully polarimetric sar imagery. *Remote Sensing Letters*, v. 7, n. 1, p. 31–40, 2016.
- ZHANG, F. *The Schur complement and its applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 4.

## APÊNDICE A – INVERSA DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER E EXPRESSÃO DE COX-SNELL

A partir da log-verossimilhança da distribuição  $\mathcal{G}_I^0$  apresentamos as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem e seus respectivos cumulantes para a formulação da matriz de informação de Fisher  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$  assim como também a inversa  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  e por fim a expressão fechada do viés de ordem  $O(n^{-1})$  de  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\alpha$ . A seguir, apresentamos as constantes

$$c_2 = - \left[ \frac{\alpha(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{(-\alpha - 1)(\alpha - \mathcal{L})} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(1 + \mathcal{L} - \alpha)} + 1 \right],$$

$$c_3 = \left[ U_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L}) + \frac{2\alpha}{(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha)} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)^2(\mathcal{L} - \alpha + 1)} \right],$$

$$c_4 = \left[ (\alpha - \mathcal{L})\Psi^{(2)}(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi^{(1)}(\mathcal{L}) + \frac{1}{\mathcal{L}} \right],$$

$$c_5 = \left[ \frac{2(-\alpha + 1)(-\alpha + 2)}{(-\alpha + \mathcal{L} + 1)(-\alpha + \mathcal{L} + 2)} - 2 \right],$$

$$c_6 = \left[ 3 + \frac{3(\alpha - 1)}{(-\alpha + \mathcal{L} + 1)} \right],$$

$$c_7 = \left[ 1 - \frac{\alpha(\alpha - 1) [2(\mathcal{L} - \alpha) + (-\alpha - 1)]}{c_1(\mathcal{L} - \alpha + 1)} - \frac{2\alpha(-\alpha + 1)(-\alpha + 2)}{(-\alpha - 1)(-\alpha + \mathcal{L} + 1)(-\alpha + \mathcal{L} + 2)} \right],$$

$$c_8 = \left[ \frac{\alpha(2\alpha - \mathcal{L} + 1)}{c_1} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha + 1)} - 1 \right],$$

$$c_9 = -2\alpha \left[ \frac{(\alpha - 1)(2\alpha - \mathcal{L} + 1)}{(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha + 1)c_1} - \frac{(-\alpha + 1)(-\alpha + 2)}{(-\alpha - 1)^2(-\alpha + \mathcal{L} + 1)(-\alpha + \mathcal{L} + 2)} - \frac{1}{c_1} \right],$$

$$c_{10} = \left[ U_1^{(2)}(\alpha, \mathcal{L}) - \frac{3\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)c_1(\mathcal{L} - \alpha + 1)} + \frac{2\alpha(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha + 1)(-\alpha + 2)}{(-\alpha - 1)^2c_1(-\alpha + \mathcal{L} + 1)(-\alpha + \mathcal{L} + 2)} \right],$$

$$c_{11} = \left[ -2\alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \right],$$

$$c_{12} = \left[ \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)}{(\mathcal{L} - \alpha + 1)^2} \right],$$

$$c_{13} = \left[ \frac{\alpha(2\alpha - \mathcal{L} + 1)}{(-\alpha - 1)(\alpha - \mathcal{L})} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(1 + \mathcal{L} - \alpha)} + 1 \right],$$

$$aux_{14} = - \left[ \frac{(4\alpha + 1 - \mathcal{L})}{(-\alpha - 1)(\alpha - \mathcal{L})} + \frac{\alpha(2\alpha + 1 - \mathcal{L})^2}{[(-\alpha - 1)(\alpha - \mathcal{L})]^2} + \frac{(2\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha + 1)} \right]$$

$$c_{14} = \left[ aux_{14} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(2\alpha - L)}{[(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha + 1)]^2} \right],$$

$$aux_{15} = \left[ - \frac{2\alpha(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{c_1^2} + \frac{2\alpha - 1}{(-\alpha - 1)^2(\mathcal{L} - \alpha + 1)} + \frac{\alpha(\alpha - 1)[(-\alpha - 1) + 2(\mathcal{L} - \alpha + 1)]}{(-\alpha - 1)^3(\mathcal{L} - \alpha + 1)^2} \right],$$

$$c_{15} = \left[ U_1^{(2)}(\alpha, \mathcal{L}) + \frac{2}{c_1} + aux_{15} \right],$$

A partir de (2.4) obtemos as funções escore com relação aos parâmetros  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\mathcal{L}$ . Apresentadas a seguir:

$$U_\beta = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta^\top} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_j} = \alpha \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha - 1)}{\alpha T_k} - \frac{1}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kj}.$$

$$U_\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell_k(\theta)}{\partial \alpha} = nU_1(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{T_k}{\mu_k} \right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right),$$

