

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

ESTUDO DO MODELO DE FAMÍLIAS DE  
DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE  
BASEADO EM PROGRAMAÇÃO  
MATEMÁTICA

Tese submetida à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) para obtenção  
do grau de Doutor em Engenharia de Produção por

ALANE ALVES SILVA

Orientador: Fernando Menezes Campello de Souza, PhD

RECIFE, DEZEMBRO/2007

**S586e**

**Silva, Alane Alves.**

Estudo do modelo de famílias de distribuições de probabilidade baseado em programação matemática / Alane Alves Silva. - Recife: O Autor, 2007.

xii, 123 folhas, il : figs., tabs.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2007.

Inclui Bibliografia e Anexos.

1. Engenharia de Produção. 2. Programação Matemática. 3. Incertezas. 4. Famílias de Probabilidade. I. Título.

**UFPE**

**658.5**

**CDD (22. ed.)**

**BCTG/2008-037**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA  
DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE

**ALANE ALVES SILVA**

***“Estudo do Modelo de Famílias de Distribuições de Probabilidade  
baseado em Programação Matemática”***

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PESQUISA OPERACIONAL

A comissão examinadora, composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera a candidata ALANE ALVES SILVA **APROVADA**.

Recife, 20 de dezembro de 2007.

Prof. FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, PhD (UFPE)

Prof. ADIEL TEIXEIRA DE ALMEIDA, PhD (UFPE)

Prof. LUCIANO NADLER LINS, Doutor (UFPE)

Prof. ANDRÉ MARQUES CAVALCANTI, Doutor (UFPE)

Prof. LEANDRO CHAVES RÊGO, PhD (UFPE)

*“Aos meus pais, Aluizio e Maria José, minha irmã, Amanda e meu  
namorado, Michel, meus bens mais preciosos, minha eterna gratidão.”*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meu mais profundo agradecimento a algumas pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação e realização deste trabalho:

- Ao professor Fernando Campello, chega a me faltar palavras para agradecer. Colocou diante de mim um mundo de conhecimento, com seu eterno entusiasmo pelo aprender, dedicação e amor ao que faz. Trabalhar com ele foi uma das melhores decisões da minha vida.
- Aos amigos da sala 402, pelo apoio nos momentos difíceis e pela alegria proporcionada nos momentos de descontração. Em especial a Diogo, pelas discursões e questionamentos com relação ao trabalho que foram sempre enriquecedoras, pelas correções feitas no texto e por sua amizade.
- Ao meu amigo André Leite que além da amizade sempre sincera teve uma enorme participação na elaboração deste trabalho. Com sua enorme paciência me ajudou nas minhas várias deficiências em Latex, Matlab, C++ entre outras coisas.
- Aos professores que me auxiliaram no aprendizado do inglês, em especial a Betânia cujo conhecimento foi fundamental para que eu conseguisse vencer uma etapa da minha formação.
- A Juliane, secretária do departamento, pelo seu carinho e apoio para que eu não me perdesse nas burocracias.
- Ao CNPQ e a CAPES pelos recursos financeiro disponibilizados para o meu doutoramento.
- Aos membros da banca examinadora pelas sugestões.
- A Michel, meu namorado, que esteve sempre presente com sua serenidade, paciência e carinho me ajudando nos momentos mais difíceis, mas também dividindo a alegria das horas vagas. Compartilhou comigo cada passo que levou a conclusão deste trabalho.
- A meus tios, Expedito e Ana e meu primo, Vitor por me aceitarem em suas vidas. Sem a suporte e carinho de vocês tudo isso teria sido mais difícil. Minha eterna gratidão.
- Aos meus pais e minha irmã, meus alicerces, sempre presentes em minha vida me apoiando, incentivando com todo carinho e amor em todas as etapas da minha vida, desde as mais simples as mais difíceis. Só tenho a agradecer ao acaso divino por ter me dado o presente de nascer nesta família.

*I can well conceive a man without hands,  
feet, head (for it is only experience which teaches  
us that the head is more necessary than feet).*

*But I cannot conceive man without thought;  
he would be a stone or a brute.*

**Blaise Pascal**

## RESUMO

Desde tempos imemoriais, o homem tem aprendido a lidar com a incerteza na busca de dirimir perdas advindas de fatores imprevisíveis. Várias teorias de probabilidade surgiram na busca de evoluir nesse aprendizado, sendo a teoria de probabilidade proposta por Kolmogorov a mais utilizada. No entanto ela deixa de atender a uma série de situações. Muito tem sido desenvolvido para trabalhar essas situações nas quais a probabilidade clássica falha como, por exemplo, a capacidade de Choquet, a teoria da evidência de Dempster-Shafer, probabilidades superiores e inferiores, entre outras. Este trabalho continua o desenvolvimento do modelo de representação e cálculo da incerteza introduzido em Campello de Souza (1993), baseado em programação linear, cujos últimos resultados estão em Campello de Souza (2007). O modelo usa famílias de distribuições de probabilidade para representar e quantificar a incerteza. Algumas aplicações do modelo na educação do conhecimento de especialistas foram feitas e um novo indicador para medir a habilidade inferencial dos especialistas foi proposto. O modelo foi utilizado para trabalhar a inferência estatística quando os dados são escassos, trabalhando-se as estimativas de médias de distribuições de probabilidade, as quais foram comparadas com o método da frequência relativa. O construto Decidabilidade foi usado para medir a associação entre duas variáveis aleatórias. Foi verificado que tal construto é linearmente correlacionado com a correlação de Pearson.

**Palavras-Chave:** Famílias de probabilidade, educação, programação matemática, incerteza.

## ABSTRACT

Since immemorial times, man has learned to deal with uncertainty in trying to prevent losses derived from unexpected factors. Several probability theories were proposed in such a search, Kolmogorov's having been the most used. However, it fails to serve a number of situations. A great deal has been done in order to work out the situations where the classic probability fails, such as the Choquet capacity, the theory of evidence by Dempster-Shafer, upper and lower probabilities, among others. This work gives continuity to developing the model of representation and calculation of the uncertainty based on the linear programming introduced by Campello de Souza (1993), whose latest results are in Campello de Souza (2007). The model uses probability distribution families to represent and quantify uncertainty. Some applications of the model in the elicitation of specialists' knowledge have been made and a new measurement for the specialists' inferential skills has been proposed. The model was used to work with the statistical inference when data were scarce, working on estimates of averages of probability distributions, which were compared to the relative frequency method. Decidability was used to measure the association between two random variables, which was discovered to be linearly correlated to Pearson's correlation.

**Keywords:** Probabilities families, elicitation, mathematical programming, uncertainty.



# LISTA DE FIGURAS

2.1	Mesa de Bilhar. . . . .	12
2.2	Função Multivalorada. . . . .	14
2.3	Conjunto dos $T^*$ . . . . .	15
2.4	Conjunto dos $T_*$ . . . . .	15
4.1	Primeira questão do protocolo de educação. . . . .	45
4.2	Exemplo de uma questão do protocolo de educação. . . . .	45
4.3	Conjunto convexo das Distribuições de Probabilidade. . . . .	49
4.4	Dois Especialistas. . . . .	51
4.5	Resultado da Educação do Especialista $E_1$ . . . . .	53
4.6	Resultado da Educação do Especialista $E_2$ . . . . .	54
4.7	Resultado da Educação do Especialista $E_3$ . . . . .	54
4.8	Figura que teve a área estimada pelo método de educação. . . . .	57
4.9	Figura que teve o comprimento estimada pelo método de educação. . . . .	59
4.10	Estado da Natureza . . . . .	62
4.11	Resultado da Educação do Especialista 1. . . . .	64
4.12	Resultado da Educação do Especialista 2. . . . .	64
4.13	Resultados da Educação com a Base de Dados. . . . .	65
4.14	Especialista 1 . . . . .	66
4.15	Especialista 2 . . . . .	66
4.16	Base de Dados . . . . .	66
4.17	O conjunto simplex. . . . .	71
4.18	O conjunto simplex com alguns corpos de evidência. . . . .	71

5.1	Exemplo de fenômeno determinístico. . . . .	76
5.2	O quincunx de Francis Galton. . . . .	77
5.3	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 2$ usando a distribuição beta(4,4). . . . .	80
5.4	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 5$ usando a distribuição beta(4,4). . . . .	80
5.5	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 10$ usando a distribuição beta(4,4). . . . .	81
5.6	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 15$ usando a distribuição beta(4,4). . . . .	81
5.7	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 25$ usando a distribuição beta(4,4). . . . .	82
5.8	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 2$ usando a distribuição beta(2,6). . . . .	83
5.9	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 5$ usando a distribuição beta(2,6). . . . .	83
5.10	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 10$ usando a distribuição beta(2,6). . . . .	84
5.11	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 15$ usando a distribuição beta(2,6). . . . .	84
5.12	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 25$ usando a distribuição beta(2,6). . . . .	85
5.13	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 2$ usando a distribuição beta(6,2). . . . .	86
5.14	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 5$ usando a distribuição beta(6,2). . . . .	86
5.15	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 10$ usando a distribuição beta(6,2). . . . .	87
5.16	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 15$ usando a distribuição beta(6,2). . . . .	87

5.17	Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para $N = 25$ usando a distribuição beta(6,2). . . . .	88
5.18	Bland e Altman para as médias da distribuição beta (2,6). . . . .	89
5.19	Bland e Altman para as médias da distribuição beta (6,2). . . . .	89
5.20	Bland e Altman para as médias da distribuição beta (4,4). . . . .	90
1	Curva da banheira. . . . .	111

# LISTA DE TABELAS

3.1	Questionário de educação sobre a probabilidade do parlamentarismo ganhar o plebiscito, com as respostas do prof. Antonio Carlos Palhares Moreira Reis. . . . .	31
3.2	As respostas do especialista, já na matriz de restrições do modelo de programação matemática, para o caso do dado chumbado. . . . .	32
3.3	Os pesos das seis faces do dado chumbado. . . . .	32
3.4	Questionário de educação para o tempo de vida útil de um sistema de aquecimento solar de água. Respostas do engenheiro Sérgio Rochadel Lima, da ESSE . . . . .	34
4.1	Uma visão do questionário de educação/inferência. . . . .	44
4.2	Questionário de Educação. . . . .	52
4.3	Resultados. . . . .	55
4.4	Questionário de educação da distribuição <i>a priori</i> . . . . .	56
4.5	Estatística descritiva dos construtos. . . . .	57
4.6	Questionário de educação da área da figura. . . . .	58
4.7	Estatística descritiva dos construtos para o experimento da área da figura. . . . .	59
4.8	Questionário de educação da comprimento da linha. . . . .	60
4.9	Estatística descritiva dos construtos para o experimento do comprimento da figura. . .	61
4.10	Questionário de Educação. . . . .	63
4.11	Distribuição de Entropia Máxima. . . . .	72
4.12	Distribuição de Entropia Máxima 2. . . . .	73
5.1	Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da freqüência relativa para beta de parâmetros (4,4). . . . .	79

5.2	Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da frequência relativa para beta de parâmetros (2,6). . . . .	82
5.3	Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da frequência relativa para beta de parâmetros (6,2). . . . .	85
5.4	As correlações de Pearson de $Y$ com todas as 100 $X_i$ 's; amostra de tamanho 1000. São estatisticamente significativas até a variável $X_{46}$ ; a partir daí tem-se que $p$ cresce de $p = 0,053$ ( $i = 47$ ) até $p = 0,327$ ( $i = 100$ ). . . . .	91
5.5	Tabela para a construção do modelo de regressão para $r$ em função da decidabilidade.	92
1	A distribuição <i>a priori</i> eduzida do engenheiro Hélio Burle de Menezes. . . . .	118
2	Dados relativos ao número de falhas por mês (1985–1986). . . . .	119
3	Os resultados do método CDF para o primeiro entrevistado. . . . .	122
4	Os resultados do método do intervalo fixo para o primeiro entrevistado. . . . .	123
5	O resultado final para o primeiro entrevistado. . . . .	123

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
1.2.1	Objetivos Gerais . . . . .	2
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	2
1.3	Organização do Trabalho . . . . .	2
<b>2</b>	<b>A INCERTEZA E OS MODELOS PROBABILÍSTICOS</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Conceitos e teorias de probabilidade . . . . .	4
2.2.1	Definição Clássica da Probabilidade . . . . .	5
2.2.2	Definição Frequentista da Probabilidade . . . . .	5
2.2.3	Definição Subjetiva da Probabilidade . . . . .	6
2.2.4	Definição Axiomática da Probabilidade . . . . .	7
2.3	A dualidade da probabilidade . . . . .	9
2.4	Alguns Resumos das Teorias de Probabilidade . . . . .	11
2.4.1	A Contribuição de Bayes . . . . .	11
2.4.2	A Teoria de Bruno De Finetti . . . . .	13
2.4.3	Probabilidades Superiores e Inferiores Induzidas por um Mapeamento Multívoco	14
2.4.4	Probabilidade Superior e Inferior . . . . .	18
2.4.5	Teoria Matemática da Evidência . . . . .	18
2.4.6	Uma Melhoria na Teoria Matemática da Evidência . . . . .	21
2.5	Probabilidade Imprecisa . . . . .	22

2.5.1	Fontes de Imprecisão . . . . .	23
2.6	Uma Taxonomia da Incerteza . . . . .	24
<b>3</b>	<b>EDUCAÇÃO</b>	<b>26</b>
3.1	A Viabilidade Econômica da Energia Solar . . . . .	26
3.2	Educação de Especialistas da Companhia Hidrelétrica do São Francisco quanto às Falhas dos Equipamentos . . . . .	27
3.3	Educação de Especialistas da Companhia Hidrelétrica do São Francisco quanto às Falhas dos Equipamentos . . . . .	28
3.3.1	Questionário de Barros de Mello e Silva Jr. . . . .	28
3.3.2	Questionário de Cavalcanti Filho e Silva Jr. . . . .	28
3.4	Distribuição <i>A Priori</i> do Tempo de Tramitação de um Empenho na Universidade Federal de Pernambuco . . . . .	28
3.5	O Método da Programação Linear . . . . .	30
3.5.1	Chances do Parlamentarismo ser aprovado no próximo Plebiscito no Brasil . . .	30
3.5.2	As Chances das 6 Faces de um Dado Chumbado . . . . .	32
3.6	A Educação da Distribuição de Probabilidade do Tempo de Vida Útil de um Aquecedor Solar . . . . .	33
3.7	Os Especialistas do Porto do Recife . . . . .	35
3.8	Avaliação da Manutenibilidade no Sistema de Telecomunicações da CHESF . . . . .	35
3.9	Trabalhos Mais Recentes . . . . .	36
3.10	Métodos de Educação . . . . .	37
3.10.1	Métodos Não Paramétricos . . . . .	39
<b>4</b>	<b>UM MÉTODO DE EDUCAÇÃO DO CONHECIMENTO <i>A Priori</i></b>	<b>40</b>
4.1	Introdução . . . . .	40
4.2	Método de Educação . . . . .	41
4.3	O <i>Inferential Skill</i> . . . . .	51
4.3.1	Aplicação Numérica . . . . .	52
4.4	Aplicações do Questionário . . . . .	55
4.4.1	Experimento 1 . . . . .	55

4.4.2	Estimativa da Área da Figura . . . . .	57
4.4.3	Estimativa do Comprimento da Linha . . . . .	59
4.4.4	Aplicação em Cardiologia . . . . .	61
4.5	O Caso Aleatório . . . . .	67
4.6	Caso sem Variável Aleatória . . . . .	68
<b>5</b>	<b>O USO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA NA INFERÊNCIA ESTATÍSTICA</b>	<b>74</b>
5.1	Algumas Considerações sobre o Questionário . . . . .	74
5.2	O Questionário sendo respondido por Dados . . . . .	75
5.3	A Média Estimada pelo Modelo de Programação Matemática comparada com a Média obtida pela Frequência Relativa . . . . .	78
5.3.1	Situação 1: Distribuição Simétrica . . . . .	79
5.3.2	Situação 2: Distribuição Assimétrica para Direita . . . . .	82
5.3.3	Situação 3: Distribuição Assimétrica para Esquerda . . . . .	85
5.4	A “Correlação” entre duas Variáveis Aleatórias . . . . .	90
5.4.1	O Construto Decidabilidade . . . . .	90
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES</b>	<b>94</b>
6.1	Conclusões . . . . .	94
6.2	Comentários e Sugestões . . . . .	94
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>96</b>
	<b>ANEXO 1 — CÓDIGO FONTE</b>	<b>101</b>
	<b>ANEXO 2 — A EDUCAÇÃO DAS OPINIÕES DOS ESPECIALISTAS SOBRE OS PREÇOS DA ENERGIA</b>	<b>105</b>
	<b>ANEXO 3 — QUESTIONÁRIO DE EDUCAÇÃO DE BARROS DE MELLO E SILVA JR.</b>	<b>115</b>
	<b>ANEXO 4 — EDUCAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO <i>A Priori</i> DO TEMPO DE TRAMITAÇÃO DE UM EMPENHO NA UNIVERSIDADE</b>	<b>120</b>



# 1 INTRODUÇÃO

*“The most decisive conceptual event of twentieth century physics has been the discovery that the world is not deterministic”*

Ian Hacking

## 1.1 Introdução

Uma questão que suscita a curiosidade é saber porque uma teoria da chance e da probabilidade demorou tanto para emergir. Sabe-se que os jogos de azar estiveram presentes em muitas culturas da antiguidade (talus, etc.) e estas desenvolveram outros ramos da matemática e da ciência em geral. Barrow (2005) apresenta duas possíveis razões para isso. Uma possibilidade é que os primeiros aparatos usados em jogos de azar eram assimétricos na sua forma; eles eram usualmente feitos de ossos de articulações (*stochos*) — do qual deriva a palavra estocástico, que significa randômico, ou aleatório — a palavra grega para mirar (apontar)). Isto significa que cada um destes dispositivos era único e não havia uma teoria geral baseada em resultados igualmente verossímeis como existe para o caso de um dado usado hoje em dia. A outra possibilidade é que a chance era vista como a maneira pela qual os deuses falavam e influenciavam o mundo. Isto pode ser visto no Velho Testamento da Bíblia Hebraica onde a tirada da sorte era usada para determinar-se a vontade divina.

O estudo da incerteza e da sua representação e cálculo é um tema recorrente. Com o passar dos anos os avanços na área matemática permitiram que a teoria da probabilidade passasse de um brinquedo de apostadores em um instrumento poderoso de organização, interpretação e aplicação de informações. Marcos importantes no desenvolvimento dessa área de estudo incluem o trabalho de Kolmogorov, De Finetti, Fine, Walley, entre outros. Mais recentemente os modelos de probabilidades imprecisas têm apresentado grandes contribuições nesta área ao ponto de formar sociedades científicas que reúne pessoas interessadas em problemas de incerteza, um exemplo dessas sociedades é o SIPTA (Society for Imprecise Probability: Theories and Applications) que reuni pesquisadores a cada dois anos no simpósio ISIPTA (Symposia on Imprecise Probabilities and Their Applications).

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos Gerais

1. Continuar o desenvolvimento do modelo de representação e cálculo da incerteza introduzido em Campello de Souza (1993), baseado em programação linear, cujos últimos resultados estão em Campello de Souza (2007). O modelo envolve a representação da incerteza por meio de família de distribuições de probabilidade.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

1. Estudar os diversos aspectos da inferência estatística quando se tem poucos dados, e quando se quer incorporar a opinião de especialistas, mesmo quando vaga.
2. Verificar a reprodutibilidade do modelo baseado no questionário de educação ao fazer estimativas de médias de distribuições de probabilidade.
3. Elaborar e desenvolver novas formas de expressar a correlação entre variáveis aleatórias.

## 1.3 Organização do Trabalho

O Trabalho está organizado em seis capítulos, a saber:

**Capítulo 2: A incerteza e os Modelos Probabilísticos**, aborda a questão da incerteza e da probabilidade apresentando algumas classificações para a probabilidade. Além disso, discute alguns dos principais modelos probabilísticos.

**Capítulo 3: Método de Educação do Conhecimento *A Priori***, neste capítulo é feito um estudo detalhado do modelo de educação de famílias de distribuições de probabilidade baseado em programação matemática. São apresentadas varias aplicações deste método em diferentes situações. Um indicador que mede a habilidade inferencial do especialista é proposto.

**Capítulo 4: Educação**, fez-se um apanhado histórico das pesquisas que culminaram na elaboração do modelo de famílias de distribuição de probabilidade. Além disso, uma revisão de outros métodos de educação utilizados na literatura.

**Capítulo 5: O Uso do Modelo de Programação Matemática na Inferência Estatística,** apresenta-se uma nova forma de representar a relação entre duas variáveis. Foi feito um estudo para avaliar a convergência do modelo.

**Capítulo 6: Conclusões, Comentários e Sugestões,** aqui estão resumidas as conclusões sobre o estudo do modelo de famílias de distribuições de probabilidade.

# 2 A INCERTEZA E OS MODELOS PROBABILÍSTICOS

*“The problem with conventions is that we may lose sight of their arbitrary origin.”*

Terrence Fine

## 2.1 Introdução

Como afirma Campello de Souza (2007): “A incerteza é a marca indelével do universo.” Desde tempos imemoriais, o homem tem aprendido a lidar com a incerteza na busca de dirimir perdas advindas de fatores imprevisíveis e conseguir algum tipo de vantagem em disputas. O texto de William Shakespeare a seguir é uma demonstração que a preocupação em lidar com a incerteza é algo antigo.

*“Eu agradeço a minha sorte por isso, meus empreendimentos não estão confiados a um só navio, nem num único lugar; nem está o total das minhas propriedades na sorte do presente ano: portanto meu comércio não me faz triste.”<sup>1</sup>*

Se quiser ir um pouco mais trás no tempo, no ano de 49 a.C. tem a famosa frase de Julio César, dita ao atravessar o rio Rubicão dando início a guerra que culminou com seu triunfo sobre as tropas de Pompeu.

*“A sorte está lançada.”*

No entanto há relatos bem mais antigos. Cerca de 3500 a.C jogos de azar eram praticados no Egito utilizando um objeto feito do osso do calcânhar de alguns animais. Este que pode ser considerado o predecessor do dado era denominado de astragalus ou talus.

## 2.2 Conceitos e teorias de probabilidade

*No chamado mundo prático, a vasta maioria dos raciocínios e sistemáticas de abordagem envolvem premissas e conclusões que são incertas. Isto gera, de um lado, a questão de*

---

<sup>1</sup>Shakespeare. O mercador de Veneza. Ato 1, cena 1.

enunciação e interpretação do conceito de probabilidade e, do outro lado, o problema da construção de modelos matemáticos que levem isso em consideração.

*Existem muitos modelos matemáticos para a incerteza, e a qualquer um desses modelos podem ser dadas várias interpretações do conceito de probabilidade. Além disso, pode-se associar diversos modelos matemáticos a qualquer interpretação de probabilidade. Desta forma, faz-se necessário uma compreensão clara e precisa deste conceito para que se possa aplicar conscientemente as diversas teorias com suas extensões e aproximações. (Campello de Souza, 2007c)*

### 2.2.1 Definição Clássica da Probabilidade

A definição clássica de probabilidade está baseada na razão de casos favoráveis da ocorrência do evento de interesse pelo total de possíveis eventos, supondo que todos os eventos são igualmente possíveis. Esta definição foi dada por Laplace em função dos problemas resolvidos na célebre correspondência Pascal-Fermat. Sua definição está baseada no conceito de eventos igualmente possíveis. Ou seja, a probabilidade de que cada resultado ocorra é  $1/n$  em um processo com  $n$  possíveis resultados. Por exemplo, ao se lançar uma moeda não viciada, a probabilidade de cada face da moeda é  $1/2$ , isto é, os resultados são igualmente possíveis. Vale salientar que este tipo de raciocínio é puramente dedutivo, não sendo necessário que nenhuma moeda seja lançada para que a probabilidade seja calculada.

Esta abordagem apresenta algumas dificuldades. A primeira é que a noção de eventos “igualmente possíveis” torna a definição de Laplace circular e exige simetria. Ou seja, assumir que os eventos são igualmente possíveis é o mesmo que assumir que os eventos têm a mesma probabilidade. Laplace tenta dirimir essa circularidade usando o princípio da razão insuficiente o qual estabelece que os eventos são igualmente prováveis se não há razão para que um ocorra ao invés do outro.

A probabilidade clássica está baseada na contagem ou enumeração dos possíveis resultados, satisfazendo uma série de condições necessárias para que o evento ocorra.

### 2.2.2 Definição Frequentista da Probabilidade

O primeiro que levantou a questão de como atribuir probabilidade a um evento a partir de amostra de dados foi Jacob (James) Bernoulli, (Campello de Souza (2006); Stigler (1986); Bernstein (1997)). Seus questionamentos estavam relacionados ao fato de ser conhecida a chance de se obter uma das faces

de um dado em seu lançamento, mas ser desconhecida a probabilidade de que um indivíduo de uma certa idade seja acometido por uma doença e venha a morrer. O trecho a seguir mostra a preocupação de Bernoulli com a “impossibilidade” de enumerar todos os possíveis casos, os quais também não são igualmente possíveis (Campello de Souza, 2006).

*“Porém, eu lhes pergunto, quem dentre os mortais será um dia capaz de definir como sendo tantos casos, o número, por exemplo, das doenças que invadem as incontáveis partes do corpo humano em qualquer idade e podem causar nossa morte? ... Mais uma vez, quem tem conhecimento suficiente da mente humana ou da admirável estrutura do nosso corpo de forma a poder, em jogos, dependendo da agudeza da mente ou agilidade do corpo, enumerar casos em que um ou outro dos participantes irá vencer? ... Contudo existe uma outra forma de obter o que queremos. E o que é impossível de ser obtido a priori pode, ao menos, ser encontrado a posteriori; ou seja pelo registrar dos resultados das observações efetuadas um grande número de vezes.”*

A lei dos grandes números (expressão cunhada por Poisson) funciona bem quando  $n \rightarrow \infty$ . Como disse Keynes, entretanto,

“In the long run all we will be dead.<sup>2</sup>”

Independentemente da questão conceitual e filosófica, existe a questão prática que emerge em muitas situações onde dispõe-se apenas de um número pequeno de observações. Abre-se espaço então para modelos mais realistas da incerteza.

### 2.2.3 Definição Subjetiva da Probabilidade

A abordagem subjetiva é de fundamental importância nas situações onde se dispõe de poucos dados ou mesmo nenhum dado está disponível e desta forma não faz sentido falar em frequência relativa. Por exemplo, pode-se querer responder questões tais como: Qual a probabilidade de que a situação da economia no país esteja melhor ao final do próximo ano? Ou deseja-se estimar a probabilidade da ocorrência de eventos raros tais como os acidentes com os aviões da Gol e da TAM, o desabamento no metrô de São Paulo. Sendo assim, em situações onde a abordagem frequentista não faz sentido,

---

<sup>2</sup>No longo prazo todos estaremos mortos.

o conhecimento *a priori* que um especialista tem a respeito da variável em questão não pode ser desprezado.

O conhecimento do especialista é expresso em termos de distribuições de probabilidade *a priori*, também chamada de probabilidade subjetiva e reflete o grau de crença que o especialista tem na ocorrência do evento em estudo. Alguns autores, por exemplo Jaynes (1968), chamam este conhecimento *a priori* de informação inicial e utilizam  $\pi(\theta|I)$  para caracterizar que tal distribuição depende da informação inicial ( $I$ ) que o especialista possui. Um dos pontos mais delicados e controversos da inferência bayesiana é a determinação e a interpretação da distribuição *a priori*, sendo considerada um dos principais obstáculos a sua implementação (Paulino *et. al.* (2003)).

