



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Diego Enriqe Saldanha Bautista

## **Modos Magnetostáticos em uma Esfera Ferromagnética Oca**

Recife

2023

Diego Enriqe Saldanha Bautista

## **Modos Magnetostáticos em uma Esfera Ferromagnética Oca**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de Concentração:** Física da matéria condensada e de materiais

**Orientador (a):** Eduardo Padrón Hernández

Recife

2023

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

B352m Bautista, Diego Enriqe Saldanha  
Modos magnetostáticos em uma esfera ferromagnética oca / Diego Enriqe Saldanha Bautista. – 2022.  
103 f.: il., fig., tab.

Orientador: Eduardo Padrón Hernández.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2022

Inclui referências.

1. Física da matéria condensada e de materiais. 2. Ressonância ferromagnética. I. Padrón Hernández, Eduardo (orientador). II. Título.

530.41                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2022-171

**DIEGO ENRRIQE SALDANHA BAUTISTA**

**MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Física**.

Aprovada em: 17/06/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Eduardo Padrón Hernández**  
**Orientador**  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**Profa. Azadeh Mohammadi**  
**Examinadora Interna**  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**Prof. Roberto Lázaro Rodríguez Suárez**  
**Examinador Externo**  
Pontificia Universidad Católica de Chile

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Domingo e Inês que me deram todo o suporte, carinho e dedicação para que eu conseguisse concluir essa etapa.

Ao meu orientador, Eduardo Padrón, por ter sido muito paciente e compreensivo durante a minha jornada. Por estar sempre me apoiando e me fazendo sempre refletir sobre os problemas da maneira mais crítica possível.

Aos meus amigos de departamento, André Chaves, Carlos Sabino, William Ramos, Álvaro Domingues, Victor José, Andre Chaves, Antonio Carlos de Lorena, Jean Ricardo colaço, Filipe Rogerio, José Damastor, Diego, Júlio Cristovam, Thiago Silva, Victor Rogério, Pedro, Alvaro mitchel, Mari, Lari, Juan ... onde se fosse escrever todos não caberia neste espaço, pois foram muitas pessoas que me ajudaram prestando sua atenção seja lá estudando para as provas, discutindo conceitos, exercícios e me auxiliando a organizar melhor em conjunto as minhas ideias. Por todas as noites viradas e dias em conjunto estudando por um mesmo objetivo. Sem a ajuda de todos vocês eu tenho certeza de que a probabilidade desta minha formação seria muito menor.

A minha companheira Carol por sempre me apoiar, incentivar e escutar diariamente as minhas dúvidas e questionamentos acerca dos problemas deste trabalho.

Aos professores do departamento, que me fizeram mergulhar nesta imersão que foi, é e será estudar Física em especial para: Prof Eduardo Padron, Prof Bruno Carneiro, Prof Giovanni Lopes Vasconcelos, Prof Mauro Copelli, Prof Akady Shanenko, Prof Ernesto Raposo, Prof Mauricio Coutinho.

Aos funcionários do Departamento de Física pela contribuição da instituição como um todo, especialmente aos secretários do programa: Alexandra Melo e Ailton Francisco, que sempre foram prestativos nos problemas burocráticos ao longo dos anos.

A minha amiga Lisdexan por estar sempre comigo nos estudos causando grande evolução

no meu pensamento lógico, ordenado e organizado.

A minha Neuropsicóloga Neidja Pereira da Silva por toda sua dedicação e entrega como profissional, sendo assim fundamental para que pudesse acabar esta etapa.

A CAPES, CNPq e todos os órgãos de fomento, pelo financiamento desta pesquisa, à Universidade Federal de Pernambuco, pública e de qualidade, e a todos os funcionários do seu Departamento de Física.

## RESUMO

Neste estudo são calculados os modos magnetostáticos de uma esfera oca ferromagnética, onde temos como base o trabalho do R.Plumier, pois para obter a relação de dispersão nesta geometria precisamos reescrever os potenciais magnetostáticos e aplicar os polinômios associados de Legendre. A equação característica está em função dos parâmetros  $\kappa$ ,  $\nu$  e dos modos magnetostáticos indexados por  $(l, m, r = \cos \theta_0)$ , que estão relacionados com os polinômios associados de Legendre e o  $(\cos \theta_0)$  advindo do grau de liberdade da condição de contorno. Provamos que quando o raio interno,  $r_1 = 0$ , a equação característica da esfera oca ferromagnética se iguala à da esfera sólida ferromagnética obtida por R.Plumier para os casos  $l = m + i$ , sendo  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Para as magnetizações  $m_x$ ,  $m_y$ , da esfera oca quando o raio interno  $r_1$  é nulo encontramos os mesmos resultados das componentes da magnetização obtidas por R.Plumier. Analisamos as semelhanças com o trabalho de McKeever, no qual é realizada simulações micromagnéticas em uma esfera oca ferromagnética nanométrica que está sendo excitada com um pulso gaussiano, por serem nanoesferas ocas os termos de energia de troca entre vizinhos mais próximos, energia anisotrópica magnetocristalina cubica, energia de zeeman, energia magnetostática e o parâmetro de amortecimento  $\lambda$  da equação de Landau-Lifshitz são levados em conta na formulação do problema. É realizada uma análise Topológica do comportamento dessas magnetizações dentro da esfera oca, fazendo comparações com o trabalho do Volodymyr P. Kravchuk de 2016, onde é possível obter soluções em Skyrmion para alguns casos. Os casos particulares onde é colocado um PEC (Condutor Perfeitamente Elétrico) e um dielétrico dentro da esfera oca são estudados usando mudanças nas condições de contorno do problema e teoria de perturbação.

**Palavras-chaves:** ressonância ferromagnética; modos magnetostáticos; ondas de spin.

## ABSTRACT

In this study, the magnetostatic modes of a ferromagnetic hollow sphere are calculated, where we have as base the work of R.Plumier, because to obtain the dispersion relation in this geometry we need to rewrite the magnetostatic potentials and apply the associated Legendre polynomials. The equation characteristic is a function of the parameters  $\kappa$ ,  $\nu$  and the magnetostatic modes indexed by  $(l, m, \cos \theta_0)$ , which are related to the associated Legendre polynomials and the  $(\cos \theta_0)$  from the degree of freedom of the boundary condition. We prove that when the inner radius,  $r_1 = 0$ , the characteristic equation of the ferromagnetic hollow sphere equals that of the ferromagnetic solid sphere obtained by R.Plumier for the cases  $l = m + i$ , where  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . For the magnetizations  $m_x$ ,  $m_y$ , of the hollow sphere when the inner radius  $r_1$  is null, we find the same results as for the magnetization components obtained by R.Plumier. We analyzed the similarities with McKeever's work, in which micromagnetic simulations are performed in a nanometric ferromagnetic hollow sphere that is being excited with a gaussian pulse, because the terms of exchange energy between nearest neighbors, cubic magnetocrystalline anisotropic energy, are hollow nanospheres, zeeman energy, magnetostatic energy and the damping parameter  $\lambda$  of the Landau-Lifshitz equation are taken into account in the formulation of the problem. A Topological analysis of the behavior of these magnetizations inside the hollow sphere is performed, making comparisons with the work of Volodymyr P. Kravchuk from 2016, where it is possible to obtain solutions in Skyrminion for some cases. The particular cases where a PEC (Perfectly Electric Conductor) and a dielectric are placed inside the hollow sphere are studied using changes in problem boundary conditions and perturbation theory.

**Keywords:** ferromagnetic resonance; magnetostatic waves; spin waves; magnons.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Absorção anômala . . . . .	17
Figura 2 – Gráfico do artigo original do griffiths para diferentes valores de $g$ . . . . .	18
Figura 3 – Curva de Ressonância, cuja ordenada é a absorção de energia, para um cristal simples de ferrita de níquel na forma de uma esfera, cujo diâmetro é 0.10cm e frequência de 24000mc/s (Yager, Galt, Merritt, Wood and Matthias). . . . .	20
Figura 4 – Parte real e imaginária das componentes diagonais da suscetibilidade para uma frequência $\omega/2\pi = 9.8GHz$ , $\omega_M = 3kOe$ e $\eta/\omega = 0.04$ . . . . .	22
Figura 5 – Aparato experimental para a detecção. . . . .	23
Figura 6 – Posição da amostra dentro da cavidade ressonante retangular para a ressonância ferromagnética. . . . .	23
Figura 7 – Gráficos da Potência Magnética absorvida em função do campo magnético na amostra. Artigo "Múltiplas Ressonâncias Ferromagnéticas em Esferas de Ferrita, Robert L. White e Irvin H. Solt Jr (1956)", apresentam picos extras causados pelo campo magnético inhomogêneo ocasionados pelo gradiente do campo magnético ao mudar as posições do circuito. . . . .	24
Figura 8 – Gráfico original de $F\left(2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H}\right)$ em função de $\Delta$ e as retas $\Delta$ e $-(\Delta + 2\Omega)$ para o caso onde $l = 8$ e $m = 2$ [ $p = 3$ ]. . . . .	30
Figura 9 – Esfera ferromagnética sólida de raio $R$ . . . . .	31
Figura 10 – Esfera Ferromagnética Oca . . . . .	41
Figura 11 – Gráfico da equação de dispersão para quando $r_1 = 0$ e $l = m + 1$ ou $l = m$ . . . . .	49
Figura 12 – Gráfico da equação de dispersão para quando $r_1 = 0$ e $(l, m)$ quaisquer . . . . .	50
Figura 13 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=1$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	51
Figura 14 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=2$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	52
Figura 15 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=3$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	52

Figura 16 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=4$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	53
Figura 17 – Gráfico original do artigo do McKeeever . . . . .	54
Figura 18 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=1$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	56
Figura 19 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=2$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	57
Figura 20 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=3$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	57
Figura 21 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=4$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	58
Figura 22 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=1$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	59
Figura 23 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=1$ e $\theta = 0$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	60
Figura 24 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=2$ e $\theta = 0$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	61
Figura 25 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=3$ e $\theta = 0$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	62
Figura 26 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=4$ e $\theta = 0$ para diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	63
Figura 27 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m+1=1$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	64
Figura 28 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m+1=2$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	64
Figura 29 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m+1=3$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	65
Figura 30 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m+=4$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	65
Figura 31 – Regiões onde é possível encontrar as soluções do tipo Skyrmion usuais com duas singularidades, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ . E três singularidades, incluindo as curvas com "defeito" . . . . .	81

Figura 32 – Esfera Ferromagnética Oca com um Condutor Perfeitamente Elétrico . . .	83
Figura 33 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=1$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	88
Figura 34 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=2$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	89
Figura 35 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=3$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	89
Figura 36 – Gráfico da equação de dispersão para quando $l=m=3$ e diferentes valores de $b = \frac{r_1}{r_2}$ . . . . .	90
Figura 37 – Esfera Ferromagnética Oca envolvida por um dielétrico . . . . .	91

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\gamma$	Letra grega Gama
$\in$	Pertence
$\delta$	Delta
$\Delta$	Delta
$\theta$	Teta
$\sigma$	Sigma
$\mu$	Mi
$\Omega$	Omega
$\kappa$	Kappa
$\omega$	Omega
$\Phi$	Phi
$\Psi$	Psi
$\epsilon$	Epsilon
$\eta$	Etta
$\alpha$	Alfa
$\omega$	Omega
$P_l^m$	Polinomio Asociado de Legendre
$\Xi$	Xi
$\zeta$	Zeta
$\rho$	Rho

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEORICA</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1	RESSONÂNCIA FERROMAGNÉTICA . . . . .	17
2.1.1	<b>Ressonância Ferromagnética causada por Campos Oscilantes Amor-</b> <b>tecidos</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1.2	<b>Modos Magnetostáticos em Ressonância Ferromagnética</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1.3	<b>Condição Magnetostática e Equação Característica</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAG-</b> <b>NÉTICA</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA	31
<b>4</b>	<b>MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAG-</b> <b>NÉTICA OCA</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1	MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA . . . . .	41
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	<b>47</b>
5.1	ANÁLISE DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA . . . . .	47
5.2	ANÁLISE GRÁFICA . . . . .	48
5.2.1	<b>Gráficos Esfera Ferromagnética Sólida</b> . . . . .	<b>48</b>
5.2.2	<b>Gráficos Esfera Ferromagnética Oca</b> . . . . .	<b>50</b>
5.2.2.1	<i>Modos Magnetostáticos <math>l = m</math> e <math>\theta_0 = \frac{\pi}{2}</math></i> . . . . .	50
5.2.2.2	<i>Gráficos da Relação de Disperção (<math>\Delta \times \frac{1}{R^2}</math>) para os modos <math>l=m</math> e <math>\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}</math></i>	56
5.2.2.3	<i>Modos Magnetostáticos <math>l=m</math> e <math>\theta_0 = \frac{\pi}{4}</math></i> . . . . .	58
5.2.2.4	<i>Modos Magnetostáticos <math>l = m</math> e <math>\theta_0 = 0</math></i> . . . . .	59
5.2.2.5	<i>Modos Magnetostáticos <math>l=m+1</math> e <math>\theta_0 = \frac{\pi}{2}</math></i> . . . . .	63
5.3	POLARIZAÇÃO DOS MODOS MAGNETOSTÁTICOS NA ESFERA FER- ROMAGNÉTICA OCA E PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DOS ESTA- DOS DE MAGNÉTIZAÇÃO . . . . .	66
5.3.1	<b>Polarização dos modos para <math>b = 0</math></b> . . . . .	<b>70</b>
5.3.2	<b>Grau de um Mapa de um Campo Vetorial</b> . . . . .	<b>71</b>
5.3.2.1	<i>Definição do Grau de um Mapa</i> . . . . .	71

5.3.2.2	<i>Aplicações do Grau de um Mapa: Relação entre o grau e Integral . . . . .</i>	72
5.3.2.3	<i>Grau de um Campo Vetorial numa Hiper Superfície . . . . .</i>	72
<b>5.3.3</b>	<b>Propriedades Topológicas dos Estados de Magnetização na Esfera Ferromagnética Oca . . . . .</b>	<b>73</b>
5.3.3.1	<i>Energia Magnética em uma casca curvilínea . . . . .</i>	74
5.3.3.2	<i>Caso da Casca Esférica . . . . .</i>	75
<b>5.3.4</b>	<b>Soluções Skyrmion para a Esfera Ferromagnética Oca Submicrométrica . . . . .</b>	<b>76</b>
5.3.4.1	<i>Hamiltoniano para a Esfera Ferromagnética Oca Submicrométrica . . . . .</i>	76
5.3.4.2	<i>Análise do Campo Vetorial da Magnetização da Esfera Ferromagnética Oca para <math>\phi = 0</math> . . . . .</i>	78
5.4	ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA COM UM CONDUTOR ELÉTRICAMENTE PERFEITO(PEC) . . . . .	82
<b>5.4.1</b>	<b>Gráficos da Relação de Dispersão da Esfera Ferromagnética Oca com um PEC . . . . .</b>	<b>88</b>
5.4.1.1	<i>Modos <math>l = m = 1</math> e <math>\theta = \theta_0 = \pi/2</math> . . . . .</i>	88
5.5	ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA COM UM DIELÉTRICO INTERNO . . . . .	91
<b>5.5.1</b>	<b>Determinando o Campo Elétrico <math>\vec{E}</math> . . . . .</b>	<b>92</b>
5.5.1.1	<i>Recalculando as Soluções Particulares dos Potenciais magnetostáticos para as três regiões em função dos coeficientes <math>B_l^m</math> . . . . .</i>	93
5.5.1.2	<i>Calculando <math>\vec{h}_{01}</math>, <math>\vec{b}_{02}</math> e <math>\vec{h}_{03}</math> . . . . .</i>	94
5.5.1.3	<i>Calculando o campo vetorial <math>\vec{E}_{r,\theta,\phi}</math> . . . . .</i>	94
5.5.1.4	<i>Determinando a correção de primeira ordem do campo vetorial <math>\vec{h}_0</math> : O campo <math>\vec{h}_1</math> . . . . .</i>	95
5.5.1.5	<i>Calculando o campo vetorial <math>\vec{h}_1(r, \theta, \phi)</math> . . . . .</i>	97
<b>5.5.2</b>	<b>Solução Numérica para Equação Característica da Esfera Ferromagnética Oca envolvida por um Dielétrico <math>\epsilon</math> . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>102</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A absorção por ressonância ferromagnética (FMR) foi discutida teoricamente por Gans, Loyarte (GANS; LOYARTE, 1921) e Dorfmann (DORFMANN, 1923) antes de sua descoberta experimental por Griffith (GRIFFITHS, 1946) no Laboratório Clarendon em Oxford em 1946. Em particular, o artigo teórico de Landau e Lifshitz escrito em Kharkov em 1935 (LANDAU; LIFSHITZ, 1992) sobre a teoria da dispersão para a permeabilidade magnética em materiais ferromagnéticos, foi a base para trabalhos relacionados. O artigo pioneiro de Griffith (GRIFFITHS, 1946) nos dá resultados experimentais sobre a absorção ressonante em algumas frequências de microondas em filmes finos de ferro, cobalto e níquel [(HURBEN; PATTON, 1996)]. O fenômeno da FMR tem sido amplamente utilizado como uma ferramenta para investigar propriedades magnéticas em materiais. A largura à meia altura do pico de ressonância pode ser interpretada de acordo com a teoria de relaxação temporal de sistemas magnéticos, de acordo com N. Bloembergen e com Landau e Lifshitz [(HOLSTEIN; PRIMAKOFF, 1940), (VLECK, 1951)]. Com os avanços científicos atuais e a possibilidade de obter diferentes estruturas e geometrias com dimensões nanométricas, os problemas de FMR ganharam destaque. Na literatura, o material comumente utilizado para a absorção ressonante é a granada de ítrio ferro (YIG), um material ferrimagnético [(PHILLIPS; ROSENBERG, 1966), (LEE et al., 2016)]. Um regime de excitação comumente usado é conhecido por modos magnetostáticos, em que  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ . Esses modos apresentam comprimentos de onda muito menores que os comprimento de onda eletromagnético com a mesma frequência [(HURBEN; PATTON, 1996), (HOLSTEIN; PRIMAKOFF, 1940)]. O comprimento de onda desses modos é grande o suficiente para negligenciar os efeitos de troca [(REZENDE, 2020)], onde os menores comprimentos de onda envolvidos tem dimensões aproximadamente iguais as do tamanho da amostra. Robert L. White e Irvin H. Solt, Jr publicaram um trabalho sobre multiplas ressonâncias ferromagnéticas em 1956 descobrindo experimentalmente que se aplicarmos campos magnéticos inomogêneos de radio frequência fixa em esferas de ferrita, a absorção de energia ocorre em varios campos magnéticos distintos. Isso é atribuído à existência de modos de oscilação de comprimento de onda longo da amostra ferromagnética, consistente com as condições de excitação para supor que essas novas absorções são associados a modos de oscilação do conjunto de spins em que a fase varia ao longo da amostra. Nos experimentos os campos excitantes de rf não variam muito rapidamente sobre a amostra e o comprimento de onda desses modos devem ser comparáveis

com as dimensões do material. No mesmo ano L.R.Walker escreveu um artigo pioneiro sobre os modos magnetostáticos em um elipsoide de ferrita, cujas dimensões micrométricas são grandes o suficiente para ignorar a energia de troca ao passo que são pequenas para ignorar a propagação eletromagnética. As forças no sistema são puramente magnetostáticas, cada spin se move proveniente do campo magnético externo e do campo dipolar resultante dos outros spins. As equações de Maxwell são resolvidas na aproximação magnetostática ( $\nabla \times \vec{H} = 0$ ) agregando com a equação de Landau-Lifshitz linearizada e sem amortecimento para obter as Equações Diferenciais Parciais do potencial magnetostático no espaço para que seja possível encontrar a equação característica dos modos magnetostáticos. O espectro dos modos do esferóides é descrito pelos parâmetros  $(n, m, r)$  provenientes dos Polinômios Associados de Legendre de primeira e segunda ordem,  $(P_n^m, Q_n^m)$  que são usados para expandir as soluções dos potenciais magnetostáticos dentro e fora do esferoide em função das coordenadas esferoidais do sistema,  $(\xi, \eta, \Phi)$  e o índice  $r$ , que é relacionado com os  $r$ -ésimos zeros da expansão do Polinômio Associado de Legendre  $P_n^m(z)$ . Este tema passou a ser amplamente estudado na literatura, explorando então outras geometrias ainda não estudadas, como o artigo sobre modos magnetostáticos em um cilindro ferromagnético oco de Patrizio Ansalone e Vittorio Basso em 2020. Os modos magnetostáticos ou modos de Walker foram inicialmente apresentados por Walker [(WALKER, 1957)] em uma geometria elíptica, e conseqüentemente com o caso particular de geometria esférica. Estudos sobre outras geometrias têm sido apresentados na literatura [(ESHBACH; DAMON, 1960), (SAKHAROV et al., 2019)]. A equação inicial para as soluções dos modos magnetostáticos é conhecida como equação de Walker. Trabalhos recentes apresentaram a solução para os modos magnetostáticos em cilindros ferromagnéticos ocos [(ANSALONE; BASSO, 2020)]. Os autores derivam uma expressão analítica para o potencial escalar magnetostático para os modos de superfície azimutais, uniformes ao longo do eixo do cilindro. Outros estudos apresentam alternativas a esta geometria, investigando como a dinâmica de spin é modificada em nanotubos magnéticos poligonais [(KÖRBER; KÉZSMÁRKI; KÁKAY, 2022)]. Os autores provam que diminuindo a simetria rotacional, um número crescente de modos de ondas de spin ocorre, que são degenerados para o cilindro perfeito. Para esferas ocas, poucos trabalhos foram apresentados, especificamente no estudo dos efeitos desmagnetizantes [(PRAT-CAMPS et al., 2015)]. Estudos recentes mostraram uma alternativa para estudar, através da eletrodinâmica aplicada à análise de TE (elétrico transversal), os modos ressonantes em esferas ferrimagnéticas [(KRUPKA et al., 2019)]. As soluções Skyrmion foram encontradas

em estudos sobre a topologia além da estabilidade de estados de magnetização de equilíbrio em casca esférica [(KRAVCHUK et al., 2016)]. Outra tentativa de estudar a dinâmica da magnetização em esferas ocas foi desenvolvido usando simulação micromagnética [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)]. Cascas esféricas ferromagnéticas nanométricas estão em alta demanda devido as suas aplicações tecnológicas em dispositivos de microondas, armazenamento de memória magnética, biomedicina, etc [(ANSALONE; BASSO, 2020)- (DOBROVOLSKIY et al., 2020)]. As propriedades de baixa densidade e forte absorção em uma ampla banda de frequência são necessárias para aplicações diferentes. Devido à importância de estudar novas geometrias para aplicações, o objetivo no presente trabalho foi encontrar a relação de dispersão para modos magnetostáticos em uma esfera ferromagnética oca.

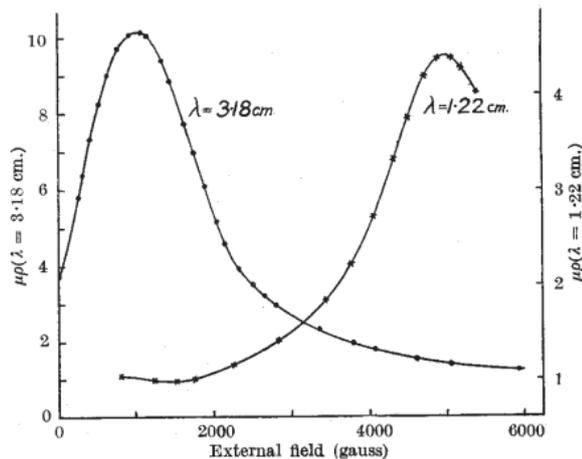
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 RESSONÂNCIA FERROMAGNÉTICA

A absorção por ressonância ferromagnética foi discutida teoricamente por (Gans , Loyarte) (GANS; LOYARTE, 1921) e Dorfmann(DORFMANN, 1923) antes de sua descoberta experimental por Griffiths (GRIFFITHS, 1946) no Laboratório Clarendon em Oxford em 1946. Em particular, o artigo teórico de Landau e Lifshitz(LANDAU; LIFSHITZ, 1992), escrito em Kharkov em 1935 sobre a teoria de dispersão da permeabilidade magnética em materiais ferromagnéticos deu base para novos trabalhos depois de algumas modificações essenciais. Depois da primeira observação da ressonância ferromagnética o desenvolvimento do tema, foi amplamente estudado e afetado por trabalhos em ressonância nuclear e paramagnética.

O artigo pioneiro de Griffiths (GRIFFITHS, 1946) nos da resultados experimentais da absorção de ressonância em algumas frequências de microondas em filmes finos de ferro, cobalto e níquel. É observado experimentalmente que, para altas frequências, existe uma perda maior de energia com o aumento do campo magnético externo, o que sugere que a energia está sendo usada por absorções ressonantes, Figura 1.

Figura 1 – Absorção anômala



Fonte: (GRIFFITHS, 1946)

No artigo do C.Kittel (KITTEL, 1951) é possível interpretar os resultados em termos da equação de Larmor, conectando a frequência de ressonância e o campo aplicado:

$$\omega_0 = g \frac{e}{2mc} H. \quad (2.1)$$

A demonstração da equação (2.1) é baseada na equação de movimento

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M} \times \vec{H}, \quad (2.2)$$

$\vec{J}$  é o momento angular por unidade de volume e  $\vec{M}$  é a magnetização. Supomos que

$$\vec{M} = \gamma \vec{J}, \quad (2.3)$$

sendo  $\gamma$  a razão giromagnética.

O campo  $\vec{H}$ , é constante e supomos que está na direção  $z$ . A magnetização é dada por

$$\vec{M} = m_x(t)\vec{i} + m_y(t)\vec{j} + M_z\vec{k}, \quad (2.4)$$

na base cartesiana  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Assumimos que  $m_x, m_y \ll M_z$ , aplicando a equação de movimento (2.2) e (2.3), temos que

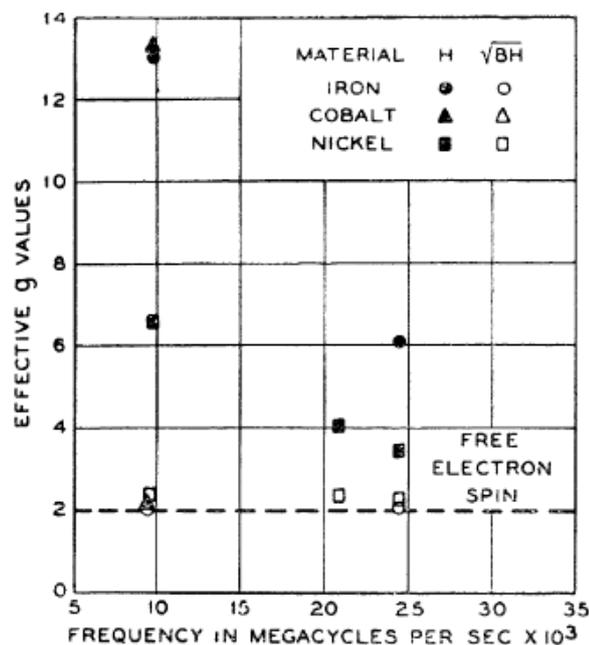
$$m_x(t) = m_0 \cos \omega_0, \quad m_y(t) = m_0 \sin \omega_0, \quad (2.5)$$

onde,

$$\omega_0 = \gamma H. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é usada para interpretar os resultados de Griffiths, onde encontramos os valores de  $g$  entre 2.1 e 2.2, Figura 2.