Com

$$U_1(\alpha, \mathcal{L}) = -\Psi(\mathcal{L} - \alpha) + \Psi(-\alpha) - \log(-\alpha - 1) + \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)}.$$

E  $\Psi(x) = d \log \Gamma(x) / dx$  a função digama.

$$U_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell_k(\theta)}{\partial \mathcal{L}} = nU_2(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{Z_k}{T_k}\right) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left(\frac{Z_k}{T_k}\right),$$

Com

$$U_2(\alpha, \mathcal{L}) = \log(\mathcal{L}) + 1 + \Psi(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi(\mathcal{L}).$$

A seguir as derivadas de segunda ordem com relação aos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} U_{\beta_r \beta_s} &= \frac{\partial^2 \ell_k(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial \ell_k(\theta)}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_s} x_{kr} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2 \ell_k(\theta)}{\partial \mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) + \frac{\partial \ell_k(\theta)}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\beta_r \alpha} &= \frac{\partial [U_{\beta_r}]}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left[ \frac{(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha - 1)}{T_k} - \frac{\alpha}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ -\frac{(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{T_k} + \frac{(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha - 1)\mu_k}{T_k^2} - \frac{1}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\beta_r \mathcal{L}} &= \frac{\partial [U_{\beta_r}]}{\partial \mathcal{L}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} \left\{ \left[ \frac{(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha - 1)}{T_k} - \frac{\alpha}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \right\} \\ &= -(-\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{T_k} + \frac{(\alpha - \mathcal{L})Z_n}{T_k^2} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial [U_{\alpha}]}{\partial \alpha} = \left[ nU_1(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{T_k}{\mu_k}\right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu_k}{T_k}\right) \right] \\ &= nU_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L}) - 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu_k}{T_k}\right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu_k}{T_k}\right)^2, \end{aligned}$$

em que  $U_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L})$  é a derivada de primeira ordem de  $U_1(\alpha, \mathcal{L})$  com relação a  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} U_{\alpha\mathcal{L}} &= \frac{\partial [U_\alpha]}{\partial \mathcal{L}} = \frac{\partial [U_\alpha]}{\partial \alpha} = \left[ nU_1(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{T_k}{\mu_k} \right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right) \right] \\ &= -n\Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \frac{Z_k}{T_k^2} \right), \end{aligned}$$

Onde  $\Psi^{(k)}(x) = \partial^{k+1} \log \Gamma(x) / \partial x^{k+1}$  para  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{L}\mathcal{L}} &= \frac{\partial [U_{\mathcal{L}}]}{\partial \mathcal{L}} = \left[ nU_2(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\mathcal{L}} + \Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi^{(1)}(\mathcal{L}) \right] - 2 \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) - (\alpha - \mathcal{L}) \left( \frac{Z_k}{T_k} \right)^2. \end{aligned}$$

Aplicando o valor esperado nas expressões acima obtemos os cumulantes de segunda ordem. E pelas condições de regularidade temos que  $\mathbb{E}(\partial \ell(\theta) / \partial \mu_k) = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_r \beta_s} &= \mathbb{E} [U_{\beta_r \beta_s}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell_k(\theta)}{\partial \mu_k^2} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha}{\mu_k^2} + c_1(-\alpha - 1) \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks} \\ &= \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_r \alpha} &= \mathbb{E} [U_{\beta_j \alpha}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ -\frac{(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{T_k} + \frac{(\alpha - \mathcal{L})(-\alpha - 1)\mu_k}{T_k^2} - \frac{1}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ -(2\alpha + 1 - \mathcal{L}) \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k} \right) - c_1 \mu_k \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) - \frac{1}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \\ &= c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_r \mathcal{L}} &= \mathbb{E}[U_{\beta_r \mathcal{L}}] = -(\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \left[ \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k}\right) + (\alpha - \mathcal{L}) \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k^2}\right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \\ &= 0,\end{aligned}$$

e  $\mathbb{E}[Z_k/T_k^2]$  é obtido derivando ambos os lados de  $\mathbb{E}[1/T_k]$  com relação a  $\mathcal{L}$ , dado por

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k^2}\right) = -\frac{\alpha}{\mu_k(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha)^2}.$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha\alpha} &= \mathbb{E}[U_{\alpha\alpha}] = nU_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L}) - 2 \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k}\right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k^2}\right) \\ &= n\mathcal{C}_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha\mathcal{L}} &= \mathbb{E}[U_{\alpha\mathcal{L}}] = -n\Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k}\right) + \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k}\right) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k^2}\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois, pelas condições de regularidade, temos que  $\mathbb{E}[U_\alpha] = 0$ , teremos