## 2.2.4 Definição Axiomática da Probabilidade

A partir dos anos de 1930 a teoria da probabilidade tornou-se uma parte autônoma da matemática. Os desenvolvimentos que se deram nesta área nas ultimas décadas deve-se ao desenvolvimento da teoria axiomática de Kolmogorov de 1933. Depois do trabalho de Kolmogorov a probabilidade passa a ser tudo que satisfaz aos axiomas. A abordagem de Kolmogorov para probabilidade consiste de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , tendo como componentes:

- Um espaço amostral  $\Omega$ ;
- Uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$ ;
- E uma medida de probabilidade  $P$ .

O espaço amostral  $\Omega$  é composto por elementos  $\omega$  denominados de eventos elementares. Na teoria de Kolmogorov  $\Omega$  é formado por todos os possíveis resultados  $\omega$  de um experimento ou observação.

Considere um espaço amostral  $\Omega$  não vazio. Uma classe  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  é dita uma álgebra se contém  $\Omega$  e é fechada sobre a formação de complemento e união finita. Ou seja  $\mathcal{A}$  satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A}$ , então  $A^c \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $A \cup B \in \mathcal{A}$

Uma classe  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  é uma  $\sigma$ -álgebra se é uma álgebra e é fechada sobre a formação de união enumerável. Ou seja:

$$4. A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, \text{ então } A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

A medida de probabilidade  $P$  é um conjunto de funções de  $\mathcal{A}$  no intervalo  $[0, 1]$ ,  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo os seguintes axiomas:

**Axioma 2.2.1**  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ ;

**Axioma 2.2.2**  $\forall A \in \mathcal{A}, 0 \leq P(A) \leq 1$ ;

**Axioma 2.2.3** Se  $A_i \in \mathcal{A}, \forall i$ , e  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , então:

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i).$$

Mais detalhes sobre a probabilidade clássica podem ser encontrados em Billingsley (1995), Fine (1973) e Campello de Souza (2006)

A formulação de Kolmogorov presume que o “experimentador” pode unicamente (sem repetição) e exaustivamente (sem omissão) indexar ou listar todos os resultados do seu experimento com o nível de detalhe suficiente para seu interesse. O que presume também, que os resultados do experimento podem ser determinados com certeza. A habilidade para indexar unicamente os resultados pode não ser um trabalho trivial (por exemplo faz necessário o uso de um teorema não trivial para verificar que dois “labels” indexam o mesmo objeto). Uma lista exaustiva de resultados pode ser difícil de se obter em situações de grande incerteza; essa é uma das críticas encontradas em Fine (1973). Ainda de acordo com Fine (1973) outro ponto negativo é que ao se usar uma álgebra,  $\mathcal{A}$ , para a coleção de eventos aleatórios tem-se que garantir que a mesma contém todos os eventos de interesse. Desta forma tem-se que ter dados sobre a ocorrência destes eventos na álgebra e além disso atribuir probabilidade aos mesmos.

Uma vez que estas condições especiais podem deixar de ser atendidas, os conceitos e definições da probabilidade clássica tornam-se insuficiente para modelar todas as situações onde a incerteza encontra-se presente.



## 2.3 A dualidade da probabilidade

A distinção básica entre os conceitos de probabilidade é a existente entre os conceitos de probabilidade aleatória e epistêmica como apresentado em Hald (1990) e Walley (1996), onde tem-se:

- Probabilidade Aleatória – modelam o acaso em fenômenos empíricos. Como por exemplo, a chance de um indivíduo ter um acidente cardiovascular em uma determinada idade. As probabilidades aleatórias são divididas em: Probabilidades Clássicas (casos favoráveis sobre casos possíveis) e Probabilidades Frequentistas (está relacionada com a estabilidade de frequências relativas).
- Probabilidades Epistêmicas – Descrevem os graus de crença parcial lógicos ou psicológicos de uma pessoa ou sistema intencional. Estas probabilidades refletem o conhecimento imperfeito e indireto que seres humanos possuem sobre as coisas e eventos sob observação. Por exemplo, o médico acredita que é provável que o indivíduo venha a ter um acidente cardiovascular em uma determinada idade dada as evidências sobre esse indivíduo.

Essa dualidade, segundo Hacking (2006), emergiu nos anos 1660. O mesmo autor defende que a probabilidade tem a face do deus Janus, por um lado, ela é estatística e diz respeito as leis estocásticas de processos que envolvem chance; tem a ver com as coisas. Por outro lado, ela é epistemológica e trata da avaliação de graus razoáveis de crenças em situações em que não se tem um histórico estatístico; as probabilidades têm sede na mente. Entre outros, pode-se citar os trabalhos de Pascal como exemplo desta dualidade. Em suas correspondências com Fermat, as quais tratavam o problema da divisão das apostas de um jogo de azar que por algum motivo foi interrompido, a abordagem utilizada era inteiramente aleatória. No entanto, os argumentos utilizados na famosa aposta de Pascal sobre a crença na existência de Deus são de natureza epistêmica.

De acordo com o exposto em Walley (1996) a probabilidade epistêmica pode ter três tipos de interpretação dependendo das evidências que estão sendo avaliadas.

- Lógica – a probabilidade de uma hipótese relativa a um corpo de evidência é determinada de modo único sendo a mesma a relação entre duas proporções. Em outras palavras, a probabilidade mede quanto uma evidência implica na ocorrência de uma dada hipótese. Esta escola de pensamento foi desenvolvida por Harold Jeffreys e J. M. Keynes.

- Personalista – a probabilidade mede a “confiança” que um indivíduo tem na veracidade de uma determinada proposição, por exemplo, a proposição que irá chover amanhã. Estas probabilidades são limitadas apenas por axiomas de coerência e não pela evidência, a probabilidade neste caso é um problema do julgamento pessoal. Este tipo de interpretação foi introduzido por F. P. Ramsey e B. de Finetti.
- Racionalista – é uma condição intermediária entre os conceitos lógicos e personalistas, dessa forma requer que as probabilidades sejam consistentes de certa maneira com as evidências, sem exigir que elas sejam unívocamente determinadas.

Ainda no conceito epistêmico, pode-se distinguir também:

- Interpretações Comportamentais – são interpretadas primeiramente em termos de comportamento, como por exemplo atitudes de aposta ou escolha de ações;
- Interpretações Evidenciais – a probabilidade de uma hipótese mede a relação lógica ou linguística entre a hipótese e a evidência.

A interpretação personalista tende a ser comportamental quando as interpretações lógicas são usualmente evidências.

A distinção sobre a definição de probabilidade epistêmica é facilmente confundida com a idéia de medida. De uma forma geral pode-se medir ou aprender sobre probabilidade de formas distintas:

- Observação de quantidades que ela influencia;
- Construção proveniente do conhecimento dos fatos que as influenciam.

Desta forma as probabilidades epistêmicas podem ser medidas por meio da observação dos processos de escolha e afirmativas em um processo de educação ou por meio de avaliação das evidências disponíveis num processo de avaliação. As teorias comportamentais ou personalista enfatizam a educação como fonte de probabilidade. Já para as teorias lógicas ou evidenciais a ênfase está na avaliação como fonte de probabilidade.

Do ponto de vista frequentista, a probabilidade está baseada na regularidade estatística das frequências relativas, que envolvem uma longa sequência de repetições da mesma situação. Por exemplo, ao se afirmar que a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado não viesado é  $1/6$  significa dizer

que ao se lançar o dado um grande número de vezes, a face 1 vai aparecer aproximadamente  $1/6$  das vezes. Em outras palavras, a frequência relativa da ocorrência da face 1 converge com probabilidade 1 a medida que o número de jogadas aumenta.

## 2.4 Alguns Resumos das Teorias de Probabilidade

### 2.4.1 A Contribuição de Bayes

Bayes, em seu trabalho *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, apresenta a primeira solução para o problema da probabilidade inversa, que consiste em a partir de eventos observados fazer afirmações probabilísticas sobre as causas. O problema que Bayes resolveu tinha o seguinte enunciado:

Um evento  $M$  ocorreu (sob as mesmas circunstâncias)  $p$  vezes e falhou em ocorrer  $q$  vezes. Como se pode estimar a probabilidade de ocorrência deste evento?

Bayes imaginou uma mesa representada pelo retângulo  $ABCD$  (veja Figura 2.1 a seguir) e duas bolas  $W$  e  $O$ . A bola  $W$  é rolada ao longo da mesa de tal forma que ela possa parar em qualquer ponto da mesa com a mesma probabilidade. Em seguida a bola  $O$  é rolada  $n$  vezes sobre a mesa da mesma forma que  $W$  foi lançada. A quantidade de vezes que a bola  $O$  parar do lado direito da bola  $W$  é contado. Este número é a quantidade de vezes que um evento desconhecido ocorre. A falha, que significa o número de vezes que o evento não acontece, ocorrerá sempre que a bola  $O$  parar à esquerda de  $W$ .

A posição em que  $W$  para determina  $\theta$  e o número de vezes que a bola  $O$  para do lado direito de  $W$  será  $X$ . Para representar o ponto desconhecido onde a bola  $W$  irá parar Bayes usou uma linha  $os$  paralela aos lados  $BC$  e  $AD$ . O  $\theta$  será então a razão:

$$\theta = \frac{Ao}{AB} \quad 1 - \theta = \frac{oB}{AB}$$

O  $X$  (a observação) será então o número de vezes que a bola  $O$  parar no retângulo  $osDA$ , esse evento Bayes chamou de  $M$ .

Bayes calculou a probabilidade conjunta de que  $\theta$  caia entre  $b$  e  $f$  e  $M$  ocorra  $p$  vezes. Na notação moderna (ver detalhes em (Stigler, 1986; Campello de Souza, 2006)),

$$P(b < \theta < f \cap X = p) = \int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta$$

Fazendo  $b = 0$  e  $f = 1$  ele obteve

$$P(X = p) = \int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta,$$

mais tarde calculada como sendo  $1/(n + 1)$ . Calculou também

$$P(b < \theta < f \mid X = p) = \frac{P(b < \theta < f \cap X = p)}{P(X = p)} = \frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta}{\int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta}.$$

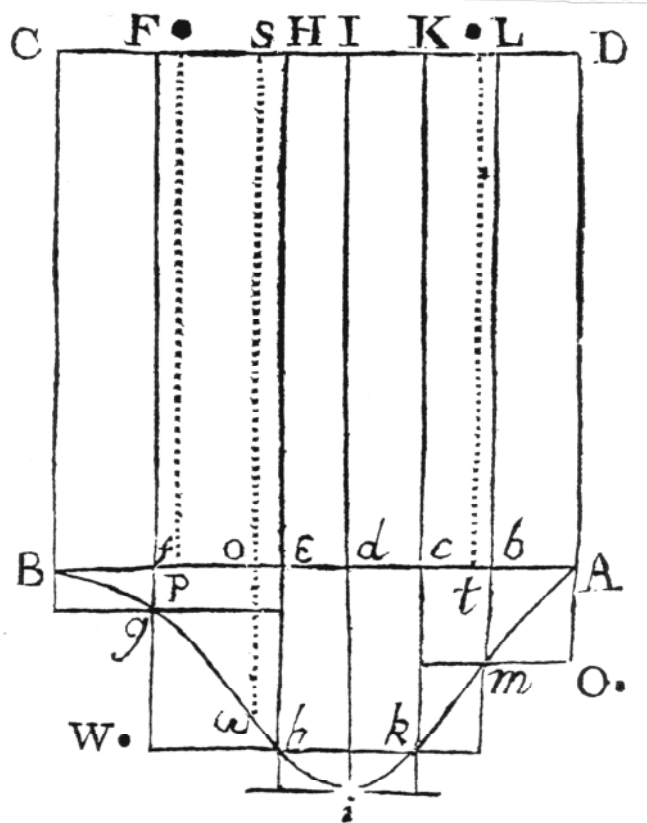


Figura 2.1: Mesa de Bilhar.

A idéia principal de Bayes é a de que existe uma probabilidade *a priori* da ocorrência de um evento ( $\theta$ ) e por meio de observações ( $X$ ) sobre a sua ocorrência é possível fazer estimativas sobre a probabilidade do evento, mais detalhes podem ser encontrados em (Molina, 1931)(Campello de Souza, 2006) e (Stigler, 1986).

### 2.4.2 A Teoria de Bruno De Finetti

De Finetti inicia seu livro com a seguinte frase

*Probabilidade não existe.*

Para ele não há necessidade de assumir que a probabilidade de um certo evento tem um único valor determinado (como considera a abordagem clássica e frequentista). Sua visão da probabilidade é que a mesma seria um grau de crença subjetivo que um indivíduo tenha na ocorrência de um evento. Existem quatro axiomas para a probabilidade qualitativa de De Finetti.

Dados os eventos  $A_1, A_2, A_3$ , tem-se:

- Por  $A_1 \succeq A_2$ , que lê-se como “o evento  $A_1$  é pelo menos tão provável quanto o evento  $A_2$ ”.
- Se  $A_1 \succeq A_2$  e  $A_2 \succeq A_1$ ,  $A_1$  e  $A_2$  são definidos como identicamente prováveis,  $A_1 \cong A_2$ .
- Se  $A_1 \succeq A_2$  mas não  $A_2 \succeq A_1$ ,  $A_1$  é mais provável do que  $A_2$ ,  $A_1 \succ A_2$ .
- Por  $A_1 + A_2$  denota-se o evento composto  $A_1$  ou  $A_2$

**Axioma 2.4.1**  $A_1 \succeq A_2$  ou  $A_2 \succeq A_1$  para qualquer dois eventos.

**Axioma 2.4.2**  $A_1 \succ A_3 \succ A_2$  se  $A_1$  é certo,  $A_2$  é impossível e  $A_3$  é nenhum desses.

**Axioma 2.4.3**  $\succeq$  é transitiva:  $A_1 \succeq A_2$  e  $A_2 \succeq A_3$  então  $A_1 \succeq A_3$

**Axioma 2.4.4** Se  $A_1$  e  $A_2$  são ambos incompatíveis com  $A_3$ ,  $A_1 + A_3 \succeq A_2 + A_3$  se e somente se  $A_1 \succeq A_2$ . Especificamente, se  $A_1 \cong A_2$ ,  $A_1 + A_3 \cong A_2 + A_3$ .

Uma referência importante é Plato (1998), onde é feito um estudo detalhado dessa teoria.

### 2.4.3 Probabilidades Superiores e Inferiores Induzidas por um Mapeamento Multívoco

O trabalho de Dempster de 1967 apresenta os conceitos de probabilidades superior e inferior induzidas por um mapeamento multivalorado.

Considere-se um espaço de medida  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$  e uma função multivalorada (ponto-conjunto) definida por:

$$\Gamma : X \longrightarrow S \\ x \longmapsto \Gamma_x \subset S$$

Caso de uma função unívoca:

$$\Gamma : X \longrightarrow S \\ x \longmapsto \Gamma_x = s$$

Se  $\Gamma$  fosse univalorada ela induziria a partir de  $\mu$  uma medida nos subconjuntos de  $S$ .

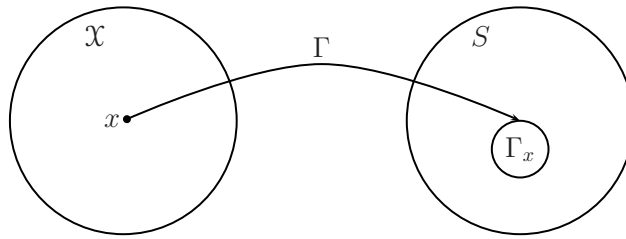


Figura 2.2: Função Multivalorada.

Fazendo o paralelo com a estatística clássica é como se o conjunto  $\mathcal{X}$  fosse a observação e o conjunto  $S$  contivesse o parâmetro de interesse. O que se deseja é a partir de observações em  $X$  calcular a probabilidade de um evento em  $S$ .

#### Definição de Probabilidade Superior e Inferior

Seja  $T$  um subconjunto de  $S$ . Então conjuntos superiores e inferiores gerados por esse mapeamento multívoco,  $\Gamma$ , são definidos para todo  $T$  contido em  $S$  por:

$$T^* = \{x \in X \mid \Gamma_x \cap T \neq \emptyset\} \quad (2.4.1)$$

$$T_* = \{x \in X \mid \Gamma_x \neq \emptyset, \Gamma_x \subset T\} \quad (2.4.2)$$

As figuras 2.3 e 2.4 são uma representação gráfica das expressões 2.4.1 e 2.4.2 e servem para tornar mais claro tais expressões.

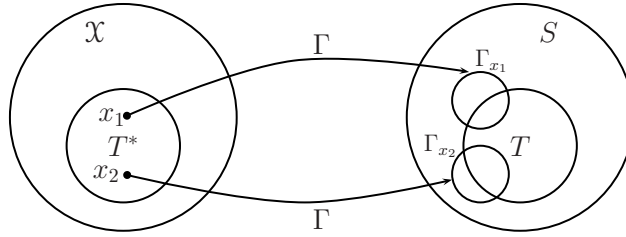


Figura 2.3: Conjunto dos  $T^*$

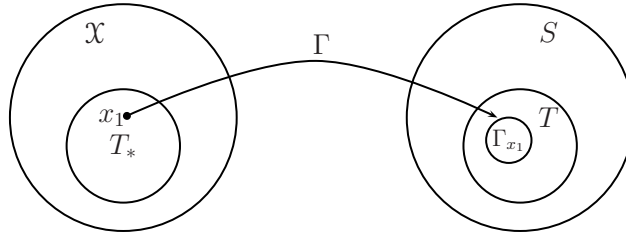


Figura 2.4: Conjunto dos  $T_*$

Sendo assim,  $T_*$  é o conjunto dos  $x \in X$  tais que  $\Gamma_x$  esta totalmente contido em  $T$ . Fazendo um paralelo com um feixe de luz é como se cada ponto em  $T_*$  iluminasse todo o conjunto  $T$  por dentro. Já o conjunto  $T^*$  não apenas ilumina o que esta dentro do conjunto  $T$  mas também ilumina parte que esta fora do conjunto, o que permite conhecer bem a fronteira do conjunto  $T$ . Desta forma, é fácil concluir que  $T^* \subset T_*$  que leva a definição de probabilidade superior e inferior.

Em particular,  $S^* = S_* = \text{domínio de } \Gamma$ . Em que  $S^*$  é o conjunto dos  $x \in X$  tais que  $\Gamma_x \cap S \neq \emptyset$  e  $S_*$  é o conjunto dos  $x \in X$  tais que  $\Gamma_x \subset S$ .

Define-se  $\xi$  como sendo  $\xi = \{T \subset S \mid T^*, T_* \in \mathcal{F}\}$ .

Suponha que  $S \in \xi$

$$P^*(T) = \frac{\mu(T^*)}{\mu(S^*)}; \quad P_*(T) = \frac{\mu(T_*)}{\mu(S_*)} \quad (\mu(S^*) \neq 0)$$

Como  $T^*$  consiste daqueles  $x \in X$  os quais podem corresponder, possivelmente, sob  $\Gamma$ , a um  $s \in T$ , pode-se encarar naturalmente  $\mu(T^*)$  como sendo a maior quantidade possível de probabilidade da medida  $\mu$  que pode ser transferida para resultados  $s \in T$ .

Similarmente,  $T_*$  consiste daqueles  $x \in X$  que necessariamente levarão a um  $s \in T$ , de forma que  $\mu(T_*)$  representa a mínima quantidade de probabilidade que pode ser transferida para resultados  $s \in T$ .

O denominador  $\mu(S^*)$  é um fator de renormalização necessário pelo fato de que o modelo permite, em geral, resultados em  $X$  que não mapeiam em algum subconjunto de  $S$  que faça sentido. O subconjunto ofensor  $\{x \in X \mid \Gamma_x = \emptyset\}$  deve ser removido de  $X$  e a medida do conjunto remanescente  $S^*$  renormalizada para a unidade.

Na probabilidade clássica o que se faz é particionar o espaço amostral de tal forma que exista uma partição ótima, no sentido de que seja possível fazer uma melhor avaliação da probabilidade dos eventos ( $\theta$ ) a partir das observações e a conectividade entre o conjunto de observações e o conjunto de eventos é feito pela função de verossimilhança,  $P(x|\theta)$ . No caso de Dempster, ele também deseja saber como conjuntos em  $X$  podem informar sobre eventos em  $S$  que são representados por  $T$ . O mapeamento é feito ponto a ponto que vão formar conjuntos superiores e inferiores de probabilidade que modelam de forma mais realista os fenômenos tanto quando as observações são escassas bem como quando as mesmas são conflitantes. Amplia-se assim os conceitos da estatística clássica e  $\Gamma_x$  se comporta como uma função de verossimilhança.

### Caso Finito

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$

$S_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m}$  contém  $s_i$  se  $\delta_i = 1$  e exclui  $s_i$  se  $\delta_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Os  $2^m$  subconjuntos de  $S$  assim definidos são os possíveis  $\Gamma_x$  e eles determinam uma partição de  $X$  em:

$$X = \cup_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m} X_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m}$$

onde

$$X_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m} = \{x \in X \mid \Gamma_x = S_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m}\}.$$

Para todo  $T \subset S$  os subconjuntos  $T^*$  e  $T_*$  são uniões de subconjuntos da forma  $X_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m}$  e portanto  $P^*(T)$  e  $P_*(T)$  são univocamente determinadas pelas  $2^m$  quantidades

$$p_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m} = \mu(X_{\delta_1\delta_2\dots\delta_m})$$



Supõe-se, é claro, que cada  $X_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}$  está em  $\mathcal{F}$ . Note que qualquer conjunto de  $2^m$  números não negativos  $p_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}$  cuja soma é um determina um possível conjunto de probabilidades superiores e inferiores para todo  $T \subset S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ .

O exemplo a seguir encontra-se no trabalho de Dempster(1967).

### Exemplo para $m = 3$

Neste caso

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}$$

$$\xi = \{\emptyset, S, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_2, s_3\}\}$$

Então, se  $T = S_{110} = \{s_1, s_2\}$ , por exemplo, ter-se-á:

$$T^* = X_{100} \cup X_{010} \cup X_{110} \cup X_{101} \cup X_{011} \cup X_{111}$$

$$T_* = X_{100} \cup X_{010} \cup X_{110}$$

e portanto

$$\mu(T^*) = p_{100} + p_{010} + p_{110} + p_{101} + p_{011} + p_{111}$$

$$\mu(T_*) = p_{100} + p_{010} + p_{110}.$$

Tem-se também  $\mu(S^*) = 1 - p_{000}$  e pode-se então calcular as probabilidades superiores e inferiores.

### Outras Definições

Dempster(1967) apresentou outras definições, tais como: *variate*, que representa uma função de valores reais definida em  $S$ . Para qualquer *variate*  $V$  tem-se uma função de distribuição superior  $F^*(v)$  e inferior  $F_*(v)$  definida por

$$F^*(v) = P^*(V \leq v), \quad \text{para} \quad -\infty < v < \infty$$

$$F_*(v) = P_*(V \leq v), \quad \text{para} \quad -\infty < v < \infty$$

O correspondente valores esperados superior e inferior de  $V$  são definidos pelas expressões a seguir:

$$E^*(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF_*(v)$$

$$E_*(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF^*(v)$$

### A Classe de Medidas Compatíveis sobre $\mathcal{S}$

$$\mathcal{C} = \{\text{medidas } P \mid P_*(T) \leq P(T) \leq P^*(T)\}, \forall T \in \xi$$

#### 2.4.4 Probabilidade Superior e Inferior

A probabilidade superior e inferior está baseada no par  $(\underline{P}, \overline{P})$  de conjunto de funções tomando valores no intervalo unitário  $[0, 1]$ , onde  $\underline{P}$  e  $\overline{P}$  representam as probabilidades inferiores e superiores, respectivamente (Fine, 1987; Walley & Fine, 1982). Considere, um espaço amostral  $\Omega$  e uma álgebra de eventos  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$ , sendo assim tem-se:

$$\underline{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

$$\overline{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

As probabilidades superiores e inferiores atendem os axiomas a seguir:

1.  $\underline{P}(A) + \overline{P}(A^c) = 1$ ;
2.  $\underline{P}(\Omega) = 1$ ;
3.  $\underline{P}(A) \geq 0$ ;
4. Se  $A$  e  $B$  são eventos disjuntos então  $\underline{P}(A \cap B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$ ;
5. Se  $A$  e  $B$  são eventos disjuntos então  $\overline{P}(A \cup B) \leq \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$ ;

#### 2.4.5 Teoria Matemática da Evidência

A teoria da evidência de Shafer(1976) permite combinar as evidências provenientes de fontes distintas sem que seja necessário um conhecimento *a priori* de suas distribuições de probabilidade. Além

disso, permite que se possa atribuir valores de probabilidade a conjuntos de possibilidades ao invés de apenas a eventos simples. Utiliza, para tanto, a função de massa,  $m$ , definida da seguinte forma:

$$m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$$

$$m(\emptyset) = 0$$

$$\sum_{A \in \Theta} m(A) = 1$$

Suponha  $\Theta$  um conjunto finito e denote por  $2^\Theta$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $\Theta$ . A função crença mede o quanto as informações fornecidas por uma fonte sustentam um dado elemento  $A$  pertencente a família de subconjuntos de  $\Theta$ .

Suponha que a função Bel:  $2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  satisfaz às seguintes condições:

- (1)  $\text{Bel}(\emptyset) = 0$ ;
- (2)  $\text{Bel}(\Theta) = 1$ ;
- (3) Para todo inteiro positivo  $n$  e toda coleção  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de subconjuntos de  $\Theta$ ,

$$\begin{aligned} \text{Bel}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &\geq \\ &\geq \sum_i \text{Bel}(A_i) - \sum_{i < j} \text{Bel}(A_i \cap A_j) + \dots + \\ &\quad + \dots (-1)^{n+1} \text{Bel}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Então a função Bel é chamada de **função crença** sobre  $\Theta$ .

Além disso,

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} \text{Bel}(B)$$

para todo  $A \subset \Theta$ .

A regra de combinação de Dampster (Shafer, 1976) é utilizada para combinar corpos de evidência.

A regra é composta por uma soma ortogonal e uma normalização (Campos, 2005):

$$m_1 \oplus m_2(A) = \mathcal{X} \sum_{\substack{B \cup C = A \\ A \neq \emptyset}} m_1(B)m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Theta$$

Onde  $\mathcal{X}$  é a constante de normalização, definida por:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{k}$$

e  $k$  é igual 1 menos a soma das massas após a operação da multiplicação das interseções:

$$k = 1 - \sum_{A_i \cap B_i = \emptyset} m_1(A_i)m_2(B_j)$$

A constante de normalização mede a extensão do conflito entre as evidências. O peso do conflito entre as funções de crença é denotado por

$$\text{Con}(\text{Bel}_1, \text{Bel}_2) = \log(\mathcal{X})$$

### A Representação da Ignorância: Função Crença Vacuosa

$$\text{Bel}(A) = 0 \text{ se } A \neq \Theta; \text{ Bel}(A) = 1 \text{ se } A = \Theta$$

Exemplo: Existe ou não seres vivos orbitando a estrela Sirius?  $\theta_1$  denota a existência de vida e  $\theta_2$  denota a não existência de vida. Adota-se a função crença vacuosa em  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ . Um conjunto mais refinado de possibilidades seria:  $\Omega = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ , onde  $\zeta_1$  denota a existência de vida,  $\zeta_2$  denota a existência de planetas mas não de vida e  $\zeta_3$  denota a inexistência de planetas.