Figura 2 – Gráfico do artigo original do griffiths para diferentes valores de  $g$



Fonte: (KITTEL, 1951)

A frequência de ressonância depende da forma do objeto, em geral para um elipsoide com fatores desmagnetizantes  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  e com um campo magnético auxiliar externo estático na direção  $z$ , pode ser obtido por meio de

$$\omega_0 = \gamma [H_z + (N_y - N_z)M_z][H_z + (N_y - N_z)M_z]^{1/2}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) para a frequência  $\omega_0$ , no caso da esfera se reduz para

$$\omega_0 = \gamma H_z \quad (2.8)$$

que foi experimentalmente verificado pela primeira vez por Hewitt (JR, 1948). Se tivermos um cristal ferromagnético simples, a frequência de ressonância vai depender do ângulo de magnetização com o eixo cristalino, como resultado da energia de anisotropia magnética. Dado efeito foi descoberto em um simples cristal anisotrópico por Kip e Arnold (KIP; ARNOLD, 1949), que trabalharam no plano (001) do cristal de Si-Fe.

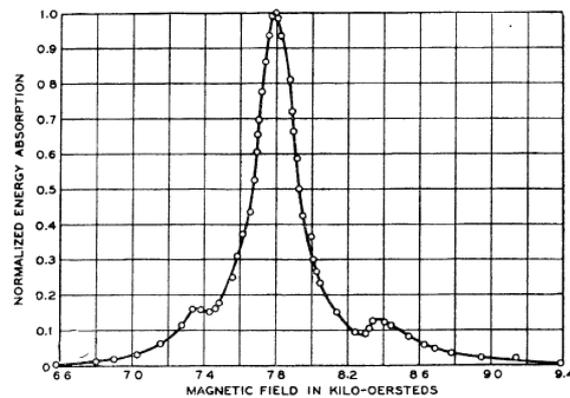
O efeito de troca em uma ressonância ferromagnética foi estudado por Kittel em 1950. Quando um objeto é uniformemente magnetizado, as interações de troca não fazem efeito na frequência de ressonância, como consequência de que o operador de magnetização  $\sum_i \vec{S}_{ix}$  comuta com o operador de troca  $\sum_{i,j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ . Na linguagem clássica temos que o campo magnético molecular de Weiss  $\vec{H}_w$  é sempre paralelo à magnetização  $\vec{M}$  e o torque  $\vec{H}_w \times \vec{M}$  deve desaparecer. Segundo Kittel, a densidade de energia de troca é escrita como

$$f_{troca} = \frac{A}{M_s^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{M})(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}), \quad (2.9)$$

sendo  $A = \frac{2JS^2}{a} = 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ ergs/cm}$  para o ferro.

A figura 3 mostra o gráfico da curva de ressonância no artigo de Kittel (1951), de pequenas esferas de Ferrita de Níquel  $NiO - Fe_2O_3$  :

Figura 3 – Curva de Ressonância, cuja ordenada é a absorção de energia, para um cristal simples de ferrita de níquel na forma de uma esfera, cujo diâmetro é 0.10cm e frequência de 24000mc/s (Yager, Galt, Merritt, Wood and Matthias).



Fonte: (KITTEL, 1951)

O fenômeno da ressonância ferromagnética tem sido muito usado como ferramenta para a investigação de propriedades magnéticas em ferritas. A orientação cristalográfica com o campo requerido para a ressonância nos dá informação acerca das constantes anisotrópicas magnéticas dos cristais. O campo magnético para ressonância corrigido pelos efeitos anisotrópicos nos dá o fator magnético  $g$ . Mais importante ainda é que a largura na meia altura do pico de ressonância em  $\omega$  ou em  $H$  pode ser interpretado de acordo com a teoria de relaxação temporal de sistemas magnéticos segundo N. Bloembergen (BLOEMBERGEN; PURCELL; POUND, 1948) ou Landau e Lifshitz (LANDAU; LIFSHITZ, 1992).

Dois problemas que pertencem a esta última propriedade tem intrigado por vários anos pesquisadores que usavam técnicas convencionais de ressonância ferromagnética: 1) Por que é um fato experimental que a absorção ressonante muitas vezes está longe de ser simétrica em forma e pode até exibir um máximo secundário, especialmente para amostras grandes. 2) Porque os tempos de relaxamento medidos das larguras de linha são pequenos?

A resposta para a primeira pergunta é que modos mais altos de ressonância ferromagnética, em que a fase precessional varia de ponto a ponto dentro da amostra, são apresentados para existir e ter campos para ressonância em geral diferentes do valor Kittel. O formato de linha "distorcido" e máximos secundários "espúrios" podem ser explicados como causa pela excitação acidental dos modos de ressonância altos.

### 2.1.1 Ressonância Ferromagnética causada por Campos Oscilantes Amortecidos

Consideramos que a amostra magnética é colocada em uma região onde existe um campo magnético estático  $\vec{H}$  e um campo oscilante perpendicular ao campo estático cuja frequência é  $\omega$ , sua intensidade pode ser escrita por

$$\vec{H} = (h_x \vec{i} + h_y \vec{j}) e^{-i\omega t} + H \vec{k}, \quad (2.10)$$

onde  $h_x, h_y \ll H$ . A magnetização é dada por

$$\vec{M} = (m_x \vec{i} + m_y \vec{j}) e^{-i\omega t} + M_z \vec{k}. \quad (2.11)$$

Se aplicarmos a equação de Landau-Lifshitz, vamos ter que na forma tensorial,

$$\vec{m} = \bar{\chi} \cdot \vec{h}, \quad (2.12)$$

onde  $\bar{\chi}$  é o tensor de suscetibilidade magnética representado pela matriz quadrada

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix},$$

onde

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2.13)$$

$$\chi_{yx} = -\chi_{xy} = i \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2.14)$$

onde  $\omega_M = 4\pi M_z$ , no sistema CGS. O que implica em que a amplitude da resposta da magnetização aumenta rapidamente quando a frequência  $\omega$  se aproxima de  $\omega_0$ , ou seja, a suscetibilidade diverge em  $\omega = \omega_0$ , que é uma situação não-física, mostrando então que a relação não pode ser ignorada. Resolvendo este problema introduzindo uma parte imaginária na frequência de ressonância, ou seja,  $\omega_0 \rightarrow (\omega_0 - i\eta)$ , onde  $\eta$  é a taxa de relaxação magnética. Então as novas componentes do tensor são

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega_0 \eta}, \quad (2.15)$$

$$\chi_{yx} = -\chi_{xy} = i \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega_0 \eta}, \quad (2.16)$$

para o caso onde  $\eta \ll \omega_0$ , que significa um pequeno amortecimento. Quando  $\omega \approx \omega_0$ , então,  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ , então as partes real e imaginária das componentes diagonais do tensor de suscetibilidade magnética se transformam em

$$\chi'_{xx} = \chi'_{yy} = \frac{\omega_M(\omega_0 - \omega)/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \eta}, \quad (2.17)$$

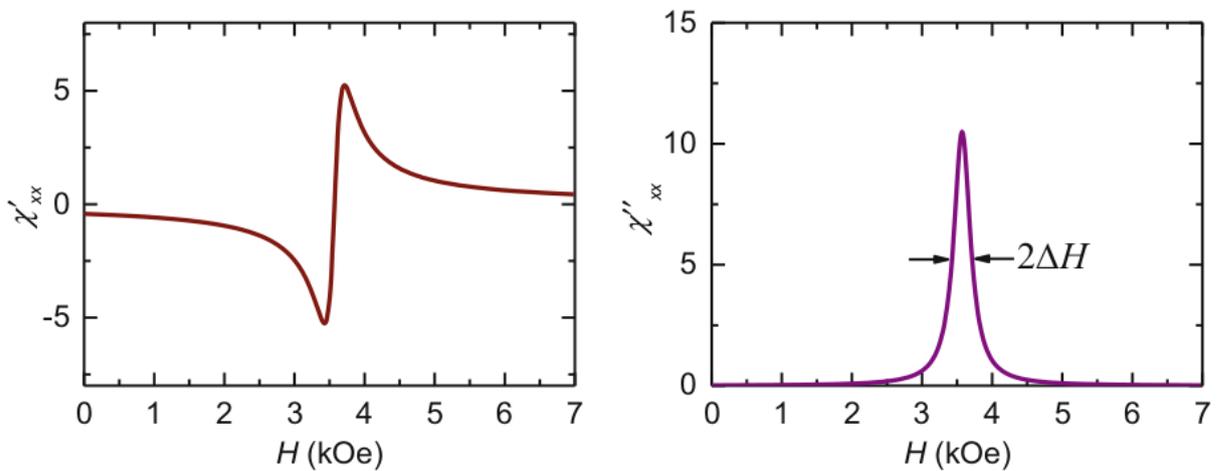
$$\chi''_{xx} = \chi''_{yy} = \frac{\omega_M\eta/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \eta}. \quad (2.18)$$

Assumindo que o campo somente tem componente  $h_x$ , a média temporal da potência absorvida pelo material, por unidade de volume, é dada por

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\omega\chi''_{xx}h_x^2. \quad (2.19)$$

A figura 4 mostra os gráficos da parte real e imaginária das componentes diagonais da suscetibilidade para uma frequência  $\omega$  constante

Figura 4 – Parte real e imaginária das componentes diagonais da suscetibilidade para uma frequência  $\omega/2\pi = 9.8GHz$ ,  $\omega_M = 3kOe$  e  $\eta/\omega = 0.04$ .



Fonte: (REZENDE, 2020)

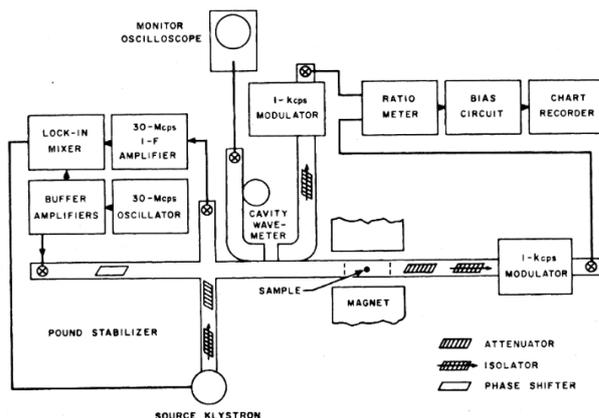
### 2.1.2 Modos Magnetostáticos em Ressonância Ferromagnética

Robert L. White e Irvin H.Solt Jr (WHITE; JR, 1956) em maio de 1956 publicaram o artigo "Multiplas Ressonâncias Ferromagnéticas em Esferas de Ferrita", mostrando que sob certas condições a absorção, em frequência fixa, pode passar por um número máximo quando o

campo magnético externo é variado. Uma condição necessária para a excitação destas múltiplas absorções é que o campo magnético externo seja inhomogêneo. A separação em relação ao campo externo desses picos extras podem ser interpretadas de acordo com a teoria de Kittel (KITTEL, 1951), usualmente excitada por campos uniformes, que estas separações são independentes do tamanho da esfera, para amostras suficientemente pequenas. Ao mesmo tempo estas separações dos picos dependem da magnetização de saturação da ferrita e variam com a temperatura. É consistente supor que estas novas absorções estão associadas a modos de oscilação de um conjunto de spins que sua fase varia ao longo da amostra. Nos experimentos os campos magnéticos não variam rapidamente na amostra e o comprimento de onda destes modos devam ser comparáveis as dimensões da amostra.

A figura 5 representa o aparato experimental, para detectar as potências absorvidas dos picos extras.

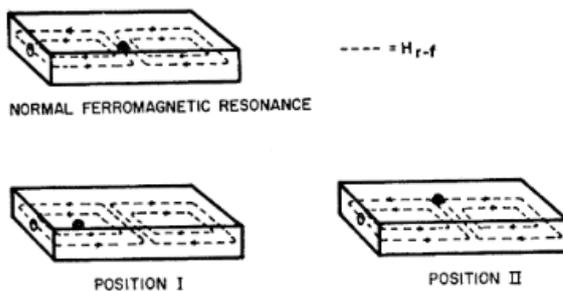
Figura 5 – Aparato experimental para a detecção.



Fonte: (WHITE; JR, 1956)

A figura 6 representa as posições da amostra na cavidade ressonante retangular  $TE_{102}$ .

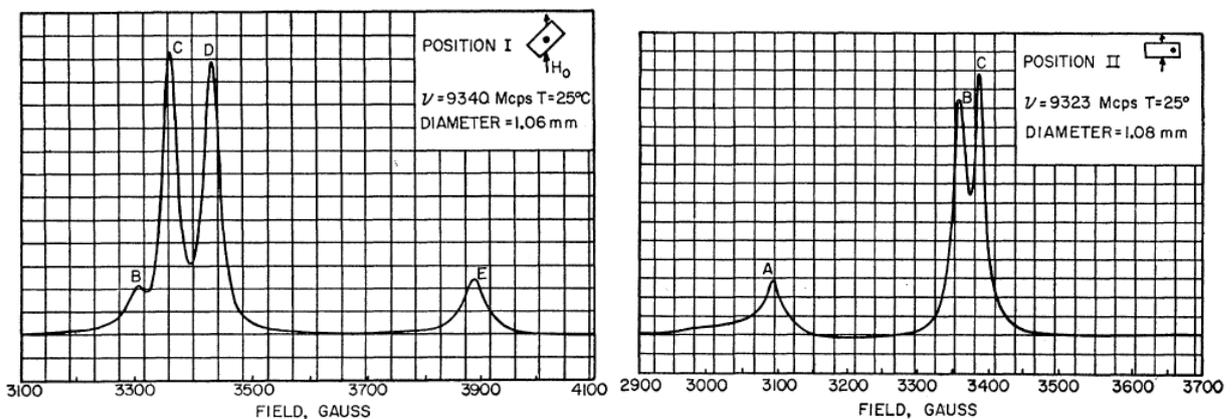
Figura 6 – Posição da amostra dentro da cavidade ressonante retangular para a ressonância ferromagnética.



Fonte: (WHITE; JR, 1956)

Na figura 7 podemos observar que a variação do campo magnético externo, numa dada frequência, causa os picos extras de absorção na esfera de ferrita. Quando é alterado a posição da amostra na cavidade ressonante, representa pelos autores por 'Posição 2', os picos *D* e *E* desaparecem enquanto o pico de absorção *A* surge e o *B* se torna mais evidente para os mesmo valores de campo magnético externo em Gauss. Ou seja, é possível excitar as absorções separadamente ou em subgrupos usando a posição apropriada da amostra dentro da cavidade e selecionando a orientação do campo magnético externo.

Figura 7 – Gráficos da Potência Magnética absorvida em função do campo magnético na amostra. Artigo "Multiplas Ressonâncias Ferromagnéticas em Esferas de Ferrita, Robert L. White e Irvin H. Solt Jr (1956)", apresentam picos extras causados pelo campo magnético inhomogeneo ocasionados pelo gradiente do campo magnético ao mudar as posições do circuito.



Fonte: (WHITE; JR, 1956)

Em 1956, L.R Walker publicou o artigo "Modos Magnetostáticos em Ressonância Ferromagnética"(WALKER, 1957), onde elipsoides ferromagnéticos cujas dimensões não são menores que alguns micrômetros, implicando que os menores comprimentos de onda são nessa ordem. Podemos então ignorar as interações de troca e pseudo dipolares cujo campo efetivo de troca para um comprimento de onda  $\lambda(cm)$  vale  $\frac{10^{-8}}{(\lambda)^2}$  oersteds, então  $\lambda$  deve ser aproximadamente  $10^{-5}cm$  antes da troca se tornar comparável com o campo magnético aplicado usual que vale em torno de alguns kilogauss. O termo pseudo dipolar será menor do que isto devido as interações de troca. A propagação eletromagnética dentro da ferrita será sempre significativa quando a frequência e o campo aplicado são necessários para produzir uma permeabilidade efetiva alta no meio. O range dessas frequências será mais estreito quanto menor for a amostra, então a propagação será tomada em conta se as dimensões do material ferromagnético for da ordem desses comprimentos de onda provenientes da onda eletromagnética.

Elipsoides cujas dimensões são da ordem de poucos micrômetros, é de se esperar que

a propagação eletromagnética não seja importante para essas dimensões. Ou seja, amostras cujas dimensões são suficientemente grandes para ignorar as interações de troca e pequenas o suficiente para negligenciar propagação, exceto em regiões críticas do campo e frequência onde devem ter modos que são essencialmente independentes do tamanho. Por hora consideramos que as interações são puramente magnétostáticas, cada spin se move sob ação do campo magnético externo e o campo dipolar resultante dos outros spins.

Então, iremos deixar a propagação de lado e assumiremos que os spins desviam suavemente da direção de propagação do campo magnético aplicado e que as equações de movimento devem ser linearizadas. Suas soluções fornecem uma relação entre as componentes transversais da magnetização e do campo magnético externo. Dado que o campo magnético externo está orientador no eixo  $z$ , temos que

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = H_i \vec{\mathbf{1}}_z + \vec{\mathbf{h}} e^{i\omega t}, \quad (2.20)$$

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = M_0 \vec{\mathbf{1}}_z + \vec{\mathbf{m}} e^{i\omega t}, \quad (2.21)$$

onde  $\omega$  é a frequência do campo magnético externo,  $\vec{\mathbf{h}}$  está localizado no plano  $x - y$  e é pequeno comparado a  $H_i$ . O mesmo acontece para  $\vec{\mathbf{m}}$  que está no plano  $x - y$  e é pequeno comparado a  $M_0$ , que é chamado de magnetização de saturação.

### 2.1.3 Condição Magnétostática e Equação Característica

Pelas Equações de Maxwell, sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + 4\pi \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) \quad (2.23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + 4\pi \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t)) = 0, \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}. \quad (2.25)$$

A condição de magnetostática negligencia a equação de Maxwell propagante, ou seja

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0, \quad (2.26)$$

como não temos densidades de corrente  $\vec{\mathbf{J}}$ , então

$$\vec{\mathbf{J}} = 0. \quad (2.27)$$

Temos que as equações a serem usadas são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.29)$$

A aproximação é chamada de "magnetostática", pois a condição  $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = 0$  é válida apenas no limite de baixa frequência, em relação a frequência da luz, para um dado número de onda  $k$ . Para uma excitação magnética, cuja frequência é dada por  $\omega_k$ , esta condição implica em

$$\omega_k \ll kc, \quad (2.30)$$

ou seja, para uma frequência  $\omega_k$ , o número de onda  $k$  do modo será muito maior que o da luz  $k_0$  nessa mesma frequência. A amostra será um esferoide cujo eixo de simetria será o eixo  $z$ , onde será aplicado o campo magnético externo. A razão do eixo longitudinal  $b$ , com o eixo transversal  $a$ , será denotada por  $\alpha$ . Para a condição magnetostática (2.29), podemos considerar soluções em onda plana para os campos  $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  e  $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  cuja frequência  $\omega_k$  e o vetor de onda  $\vec{\mathbf{k}}$  são dados por

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{h}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}, \quad (2.31)$$

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{m}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}. \quad (2.32)$$

Substituímos as equações (2.31), (2.32) e a condição magnetostática (2.29) na equação (2.24), para obter a expressão do dipolo  $\mathbf{h}_k$  associado a uma onda de spin propagante cujo vetor de onda e frequência  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_k$  respectivamente

$$\mathbf{h}_k \approx -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_k). \quad (2.33)$$

O objetivo é começar do conjunto completo das equações de Maxwell (para quando  $\vec{\mathbf{J}} = 0$ ) e encontrar uma solução geral para  $\mathbf{h}_k$ , demonstrando que esta expressão se reduzirá a equação (2.33) no limite  $k \gg k_0$ . Aplicando o rotacional na equação de Maxwell (2.25) e usando a equação (2.23) obtemos a equação de onda para o vetor  $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ , supondo soluções em ondas planas (2.31) e (2.32) a relação geral entre as amplitudes independentes do tempo  $\mathbf{h}_k$  e  $\mathbf{m}_k$  é dada por

$$\mathbf{h}_k = -\frac{1}{k^2 - k_0^2} 4\pi \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_k) + \frac{k_0^2}{k^2 - k_0^2} 4\pi \mathbf{m}_k. \quad (2.34)$$

Como já indicado,  $k_0$  é o número de onda para uma onda eletromagnética se propagando na mesma frequência  $\omega_k$  em um dielétrico

$$k_0 = \frac{\omega_k}{c} \sqrt{\epsilon}. \quad (2.35)$$

Então, no limite  $|k| \gg k_0$  a expressão para a amplitude  $\mathbf{h}_k$  é tal que somente a contribuição do campo de dipolo permanece e retornamos a equação (2.33), evidenciando assim a natureza da aproximação magnetostática.

O campo interno desmagnetizante dentro do esferoide,  $H_0 - 4\pi M_0 N_z$ , [(OSBORN, 1945)] será chamado de  $H_i$ .

A equação de movimento é dada pela fórmula de Landau-Lifshitz sem amortecimento

$$\frac{d\vec{\mathbf{M}}}{dt} = \gamma \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}} \quad (2.36)$$

Na aproximação linear, se transforma em

$$i\omega \vec{\mathbf{m}} = \gamma \left[ \vec{\mathbf{1}}_z \times (M_0 \vec{\mathbf{h}} - H_i \vec{\mathbf{m}}) \right]. \quad (2.37)$$

As quantidades  $\vec{\mathbf{h}}$  e  $\vec{\mathbf{m}}$ , devem satisfazer as equações (2.17) e (2.18)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{h}} = 0 \quad (2.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{h}} + 4\pi \vec{\mathbf{m}} = 0, \quad (2.39)$$

dado que estamos usando o sistema CGS de unidades. Temos que a propagação é ignorada, Podemos atribuir um potencial  $\Psi$ , dado que  $\vec{\mathbf{h}} = \vec{\nabla} \Psi$ , então

$$\nabla^2 \psi + 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{m}} = 0. \quad (2.40)$$

A equação (2.16) pode ser escrita como

$$i\omega m_x = \gamma(H_i m_y - M_0 h_y), \quad (2.41)$$

$$i\omega m_y = \gamma(-H_i m_x + M_0 h_x). \quad (2.42)$$

Sabemos que  $\vec{h} = \vec{\nabla}\Psi$ , substituímos  $m_x$  e  $m_y$  na equação (2.19), então

Para dentro do esferoide, temos

$$(1 + \kappa)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.43)$$

Para fora do esferoide, temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0,$$

onde  $\kappa = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}$ ,  $\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}$ ,  $v = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}$ .

Então, temos que aplicar as condições de contorno do problema, onde a continuidade do potencial magnetostático na superfície e a componente normal do campo magnético são contínuas.

Definimos as coordenadas esferoidais como sendo  $(\xi, \eta, \Phi)$ , logo

$$x = (a^2 - b^2)(1 + \xi^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \cos \Phi, \quad (2.44)$$

$$y = (a^2 - b^2)(1 + \xi^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \sin \Phi, \quad (2.45)$$

$$z = (a^2 - b^2)\xi\eta, \quad (2.46)$$

A equação da superfície do elipsoide é

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.47)$$

onde é dada por  $\xi = \xi_0$  e  $\xi_0^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$ .

A solução em polinômios associados de Legendre do primeiro e segundo tipo para a solução exterior é dada por

$$\Psi_e = Q_l^m(i\xi)P_l^m(\eta) \exp\{im\Phi\}. \quad (2.48)$$

Para a solução interior temos que

$$\Psi_i = P_l^m(i\xi)P_l^m(\eta) \exp\{im\Phi\}. \quad (2.49)$$

Usando a versão integral dos polinômios de Legendre interiores e as condições de contorno usuais, temos que a equação característica vale

$$i\xi_0 \frac{Q_l^{m'}(i\xi_0)}{Q_l^m(i\xi_0)} - i\xi_0' \frac{P_l^{m'}(i\xi_0')}{P_l^m(i\xi_0')} = mv \frac{b^2}{a^2} = mv\alpha^2, \quad (2.50)$$

onde,

$$\xi' = \frac{(1 + \kappa)^{1/2}\alpha}{[1 - (1 + \kappa)\alpha^2]^{1/2}}. \quad (2.51)$$

As naturezas das soluções da equação característica são interpretadas mais claramente se escritas em função dos zeros da função dos polinômios associados de Legendre para observarmos o espectro, onde podemos escrever a mesma como sendo

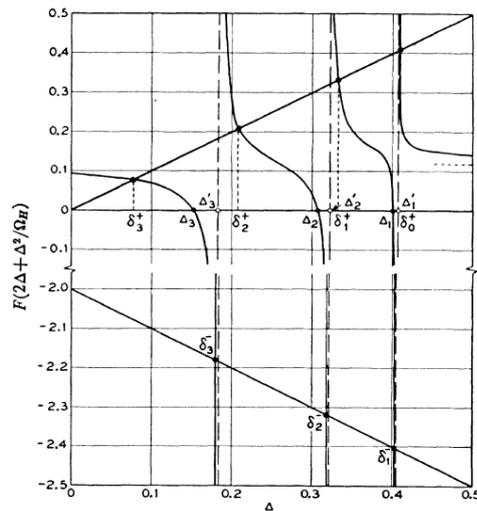
$$F\left(2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H}\right) = |m| \left( G_{l,m}(\alpha) + 2 \sum_{r=1}^p \frac{1 - (2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H})}{\alpha^2(1 - z_r^2) - [z_r^2 + \alpha^2(1 - z_r^2)](2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H})} \right)^{-1}$$

onde  $z_r$  são os zeros da função dos polinômios de Legendre e  $\Delta = \Omega - \Omega_H$ . Temos que

$$F\left(2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H}\right) = \Delta \quad \text{para} \quad m > 0, \quad (2.52)$$

$$F\left(2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H}\right) = -(\Delta + 2\Omega) \quad \text{para} \quad m < 0. \quad (2.53)$$

Figura 8 – Gráfico original de  $F\left(2\Delta + \frac{\Delta^2}{\Omega_H}\right)$  em função de  $\Delta$  e as retas  $\Delta$  e  $-(\Delta + 2\Omega)$  para o caso onde  $l = 8$  e  $m = 2$  [ $p = 3$ ].



Fonte: (WALKER, 1957)

A Figura 8 mostra o gráfico original do artigo de L.R.WALKER, onde podemos observar que a intersecção dos gráficos (as curvas e retas) são as soluções da equação característica representando então os modos magnétostáticos.

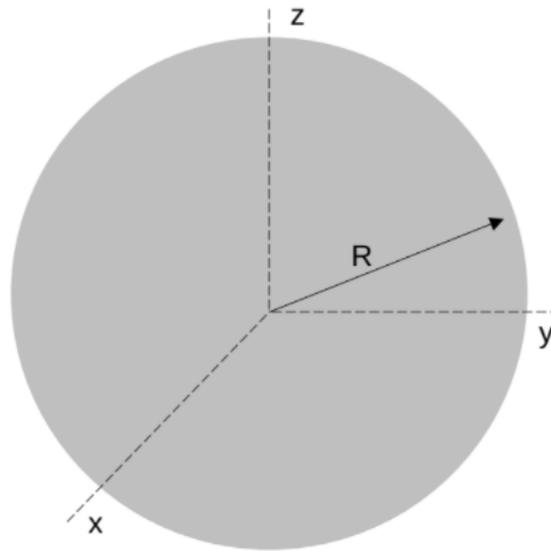
Com isto podemos calcular qualquer modo  $(l, m, r)$ , onde  $r$  é o  $r$ -ésimo zero da função dos polinômios associados de Legendre. E podemos observar o gráfico da variação de frequências reduzidas em função da frequência  $\Omega_H$ , para o caso da esfera sólida, para diferentes modos. A esfera é um caso típico pois ocorrem modos de degenerescência, especialmente entre os modos uniformes. Ou seja, existem dois modos com diferentes valores de  $n, m, r$  que têm a mesma frequência  $\omega$ . O trabalho de Walker é um pioneiro na determinação da equação característica e no cálculo dos modos magnetostáticos em um esferoide, e seu caso especial quando a excentricidade é igual a 1, onde se foi dando abertura para vários outros trabalhos abordando outras geometrias.