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\log(T_k)] = -nU_1(\alpha, \mathcal{L}) + \sum_{k=1}^n \log(\mu_k) + (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k}\right),$$

e derivando com relação a  $\mathcal{L}$  ambos os lados

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k}\right) = n\Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) - \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k}\right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{L}\mathcal{L}} &= \mathbb{E}[U_{\mathcal{L}\mathcal{L}}] = n \left[ \frac{1}{\mathcal{L}} + \Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha) - \Psi^{(1)}(\mathcal{L}) \right] - 2 \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k}\right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{T_k}\right)^2 \\ &= n\mathcal{C}_4,\end{aligned}$$

onde derivando  $\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [Z_k/T_k]$  com relação a  $\mathcal{L}$  obtemos

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{Z_k^2}{T_k^2} \right) = -n\Psi^{(2)}(\mathcal{L} - \alpha) - 2 \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E} \left( \frac{Z_k}{T_k^2} \right) - 2(\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbb{E} \left( \frac{Z_k^2}{T_k^3} \right).$$

De  $\mathbb{E} [1/T_k]$ ,  $\mathbb{E} [Z_k/T_k^2]$  e  $\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [Z_k/T_k]$ , temos que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{Z_k}{T_k} \right) = n\Psi^{(1)}(\mathcal{L} - \alpha),$$

derivando com relação  $\mathcal{L}$ , temos

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{Z_k}{T_k} \right)^2 = -n\Psi^{(2)}(\mathcal{L} - \alpha).$$

Inversa da Matriz de Informação de Fisher

Para determinar a matriz inversa, vamos particionar a matriz  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$  e aplicando o método da inversão de Banachiewicz (BANACHIEWICZ, 1937) e diagonalização de Aitken (ZHANG, 2006), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})/\mathbf{A})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^\top & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{v}(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})/\mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}^\top & -\mathbf{v}(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})/\mathbf{A})^{-1} \\ -(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})/\mathbf{A})^{-1}\mathbf{v}^\top & (\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})/\mathbf{A})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . E  $\mathbf{A}^{-1}$  é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} (\alpha \mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} + \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\vartheta}^{-1} \boldsymbol{\xi}^\top & -\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\vartheta}^{-1} \\ -\boldsymbol{\vartheta}^{-1} \boldsymbol{\xi}^\top & \boldsymbol{\vartheta}^{-1} \end{bmatrix}$$

em que,

$$\boldsymbol{\vartheta} = nc_3 - \frac{c_2^2}{\alpha} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*)^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*),$$

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{c_2}{\alpha} (\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}^*).$$

Derivadas e cumulantes de terceira ordem

$$\begin{aligned} U_{\beta_r \beta_s \beta_u} &= \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_u} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} x_{ku} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial^3 \ell}{\partial \mu_k^3} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \ell}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right]^2 \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} x_{ku}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\beta_r\beta_s\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2\ell}{\partial\mu_k^2} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) + \frac{\partial\ell}{\partial\mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial\mu_k} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) \right] \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr}x_{ks} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{\partial^2\ell}{\partial\mu_k^2} \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{\partial\ell}{\partial\mu_k} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial\mu_k} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) \right] \right\} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr}x_{ks} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ -\frac{[2c_1 + (-\alpha - 1)^2]}{T_k^2} + \frac{2c_1(-\alpha - 1)\mu_k}{T_k^3} + \frac{1}{\mu_k^2} \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left[ -\frac{(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{T_k} - \frac{c_1\mu_k}{T_k^2} - \frac{1}{\mu_k} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial\mu_k} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) \right] \right\} \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr}x_{ks}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\beta_r\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ -\frac{c_1\mu_k}{T_k^2} - \frac{(2\alpha + 1 - \mathcal{L})}{T_k} - \frac{1}{\mu_k} \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ -\frac{2(2\alpha - \mathcal{L} + 1)\mu_k}{T_k^2} - \frac{2c_1\mu_k^2}{T_k^3} - \frac{2}{T_k} \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr} \\
&= -2 \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(2\alpha - \mathcal{L} + 1)\mu_k}{T_k^2} + \frac{c_1\mu_k^2}{T_k^3} + \frac{1}{T_k} \right] \left( \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_k} \right) x_{kr}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ nU_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L}) - 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right) - (\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right)^2 \right] \\
&= nU_1^{(2)}(\alpha, \mathcal{L}) - 3 \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right)^2 - 2(\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mu_k}{T_k} \right)^3.
\end{aligned}$$