O conjunto  $\Omega$  está relacionado ao conjunto  $\Theta$ , pois  $\zeta_1$  corresponde a  $\theta_1$ , e  $\{\zeta_2, \zeta_3\}$  corresponde a  $\theta_2$ . A adoção de uma função crença vacuosa em  $\Omega$  é consistente com a adoção de uma função crença vacuosa em  $\Theta$ .

Um bayesiano terá dificuldades em especificar graus de crença consistentes sobre  $\Theta$  e  $\Omega$  que ele possa defender como representação da ignorância, pois, seguindo o paradigma bayesiano ele faria:

$$\text{Bel}(\{\theta_1\}) = \text{Bel}(\{\theta_2\}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Bel}(\{\zeta_1\}) = \text{Bel}(\{\zeta_2\}) = \text{Bel}(\{\zeta_3\}) = \frac{1}{3},$$

o que implicaria em

$$\text{Bel}(\{\zeta_1\}) = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$\text{Bel}(\{\zeta_2, \zeta_3\}) = \frac{2}{3}.$$

Como  $\{\theta_1\}$  tem o mesmo significado de  $\{\zeta_1\}$  e  $\{\theta_2\}$  tem o mesmo significado de  $\{\zeta_2, \zeta_3\}$ , as atribuições são inconsistentes.

## 2.4.6 Uma Melhoria na Teoria Matemática da Evidência

Campos (2005), na sua tese de doutorado, verificou alguns inconvenientes na regra de combinação de Dempster-Shafer (Shafer, 1976) que aparecem quando as evidências que serão combinadas apresentam um conflito elevado ou quando as mesmas concentram crença em hipóteses disjuntas e possuem uma hipótese comum que é menos acreditada. Ele propôs uma nova regra de combinação que além de corrigir este inconveniente incorpora ao resultado a representação da incerteza advinda das hipóteses conflitantes ou do conhecimento insuficiente. A regra de combinação é a seguinte:

$$m_1 \Psi m_2(A) = \frac{\sum_{\substack{B \cap C = A \\ A \neq \emptyset}} \mathcal{X} m_1(B) m_2(C)}{1 + \log\left(\frac{1}{k}\right)}, \forall A \subset \Theta$$

Introduziu um novo construto (Campos & Campello de Souza, 2005), *lateo* definido por:

$$\Lambda = m_1 \Psi m_2(\Theta) = (\mathcal{X} m_1(\Theta) m_2(\Theta))_{|m_1(\Theta) \neq 0 \wedge m_2(\Theta) \neq 0} + 1 - \sum m_1 \Psi m_2(\mathcal{A})$$

que incorpora à crença inicial a crença adicional, restante do rebaixamento das crenças.

O autor destaca algumas vantagens do Lateo, são elas:

- “A combinação de evidências com a maioria de suas crenças atribuídas a elementos disjuntos, sem o efeito de produzir um comportamento contra-intuitivo.
- O uso de evidências com altos valores de conflito, tornando úteis evidências que de outra forma seriam inúteis.

- *Evitar a necessidade de descarte de evidências com alto grau de conflito, o que poderia causar uma modelagem sub-ótima da evolução das crenças.”*

## 2.5 Probabilidade Imprecisa

Conforme exposto em Walley (1996) e Walley (2002), probabilidade imprecisa é um termo genérico para representar muitos modelos matemáticos que mensuram chance e incerteza sem utilizar distribuições únicas, como faz a medida de probabilidade de Kolmogorov ou a teoria Bayesiana. Como exemplo desses modelos de probabilidades imprecisas, tem-se a probabilidade superior e inferior, previsões superiores e inferiores, classes de probabilidades aditivas, etc. As probabilidades imprecisas são usadas especialmente em modelos de ignorância parcial, incompletude, indeterminância e indecisão.

A intenção ao se introduzir a imprecisão é tornar os modelos probabilísticos mais realistas, mais robustos e largamente aplicáveis.

Segundo Walley (1996) existem muitos argumentos que dão suporte ao uso da imprecisão, alguns deles são:

- **Quantidade de informação**

A imprecisão irá refletir a quantidade de informação na qual a mesma está baseada. Suponha, por exemplo, que se está interessado em estimar a distribuição de probabilidade com máximo ( $\pi_{max}$ ) e mínimo ( $\pi_{min}$ ) valor esperado de um evento  $A$  de que uma determinada face de um dado chumbado (viciado) venha a sair num lançamento. Se você não tem nenhuma experiência com este tipo de situação ou com alguma situação semelhante, a diferença entre suas distribuições de máximo e mínimo valor esperado tende a ser grande refletindo sua falta de informação com relação ao problema. No entanto, se você possui alguma informação sobre o fenômeno, seja por observar vários lançamentos desse dado ou por conhecer os pesos que foram chumbados ao mesmo e dessa forma ser capaz de estabelecer alguma relação entre a chance de uma determinada face vir a sair com seu pesos, a diferença entre as probabilidades  $\pi_{max}$  e  $\pi_{min}$  tende a diminuir de acordo com a informação acumulada.

- **Completa Ignorância**

Um estado de completa ignorância significa uma total falta de informações relevantes sobre o evento sobre o qual se está querendo fazer inferência. Esta completa ignorância pode ser modelada

por probabilidades vacuosas, que têm uma imprecisão máxima ou, em termos do modelo proposto por Campello de Souza (2007) e Nadler Lins (2000), seria um mecanismo inferencial de vagueza máxima ( $V = 1$ ).

- **Realismo Descritivo**

Os modelos de probabilidade imprecisa são capazes de modelar situações de indecisão e indeterminação. Como se sabe, as crenças a respeito de determinados problemas são indeterminadas e, além disso, há muitas situações em que o indivíduo encontra-se indeciso com relação a suas crenças. A probabilidade imprecisa modela de forma mais realista estes tipos de problema.

- Educação;
- Racionalidade limitada;
- Extensão natural;
- Grupos de crenças e decisões;
- Inferência estatística;
- Robustez;
- Conflito de dados *a priori*.

### 2.5.1 Fontes de Imprecisão

#### Indeterminação

##### Falta de Informação

Caso haja pouca evidência com respeito a  $\Theta$ , então as crenças a respeito desse conjunto podem ser indeterminadas e os modelos de probabilidades imprecisas refletem essa falta de informação. Segundo Walley (1996), as crenças a respeito de  $\Theta$  são indeterminadas quando existe uma falta de preferência que pode conduzir à indecisão em alguns problemas de decisão.

##### Conflito de Informação

Podem existir várias fontes de informação a respeito de  $\Theta$ . Tipicamente, a junção dessas fontes formará um corpo de informação melhor do que quando se considera cada fonte isoladamente. Porém isso deixa de acontecer quando existe um conflito entre as fontes de informação.

### Conflito de Crença

Esse tipo de conflito ocorre quando as estimativas de probabilidade obtidas de fontes diferentes são conflitantes. Um exemplo disto é o conflito entre a opinião de dois especialistas.

### Informação de Relevância Limitada

Estimativas de probabilidades de eventos futuros são sempre baseadas em analogias entre estes eventos e observações passadas. As analogias são sempre parciais, sendo assim as observações têm uma relevância limitada para os eventos de interesse.

### **Incompleteza**

- Falta de Introspecção;
- Falta de Avaliação Estratégica;
- Limites na habilidade computacional;
- Modelos Não Tratáveis;
- Instabilidade;
- Ambigüidade;

## **2.6 Uma Taxonomia da Incerteza**

Uma classificação de teorias de probabilidade com base em cinco dimensões é apresentado em Fine (1973), que são:

- 1) O domínio da aplicação
- 2) A forma das aplicações probabilísticas
- 3) As relações entre as afirmações probabilísticas;
- 4) As informações de entrada e os procedimentos a serem usados na mensuração ou para se chegar nas primeiras afirmações probabilísticas
- 5) Os propósitos ou objetivos da teoria

Com base nestas dimensões, Fine (1973) classifica várias teorias de probabilidade que são cuidadosamente tratadas em seu trabalho. Um resumo desta classificação pode ser visto na Tabela 2.6 a seguir:



Dimensões de Classificação de Teorias da Probabilidade					
Teorias	1	2	3	4	5
Comparativa Axiomática		Comparativa	Conjunto de axiomas estabelecendo uma ordem completa		
Cálculo de Kolmogorov		Atribui números a eventos	Conjunto de axiomas		
Frequência Relativa	Experimentos repetíveis	Quantitativa	Cálculo de Kolmogorov	Frequência relativas observadas	Característica física de um experimento útil para predição, concebida empiricamente e objetivamente
Frequência relativa de Von Mises	Experimento de um tipo especial repetíveis indefinidamente	Quantitativa	Cálculo da medida de Jordan	hipótese de um coletivo e princípios estatísticos <i>ad hoc</i>	
Frequência relativa de Reichenbach-Salmon	Experimentos repetíveis indefinidamente	Quantitativa	Finitamente aditiva, normalizada para a unidade, funções de conjunto não negativa	Frequência relativas observadas, princípios racionais de estimação	Elaboração de raciocínio indutivo; lógica, empírica, concebida para ser objetiva, pragmática.
Solomonoff baseada em Complexidade	Sequência de símbolos de comprimentos finitos	Quantitativa	Incetas	Sequência de símbolos, hipóteses quanto às origens das seqüências, noções de simplicidades, manipulações <i>ad hoc</i> motivadas por conceitos computacionais	Sumário de dados, elaboração de raciocínio indutivo, explicações das freqüências observadas em termos dos mecanismos de geração, predição de futuros termos nas seqüências; lógica, empírica e concebida para ser objetiva
Clássica de Laplace	Incerto, aplicada indiscriminadamente	Quantitativa	Cálculo de funções finitamente aditivas, não negativas e com normalização unitária	Ignorância no que diz respeito a qual mais verossímil de um conjunto de alternativas, não há procedimento de medição cuidadosamente trabalhados	Permite afirmações probabilísticas em muitas situações, significados incertos; parece ser subjetiva e possivelmente lógica.
Clássica de Jaynes	Incerto	Quantitativa	Cálculo de Kolmogorov	Informação testável e aplicação do princípio de máxima entropia	permite afirmações de probabilidade em muitas situações, significado incerto; objetiva
Comparativa Lógica de Koopman	Proposições que descrevem experimentos	Comparativa	Conjunto de axiomas que restringem as possíveis relações de comparação, não necessariamente completamente ordenado	Intuição	Incerto, uso possivelmente consistente de julgamento; lógica, subjetiva
Lógica de Carnap	afirmações em linguagem simples	Quantitativa	Cálculo de funções de conjunto finitamente aditivas, não negativas, suplementadas por axiomas de invariância	Princípio <i>a priori</i> de raciocínio indutivo	Elaboração de raciocínio e comportamento indutivo racional; lógica, objetiva e pragmática
Subjetiva-Personalista de De Finetti-Savage	Crenças individuais, julgamentos e preferências	Quantitativa	Axiomas fornecem restrições de consistência ou coerência	Intuição e introspecção	Expressão de crenças individuais em forma útil ao indivíduo para seleção das suas decisões mais satisfatórias

## 3 EDUCAÇÃO

Desde pelo menos a época de Arquimedes que métodos aproximados para o cálculo de características (ou parâmetros) de figuras geométricas e outros construtos matemáticos são usados. Muitas vezes calcula-se uma cota superior e uma cota inferior para a magnitude procurada. Este processo foi, de fato, introduzido por Arquimedes de Siracusa<sup>1</sup>. Este, por exemplo, fez cálculos estimando cotas para o número  $\pi$  baseando-se em um polígono de 96 lados iguais. Ele estimou que:

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}.$$

Quando não se dispõe de simetrias, o “cálculo das probabilidades” torna-se um desafio. Uma primeira resposta a este desafio foi dada por James Bernoulli no seu famoso *Ars coniectandi*, que na sua *Pars quarta* expõe a lei dos grandes números (termo cunhado por Poisson, muito mais tarde), provando-a na sua versão fraca (convergência em probabilidade).

Uma série de outros argumentos e considerações sobre incerteza e probabilidade, tornam o problema de estimação de probabilidades (em qualquer que seja a versão para a definição do conceito) um problema em estudo até hoje. Bernoulli dispensa, por assim dizer, a simetria, mas, em contrapartida, exige que o número de extrações de bolas da sua notória urna contendo bolas brancas e pretas seja sem limite. Ou seja, quando  $n$  tende para o infinito. Ora, no infinito, como disse Keynes, estaremos todos mortos. Fica-se portanto com as estimativas, e daí as cotas superiores e inferiores.

Coleciona-se a seguir, com o intuito de mostrar a importância, o interesse e as dificuldades, bem como a evolução da pesquisa, alguns estudos que vêm sendo feitos a respeito da educação da distribuição *a priori* de especialistas. Alguns dos documentos consultados são de difícil acesso e por isso parte deles estão nos anexos deste trabalho.

### 3.1 A Viabilidade Econômica da Energia Solar

Em 1984/1985, uma pesquisa conjunta de Campello de Souza e Walley (1985) (UFPE e University of Warwick) introduziu um modelo de probabilidades imprecisas para avaliar a viabilidade econômica da energia solar. O projeto começou a ser escrito em 1981. Envolveu a educação da distribuição *a*

---

<sup>1</sup>Existe uma versão digital em <<http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/circle.html>>. Último acesso em 04/12/2007.

*priori* de especialistas (Ministério das Minas e Energia e Companhia Hidrelétrica do São Francisco) sobre os preços futuros da energia elétrica. Quanto mais altos fossem esses preços (inflação relativa da energia com respeito à inflação da economia), mais viável seria o uso da energia solar para aquecimento d'água para fins domésticos, em lugar do chuveiro elétrico. O decisor era o consumidor residencial. Envolveu também a educação da distribuição *a priori* de especialistas (engenheiros mecânicos de fábricas de equipamentos térmicos e fábrica de equipamentos de aquecimento solar (ESSE) sobre o tempo de vida útil de coletores, reservatórios e controles de equipamentos de aquecimento d'água por energia solar para fins domésticos. Quanto maior fosse esse tempo, mais viável seria o uso da energia solar.

As primeiras entrevistas com os engenheiros da CHESF, sem questionário, foram feitas pelos citados pesquisadores. A elaboração e redação das cartas e questionários de educação foram feitas depois, no primeiro semestre de 1985, por Campello de Souza (vide anexo 6.2). Os documentos em anexo dão uma idéia da dificuldade dos problemas de mediação cognitiva. As perguntas dos questionários envolviam sempre algum tipo de desigualdade procurando mostrar ao entrevistado a importância de se poder acomodar alguma vagueza nas afirmações. Além de não terem uma formação mais consistente em probabilidade e estatística, os entrevistados eram solicitados a responderem dentro de uma concepção de vagueza (família de distribuições de probabilidade). As perguntas tiveram então que ser elaboradas tendo em vista essa dificuldade de mediação cognitiva.

Os resultados das análises destes questionários foram apresentados em Walley e Campello de Souza (1990). Alguns anos depois, um outro questionário, já baseado no método da programação linear (como apresentado em Campello de Souza (1993)), foi aplicado ao engenheiro Sergio Rochadel Lima, da ESSE.<sup>2</sup>

### 3.2 Educação de Especialistas da Companhia Hidrelétrica do São Francisco quanto às Falhas dos Equipamentos

Na sua dissertação de mestrado, Almeida (1985) e Almeida e Campello de Souza (1993) fez a educação do conhecimento *a priori* de um especialista em microondas a respeito da taxa de falhas deste tipo de equipamento

---

<sup>2</sup>ESSE — Engenharia de Serviços e Sistemas Energéticos Indústria e Comércio Ltda (SIA — Trecho 6 — nº 55 — Térreo — Fones: (061) 233/5888/1096 — Fax: (061) 233-1450, Telex: 61-4919—Brasília / DGF CEP 71200).

### 3.3 Educação de Especialistas da Companhia Hidrelétrica do São Francisco quanto às Falhas dos Equipamentos

No seu trabalho de conclusão da disciplina Teoria da Decisão, no curso de graduação em Engenharia Elétrica, Barros de Mello e Silva Jr. (1987) e Cavalcanti Filho e Silva Jr. (1987), fizeram eduções do conhecimento *a priori* de especialistas da CHESF, com respeito à taxa de falhas de equipamentos. (Vide anexo 3).

#### 3.3.1 Questionário de Barros de Mello e Silva Jr.

Os autores usaram o procedimento “FDA (função de distribuição acumulada) partição.” O sistema em questão consistia de 36 (trinta e seis) equipamentos SHF (*Super High Frequency*) da linha entre Sobradinho e Paulo Afonso do Sistema Integrado de Telecomunicações (SIT) da CHESF. Os equipamentos trabalham em tandem. (Vide anexo 3).

#### 3.3.2 Questionário de Cavalcanti Filho e Silva Jr.

Estes autores trataram o problema de estimação do número de falhas como um problema de teoria da decisão. (Vide anexo 3).

### 3.4 Distribuição *A Priori* do Tempo de Tramitação de um Empenho na Universidade Federal de Pernambuco

Leal Neto (1988), na sua dissertação, usou dois métodos para a edução do conhecimento *a priori* de especialistas (“ordenadores de despesa”) sobre o tempo de tramitação de um empenho (documento contábil que representa uma ordem de pagamento): o método CDF (*Cumulative Distribution Function*) e o método do intervalo fixo. O método CDF consiste em ter o especialista que especificar alguns fractis da distribuição cumulativa (função de distribuição). O método do intervalo fixo é similar, porém difere do método CDF porque são apresentados ao entrevistado diversos intervalos de mesmo tamanho, para que ele possa associar as respectivas probabilidades.

Para cada método foi elaborado um questionário.

Nota-se que a função de distribuição do método CDF está por cima da função de distribuição do método do intervalo fixo. Barros Leal interpretou isso como uma inconsistência, embora tenha chamado

à atenção o fato de que “*técnicas diferentes levam a distribuições diferentes, porque a maneira de se questionar a pessoa pode ter algum efeito sobre a maneira como o problema é visto.*” O problema é saber qual a “maneira certa” de ver o problema. É muito mais natural pensar-se que existe mesmo uma vagueza mínima irremovível. Barros Leal continuou, seguindo o que Walley (1991) chamou de “o dogma da precisão” dos bayesianos, e procedeu à uma revisão das respostas junto ao entrevistado, para chegar a uma distribuição *a priori* mais precisa. O resultado está mostrado na Tabela 5. (Vide anexo 4).

É claro que o procedimento de “ajuste” (revisão das respostas pelo entrevistado) foi *ad hoc*. Barros Leal aplicou os mesmos métodos a três outros entrevistados, sobre a mesma variável (tempo de tramitação de um empenho), fazendo os mesmos ajustes *ad hoc*. De uma maneira geral ele verificou que os dados ajustaram-se à densidade de Gompertz:

$$f(x) = \alpha \exp(-\beta \exp(-x)).$$

Nas suas conclusões ele afirma que:

“ O que se nota ao comparar os resultados obtidos é que existe alguma identificação no tocante ao tipo de distribuição. Mas, no tocante aos valores numéricos, houve uma discordância acentuada. Assim é que o maior valor para um dos entrevistados (ex-diretor de centro) era quarenta, enquanto para outro do setor de contabilidade este não passaria de nove. Dois entrevistados (um da assessoria do reitor e outro pró-reitor) apresentaram resultados muito similares, tendo inclusive apontado o intervalo de 8 a 10 dias como o mais provável (veja distribuições).

Outro ponto a destacar no trabalho foi a diferença entre as distribuições geradas por métodos distintos de questionário. Em geral, as curvas eram diferentes. Para um dos entrevistados (do setor de contabilidade), estes, no entanto, não diferiram muito. Uma revisão de tais distribuições gerou, no entanto, resultados bem satisfatórios, como se encontra no capítulo 5.” Barros Leal (1988), p. 95.

## 3.5 O Método da Programação Linear

O método da programação matemática foi introduzido por Campello de Souza (1993) na sua tese do concurso de professor titular do Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE.

### 3.5.1 Chances do Parlamentarismo ser aprovado no próximo Plebiscito no Brasil

Campello de Souza (1993) apresenta o questionário Tabela 3.1 a seguir, o qual foi aplicado a vários indivíduos de diversos perfis e formações, e com níveis distintos de conhecimento sobre a questão política em análise.

As idéias centrais do método, incluindo os conceitos de vagueza, concordância (entre dois ou mais especialistas), conflito, etc., foram lançadas em Campello de Souza (1993), e vários experimentos (eduções) foram realizados. Método semelhante foi desenvolvido para a educação da função utilidade.

Tabela 3.1: Questionário de educação sobre a probabilidade do parlamentarismo ganhar o plebiscito, com as respostas do prof. Antonio Carlos Palhares Moreira Reis.

ORDEM	FAIXA A	FAIXA B	
1	0 0,05	0,15	1 0,85
2	0 0,40	0,55	—
3	0 0,25	0,40	—
4	0 0,00	0,10	—
5	1 0,65	0,70	—
6	0 0,00	0,25	—
7	0 0,35	0,55	—
8	1 0,50	0,65	—
9	0 0,00	0,20	—
10	0 0,30	0,45	—
11	1 0,50	0,75	—
12	0 0,15	0,30	—
13	1 0,45	0,55	—
14	0 0,00	0,25	—
15	0 0,00	0,50	—
16	0 0,20	0,30	—
17	0 0,25	0,50	—
18	0 0,10	0,25	—
19	0 0,40	0,50	—
20	1 0,20	0,60	—
21	0 0,00	0,25	—
22	0 0,25	0,50	—
			<p> X18+X19  X10+X11+X12  X13+X14+X15  X19+X20  X17+X18+X19  X16+X17+X18+X19+X20  X10+X11+X12+X13  X15+X16+X17+X18  X7+X8+X9  X11+X12+X13  X16+X17+X18+X19+X20  X14+X15  X16+X17  X6+X7+X8+X9+X10  X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19+X20  X15+X16  X16+X17+X18+X19+X20  X13+X14+X15+X16  X18+X19+X20  X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16  X11+X12+X13+X14+X15  X11+X12+X13+X14+X15 </p>

### 3.5.2 As Chances das 6 Faces de um Dado Chumbado

O modelo da programação matemática foi aplicado à educação do conhecimento *a priori* de um especialista (um professor de mecânica racional) a respeito das chances das diversas faces de um dado chumbado (viciado) resultarem de um lançamento aleatório. Os pesos das diversas faces do dado foram informados ao especialista, e este respondeu algumas questões comparativas de probabilidade. Em seguida o dado foi lançado 850 vezes, e os resultados foram comparados. A Tabela 3.2 mostra os resultados da educação. Os  $\pi$ 's são as probabilidades das 6 faces do dado.

Tabela 3.2: As respostas do especialista, já na matriz de restrições do modelo de programação matemática, para o caso do dado chumbado.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	Sentido da desigualdade	
1	1	1	1	1	1		
1	-1	0	0	0	0	$\geq$	0
0	1	-1	0	0	0	$\geq$	0
0	0	1	-1	0	0	$\geq$	0
0	0	0	1	-1	0	$\geq$	0
0	0	0	0	1	-1	$\geq$	0
3	0	0	0	0	-11	$=$	0
0	5	0	0	-9	0	$=$	0
0	0	13	-15	0	0	$=$	0

Numa mesma unidade de medida, os pesos das faces dos dados encontram-se na Tabela 3.3:

O que o especialista disse, em outras palavras, foi que as probabilidades de faces opostas estão na proporção inversa dos seus respectivos pesos. A sétima linha da Tabela 3.2, por exemplo, significa que:

$$3\pi_1 - 11\pi_6 = 0,$$

ou seja:

$$\pi_1 = \frac{11}{3}\pi_6.$$

Ou seja, o especialista explicitou a relação de chances de alguns eventos. Outra informação dada

Tabela 3.3: Os pesos das seis faces do dado chumbado.

Face	Peso
1	3
2	5
3	13
4	15
5	9
6	11



pelo especialista foi que as probabilidades das faces estão na ordem inversa dos seus pesos. É o que expressam as desigualdades das linhas de 2 a 7 da Tabela 3.3.

A função objetivo usada foi a entropia (de Shannon) da distribuição de probabilidade, que se pretendia maximizar.

### **3.6 A Educação da Distribuição de Probabilidade do Tempo de Vida Útil de um Aquecedor Solar**

O questionário usado para a educação do conhecimento *a priori* de Sérgio Rochadel Lima, da ESSE, foi o desenvolvido e apresentado em Stamford da Silva (1994). A tabela 3.4 mostra o questionário com as respostas.

Tabela 3.4: Questionário de educação para o tempo de vida útil de um sistema de aquecimento solar de água. Respostas do engenheiro Sérgio Rochadel Lima, da ESSE

ORDEM	FAIXA A	FAIXA B	
	ANOS	ANOS	
1	x 0 - 20	20 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$
2	x 0 - 10	x 30 - 40	$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} + X_{19} + X_{20}$
3	x 0 - 10	x 20 - 30	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
4	x 10 - 20	x 30 - 40	$X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$
5	x 0 - 10	x 10 - 20	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
6	x 10 - 20	20 - 30	$X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$
7	x 20 - 30	30 - 40	$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}$
8	x 0 - 10	x 20 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
9	x 0 - 20	30 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_8 + X_9 + X_{10}$
10	x 10 - 30	x 10 - 30	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
11	x 0 - 20	20 - 30	$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_8 + X_9 + X_{10}$
12	x 10 - 20	20 - 40	$X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$
13	x 10 - 30	30 - 40	$X_6 + X_7 + X_8 + \dots + X_{13} + X_{14} + X_{15}$
14	x 0 - 10	x 10 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
15	x 0 - 30	30 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_{13} + X_{14} + X_{15}$
16	x 8 - 16	x 16 - 24	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
17	x 8 - 16	x 24 - 32	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8$
18	x 8 - 16	x 16 - 24	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8$
19	x 16 - 24	32 - 40	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
20	x 16 - 24	24 - 32	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
21	x 0 - 8	x 8 - 24	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
22	x 0 - 16	x 16 - 24	$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_6 + X_7 + X_8$
23	x 8 - 16	x 16 - 32	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8$
24	x 8 - 24	24 - 32	$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
25	x 16 - 24	24 - 40	$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
26	x 16 - 32	32 - 40	$X_9 + X_{10} + X_{11} + \dots + X_{14} + X_{15} + X_{16}$
27	x 0 - 4	x 28 - 40	$X_1 + X_2$
28	x 0 - 12	x 36 - 40	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
29	x 0 - 4	x 16 - 28	$X_1 + X_2$
30	x 12 - 24	36 - 40	$X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
31	x 0 - 12	x 24 - 28	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
32	x 12 - 16	x 28 - 40	$X_7 + X_8$
33	x 0 - 12	x 18 - 22	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
34	x 18 - 22	28 - 40	$X_{10} + X_{11}$
35	x 0 - 4	x 4 - 16	$X_1 + X_2$
36	x 0 - 12	x 12 - 16	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
37	x 6 - 18	x 18 - 22	$X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9$
38	x 12 - 16	x 16 - 28	$X_7 + X_8$
39	x 12 - 24	24 - 28	$X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$
40	x 18 - 22	22 - 34	$X_{10} + X_{11}$
41	x 24 - 28	28 - 40	$X_{13} + X_{14}$
42	x 24 - 36	36 - 40	$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18}$

### 3.7 Os Especialistas do Porto do Recife

Na sua dissertação de mestrado, Stamford da Silva (1994) desenvolveu mais o questionário de educação, procurando garantir a simetria das perguntas e uma progressividade na dificuldade das perguntas. O questionário do protocolo tem 42 perguntas (comparações de probabilidades de eventos). Ele elaborou e implementou uma macro na planilha Quattro Pro para o protocolo de educação de um e de dois especialistas, que calcula todos os construtos do método, e apresenta também gráficos dos resultados. O método foi aplicado na administração do porto do Recife (CODERN-APR), tendo sido eduzidas as distribuições *a priori* de vários especialistas, dentro de um projeto de desenvolvimento de ferramentas de apoio à decisão naquela instituição.