### 3 MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA

#### 3.1 MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA

A figura 9 representa uma esfera ferromagnética onde  $R$  é o raio, dado que a região interna é formada por um material ferromagnético.

Figura 9 – Esfera ferromagnética sólida de raio  $R$



Fonte: Desenhado pelo autor

Para encontrar a relação de dispersão temos que aplicar a equação de Landau-Lifshitz e usar a aproximação magnetostática já vista no capítulo de Fundamentação teórica. Separamos o problema em duas partes, já vistas anteriormente no artigo do Walker (WALKER, 1957).

1º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região externa ( $r > R$ )

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0. \quad (3.1)$$

2º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região interna ( $r < R$ )

$$(1 + \kappa) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\kappa = \frac{\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}$ ,  $\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}$ ,  $v = \frac{\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ .

Pela simetria esférica do problema usaremos a expansão em polinômios associados de Legendre, onde a solução geral é

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (\alpha_l^m r^l + \beta_l^m r^{-l-1}) P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (3.3)$$

Para a região interna, faremos a mudança de variável  $z \rightarrow z' = (1 + \kappa)^{1/2} z$  obtendo a nova EDP da seguinte forma

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Psi = 0. \quad (3.4)$$

Temos que a nova coordenada  $z'$  depende das novas coordenadas esféricas  $(r', \theta')$  representada na equação (3.5)

$$z' = r' \cos \theta', \quad (3.5)$$

onde

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (1 + \kappa)z^2, \quad (3.6)$$

$$r'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \kappa z^2, \quad (3.7)$$

$$r'^2 = r^2 + \kappa r^2 \cos^2 \theta, \quad (3.8)$$

$$r' = r \left( 1 + \kappa \cos^2 \theta \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Então para calcular  $\cos \theta'$  temos que

$$\cos \theta' = \frac{z'}{r'}, \quad (3.10)$$

$$\cos \theta' = \frac{z(1 + \kappa)^{1/2}}{r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}}. \quad (3.11)$$

Logo, para simplificar escrevemos

$$P_l^m(\cos \theta') = P_l^m \left( \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}} \right). \quad (3.12)$$

- Dado que  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , sendo  $z_1 = \cos \theta'$  e  $z_2 = r'$ ;

Para  $z_1$ , o domínio é

$$|z_1| < 1,$$

$$0 < \sqrt{\left| \frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta} \right|} < 1.$$

A restrição que temos é dada por

$$1 + \kappa \cos^2 \theta \neq 0,$$

Em termos das frequências reduzidas temos

$$\Omega \neq \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + \Omega_H \cos^2 \theta)}.$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_1$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Laplace ( $\nabla^2(\Psi_2') = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica dada por

$$(1 - z_1^2)y'' - 2z_1y' + \left( \lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - z_1^2} \right) z_1 = 0,$$

que tem singularidades em  $z_1 = 0$  e  $z_1 = 1$ . Sendo  $y = P_l^m(z_1)$ , os polinômios associados de Legendre do 1º tipo, pois para  $|z_1| > 1$ , não existe domínio então a solução do 2º tipo  $y = Q_l^m(z_1)$  é descartada. Logo  $z_1$  é analítica na região  $|z_1| < 1$

Para  $z_2$ , o domínio é dado por

$$|z_2| > 0,$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_2$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Laplace ( $\nabla^2(\Psi_2') = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica confluyente, que por sua vez apresenta uma singularidade em  $z_2 = 0$ . Logo é analítica na região  $|z_2| > 0$ .

Que nos dá garantia que a parte radial é expandida

$$R_l(z_2) = B_l' z_2^l + C_l' \frac{1}{z_2^{l+1}},$$

Então, vamos escrever a solução do potencial magnetostático para as 2 regiões

Para  $r < R$  temos

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_l^m (r')^l P_l^m(\cos \theta') \exp(im\phi). \quad (3.13)$$

Substituindo  $r'$  concluímos

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_l^m r^l (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (3.14)$$

Para  $r > R$  temos que

$$\Psi_2(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} B_l^m r^{-l-1} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (3.15)$$

Existem duas condições de contorno para o problema

1º) Continuidade do Potencial Magnetostático em  $r = R$ .

2º) Continuidade da componente normal do campo magnético em  $r = R$ , ou seja,  $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal}$ .

Sabemos do capítulo de Fundamentação Teórica que;

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\nabla}\Psi, \quad (3.16)$$

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.17)$$

$$4\pi m_y = iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (3.18)$$

Para calcular a componente normal do campo magnético temos que fazer o produto interno com o versor  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (3.19)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$ . Sabemos que o campo magnético dentro do material vale

$$(\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.20)$$

Fazemos as transformações

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.23)$$

Então a componente normal do campo magnético  $\vec{\mathbf{B}}$  dentro do material em relação as coordenadas esféricas vale

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = (1 + \kappa \sin^2 \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\kappa \sin 2\theta}{2r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{iv}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (3.24)$$

Para calcular a componente normal do campo para  $r > R$  basta atribuir  $\kappa = 0$  e  $v = 0$ . Aplicamos a primeira condição de contorno para  $r = R$ , temos que

Para  $r = R$

$$\Psi_1(r = R, \theta, \phi) = \Psi_2(r = R, \theta, \phi) \quad (3.25)$$

Igualando termo a termo, temos que

$$B_l^m = R^{2l+1} A_l^m (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \frac{P_l^m(\cos \theta')}{P_l^m(\cos \theta)}. \quad (3.26)$$

Aplicamos a segunda condição de contorno para  $r = R, \theta, \Phi$ :

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal}^{r < R}(r = R, \theta, \phi) = \vec{\mathbf{B}}_{normal}^{r > R}(r = R, \theta, \phi) \quad (3.27)$$

Igualando os termos, temos

$$B_l^m = -(l+1)^{-1} A_l R^{2l+1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} [\kappa l \sin^2 \theta + l + mv - 0.25(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{-1} \kappa^2 l \sin 2\theta] \times \frac{P_l^m(\cos \theta')}{P_l^m(\cos \theta)} + 0.5\kappa \sin 2\theta + \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{P_l^m(\cos \theta) d\theta} \quad (3.28)$$

Igualando os  $B_l^m$ , temos que a relação de dispersão da esfera sólida ferromagnética para o caso onde  $\theta = \theta^*$  que é atribuido nas condições de contorno vale

$$\left[ l\kappa \sin^2 \theta^* + 2l + 1 + mv - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta^*}{4(1 + \kappa \cos^2 \theta^*)} + \frac{\kappa \sin 2\theta^* \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta^*))}{d\theta}}{2P_l^m(\cos \theta'(\theta^*))} \right] = 0.$$

(3.29)

Usando as relações de recorrência dos polinômios associados de Legendre (3.37) e (3.38), podemos provar que para  $l = m + i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  a relação de dispersão independe do ângulo  $\theta^*$ , cada modo magnetostático é definido pelos índices  $(l, m)$ .

Temos como base para este trabalho o artigo do R. Plumier 1961 (PLUMIER, 1962) onde obtem-se modos magnetostáticos para uma esfera ferromagnética. A principal diferença é como são definidos os potenciais interior e exterior a esfera ferromagnética onde o potencial fora da esfera é

$$\Psi_{l,m}^+ = c \frac{R^{2l+1} P_l^m \exp\{im\Phi\}}{r^{l+1}} = c \frac{R^{2l+1} Y_l^m}{r^{l+1}} \quad (3.30)$$

O potencial dentro vale

$$\Psi_l^m = cr^l Y_l^m \quad (3.31)$$

A ideia principal é usar a forma integral dos polinômios de Legendre interiores, onde podemos encontrar no livro do Whittaker-Watson e substituir o  $z$  por  $z' = (1 + \kappa)^{1/2} z$  então,

$$\Psi_l^m = \frac{(l+m)!}{2\pi i^m l!} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{imu} du [(z + ix + iy)^l + \sum_{p=1}^l \frac{l!}{p!(l-p)!} (z + ix + iy)^{l-p} \left(\frac{r \cos \theta \kappa}{1 + (1 + \kappa)^{1/2}}\right)^p] \right], \quad (3.32)$$

pois usamos a expansão binomial e o fato de que

$$(1 + \kappa)^{1/2} = 1 + \frac{\kappa}{1 + (1 + \kappa)^{1/2}}. \quad (3.33)$$

De acordo com a relação de recorrência (3.39)

$$(2l + 1) \cos \theta P_l^m(\cos \theta) = (l + m) P_{l-1}^m(\cos \theta) + (l - m + 1) P_{l+1}^m(\cos \theta), \quad (3.34)$$

podemos provar que a série para o potencial inferior é finita e da forma

$$\Psi_l^m = r^l \exp\{im\Phi\} \left[ f_0 P_l^m + f_1 P_{l-2}^m + f_2 P_{l-4}^m + \dots + f_{[1/2(l-m)]} P_{l-[1/2(l-m)]}^m \right], \quad (3.35)$$

onde os  $f_0, f_1, f_2, \dots$  são funções de  $l, m$  e  $\kappa$ . Segue a Tabela 1 dos potenciais interiores de acordo com essa lógica

Tabela 1 – Tabela contendo os potenciais magnetostáticos interiores segundo R.Plumier

$l$	Potencial Magnetostático Interior
$l = m$	$\Psi = cr^l Y_l^l$
$l = m + 1$	$\Psi = cr^l Y_l^{l-1}$
$l = m + 2$	$\Psi = cr^l Y_l^{l-2} + c \frac{f_0}{f_1} r^{l-2} Y_{l-2}^{l-2} (r^2 - R^2)$
$l = m + 3$	$\Psi = cr^l Y_l^{l-3} + c \frac{f_0}{f_1} r^{l-2} Y_{l-2}^{l-3} (r^2 - R^2)$

Fonte: (PLUMIER, 1962)

Se usarmos a condição de contorno da igualdade das componentes normais do campo magnético dentro e fora da esfera ferromagnética em  $r = R$  para  $l = m$  ( na notação de Plumier seria  $n = m$ ),  $l = m + 1, l = m + 2 \dots$ , temos que

Primeiro tomamos  $l = m$ , então

$$B_{outside}^{normal}(r = R, \theta, \Phi) = B_{inside}^{normal}(r = R, \theta, \Phi) \quad (3.36)$$

Tomamos para o caso onde  $l = m$  o  $\Psi_l^l = \Psi$ , então usamos a equação (3.24) para dentro e fora da esfera e usando as relações de recorrência

$$1) \quad (2l + 1) \cos \theta P_l^m(\cos \theta) = (l + m) P_{l-1}^m(\cos \theta) + (l - m + 1) P_{l+1}^m(\cos \theta), \quad (3.37)$$

$$2) \quad \frac{dP_l^m(f(\theta))}{d\theta} = \frac{\left(\frac{df(\theta)}{d\theta}\right)}{(f(\theta))^2 - 1} \left[ l f(\theta) P_l^m(f(\theta)) - (l + m) P_{l-1}^m(f(\theta)) \right]. \quad (3.38)$$

Podemos provar que para  $l = m$  a relação de dispersão calculada por Plumier vale

$$2l + 1 + l(\kappa + v) = 0. \quad (3.39)$$

Se fizermos para  $l = m + 1$  o potencial interno é dado por

$$\Psi = cr^l P_l^{l-1}(\cos \theta) \exp(i(l-1)\Phi). \quad (3.40)$$

Usando a condição de contorno da normal do campo magnético novamente e as relações de recorrências (3.37) e (3.38) podemos provar que a relação de dispersão de R.Plumier é

$$2l + 1 + (l-1)(\kappa + v) = 0 \quad (3.41)$$

Assim como a relação de dispersão dos modos  $l = m$  podemos notar que a relação de dispersão (3.41) não depende dos ângulos  $\theta^*$  e  $\Phi$  e podemos provar que por causa das relações de recorrência (3.37) e (3.38) é possível generalizar esta ideia de invariância dos ângulos  $\theta^*$  e  $\Phi$  para outros valores de  $l = m + i$ , sendo  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  e desta mesma maneira encontramos as outras relações de dispersão para  $i = 2, 3, 4, 5$ .

Sendo ângulos invariantes  $\theta^*$  e  $\Phi$  para a relação a equação característica no artigo do R.Plumier podemos tomar a liberdade de escolher ângulos específicos para a nossa ideia de resolução da relação de dispersão do mesmo problema das esferas ferromagnéticas pois não importa a escolha dos ângulos, a equação característica deve ser a mesma para os modos  $l = m + i$ . Já fizemos isto acima quando igualamos as componentes normais dentro e fora da esfera ferromagnética usando o modelo de solução proposto por este trabalho. Como exemplo disto para  $l = m$ , temos que a relação de dispersão é

$$\left[ l\kappa \sin^2 \theta^* + 2l + 1 + lv - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta^*}{4(1 + \kappa \cos^2 \theta^*)} + \frac{\kappa \sin 2\theta^* \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta^*))}{d\theta}}{2P_l^m(\cos \theta'(\theta^*))} \right] = 0. \quad (3.42)$$

Dado as relações (3.37) e (3.38), provamos que para  $l = m$

$$\frac{\kappa \sin 2\theta^* \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta^*))}{d\theta}}{2P_l^m(\cos \theta'(\theta^*))} = \frac{l\kappa(\kappa + 1) \cos^2 \theta^*}{1 + \kappa \cos^2 \theta^*}. \quad (3.43)$$

Substituindo em (3.42), temos

$$2l + 1 + lv + l\kappa \sin^2 \theta^* - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta^*}{4(1 + \kappa \cos^2 \theta^*)} + \frac{l\kappa(\kappa + 1) \cos^2 \theta^*}{1 + \kappa \cos^2 \theta^*} = 0, \quad (3.44)$$

Tomando um mesmo denominador, temos

$$2l + 1 + lv + \frac{l\kappa(\kappa \cos^2 \theta^* + \cos^2(\theta^*) + \sin^2(\theta^*))}{1 + \kappa \cos^2 \theta^*} = 0, \quad (3.45)$$

podemos simplificar e obter a relação de dispersão para os modos  $l = m$ , que é a mesma obtida por R.Plumier[(PLUMIER, 1962)]

$$2l + 1 + l(\kappa + v) = 0. \quad (3.46)$$

Para  $l = m + 1$ , usamos as mesmas relações de recorrência (3.37) e (3.38), para calcular a fração dada por

$$\frac{\kappa \sin 2\theta^* \frac{dP_l^{l-1}(\cos\theta'(\theta^*))}{d\theta}}{2P_l^{l-1}(\cos\theta'(\theta^*))}, \quad (3.47)$$

onde obtemos que a relação de dispersão (3.29), para  $l = m + 1$ , é dada por

$$2l + 1 + (l - 1)(\kappa + v) = 0, \quad (3.48)$$

sendo a mesma expressão encontrada por R.Plumier [(PLUMIER, 1962)]. Para os seguintes modos  $l = m + 2, l = m + 3, l = m + i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , se usarmos as relações de recorrência (3.37) e (3.38) provaremos que as relações de dispersão independem dos ângulos  $\theta^*$  e  $\Phi$ , obtendo então os mesmos resultados de R.Plumier.

A relação de dispersão (3.29), pode ser interpretada como um limite de  $\theta \rightarrow \alpha$ , onde  $\alpha$  é um ângulo qualquer, pois provamos a invariância dos ângulos. Temos que

$$\left[ l\kappa \sin^2 \theta + 2l + 1 + mv - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta}{4(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{\kappa \sin 2\theta \frac{dP_l^m(\cos\theta')}{d\theta}}{2P_l^m(\cos\theta')} \right]_{\theta \rightarrow \alpha} = 0 \quad (3.49)$$

Escolhemos o valor  $\alpha = \pi/2$  e o modo  $l = m + 1$ , o limite

$$L = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \kappa \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{dP_l^{l-1}\left(\sqrt{\frac{\cos^2 \theta(1+\kappa)}{1+\kappa \cos^2 \theta}}\right)}{\frac{d\theta}{P_l^{l-1}\left(\sqrt{\frac{\cos^2 \theta(1+\kappa)}{1+\kappa \cos^2 \theta}}\right)}} \right], \quad (3.50)$$

será calculado usando as relações (3.37) e (3.38) onde  $f(\theta) = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta(1+\kappa)}{1+\kappa \cos^2 \theta}}$ , então

$$L = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} -\kappa \sin \theta \cos \theta \frac{\frac{df(\theta)}{d\theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{1+\kappa \cos^2 \theta}} \left[ \frac{l f(\theta) P_l^{l-1}(f(\theta)) - \frac{P_l^{l-1}}{f(\theta)}}{P_l^{l-1}} \right], \quad (3.51)$$

$$L = -\kappa. \quad (3.52)$$

Substituindo em (3.49), temos que para  $l = m + 1$

$$2l + 1 + l\kappa + lv - v - \kappa = 0, \quad (3.53)$$

$$2l + 1 + (l - 1)(\kappa + v) = 0. \quad (3.54)$$

Se atribuirmos o valor de  $\alpha = 0$  e o modo  $l = m + 1$  na equação característica (3.49), temos

$$\left[ 2l + 1 + (l - 1)v + \lim_{\theta \rightarrow 0} \kappa \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{dP_l^{l-1}(\sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1+\kappa)}{1+\kappa \cos^2 \theta}})}{P_l^{l-1}(\sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1+\kappa)}{1+\kappa \cos^2 \theta}})} \right] \right] = 0. \quad (3.55)$$

Chamamos o limite da equação (3.55) de  $L'$ , então usando as relações (3.41) e (3.42), temos

$$L' = \lim_{\theta \rightarrow 0} -\kappa \sin \theta \cos \theta \frac{\frac{df(\theta)}{d\theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{1+\kappa \cos^2 \theta}} \left[ \frac{l f(\theta) P_l^{l-1}(f(\theta)) - \frac{P_l^{l-1}}{f(\theta)}}{P_l^{l-1}} \right], \quad (3.56)$$

por fim, o valor do limite  $L'$  é

$$L' = l\kappa - \kappa. \quad (3.57)$$

Substituindo em (3.55), encontramos a mesma relação de dispersão (3.48)

$$2l + 1 + (l - 1)(\kappa + v) = 0, \quad (3.58)$$

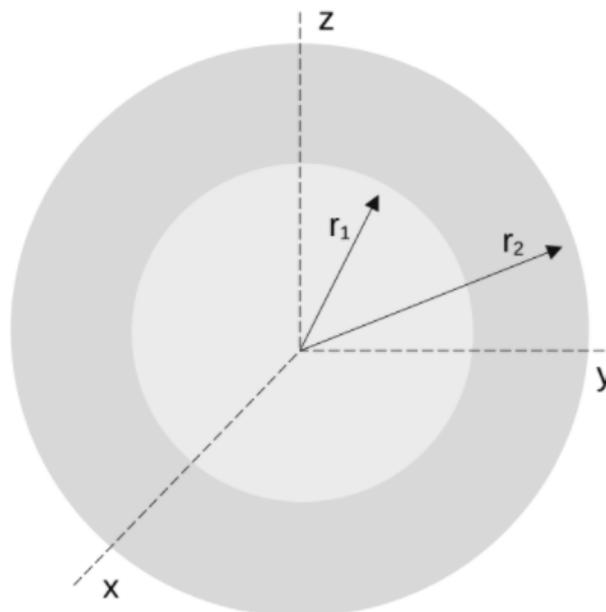
o mesmo vale para quando  $l = m + i$ , sendo  $i = 2, 3, 4, 5, \dots$ , usamos as mesmas relações de recorrência (3.37) e (3.38) que nos dará mais termos pois quando se aumenta o  $i$  mais termos recorrentes aparecem para o cálculo do limite.

## 4 MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA

### 4.1 MODOS MAGNETOSTÁTICOS EM UMA ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA

A Figura 10 representa um modelo de esfera oca ferromagnética onde  $r_1$  é o raio interno e  $r_2$  é o raio externo, dado que a região entre os raios é formada por um material ferromagnético e as regiões internas e externas são a vácuo.

Figura 10 – Esfera Ferromagnética Oca



Fonte: Desenhado pelo autor

Para encontrar a relação de dispersão temos que aplicar a equação de Landau-Lifshitz e usar a aproximação magnetostática já vista no capítulo de Fundamentação teórica. Separamos o problema em duas partes, já vistas anteriormente no artigo do Walker (WALKER, 1957).

1º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região ( $r > r_2$ ) e  $r < r_1$  é

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0. \quad (4.1)$$

2º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região  $r_1 < r < r_2$  é dada por

$$(1 + \kappa) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2)$$

onde  $\kappa = \frac{\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}$ ,  $\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}$ ,  $v = \frac{\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ .

Pela simetria esférica do problema usaremos a expansão em polinômios associados de Legendre, onde a solução geral é

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (\alpha_l^m r^l + \beta_l^m r^{-l-1}) P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.3)$$

Para a região,  $r_1 < r < r_2$  faremos a mudança de variável  $z \rightarrow z' = (1 + \kappa)^{1/2} z$  obtendo a nova EDP da seguinte forma

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Psi = 0. \quad (4.4)$$

Temos que a nova coordenada  $z'$  depende das novas coordenadas esféricas  $(r', \theta')$  representada por

$$z' = r' \cos \theta', \quad (4.5)$$

onde

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (1 + \kappa)z^2, \quad (4.6)$$

$$r'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \kappa z^2, \quad (4.7)$$

$$r'^2 = r^2 + \kappa r^2 \cos^2 \theta, \quad (4.8)$$

$$r' = r (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Então para calcular  $\cos \theta'$  temos que

$$\cos \theta' = \frac{z'}{r'}, \quad (4.10)$$

$$\cos \theta' = \frac{z(1 + \kappa)^{1/2}}{r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}}. \quad (4.11)$$

Logo, para simplificar escrevemos

$$P_l^m(\cos \theta') = P_l^m \left( \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}} \right). \quad (4.12)$$

- Dado que  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , sendo  $z_1 = \cos \theta'$  e  $z_2 = r'$ ;

Para  $z_1$ , o domínio é

$$|z_1| < 1,$$

$$0 < \sqrt{\left| \frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta} \right|} < 1.$$

A restrição que temos é dada por

$$1 + \kappa \cos^2 \theta \neq 0,$$

Em termos das frequências reduzidas temos

$$\Omega \neq \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + \Omega_H \cos^2 \theta)}.$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_1$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Laplace ( $\nabla^2(\Psi'_2) = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica dada por

$$(1 - z_1^2)y'' - 2z_1y' + \left( \lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - z_1^2} \right) z_1 = 0,$$

que tem singularidades em  $z_1 = 0$  e  $z_1 = 1$ . Sendo  $y = P_l^m(z_1)$ , os polinômios associados de Legendre do 1º tipo, pois para  $|z_1| > 1$ , não existe domínio então a solução do 2º tipo  $y = Q_l^m(z_1)$  é descartada. Logo  $z_1$  é analítica na região  $|z_1| < 1$

Para  $z_2$ , o domínio é dado por

$$|z_2| > 0,$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_2$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Laplace ( $\nabla^2(\Psi'_2) = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica confluyente, que por sua vez apresenta uma singularidade em  $z_2 = 0$ . Logo é analítica na região  $|z_2| > 0$ .

Que nos dá garantia que a parte radial é expandida

$$R_l(z_2) = B'_l z_2^l + C'_l \frac{1}{z_2^{l+1}},$$

Então, vamos escrever a solução do potencial magnetostático para as três regiões.

Para  $r < r_1$  temos

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_l^m r^l P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (4.13)$$

Para  $r_1 < r < r_2$ , temos

$$\Psi_2(r', \theta', \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ B_l^m (r')^l + C_l^m (r')^{-l-1} \right] P_l^m(\cos \theta') \exp(im\phi). \quad (4.14)$$

Substituindo  $r'$ , concluímos

$$\Psi_2(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ B_l^m (r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2})^l + C_l^m (r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2})^{-l-1} \right] P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (4.15)$$

Para  $r > r_2$  temos que

$$\Psi_3(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} D_l^m r^{-l-1} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (4.16)$$

Existem duas condições de contorno para o problema:

1º) Continuidade do Potencial Magnetostático em  $r_1$  e  $r_2$ ,

2º) Continuidade da componente normal do campo magnético em  $r_1$  e  $r_2$ , ou seja,  $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal}$ ,

Sabemos do capítulo de Fundamentação Teórica que;

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\nabla}\Psi, \quad (4.17)$$

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (4.18)$$

$$4\pi m_y = iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (4.19)$$

Para calcular a componente normal do campo magnético temos que fazer o produto interno com o versor  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (4.20)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$ . Sabemos que o campo magnético dentro do material vale

$$(\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.21)$$

Fazemos as transformações

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.24)$$

Então a componente normal do campo magnético  $\vec{\mathbf{B}}$  dentro do material em relação as coordenadas esféricas vale

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = (1 + \kappa \sin^2 \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\kappa \sin 2\theta}{2r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{iv}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (4.25)$$

Para calcular a componente normal do campo para  $r < r_1$  e  $r > r_2$  basta atribuir  $\kappa = 0$  e  $v = 0$ .

Aplicamos a primeira condição de contorno para  $r = r_1$  e  $r = r_2$ , temos que

Para  $r = r_1$

$$\Psi_1(r_1, \theta, \phi) = \Psi_2(r_1, \theta, \phi). \quad (4.26)$$

Igualando termo a termo, temos que

$$A_l^m = \left[ B_l^m (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} + C_l^m r_1^{-2l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{-l/2-1/2} \right] \frac{P_l^m(\cos \theta')}{P_l^m(\cos \theta)}. \quad (4.27)$$

Para  $r = r_2$ , temos

$$\Psi_2(r_2, \theta, \phi) = \Psi_3(r_2, \theta, \phi). \quad (4.28)$$

Igualando termo a termo, temos que

$$D_l^m = \left[ B_l^m r_2^{2l+1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} + C_l^m (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{-l/2-1/2} \right] \frac{P_l^m(\cos \theta')}{P_l^m(\cos \theta)} \quad (4.29)$$

Aplicamos a segunda condição de contorno para  $r = r_1$  e  $r = r_2$  onde o ângulo  $\theta = \theta_0$  onde obteremos um sistema  $4 \times 4$  com os coeficientes das soluções expandidas em polinômios associados de legendre. Igualaremos  $A_l^m$  da primeira condição de contorno com o mesmo da

segunda condição e faremos a mesma operação com  $D_l^m$  para obter duas equações com duas incógnitas ( $B_l^m$  e  $C_l^m$ ) onde resolvemos a equação secular para obter a relação de dispersão da esfera ferromagnética oca, dada por

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2l+1} \left[ -\kappa \sin^2 \theta_0 + \frac{\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} - \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))} - \frac{mv}{l} \right] \times \\
& \times \left[ -\kappa \sin^2 \theta_0 + \frac{\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} + \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))}{d\theta}}{2(l+1)P_l^m(\cos \theta'(\theta_0))} + \frac{mv}{l+1} \right] - \\
& \left[ 1 + \frac{(\kappa \sin^2 \theta_0 + 1)(l+1)}{l} - \frac{(l+1)\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4l(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} - \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))} - \frac{mv}{l} \right] \times \\
& \times \left[ 1 + \frac{l(\kappa \sin^2 \theta_0 + 1)}{l+1} - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4(l+1)(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} + \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))}{d\theta}}{2(l+1)P_l^m(\cos \theta'(\theta_0))} + \frac{mv}{l+1} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.30}$$

Temos então a equação característica para os modos magnetostáticos de uma esfera ferromagnética oca, onde esta relação de dispersão depende de 3 parâmetros sendo eles ( $l, m, r = \cos \theta_0$ ).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 ANÁLISE DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

No capítulo 4 vimos que a equação característica dos modos magnetostáticos da esfera ferromagnética oca depende de  $(l, m, r = \cos \theta_0)$ , dada por (4.30). Onde o valor de  $r = \cos \theta_0$  é limitado.