Aplicando o valor esperado nas expressões anteriores obtemos os cumulantes de terceira ordem como se segue

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_r\beta_s\beta_u} &= \mathbb{E}[U_{\beta_r\beta_s\beta_u}] = \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^3 \ell}{\partial \mu_k^3} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. 3 \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu_k^2} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} x_{ku} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{-2\alpha}{\mu_k^3} - 2c_1(-\alpha - 1)^2 \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^3} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. 3 \left[ \frac{\alpha}{\mu_k^2} + c_1(-\alpha - 1) \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} x_{ku} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^n \left[ c_5 \frac{1}{\mu_k^3} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^3 + c_6 \frac{1}{\mu_k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 \right] x_{kr} x_{ks} x_{ku}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_r\beta_s\alpha} &= \mathbb{E}[U_{\beta_r\beta_s\alpha}] = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{1}{\mu_k^2} - [2c_1 + (-\alpha - 1)^2] \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) + 2c_1(-\alpha - 1)\mu_k \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^3} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left[ -(2\alpha - \mathcal{L} + 1) \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k} \right) - c_1\mu_k \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) - \frac{1}{\mu_k} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right\} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ c_7 \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 + c_8 \frac{1}{\mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] x_{kr} x_{ks}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_r\alpha\alpha} &= \mathbb{E}[U_{\beta_r\alpha\alpha}] = -2 \sum_{k=1}^n \left[ (2\alpha - \mathcal{L} + 1)\mu_k \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^2} \right) + c_1\mu_k^2 \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k^3} \right) + \mathbb{E} \left( \frac{1}{T_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \\
&= c_9 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha\alpha\alpha} &= \mathbb{E}[U_{\alpha\alpha\alpha}] = nU_1^{(2)}(\alpha, \mathcal{L}) - 3 \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k^2}\right) - 2(\alpha - \mathcal{L}) \sum_{k=1}^n \mu_k^3 \mathbb{E}\left(\frac{1}{T_k^3}\right) \\ &= nc_{10}.\end{aligned}$$

em que  $U_1^{(2)}(\alpha, \mathcal{L})$  é a derivada de segunda ordem de  $U_1(\alpha, \mathcal{L})$  com relação a  $\alpha$ .

Derivada dos cumulantes de segunda ordem,

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_r\beta_s}^{(u)} &= \frac{\partial \kappa_{\beta_r\beta_s}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left[ \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_u} \right) \\ &= \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left[ \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ks} x_{ku} \\ &= c_{11} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\mu_k^3} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^3 - \frac{1}{\mu_k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 \right] x_{kr} x_{ks} x_{ku}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_r\beta_s}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\beta_j\beta_l}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} - \alpha + 1} \right) \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks} \\ &= c_{12} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 x_{kr} x_{ks}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_r\alpha}^{(u)} &= \frac{\partial \kappa_{\beta_r\alpha}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left[ c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial \beta_u} \right) \\ &= c_2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left[ \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} x_{ku} \\ &= c_{13} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 - \frac{1}{\mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] x_{kr} x_{ku}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_r\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\beta_r\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ c_2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ -\frac{\alpha(2\alpha - \mathcal{L} + 1)}{(-\alpha - 1)(\alpha - \mathcal{L})} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(1 + \mathcal{L} - \alpha)} - 1 \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) x_{kr} \\
&= c_{14} \sum_{k=1}^n \frac{1}{g'(\mu_k)} \frac{1}{\mu_k} x_{kr}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \sum_{k=1}^n U_1^{(1)}(\alpha, \mathcal{L}) + \frac{2\alpha}{(-\alpha - 1)(\mathcal{L} - \alpha)} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)^2(\mathcal{L} - \alpha + 1)} \right] \\
&= nc_{15}.
\end{aligned}$$

E mais  $\kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} = 0$ . Definindo as matrizes diagonais da forma

$$M_1 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (2c_{11} - \alpha c_5) \frac{1}{\mu_k^3} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^3 - (2c_{11} + \alpha c_6) \frac{1}{\mu_k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 \right] \right\},$$

$$M_2 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (2c_{13} - c_7) \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 - (2c_{13} + c_8) \frac{1}{\mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right\},$$

$$M_3 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (2c_{12} - c_7) \frac{1}{\mu_k^2} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right)^2 - c_8 \frac{1}{\mu_k} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right\},$$

$$M_4 = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ c_9 \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right\},$$

$$M_5 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (2c_{14} - c_9) \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_k} \right) \right] \right\},$$

$$M_6 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} (2c_{15} - c_{10}) \right\}.$$