A referida macro é usada até hoje em pesquisas aplicadas sobre o assunto.

### 3.8 Avaliação da Manutenibilidade no Sistema de Telecomunicações da CHESF

Barros Filho (1995), na sua dissertação de mestrado, usou o método da programação matemática (linear) e o questionário usado em Stamford da Silva (1994) para diversas variáveis relativas ao sistema de gestão da manutenção do sistema de telecomunicações da CHESF. As variáveis analisadas são tempos de duração das ações de manutenção, em particular o chamado TTR (*Time To Recover* ou *Time To Repair*). Quatro engenheiros tiveram as suas distribuições eduzidas e comparadas duas a duas. O método foi usado também para os dados disponíveis no banco de dados da CHESF; outra forma de conhecimento *a priori*. Os resultados foram comparados aos dos especialistas, dentro de um processo de busca de um *benchmark*. O conceito da conformidade foi introduzido nesta dissertação. Segundo suas próprias palavras:

“A resposta da aplicação dos questionários, com os especialistas (gerentes), mostra que o Modelo do Conhecimento *a priori* se transformou numa rotina dentro da empresa tornando-se uma **realidade**.” Barros Filho (1995), p. 192.

### 3.9 Trabalhos Mais Recentes

- Nadler Lins (2000), na sua dissertação de mestrado, elaborou novos construtos que serviram de base para um grande avanço na qualidade do questionário de educação baseado em programação linear. Os resultados dessa dissertação foram apresentados no ISIPTA (2001) (International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications),(Nadler Lins & Campello de Souza, 2001).
- Silva (2002), na sua dissertação de mestrado, aplicou o método a problemas de educação no campo da cardiologia. Foi apresentado o caso onde a variável de interesse é bidimensional, representando a pressão sistólica e diastólica de um indivíduo. Os construtos apresentados em Nadler Lins e Campello de Souza (2001) foram adaptados para construção do questionário.
- Moraes (2003), na sua dissertação de mestrado, também aplicou o método em alguns problemas de aplicação da teoria da decisão. Os resultados da aplicação do modelo de educação foram comparados com os dados obtidos pelo modelo impreciso de Dirichlet.
- Silva e Campello de Souza (2005) introduzem o conceito de *inferential skill*, um novo construto do modelo. Detalhes e algumas aplicações desse construto podem ser vistos no capítulo 4.
- Bezerra e Campello (2004) utilizou o modelo para educação da distribuição de probabilidade de 16 cenários econômicos para tomada de decisão em carteira de investimento.
- Lins (2006), no seu trabalho de iniciação científica, elaborou alguns programas de computador para a solução de problemas de teoria da decisão, incluindo o questionário de educação de especialistas.
- Campello de Souza (2007a), na sua dissertação de mestrado, fez estudos comparativos detalhados a partir de um experimento.
- No III REDS (2007) foi feito um experimento semelhante ao realizado por Campello de Souza (2007) cujos resultados encontram-se detalhados no capítulo 4.

Em todas essas pesquisas, de 1981 até 2007, estudou-se vários tipos de fenômenos, em vários contextos, onde se esteve frente a frente com problemas de mediação cognitiva, falta de uma base de

conhecimentos básicos de probabilidade e estatística por parte dos entrevistados, problemas computacionais, dificuldades físicas nos experimentos, etc. De qualquer forma, houve um aprendizado e um avanço.

### 3.10 Métodos de Educação

Uma classe dos métodos de educação que são utilizados impõe uma estrutura para a distribuição que será usada para representar o conhecimento do especialista. Deste modo, os métodos assumem que tal conhecimento pode ser bem representado por algum membro de alguma família específica de distribuição paramétrica. Exemplos podem ser encontrados em Gosling (2005), O'Hagan (1998) onde são apresentados métodos usando as distribuições uniforme e beta. Oakley e O'Hagan (2007) aponta desvantagens no uso deste tipo de abordagem, uma vez que ela força as crenças do especialista a se ajustarem a uma distribuição dada, não levando em consideração que outras densidades de probabilidade poderiam se ajustar muito bem aos *inputs* fornecidos pelo especialista.

Há vários critérios para a escolha da família de distribuição que será utilizada. Entre tais critérios, se a distribuição eduzida será utilizada para atualizar a informação em análise bayesiana, é comum assumir que a distribuição *a priori* que será eduzida pertença à família de distribuições conjugadas.

Ao utilizar uma distribuição conhecida para representar a opinião do especialista o problema de educação passa a ser determinar os valores dos parâmetros da mesma, tais como parâmetros de localização (média, mediana e moda) e parâmetros de forma (variância e desvio padrão). Por exemplo, no caso de assumir-se a distribuição normal o processo de educação consiste em determinar os valores da média e da variância dessa distribuição. A seguir apresenta-se uma breve revisão de alguns métodos que utilizam este tipo de abordagem.

#### Ajustando as Distribuições Uniforme e Triangular

A forma mais simples de educação é perguntar ao especialista o intervalo  $[a, b]$  para o qual ele acredita que a variável de interesse pertença. Por exemplo, pode estar-se interessado em avaliar a pressão sistólica de um indivíduo com determinadas características, como índice de massa corpórea, sexo, idade, tabagismo, entre outras. No processo de educação o especialista irá fornecer o intervalo no qual acredita que a pressão sistólica do indivíduo com as características descritas se encontre. Quando apenas esta informação é fornecida pelo especialista, a distribuição usualmente ajustada é a uniforme.

Esta abordagem tem sofrido algumas críticas pela sua forma simplificada de abordar o problema. Em Garthwaite *et. al.*(2005) e O'Hagan *et. al.* (2006), duas críticas a esta técnica são apresentadas. A primeira afirma que o especialista pode não acreditar que o valor da variável em análise esteja muito próxima dos extremos do intervalo ( $a$  e  $b$ ) bem como do centro do mesmo. A segunda crítica está relacionada ao fato que não é razoável atribuir probabilidade zero aos eventos, cujos valores estejam fora do intervalo especificado pelo especialista.

A distribuição triangular surge como uma alternativa mais flexível ao uso da distribuição uniforme. Mais detalhes sobre a aplicação esta distribuição no processo de educação podem ser vistos em O'Hagan *et. al.* (2006) e Gosling(2005). As questões feitas ao especialista são para especificar a moda da distribuição, que será representada por  $c$ , e a função de densidade de probabilidade, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{se } a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{se } c \leq x \leq b. \end{cases}$$

### Distribuição Beta

Um grande número de métodos de educação tem sido desenvolvido para quantificar o conhecimento sobre a probabilidade ou a proporção  $p$  quando o modelo subjacente é de Bernoulli ou segue uma distribuição binomial (O'Hagan *et. al.*, 2006) e (Gosling 2005). A distribuição conjugada de uma distribuição binomial é a distribuição beta, e sendo assim, é matematicamente conveniente ajustar a distribuição beta ao conhecimento do especialista. Além disso, para construir a distribuição beta são necessários apenas dois parâmetros ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Sua forma é bastante flexível, o que permite a ela ser ajustada, com uma razoável acurácia, a uma grande variedade de julgamentos dos especialistas.

Os trabalhos de Winkler (1967a) apresenta quatro técnicas diferentes de educação. O estudo considera apenas um processo de Bernoulli, eduzindo a distribuição de probabilidade que representa a incerteza do especialista sob a proporção de uma população que tem característica particular. Em outras palavras, a distribuição eduzida será uma distribuição sobre a variável  $p$  que representa a probabilidade de sucesso em um processo de Bernoulli. Um conjunto de processos de Bernoulli independentes forma uma amostra de um modelo binomial.

Segundo Winkler(1967a) as duas primeiras técnicas, HFS (*Hypothetical Future Sample*) e EPS

(*Equivalent Prior Sample*) são técnicas indiretas, pois a distribuição subjetiva, que é eduzida do especialista, não fica clara para o mesmo durante o processo de educação. Em ambas as técnicas, inicia-se pedindo ao especialista uma estimativa para o valor de  $p$ , que será interpretado como a média da distribuição do especialista. Por exemplo,  $p$  pode representar a proporção de estudantes do sexo feminino no curso de engenharia de produção da UFPE.

A técnica EPS consiste em perguntar ao especialista uma estimativa do tamanho da amostra para a qual o mesmo está baseando suas avaliações. No exemplo dado anteriormente o especialista será alguém que conhece muito bem o curso de engenharia de produção da UFPE. Sendo assim, tal indivíduo poderá dar uma estimativa de  $r$ , a quantidade de estudantes do sexo feminino, e  $n$  a quantidade de alunos do curso. Já as perguntas feitas na técnica HFS têm o intuito de fazer com que o especialista atualize sua estimativa inicial quando for exposto a uma amostra hipotética da população de interesse.

O outro par de técnicas proposto por Winkler(1967a) são a CDF (*Cumulative Distribution Function*) e PDF (Probability Density Function) que são consideradas técnicas diretas pois a distribuição torna-se clara (ou conhecida) para o especialista durante o processo de educação. Em outras palavras, estas técnicas envolvem questões diretas sobre a distribuição de probabilidade. No método CDF o especialista informa uma estimativa para a mediana da distribuição de probabilidade sobre  $p$ , além de fornecer um ou mais quantis desta distribuição. Com estes pontos, constrói-se o gráfico da função de distribuição acumulada o que irá fornecer uma representação não paramétrica da distribuição do especialista.

### 3.10.1 Métodos Não Paramétricos

Os métodos de educação que assumem que o conhecimento do especialista pode ser bem representado por uma distribuição sofre algumas críticas. Winkler (1967) argumenta que o especialista não tem uma “verdadeira” função de densidade esperando para ser eduzida. Sendo assim, diferentes métodos podem eduzir diferentes distribuições do mesmo especialista sobre o mesmo fenômeno.

Oakley & Hagan (2007) propõem um método não paramétrico para educação que oferece maior flexibilidade e uma maior acurácia ao modelar a opinião do especialista. O método assume que a função de densidade de probabilidade a ser eduzida,  $f(\cdot)$ , pode ser modelada por um processo gaussiano. Gosling (2005) tratou as propriedades do processo gaussiano para incluir julgamentos sobre as derivadas da função de densidade, que permitem incorporar julgamentos sobre a moda da distribuição além de fazer julgamentos sobre o sinal da função densidade para qualquer ponto dado.

# 4 UM MÉTODO DE EDUCAÇÃO DO CONHECIMENTO *A Priori*

*“The magnitude of the probability of an argument . . . depends upon a balance between what way be termed the favourable and unfavourable evidence.”*

**John Maynard Keynes**

## 4.1 Introdução

A chamada inferência Bayesiana fornece um método para combinar a informação proveniente de uma fonte de dados, por meio de uma função de verossimilhança, com o conhecimento *a priori* acumulado que se tem sobre o estado da natureza. A probabilidade *a priori* usada neste contexto, também chamada de probabilidade subjetiva ou epistêmica, representa o grau de crença que um indivíduo tem na ocorrência de um evento que é representada em termos da variável aleatória  $\theta$  e precisa ser eduzida de um especialista. Um dos problemas dessa abordagem, como é exposto em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001), é que uma distribuição *a priori* precisa para a variável aleatória  $\theta$  é requerida. Os modelos de probabilidades imprecisas tentam resolver essa desvantagem, como por exemplo probabilidades superior e inferior (Dempster, 1966), previsões superiores e inferiores (Walley, 1996) e trabalhar com famílias de distribuição de probabilidade.

O protocolo de educação proposto em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001; Campello de Souza, 2007b; Nadler Lins, 2000), e que será usado neste trabalho, é parte de um método que fornece um procedimento sistemático para a educação da distribuição *a priori* da variável aleatória  $\theta$  de um especialista. O método leva em consideração que o conhecimento do especialista tem um certo grau de vagueza no que diz respeito a distribuição de probabilidade sobre  $\theta$ . Isto evita uma fonte de confusão comumente presente nos esquemas de aposta, onde o julgamento pode ser eduzido por meio de preferências, envolvendo dessa forma dois mecanismos psicológicos diferentes. Este novo método usa pares de comparações de asserções probabilísticas envolvendo eventos que podem ser representados por variáveis aleatórias. O método geral não requer que  $\theta$  seja uma variável aleatória, pode ser apenas uma categoria.



## 4.2 Método de Educação

Para tornar clara a discussão, faz-se necessário expor algumas definições básicas do protocolo de educação proposto em (Nadler Lins, 2000; Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) e depois desenvolvido em (Campello de Souza, 2007b). Considere-se que as estimativas das probabilidades (distribuições) são sempre imprecisas e que o interesse maior concentra-se nos casos de variâncias palpáveis.

O método é um procedimento sistemático para eduzir a distribuição *a priori* de um especialista para algum valor real de uma variável aleatória contínua  $\theta$ . O especialista anuncia um valor máximo e um mínimo plausível para  $\theta$ . Em sua mente, o especialista avalia que a probabilidade do verdadeiro valor de  $\theta$  estar fora desse dois limites,  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ , é zero.



Assume-se que  $\theta$  está distribuída no intervalo  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$  de acordo com uma densidade de probabilidade  $\pi$ . Este intervalo é então particionado em  $2n$  subintervalos de igual medida de Lebesgue,  $[\theta_{j-1}, \theta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n - 1$ ;  $[\theta_{2n-1}, \theta_{2n}]$ . O valor de  $n$  depende da precisão almejada. Caso considere-se que 5% seja uma boa precisão para o especialista então pode-se adotar  $n = 10$  (o que corresponde a 20 sub-intervalos de 5%). Este é um procedimento usual de quantização de uma variável aleatória contínua. É conveniente representar o intervalo  $[\theta_{j-1}, \theta_j)$  por  $\theta_j$ . Define-se também  $\pi_j = Pr\{\theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j)\} = \pi(\theta_j)$ , a probabilidade de que  $\theta$  pertença ao  $j$ -ésimo sub-intervalo. A probabilidade de que  $\theta$  pertença ao intervalo  $[\theta_{j-1}, \theta_{j+k})$  é  $\sum_{i=1}^k \pi_{j+i}$  para  $j + k \leq 2n$ . É claro que  $\sum_{j=1}^{2n} \pi_j = 1$ .

As questões que são apresentadas ao especialista são do seguinte tipo: Qual delas é maior que a outra

$$Pr\{\theta \in [\theta_j, \theta_{j+k})\} \quad \text{ou} \quad Pr\{\theta \in [\theta_l, \theta_{l+m})\}?$$

A superposição de intervalos pode causar confusão, então não pode haver superposição dos dois intervalos presentes em cada questão. Usando essa premissa foi elaborado um indicador para a construção do questionário de educação, detalhes podem ser vistos em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) e (Nadler Lins, 2000). O método propõe que a primeira questão apresentada ao especialista deve ser a mais fácil (qual das metades do intervalo é o mais provável) como definido pelo indicador presente em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001). A questão seguinte é um pouco mais difícil, os intervalos são progressivamente refinados. As questões também não devem ser repetidas com o intuito

de evitar os efeitos da ancoragem psicológica. Além de garantir a simetria e evitar a indução de viés o questionário construído baseado em tais indicadores garante que o especialista tenha uma percepção progressiva, gradual e suave do parâmetro (estado da natureza; a variável aleatória  $\theta$ ), a medida que vai respondendo ao questionário. A idéia na construção proposta em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) foi de não confundir o especialista com retrocessos de raciocínio. O especialista pode escolher não responder a alguma questão por não se sentir seguro em escolher qual dos intervalos é mais provável. Caso isso ocorra ele não deverá responder as questões subseqüentes uma vez que o questionário foi construído com um nível de dificuldade crescente.

Pense-se em uma moeda comum, uma moeda de 10 centavos, por exemplo. Imagine-se que se queira avaliar a probabilidade de ocorrência de uma das faces dessa moeda. Caso se estivesse pensando na probabilidade clássica dir-se-ia que cada face teria probabilidade de ocorrer igual a  $1/2$ . Estar-se-ia admitindo uma perfeita simetria. No entanto, sabe-se que, por menor que seja, existe diferença entre as faces da moeda considerada, seja pelas reentrâncias das figuras que estão gravadas em suas faces ou por alguma deformação não perceptível. Então, poder-se-ia pensar em outro tipo de probabilidade. Se a moeda fosse lançada um número infinito de vezes, a probabilidade de ocorrer uma das faces da moeda se aproxima de  $1/2$ . Isto é, a idéia subjacente é a de que existiria uma “verdadeira probabilidade” para a qual tenderia a frequência relativa. Seria uma definição de probabilidade (inatingível, *a fortiori*, na prática, é claro). No dizer de Bernoulli, ter-se-ia apenas uma “certeza moral”. Lembrando Keynes, “no longo prazo todos nós estaremos todos mortos”. Desta forma, pode-se lançar essa moeda um razoável número de vezes que garanta um certo intervalo de confiança para a estimativa desta probabilidade; ou mesmo aquele intervalo do teorema de Bernoulli. É claro que ninguém apostaria que uma das faces tivesse 0,90 de chance de ocorrer, ou até mesmo 0,70. Assim, se o questionário fosse utilizado para estimar esta probabilidade, o especialista, ao especificar o seu  $\theta_{min}$  e o seu  $\theta_{max}$ , não iria considerar o intervalo  $[0, 1]$  e sim algo em torno de 0,5, como, por exemplo,  $[0, 495; 0, 505]$ . Ou talvez  $[0, 48; 0, 52]$ . Observe-se que o conceito de “estimar”, aqui, significa encontrar uma família plausível de distribuições de probabilidade, no sentido de Kolmogorov, onde todos os seus membros são compatíveis com o número finito de respostas ao questionário dadas pelo especialista.

A primeira pergunta do questionário seria, sem dúvida, a mais fácil, pois não se tem praticamente nenhuma idéia, *prima facie*, sobre qual seria a face com mais chance de se apresentar, num lançamento aleatório. Neste caso, qualquer resposta serviria. Ou, se se tivesse, por qualquer razão (uma boa

acuidade visual ou um exame cuidadoso das reentrâncias e saliências de cada uma das faces, etc.), um bom motivo para se acreditar que uma das faces teria uma maior verossimilhança de se apresentar num lançamento aleatório, poder-se-ia responder de acordo. De qualquer forma, a diferença seria muito pequena. Note-se, *en passant*, a inexistência de uma idéia precisa, operacional, do que poderia ser a “verdadeira” probabilidade.

No enfoque usado neste trabalho, não se propõe a existência de uma “verdadeira” distribuição de probabilidade. Pode-se até imaginar uma, mas apenas como uma ancoragem psicológica. O que se busca é uma família. Na tentativa de se imaginar uma “verdadeira” distribuição (uma “verdadeira” densidade de probabilidade, no sentido de Kolmogorov), fica bem mais difícil para o especialista responder a uma questão do tipo, por exemplo: qual é o mais provável (verossímil), é que o “verdadeiro” valor da probabilidade esteja entre 0,5010 e 0,5015, ou entre 0,5015 e 0,5020? Esta pergunta é muito mais difícil de responder do que a pergunta: qual é o mais provável (verossímil), é que o “verdadeiro” valor da probabilidade esteja entre 0,4950 e 0,5000, ou entre 0,5000 e 0,5050?

Observe-se também que não se pode afirmar que intervalos de mesma largura, afastando-se do valor central 0,5000, terão probabilidades necessariamente progressivamente menores. No caso de uma distribuição uniforme, por exemplo, isto não é verdade. No caso de uma distribuição uniforme “perturbada” por algum “ruído” (de introspecção, por exemplo), essas probabilidades oscilariam ou poderiam mesmo aumentar, à medida que se afastasse do centro do intervalo total.

Ora, se não se tem nem uma idéia precisa da “verdadeira” distribuição, que dirá fazer-se comparações entre dois intervalos estreitos, comparados ao intervalo total? É por isso que questões envolvendo subintervalos menores (no sentido da medida de Lebesgue), sem sobreposição, são sempre mais fáceis de responder, quaisquer que sejam as suas posições relativas dentro do intervalo total. Do ponto de vista cognitivo, ou organoléptico, isto é intuitivo. Use-se a metáfora da acuidade visual, por exemplo, para auxiliar na mediação cognitiva. A idéia central, pois, está contida no termo “probabilidades imprecisas”.

A Tabela 4.1 explicita talvez mais claramente as características do questionário, tais como simetria, dificuldade crescente nas perguntas, etc.

Tabela 4.1: Uma visão do questionário de educação/inferência.

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	67,5	72,5	77,5	82,5	87,5	92,5	97,5
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$	$\pi_{15}$	$\pi_{16}$	$\pi_{17}$	$\pi_{18}$	$\pi_{19}$	$\pi_{20}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

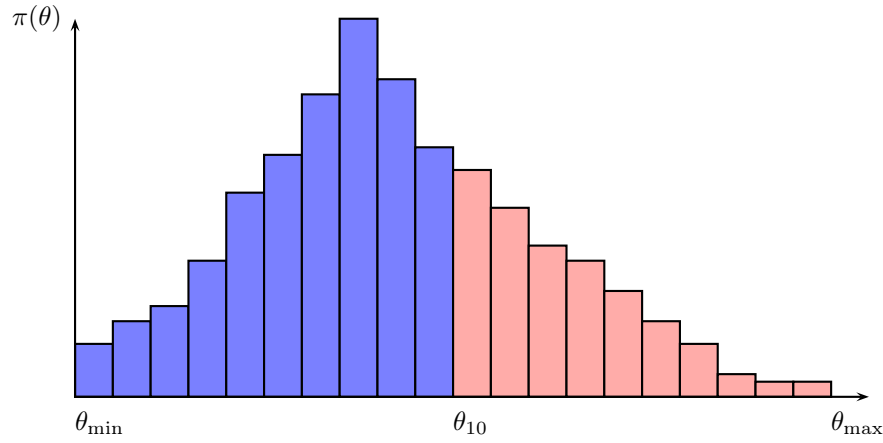


Figura 4.1: Primeira questão do protocolo de educação.

A Figura 4.1 ilustra a primeira questão que o especialista irá responder, supondo que o intervalo  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  tenha sido dividido em 20 subintervalos. Aqui esta-se usando o histograma para representar a distribuição que o especialista tem em mente e com base na qual irá responder a questão. A pergunta quer saber qual dos dois intervalos ( $[\theta_{\min}, \theta_{10}]$  e  $[\theta_{10}, \theta_{\max}]$ ) o especialista, com base no seu conhecimento *a priori*, acredita ser o mais provável.

A Figura 4.2 mostra uma questão que usa intervalos um pouco mais refinados que a questão anterior, o que, segundo os indicadores propostos por (Nadler Lins, 2000), tornam a questão mais difícil. Esta questão quer saber qual é mais provável; o intervalo  $[\theta_5, \theta_6]$  ou  $[\theta_{12}, \theta_{15}]$ . O primeiro intervalo corresponde a  $\pi_6$  e o segundo intervalo corresponde ao somatório  $\pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{15}$ .

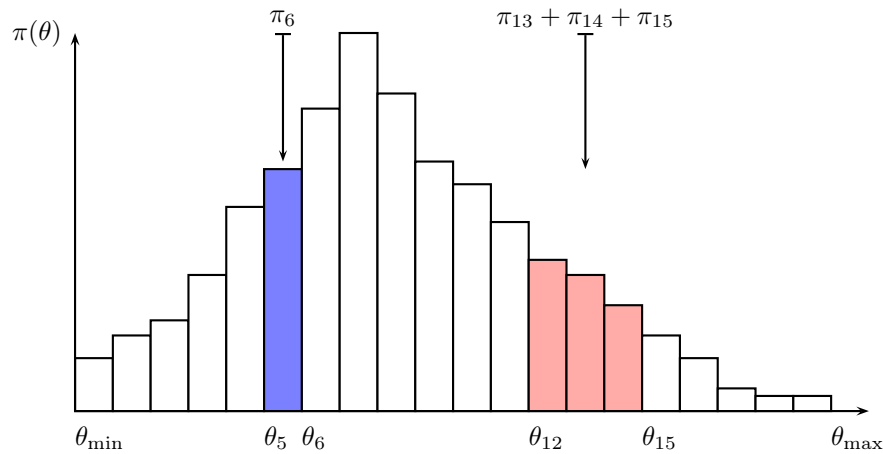


Figura 4.2: Exemplo de uma questão do protocolo de educação.

O método foi estendido para o caso de não se ter variável aleatória em Silva (2002) e Campello de Souza (2007b). Neste caso, tem-se um conjunto finito de categorias  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , onde  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , não é nem um número nem representa um intervalo como no caso contínuo explicado anteriormente. Em outras palavras,  $\theta$  não pode ser uma variável aleatória.

O *input* do especialista consiste então em responder um certo número de comparações entre duas probabilidades, uma de cada evento e assim expressar a relação de chances desses eventos. Dois problemas de programação linear são propostos:

$$\text{Max}_{\pi_j} (\text{Min}) \sum_{j=1}^{2n} c_j \pi_j \quad (4.2.1)$$

sujeito a:

$$a_{jk} \sum_{i=0}^k \pi_{j+i} - a_{lm} \sum_{i=0}^m \pi_{l+i} \leq b_s \quad (4.2.2)$$

$$\alpha_j \pi_j \leq \pi_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n - 1, \quad \alpha_j > 0 \quad (4.2.3)$$

$$\beta_j \pi_{j+1} \leq \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n - 1, \quad \beta_j > 0 \quad (4.2.4)$$

$$\pi_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \pi_j = 1 \quad (4.2.6)$$

Seja  $q$  o número de questões postas ao especialistas, então ter-se-á  $q$  restrições semelhantes a equação 4.2.2, onde para cada restrição as desigualdades podem ser  $\leq b_s$  ou  $\geq b_s$ , dependendo da resposta do especialista,  $a_{jk} > 0$ ,  $a_{lm} > 0$ , e  $j + k < l$  para evitar sobreposição entre dois intervalos.

Uma vez que o especialista respondeu consistentemente a um certo número de questões, as restrições envolvendo  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  servem para evitar que a distribuição de probabilidade, por exemplo, apresente algum  $\pi_j$  com probabilidade alta e seus vizinhos ( $\pi_{j-1}$  e  $\pi_{j+1}$ ) com probabilidades muito baixas. Isto significaria que o especialista estaria dando muita informação que não é garantida pela resposta. A idéia é que, além da informação advinda das respostas, não se deve atribuir nenhuma outra organização na informação, ou seja, a entropia de  $\pi$  deve ser máxima.