Se tomarmos  $r_1 = 0$ , temos que a relação de dispersão é

$$\left[ l\kappa \sin^2 \theta_0 + 2l + 1 + mv - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4(1 + \kappa \cos^2 \theta_0)} + \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'(\theta_0))}{d\theta}}{2P_l^m(\cos \theta'(\theta_0))} \right] = 0,$$

Que por sua vez é a mesma relação de dispersão do caso da esfera ferromagnética sólida. Como foi provado anteriormente, suas respectivas relações de dispersão para  $l = m + i$  sendo  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , selecionando  $r_1 = 0$  são as mesmas do artigo do R.Plumier 1961.

Para o caso onde  $l = m$  ou na notação de Plumier  $n = m$  e usando o  $\theta = \pi/2$ , temos que a relação de dispersão da esfera oca é

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2l+1} (\kappa + v) \left[-\kappa + \frac{lv}{l+1}\right] + \left[1 + \frac{(\kappa + 1)(l + 1)}{l} - v\right] \left[1 + \frac{l(\kappa + 1)}{l+1} + \frac{lv}{(l+1)}\right] = 0. \quad (5.1)$$

Se fizermos  $r_1 = 0$  e multiplicarmos por  $(l + 1)$  toda a expressão, a equação característica é dada por

$$2l + 1 + l(\kappa + v) = 0. \quad (5.2)$$

Igualando assim a equação característica do artigo de R.Plumier .

Se fizermos  $l = m + 1$ , temos que a equação característica da esfera oca resulta em

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2l+1} [(1 - l)(\kappa + v)] [-\kappa(l + 2) + v(l - 1)] \\ & - [2l + 1 + \kappa(l + 2) + v(1 - l)] [2l + 1 + (l - 1)(\kappa + v)] = 0. \end{aligned}$$

Se fizermos  $r_1 = 0$  e multiplicarmos por  $(l + 1)$  toda a expressão, temos que a equação característica vale

$$2l + 1 + l\kappa + lv - v - \kappa = 0, \quad (5.3)$$

$$2l + 1 + (l - 1)(\kappa + v) = 0, \quad (5.4)$$

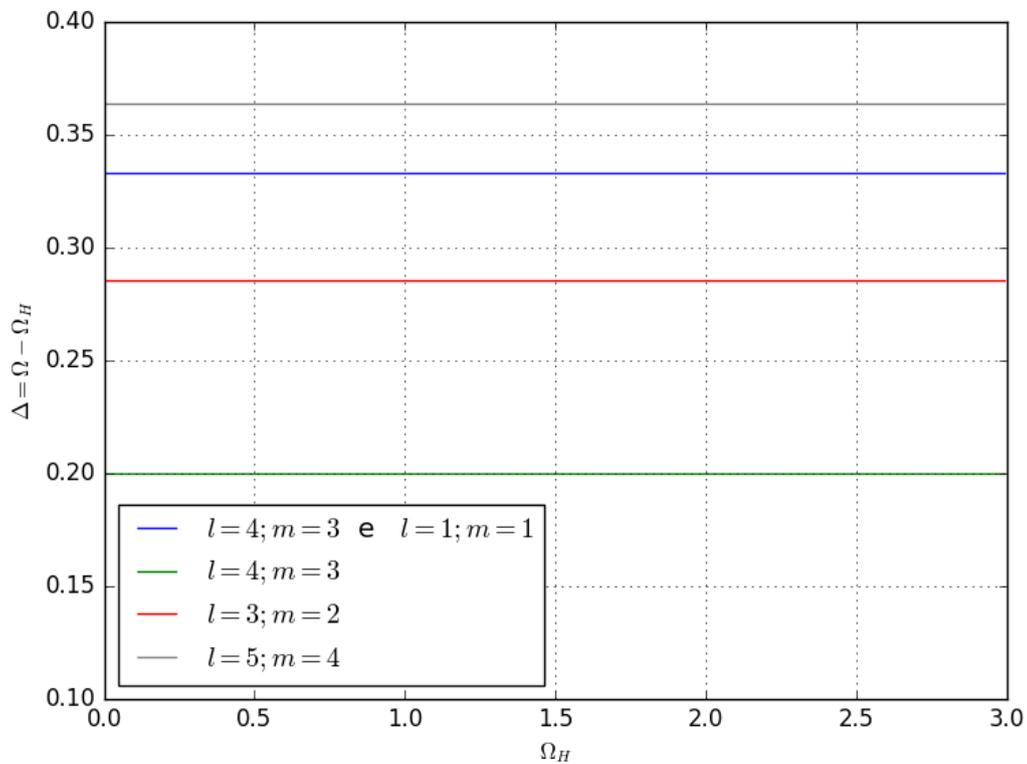
igualando a equação característica para  $l = m + 1$  do artigo do R.Plumier. Como sabemos, para os casos  $l = m + i, i = 0, 1, 2, 3, 4..$  sendo  $r_1 = 0$  as relações de dispersão independem do ângulo  $\theta_0$ .

## 5.2 ANÁLISE GRÁFICA

### 5.2.1 Gráficos Esfera Ferromagnética Sólida

Para  $r_1 = 0$ , a equação característica volta para o caso da esfera sólida como vimos anteriormente. Então plotamos o gráfico  $\Delta \times \Omega_H$  para comparar com o gráfico do caso especial da esfera do artigo do L.R.Walker. Tomamos varios valores de  $l, m$ , incluindo os modos uniformes quando  $l = m$  e  $l = m + 1$  onde não ocorre desvios da frequência reduzida e o gráfico permanece constante.

Figura 11 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $r_1 = 0$  e  $l = m + 1$  ou  $l = m$

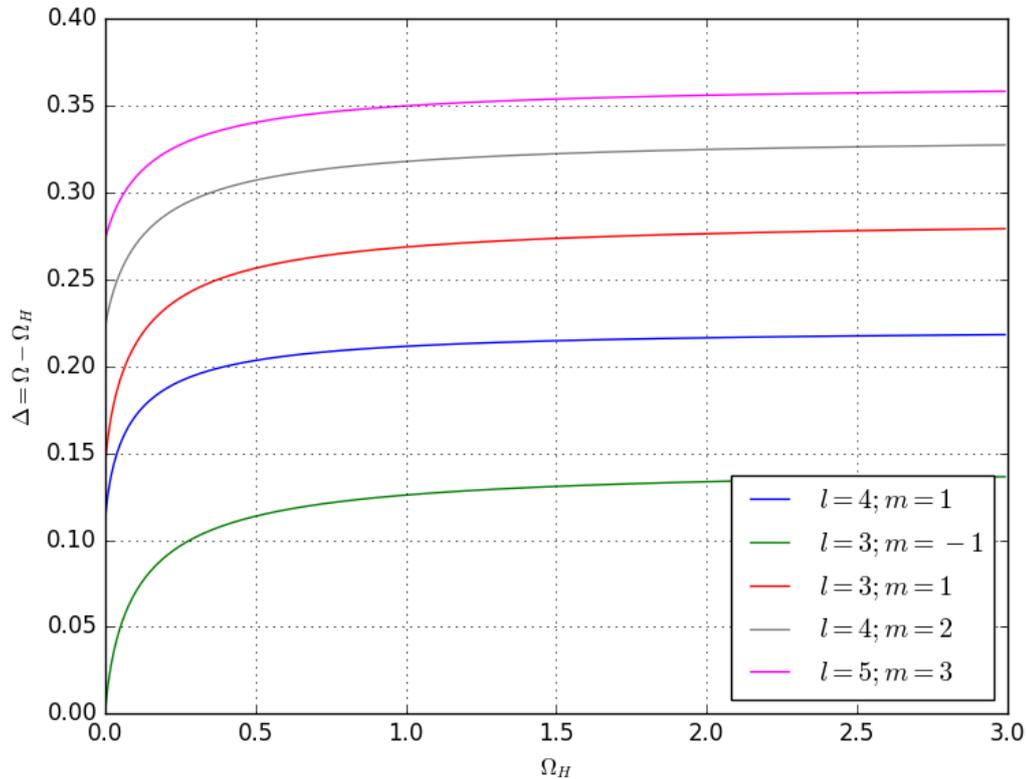


Fonte: O autor (2022)

Podemos notar que todos os modos  $l = m$  e  $l = m + 1$  são uniformes e ocorrem degenerências em alguns modos, um exemplo é o modo  $(l = 4; m = 1)$  e  $(l = 1; m = 1)$ , onde apresentam o mesmo  $\Delta$  variando o  $\Omega_H$ .

Na Figura 12 vemos a representação de outros modos e também a coincidência dos modos com os mesmos do artigo pioneiro (WALKER, 1957).

Figura 12 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $r_1 = 0$  e  $(l, m)$  quaisquer



Fonte: O autor (2022)

Nas Figuras 11 e 12, observamos a variação de frequência  $\Delta$  em função de  $\Omega_H$  é mostrado para uma série de modos representativos para o caso de uma esfera ( $\alpha = 1$  e  $\xi = \infty$ ), na notação de Walker. De fato, vê-se que o cruzamento de modos ou sua degenerescência de frequências acidental em valores particulares de  $\Omega_H$  é de ocorrência comum. Em particular, o modo uniforme, (1,1), mostra tais degenerescências. Seria esperado encontrar isto refletido em efeitos sobre os perfis de linha em campos magnéticos onde estas degenerescências ocorrem com modos nos quais o acoplamento do modo(1,1) por não linearidades ou imperfeições é considerável.

## 5.2.2 Gráficos Esfera Ferromagnética Oca

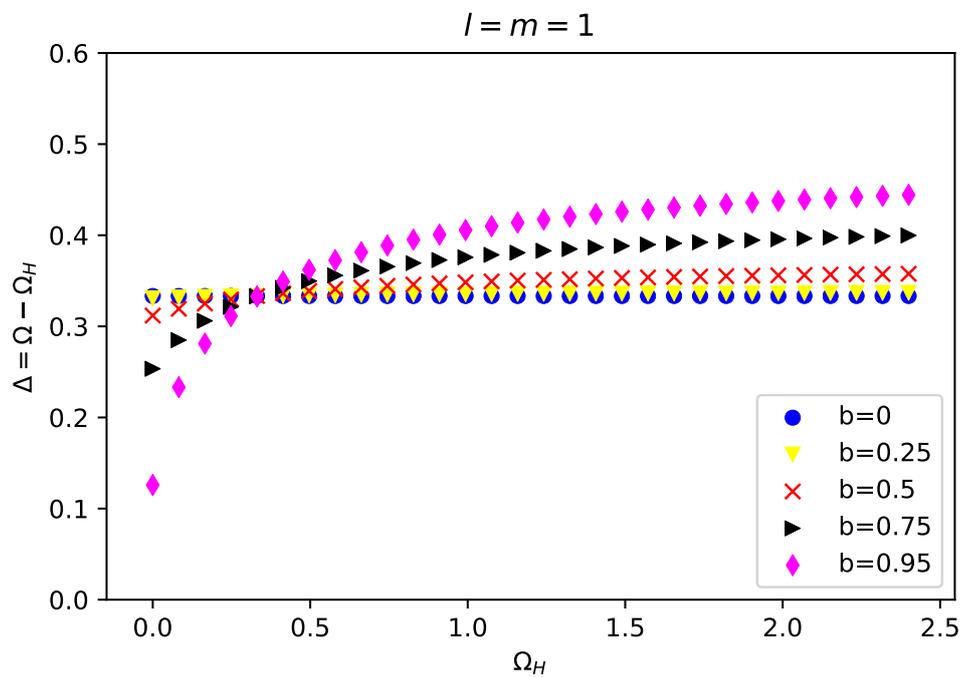
### 5.2.2.1 Modos Magnetostáticos $l = m$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

Para a esfera oca quando  $l = m$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , temos a seguinte equação característica já vista anteriormente:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2l+1} (\kappa + v) \left[-\kappa + \frac{lv}{l+1}\right] + \left[1 + \frac{(\kappa+1)(l+1)}{l} - v\right] \left[1 + \frac{l(\kappa+1)}{l+1} + \frac{lv}{(l+1)}\right] = 0, \quad (5.5)$$

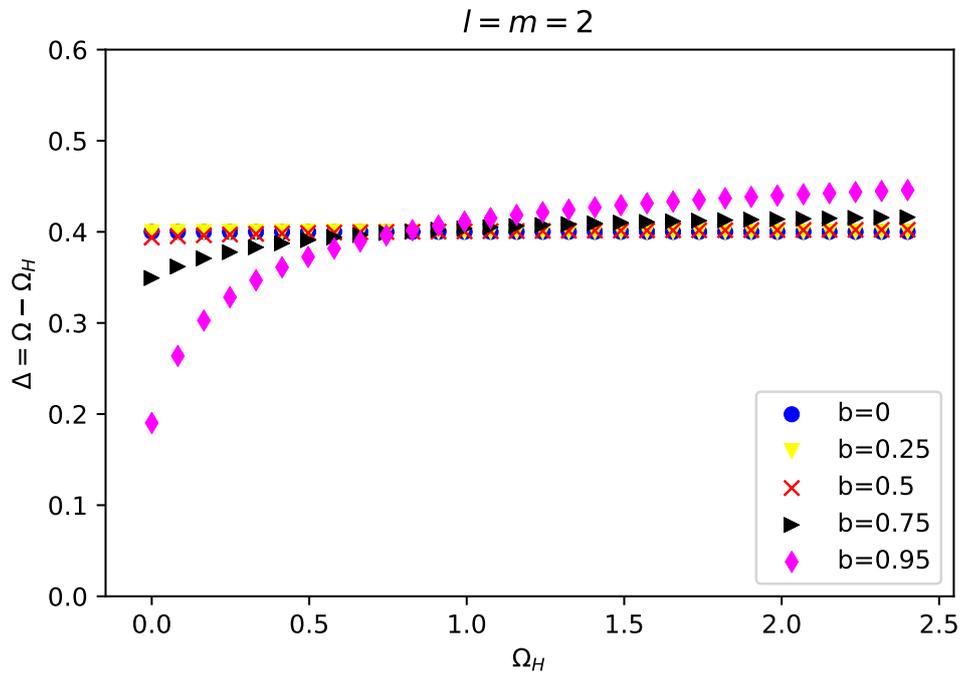
onde se fizermos um gráfico  $\Delta \times \Omega_H$ , observaremos o comportamento para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$  e  $l$ .

Figura 13 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=1$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



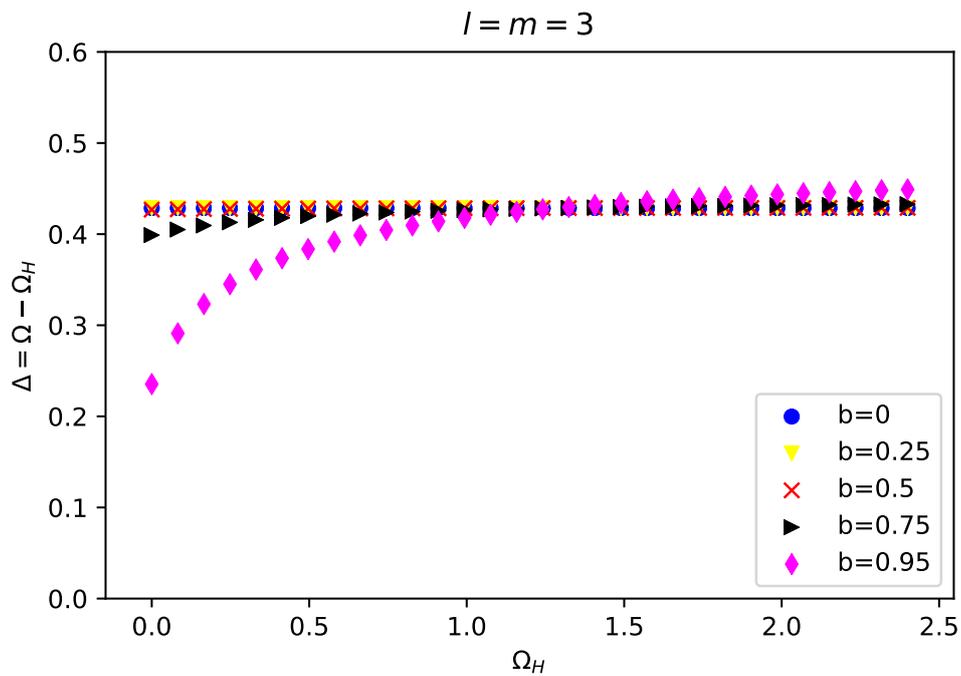
Fonte: O autor (2022)

Figura 14 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=2$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



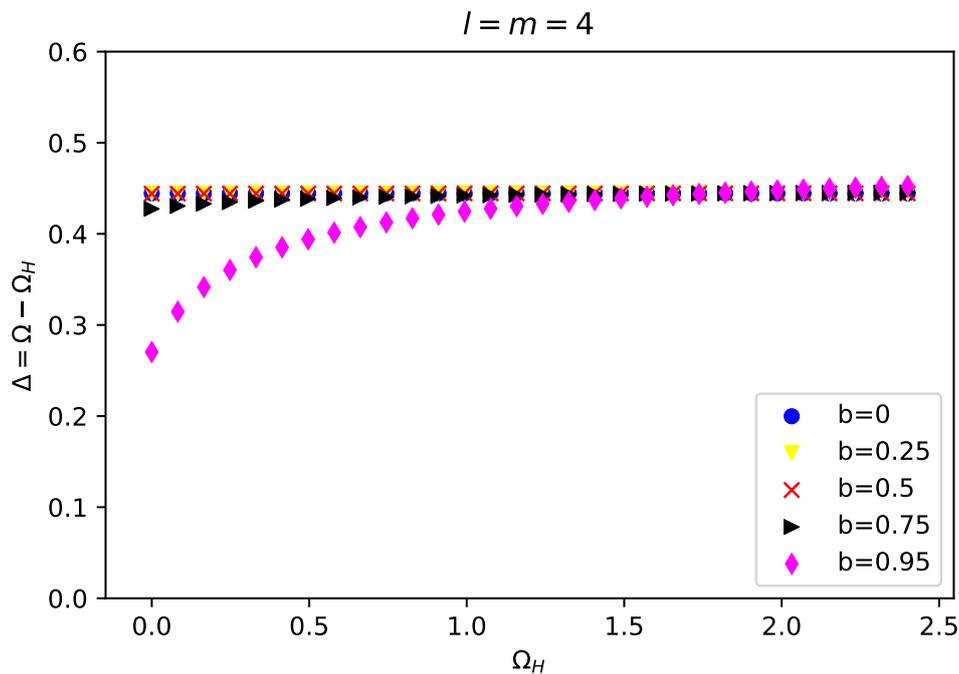
Fonte: O autor (2022)

Figura 15 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=3$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor(2022)

Figura 16 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=4$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Podemos notar que quando diminuimos a razão dos raios  $b = \frac{r_1}{r_2}$ , o gráfico fica mais uniforme que é o esperado para quando  $r_1 = 0$  pois os modos  $l = m$ , são uniformes para a esfera como vimos na figura 11. Ao passo que se aumentamos esta razão  $b$  o gráfico passa a apresentar comportamentos não-lineares pois o efeito da esfera oca toma conta para a sua relação de dispersão.

Um recente trabalho de C.McKeever, F. Y. Ogrin, M. M. Aziz [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)], aplicou um pulso magnético gaussiano, cuja largura de aproximadamente  $5ps$  numa esfera ferromagnética oca de dimensões nanométricas onde foi feita uma simulação micromagnética com o MUMAX3 solver para resolver a equação de Landau-Lifshitz com amortecimento  $\lambda$  em cada célula na grade de simulação, dada por

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\mu_0\gamma\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} - \lambda \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}), \quad (5.6)$$

onde o campo efetivo  $\vec{H}_{\text{eff}}$  tem contribuições da energia magnetocristalina cúbica, energia magnetostática, energia de troca entre vizinho mais próximos e energia de Zeeman para o campo aplicado. A intensidade do pulso é fraca  $\vec{H}_{\text{ext}} = 20e$ , para garantir que o pulso ocorra na região linear do sistema. A frequência  $\omega$  para trocar ressonância em partículas esféricas foi

calculado por Aharoni e é dado por

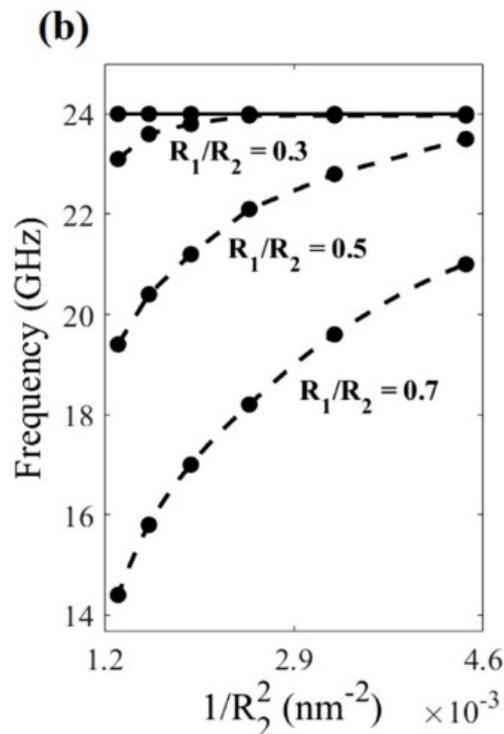
$$\omega = \gamma \left( \frac{2A\mu_{kn}^2}{R_2^2 M_s} + \mathbf{H}_z \right). \quad (5.7)$$

Sendo  $A$ , a constante de troca,  $R_2$  o raio externo,  $\mu_{kn}$  são os auto valores e  $\gamma H_z$  é a frequência de ressonância ferromagnética. Para a esfera ferromagnética oca, temos que os autovalores  $\mu_{kn}$ , são calculados pela equação transcendental [(AHARONI, 2002)]

$$\left( \frac{\partial j_n(\mu_{kn})}{\partial \mu_{kn}} \right) \left( \frac{\partial y_n(\rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=\frac{\mu_{kn}R_1}{R_2}} - \left( \frac{\partial y_n(\mu_{kn})}{\partial \mu_{kn}} \right) \left( \frac{\partial j_n(\rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=\frac{\mu_{kn}R_1}{R_2}} = 0, \quad (5.8)$$

onde  $j_n$  e  $y_n$  são as funções de Bessel esféricas de primeira e segunda ordem respectivamente. Para cada número  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , existe uma infinidade de soluções para a equação (5.10), onde  $k = 1, 2, 3, \dots$  corresponde cada solução. Diferindo do trabalho do C. McKeever, F. Y. Ogrin, M. M. Aziz, para este trabalho sobre modos magnetostáticos em uma esfera ferromagnética oca, desconsideramos interações de troca, excluimos o amortecimento, da equação de Landau e consideramos que todas as forças são puramente magnetostáticas, onde cada spin se move no campo magnético externo e pela resultante do campo dipolar dos outros spins. Se observamos a Figura 17 do [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)], temos que

Figura 17 – Gráfico original do artigo do McKeever



Fonte: (MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)

Podemos notar a dependencia do tamanho da ressonância ferromagnética para a esfera sólida (linha preta) e para cascas esféricas de diferentes razões de raios  $R_1/R_2$ , a amplitude dos modos de troca tornam-se extremamente pequenas no limite  $R_1/R_2 \rightarrow 0$  quando os campos anisotrópicos provenientes da casca esférica transitam para campos uniformes da esfera. Isso ocorre porque os coeficientes dos modos de troca desaparecem se o campo magnético interno é completamente uniforme, depois disso apenas o modo uniforme de Kittel é excitado. No entanto, a amplitude do modo zero do espectro da suscetibilidade dinâmica é comparável ao da ressonância ferromagnética para certos valores da espessura da casca que sugere que pode ser observado experimentalmente em nano esferas de óxido de ferro. A frequência deste modo é inversamente proporcional à magnetização de saturação conforme descrito pela equação (5.9), então aparecerá em frequências mais altas em partículas de óxido quando em comparação com cascas de cobalto ou liga de ferro-cobalto. Comparando ao nosso trabalho analítico vemos muita similaridade com os gráficos das Figuras 13,14,15 e 16. Mais especificamente com os gráficos 15 e 16 que representam modos de mais alta ordem, como descreve no abstract do artigo do [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)]. Plotamos os gráficos do shift de frequências  $\Delta$  em função da frequência reduzida  $\Omega_H$ , que por sua vez é dada por

$$\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}, \quad (5.9)$$

onde  $\Omega_H$  é inversamente proporcional a magnetização de saturação  $M_0$ , logo pela equação (5.9), para as quantidades do denominador ( $R_2^2 M_2$ ) se manterem aproximadamente "constantes", podemos notar gráficamente que

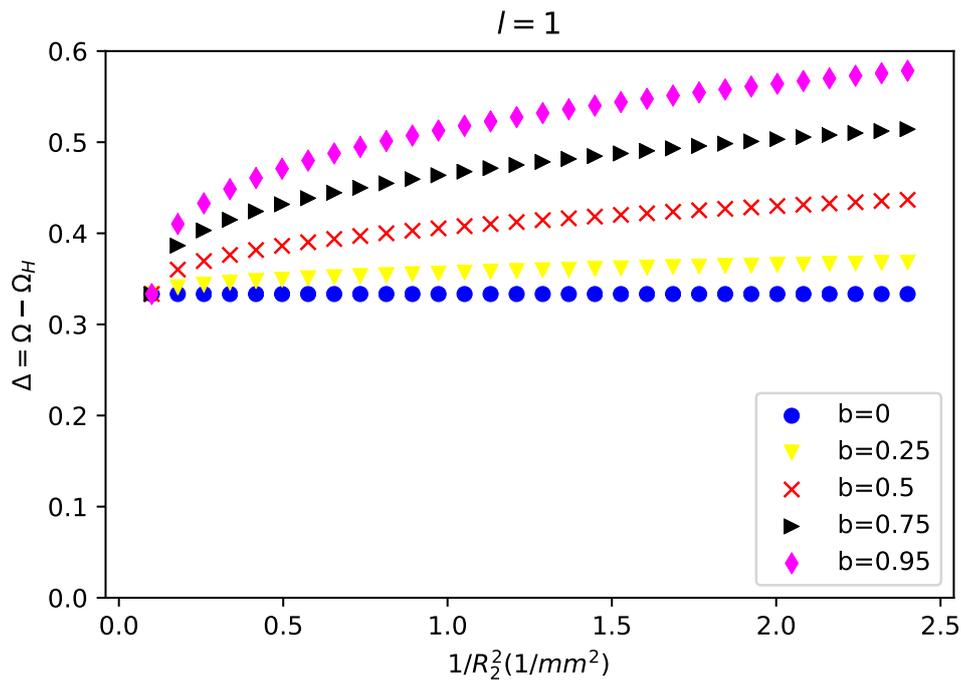
$$\Omega_H \propto \frac{1}{R_2^2}, \quad (5.10)$$

o que nos dá base para interpretar a similaridade dos gráficos mesmo sendo dois problemas diferentes, seja em relação as energias envolvidas e suas dimensões. Pois a dimensão usual para problemas de modos magnetostáticos é da ordem de micrometros, já o caso do C.McKeever são esferas ferromagnéticas ocas nanométricas, onde as interações de troca entre vizinhos mais próximos não pode ser desconsiderada, mesmo no problema as anisotropias de superfície sendo desconsideradas e o fator de amortecimento, esta presente.