Das expressões acima, obtemos:

$$\kappa_{rs}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rsu} = \sum_{k=1}^n m_{1k} x_{kr} x_{ks} x_{ku},$$

$$\kappa_{\alpha s}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha su} = \sum_{k=1}^n m_{2k} x_{ks} x_{ku},$$

$$\kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} = \kappa_{\alpha s}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha su} = \sum_{k=1}^n m_{2k} x_{ks} x_{ku},$$

$$\kappa_{rs}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rs\alpha} = \sum_{k=1}^n m_{3k} x_{kr} x_{ks},$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} = \sum_{k=1}^n m_{4k} x_{ku},$$

$$\kappa_{\alpha s}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha s\alpha} = \sum_{k=1}^n m_{5k} x_{ks},$$

$$\kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} = \kappa_{\alpha s}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha s\alpha} = \sum_{k=1}^n m_{5k} x_{ks},$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} = \sum_{k=1}^n m_{6k}.$$

Agora calculamos cada termo em (3.4), que fornece os vieses de ordem  $O(n^{-1})$  dos EMVs no modelo de regressão  $\mathcal{G}_I^0$ . Fazendo para o parâmetro  $\beta$  e de forma similar encontramos de  $\alpha$

$$\begin{aligned} \sum_{r,s,u} \kappa^{ar} \kappa^{su} \left\{ \kappa_{rs}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rsu} \right\} &= \sum_{r,s,u} \kappa^{ar} \kappa^{su} \sum_{k=1}^n m_{1k} x_{kr} x_{ks} x_{ku} \\ &= \sum_{k=1}^n m_{1k} \sum_r \kappa^{ar} x_{kr} \sum_{s,u} x_{ks} \kappa^{su} x_{ku} \\ &= \kappa^{a\beta} \sum_{k=1}^n m_{1k} x_k \left( x_k^\top K^{\beta\beta} x_k \right) \\ &= e_a^\top K^{\beta\beta} X^\top M_1 \delta_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

em que,  $e_a$  é o  $a$ -ésimo vetor coluna da matriz identidade  $p \times p$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha, s, u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{su} \left\{ \kappa_{\alpha s}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha s u} \right\} &= \sum_{\alpha, s, u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{su} \sum_{k=1}^n m_{2k} x_{ks} x_{ku} \\
&= \sum_{k=1}^n m_{2k} \kappa^{a\alpha} \sum_{s, u} x_{ks} \kappa^{su} x_{ku} \\
&= \kappa^{a\alpha} \sum_{k=1}^n m_{2k} \left( x_k^\top K^{\beta\beta} x_k \right) \\
&= e_a^\top K^{\beta\alpha} \operatorname{tr} \left( M_2 X K^{\beta\beta} X^\top \right),
\end{aligned}$$

com  $\operatorname{tr}(\bullet)$  corresponde ao traço de uma matriz quadrada.

$$\begin{aligned}
\sum_{r, \alpha, u} \kappa^{ar} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} &= \sum_{r, \alpha, u} \kappa^{ar} \kappa^{\alpha u} \sum_{k=1}^n m_{2k} x_{kr} x_{ku} \\
&= \sum_{k=1}^n m_{2k} \sum_r \kappa^{ar} x_{kr} \sum_u \kappa^{\alpha u} x_{ku} \\
&= \sum_{k=1}^n m_{2k} \left( \kappa^{a\beta} x_k \right) \left( \kappa^{\alpha\beta} x_k \right)^\top \\
&= \kappa^{a\beta} \left( \sum_{k=1}^n x_k m_{2k} x_k^\top \right) \kappa^{\beta\alpha} \\
&= e_a^\top K^{\beta\beta} \left( X^\top M_2 X \right) K^{\beta\alpha},
\end{aligned}$$

$$\sum_{r, s, \alpha} \kappa^{ar} \kappa^{s\alpha} \left\{ \kappa_{rs}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rs\alpha} \right\} = e_a^\top K^{\beta\beta} \left( X^\top M_3 X \right) K^{\beta\alpha},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha, \alpha, u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} \right\} &= \sum_{\alpha, \alpha, u} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha u} \sum_{k=1}^n m_{4k} x_{ku} \\
&= \sum_{k=1}^n m_{4k} \kappa^{a\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} x_{ku} \\
&= \kappa^{a\alpha} \sum_{k=1}^n m_{4k} \left( \rho_k^\top X K^{\beta\alpha} \right) \\
&= e_a^\top K^{\beta\alpha} \operatorname{diagonal}(M_4) X K^{\beta\alpha},
\end{aligned}$$

onde  $\rho_k$  é o  $k$ -ésimo vetor coluna da matriz identidade  $n \times n$ . Consequentemente,

$$\sum_{\alpha, s, \alpha} \kappa^{a\alpha} \kappa^{s\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha s}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha s \alpha} \right\} = e_a^\top K^{\beta\alpha} \text{diagonal}(M_5) X K^{\beta\alpha},$$

$$\sum_{r, \alpha, \alpha} \kappa^{ar} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} \right\} = e_a^\top K^{\beta\beta} X^\top \text{diagonal}(M_5)^\top K^{\alpha\alpha},$$