Há muitas possibilidades para escolha de  $c_j$ 's. Caso se deseje obter todas as distribuições de probabilidade consistentes com as respostas do especialista, todos os vértices do conjunto viável terão que ser obtidos. Em seguida, basta considerar todas as combinações convexas desses vértices. Por outro lado, se o objetivo for obter distribuições de probabilidade com menor valor esperado para  $\theta$  (problema de maximização) e distribuições com máximo valor esperado para  $\theta$  (problema de minimização) deve-se fazer

$$c_j = 2n - j + 1 \quad (4.2.7)$$

Vai-se agora provar que maximizar

$$\sum_{j=1}^{2n} (2n - j + 1) \pi_j \quad (4.2.8)$$

é o mesmo que maximizar

$$\frac{\theta_1 + \theta_{2n}}{2} - \sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j \quad (4.2.9)$$

no que diz respeito a escolha de  $\pi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ . Como os valores de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}$  estão em progressão aritmética, tem-se  $\theta_{j+1} - \theta_j = a$  para  $j = 1, 2, \dots, 2n - 1$  onde  $a > 0$ . Então

$$\sum_{j=1}^{2n} (2n - j + 1) \pi_j \longleftrightarrow \frac{\theta_1 + \theta_{2n}}{2} - \sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_{2n}}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_1 + (2n - 1) a}{2} = \theta_1 + \frac{2n - 1}{2} a$$

Então

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1 + \theta_{2n}}{2} - \sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j = \\ &= \theta_1 + \frac{2n - 1}{2} a - \theta_1 \pi_1 - (\theta_1 + a) \pi_2 - \dots - (\theta_1 + (2n - 1) a) \pi_{2n} \\ &= \theta_1 - \theta_1 \left( \sum_{j=1}^{2n} \pi_j \right) + \frac{2n - 1}{2} a - \sum_{j=2}^{2n} (j - 1) a \pi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2n-1}{2}a - \sum_{j=2}^{2n} (j-1)a\pi_j \\
 &= a \left[ \frac{2n-1}{2} - \sum_{j=2}^{2n} (j-1)\pi_j \right] \\
 &= a \left[ \frac{2n-1}{2} - \left( \left( \sum_{j=1}^{2n} j\pi_j \right) - 1 \right) \right] \\
 \frac{\theta_1 + \theta_{2n}}{2} - \sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j &= a \left[ \frac{2n+1}{2} - \sum_{j=1}^{2n} j\pi_j \right]
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{2n} (2n-j+1)\pi_j = 2n+1 - \sum_{j=1}^{2n} j\pi_j$$

Vê-se então que maximizar

$$\sum (2n-j+1)\pi_j$$

é a mesma coisa que minimizar

$$\sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j$$

É claro que diferentes  $c'_j$ s produzirão diferentes resultados.

O conjunto de restrições garante que  $\{\pi_j\}_{j=1}^{2n}$  é de fato uma distribuição de probabilidade, tanto para o problema de maximização quanto para o problema de minimização. Se os  $c'_j$ s são definidos pela expressão 4.2.7, toda combinação convexa das duas soluções (uma correspondendo a distribuição com menor valor esperado para  $\theta$ , isto é, o problema de maximização e outra distribuição com máximo valor esperado para  $\theta$ , isto é o problema de minimização) será consistente com as respostas do especialista. Este conjunto convexo de distribuições de probabilidade também pode ser usado em inferência ou procedimentos de decisão. É claro que esta família, em princípio, é menor do que o conjunto de todas as possíveis distribuições de probabilidade compatíveis com a resposta do especialista. Especificar este conjunto não é uma tarefa simples. O “tamanho” da família de distribuição pode ser estimada pelo volume do conjunto viável do problema de otimização.

Poder-se-ia usar o mesmo conjunto viável, mas com uma função objetivo diferente. Por exemplo, pode-se usar a entropia de uma distribuição como funcional objetivo que é definida por



$$H = - \sum_{j=1}^{2n} \pi_j \log \pi_j$$

o problema de otimização neste caso passa a ser de programação não linear, mas o raciocínio é o mesmo.

Tipicamente a solução dos problemas de programação linear são diferentes e serão obtidas duas funções de distribuição como mostrado na Figura 4.3.

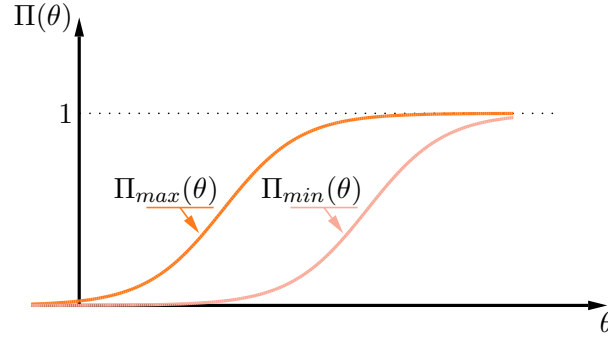


Figura 4.3: Conjunto convexo das Distribuições de Probabilidade.

Se o número de perguntas do questionário for pequeno, umas poucas perguntas, não se vai obter muita informação sobre o parâmetro. Uma distribuição vai ficar muito afastada da outra. Por outro lado, se o número de perguntas for muito elevado, provavelmente o especialista não terá paciência para responder a todas e se o fizer é maior a chance dele cometer erros. Há que se pensar então num número adequado. Tem-se feito uma série de eduções usando um questionário com 42 perguntas no qual o intervalo  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$  foi dividido em 20 subintervalos e os resultados encontram-se em (Silva, 2002; Bezerra, 2003; Moraes, 2003). Em (Nadler Lins, 2000; Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) e (Campello de Souza, 2007b) são apresentados e estudados detalhadamente indicadores de detalhamento da questão e do intervalo elementar. Esses indicadores permitiram uma sistemática de elaboração de questionários de educação de conhecimento de especialistas que sejam de dificuldade progressiva e tenham simetria, de modo a serem receptivos a qualquer forma de distribuição de probabilidade. Todos os detalhes deste método assim como os de um método que também usa a programação linear para a educação da função utilidade podem ser encontrados em (Campello de Souza, 2007b).

Sejam  $\Pi_{max}$  e  $\Pi_{min}$  funções de distribuição em  $\theta$ . Estas distribuições são construídas a partir da solução dos respectivos problemas de programação linear e qualquer combinação delas será compatível com as respostas dadas pelo especialista. Note que uma área será formada entre as duas curvas

quando se constrói o gráfico das mesmas. A razão entre a área formada entre as curvas e a área total  $[\theta_{max} - \theta_{min}] \times 1$  do retângulo foi definido em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001; Campello de Souza, 2007b) como a **vagueza**,  $V$ , do especialista. Isto é,

$$V = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} |\Pi_{max}(\theta_j) - \Pi_{min}(\theta_j)| \quad (4.2.10)$$

A vagueza será mínima se o especialista responder consistentemente todas as questões, ou seja, o conjunto viável do problema de programação linear não é vazio. Caso o especialista não responda nenhuma questão, ele será totalmente consistente, e sua vagueza será máxima ( $V = 1$ ). Consistência, portanto, neste contexto, não significa “nitidez” da família de distribuições de probabilidade eduzidas.

A **precisão** do especialista será definida por

$$P = 1 - V \quad (4.2.11)$$

A partir dessa relação, quanto mais vago é o especialista, menor será sua precisão.

Caso se disponha de dois corpos de evidência, sejam eles provenientes de dois especialistas, ou um especialista e uma base de dados ou ainda duas bases de dados, existirá dois conjuntos de vagueza como mostrado na Figura 4.3. A área da interseção desses dois conjuntos dividida pela área da união dos mesmos é definida como a concordância,  $C$ , dos corpos de evidência. O conceito é ilustrado na Figura 4.4. Ainda quando se está trabalhando com mais de um corpo de evidência estes podem discordar sobre a probabilidade de ocorrência de determinados eventos. Esta discordância será captada pelo modelo quando as faixas, correspondentes aos dois ou mais especialistas, não se superpõe e dessa forma um “vácuo” será formado entre elas. O conflito,  $K$ , entre será definido pela área total do “vácuo” dividida pela área total do retângulo. Outro construto apresentado em Campello de Souza (2007b) que surge quando se trabalha com mais de um especialista é a vagueza global  $V_G$  que é definida como a área da união das faixas dividida pela área do retângulo.

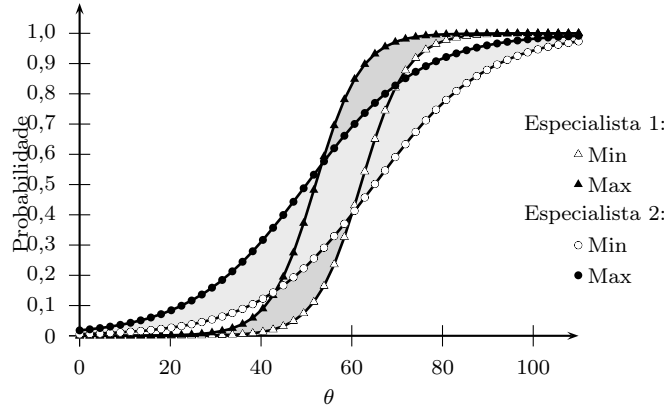


Figura 4.4: Dois Especialistas.

### 4.3 O *Inferential Skill*

O *inferential skill* é um indicador elaborado para aferir a “habilidade” ou “traquejo” inferencial de um especialista ou sistema inferencial. Na elaboração de tal indicador são levados em consideração três parâmetros:

1. A diferença entre as médias das distribuições máxima e mínima ( $\Delta\mu$ ), normalizadas por  $\Delta\mu_{max}$ , que é o valor máximo de  $\Delta\mu$ ;
2. A fração de questões respondidas consistentemente ( $R$ ), (número de questões respondidas consistentemente dividido pelo total de perguntas do questionário não esquecendo que, consistência esta relacionada ao conjunto viável);
3. A vagueza ( $V$ ).

Um indicador global,  $S$ , do *inferential skill* seria então:

$$S \triangleq \frac{\Delta\mu}{\Delta\mu_{max}} + R - V \quad (4.3.1)$$

Se o especialista for bom, a escassez de evidência disponível (a entrada de dados e fatos para ele), será refletida numa vagueza compatível ( $V$ ) e a diferença entre as médias das distribuições também compatível  $\left(\frac{\Delta\mu}{\Delta\mu_{max}}\right)$ . Isto posto, quanto maior o valor de  $R$  melhor será o especialista. Se o especialista não for tão bom assim,  $R$  tende a ser menor, indicando uma falsa nitidez diante da escassez de evidência. Se o especialista fixa um valor em sua mente, por exemplo, a vagueza em torno desse

ponto tende a ser menor, o que irá contribuir para um decrescimento da vagueza global. Neste caso, também,  $\left(\frac{\Delta\mu}{\Delta\mu_{max}}\right)$  tenderá a ser menor. Isto é um indicador que o especialista não é tão bom.

O melhor *inferential skill* de um especialista corresponde à melhor “conexão” entre a escassez dos *inputs* e as afirmações probabilísticas que ele faz a partir desses *inputs*. Numa analogia com a teoria de informação de Shannon, é como se o *inferential skill* fosse a capacidade de canal.

#### 4.3.1 Aplicação Numérica

Um intervalo de 0% a 100% ( ou seja  $\theta_{min} = 0\%$  e  $\theta_{max} = 100\%$ ) foi particionado em 20 intervalos elementares e 42 questões, seguindo as orientações presentes em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001), foram especificadas. Os 20 subintervalos de  $\theta$  são:  $[0, 5), [5, 10), [10, 15), \dots, [90, 95), [95, 100]$ , todos em percentual. Algumas das questões são mostradas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Questionário de Educação.

	$[I_A; I_B]$	1 0	$[I_A; I_B]$
1	$[0 - 50]$		$[50 - 100]$
2	$[0 - 40]$		$[40 - 100]$
3	$[0 - 60]$		$[60 - 100]$
4	$[0 - 65]$		$[65 - 100]$
5	$[0 - 35]$		$[35 - 100]$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
42	$[0 - 10]$		$[90 - 100]$

A primeira pergunta do questionário, por exemplo, é a seguinte: Qual é mais provável, que a probabilidade de ocorrência de  $\theta$  esteja entre 0 e 50% ou entre 50% e 100%? Se o especialista sentir que é mais provável que a probabilidade de ocorrência de  $\theta$  se situe no primeiro intervalo, ele deve colocar 1 na coluna do meio. Caso contrário deve colocar 0 na respectiva coluna.

Para responder ao questionário foram usados especialistas fictícios, gerados a partir de uma base de dados. Buscou-se gerar esses especialistas de tal forma que os mesmo representassem o perfil de alguns especialistas. Foram utilizados três especialistas fictícios distintos.

O primeiro especialista ( $E_1$ ) foi representado por uma distribuição normal com 1000 observações e média e variância tais que fosse possível atribuir probabilidade a todos os 20  $\theta$ 's. Esse seria um especialista mais experiente, capaz de atribuir probabilidade a todos os eventos. Mais uma vez com base nos dados da amostra, gerada segundo a normal citada anteriormente, calculou-se a probabilidade de cada um dos intervalos elementares e em seguida respondeu-se ao questionário.

Para representar o segundo especialista ( $E_2$ ), escolheu-se uma distribuição uniforme com 1000 observações. Esse seria o especialista que não conhece bem o fenômeno que se está querendo estudar. Sendo assim, o mesmo atribui igual probabilidade a todos os eventos. Com base nesses dados calculou-se a probabilidade de ocorrência de cada um dos 20 intervalos elementares. Com essa informação o questionário foi respondido.

Para representar o terceiro especialista ( $E_3$ ), mais uma vez, foi utilizada uma distribuição normal com média 0,5 mas, agora, com uma variância bem menor que a do primeiro especialista. Pode-se interpretar esse especialista como aquele que ancora em um valor, ou seja, ele acha que sabe com certeza qual a probabilidade de ocorrência de  $\theta$ ; esse não seria um especialista bom. Em outras palavras, esta-se tentando representar o fenômeno da ancoragem psicológica (Kahneman *et al.*, 1982).

O primeiro especialista foi consistente em todas as questões e obteve assim uma vagueza de 13,33%. O segundo especialista conseguiu responder consistentemente apenas 16 das 42 questões, obteve uma vagueza de 37,5%. O terceiro especialista respondeu apenas 7 das 42 questões consistentemente, obtendo uma vagueza de 45%. Os resultados dos problemas de programação linear são mostrados nas figuras a seguir.

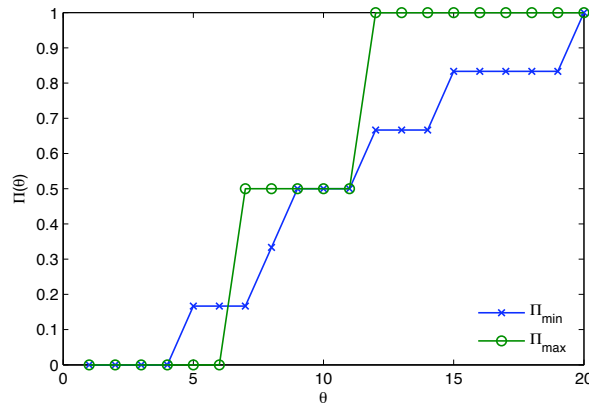


Figura 4.5: Resultado da Educação do Especialista  $E_1$ .

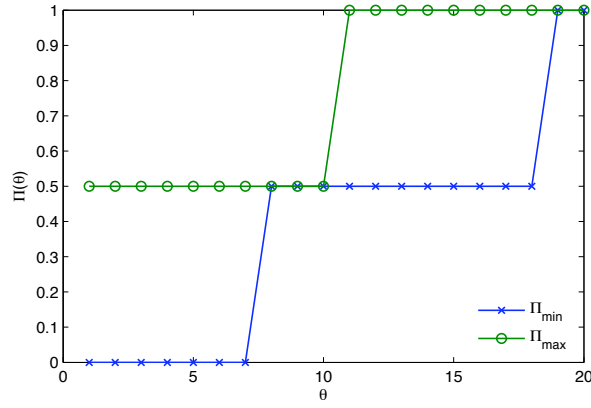


Figura 4.6: Resultado da Educação do Especialista  $E_2$ .

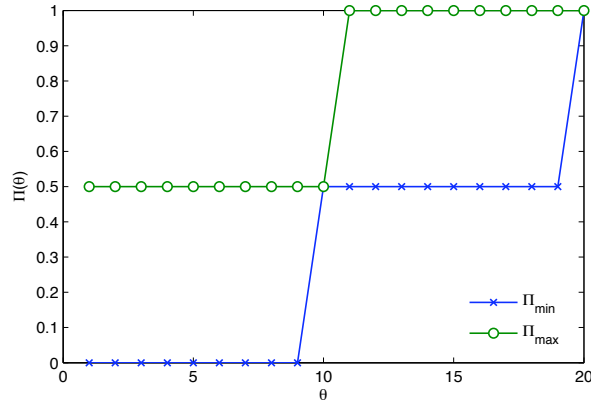


Figura 4.7: Resultado da Educação do Especialista  $E_3$ .

Com base nessas informações, calculou-se o inferencial skill para todos os especialistas. Os especialistas  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  obtiveram respectivamente os seguintes valores para o inferencial skill (S), 0,97, 0,38 e 0,17. Como era de se esperar, o primeiro especialista foi o melhor dentre os três, pois o mesmo apresentou um maior valor para o inferencial skill, sua vagueza foi pequena e ele conseguiu responder a todas as questões. O terceiro especialista foi o pior dentre os três. O mesmo conseguiu responder consistentemente a apenas 7 questões com isso sua vagueza foi alta e, conseqüentemente, seu inferencial skill foi o mais baixo dos três. O segundo melhor especialista foi  $E_2$ , que respondeu a uma quantidade de questões intermediária entre os dois outros especialistas e também teve uma vagueza intermediária entre os outros dois especialistas. Um resumo dos resultados pode ser visto na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Resultados.

Especialista	R	V	S
$E_1$	42	13,33%	0,97
$E_2$	16	37,5%	0,38
$E_3$	7	45,5 %	0,17

## 4.4 Aplicações do Questionário

### 4.4.1 Experimento 1

O experimento consiste na educação de famílias de distribuição de probabilidade sobre a proporção de bolas pretas dentro de um recipiente transparente contendo unicamente bolas brancas e pretas.

Para realizar o experimento, primeiramente foi preparado um recipiente contendo bolas brancas e pretas, em proporções desconhecidas aos indivíduos que irão participar do experimento. Em seguida, um filme deste recipiente foi feito de tal forma que fosse permitida uma inspeção visual do manuseio da urna sobre diversos ângulos. Depois de assistir ao filme o indivíduo responde ao questionário, a respeito da proporção de bolas pretas na urna.

Ao se observar a urna percebe-se claramente que a proporção de bolas pretas é maior que zero e menor que 100%, uma vez que existem bolas brancas na urna. Desta forma, achou-se conveniente utilizar o intervalo total de 10% a 90% que foi particionado em 20 intervalos elementares e 42 questões foram construídas seguindo as orientações encontradas em Nadler Lins (2000), Nadler Lins e Campello de Souza (2001), Campello de Souza (2007). O questionário encontra-se na Tabela 4.4 a seguir:

Tabela 4.4: Questionário de educação da distribuição *a priori*.

	%	1 0	%		%	1 0	%
1	[10 – 50]		[50 – 90]	22	[10 – 50]		[70 – 90]
2	[10 – 42]		[42 – 90]	23	[10 – 30]		[30 – 70]
3	[10 – 58]		[58 – 90]	24	[10 – 46]		[50 – 70]
4	[10 – 62]		[62 – 90]	25	[30 – 50]		[54 – 90]
5	[10 – 38]		[38 – 90]	26	[10 – 42]		[50 – 70]
6	[10 – 66]		[66 – 90]	27	[30 – 50]		[58 – 90]
7	[10 – 34]		[34 – 90]	28	[10 – 42]		[42 – 58]
8	[10 – 46]		[54 – 90]	29	[42 – 58]		[58 – 90]
9	[18 – 50]		[50 – 90]	30	[42 – 74]		[74 – 90]
10	[10 – 50]		[50 – 82]	31	[10 – 26]		[42 – 74]
11	[10 – 30]		[30 – 90]	32	[30 – 50]		[70 – 90]
12	[10 – 70]		[70 – 90]	33	[10 – 30]		[30 – 50]
13	[14 – 46]		[54 – 90]	34	[30 – 50]		[50 – 70]
14	[10 – 46]		[54 – 86]	35	[10 – 30]		[50 – 70]
15	[10 – 42]		[58 – 90]	36	[10 – 30]		[70 – 90]
16	[18 – 46]		[54 – 86]	37	[50 – 70]		[70 – 90]
17	[14 – 46]		[54 – 82]	38	[34 – 50]		[50 – 66]
18	[30 – 70]		[70 – 90]	39	[10 – 18]		[66 – 90]
19	[10 – 50]		[50 – 70]	40	[10 – 34]		[82 – 90]
20	[30 – 50]		[50 – 90]	41	[26 – 34]		[66 – 74]
21	[10 – 30]		[50 – 90]	42	[10 – 18]		[82 – 90]

Para responder o questionário o indivíduo deve marcar **1** se acha mais verossímil que o percentual de **bolas pretas** esteja na faixa apresentada no lado esquerdo ou marcar **0** caso contrário.

O experimento foi aplicado a dois grupos diferentes. O primeiro grupo é formado por 70 pessoas que participavam da Escola de Apoio a Decisão do Recife (REDs) que ocorreu em maio de 2007 na Universidade Federal de Pernambuco (grupo I). Os indivíduos desse grupo apresentam níveis de formação diversas, há desde alunos da graduação até indivíduos com doutorado completo. O segundo grupo é formado por 21 alunos da disciplina sistemas probabilísticos da graduação em engenharia eletrônica da Universidade Federal de Pernambuco (grupo II). Para ambos os grupos as urnas apresentadas foram as mesmas.

A tabela 4.5 mostra as estatísticas descritivas da quantidade de questões respondidas ( $R$ ), precisão ( $P$ ), vagueza ( $V$ ), inferencial skill ( $S$ ) e as médias máxima ( $Med_{max}$ ), mínima ( $Med_{min}$ ) e a média entre as duas. Lembrando que, tais médias foram calculadas usando-se as expressões  $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_{j(max)}$  e  $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_{j(min)}$ .



Tabela 4.5: Estatística descritiva dos construtos.

		Média	Lim. de Conf. Inferior {95%}	Lim. de Conf. Superior {95%}	Mediana	Min	Máx	Desvio Padrão
Grupo I	R	19,3429	17,1150	21,5707	23,0000	2,0000	39,0000	9,3435
	P	0,7384	0,7100	0,7669	0,7407	0,4468	0,9643	0,1192
	V	0,2616	0,2331	0,2900	0,2593	0,0357	0,5533	0,1192
	S	0,4603	0,4073	0,5134	0,5476	0,0476	0,9274	0,2224
	$Med_{min}$	40,0346	37,4671	42,6020	42,0094	13,0007	51,0725	10,7675
	$Med_{max}$	60,7300	58,8363	62,6237	59,4132	42,7426	83,0783	7,9420
	Média	50,3823	48,4354	52,3292	51,0057	27,8717	64,1941	8,1652
Grupo II	R	23,38095	18,73111	28,03080	25,00000	2,00000	42,00000	10,21507
	P	0,78553	0,74205	0,82900	0,75163	0,65099	0,97349	0,09552
	V	0,21447	0,17100	0,25795	0,24837	0,02651	0,34901	0,09552
	S	0,55590	0,44537	0,66642	0,59524	0,04762	1,00000	0,24281
	$Med_{min}$	41,88568	38,71426	45,05711	43,14056	31,43686	53,47720	6,96718
	$Med_{max}$	58,89039	56,32867	61,45212	58,16360	46,70680	68,60788	5,62776
	Média	50,38804	48,09924	52,67684	50,31042	41,89556	61,04254	5,02818

#### 4.4.2 Estimativa da Área da Figura

Um outro experimento foi feito com um grupo de 24 alunos da disciplina sistemas probabilísticos da graduação em engenharia eletrônica da Universidade Federal de Pernambuco. O experimento está baseado na educação de distribuições de probabilidade sobre a área da Figura 4.8.

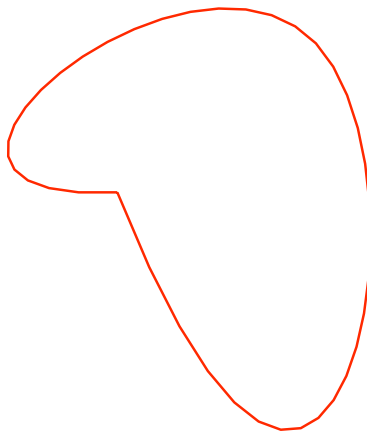


Figura 4.8: Figura que teve a área estimada pelo método de educação.

A Figura 4.8 foi construída com uma área de  $32cm^2$ . Sendo assim escolheu-se os valores  $25cm^2$  e  $45cm^2$  para serem usados como limites do intervalo total que foi então particionado em 20 intervalos elementares e 42 questões foram construídas seguindo as orientações de Nadler Lins (2000), Nadler Lins e Campello de Souza (2001) e Campello de Souza (2007). O questionário apresentado aos alunos encontra-se na Tabela 4.6. Para responder o questionário o indivíduo deve marcar **1** se acha mais verossímil que a **área da figura em  $cm^2$**  esteja na faixa apresentada do lado esquerdo ou **0** caso contrário.

Tabela 4.6: Questionário de educação da área da figura.

	$cm^2$	1 0	$cm^2$		$cm^2$	1 0	$cm^2$
1	[25 – 35]		[35 – 45]	22	[25 – 35]		[40 – 45]
2	[25 – 33]		[33 – 45]	23	[25 – 30]		[30 – 40]
3	[25 – 37]		[37 – 45]	24	[25 – 34]		[35 – 40]
4	[25 – 38]		[38 – 45]	25	[30 – 35]		[36 – 45]
5	[25 – 32]		[32 – 45]	26	[25 – 33]		[35 – 40]
6	[25 – 39]		[39 – 45]	27	[30 – 35]		[37 – 45]
7	[25 – 31]		[31 – 45]	28	[25 – 33]		[33 – 37]
8	[25 – 34]		[36 – 45]	29	[33 – 37]		[37 – 45]
9	[27 – 35]		[35 – 45]	30	[33 – 41]		[41 – 45]
10	[25 – 35]		[35 – 43]	31	[25 – 29]		[33 – 41]
11	[25 – 30]		[30 – 45]	32	[30 – 35]		[40 – 45]
12	[25 – 40]		[40 – 45]	33	[25 – 30]		[30 – 35]
13	[26 – 34]		[36 – 45]	34	[30 – 35]		[35 – 40]
14	[25 – 34]		[36 – 44]	35	[25 – 30]		[35 – 40]
15	[25 – 33]		[37 – 45]	36	[25 – 30]		[40 – 45]
16	[27 – 34]		[36 – 44]	37	[35 – 40]		[40 – 45]
17	[26 – 34]		[36 – 43]	38	[31 – 35]		[35 – 39]
18	[30 – 40]		[40 – 45]	39	[25 – 27]		[39 – 45]
19	[25 – 35]		[35 – 40]	40	[25 – 31]		[43 – 45]
20	[30 – 35]		[35 – 45]	41	[29 – 31]		[39 – 41]
21	[25 – 30]		[35 – 45]	42	[25 – 27]		[43 – 45]

A Tabela 4.7 mostra as estatísticas descritivas da quantidade de questões respondidas ( $R$ ), precisão ( $P$ ), vagueza ( $V$ ), inferencial skill ( $S$ ) e as médias, mínima, máxima e média das duas anteriores. Pode-se ver que a média das médias fornecidas pelo modelo foi de  $32,47cm^2$  e sabe-se que a figura foi contruída com área de  $32cm^2$

Tabela 4.7: Estatística descritiva dos construtos para o experimento da área da figura.