### 5.2.2.2 Gráficos da Relação de Dispersão ( $\Delta \times \frac{1}{R_2^2}$ ) para os modos $l=m$ e $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

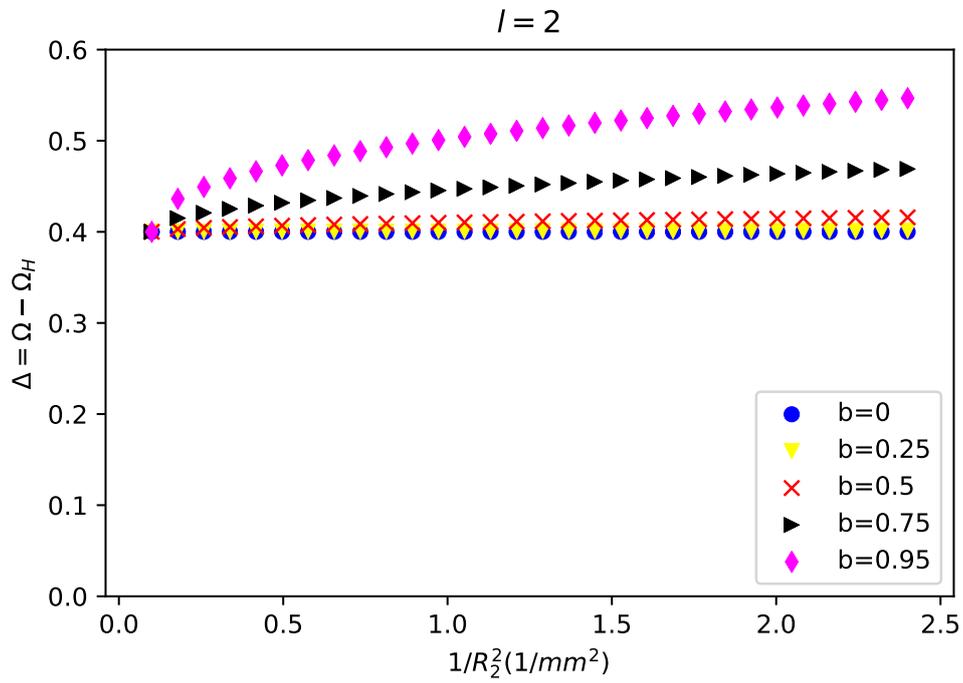
Como não podemos provar matematicamente de maneira precisa a similaridade dos gráficos deste trabalho com o [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)] por causa de todas as diferenças já citadas anteriormente dos trabalhos iremos plotar os gráficos ( $\Delta \times \frac{1}{R_2^2}$ ) mantendo o campo externo  $\vec{H}_i$  constante, ou seja,  $\Omega_H = C$ , onde  $C$  é um valor constante e o raio interno  $R_1$  também constante, variando apenas o raio externo  $R_2$ . Onde o campo externo  $\vec{H}_i$  é análogo ao pulso gaussiano de  $20e$  usado por MCKeever nas simulações micromagnéticas e o eixo das Abscissas tem é idêntico com o produzido por [(MCKEEVER; OGRIN; AZIZ, 2019)], variando as unidades do sistema métrico internacional de medidas onde que de nanômetros passamos para milímetros.

Figura 18 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=1$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



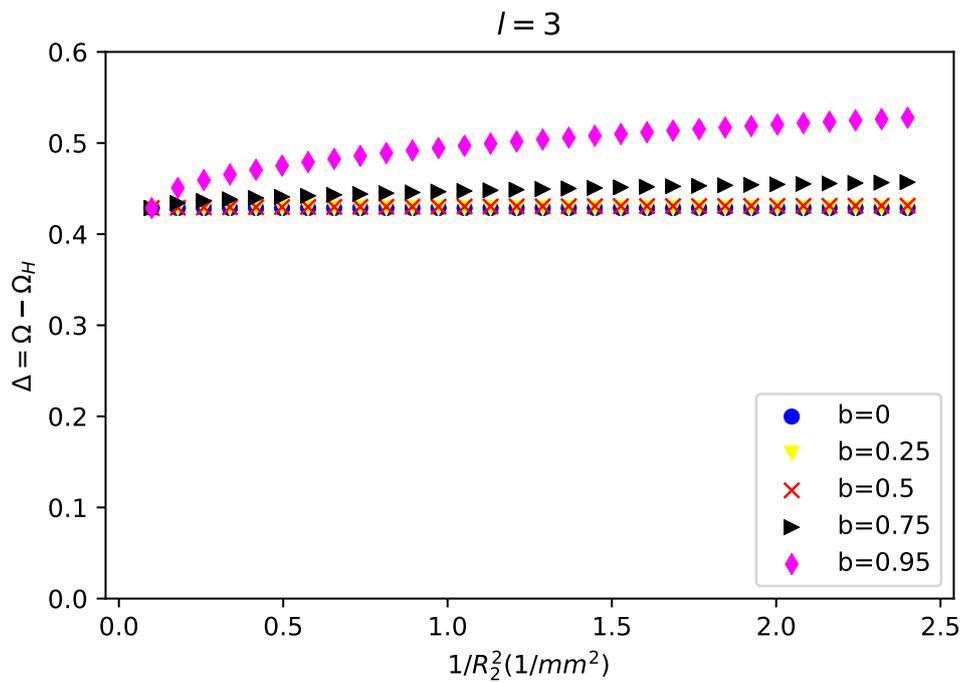
Fonte: O autor (2022)

Figura 19 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=2$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



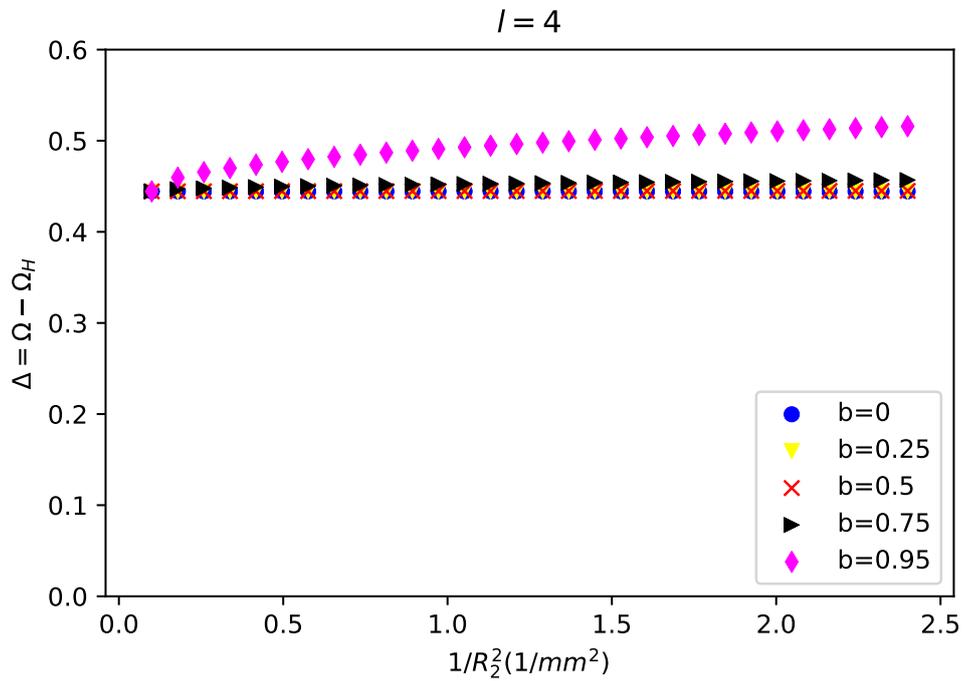
Fonte: O autor (2022)

Figura 20 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=3$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Figura 21 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=4$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



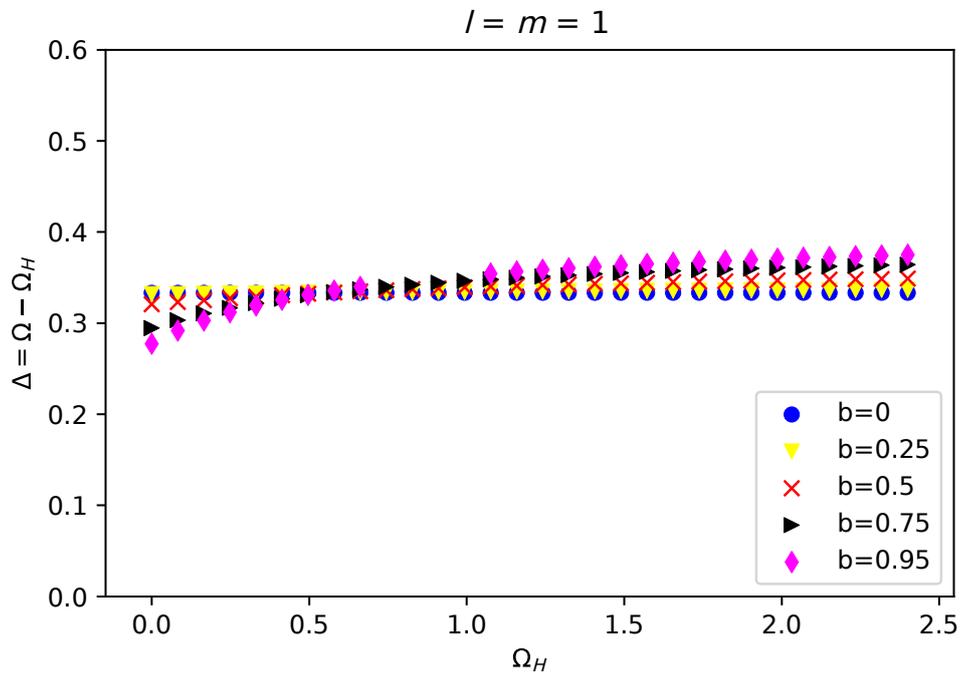
Fonte: O autor (2022)

Podemos então visualizar que os gráficos obtidos são parecidos com os gráficos do artigo original do McKeever, onde quando o valor de  $b$ , se aproxima de zero, vemos o aparecimento dos modos uniformes. Usamos que o campo  $\vec{H}_i = 1000 Oe$  e o raio interno  $R_1 = 1.3mm$  para plotar os gráficos para fazer uma comparação gráfica dos dois trabalhos.

### 5.2.2.3 Modos Magnetostaticos $l=m$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

Se alterarmos o valor de  $r = \cos \theta_0$ , obteremos novos gráficos de relação de dispersão, onde podemos verificar modos com degenerescência na frequência onde para os modos  $l = m$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  quando  $b = 0$  e  $b = 0.25$ , notamos uma degenerescência com os modos  $l = m = 1, \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Figura 22 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=1$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$

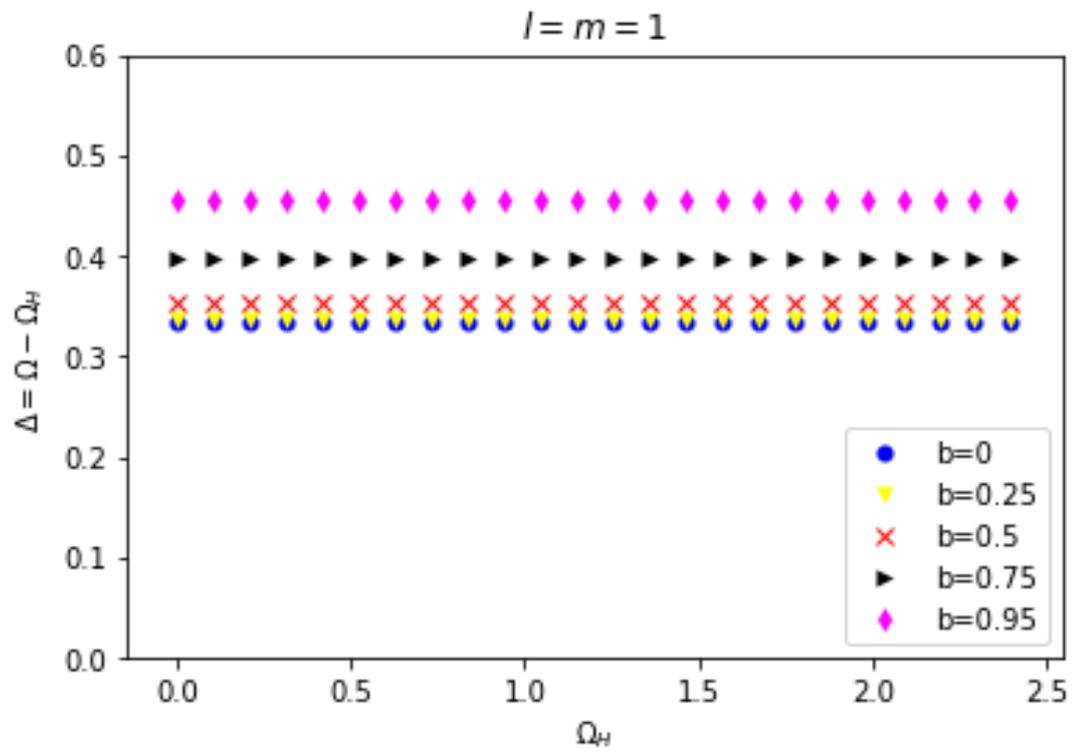


Em comparação ao modo  $l = m = 1$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  a relação de dispersão se "estrita" mais nos valores altos de  $\Omega_h$ .

#### 5.2.2.4 Modos Magnetostáticos $l = m$ e $\theta_0 = 0$

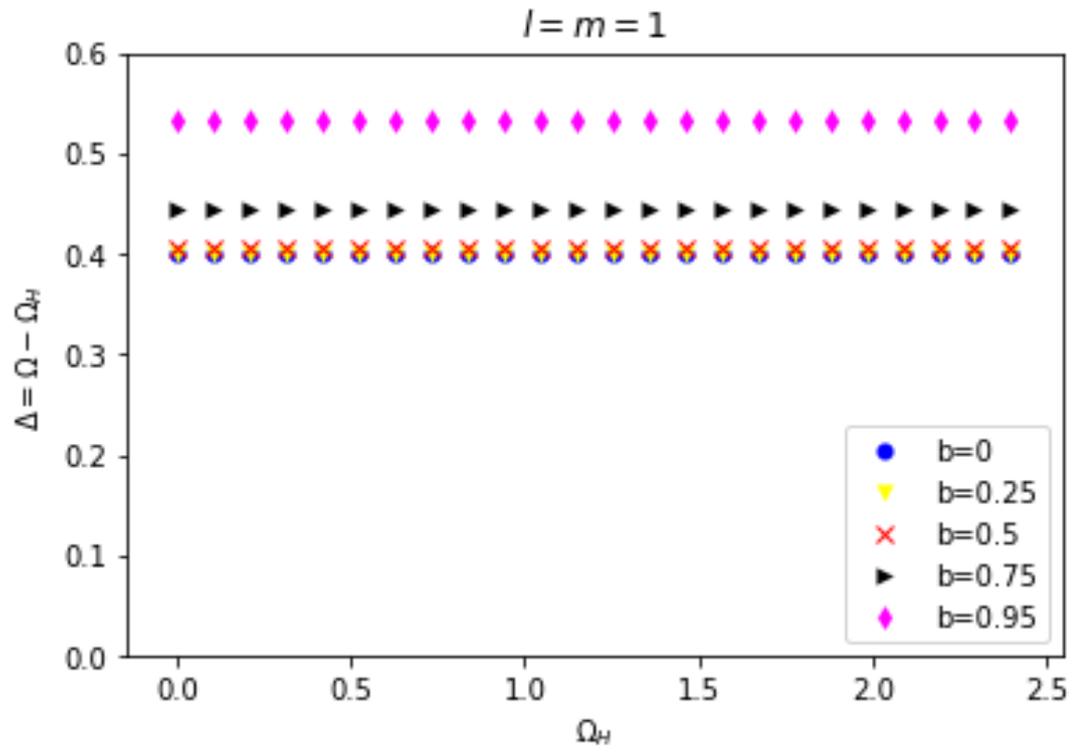
Para  $l = m$  e  $\theta_0 = 0$  temos que

Figura 23 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=1$  e  $\theta = 0$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



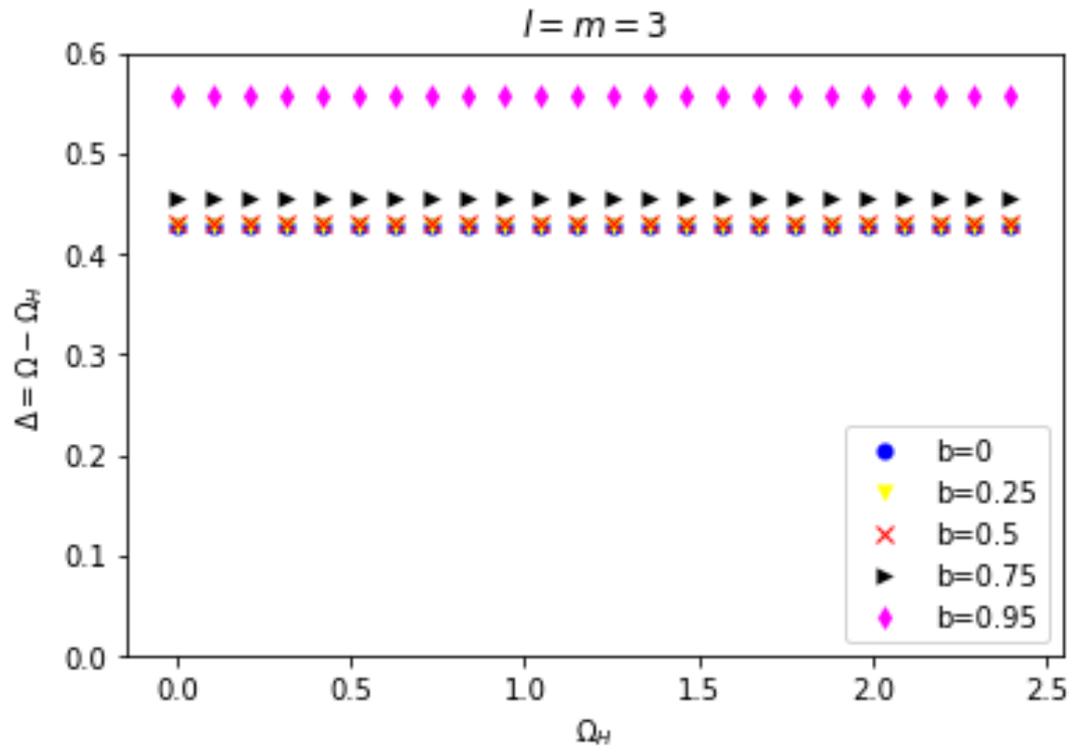
Fonte: O autor (2022)

Figura 24 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=2$  e  $\theta = 0$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



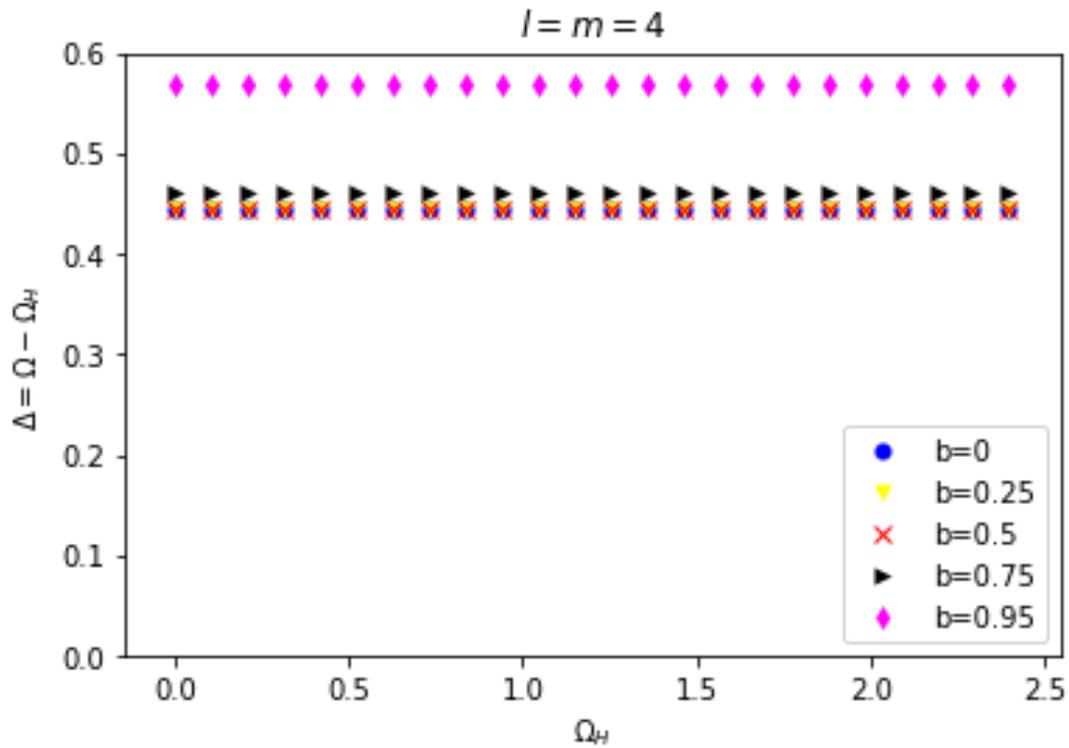
Fonte: O autor (2022)

Figura 25 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=3$  e  $\theta = 0$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Figura 26 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=4$  e  $\theta = 0$  para diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Para os modos  $l = m$  e  $\theta_0 = 0$  observamos algo curioso onde todos os modos para valores diferentes de  $b = \frac{r_1}{r_2}$  são uniformes. Onde notamos algumas degenerescências com os modos  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  ambas com  $l = m$ . Por exemplo, o modo  $(l = 1, m = 1, \theta_0 = 0$  e  $b = 0.75$  tem a mesma frequência de ressonância que o modo  $(l = 2, m = 2, \theta_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $b = 0$ .

#### 5.2.2.5 Modos Magnetostáticos $l=m+1$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

Vimos que para os modos  $l = m + 1$  da esfera oca a relação de dispersão é dada por

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2l+1} [(1-l)(\kappa+v)] [-\kappa(l+2) + v(l-1)] - [2l+1 + \kappa(l+2) + v(1-l)] [2l+1 + (l-1)(\kappa+v)] = 0 \quad (5.11)$$

Então plotamos o gráfico  $\Delta \times \Omega_H$  para quando  $l = m + 1$  para diferentes valores de  $l$  e  $b = \frac{r_1}{r_2}$ .

Figura 27 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m+1=1$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$

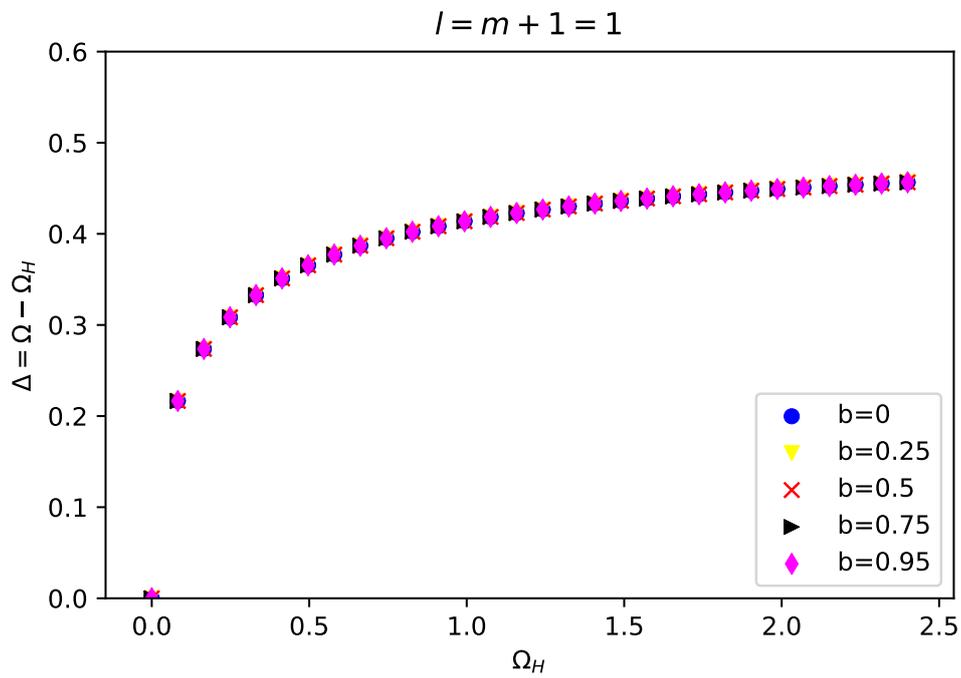


Figura 28 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m+1=2$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$

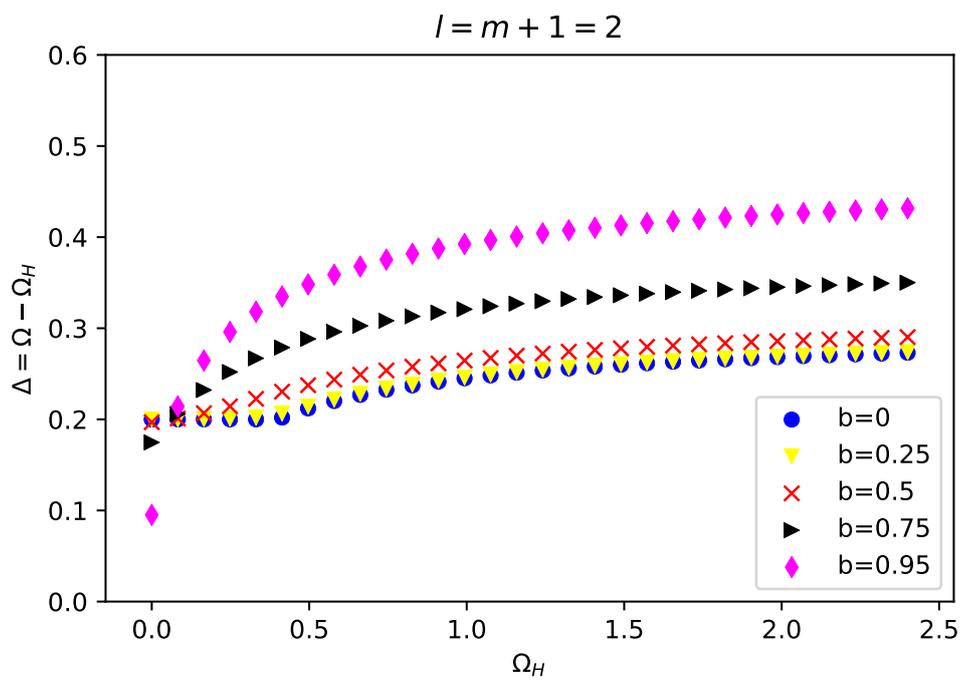
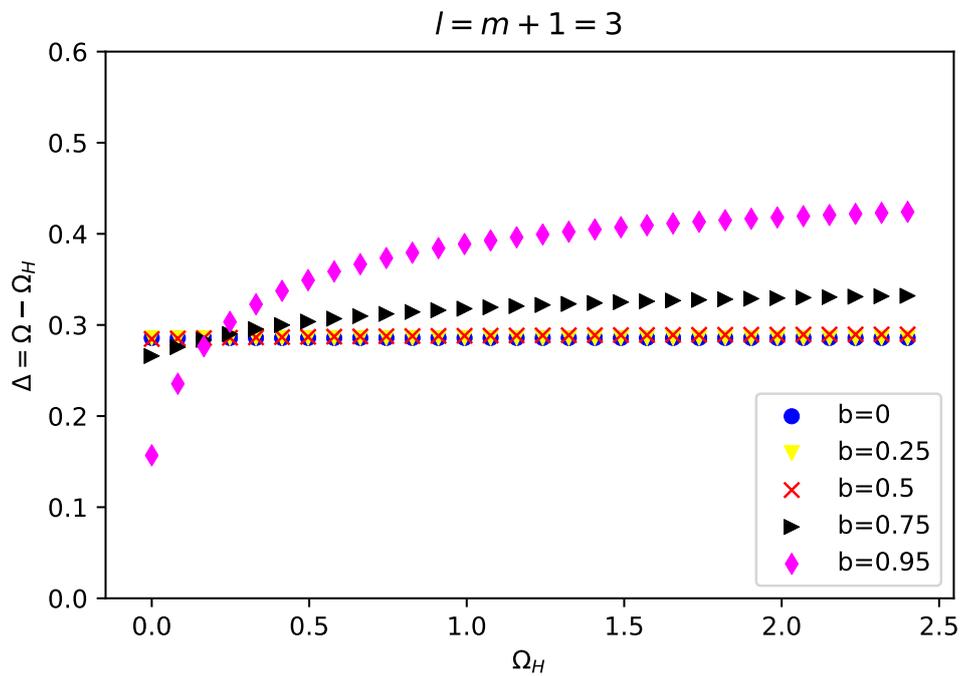
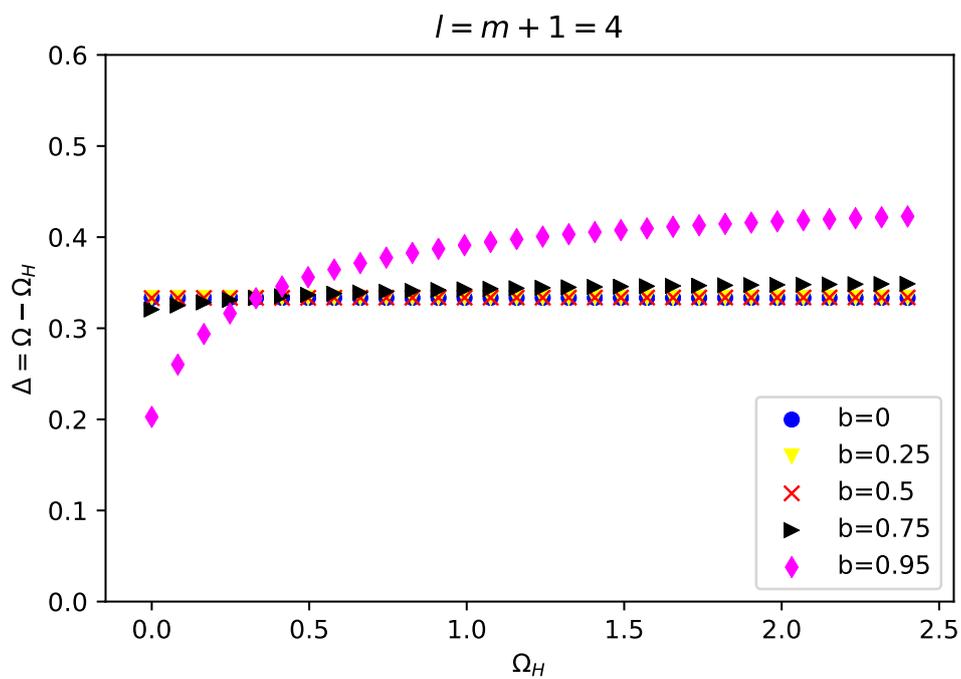