E por fim, temos

$$\sum_{\alpha, \alpha, \alpha} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\} = \sum_{\alpha, \alpha, \alpha} \kappa^{a\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \sum_{k=1}^n m_{6k} = e_a^\top K^{\beta\alpha} K^{\alpha\alpha} \text{tr}(M_6).$$

## APÊNDICE B – RESULTADO DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Resultado do estudo de simulação realizado com o cenário  $\alpha = \{-4, 5; -3\}$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$  e  $\mathcal{L} = \{4, 8\}$  para a EMV,  $\hat{\theta}$ , e sua versão corrigida via Cox-Snell,  $\tilde{\theta}$ .

Tabela 8 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas para  $\beta_0 = 0,5$ .

		$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	25	$\hat{\beta}_0$	0,48829	-0,01171	0,08741	0,29588	0,47555	-0,02445	0,07588	0,27655
		$\tilde{\beta}_0$	0,48845	-0,01155	0,0874	0,29587	0,47578	-0,02422	0,07589	0,27654
	49	$\hat{\beta}_0$	0,4874	-0,0126	0,04257	0,20671	0,48676	-0,01324	0,03593	0,19001
		$\tilde{\beta}_0$	0,48747	-0,01253	0,04257	0,20671	0,48688	-0,01312	0,03593	0,19001
	81	$\hat{\beta}_0$	0,49181	-0,00819	0,02483	0,15779	0,49037	-0,00963	0,02062	0,14392
		$\tilde{\beta}_0$	0,49185	-0,00815	0,02483	0,15779	0,49045	-0,00955	0,02062	0,14391
$\alpha = -4,5$	25	$\hat{\beta}_0$	0,50202	0,00202	0,07115	0,26675	0,48522	-0,01478	0,05972	0,24482
		$\tilde{\beta}_0$	0,50187	0,00187	0,07115	0,26675	0,4854	-0,0146	0,05973	0,24483
	49	$\hat{\beta}_0$	0,49695	-0,00305	0,03427	0,18515	0,4912	-0,0088	0,02776	0,16685
		$\tilde{\beta}_0$	0,49701	-0,00299	0,03427	0,18515	0,49129	-0,00871	0,02777	0,16687
	81	$\hat{\beta}_0$	0,49496	-0,00504	0,01996	0,14137	0,49565	-0,00435	0,01646	0,12837
		$\tilde{\beta}_0$	0,49498	-0,00502	0,01996	0,14137	0,4957	-0,0043	0,01646	0,12837

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).  
Fonte: Autor(2023).

Tabela 9 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas para  $\beta_1 = 0,5$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	$\hat{\beta}_1$	0,50522	0,00522	0,05016	0,22403	0,50742	0,00742	0,04592	0,21442	
		$\tilde{\beta}_1$	0,50519	0,00519	0,05015	0,224	0,50733	0,00733	0,04592	0,21441
	25	$\hat{\beta}_1$	0,50311	0,00311	0,0201	0,14181	0,50495	0,00495	0,01788	0,13381
		$\tilde{\beta}_1$	0,50309	0,00309	0,0201	0,14181	0,50489	0,00489	0,01788	0,13381
	49	$\hat{\beta}_1$	0,50099	0,00099	0,01005	0,10025	0,50384	0,00384	0,00886	0,09421
		$\tilde{\beta}_1$	0,50098	0,00098	0,01005	0,10025	0,5038	0,0038	0,00886	0,0942
$\alpha = -4,5$	$\hat{\beta}_1$	0,4946	-0,0054	0,05189	0,22786	0,50776	0,00776	0,04492	0,21209	
		$\tilde{\beta}_1$	0,49462	-0,00538	0,05189	0,22786	0,50772	0,00772	0,04492	0,21208
	25	$\hat{\beta}_1$	0,49865	-0,00135	0,02084	0,14437	0,50174	0,00174	0,01879	0,13709
		$\tilde{\beta}_1$	0,49866	-0,00134	0,02084	0,14437	0,50171	0,00171	0,01879	0,13709
	49	$\hat{\beta}_1$	0,49945	-0,00055	0,01138	0,10668	0,50098	0,00098	0,01012	0,1006
		$\tilde{\beta}_1$	0,49945	-0,00055	0,01138	0,10668	0,50096	0,00096	0,01012	0,1006
81	$\hat{\beta}_1$	0,49945	-0,00055	0,01138	0,10668	0,50098	0,00098	0,01012	0,1006	
	$\tilde{\beta}_1$	0,49945	-0,00055	0,01138	0,10668	0,50096	0,00096	0,01012	0,1006	