	Média	Lim. de Conf. Inferior {95%}	Lim. de Conf. Superior {95%}	Mediana	Min	Máx	Desvio Padrão
$R$	19,2917	17,5867	20,9966	20,0000	9,0000	27,0000	4,0376
$P$	0,6861	0,6482	0,7240	0,6884	0,5244	0,8089	0,0898
$V$	0,3139	0,2760	0,3518	0,3116	0,1911	0,4756	0,0898
$S$	0,4592	0,4186	0,4997	0,4762	0,2136	0,6399	0,0960
$Med_{min}$	29,3741	28,1142	30,6339	30,5753	25,7507	33,8079	2,9836
$Med_{max}$	35,5595	34,7467	36,3724	35,0453	33,0909	39,8707	1,9250
Média	32,4668	31,4644	33,4692	32,9324	29,4208	36,8393	2,3738

#### 4.4.3 Estimativa do Comprimento da Linha

Um outro experimento foi feito com o mesmo grupo de 24 alunos da disciplina sistema probabilístico da graduação em engenharia eletrônica. O experimento está baseado na educação de distribuições de probabilidade sobre o comprimento da linha da Figura 4.9.

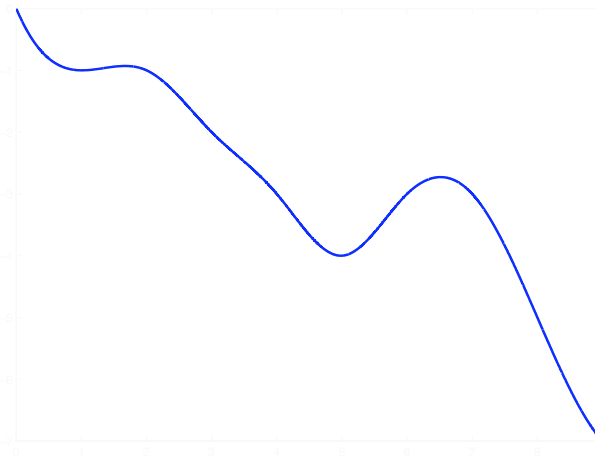


Figura 4.9: Figura que teve o comprimento estimado pelo método de educação.

A Figura 4.9 foi construída com comprimento de  $13,9cm$ . Sendo assim escolheu-se os valores  $6cm$  e  $20cm$  para serem usados como limites do intervalo total que foi então particionado em 20 intervalos elementares e 42 questões foram construídas seguindo as orientações de Nadler Lins (2000), Nadler

Lins e Campello de Souza (2001) e Campello de Souza (2007). O questionário apresentado aos alunos encontra-se na Tabela 4.8. Para responder o questionário o indivíduo deve marcar **1** se acha mais verossímil que a **comprimento da figura em cm** esteja na faixa apresentada do lado esquerdo ou **0** caso contrário.

Tabela 4.8: Questionário de educação da comprimento da linha.

	<i>cm</i>	1 0	<i>cm</i>		<i>cm</i>	1 0	<i>cm</i>
1	[6 – 13]		[13 – 20]	22	[6 – 13]		[16, 5 – 20]
2	[6 – 11, 6]		[11, 6 – 20]	23	[6 – 9, 5]		[9, 5 – 16, 5]
3	[6 – 14, 4]		[14, 4 – 20]	24	[6 – 12, 3]		[13 – 16, 5]
4	[6 – 15, 1]		[15, 1 – 20]	25	[9, 5 – 13]		[13, 7 – 20]
5	[6 – 10, 9]		[10, 9 – 20]	26	[6 – 11, 6]		[13 – 16, 5]
6	[6 – 15, 8]		[15, 8 – 20]	27	[9, 5 – 13]		[14, 4 – 20]
7	[6 – 10, 2]		[10, 2 – 20]	28	[6 – 11, 6]		[11, 6 – 14, 4]
8	[6 – 12, 3]		[13, 7 – 20]	29	[11, 6 – 14, 4]		[14, 4 – 20]
9	[7, 4 – 13]		[13 – 20]	30	[11, 6 – 17, 2]		[17, 2 – 20]
10	[6 – 13]		[13 – 18, 6]	31	[6 – 8, 8]		[11, 6 – 17, 2]
11	[6 – 9, 5]		[9, 5 – 20]	32	[9, 5 – 13]		[16, 5 – 20]
12	[6 – 16, 5]		[16, 5 – 20]	33	[6 – 9, 5]		[9, 5 – 13]
13	[6, 7 – 12, 3]		[13, 7 – 20]	34	[9, 5 – 13]		[13 – 16, 5]
14	[6 – 12, 3]		[13, 7 – 19, 3]	35	[6 – 9, 5]		[13 – 16, 5]
15	[6 – 11, 6]		[14, 4 – 20]	36	[6 – 9, 5]		[16, 5 – 20]
16	[7, 4 – 12, 3]		[13, 7 – 19, 3]	37	[13 – 16, 5]		[16, 5 – 20]
17	[6, 7 – 12, 3]		[13, 7 – 18, 6]	38	[10, 2 – 13]		[13 – 15, 8]
18	[9, 5 – 16, 5]		[16, 5 – 20]	39	[6 – 7, 4]		[15, 8 – 20]
19	[6 – 13]		[13 – 16, 5]	40	[6 – 10, 2]		[18, 6 – 20]
20	[9, 5 – 13]		[13 – 20]	41	[8, 8 – 10, 2]		[15, 8 – 17, 2]
21	[6 – 9, 5]		[13 – 20]	42	[6 – 7, 4]		[18, 6 – 20]

A Tabela 4.9 mostra as estatísticas descritivas da quantidade de questões respondidas ( $R$ ), precisão ( $P$ ), vagueza ( $V$ ), inferencial skill ( $S$ ) e as médias máxima, mínima e a média de ambas. Pode-se ver que a média das médias fornecidas pelo modelo foi de 12,8cm e sabe-se que a figura foi contruída com comprimento de 13,9cm

Tabela 4.9: Estatística descritiva dos construtos para o experimento do comprimento da figura.

	Média	Lim. de Conf. Inferior {95%}	Lim. de Conf. Superior {95%}	Mediana	Min	Máx	Desvio Padrão
$R$	16,00000	13,75867	18,24133	16,00000	6,00000	26,00000	5,307910
$P$	0,71653	0,67909	0,75396	0,69021	0,52119	0,86458	0,088659
$V$	0,28347	0,24604	0,32091	0,30979	0,13543	0,47881	0,088659
$S$	0,38045	0,32719	0,43371	0,38095	0,14286	0,61905	0,126131
$Med_{Min}$	10,82437	10,10011	11,54864	11,33336	6,52522	13,60340	1,715194
$Med_{Max}$	14,70355	14,15591	15,25120	14,64345	12,34749	18,78854	1,296931
$Media$	12,76396	12,17921	13,34871	12,74331	9,43635	15,90776	1,384803

#### 4.4.4 Aplicação em Cardiologia

Em Silva (2002) o protocolo de educação foi aplicado a dois cardiologistas com o intuito de medir o seu conhecimento *a priori* a respeito da pressão sistólica (PS) e pressão diastólica (PD) de um indivíduo. Neste trabalho estendeu-se o experimento utilizando o conceito de pressão de pulso e os especialistas foram tiveram sua habilidade inferencial comparada por meio do *inferential skill*. O primeiro médico é um jovem cardiologista (especialista 1), um estudante de mestrado em medicina. O segundo médico é um cardiologista experiente (especialista 2), professor de cardiologia do Departamento de Medicina Clínica da Universidade Federal de Pernambuco. Aos dois especialistas foi dada a mesma evidência no que diz respeito às características de um indivíduo fictício:

*Sexo masculino, 46 anos de idade, índice de massa corpórea de 27 kg/m<sup>2</sup>, não é fumante, é policial com segundo grau completo, não tem queixas de saúde e foi escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da sua cidade com características similares.*

As perguntas do questionário de educação dizem respeito as pressões sistólicas (PS) e diastólica (PD) desse indivíduo. O protocolo de educação segue a mesma estrutura do protocolo presente em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001). Para a pressão sistólica foi estabelecido um valor mínimo de 90 mm Hg e um valor máximo de 190 mm Hg, e para a pressão diastólica (PD) também foram estabelecidos valores mínimo e máximos de 40 mm Hg e 100 mm Hg respectivamente.

Diferentemente da educação apresentada em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001), onde apenas a PS foi considerada, no presente trabalho o desconhecido estado da natureza é um vetor no subconjunto do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Para aplicar a programação linear baseada no método de educação, o retângulo  $PS \times PD$  foi dividido em 20 células denominadas  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 20$ , como mostrado na Figura 4.10. Por exemplo,  $\theta_{10} = [170 - 190, 55 - 70]$ .

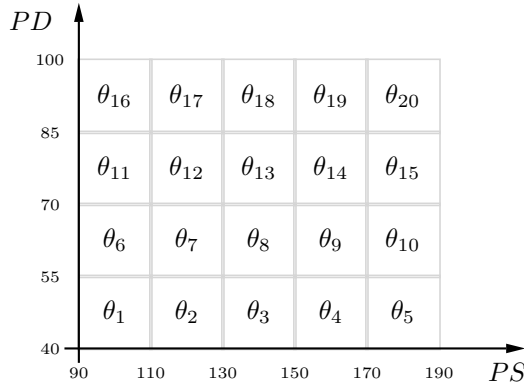


Figura 4.10: Estado da Natureza

Pode-se notar que os  $\theta_j$ 's não são naturalmente ordenados como acontece no caso unidimensional.

Para atribuição dos  $c_j$ 's, foi utilizada a noção de pressão de pulso (PP) que é a diferença entre a PS e a PD. É conhecido na fisiologia que a pressão sistólica (PS) é sempre maior que a pressão diastólica (PD). Em cada célula  $\theta_j$  ( com exceção do  $\theta_{16}$  ) o valor da PS é sempre maior do que o valor da PD. Essa é uma condição lógica necessária para a dinâmica cardiovascular. Note que a pressão de pulso é uma variável aleatória unidimensional e naturalmente ordenável e cada  $\theta_j$  aqui corresponde à média da pressão de pulso. A aplicação que está sendo feita não deve ser entendida como uma tentativa de generalizar o método apresentado em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) para o caso bidimensional. O fato é que, neste contexto, os médicos pensam melhor em termos de ambas as pressões, PS e PD. Quando se reduz o problema para o caso de uma variável, de fato está-se trabalhando essencialmente com o mesmo caso unidimensional presente em (Nadler Lins & Campello de Souza, 2001) e (Nadler Lins, 2000).

Ao reduzir-se a variável bidimensional (PS e PD) para uma variável unidimensional (PP) deve-se mencionar que os médicos estão cientes que existe essa correlação entre a PS e a PD e os mesmos levam isso em consideração quando respondem ao questionário (além disso essa correlação varia com a idade). Além disso, a PP é um importante indicador da saúde cardiovascular. A pressão de pulso

(PP) foi discretizada tomando o valor médio da PD e da PS por exemplo,  $\theta_8$  corresponde a pressão de pulso  $140.0 - 62.5 = 77.5$  mm Hg (veja Figura 4.10).

Os cardiologistas responderam ao questionário independentemente um do outro. Este experimento foi realizado e seus resultados foram analisados em (Silva, 2002), onde são apresentadas muitas aplicações de teoria da decisão em cardiologia.

Algumas das questões apresentadas aos cardiologistas são mostradas na Tabela 4.10, onde cada pergunta são comparações de probabilidade da *PS* e da *PD* estarem em um ou outro de dois grupos, os quais são formados por intervalos da *PS* e *PD*. A primeira pergunta, por exemplo, é a seguinte:

Qual é mais provável, que a *PS* deste indivíduo esteja entre 90mmHg e 190mmHg e *PD* entre 40mmHg e 70mmHg ou que a *PS* esteja entre 90mmHg e 190mmHg e *PD* entre 70mmHg e 100mmHg?

Caso o cardiologista ache que é mais provável que as pressões sistólica e diastólica encontrem-se no primeiro grupo, ele deve colocar 1 na coluna do meio e, caso ache que as pressões encontram-se no segundo grupo deverá colocar 0 na coluna do meio.

Tabela 4.10: Questionário de Educação.

	[PS, PD]	1 0	[PS, PD]
1	[90 – 190, 40 – 70]		[90 – 190, 70 – 100]
2	[90 – 150, 40 – 100]		[150 – 190, 40 – 100]
3	[90 – 130, 40 – 100]		[130 – 190, 40 – 100]
4	[90 – 190, 40 – 70]		[110 – 190, 70 – 100]
5	[90 – 170, 40 – 70]		[90 – 190, 70 – 100]
⋮	⋮		⋮
42	[110 – 130, 55 – 70]		[150 – 170, 70 – 85]

## Resultados da Aplicação

As evidências postas a disposição dos cardiologistas foram propositadamente escassas. O primeiro especialista (o jovem cardiologista) foi consistente apenas nas 17 primeiras questões obtendo assim uma vagueza de 18.75%. O cardiologista mais experiente foi consistente em 31 das 42 questões do questionário de educação e obteve uma vagueza de 26.50%. Os resultados do problema de programação linear são mostrados nas Figura 4.11 e Figura 4.12.

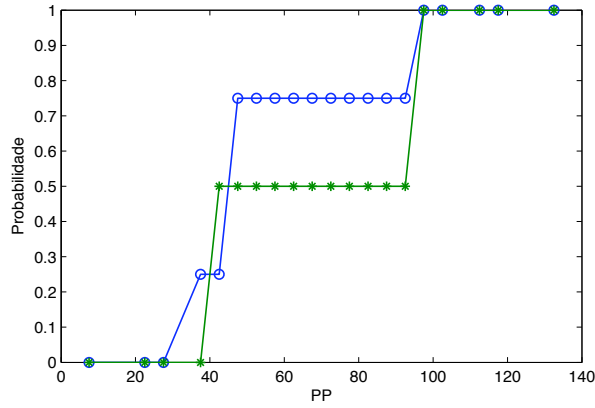


Figura 4.11: Resultado da Educação do Especialista 1.

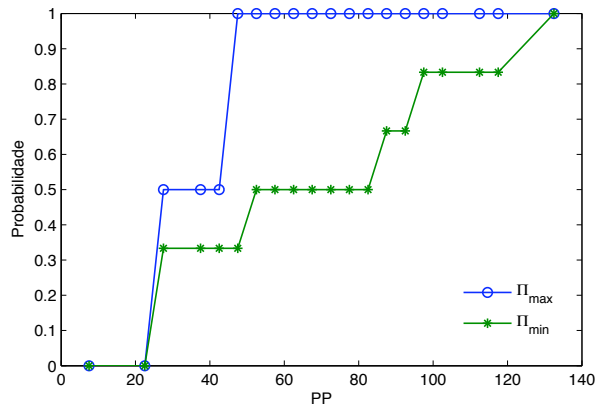


Figura 4.12: Resultado da Educação do Especialista 2.

Era de se esperar que o cardiologista mais experiente tivesse uma vagueza menor que o especialista mais jovem, porém o resultado numérico obtido foi de encontro ao que se esperava. A escassez de evidência exposta aos especialistas não poderia ser suficiente para se obter uma família de distribuições de probabilidade “estreita”. No entanto o cardiologista mais jovem obteve uma vagueza realmente menor que a do cardiologista mais experiente. Porém conseguir essa menor vagueza sendo consistente em apenas 17 das 42 questões, enquanto que o cardiologista mais experiente foi consistente em 31 questões no entanto com uma vagueza maior.

Na presente aplicação o cardiologista mais experiente obteve um  $S = 0.72$  e o cardiologista menos experiente um  $S = 0.36$ . O fato das duas distribuições do cardiologista mais jovem se tocarem pode ser um forte indicador que o mesmo fixou sua atenção em um certo  $\theta_j$ , criando um mecanismo de ancoragem psicológica.



## Comparação com a Base de Dados

Os resultados obtidos da educação de cada especialista foi comparado com dados provenientes de uma amostra da população brasileira com 2129 indivíduos. Nenhum dos especialistas teve acesso a base de dados. Selecionando um subconjunto dessa amostra contendo indivíduos com aproximadamente as mesmas características do indivíduo descrito aos dois especialistas, foi obtida a família de distribuição de probabilidade presente na Figura 4.13. Os dados foram usados para responder o mesmo questionário de educação. A base de dados foi consistente em todas as questões, obtendo uma vagueza de 42.5% com um inferential skill de 0.88.

O cardiologista mais experiente e a base de dados tiveram uma concordância de 50% enquanto que o cardiologista menos experiente e a base de dados apresentaram uma concordância de 22.50%.

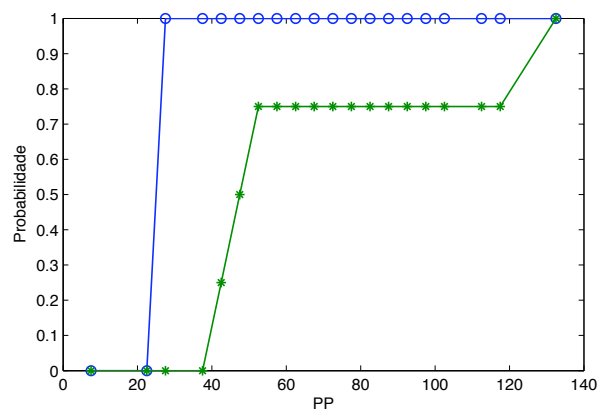


Figura 4.13: Resultados da Educação com a Base de Dados.

É importante deixar claro que os especialistas tiveram a informação de que o indivíduo era um policial. Enquanto que, a base de dados não continha essa informação.

Não foi dito ao especialista se o indivíduo dispunha de uma boa ou má condição de saúde. Foi dito apenas que o indivíduo não tinha nenhuma queixa de saúde. Por sua vez, os indivíduos na base de dados foram selecionados aleatoriamente em lugares públicos, e não tinham problemas cardíacos explícitos. A base de dados foi usada apenas para checar se não havia grande discrepância entre as probabilidades obtidas por meio dos especialistas e as provenientes desta base de dados. Os valores mostrados nas Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 não mostram grande discrepância.

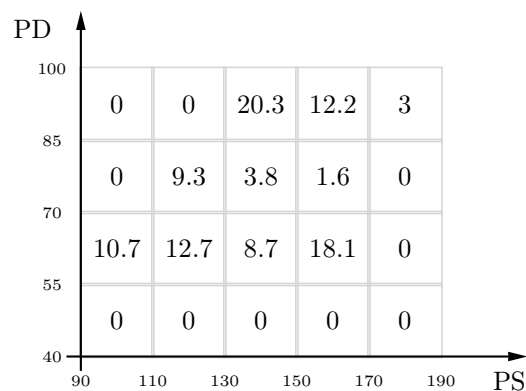


Figura 4.14: Especialista 1

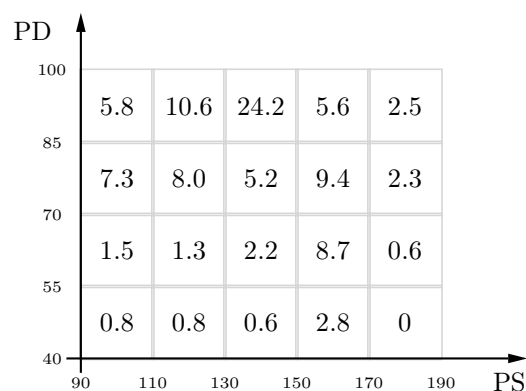


Figura 4.15: Especialista 2

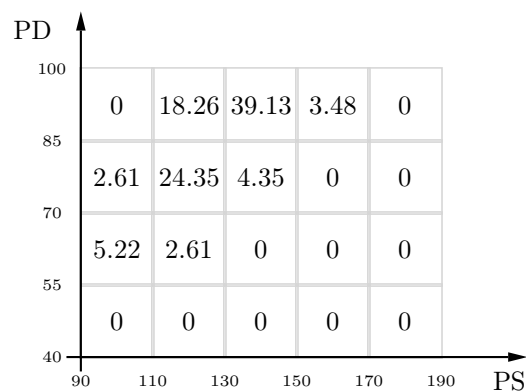


Figura 4.16: Base de Dados

É razoável admitir que o conhecimento do especialista mais experiente é maior que o obtido de uma amostra de 115 indivíduos (quantidade de indivíduos na amostra de 2129 que satisfazem as descrições do indivíduo descrito aos cardiologistas). O cardiologista mais experiente conseguiu atribuir massa

probabilística a um maior número de eventos (pressão sanguínea). Isto é um forte indício de que seria necessária uma amostra muito maior para que a base de dados pudesse dar a mesma informação que o especialista informou. Isto é um dos grande motivos que torna tão importante a utilização do conhecimento de especialistas nos processos decisórios.

## 4.5 O Caso Aleatório

O caso aleatório se dá quando dispõe-se de dados que guardam informações a respeito do parâmetro de interesse  $\theta$ . Esses dados podem ser diretamente sobre o próprio  $\theta$ ; caso onde se tem amostras de  $\theta$ . Quando isso ocorre responder ao questionário tornasse uma tarefa simples e de acordo com o tamanho da amostra disponível ter-se-á uma vagueza maior ou menor. Quando a amostra for pequena algumas das perguntas do questionário deixarão de ser respondidas o que acarretará uma maior vagueza. Já para um tamanho de amostra maior todas as perguntas serão respondidas e de acordo com a lei dos grandes números quanto maior for a mesma, mais próxima da distribuição real será a distribuição obtida pelo método o que proporcionará uma vagueza mínima.

Quando não existe informação direta sobre  $\theta$  usa-se dados que são relacionados com  $\theta$  pela função de verossimilhança  $P(x|\theta)$ . Neste caso as restrições dos dois problemas de programação linear serão diferentes. Além das restrições que garantem que  $\pi_j$  siga uma distribuição de probabilidade ter-se-á ainda a mais um conjunto de  $2n$  restrições. Os problemas de otimização serão:

$$\text{Max}_{\pi_j} (\text{Min}) \sum_{j=1}^{2n} c_j \pi_j \quad (4.5.1)$$

sujeito a:

$$\pi_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.5.2)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \pi_j = 1 \quad (4.5.3)$$

$$\frac{1}{P(x|\theta_j)} \pi_j \leq \frac{1}{\text{Max}_{\theta_j} P(x|\theta_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.5.4)$$

Caso um determinado  $\theta_j$  tenha seu valor bem diferente do valor de  $\theta$  que corresponde ao máximo de verossimilhança isto será refletido num valor de  $P(x|\theta_j)$  pequeno e conseqüentemente o valor de  $\frac{1}{P(x|\theta_j)}$

no problema de programação linear será grande. O problema de maximização escolherá portanto um valor pequeno para  $\pi_j$ . Quando  $\theta_j$  corresponder ao máximo de verossimilhança  $\frac{1}{P(x|\theta_j)}$  assumirá seu menor valor. A maximização fará com que o valor de  $\pi_j$  seja o maior possível neste caso. Para o problema de minimização ocorrerá o contrário. Com o aumento do tamanho da amostra das observações,  $x$ , o valor de  $\pi_j$  irá aumentar e a massa probabilística irá se concentrar em torno do  $\theta_j$  referente ao máximo de verossimilhança.

## O Caso Binomial

A função distribuição binomial é da por:

$$P(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \quad (4.5.5)$$

O máximo de verossimilhança para essa distribuição ocorre em  $\theta = \frac{x}{n}$  (frequência relativa) =  $\hat{\theta}$ . Como pode ser visto nos cálculos a seguir:

$$\frac{d P(x|\theta)}{d \theta} = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} [x \theta^{-1} - (n - x)(1 - \theta)^{-1}] = 0$$

$$\frac{x}{\theta} - \frac{(n - x)}{(1 - \theta)} = 0$$

$$\theta = \frac{x}{n}$$

O valor máximo de  $P(x|\theta)$  é:

$$\text{Max}_{\theta} P(x|\theta) = \frac{n!}{x!(n - x)!} \frac{x^x (n - x)^{n-x}}{n^n} \quad (4.5.6)$$

Quando  $\theta_j$  é bem diferente de  $\frac{x}{n}$ ,  $P(x|\theta_j)$  decresce e conseqüentemente os coeficientes  $a_{ij}$  da matriz “tecnológica” aumentam. E como dito anteriormente o problema de maximização fará com que o valor de  $\pi_j$  seja o maior possível neste caso.

## 4.6 Caso sem Variável Aleatória

A forma como vem sendo abordado até agora o problema de educação leva em consideração a existência de uma variável aleatória. Dessa forma faz sentido usar a função de distribuição como base para a

elaboração dos construtos vagueza, concordância, conflito, etc. uma vez que o eixo dos  $\theta$ 's é ordenado.

Para o caso geral admite-se que existe um número finito  $n$  de eventos, representados por  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  e cujas probabilidades são, respectivamente,  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ . No caso geral a ordem dos eventos não é relevante, sendo assim os construtos vagueza, concordância e conflito não podem depender dessa ordem, mais detalhes podem ser encontrados em (Campello de Souza, 2007b).

Para resolver esse tipo de problema é conveniente usar como funcional objetivo a função entropia que não depende que o conjunto dos  $\theta$ 's seja ordenado. Por definição a entropia é representada por

$$H = - \sum_{j=1}^n \pi_j \log \pi_j$$

Para  $\pi_j = 0$  a quantidade  $\pi_j \log \pi_j$  é definida como sendo zero.

Usando a entropia como funcional objetivo o problema de otimização agora passa a ser um problema de programação não linear. Onde, tal função é interpretada como a quantidade de incerteza da distribuição de probabilidade.

Na solução deste tipo de problema são usadas as condições de Karush-Kuhn-Tucker que são condições necessárias e suficientes para um ótimo local desde que a função objetivo seja (estritamente)côncava e as funções de restrição sejam convexas (detalhes em (Intriligator, 1971)). A entropia e as restrições 4.6.2 são côncavas e convexas respectivamente o que torna possível encontrar uma solução para o problema.

O problema será formulado da mesma forma que antes. As diferenças são que agora tem-se a entropia como funcional objetivo e pode-se ter um número par ou ímpar de eventos.

$$\text{Max}_{\pi_j} \sum_{j=1}^n -\pi_j \log \pi_j \tag{4.6.1}$$

sujeito a:

$$a_{ik} \sum_{j=i}^k \pi_j - a_{lm} \sum_{j=l}^m \pi_j \leq b_s \tag{4.6.2}$$

(ou  $\geq b_s$  dependendo da resposta do especialista)

$$\pi_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{4.6.3}$$

$$\sum_{j=1}^n \pi_j = 1 \quad (4.6.4)$$

Os construtos vagueza, concordância, conflito, etc. de acordo com (Campello de Souza, 2007b) não dependerão do funcional objetivo e sim das relações entre a região do conjunto viável do problema de otimização com a região do simplex. O problema de otimização será resolvido e ter-se-á uma distribuição de probabilidade que será utilizada no problema de decisão, sabendo-se que o especialista terá uma vagueza associada que dependerá das suas respostas ao protocolo de educação. Para calcular esta vagueza pode-se usar diretamente o volume do conjunto viável, que não é uma tarefa das mais simples, e uma outra maneira de fazer esse cálculo é por simulação probabilística que permite não só calcular a vagueza como todos os construtos. Mais detalhes e algumas aplicações podem ser encontrados em (Campello de Souza, 2007b), (Silva, 2002) e (Moraes, 2003).

Caso o especialista não consiga responder a nenhuma pergunta do questionário a sua vagueza será máxima e a solução do problema de otimização será o ponto  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_n = \frac{1}{n}$  para mais detalhes (Berger, 1985). Ou seja, a solução será a distribuição uniforme.

Então, por exemplo, no caso com três eventos a vagueza será determinada por:

$$V = \frac{\text{Área do corpo de evidência}}{\text{Área do simplex}}$$

As Restrições 4.6.3 e 4.6.4 garantem que o conjunto viável do problema de otimização está contido no simplex da Figura 4.17. A Figura 4.18 apresenta o simplex com alguns corpos de evidência que são provenientes das respostas dos especialistas. Por exemplo, a região  $E$  na Figura 4.18 representa as respostas do especialista  $E$  e assim sucessivamente para quantos especialistas se esteja trabalhando.