Figura 29 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m+1=3$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Figura 30 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m+1=4$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Originalmente os modos em uma esfera normal para  $l = m + 1$  são uniformes . Observamos o mesmo comportamento dos modos  $l = m$  quando variamos o parametro  $b$  . Quanto menor a razao dos raios mais uniforme se apresentam os modos e para valores grandes de  $b$  , observamos comportamentos não lineares .Para o caso onde  $l = m + 1 = 1$  observamos um comportamento não linear em todos os seus valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$

### 5.3 POLARIZAÇÃO DOS MODOS MAGNETOSTÁTICOS NA ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA E PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DOS ESTADOS DE MAGNÉTIZAÇÃO

Temos que uma solução particular do Potencial Magnetostático da Esfera Ferromagnética Oca  $\Psi_2$ , em função apenas dos coeficientes  $B_l^m$ , sendo obtida usando a condição de contorno da continuidade da normal do Fluxo Magnético  $\vec{B}$ , é dada por

$$\Psi_2^{l,m,\theta_0}(r, \theta, \phi) = B_l^m \left( r^l (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} - \frac{\gamma_l^{m,\theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \right) P_l^m(\cos \theta') \exp\{im\phi\}, \quad (5.12)$$

onde

$$\gamma_l^{m,\theta_0} = (1 + \kappa \cos^2 \theta_0)^{l+1/2} (br_2)^{2l+1} \frac{\left[ -\kappa \sin^2 \theta_0 + \frac{\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} - \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'_0)}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta'_0)} - \frac{mv}{l} \right]}{\left[ 1 + \frac{(\kappa \sin^2 \theta_0 + 1)(l+1)}{l} - \frac{(l+1)\kappa^2 \sin^2 2\theta_0}{4l(1+\kappa \cos^2 \theta_0)} - \frac{\kappa \sin 2\theta_0 \frac{dP_l^m(\cos \theta'_0)}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta'_0)} - \frac{mv}{l} \right]}.$$

Vimos que as componentes da magnetização  $\vec{m}$ , são dadas por;

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (5.13)$$

$$4\pi m_y = iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (5.14)$$

Fazemos as transformações,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5.17)$$

Substituindo temos:

$$\begin{aligned} m_x(r, \theta, \phi) = & B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ l\kappa \cos \phi \sin \theta + \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\ & - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} - ivl \sin \phi \sin \theta - \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\ & \left. + \frac{ivkl \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ \kappa(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \\ & - \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} \\ & - iv(l+1) \sin \phi \sin \theta + \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\ & \left. \left. + \frac{ivk(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_y(r, \theta, \phi) = & B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ ivl \cos \phi \sin \theta + \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\ & - \frac{iv\kappa l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} + \kappa l \sin \phi \sin \theta + \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\ & \left. - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ iv(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \\ & - \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{iv\kappa(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} \\ & + \kappa(l+1) \sin \phi \sin \theta - \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\ & \left. \left. - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

Dado que,

$$\vec{m} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j}, \quad (5.18)$$

iremos normalizar o vetor magnetização para futuras aplicações, logo

$$|\vec{\mathbf{m}}| = 1, \quad (5.19)$$

$$m_x^2 + m_y^2 = 1, \quad (5.20)$$

Se separarmos  $B_l^m$ , do vetor magnetização de tal forma que

$$\vec{\mathbf{m}} = B_l^m \left( m'_x \vec{\mathbf{i}} + m'_y \vec{\mathbf{j}} \right), \quad (5.21)$$

então, pela equação de normalização (5.20)

$$B_l^m = \left( m_x'^2 + m_y'^2 \right)^{-1/2}, \quad (5.22)$$

logo temos o valor do coeficiente  $B_l^m$ :

$$\begin{aligned}
B_l^m = & \left\{ \left\{ \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ l\kappa \cos \phi \sin \theta + \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \right. \\
& - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} - ivl \sin \phi \sin \theta - \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. \left. + \frac{ivkl \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m,\theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ \kappa(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \right. \\
& - \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} \\
& - iv(l+1) \sin \phi \sin \theta + \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. \left. + \frac{ivk(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\} \right\}^2 + \\
& \left\{ \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ ivl \cos \phi \sin \theta + \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \right. \\
& - \frac{iv\kappa l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} + \kappa l \sin \phi \sin \theta + \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. \left. - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m,\theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ iv(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \right. \\
& - \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{iv\kappa(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} \\
& \left. \left. \left. + \kappa(l+1) \sin \phi \sin \theta - \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\} \right\}^2 \right\}^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Temos então o valor do vetor magnetização normalizado  $\vec{\mathbf{m}}(r, \theta, \phi)$ , em toda região do espaço. Sabemos que a magnetização dinâmica total é dada por

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = M_S \vec{\mathbf{k}} + (m_x \vec{\mathbf{i}} + m_y \vec{\mathbf{j}}) e^{i\omega t}. \quad (5.23)$$

Normalizando a magnetização dinâmica total temos

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{\sqrt{M_S^2 + 2(B_l^m)^2 e^{i2\omega t}}} \left( M_S \vec{\mathbf{k}} + (m_x \vec{\mathbf{i}} + m_y \vec{\mathbf{j}}) \right) e^{i\omega t} \quad (5.24)$$

### 5.3.1 Polarização dos modos para $b = 0$

Na condição onde  $b = 0$ , ou seja,

$$\gamma_l^{m,\theta_0}(b, r_2, \kappa, v) = 0, \quad (5.25)$$

recuperamos as componentes da magnetização  $m_x$  e  $m_y$  da Esfera Ferromagnética Sólida, como calculou anteriormente (PLUMIER, 1962).

Para exemplificar, o autor calcula a magnetização no plano  $(x, y)$ , centrado em  $0_z$ , ou seja,  $\theta = \pi/2$  e assumimos  $\phi = 0$ .

- Para os modos  $l = m$ , temos que as componentes da Esfera Sólida, nas condições que Plumier escreveu

$$4\pi m_x = B_l^l P_l^l(\cos \theta) e^{il\phi} l(\kappa + v) r^{l-1}, \quad (5.26)$$

para deixar igual ao artigo usamos a Relação de recorrência dada por

$$\frac{1}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) = -\frac{1}{2m} \left[ P_{l-1}^{m+1}(\cos \theta) + (l+m-1)(l+m) P_{l-1}^{m-1} \right], \quad (5.27)$$

para  $l = m$ ,  $\theta = \pi/2$  e assumimos o valor de  $\phi = 0$

$$P_l^l(\cos \theta) = -(2l-1) P_{l-1}^{l-1}, \quad (5.28)$$

então a componente  $m_x$  é dada or

$$4\pi m_x = -B_l^l (2l-1) P_{l-1}^{l-1} e^{il\phi} l(\kappa + v) r^{l-1}, \quad (5.29)$$

onde o sinal de menos pode ser incorporado no coeficiente  $B_l^l$ , pois se multiplicarmos por um escalar a solução do Potencial Magnetostático  $\Psi_2$ , não se altera. Então

$$4\pi m_x = B_l^l (\kappa + v) l(2l-1) r^{l-1} Y_{l-1}^{l-1}. \quad (5.30)$$

Fazemos a mesma análise para a componente  $m_y$ , assumimos  $\theta = \pi/2$  e assumimos  $\phi = 0$  então,

$$4\pi m_y = iB_l^l(\kappa + v)l(2l - 1)r^{l-1}Y_{l-1}^{l-1}. \quad (5.31)$$

Se fizermos esta análise e usarmos as relações de recorrência (3.37) e (3.38), conseguiremos todas as componentes  $m_x$  e  $m_y$  para  $l = m + i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  para a esfera ferromagnética Sólida. Para  $b = 0$  e  $l = m$  temos a polarização circular pois o módulo das componentes (5.30) e (5.31) é o mesmo. Para  $b = 0$  e  $l = m + 1$  também recuperamos as mesmas componentes da magnetização calculadas por plumier e obteremos as mesmas polarizações circulares.

### 5.3.2 Grau de um Mapa de um Campo Vetorial

#### 5.3.2.1 Definição do Grau de um Mapa

Usando a referência do livro "Modern Geometry— Methods and Applications: Part II: The Geometry and Topology of Manifolds "(DUBROVIN; FOMENKO; NOVIKOV, ). Nessa seção nosso interesse será na teoria de classes de homotopia para mapas entre variedades fechadas e orientadas ( $M$  e  $N$ ) de mesma dimensão  $n$ , especialmente no caso onde  $N$  é uma esfera. Seja  $\mathcal{F} : M \rightarrow N$  um mapa suave, e  $y_0 \in N$  seja um valor regular de  $\mathcal{F}$ . Isto significa que toda a imagem inversa de  $y_0$  consiste somente em pontos finitos  $x_1, \dots, x_m$ , e que se  $x_i^\beta$  são coordenadas locais numa vizinhança de  $x_i$ , e  $y_0^\alpha$  são as coordenadas locais na vizinhança de  $y_0$ , o jacobiano  $\det \frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}$  é não nulo em  $x_i$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Desde que assumamos que as variedades  $M, N$  sejam orientadas, os jacobianos das funções de transição entre as coordenadas na intersecção das coordenadas locais da vizinhança sejam sempre positivas.

O grau de um mapa suave  $\mathcal{F} : M \rightarrow N$  de variedades fechadas e conectadas, com respeito a um valor regular  $y_0 \in N$  é dado por

$$\deg \mathcal{F} = \sum_{f(x_i=y_0)} \text{sgn} \det \left( \frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right), \quad (5.32)$$

onde  $x_i, i = 1, \dots, m$ , são as pre imagens de  $y_0$  em relação a  $\mathcal{F}$ . O grau de um Mapa tem importantes propriedades de invariância.

- **Teorema.** O grau de um mapa  $\mathcal{F}$  independe da escolha de um valor regular  $y_0$ , e é invariante sobre homotopias ("deformações").

### 5.3.2.2 Aplicações do Grau de um Mapa: Relação entre o grau e Integral

Seja  $\mathcal{F}$  um mapa suave de grau  $Q$  entre variedades conectadas, fechadas e orientadas  $M$  e  $N$ , seja  $\Omega$  uma forma diferencial em  $N$  de rank  $n = \dim M = \dim N$ , dado por  $\varphi_i(y) dy_i^1 \wedge \dots \wedge dy_i^n$  em termos das coordenadas locais  $y_i^\alpha$  na  $i$ -ésima vizinhança de  $N$ . A integral  $\int_N \Omega$  na forma  $\Omega$  em relação a  $N$ , é também a integral  $\int_M \mathcal{F} * \Omega$  da forma restrita  $\mathcal{F} * \Omega$  em relação a  $M$ . Temos que

$$\mathcal{F} * \Omega = \varphi_i(\mathcal{F}(x)) dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^n \det \left( \frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right), \quad (5.33)$$

onde  $x_j$  são as coordenadas locais em  $M$ , ou seja, na região de  $M$  que está sendo mapeada por  $\mathcal{F}$  no gráfico de  $N$  cujas coordenadas locais são  $y_i^\alpha$ .

- **Teorema.** Sendo  $\mathcal{F} : M \rightarrow N$ , e  $\Omega$  definido anteriormente, temos que

$$\int_M \mathcal{F} * \Omega = (\deg \mathcal{F}) \int_N \Omega. \quad (5.34)$$

### 5.3.2.3 Grau de um Campo Vetorial numa Hiper Superfície

Seja  $\xi = (\xi^\alpha(x))$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , um campo vetorial suave definido na região  $U$  no espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , cujas coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ . Desde que  $\xi(x) \neq 0$  em todos os pontos em  $U$ , o campo vetorial  $\xi$  pode ser escrito como um campo vetorial unitário  $n(x) = \frac{\xi(x)}{|\xi|}$  em  $U$ , o que leva por sua vez ao mapa Gaussiano esférico  $\mathcal{F} : U \rightarrow S^{n-1}$ , onde para cada ponto  $x \in U$ ,  $\mathcal{F}(x)$  é a ponta do vetor unitário  $n(x)$ . ( $\mathcal{F}(x)$  é um ponto na  $n - 1$ - esfera, como requerido). Dado  $Q$  sendo qualquer hipersuperfície completamente contida em  $U$ , o grau do mapa de restrição  $\mathcal{F}|_Q : Q \rightarrow S^{n-1}$ , é chamado de grau de um campo vetorial  $\xi$  na hipersuperfície  $Q$ .

- **Corolário.** O grau de um campo vetorial não nulo  $\xi(x)$  em uma hipersuperfície fechada  $Q$  no espaço Euclidiano, é dada pela integral  $\int_Q \mathcal{F} * \Omega$ , onde  $\mathcal{F} : Q \rightarrow S^{n-1}$  é o mapa Gaussiano determinado pelo campo vetorial, e  $\Omega$  é a  $(n - 1)$ -forma em  $S^{n-1}$ . Onde no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  em coordenadas esféricas, temos  $\Omega = \frac{1}{4\pi} |\sin \theta| d\theta d\phi$ .

Usando o teorema (5.34), podemos dizer que o grau do campo vetorial  $\xi(x)$  em uma hipersuperfície fechada  $Q$  para o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é dado por

$$\deg \mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int_Q \int \frac{d\mu d\nu}{|\xi|^3} \left\langle \xi, \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \mu}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right] \right\rangle, \quad (5.35)$$

### 5.3.3 Propriedades Topológicas dos Estados de Magnetização na Esfera Ferromagnética Oca

Para encontrar os estados topológicos de magnetização na esfera ferromagnética oca deste trabalho vamos nos basear no artigo (KRAVCHUK et al., 2016), onde o grupo estuda estados de magnetização topologicamente estáveis em cascas esféricas cujo raio é aproximadamente 16nm. Métodos topológicos estão sendo amplamente usados em sistemas da física da matéria condensada, geometrias não triviais podem induzir defeitos topológicos e resultam em novas interações. Nanofilmes curvilíneos com uma geometria fechada exibem novas interações devido a existência natural de invariantes topológicos no sistema, neste caso os autores analisam o campo vetorial da magnetização  $\vec{m}$ , definido na superfície do material ferromagnético, onde é realizado um mapa da superfície em uma esfera  $S^2$ . Como visto anteriormente este mapa é definido por um grau  $Q \in \mathbb{Z}$ , que por sua vez é um invariante topológico do sistema, onde dado uma distribuição da magnetização  $\vec{m}$  numa superfície fechada é caracterizada por um número inteiro  $Q$  que é conservado em relação a qualquer deformação contínua da magnetização. Ou seja, o grau deste mapa jacobiano é invariante sob homotopias (deformações).

O grau  $Q$  do mapa Jacobiano, realizado por um campo vetorial tridimensional normalizado  $\vec{m}$ , definido em uma superfície fechada bidimensional é dado por

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathcal{J} dS, \quad (5.36)$$

o mapa Jacobiano  $\mathcal{J}$  é dado por

$$\mathcal{J} = -\epsilon_{\alpha,\beta} \vec{m} \cdot [\nabla_\alpha \vec{m} \times \nabla_\beta \vec{m}] / 2, \quad (5.37)$$

onde as letras gregas  $\alpha, \beta$  representam as coordenadas curvilíneas  $\xi_\alpha$ , introduzidas na superfície da esfera, assim como para representar as componentes da base local  $\vec{e}_\alpha$ . Os índices em latin  $i, j, k = 1, 2, 3$  indexam as coordenadas e as componentes vetoriais na base cartesiana  $\vec{x}_i \in \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

- A magnetização  $\vec{m}$  pode ser dada como

$$\vec{m} = m_\alpha \vec{e}_\alpha + m_n \vec{n}, \quad (5.38)$$

onde  $\vec{e}_\alpha$  é a base curvilínea e  $\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  é o vetor normal a superfície. Dado que  $|\vec{m}| = 1$  fazemos as parametrizações angulares  $m_1 + im_2 = \sin \theta e^{i\phi}$  e  $m_n = \cos \theta$ .

Os angulos  $\theta$  e  $\phi$ , dependem de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , ou seja:

$$\theta = \theta(\xi_1, \xi_2), \quad (5.39)$$

$$\phi = \phi(\xi_1, \xi_2). \quad (5.40)$$

Usando transformações de bases curvilíneas pode-se provar que

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \vec{n} = -\sin \theta (\nabla \theta - \vec{\Gamma}) \times (\nabla \phi - \vec{\Omega}) - \cos \theta [\partial_\phi \vec{\Gamma} \times \nabla \theta + \vec{n} \mathcal{K}], \quad (5.41)$$

onde  $\vec{\Gamma}(\phi) = \|h_{\alpha\beta}\| \cdot \vec{\epsilon}(\phi)$ , sendo  $\vec{\epsilon} = \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2$  a projeção normalizada do vetor  $\vec{m}$  no plano tangencial e  $\|h_{\alpha\beta}\|$  é o tensor de Weingarten. O vetor  $\vec{\Omega}$  denota a conexão de Spin e  $\mathcal{K} = \det \|h_{\alpha\beta}\|$  é a curvatura Gaussiana.

O vetor  $\vec{\mathcal{J}}$  é o limite para o caso bidimensional para o vetor densidade topológica, ou vetor de giro acoplamento  $\vec{J}$ , que em coordenadas cartesianas é dado por

$$J_i = -\epsilon_{ijk} \vec{m} \cdot [\partial_j \vec{m} \times \partial_k \vec{m}] / 2. \quad (5.42)$$

Para o caso onde o comprimento  $L \rightarrow 0$  da casca esférica, temos que  $\vec{J} \rightarrow \vec{\mathcal{J}}$ . Podemos calcular o grau  $Q$  do mapa jacobiano usando o vetor de giro acoplamento dado por

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (5.43)$$

### 5.3.3.1 Energia Magnética em uma casca curvilínea

O funcional de energia magnética é dado por

$$E = L \int [A \mathcal{E}_{ex} - K(\vec{m} \cdot \vec{n})^2 + D \mathcal{E}_D] d\mathcal{S}, \quad (5.44)$$

onde o primeiro termo do integrando é a densidade de energia de troca  $\mathcal{E}_{ex} = \partial_i \vec{m} \cdot \partial_i \vec{m}$  sendo  $A$ , a constante de troca. O segundo termo é a densidade de energia de anisotropia

uniaxial, na qual força os spins a se manterem na geometria. O ultimo termo é a densidade de energia Dzyaloshinskii-Moriya (DMI),  $\mathcal{E}_D = m_n \nabla \cdot \vec{\mathbf{m}} - (\vec{\mathbf{m}} \cdot \nabla) m_n$ , na qual tem origem no acoplamento spin orbita e é relacionada com a quebra de inversão de simetria na interface do filme, usualmente é típica pra filmes ultra finos.

### 5.3.3.2 Caso da Casca Esférica

Usamos as equações de Euler-Lagrange para obter as equações diferenciais envolvendo os angulos  $\theta = \theta(\vartheta, \chi)$  e  $\phi = \phi(\vartheta, \chi)$ , sendo  $\vartheta = \xi_1$ ,  $\chi = \xi_2$ , que por sua vez é possível provar uma simetria axial, logo,  $\phi = 0$  e  $\theta = \theta(\vartheta)$ . A magnetização  $\vec{\mathbf{m}}$  é

$$\vec{\mathbf{m}} = \sin \theta \vec{\mathbf{e}}_\vartheta + \cos \theta \vec{\mathbf{n}}, \quad (5.45)$$

então aplicando as equações de Euler-Lagrange, que irão minimizar o funcional de energia, temos que

$$\theta'' + \cot \vartheta \theta' - \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{\cos 2\vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{R^2}{l^2} - \frac{4D}{D_c} \right] + 2 \cot \vartheta \sin^2 \theta \left( 1 + \frac{D}{D_c} \right) = 0, \quad (5.46)$$

é a equação diferencial envolvendo  $\theta = \theta(\vartheta)$ , onde  $l = \sqrt{\frac{A}{K}}$  é o comprimento característico magnético e  $D_c = 2\frac{A}{R}$  é a "força" do efeito da curvatura induzida DMI, que é exclusivamente impulsionado pela troca. Existem duas condições de contorno para o problema, pois temos na equação diferencial o fator  $\sin^2 \vartheta$  no denominador, ou seja, dois pontos singulares dado que

- $\theta(0) = 0, \quad \theta(\pi) = (w - 1)\pi,$

- $\theta(0) = \pi, \quad \theta(\pi) = (w)\pi,$

onde  $w$  é o numero de winding da magnetização em loop através dos polos em  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = \pi$ .

O grau do mapa jacobiano  $Q$ , pode ser obtido pela definição (5.36), depois de ter feito a integral nas coordenadas curvilineas do sistema, temos

$$Q = -\frac{1}{2} [(\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{n}})_{\vartheta=0} + (\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{n}})_{\vartheta=\pi}] \quad (5.47)$$

É possível encontrar valores de  $Q = 0, +1, -1$ , como os graus do mapa jacobiano para uma classe de soluções. Dado um numero winding  $w$ , dizemos que o grau  $Q$  é um invariante topológico, se fizermos a transformação  $\vec{\mathbf{m}} \rightarrow -\vec{\mathbf{m}}$ , o funcional de energia, na ausência de campos

externos, não muda mas o grau  $Q$  se transforma em  $Q \rightarrow -Q$ , onde esta transformação causa uma dupla degenerescência em relação ao estado  $w$ .

- Soluções em  $Q = 0$ , são soluções triviais em Skyrminion.(KRAVCHUK et al., 2016).

### 5.3.4 Soluções Skyrminion para a Esfera Ferromagnética Oca Submicrométrica

Para o caso da esfera ferromagnética oca, que é estudada neste trabalho, obtivemos o campo vetorial normalizado da magnetização dinâmica normalizada, descrito na equação (5.24), diferindo do trabalho (KRAVCHUK et al., 2016), onde a magnetização é estática. Mesmo que seja excitada por campos externos uniformes, a energia magnetostática é desprezível comparado as energias de troca. Nesta seção iremos analisar o caso onde a casca esférica de tamanho  $L = R_2 - R_1$  é muito pequena, de tal modo que a magnetização normalizada (5.24), não dependa do raio  $r$ , fixando assim um raio intermediário  $r = r^*$  entre os raios externo ( $R_2$ ) e interno  $R_1$ .

#### 5.3.4.1 Hamiltoniano para a Esfera Ferromagnética Oca Submicrométrica

Como já mencionado no capítulo de fundamentação teórica, a dimensão da esfera ferromagnética oca é grande o suficiente para negligenciar as interações de troca e grande o suficiente para anular a propagação eletromagnética, sendo a esfera oca isotrópica podemos negar a energia de anisotropia seja ela cúbica ou uniaxial. Vimos que a condição magnetostática  $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = 0$ , implica na dinâmica de dipolos magnéticos, onde as energias envolvidas são as energias de Zeeman, energias desmagnetizantes (PRAT-CAMPS et al., 2016), que por sua vez dependem da suscetibilidade e da razão dos raios, e o somatório das energias cinéticas dos dipolos magnéticos por causa da dependência temporal da magnetização (5.24). Então, o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = - \int_V \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t) dV - \int_V \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot \vec{\mathbf{H}}_d(\vec{\mathbf{r}}, t) dV + \sum_{i=1}^N \frac{m_{dipolo} r^{*2}}{2} \left( \dot{\theta}_i^2 + \dot{\phi}_i^2 \sin^2(\theta_i) \right), \quad (5.48)$$

onde a primeira integral é a contribuição da energia de Zeeman, o segundo termo é dado pela energia desmagnetizante, cujos  $\vec{\mathbf{H}}_d(\vec{\mathbf{r}}, t) = N\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ , são calculados em (PRAT-CAMPS et al., 2016), onde o tensor diagonal  $N$ , depende da suscetibilidade e da razão dos raios, o ultimo

termo é dado pelo somatório das energias cinéticas dos  $i$ -ésimos dipolos magnéticos, sendo  $m_{dipolo}$  a massa de cada dipolo que aproximadamente tomamos a mesma. As equações de movimento de Hamilton são dadas por

$$\dot{q}_{k,i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{k,i}}, \quad (5.49)$$

$$\dot{p}_{k,i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{k,i}}, \quad (5.50)$$

onde  $q_{k,i}$  e  $p_{k,i}$  são as  $i$ -ésimas coordenadas e momentos generalizados. As duas primeiras integrais não contribuem para as equações de movimento de Hamilton, pois é realizada uma integral no volume da casca esférica. Não iremos resolver as equações completas, porém usando a equação (5.50), para a coordenada generalizada  $\phi_i$ , temos

$$p_{\phi_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}_i} = m_{dipolo} r^{*2} \sin \theta_i \dot{\phi}_i, \quad (5.51)$$

$$\dot{p}_{\phi_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} = \frac{d(\sin \theta_i \dot{\phi}_i)}{dt} = 0, \quad (5.52)$$

então podemos dizer que  $\phi_i$  é cíclico, ou ignorável, de tal modo que podemos atribuir a solução  $\dot{\phi}_i = 0$ , sendo uma simetria axial ao problema para o caso onde o raio é fixado, quando a subtração dos raios ( $L = R_2 - R_1$ ) é muito pequena como feito no artigo do (KRAVCHUK et al., 2016). A relação de  $\phi$  em coordenadas esféricas é dada por

$$\phi = \arctan(y/x), \quad (5.53)$$

então se  $\phi = 0 \rightarrow y=0$ .