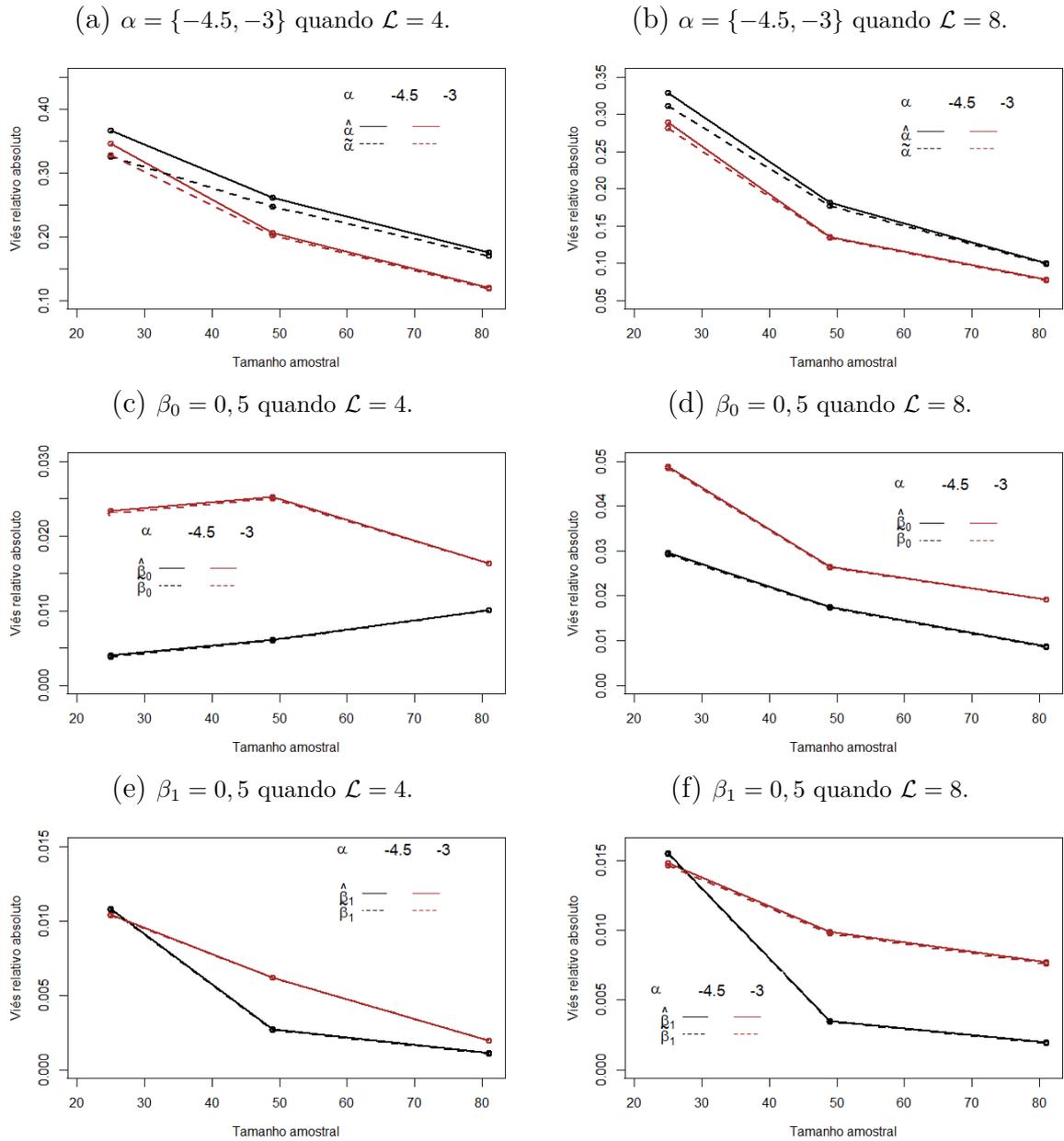
$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).  
Fonte: Autor(2023).