### Um Exemplo com Três Eventos

No caso da última eleição para presidente da república considerou-se três possíveis candidatos:

- $\theta_1 = \text{Lula}$
- $\theta_2 = \text{Alckmin}$
- $\theta_3 = \text{outros}$

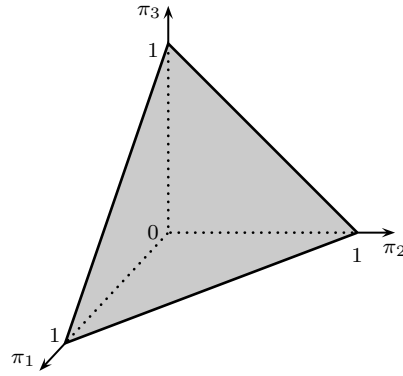


Figura 4.17: O conjunto simplex.

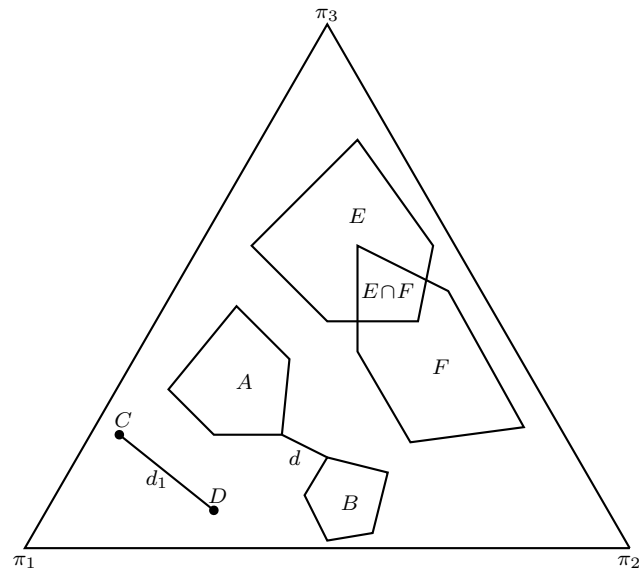


Figura 4.18: O conjunto simplex com alguns corpos de evidência.

Neste problema o interesse é pela probabilidade de cada um dos possíveis candidatos ganhar a eleição, ou seja qual o valor de  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ . Como tem-se apenas três possíveis  $\theta$ 's pode-se colocar no questionário de educação todas as possíveis perguntas, que são:

$$\begin{aligned}
 a_{12}\pi_1 - a_{21}\pi_2 &\leq b_1 \\
 a_{13}\pi_1 - a_{31}\pi_3 &\leq b_2 \\
 a_{23}\pi_2 - a_{32}\pi_3 &\leq b_3 \\
 a_{123}\pi_1 - a_{231}(\pi_2 + \pi_3) &\leq b_4 \\
 a_{213}\pi_2 - a_{132}(\pi_1 + \pi_3) &\leq b_5 \\
 a_{312}\pi_3 - a_{321}(\pi_1 + \pi_2) &\leq b_6
 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

(ou  $\geq b_s$  dependendo da resposta do especialista).

O questionário de educação foi aplicado a um especialista que forneceu as seguintes respostas:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 - 2\pi_2 &\geq 0.5 \\
 \pi_1 - 20\pi_3 &\geq 0 \\
 \pi_2 - 10\pi_3 &\geq 0 \\
 \pi_1 - 1.5(\pi_2 + \pi_3) &\geq 0 \\
 \pi_2 - 0.5(\pi_1 + \pi_3) &\leq 0.25 \\
 \pi_3 - 4(\pi_1 + \pi_2) &\leq 0
 \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Note-se que o especialista foi além de dizer se a razão de chances é maior ou menor que 1 uma vez que o mesmo forneceu valores para  $a_{ik}$ ,  $a_{lm}$  e  $b_s$ . Suas respostas foram consistentes e resolvendo-se o problema de programação não linear obteve-se a distribuição com entropia máxima a seguir:

Tabela 4.11: Distribuição de Entropia Máxima.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
0.8226	0.1613	0.0161

Com base nessas respostas simulações foram feitas para estimar o vagueza do especialista que foi de  $5.65 \times 10^{-4}$  com uma variância associada de  $4.86 \times 10^{-10}$ . As simulações foram feitas usando o software MATLAB cujo os códigos produzidos encontram-se nos anexos.

Com o intuito de verificar o impacto na vagueza do especialista quando o mesmo só consegue informar se a razão de chances é maior ou menor que 1 omitiu-se os valores dados pelo mesmo, ou seja considerou-se os  $a_{ik} = a_{lm} = 1$  e  $b_s = 0$ . Desta forma a distribuição com máxima entropia fornecida



pelo especialista foi a seguinte:

Tabela 4.12: Distribuição de Entropia Máxima 2.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
0.5	0.25	0.25

Com uso de simulações estimou-se a vagueza para esta situação que foi de 0.07 com uma variância de  $6.16 \times 10^{-8}$ .

# 5 O USO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA NA INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

*“By chance, I mean the same as probability.”*

Thomas Bayes

## 5.1 Algumas Considerações sobre o Questionário

O questionário, fruto de pesquisas sobre novos métodos para se eduzir uma família de distribuições *a priori* de um especialista, tem como uma das características principais o fato de não pretender ser “preciso demais”; seria uma incongruência se assim não o fosse. O conhecimento *a priori*, por melhor que seja, tem sempre um grau de vagueza. Há que se abandonar o dogma bayesiano da precisão. Isto se manifesta de várias formas:

- O tamanho do menor subintervalo considerado é de 5% do tamanho total do intervalo expresso pelo especialista, isto é,  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ . Admite-se que nenhum especialista possa ser tão preciso a ponto de especificar ou comparar probabilidades de eventos com essa precisão. Não faz sentido admitir densidades de probabilidade com picos pontiagudos; seria uma precisão não condizente com a evidência (dados, *inputs*) disponíveis que são, nessa área de pesquisa, supostos escassos. Isto significa que se espera, no melhor dos casos, ter-se uma vagueza mínima. Tem-se, pois, uma vagueza mínima, irreduzível; ou seja, uma precisão máxima, intransponível ( $P = 1 - V$ ).
- Nas perguntas ao especialista não se inclui nenhum intervalo de largura 5% do intervalo máximo. O intervalo mais estreito que aparece nos questionários é de 10% do intervalo total especificado pelo especialista.

Se o especialista não tem nenhuma noção de probabilidade, e se fixa num determinado valor do parâmetro, a tendência é que ele afirme que se um dado intervalo contém esse valor e o outro da comparação não o contenha, então o primeiro intervalo é mais provável do que o primeiro. Isto pode acontecer seja no caso de variável aleatória, seja no de eventos que não são representados por variáveis aleatórias. O que vai acontecer nesses casos é que o especialista não consegue responder a todas as

perguntas do questionário, pois vai-se chegar logo a uma inconsistência, isto é, o conjunto viável do problema de programação linear torna-se logo vazio. Este fenômeno é o que se chama de ancoragem psicológica (Campello de Souza (1993)). Em muitos casos não se consegue responder nem metade das perguntas do questionário. Rodando-se o modelo com as perguntas consistentes (da primeira até aquela, exclusive, que provocou a inconsistência, lembrando que a dificuldade das perguntas é progressiva), o resultado é que a vagueza pode se tornar artificialmente pequena (vagueza pequena baseada em *input* escasso significa inadequação do especialista, como medida pelo *inferential skill*). As funções de distribuição máxima e mínima podem inclusive se cruzar (Silva & Campello de Souza, 2005).

O especialista quanto mais consciente, melhor. Sabe que a partir de uma fonte “rala” de fatos não pode fazer afirmações que levem a uma família “estreita” de distribuição de probabilidades. Isto se manifesta nos resultados por uma vagueza maior e um *inferential skill* maior. Noutras palavras, há que se admitir uma amplitude maior de possibilidades.

## 5.2 O Questionário sendo respondido por Dados

O questionário derivado do modelo de programação matemática para representar e calcular a incerteza, introduzido por Campello de Souza (1993), pode ser respondido a partir de dados de experimentos ou observacionais. O racional é o mesmo. O modelo será útil para se fazer afirmações probabilísticas sobre o parâmetro,  $\theta$ , a partir de dados; dentro do paradigma freqüentista da probabilidade.

O procedimento é direto.

1. Identifica-se o mínimo e o máximo da amostra (ou o valor mínimo e o máximo do parâmetro para o fenômeno, se for conhecido).
2. Divide-se o intervalo entre o mínimo e o máximo em vinte partes iguais, definindo-se pois  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{20}$ . O questionário é então montado automaticamente.
3. Responde-se a cada pergunta do questionário em função do número de observações que caem em cada um dos dois intervalos não superpostos que constituem cada pergunta de comparação.

Se a amostra for pequena, não serão respondidas, tipicamente, todas as perguntas. Ter-se-á então uma vagueza compatível com uma amostra pequena. Esta é a idéia central. Se o “fenômeno” for

determinístico, isto é, todos os pontos (observações) da amostra forem iguais, e se se tentar responder ao questionário com esses pontos, o resultado é que estes pontos não conseguirão responder a todas as perguntas do questionário. Apenas um subconjunto pequeno das questões é que serão respondidas consistentemente (isto é, o conjunto viável não será vazio). Ter-se-á então, tipicamente, uma vagueza grande (contrariamente ao que se poderia, erroneamente, esperar, e um *inferential skill* pequeno. É exatamente o análogo ao caso da ancoragem psicológica, no caso da probabilidade subjetiva. Se a amostra for pequena, mas o fenômeno for mesmo probabilístico, isto é, tenha incerteza embutida, esta variabilidade emergirá nos dados (na amostra). Conseguir-se-á então responder a um número de questões maior do que no caso da “amostra determinística”, embora ainda pequena, o que é plausível. Afinal de contas, a amostra é pequena. Ter-se-á então uma vagueza compatível, e o *inferential skill* será maior.

Devido à “granulação”, ou tamanho mínimo do questionário, veja o que acontece quando a “amostra” é determinística (Figura 5.1)

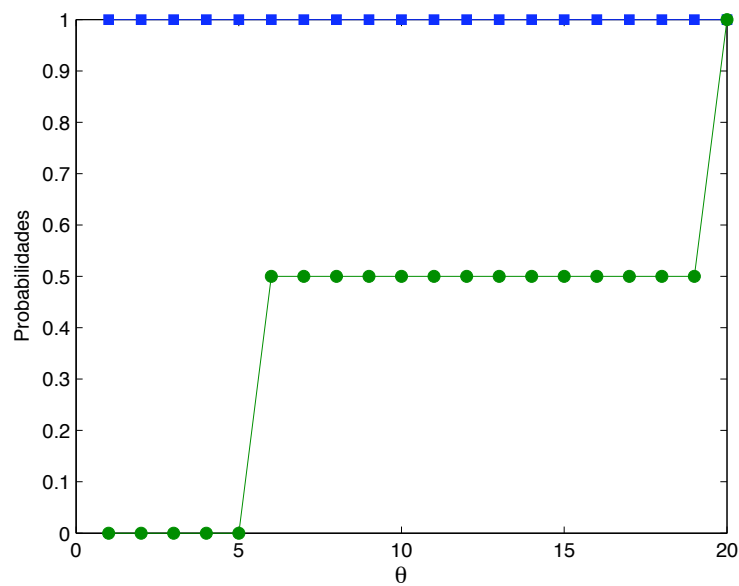


Figura 5.1: Exemplo de fenômeno determinístico.

Quando aparecer, nos resultados do modelo de programação linear, um gráfico parecido com o da Figura 5.1, o que provavelmente aconteceu foi que a “amostra” era “determinística” demais para a “rede” do questionário.

Tenha-se em mente então o seguinte. No caso de uma “amostra” determinística, ou numa amostra de

pequena variabilidade dentro de um subintervalo pequeno do intervalo global, vai ocorrer esse fenômeno da “ancoragem psicológica” (seja no caso subjetivo, seja no freqüentista). Ter-se-ia que ter então um questionário com o maior número possível de perguntas. O número total de perguntas que podem ser construídas com os  $2n$  subintervalos é representado por:

$$q = \sum_{j=1}^{2n-1} C_{(2n,j+1),2}.$$

Mesmo que o número de perguntas consistentemente respondidas fosse uma fração pequena do número total máximo de perguntas possíveis, obter-se-ia uma vagueza muito pequena. Pode-se portanto implementar um modelo assim, inclusive com um número bem maior de intervalos. O esforço computacional seria, no entanto, formidável. Mesmo no caso de vinte intervalos, ter-se-ia 7315 restrições no modelo de programação linear, o que representaria um grande esforço computacional.

Mas não é este o interesse do método. Baixa variabilidade e grandes amostras são casos bem resolvidos por métodos clássicos. Ainda assim, o método novo seria útil na combinação de corpos de evidência, evitando os conhecidos problemas da regra de Bayes (dogma da precisão, conflito verossimilhança – distribuição *a priori*, por exemplo). O questionário está portanto, calibrado para um mínimo de variabilidade. Pode-se pensar, por exemplo, em termos do *Quincunx* de Galton. Se o diâmetro dos pinos for igual ao diâmetro das bolas, e a distância entre os pinos for muito maior do que o seu diâmetro, as bolinhas vão cair praticamente todas dentro de um mesmo *slot*. O *Quincunx* não responderá a todas as perguntas do questionário. Muitos *slots* ficarão vazios.

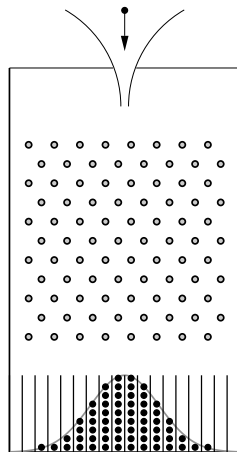


Figura 5.2: O quincunx de Francis Galton.

A comparação do questionário com o *Quincunx* é que aquele é para inferência, enquanto este é para implementar fisicamente mecanismos probabilísticos. Alterando-se a disposição dos pinos, no *Quincunx* pode-se simular várias distribuições. Existem modelos com uma gaveta para cada uma de uma série de distribuições. Então o *Quincunx* é um gerador de distribuições. Ele mimetiza mecanismos probabilísticos. O questionário é um “detetor” de distribuições. Neste caso, as bolas não caem apenas de um funil, como no *Quincunx*, numa posição única. No questionário é como se as bolas dos *slots* estivessem sendo derramadas (os *slots* de cabeça para baixo), caindo mais bolas em certas regiões do intervalo do que em outras. A matemática do modelo de programação matemática seria como que uma “pinagem”, que recolocaria as bolinhas na sua posição original antes de serem derramadas. As bolinhas cairiam de todo o travessão horizontal superior deste hipotético *Quincunx* reverso, com uma distribuição a ser inferida. Se não houver uma “pinagem” adequada (questionário) as bolinhas podem distorcer a distribuição original (desconhecida!).

### 5.3 A Média Estimada pelo Modelo de Programação Matemática comparada com a Média obtida pela Frequência Relativa

Foi feito um estudo para comparar a média estimada pelo modelo de programação linear com a média proveniente da frequência relativa. Neste estudo, é bom que fique claro que está-se pensando no caso em que se dispõe de dados diretos sobre  $\theta$ , o que é conhecido na inferência bayesiana como “Bayes Empírico com o professor”, cujo procedimento para estimação de  $\pi(\theta)$  consiste em obter observações identicamente distribuídas (iid) da variável de interesse  $\theta$ , e a partir destas observações uma estimação de  $\pi(\theta)$  é obtida por meio da frequência relativa.

Para fazer esta avaliação, foram geradas amostras de distribuições de médias conhecidas. Escolheu-se a distribuição beta por apresentar uma maior flexibilidade para representar uma grande variedade de possíveis distribuições sobre  $\theta$ 's. Algumas propriedades dessa distribuição são:

$$\text{Valor esperado} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Variância} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Foram consideradas três situações:

- Distribuição Simétrica.
- Distribuições com assimetria para direita.
- Distribuições com assimetria para esquerda.

Em todos os casos foi construída uma base de dados com 50 variáveis,  $X_1, X_2, \dots, X_{50}$ , seguindo uma distribuição beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  conhecidos. Com base nesses parâmetros as médias das distribuições foram calculadas. Uma particularidade desta distribuição é que os valores gerados por ela encontram-se entre zero e um. Sendo assim os valores máximo e mínimo serão zero e um, que irão determinar o intervalo a ser particionado como descrito na Seção 5.2. Com os dados dessas variáveis, respondeu-se ao questionário para diferentes tamanhos de amostra, 2, 5, 10, 15, e 25, respectivamente.

### 5.3.1 Situação 1: Distribuição Simétrica

Para tratar o caso de distribuições simétricas foi escolhida uma distribuição beta com  $\alpha = 4$  e  $\beta = 4$ . Para esses parâmetros a distribuição tem média 0,5 e variância 0,028. Em seguida respondeu-se ao questionário com os diferentes tipos de amostra. A média da distribuição obtida pelo questionário foi comparada com a média da frequência relativa, a Tabela 5.1 mostra essa comparação. A média da distribuição obtida pelo questionário foi calculada usando-se a expressão  $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j \pi_j$  (esta foi a expressão usada em todos os experimentos desta Seção).

Tabela 5.1: Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da frequência relativa para beta de parâmetros (4,4).

N	Méd. Mod	Med. Freq	t-value	df	p	Std Dev Mod	Std Dev Freq	F-ratio Variances	p Variances
2	0,579435	0,533216	1,863151	98	0,065436	0,119887	0,128047	1,140769	0,646630
5	0,533435	0,524377	0,552764	98	0,581684	0,077105	0,086497	1,258455	0,423927
10	0,522187	0,510900	0,917252	98	0,361262	0,061538	0,061516	1,000698	0,998061
15	0,507473	0,502261	0,619002	98	0,537351	0,041750	0,042446	1,033596	0,908394
25	0,508795	0,503740	0,634943	98	0,526945	0,043257	0,036022	1,441981	0,203718

O teste-t mostrou que as diferenças entre as médias não foram significativas e pode-se ver na Tabela 5.1 que a média do modelo converge para o valor da média estabelecido *a priori* a medida que o tamanho da amostra aumenta. As Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 mostram gráficos com a frequência acumulada das médias dos dois mecanismos, modelo de programação matemática e frequência relativa.

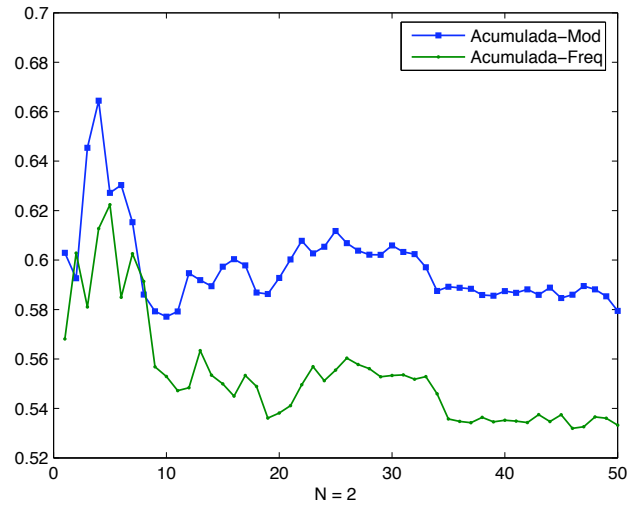


Figura 5.3: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 2$  usando a distribuição  $\text{beta}(4,4)$ .

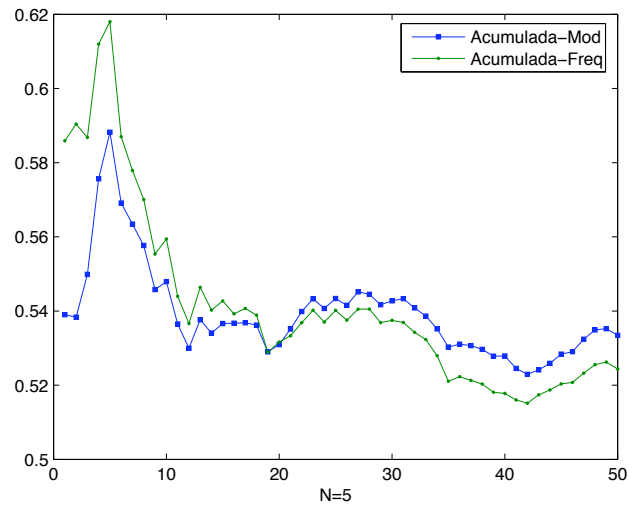


Figura 5.4: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 5$  usando a distribuição  $\text{beta}(4,4)$ .



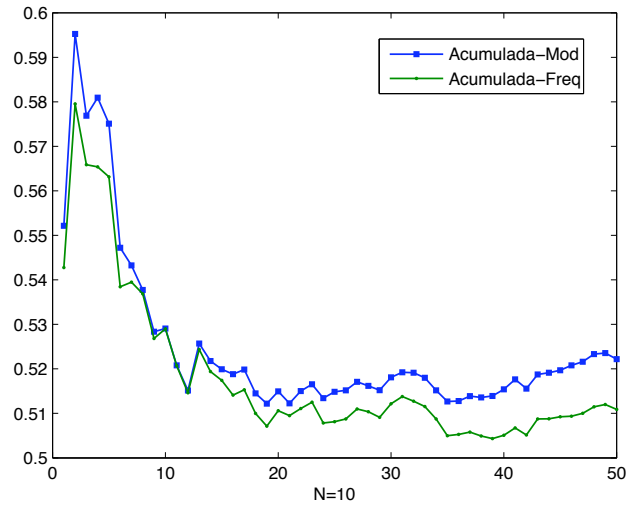


Figura 5.5: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 10$  usando a distribuição  $\text{beta}(4,4)$ .

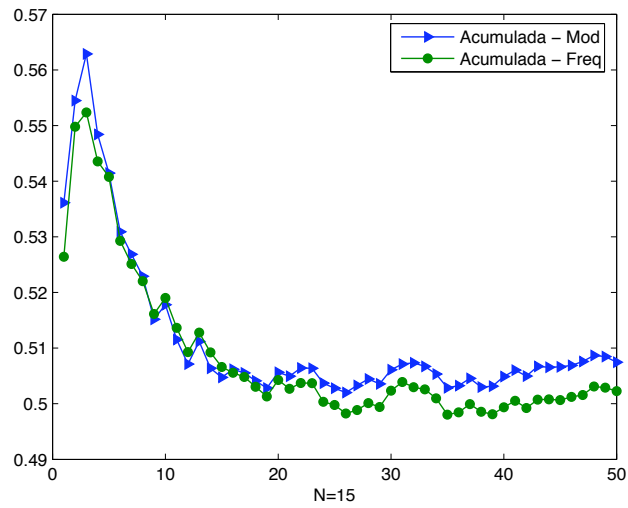


Figura 5.6: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 15$  usando a distribuição  $\text{beta}(4,4)$ .

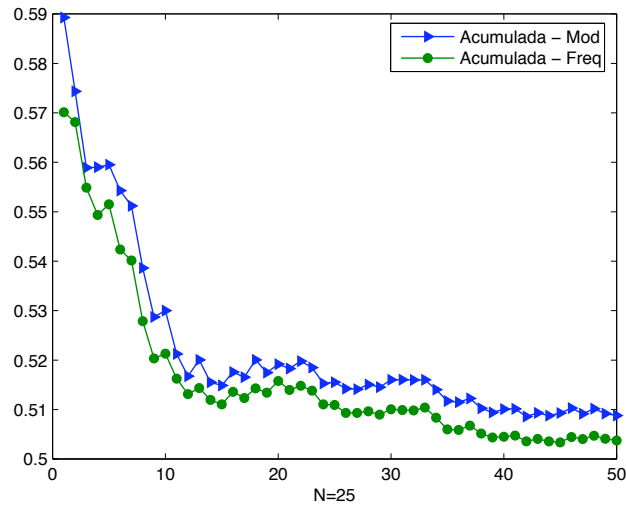


Figura 5.7: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 25$  usando a distribuição  $\text{beta}(4,4)$ .

### 5.3.2 Situação 2: Distribuição Assimétrica para Direita

O procedimento anterior foi repetido agora para a distribuição beta com parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 6$  obtendo-se assim, uma distribuição de média 0,25 e variância 0,021. Os resultados dos teste-t estão na Tabela 5.2

Tabela 5.2: Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da frequência relativa para beta de parâmetros (2,6).

N	Med Mod	Med Freq	t-value	df	p	Std.Dev. Mod	Std.Dev. Freq	F-ratio Variances	p Variances
2	0,3582	0,2515	5,0226	98	0,0000	0,0935	0,1175	1,5804	0,1125
5	0,2968	0,2628	2,1744	98	0,0321	0,0818	0,0746	1,2013	0,5234
10	0,2892	0,2570	2,7977	98	0,0062	0,0669	0,0460	2,1130	0,0100
15	0,2575	0,2586	-0,1069	98	0,9151	0,0607	0,0394	2,3745	0,0030
25	0,2374	0,2523	-1,8937	98	0,0612	0,0485	0,0272	3,1791	0,0001

O teste-t mostrou que apenas a partir de amostras de tamanho 15 que o teste não deu significativo. Analisando a Tabela 5.2 percebe-se que a média do modelo converge para média *a priori* no entanto há uma discrepância com relação a média da frequência relativa. Os gráficos das Figuras 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 ilustram esse fato.

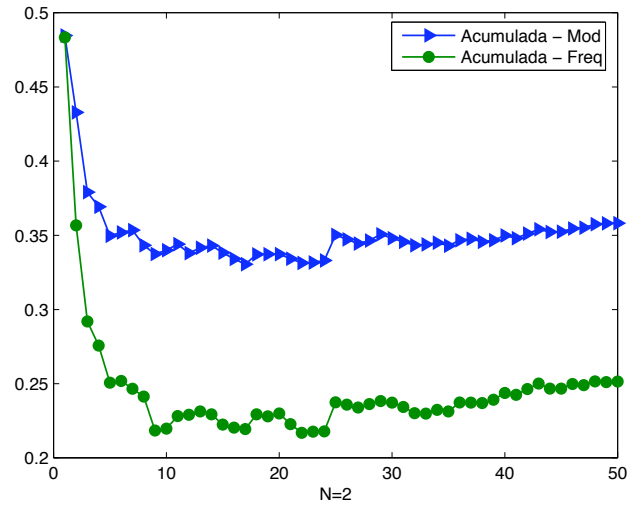


Figura 5.8: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 2$  usando a distribuição  $\text{beta}(2,6)$ .

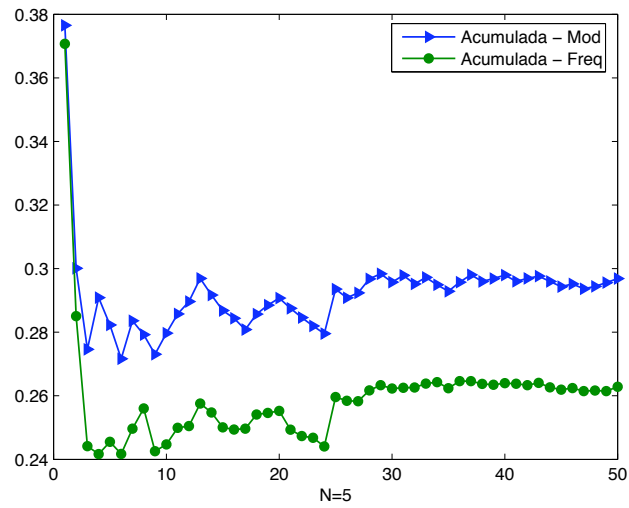


Figura 5.9: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 5$  usando a distribuição  $\text{beta}(2,6)$ .