Usando coordenadas cartesianas na equação (5.12), e o fato de que  $y = 0$ , então  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  e  $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ , substituindo, temos o novo potencial  $\Psi_2$ , em função de  $x$  e  $z$ ,

$$\Psi_2^{l,m,\theta_0}(x, z) \quad (5.54)$$

O mapa Jacobiano em coordenadas cartesianas

$$J_i = -\epsilon_{i,j,k} \vec{m} \cdot [\partial_j \vec{m} \times \partial_k \vec{m}] / 2 \quad (5.55)$$

Como,  $y = 0$ , temos que a magnetização é dada por

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (5.56)$$

$$4\pi m_y = iv \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (5.57)$$

$$m_z = M_S, \quad (5.58)$$

sendo o novo  $\vec{M}_{\vec{r},t}$  normalizado.

- Calculando o Grau do Mapa Jacobinano em coordenadas cartesianas para o novo vetor magnetização no caso  $y = 0$  cujas componentes ,

$$Q = (4\pi)^{-1} \int_S \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}, \quad (5.59)$$

$$Q = (4\pi)^{-1} \int_S -\epsilon_{i,j,k} \vec{m} \cdot [\partial_j \vec{m} \times \partial_k \vec{m}] / 2 dS, \quad (5.60)$$

então efetuando a integral obtemos  $Q = 0$ , pois o produtor vetorial  $[\partial_j \vec{m} \times \partial_k \vec{m}]$ , vale zero por causa que  $\phi = 0$ . Onde ,

$$\vec{J}_y = \vec{m} \cdot [\partial_x \vec{m} \times \partial_z \vec{m}] - \vec{m} \cdot [\partial_z \vec{m} \times \partial_x \vec{m}] = 0,$$

pois os produtos vetoriais  $[\partial_x \vec{m} \times \partial_z \vec{m}]$  e  $[\partial_z \vec{m} \times \partial_x \vec{m}]$ , são nulos. Obtendo assim uma solução em Skyrmion.

#### 5.3.4.2 *Análise do Campo Vetorial da Magnetização da Esfera Ferromagnética Oca para $\phi = 0$*

Vimos anteriormente que as componentes da magnetização são dadas por

$$\begin{aligned}
m_x(r, \theta, \phi) = & B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ l\kappa \cos \phi \sin \theta + \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\
& - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} - ivl \sin \phi \sin \theta - \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. + \frac{ivkl \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ \kappa(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \right. \\
& - \frac{\kappa \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \sin \phi}{\sin \theta} \\
& - iv(l+1) \sin \phi \sin \theta + \frac{iv \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. + \frac{ivk(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{mv \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_y(r, \theta, \phi) = & B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') e^{im\phi} \left\{ r^{l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ ivl \cos \phi \sin \theta + \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\
& - \frac{iv\kappa l \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} + \kappa l \sin \phi \sin \theta + \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ iv(l+1) \cos \phi \sin \theta \right. \right. \\
& - \frac{iv \cos \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{iv\kappa(l+1) \sin 2\theta \cos \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv \sin \phi}{\sin \theta} \\
& + \kappa(l+1) \sin \phi \sin \theta - \frac{\kappa \sin \phi \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \\
& \left. \left. - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \sin \phi \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa \cos \phi}{\sin \theta} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$m_z(r, \theta, \phi) = M_S.$$

Na qual, o campo vetorial da magnetização dinâmica pode ser normalizado, como mostrado na equação (5.28). Para  $r = r^*$  e  $\phi = 0$ , as componentes estáticas são dadas por

$$\begin{aligned}
m_x(\theta) &= B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') \left\{ r^{*l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ l\kappa \sin \theta + \frac{\kappa \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\kappa^2 l \sin 2\theta \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{mv}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{*l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ \kappa(l+1) \sin \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\kappa \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{\kappa^2(l+1) \sin 2\theta \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{mv}{\sin \theta} \right] \right\}, \\
m_y(\theta) &= B_l^m \frac{1}{4\pi} P_l^m(\cos \theta') \left\{ r^{*l-1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} \left[ ivl \sin \theta + \frac{iv \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{iv\kappa l \sin 2\theta \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} + \frac{im\kappa}{\sin \theta} \right] + \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{*l+2} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \left[ iv(l+1) \sin \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{iv \cos \theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{P_l^m(\cos \theta')} - \frac{iv\kappa(l+1) \sin 2\theta \cos \theta}{2(1 + \kappa \cos^2 \theta)} - \frac{im\kappa}{\sin \theta} \right] \right\}, \\
m_z(\theta) &= M_S.
\end{aligned}$$

Podemos notar que existe em ambas as componentes  $m_x$  e  $m_y$  o  $\sin \theta$  no denominador, fazendo assim, uma singularidade no campo vetorial de magnetização  $\vec{M}_\theta$ . Onde se  $\theta = 0$ , ou  $\theta = \pi$ , existe um "defeito" na magnetização, tendo a mesma característica do artigo (KRAVCHUK et al., 2016), no qual como visto anteriormente, os autores encontram esta singularidade na equação diferencial ordinária proveniente das equações de Euler-Lagrange, quando o funcional é minimizado.

Também podemos notar que existe no denominador nas componentes do campo vetorial da magnetização a seguinte expressão

$$(1 + \kappa \cos^2 \theta), \quad (5.61)$$

onde para alguns valores de  $\kappa$  e  $\cos^2 \theta$ , existe outra singularidade na forma de uma curva  $\gamma$ , que está contida na superfície fechada da esfera  $\mathcal{S}$ . Para encontrar quais são os valores de  $\kappa$ ,

limitantes e as regiões dos pares  $(\Omega, \Omega_H)$  que contém duas singularidades, soluções do tipo Skyrmion usual, e as regiões de pares  $(\Omega, \Omega_H)$ , que de fato é possível encontrar valores de  $\theta$ , que se tenha esta singularidade adicional em forma de uma curva  $\gamma$ . Para fazer esta análise, este novo defeito na magnetização surge se

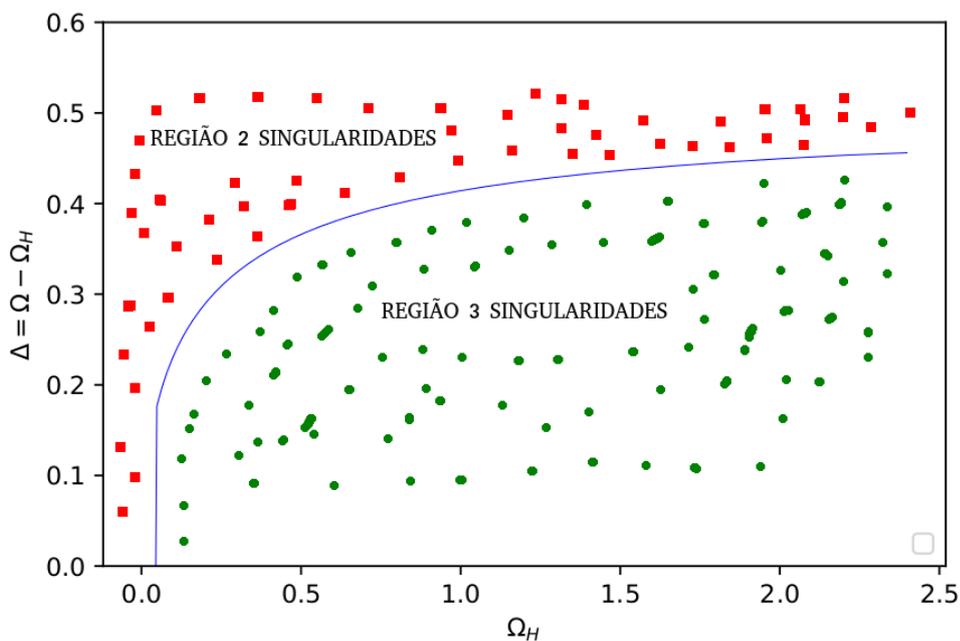
$$(1 + \kappa \cos^2 \theta) = 0, \quad (5.62)$$

$$\cos^2 \theta = -\frac{1}{\kappa} \quad (5.63)$$

- Para o caso onde  $\kappa < -1$ , haverá um valor de  $\cos \theta$  para que ocorra esta singularidade em forma de curva  $\gamma$ , fechada na superfície da esfera  $\mathcal{S}$ . Além da singularidade nos polos norte e sul ( $\theta = 0, \theta = \pi$ )
- Para  $\kappa > -1$ , a função  $\cos \theta$ , não está definida, ou seja, para qualquer valor de theta, desde que não seja  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , não haverá singularidade proveniente do denominador  $(1 + \kappa \cos^2 \theta)$ . E as soluções em Skyrmion usual irão acontecer.

Sendo o valor  $\kappa = -1$ , o limitante para as regiões com duas ou 3 singularidades, a Figura 31 mostra para quais valores de  $\Delta = \Omega - \Omega_H$  e  $\Omega_H$ .

Figura 31 – Regiões onde é possível encontrar as soluções do tipo Skyrmion usuais com duas singularidades,  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . E três singularidades, incluindo as curvas com "defeito"



Fonte: O autor (2022)

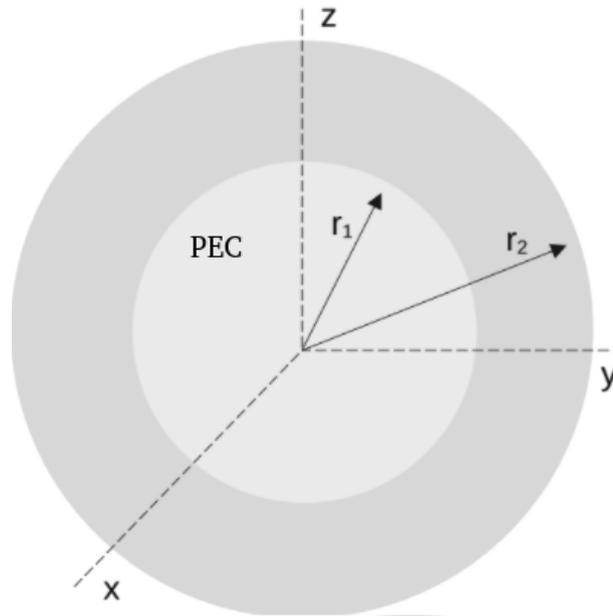
Podemos notar que, analisando os gráficos das relações de dispersão, é possível encontrar soluções apenas com duas singularidades,  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , para valores pequenos de  $\Omega_H$ , ou seja, para pequenos campos magnéticos externo. Tendo semelhança com o artigo do (KRAVCHUK et al., 2016), onde é uma solução estacionária sem a presença de campos externos.

- Para a região  $\Delta > \Omega - \Omega_H = \sqrt{\Omega_H^2 + \Omega_H} - \Omega_H$ , temos apenas duas singularidades em  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- Para a região  $\Delta < \Omega - \Omega_H = \sqrt{\Omega_H^2 + \Omega_H} - \Omega_H$ , temos duas singularidades em  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e uma terceira singularidade dada por uma curva  $\gamma$ , que é invariante ao valor de  $\phi$ , por ter um valor de  $\cos \theta$ , tal que o denominador  $(1 + \kappa \cos^2 \theta)$  seja nulo. Ou seja, haverão duas curvas  $\gamma$ , pois  $\cos^2 \theta = -\frac{1}{\kappa}$ , logo para cada valor de  $\kappa < -1$ , cujos valores de  $\Delta = \Omega - \Omega_H$  e  $\Omega_H$  estejam na região acima, existem dois valores de  $\theta$ , para o mesmo valor de  $\cos \theta$ , que seja válido. Para esta região haverá os pontos singulares  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e duas curvas  $\gamma$ , uma no hemisfério norte ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) e outra no hemisfério sul ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ).

#### 5.4 ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA COM UM CONDUTOR ELÉTRICAMENTE PERFEITO(PEC)

A Figura 32 representa uma esfera oca ferromagnética onde  $r_1$  é o raio interno e  $r_2$  é o raio externo, dado que a região entre os raios é formada por um material ferromagnético, a região interna  $r < r_1$  é formada por um Condutor Perfeito e a externa  $r > r_2$  é vácuo. Cascas esféricas ferromagnéticas são produzidas pelo revestimento de esferas metálicas.

Figura 32 – Esfera Ferromagnética Oca com um Condutor Perfeitamente Elétrico



Fonte: O autor (2022)

O Campo Elétrico dentro de um Condutor é nulo. ( $\vec{E} = 0$ ), pois a condutividade  $\sigma$  tende ao infinito. Então pela lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.64)$$

se  $\vec{E} = 0$ , logo

$$\vec{B} = \text{Constante}, \quad (5.65)$$

o que é razoável atribuir  $\vec{B} = 0$ .

Para encontrar a relação de dispersão temos que aplicar a equação de Landau-Lifshitz e usar a aproximação magnétostática já vista no capítulo de Fundamentação teórica. Separamos o problema em duas partes, já vistas anteriormente no artigo do Walker (WALKER, 1957).

1º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região ( $r > r_2$ ) e  $r < r_1$  é

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0. \quad (5.66)$$

2º) A equação diferencial parcial do potencial magnetostático na região  $r_1 < r < r_2$  é dada por

$$(1 + \kappa) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (5.67)$$

onde  $\kappa = \frac{\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}$ ,  $\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}$ ,  $v = \frac{\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}$ .

Pela simetria esférica do problema usaremos a expansão em polinômios associados de Legendre, onde a solução geral é

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (\alpha_l^m r^l + \beta_l^m r^{-l-1}) P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (5.68)$$

Para a região,  $r_1 < r < r_2$  faremos a mudança de variável  $z \rightarrow z' = (1 + \kappa)^{1/2} z$  obtendo a nova EDP da seguinte forma

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Psi = 0. \quad (5.69)$$

Temos que a nova coordenada  $z'$  depende das novas coordenadas esféricas  $(r', \theta')$  representada por

$$z' = r' \cos \theta', \quad (5.70)$$

onde

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (1 + \kappa)z^2, \quad (5.71)$$

$$r'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \kappa z^2, \quad (5.72)$$

$$r'^2 = r^2 + \kappa r^2 \cos^2 \theta, \quad (5.73)$$

$$r' = r (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (5.74)$$

Então para calcular  $\cos \theta'$  temos que

$$\cos \theta' = \frac{z'}{r'}, \quad (5.75)$$

$$\cos \theta' = \frac{z(1 + \kappa)^{1/2}}{r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}}. \quad (5.76)$$

Logo, para simplificar escrevemos

$$P_l^m(\cos \theta') = P_l^m \left( \sqrt{\frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta}} \right). \quad (5.77)$$

Assumindo que  $Z \in \mathbb{C}$  e  $Z = \cos \theta'$ , pela análise complexa dos polinômios associado de legendre  $P_l^m(Z)$  é sabido que a função é analítica no intervalo descrito pela desigualdade descrita na equação (4.13)

$$|Z| < 1 \quad (5.78)$$

Ou seja, podemos dizer que  $Z = \cos \theta'$  está condizente com a definição, então seu domínio vale

$$0 < \sqrt{\left| \frac{\cos^2 \theta (1 + \kappa)}{1 + \kappa \cos^2 \theta} \right|} < 1. \quad (5.79)$$

A restrição que temos é dada por

$$1 + \kappa \cos^2 \theta \neq 0 \quad (5.80)$$

Em termos das frequências reduzidas temos

$$\Omega \neq \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + \Omega_H \cos^2 \theta)} \quad (5.81)$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_1$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Lapace ( $\nabla^2(\Psi_2') = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica dada por

$$(1 - z_1^2)y'' - 2z_1y' + \left( \lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - z_1^2} \right) z_1 = 0,$$

que tem singularidades em  $z_1 = 0$  e  $z_1 = 1$ . Sendo  $y = P_l^m(z_1)$ , os polinômios associados de legendre do 1º tipo, pois para  $|z_1| > 1$ , não existe domínio então a solução do 2º tipo  $y = Q_l^m(z_1)$  é descartada. Logo  $z_1$  é analítica na região  $|z_1| < 1$

Para  $z_2$ , o domínio é dado por

$$|z_2| > 0,$$

Então, podemos dizer que a EDO que está relacionada a variável  $z_2$ , quando é realizada a separação de variáveis da Equação de Lapace ( $\nabla^2(\Psi_2') = 0$ ), é a equação diferencial hipergeométrica confluyente, que por sua vez apresenta uma singularidade em  $z_2 = 0$ . Logo é analítica na região  $|z_2| > 0$ .

Que nos dá garantia que a parte radial é expandida

$$R_l(z_2) = B_l' z_2^l + C_l' \frac{1}{z_2^{l+1}},$$

Então, vamos escrever a solução do potencial magnetostático para as três regiões.

Para  $r < r_1$  temos

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = 0, \quad (5.82)$$

pois  $\vec{\mathbf{B}} = 0$ .

Para  $r_1 < r < r_2$ , temos

$$\Psi_2(r', \theta', \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ B_l^m (r')^l + C_l^m (r')^{-l-1} \right] P_l^m(\cos \theta') \exp(im\phi). \quad (5.83)$$

Substituindo  $r'$ , concluímos

$$\Psi_2(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ B_l^m (r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2})^l + C_l^m (r(1 + \kappa \cos^2 \theta)^{1/2})^{-l-1} \right] P_l^m(\cos \theta') \exp(im\phi). \quad (5.84)$$

Para  $r > r_2$  temos que

$$\Psi_3(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} D_l^m r^{-l-1} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (5.85)$$

Existem duas condições de contorno para o problema:

1º) Continuidade do Potencial Magnetostático em  $r_1$  e  $r_2$ ,

2º) Continuidade da componente normal do campo magnético em  $r_1$  e  $r_2$ , ou seja,  $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal}$ ,

Sabemos do capítulo de Fundamentação Teórica que;

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\nabla} \Psi, \quad (5.86)$$

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (5.87)$$

$$4\pi m_y = iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (5.88)$$

Para calcular a componente normal do campo magnético temos que fazer o produto interno com o versor  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (5.89)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$ . Sabemos que o campo magnético dentro do material vale

$$(\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}})_{normal} = \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[ (1 + \kappa) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + iv \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.90)$$

Fazemos as transformações

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.93)$$

Então a componente normal do campo magnético  $\vec{\mathbf{B}}$  dentro do material em relação as coordenadas esféricas vale

$$\vec{\mathbf{B}}_{normal} = (\vec{\mathbf{h}} + 4\pi\vec{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = (1 + \kappa \sin^2 \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\kappa \sin 2\theta}{2r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{iv}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (5.94)$$

Para calcular a componente normal do campo para  $r < r_1$  e  $r > r_2$  basta atribuir  $\kappa = 0$  e  $v = 0$ .

Para calcular a equação característica aplicamos as condições de contorno para os dois raios e em seguida resolvemos a equação secular como já fizemos anteriormente, então temos que

$$\left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{2l+1} \left[ -1 - \kappa \sin^2 \theta + \frac{\kappa^2 \sin^2 2\theta}{4(1+\kappa \cos^2 \theta)} - \frac{\kappa \sin 2\theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta')} - \frac{mv}{l} \right] \times$$

$$\times \left[ -\kappa \sin^2 \theta + \frac{\kappa^2 \sin^2 2\theta}{4(1+\kappa \cos^2 \theta)} + \frac{\kappa \sin 2\theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{2(l+1)P_l^m(\cos \theta')} + \frac{mv}{l+1} \right] -$$

$$\left[ \frac{(\kappa \sin^2 \theta + 1)(l+1)}{l} - \frac{(l+1)\kappa^2 \sin^2 2\theta}{4l(1+\kappa \cos^2 \theta)} - \frac{\kappa \sin 2\theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{2lP_l^m(\cos \theta')} - \frac{mv}{l} \right] \times$$

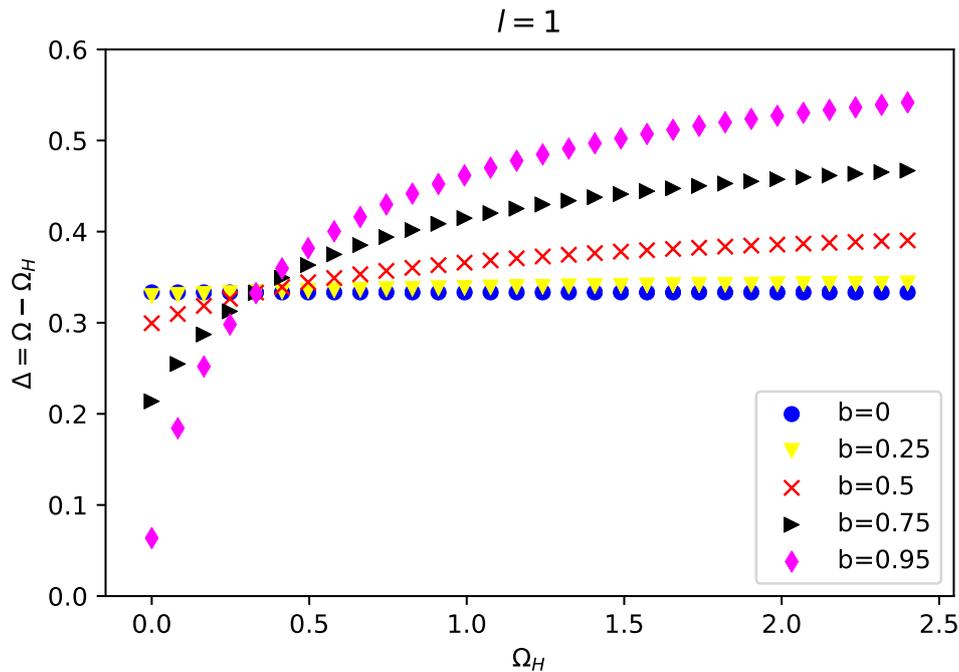
$$\times \left[ 1 + \frac{l(\kappa \sin^2 \theta + 1)}{l+1} - \frac{l\kappa^2 \sin^2 2\theta}{4(l+1)(1+\kappa \cos^2 \theta)} + \frac{\kappa \sin 2\theta \frac{dP_l^m(\cos \theta')}{d\theta}}{2(l+1)P_l^m(\cos \theta')} + \frac{mv}{l+1} \right] = 0$$

Temos então a equação característica para os modos magnetostáticos de uma esfera ferromagnética oca, onde esta relação de dispersão depende de 3 parâmetros sendo eles  $(l, m, \cos \theta = \cos \theta_0)$ . Onde o ângulo  $\theta = \theta_0$ , é qualquer ângulo entre  $0 < \theta < 2\pi$  que usamos para atribuir as condições de contorno.

#### 5.4.1 Gráficos da Relação de Dispersão da Esfera Ferromagnética Oca com um PEC

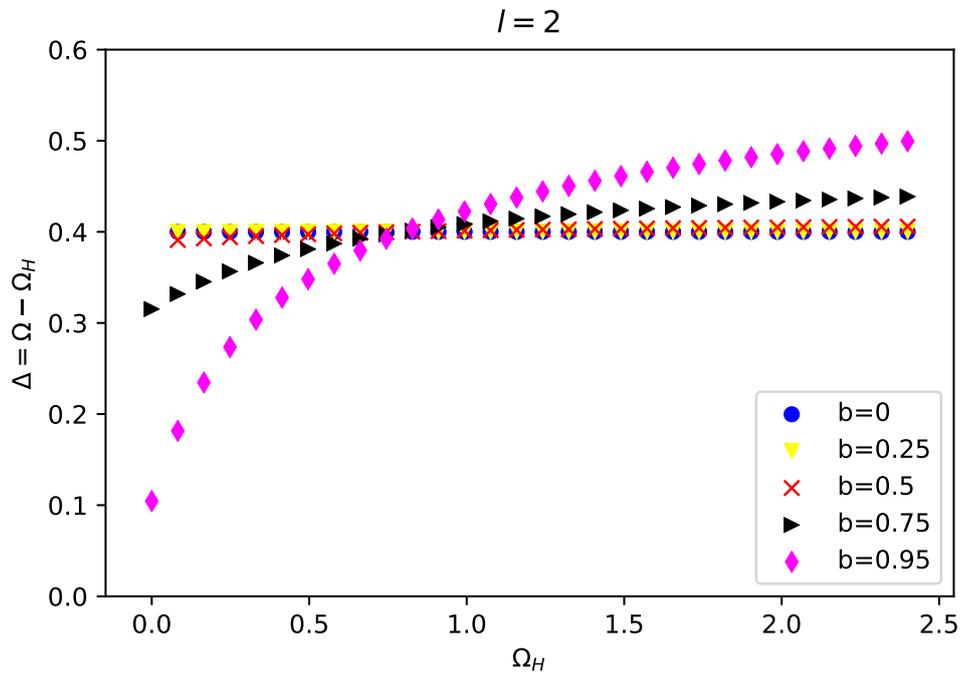
##### 5.4.1.1 Modos $l = m = 1$ e $\theta = \theta_0 = \pi/2$

Figura 33 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=1$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



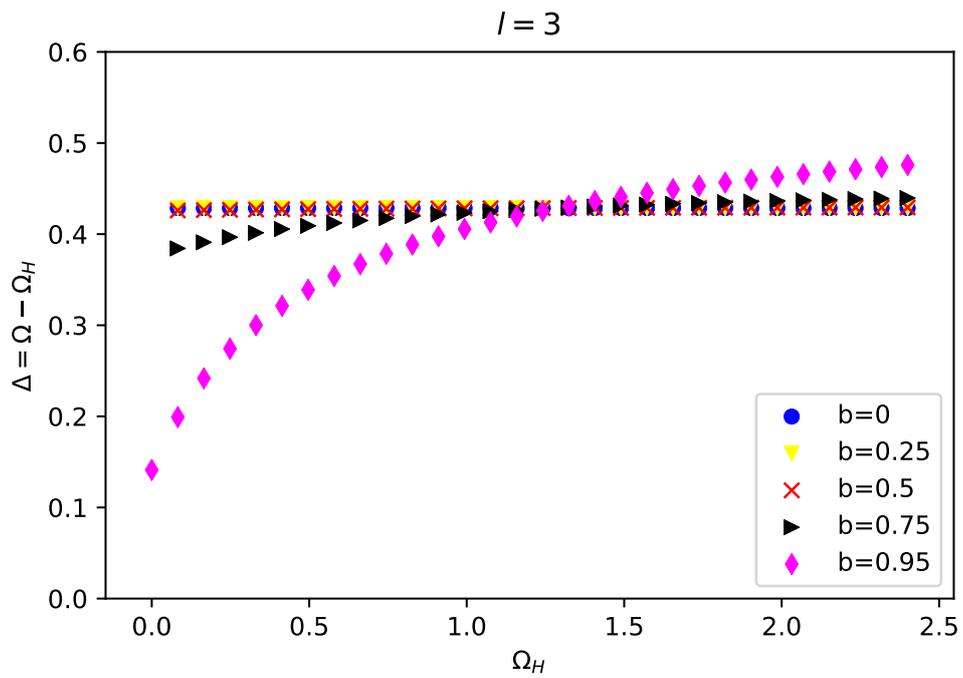
Fonte: O autor (2022)

Figura 34 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=2$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



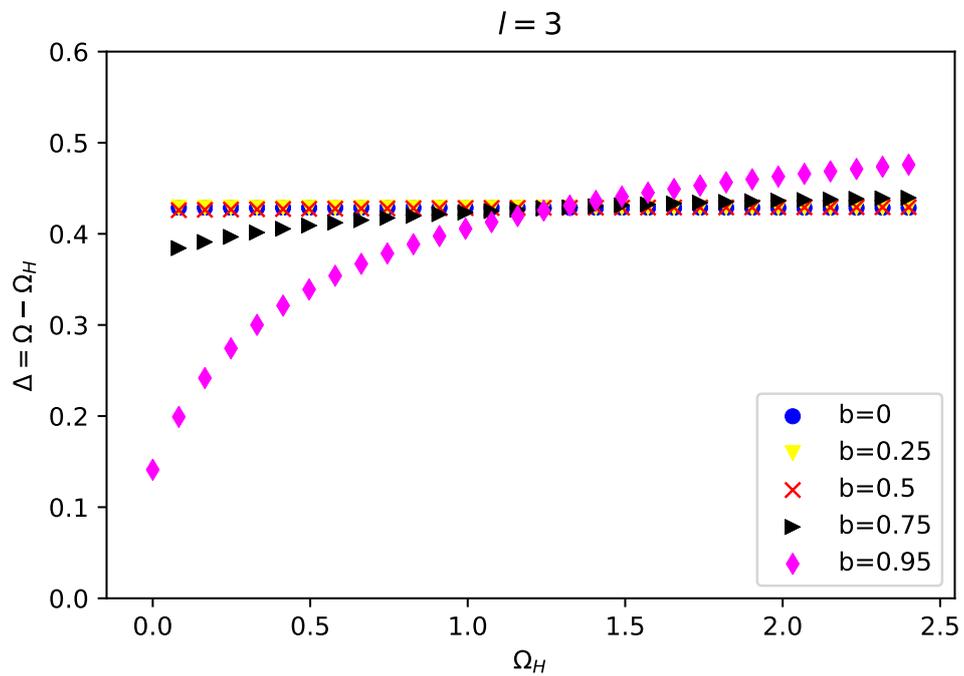
Fonte: O autor (2022)

Figura 35 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=3$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



Fonte: O autor (2022)

Figura 36 – Gráfico da equação de dispersão para quando  $l=m=3$  e diferentes valores de  $b = \frac{r_1}{r_2}$



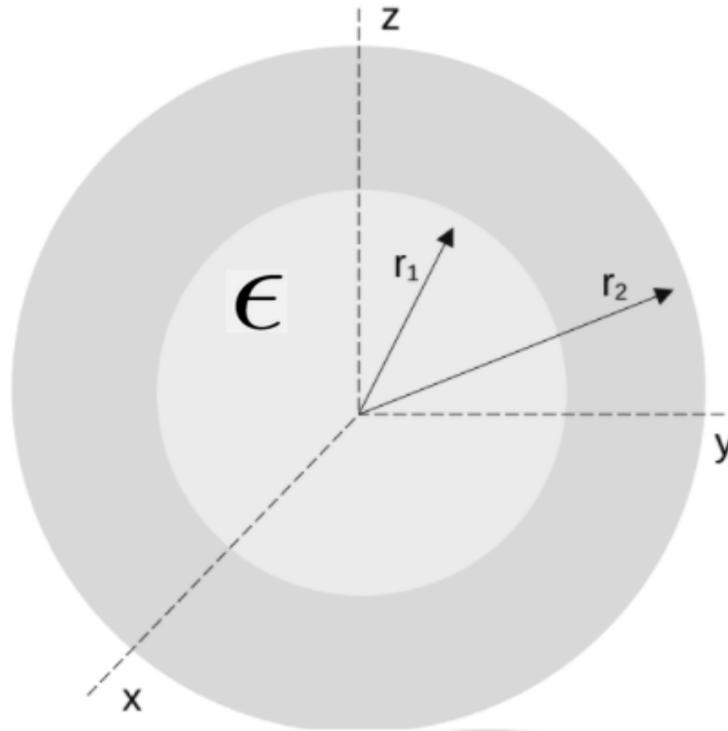
Fonte: O autor (2022)

Percebemos uma similaridade entre os gráficos da relação de dispersão quando a região interna é formada por vácuo e este contendo dentro um Condutor Perfeito. O mesmo apresenta frequências mais altas para os mesmos valores do campo externo  $\vec{H}_i$ , comparados a situação a vácuo.