Tabela 10 – Resultados das EMV e suas versões corrigidas quando  $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$				$\mathcal{L} = 8$				
		Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	Média	Viés	Variância	$\sqrt{EQM}$	
$\alpha = -3$	$\hat{\alpha}$	-4,03782	-1,03782	4,09768	2,27481	-3,8665	-0,8665	2,88425	1,90659	
		$\tilde{\alpha}$	-3,98363	-0,98363	3,7498	2,17194	-3,84338	-0,84338	2,77121	1,86615
	25	$\hat{\alpha}$	-3,61889	-0,61889	2,14609	1,59032	-3,40694	-0,40694	1,08107	1,11654
		$\tilde{\alpha}$	-3,60552	-0,60552	2,07304	1,56195	-3,40203	-0,40203	1,06739	1,10861
	49	$\hat{\alpha}$	-3,36064	-0,36064	1,01128	1,06834	-3,23369	-0,23369	0,52275	0,75984
		$\tilde{\alpha}$	-3,3570	-0,3570	0,99769	1,06073	-3,23210	-0,23210	0,52041	0,75781
81	$\hat{\alpha}$	-3,3570	-0,3570	0,99769	1,06073	-3,23210	-0,23210	0,52041	0,75781	
	$\tilde{\alpha}$	-3,3570	-0,3570	0,99769	1,06073	-3,23210	-0,23210	0,52041	0,75781	
$\alpha = -4,5$	$\hat{\alpha}$	-6,14781	-1,64781	11,59913	3,78344	-5,9786	-1,4786	8,67648	3,29587	
		$\tilde{\alpha}$	-5,96271	-1,46271	9,78264	3,45285	-5,90254	-1,40254	8,09003	3,1713
	25	$\hat{\alpha}$	-5,67527	-1,17527	7,32178	2,95009	-5,31602	-0,81602	3,96929	2,15295
		$\tilde{\alpha}$	-5,61362	-1,11362	6,78268	2,83246	-5,29463	-0,79463	3,8567	2,11852
	49	$\hat{\alpha}$	-5,28872	-0,78872	3,97638	2,1444	-4,9522	-0,4522	1,76975	1,40508
		$\tilde{\alpha}$	-5,26667	-0,76667	3,83193	2,10231	-4,94482	-0,44482	1,74845	1,3951
81	$\hat{\alpha}$	-5,26667	-0,76667	3,83193	2,10231	-4,94482	-0,44482	1,74845	1,3951	
	$\tilde{\alpha}$	-5,26667	-0,76667	3,83193	2,10231	-4,94482	-0,44482	1,74845	1,3951	

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).  
Fonte: Autor(2023).

Figura 10 – Média dos resultados da simulação de Monte Carlo do viés relativo absoluto do EMV,  $\hat{\theta}$  e, sua versão corrigida,  $\hat{\theta}$ .



Fonte: Autor(2023).

Tabela 11 – Medidas de informação para dados SAR sintéticos quando  $\beta_0 = \beta_1 = 0, 5$ .

n	$\theta$	$\mathcal{L} = 4$			$\mathcal{L} = 8$			
		AIC	CAIC	BIC	AIC	CAIC	BIC	
$\alpha = -3$	25	$\hat{\theta}$	-82,52658	-80,52658	-77,65107	-78,66038	-76,66038	-73,78488
		$\tilde{\theta}$	-82,5270	-80,5270	-77,6515	-78,66058	-76,66058	-73,78508
	49	$\hat{\theta}$	-171,3265	-170,4174	-163,7592	-164,9366	-164,0275	-157,3693
		$\tilde{\theta}$	-171,3266	-170,4175	-163,7593	-164,9366	-164,0275	-157,3694
	81	$\hat{\theta}$	290,2779	-289,7516	-280,7001	-279,8245	-279,2982	-270,2467
		$\tilde{\theta}$	-290,2779	-289,7516	-280,7001	-279,8245	-279,2982	-270,2467
$\alpha = -4, 5$	25	$\hat{\theta}$	-82,34129	-80,34129	-77,46579	-76,36787	-74,36787	-71,49237
		$\tilde{\theta}$	-82,3424	-80,3424	-77,4669	-76,36839	-74,36839	-71,49289
	49	$\hat{\theta}$	-169,7959	-168,8868	-162,2286	-159,032	-158,1229	-151,4647
		$\tilde{\theta}$	-169,7963	-168,8872	-162,229	-159,0321	-158,123	-151,4648
	81	$\hat{\theta}$	-286,6591	-286,1328	-277,0814	-270,1052	-269,5788	-260,5274
		$\tilde{\theta}$	-286,6593	-286,133	-277,0815	-270,1052	-269,5789	-260,5274

$\hat{\theta}$ : EMV;  $\tilde{\theta}$ : EMV corrigido (Cox-Snell).

Fonte: Autor(2023).