## 5.5 ESFERA FERROMAGNÉTICA OCA COM UM DIELÉTRICO INTERNO

A Figura 37 é uma esfera oca ferromagnética onde  $r_1$  é o raio interno e  $r_2$  é o raio externo, dado que a região entre os raios é formada por um material ferromagnético, a região interna  $r < r_1$  é formada por um dielétrico  $\epsilon$  e a região externa,  $r > r_2$  é vácuo.

Figura 37 – Esfera Ferromagnética Oca envolvida por um dielétrico



Fonte: O autor (2022)

A aproximação magnetostática é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}_0 = 0, \quad (5.95)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}_0 = 0. \quad (5.96)$$

Para aproximações de mais alta ordem, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5.97)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.98)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad (5.99)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}. \quad (5.100)$$

Partindo da solução dos campos  $\vec{\mathbf{b}}_0(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{h}}_0 + 4\pi\vec{\mathbf{m}}$  e  $\vec{\mathbf{h}}_0$ , já calculados na aproximação magnetostática, vamos usar as equações de Maxwell iteradas para fazer uma perturbação no sistema e calcular as correções de primeira ordem do campo elétrico  $\vec{\mathbf{E}}$  e do campo magnético  $\vec{\mathbf{h}}_1$ .

### 5.5.1 Determinando o Campo Elétrico $\vec{\mathbf{E}}$

Podemos definir o campo elétrico  $\vec{\mathbf{E}}$ , como uma soma da parte rotacional de um potencial vetor e do gradiente de um campo escalar

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}' + \vec{\nabla} \varphi, \quad (5.101)$$

aplicando o rotacional em ambos os lados, temos

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{A}}' - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}') = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{b}}_0}{\partial t}, \quad (5.102)$$

pelo Gauge de coulomb, temos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}' = 0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.103)$$

podendo atribuir que  $\vec{\nabla} \varphi = 0$ , então a equação diferencial é dada por

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{A}}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{b}}_0}{\partial t}, \quad (5.104)$$

que é resolvida usando a teoria de Green, onde podemos dividir em três partes:

- $\vec{\mathbf{A}}'_{r < r_1}$  para  $r < r_1$ .

$$\vec{\mathbf{A}}'_{r < r_1} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|} \frac{\partial \vec{\mathbf{h}}_{01}(\vec{\mathbf{r}}^*, t)}{\partial t}, \quad (5.105)$$

$$\vec{\mathbf{A}}'_{r < r_1} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{\mathbf{h}}_{01}(\vec{\mathbf{r}}^*, t)}{\partial t},$$

- $\vec{A}'$  para  $r_1 < r < r_2$ .

$$\vec{A}'_{r_1 < r < r_2} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \frac{\partial \vec{b}_{02}(\vec{r}^*, t)}{\partial t}, \quad (5.106)$$

$$\vec{A}'_{r_1 < r < r_2} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{b}_{02}(\vec{r}^*, t)}{\partial t},$$

- $\vec{A}'$  para  $r > r_2$ .

$$\vec{A}'_{r > r_2} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_2}^\infty \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \frac{\partial \vec{h}_{03}(\vec{r}^*, t)}{\partial t}, \quad (5.107)$$

$$\vec{A}'_{r > r_2} = -\frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_2}^\infty \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{h}_{03}(\vec{r}^*, t)}{\partial t}.$$

### 5.5.1.1 Recalculando as Soluções Particulares dos Potenciais magnetostáticos para as três regiões em função dos coeficientes $B_l^m$

Usando a condição de contorno da continuidade dos potenciais e da continuidade da componente normal do fluxo do campo magnético  $\vec{B}$ , podemos reescrever os potenciais em toda a região em função dos coeficientes  $B_l^m$ , então

- Para  $r < r_1$ .

$$\Phi_1 = \Phi(r < r_1) = B_l^m \gamma_l^{m'} r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (5.108)$$

- Para  $r_1 < r < r_2$ .

$$\Phi_2 = \Phi(r_1 < r < r_2) = B_l^m \left( r^l (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{l/2} - \frac{\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)}{r^{l+1} (1 + \kappa \cos^2 \theta)^{\frac{l+1}{2}}} \right) P_l^m(\cos \theta') \exp\{im\phi\}, \quad (5.109)$$

- Para  $r > r_2$ .

$$\Phi_3 = \Phi(r > r_2) = B_l^m \gamma_l^{m''} r^{-l-1} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (5.110)$$

onde  $\gamma_l^{m, \theta_0}(b, r_2, \kappa, v)$  é dado pela equação (5.12) e  $\gamma_l^{m'}$ ,  $\gamma_l^{m''}$  são coeficientes que dependem de  $(b, r_2, \kappa, v, m, \theta_0)$  provenientes das duas condições de contorno do problema usadas nas interfaces.

### 5.5.1.2 Calculando $\vec{h}_{01}$ , $\vec{b}_{02}$ e $\vec{h}_{03}$

Iremos calcular estes vetores usando as coordenadas  $(\vec{r}^*, t) = (r^*, \theta^*, \phi^*, t)$ , pois a integral dos Potenciais magnetostáticos estão em relação as coordenadas  $(*)$ , então

$$\vec{h}_{01}(\vec{r}^*, t) = \left( \frac{\partial \phi_1(\vec{r}^*, t)}{\partial x^*} \vec{i} + \frac{\partial \phi_1(\vec{r}^*, t)}{\partial y^*} \vec{j} + \frac{\partial \phi_1(\vec{r}^*, t)}{\partial z^*} \vec{k} \right) e^{i\omega t}, \quad (5.111)$$

$$\vec{b}_{02}(\vec{r}^*, t) =$$

$$\left[ \left( (1 + \kappa) \frac{\partial \phi_2(\vec{r}^*, t)}{\partial x^*} - i\nu \frac{\partial \phi_2(\vec{r}^*, t)}{\partial y^*} \right) \vec{i} + \left( (1 + \kappa) \frac{\partial \phi_2(\vec{r}^*, t)}{\partial y^*} + i\nu \frac{\partial \phi_2(\vec{r}^*, t)}{\partial x^*} \right) \vec{j} + \frac{\partial \phi_2(\vec{r}^*, t)}{\partial z^*} \vec{k} \right] e^{i\omega t}, \quad (5.112)$$

$$\vec{h}_{03}(\vec{r}^*, t) = \left( \frac{\partial \phi_3(\vec{r}^*, t)}{\partial x^*} \vec{i} + \frac{\partial \phi_3(\vec{r}^*, t)}{\partial y^*} \vec{j} + \frac{\partial \phi_3(\vec{r}^*, t)}{\partial z^*} \vec{k} \right) e^{i\omega t}. \quad (5.113)$$

Fazemos as transformações em relação as coordenadas  $*$ , então

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = \cos \phi^* \sin \theta^* \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{\cos \phi^* \cos \theta^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta^*} - \frac{\sin \phi^*}{r^* \sin \theta^*} \frac{\partial}{\partial \phi^*} \quad (5.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} = \sin \phi^* \sin \theta^* \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{\sin \phi^* \cos \theta^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \frac{\cos \phi^*}{r^* \sin \theta^*} \frac{\partial}{\partial \phi^*} \quad (5.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \cos \theta^* \frac{\partial}{\partial r^*} - \frac{\sin \theta^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \quad (5.116)$$

### 5.5.1.3 Calculando o campo vetorial $\vec{E}_{r,\theta,\phi}$

Sabemos que

$$\vec{E}_{(r,\theta,\phi)} = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{A}'(r, \theta, \phi), \quad (5.117)$$

iremos calcular os três campos vetoriais para o campo vetorial  $\vec{E}_{(r,\theta,\phi)}$ , usando o operador rotacional na base cartesiana e usando as transformações, (5.91), (5.92), (5.93), em relação agora as coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , que vai atuar nas integrais, (5.105), (5.106), (5.107), dos potências vetor. para as regiões, então

$$\bullet \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^1 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{A}'_{r < r_1}(r, \theta, \phi),$$

$$\vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^1 = \left( \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 z}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 y}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 x}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 z}}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}'_{r < r_1 x}}{\partial y} \right) \vec{k},$$

(5.118)

onde  $\vec{A}_{r < r_1 i}'$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral.

$$\blacksquare \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^2 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{A}'_{r_1 < r < r_2}(r, \theta, \phi),$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^2 = & \left( \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 z}'}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 y}'}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 x}'}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 z}'}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ & \left( \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 y}'}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_{r_1 < r < r_2 x}'}{\partial y} \right) \vec{k}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{A}_{r_1 < r < r_2 i}'$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral.

$$\blacksquare \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^3 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{A}'_{r > r_3}(r, \theta, \phi),$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^3 = & \left( \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 z}'}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 y}'}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 x}'}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 z}'}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ & \left( \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 y}'}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_{r > r_3 x}'}{\partial y} \right) \vec{k}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{A}_{r > r_3 i}'$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral.

Usando as transformações (5.91), (5.92), (5.93) para que as derivadas entrem no integrando dos potenciais vetores.

#### 5.5.1.4 Determinando a correção de primeira ordem do campo vetorial $\vec{h}_0$ : O campo $\vec{h}_1$

Podemos definir o campo magnético  $\vec{h}_1$ , como uma soma da parte rotacional de um potencial vetor e do gradiente de um campo escalar

$$\vec{h}_1(r, \theta, \phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}'' + \vec{\nabla} \varphi, \quad (5.119)$$

aplicando o rotacional em ambos os lados, temos

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}'' - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'') = \vec{\nabla} \times \vec{h}_1 = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}}{\partial t}, \quad (5.120)$$

pelo Gauge de coulomb, temos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = 0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.121)$$

podendo atribuir que  $\vec{\nabla} \varphi = 0$ , então a equação diferencial é dada por

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}'' = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}}{\partial t}, \quad (5.122)$$

que é resolvida usando a teoria de Green, onde podemos dividir em três partes:

- $\vec{A}''$  para  $r < r_1$ .

$$\vec{A}''_{r < r_1} = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \frac{\partial \vec{E}_{(r^*,\theta^*,\phi^*)}^1}{\partial t} \quad (5.123)$$

$$\vec{A}''_{r < r_1} = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{E}_{(r^*,\theta^*,\phi^*)}^1}{\partial t},$$

- $\vec{A}''$  para  $r_1 < r < r_2$ .

$$\vec{A}''_{r_1 < r < r_2} = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \frac{\partial \vec{E}_{(r^*,\theta^*,\phi^*)}^2}{\partial t}, \quad (5.124)$$

$$\vec{A}''_{r_1 < r < r_2} = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{E}_{(r^*,\theta^*,\phi^*)}^2}{\partial t},$$

- $\vec{A}''$  para  $r > r_2$ .

$$\vec{A}''_{r > r_2} = \frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_2}^\infty \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \frac{\partial \vec{E}_{(r,\theta,\phi)}^3}{\partial t}, \quad (5.125)$$

$$\vec{A}''_{r > r_2} = \frac{1}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_2}^\infty \frac{r^{*2} \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\phi^*}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*(\cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\phi - \phi^*))}} \frac{\partial \vec{E}_{(r^*,\theta^*,\phi^*)}^3}{\partial t}.$$

### 5.5.1.5 Calculando o campo vetorial $\vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)$

Sabemos que

$$\vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi) = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{\mathbf{A}}''(r, \theta, \phi), \quad (5.126)$$

iremos calcular os três campos vetoriais para  $\vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)$ , usando o operador rotacional na base cartesiana e usando as transformações, (5.91), (5.92), (5.93), em relação agora as coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , que vai atuar nas integrais, (5.123), (5.124), (5.125), dos potenciais vetor. para as regiões, então

$$\bullet \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)^1 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1}(r, \theta, \phi),$$

$$\vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)^1 = \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 z}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 y}}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 x}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 z}}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 x}}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{k}}, \quad (5.127)$$

onde  $\vec{\mathbf{A}}''_{r < r_1 i}$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral.

$$\bullet \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)^2 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2}(r, \theta, \phi),$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)^2 = & \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 z}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 y}}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 x}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 z}}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{j}} + \\ & \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 x}}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{\mathbf{A}}''_{r_1 < r < r_2 i}$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral.

$$\bullet \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi)^3 = \vec{\nabla}(r, \theta, \phi) \times \vec{\mathbf{A}}''_{r > r_3}(r, \theta, \phi),$$

$$\vec{h}_1(r, \theta, \phi)^3 = \left( \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3z}''}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3y}''}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3x}''}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3z}''}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3y}''}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_{r>r_3x}''}{\partial y} \right) \vec{k},$$

onde  $\vec{A}_{r>r_3i}''$ , sendo  $i$  a componente cartesiana do potencial vetor em sua forma integral. Usando as transformações (5.91), (5.92), (5.93) para que as derivadas entrem no integrando dos potenciais vetores.

Temos então os vetores  $\vec{h}_1(r, \theta, \phi)$ , em forma de integrais elípticas, para as três regiões

- Para  $r < r_1$ , temos  $\vec{h}_1(r, \theta, \phi)^1$ ,
- Para  $r_1 < r < r_2$ , temos  $\vec{h}_1(r, \theta, \phi)^2$ ,
- Para  $r > r_2$ , temos  $\vec{h}_1(r, \theta, \phi)^2$ ,

todos estes vetores,  $\vec{h}_1(r, \theta, \phi)$ , que representam campos induzidos pelas corrente de polarização,  $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dentro da esfera, foram resolvidos por um método perturbativo, no qual primeiramente o campo magnético magnetostático  $\vec{b}_0$ , gera um campo elétrico  $\vec{E}$ , que por sua vez causa a correção de primeira ordem  $\vec{h}_1$  do campo magnético auxiliar magnetostático  $\vec{h}_0$ , obtido anteriormente através da condição magnetostática. Porém, provamos na fundamentação teórica que a natureza desta condição magnetostática está no fato de que os modos magnetostáticos tem um regime de baixas frequências, ou seja,  $\omega_k \ll kc$ , então para manter este regime, vamos expandir em taylor as componentes dos vetores  $\vec{h}_1$ , em relação a frequência  $\omega$  nas três regiões até a ordem  $(\omega^2)$ . De acordo com (PLUMIER, 1962), para o caso da esfera sólida, a corrente de polarização  $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  vai induzir um campo adicional  $\vec{h}_1$ , que vai causar um aumento na ordem de 0.1, em relação ao campo magnetostático  $\vec{h}_0$ , usando uma permissividade elétrica  $\epsilon = 16$  e o raio  $R \approx 1.5mm$ . O processo perturbativo pode ser calculado para mais altas ordens, porém o interesse físico está limitado na ordem, onde  $(\omega^2)$ .

Denotando os vetores  $\vec{h}_1$ , como

$$\vec{h}_1(r, \theta, \phi)^i, \quad (5.128)$$

sendo  $i = 1, 2, 3$ , as regiões da esfera oca ferromagnética envolvida pelo dielétrico, fazemos a aproximação em Taylor, em relação a frequência  $\omega$  de tal forma que

$$\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^i \approx \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi, \omega = 0)^i + \frac{\partial \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi, \omega)^i}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} (\omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{h}}_1(r, \theta, \phi, \omega)^i}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=0} (\omega)^2 \quad (5.129)$$

### 5.5.2 Solução Numérica para Equação Característica da Esfera Ferromagnética Oca envolvida por um Dielétrico $\epsilon$

Para obter a solução numérica para a nova equação característica, vamos usar a condição de contorno em relação aos vetores  $\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^i$ , em alguma interface da esfera ferromagnética oca, vamos usar a condição de contorno em  $r = r_1$ , ou seja, usando os vetores,  $\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^1$  e  $\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^2$ , de tal forma que

$$\vec{\mathbf{n}} \times \left( \vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r = r_1, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0, \omega)^2 - \vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r = r_1, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0, \omega)^1 \right) = 0, \quad (5.130)$$

sendo  $\vec{\mathbf{n}}$ , o vetor normal a superfície.

Temos que, em relação a base cartesiana

$$\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^1 = h_{1x(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^1 \vec{\mathbf{i}} + h_{1y(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^1 \vec{\mathbf{j}} + h_{1z(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^1 \vec{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^2 = h_{1x(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^2 \vec{\mathbf{i}} + h_{1y(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^2 \vec{\mathbf{j}} + h_{1z(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^2 \vec{\mathbf{k}},$$

Os vetores  $\vec{\mathbf{h}}_{1(\text{aprox})}(r, \theta, \phi, \omega)^i$ , estão sendo multiplicados pelos coeficientes  $B_l^m$ , de tal maneira que quando usarmos a condição de contorno (5.130), os coeficientes irão se anular, obtendo assim a solução da equação característica numérica.

Fazendo uma mudança de base dos vetores unitários cartesianos para esféricos, talque

$$\left( \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}} \right) \longrightarrow \left( \vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_\phi \right), \quad (5.131)$$

e usando (5.130), temos

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 + \right. \\
& \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \sin \phi_0 - \\
& \left. \left( h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \theta_0 \right] (\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) + \\
& \left[ - \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \phi_0 + \right. \\
& \left. \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 \right] (\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi) = 0.
\end{aligned}$$

Para expressar a equação característica, temos que ambos os fatores que multiplicam os vetores unitários devem ser nulos, ou seja

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 + \right. \\
& \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \sin \phi_0 - \\
& \left. \left( h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \theta_0 \right] = 0, \\
& \left[ - \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \phi_0 + \right. \\
& \left. \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Então, a equação característica da esfera ferromagnética oca com o dielétrico é obtida igualando as duas equações iguais a zero, logo

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 + \right. \\
& \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \sin \phi_0 - \\
& \left. \left( h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1z(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \theta_0 \right] - \\
& \left[ - \left( h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1x(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \sin \phi_0 + \right. \\
& \left. \left( h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^2 - h_{1y(\text{aprox})}(r_1, \theta_0, \phi_0, \omega)^1 \right) \cos \theta_0 \cos \phi_0 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Notamos que a equação característica depende dos parâmetros  $(l, m, \theta_0, \phi_0)$ , e a relação de dispersão pode ser obtida de maneira numérica, por alguns métodos, como por exemplo o método de runge kutta para a solução das integrais elípticas que naturalmente aparecem.

## REFERÊNCIAS

- AHARONI, A. Exchange resonance modes in a hollow sphere. *physica status solidi (b)*, Wiley Online Library, v. 231, n. 2, p. 547–553, 2002.
- ANSALONE, P.; BASSO, V. Walker's modes in ferromagnetic finite hollow cylinder. *Physica B: Condensed Matter*, Elsevier, v. 578, p. 411872, 2020.
- BLOEMBERGEN, N.; PURCELL, E. M.; POUND, R. V. Relaxation effects in nuclear magnetic resonance absorption. *Physical review*, APS, v. 73, n. 7, p. 679, 1948.
- DOBROVOLSKIY, O. V.; BUNYAEV, S. A.; VOVK, N. R.; NAVAS, D.; GRUSZECKI, P.; KRAWCZYK, M.; SACHSER, R.; HUTH, M.; CHUMAK, A. V.; GUSLIENKO, K. Y. et al. Spin-wave spectroscopy of individual ferromagnetic nanodisks. *Nanoscale*, Royal Society of Chemistry, v. 12, n. 41, p. 21207–21217, 2020.
- DORFMANN, J. Einige bemerkungen zur kenntnis des mechanismus magnetischer erscheinungen. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 17, n. 1, p. 98–111, 1923.
- DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. *Modern geometry—methods and applications: Part II: The geometry and topology of manifolds*. [S.l.: s.n.].
- ESHBACH, J.; DAMON, R. Surface magnetostatic modes and surface spin waves. *Physical Review*, APS, v. 118, n. 5, p. 1208, 1960.
- GANS, R.; LOYARTE, R. G. Die permeabilität des nickels für schnelle elektrische schwingungen. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 369, n. 3, p. 209–249, 1921.
- GRIFFITHS, J. H. Anomalous high-frequency resistance of ferromagnetic metals. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 158, n. 4019, p. 670–671, 1946.
- HOLSTEIN, T.; PRIMAKOFF, H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Physical Review*, APS, v. 58, n. 12, p. 1098, 1940.
- HURBEN, M.; PATTON, C. Theory of magnetostatic waves for in-plane magnetized anisotropic films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 163, n. 1, p. 39–69, 1996. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885396002946>>.
- JR, W. H. H. Microwave resonance absorption in ferromagnetic semiconductors. *Physical Review*, APS, v. 73, n. 9, p. 1118, 1948.
- KIP, A. F.; ARNOLD, R. D. Ferromagnetic resonance at microwave frequencies in an iron single crystal. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 10, p. 1556, 1949.
- KITTEL, C. Ferromagnetic resonance. *J. phys. radium*, v. 12, n. 3, p. 291–302, 1951.
- KÖRBER, L.; KÉZSMÁRKI, I.; KÁKAY, A. Mode splitting of spin waves in magnetic nanotubes with discrete symmetries. *arXiv preprint arXiv:2202.06601*, 2022.

- KRAVCHUK, V. P.; RÖSSLER, U. K.; VOLKOV, O. M.; SHEKA, D. D.; BRINK, J. van den; MAKAROV, D.; FUCHS, H.; FANGOHR, H.; GAIDIDEI, Y. Topologically stable magnetization states on a spherical shell: Curvature-stabilized skyrmions. *Physical Review B*, APS, v. 94, n. 14, p. 144402, 2016.
- KRUPKA, J.; PACEWICZ, A.; SALSKI, B.; KOPYT, P.; BOURHILL, J.; GORYACHEV, M.; TOBAR, M. Electrodynamic improvements to the theory of magnetostatic modes in ferrimagnetic spheres and their applications to saturation magnetization measurements. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 487, p. 165331, 2019.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. 3 - on the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies reprinted from *physikalische zeitschrift der sowjetunion* 8, part 2, 153, 1935. Pergamon, Amsterdam, p. 51–65, 1992. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080363646500089>>.
- LEE, S.; GRUDICHAK, S.; SKLENAR, J.; TSAI, C.; JANG, M.; YANG, Q.; ZHANG, H.; KETTERSON, J. B. Ferromagnetic resonance of a yig film in the low frequency regime. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing LLC, v. 120, n. 3, p. 033905, 2016.
- MCKEEVER, C.; OGRIN, F.; AZIZ, M. Microwave magnetization dynamics in ferromagnetic spherical nanoshells. *Physical Review B*, APS, v. 100, n. 5, p. 054425, 2019.
- OSBORN, J. Demagnetizing factors of the general ellipsoid. *Physical review*, APS, v. 67, n. 11-12, p. 351, 1945.
- PHILLIPS, T.; ROSENBERG, H. Spin waves in ferromagnets. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 29, n. 1, p. 285, 1966.
- PLUMIER, R. Magnetostatic modes in a sphere and polarization current corrections. *Physica*, v. 28, n. 4, p. 423–444, 1962. ISSN 0031-8914. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031891462900216>>.
- PRAT-CAMPS, J.; NAVAU, C.; SANCHEZ, A.; CHEN, D.-X. Demagnetizing factors for a hollow sphere. *IEEE Magnetism Letters*, IEEE, v. 7, p. 1–4, 2015.
- PRAT-CAMPS, J.; NAVAU, C.; SANCHEZ, A.; CHEN, D.-X. Demagnetizing factors for a hollow sphere. *IEEE Magnetism Letters*, v. 7, p. 1–4, 2016.
- REZENDE, S. M. *Fundamentals of magnonics*. [S.l.]: Springer, 2020. v. 969.
- SAKHAROV, V.; KHIVINTSEV, Y.; STOGNIJ, A.; VYSOTSKII, S.; FILIMONOV, Y.; BEGININ, E.; SADOVNIKOV, A.; NIKITOV, S. Spin-wave excitations in yig films grown on corrugated substrates. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2019. v. 1389, n. 1, p. 012140.
- VLECK, J. V. Ferromagnetic resonance. *Physica*, Elsevier, v. 17, n. 3-4, p. 234–252, 1951.
- WALKER, L. R. Magnetostatic modes in ferromagnetic resonance. *Physical Review*, APS, v. 105, n. 2, p. 390, 1957.
- WHITE, R. L.; JR, I. H. S. Multiple ferromagnetic resonance in ferrite spheres. *Physical Review*, APS, v. 104, n. 1, p. 56, 1956.