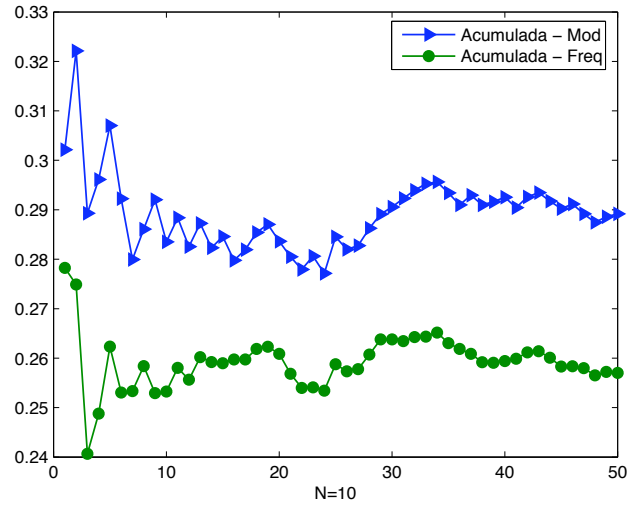


Figura 5.10: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 10$  usando a distribuição  $\text{beta}(2,6)$ .

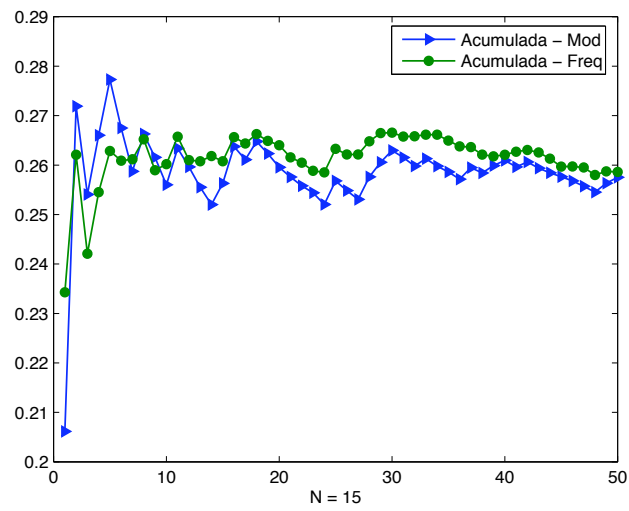


Figura 5.11: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 15$  usando a distribuição  $\text{beta}(2,6)$ .

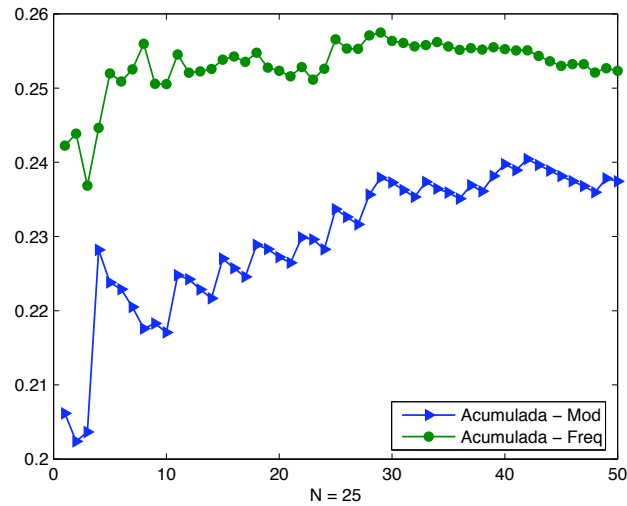


Figura 5.12: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 25$  usando a distribuição  $\text{beta}(2,6)$ .

### 5.3.3 Situação 3: Distribuição Assimétrica para Esquerda

O mesmo racional foi aplicado para a situação onde há assimetria para esquerda. Usou-se aqui os parâmetro  $\alpha = 6$  e  $\beta = 2$  obtendo-se assim, uma distribuição de média 0,75 e variância 0,021. Os resultados dos teste-t estão na Tabela 5.3

Tabela 5.3: Teste t comparando a diferenças das médias do modelo e da frequência relativa para beta de parâmetros (6,2).

N	Med Mod	Med Freq	t-value	df	p	Std.Dev. Mod	Std.Dev. Freq	F-ratio Variances	p Variances
2	0,7029	0,7508	-3,2948	98	0,0014	0,0579	0,0850	2,1569	0,0082
5	0,7035	0,7560	-5,5812	98	0,0000	0,0456	0,0482	1,1173	0,6994
10	0,7340	0,7569	-3,3831	98	0,0010	0,0346	0,0331	1,0932	0,7564
15	0,7293	0,7579	-4,0620	98	0,0001	0,0348	0,0357	1,0524	0,8589
25	0,7234	0,7557	-5,0155	98	0,0000	0,0324	0,0320	1,0256	0,9298

O teste-t mostrou-se significativo para todos os tamanhos de amostra avaliado. Analisando a Tabela 5.3 percebe-se que a média do modelo converge para média *a priori* no entanto há uma discrepância com relação a média da frequência relativa. Os gráficos das Figuras 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 ilustram esse fato.

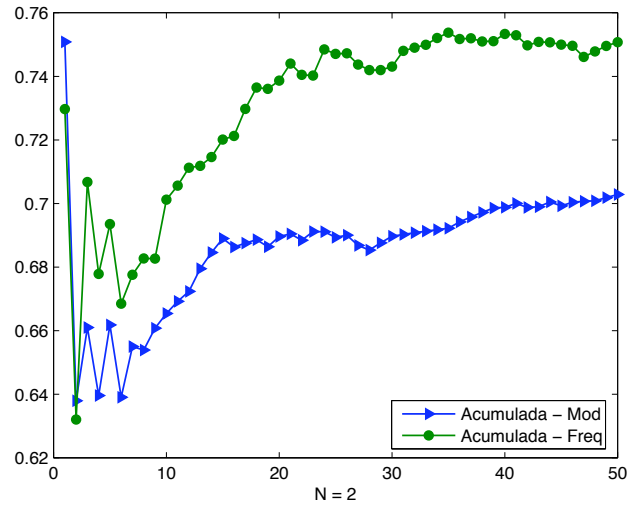


Figura 5.13: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 2$  usando a distribuição  $\text{beta}(6,2)$ .

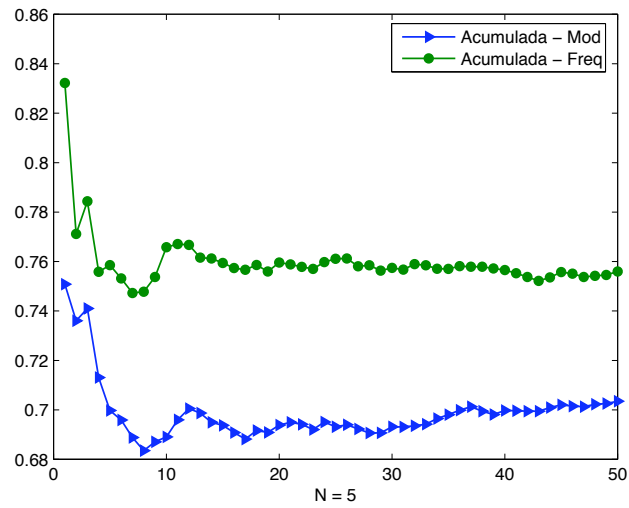


Figura 5.14: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 5$  usando a distribuição  $\text{beta}(6,2)$ .

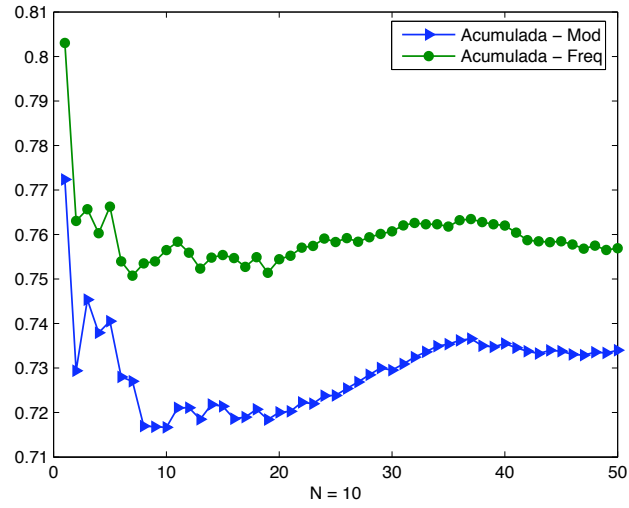


Figura 5.15: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 10$  usando a distribuição  $\text{beta}(6,2)$ .

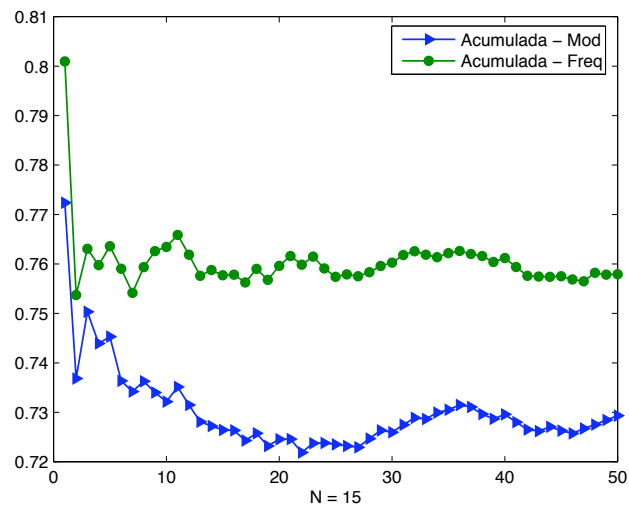


Figura 5.16: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 15$  usando a distribuição  $\text{beta}(6,2)$ .

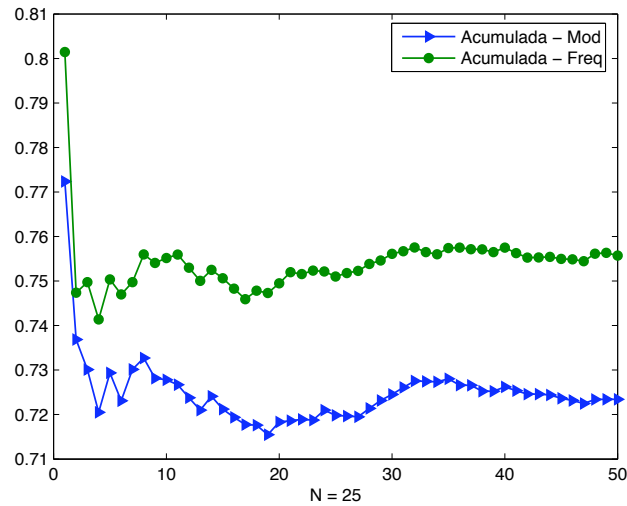


Figura 5.17: Frequência acumulada dos dados dos dois métodos para  $N = 25$  usando a distribuição  $\text{beta}(6,2)$ .

Usou-se dois métodos distintos para estimar a média de uma distribuição de probabilidade. Faz sentido então testar a concordância entre os métodos usando o teste de Bland e Altman (Bland & Altman, 1999). O teste consiste em fazer o gráfico da média dos valores obtidos pelos dois métodos pela diferença desses valores. Se 95% da amostra estiver contido dentro da faixa para a média daquelas diferenças (mais ou menos 2 desvios-padrões) está caracterizada, então, a repetibilidade do método. O teste foi feito para os diversos tamanhos de amostra usado para os três tipos de distribuição e foi identificada a concordância entre os métodos. As Figuras 5.18, 5.19 e 5.20 a seguir apresentam os resultados para as amostras de tamanho  $n = 2$ .



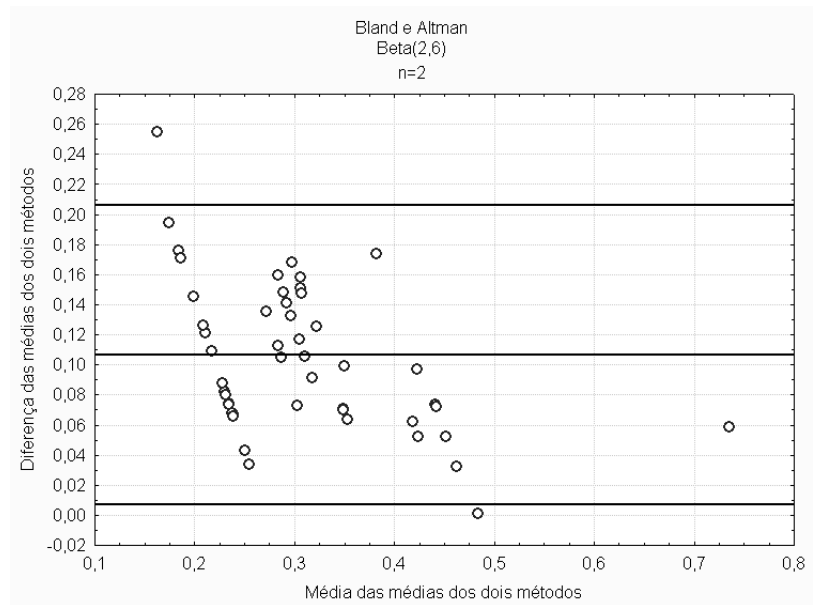


Figura 5.18: Bland e Altman para as médias da distribuição beta (2,6).

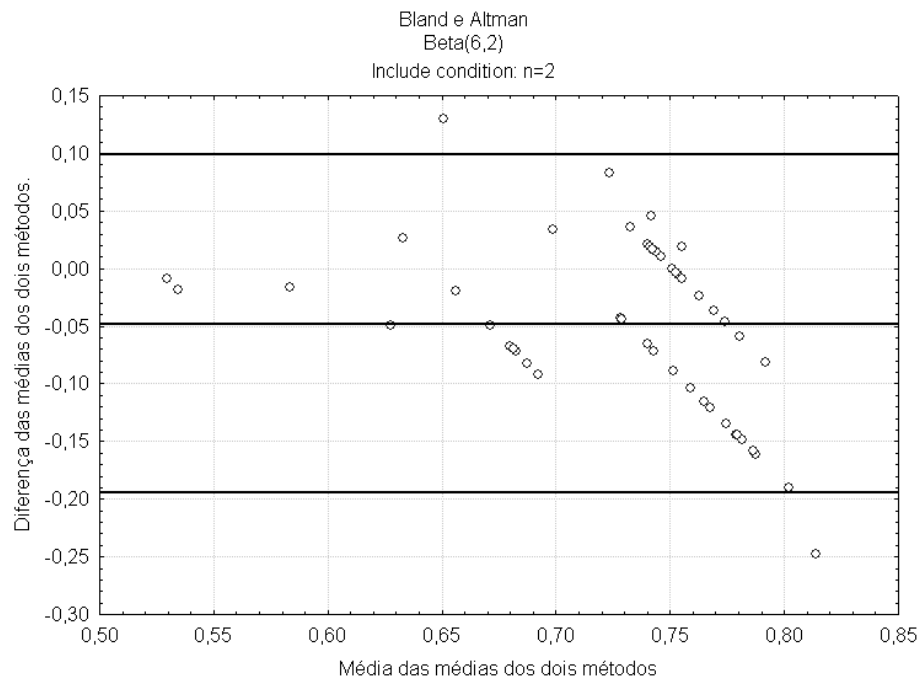


Figura 5.19: Bland e Altman para as médias da distribuição beta (6,2).

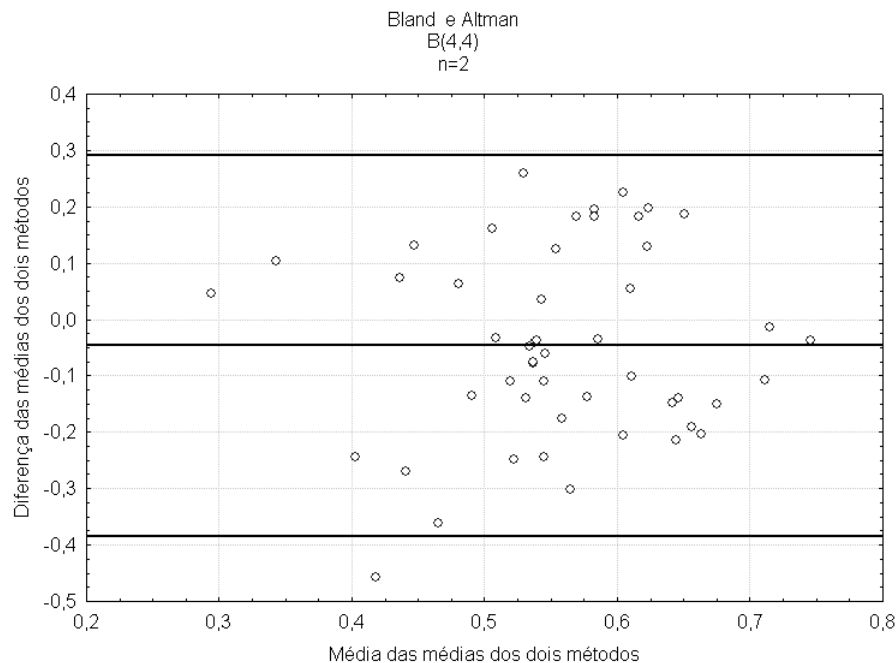


Figura 5.20: Bland e Altman para as médias da distribuição beta (4,4).

## 5.4 A “Correlação” entre duas Variáveis Aleatórias

A idéia é usar os construtos <sup>1</sup> do método para desenvolver novos construtos que possam expressar algum tipo de conectividade parcial entre duas variáveis aleatórias, a exemplo da correlação de Pearson, correlação de Spearman, informação mútua de Shannon, correlação tetracórica, etc.

Dadas duas amostras de duas variáveis aleatórias, deseja-se saber se existe algum tipo de relação, mesmo parcial, entre elas. No caso de se suspeitar de uma relação linear subjacente, o construto clássico é a correlação de Pearson:

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

### 5.4.1 O Construto Decidabilidade

Se a correlação de Pearson entre duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ , for grande, imaginando-se que elas estão no primeiro quadrante (senão coloque-se-as lá por uma transformação linear, o que não

<sup>1</sup>O filósofo e físico alemão Henry Margenau introduziu o termo “construto”. Trata-se de instrumentos mentais para se levar a cabo uma investigação ou estudo. É uma imagem ou idéia inventada para um dado propósito de pesquisa. *The Nature of Physical Reality: A Philosophy of Modern Physics* (1950) (Paperback) by Henry Margenau (Author).

alterará a correlação), então a sua diferença,  $Y - X$ , será centrada em zero, isto é, terá uma média zero, e uma pequena variância, e a sua relação, isto é,  $Y/X$ , terá uma média unitária e uma pequena variância. As distribuições de probabilidade de  $Y - X$  e  $Y/X$  terão pois um grande conflito ( $K$ ) e uma pequena concordância ( $C$ ).

Se a correlação de Pearson entre  $Y$  e  $X$  for diminuindo, o conflito entre  $Y - X$  e  $Y/X$  vai diminuindo e a concordância também diminui. Pode-se então usar o construto decidabilidade para captar essa associação parcial entre  $Y$  e  $X$ , mesmo a partir de amostras pequenas, por:

$$D = 1 - (K + V_G) \quad (5.4.1)$$

Para se verificar a plausibilidade dessa “correlação”, foi construída uma base de dados com 101 variáveis,  $Y, X_1, X_2, \dots, X_{100}$  de tal forma que a correlação entre  $Y$  e  $X_1$  é 1,00 e vai diminuindo à medida que se consideram as variáveis de  $X_2$  a  $X_{100}$ . As correlações de Pearson de  $Y$  com todas as  $X_i$ 's estão mostradas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: As correlações de Pearson de  $Y$  com todas as 100  $X_i$ 's; amostra de tamanho 1000. São estatisticamente significativas até a variável  $X_{46}$ ; a partir daí tem-se que  $p$  cresce de  $p = 0,053$  ( $i = 47$ ) até  $p = 0,327$  ( $i = 100$ ).

Variável	Correlação	Variável	Correlação	Variável	Correlação	Variável	Correlação
1	1,0000	26	0,1085	51	0,0567	76	0,0393
2	0,9343	27	0,1045	52	0,0557	77	0,0389
3	0,7954	28	0,1008	53	0,0547	78	0,0384
4	0,6591	29	0,0974	54	0,0537	79	0,0380
5	0,5499	30	0,0942	55	0,0528	80	0,0376
6	0,4666	31	0,0913	56	0,0520	81	0,0371
7	0,4031	32	0,0885	57	0,0511	82	0,0367
8	0,3537	33	0,0859	58	0,0503	83	0,0363
9	0,3146	34	0,0834	59	0,0495	84	0,0360
10	0,2830	35	0,0811	60	0,0487	85	0,0356
11	0,2571	36	0,0790	61	0,0480	86	0,0352
12	0,2354	37	0,0769	62	0,0473	87	0,0349
13	0,2171	38	0,0750	63	0,0466	88	0,0345
14	0,2015	39	0,0731	64	0,0459	89	0,0342
15	0,1879	40	0,0714	65	0,0453	90	0,0338
16	0,1761	41	0,0697	66	0,0447	91	0,0335
17	0,1656	42	0,0681	67	0,0441	92	0,0334
18	0,1564	43	0,0666	68	0,0435	93	0,0329
19	0,1481	44	0,0652	69	0,0429	94	0,0326
20	0,1407	45	0,0638	70	0,0423	95	0,0323
21	0,1340	46	0,0625	71	0,0418	96	0,0320
22	0,1280	47	0,0612	72	0,0413	97	0,0317
23	0,1224	48	0,0600	73	0,0408	98	0,0314
24	0,1174	49	0,0589	74	0,0403	99	0,0311
25	0,1127	50	0,0578	75	0,0398	100	0,0309

Para uma dada variável  $X_i$ , quanto menor for o tamanho da amostra, a partir de um certo ponto, a correlação estimada torna-se sem significância estatística, embora saiba-se, por construção, que a correlação existe. Este “fenômeno” aparece mais rapidamente para valores menores da correlação, isto é, para variáveis  $X_i$  de grandes valores de  $i$  (Tabela 5.4).

Nos cálculos feitos considerou-se uma faixa de correlações de Pearson de  $r > 0,10$  até  $r < 1,0$ . Nesta faixa, para a amostra de tamanho 1000, todas as correlações são estatisticamente significativas.

Com as novas variáveis  $Y - X_i$  e  $Y/X_i$  respondeu-se ao questionário usando os procedimentos mencionados na Seção 5.2. Teve-se o cuidado de trazer todas as variáveis para o mesmo intervalo usando uma transformação que guardasse as relações entre elas. A transformação usada foi a seguinte:

$$(Y/X_i)^T = \frac{Y/X_i - (Y/X_i)_{\min}}{(Y/X_i)_{\max} - (Y/X_i)_{\min}}$$

$$(Y - X_i)^T = \frac{Y - X_i - (Y - X_i)_{\min}}{(Y/X_i)_{\max} - (Y - X_i)_{\min}}$$

Com esta transformação todas as variáveis ficaram no intervalo  $[0, 1]$ . A média da diferença para a  $Y - X_2$  foi de 0,18 e as médias para as demais diferenças  $(Y - X_i)$  foram aumentando com o aumento de  $i$ , chegando a 0,338 para  $Y - X_{100}$ . Para a relação, a média ficou em torno de 0,56 gradativamente com o aumento de  $i$ .

Considerando-se as correlações entre  $Y$  e  $X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, 8$ , que são significativas ( $N = 1000$ ), pode-se estimá-las por um modelo de regressão em função da relação Decidabilidade para uma amostra 50 vezes menor ( $N = 20$ ).

Tabela 5.5: Tabela para a construção do modelo de regressão para  $r$  em função da decidabilidade.

Variavel	Correl20	Concord20	Conflit20	VagGlob20	D20	Correl1000	Concord1000	Conflit1000	VagGlob1000	D1000
1	1,00	0,191	0,0216	0,506	0,4724	1,0000	0,191	0,0216	0,506	0,4724
2	0,93	0,113	0,222	0,372	0,406	0,9342	0,113	0,222	0,372	0,406
3	0,80	0,245	0,132	0,273	0,595	0,7951	0,0299	0,192	0,363	0,445
4	0,69	0,176	0,138	0,229	0,633	0,6587	0,027	0,173	0,201	0,626
5	0,60	0,405	0,0646	0,209	0,7264	0,5495	0,0089	0,128	0,201	0,671
6	0,53	0,405	0,0646	0,209	0,7264	0,4662	0,0089	0,128	0,201	0,671
7	0,48	0,497	0,0647	0,188	0,7473	0,4026	0,0089	0,128	0,201	0,671
8	0,44	0,497	0,0647	0,188	0,7473	0,3533	0,0089	0,128	0,201	0,671

$$r_{1000} = 1,700084 - 0,95D20, \quad R^2 = 0,90. \quad (5.4.2)$$

O ponto a salientar é que o construto,  $D$  (decidabilidade, das variáveis relação e diferença das variáveis originais), representa um grau de associação entre duas variáveis aleatórias. Viu-se que

esse indicador, derivado de dois outros, introduzidos por Campello de Souza (1993, 2002, 2007), está linearmente correlacionado com a correlação de Pearson entre as duas mencionadas variáveis aleatórias. Quando esta linearidade não existir, para tipos quaisquer de variáveis aleatórias, a idéia é que o construto se mantenha, libertando-se da correlação de Pearson. Há que se pesquisar isto, com mais simulações.

O procedimento é:

- Normalizar as duas variáveis originais;
- Fazer a relação das variáveis normalizadas;
- Fazer a diferença das variáveis normalizadas;
- Com os dois últimos resultados calcular a vagueza global, o conflito e conseqüentemente a decidabilidade;
- Aplicar a equação de regressão 5.4.2 para calcular a correlação de Pearson.

# 6 CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

## 6.1 Conclusões

1. Um indicador para medir a habilidade do especialista foi proposto. Trata-se do *inferential skill*.
2. O uso dos construtos do modelo de programação matemática na inferência estatística. O construto decidabilidade guarda uma relação linear com a correlação de Pearson. Esta relação representa um grau de associação entre duas variáveis aleatórias.
3. O modelo foi utilizado para fazer estimativas de médias de distribuição de probabilidade que foi comparado com o método da frequência relativa. Para tanto, fez-se simulações com distribuições de probabilidade beta com parâmetros diferentes. O método de Bland Altman mostrou que existe reprodutibilidade entre os dois métodos de inferência.
4. O modelo para distribuições simétricas não apresentou diferença estatística com as estimativas feitas pela frequência relativa. As distribuições assimétricas apresentaram diferença estatística significativas. O que sugere a necessidade de ajustes (correções) no modelo a exemplo dos ajustes de Yates e Bartlett.
5. Na avaliação da convergência verificou-se que a variância em torno dessas médias foram menores que pela frequência relativa.
6. O construto  $D$  e outros que possam surgir foi utilizado para captar a associação entre variáveis aleatórias que não necessariamente precisam ter uma associação linear.

## 6.2 Comentários e Sugestões

O modelo de programação linear presta-se não apenas para tratar o problema da educação do conhecimento *a priori* do especialista como para fazer inferência estatística. Aqui trabalhou-se nessas duas abordagens. Alguns experimentos onde a opinião de especialistas foi eduzida utilizando o método

foram mostrados no capítulo 3. No capítulo 4 mostrou-se como o modelo presta-se para fazer inferência estatística.

Sugestões para trabalhos futuros são:

- Interpretação dos elementos do modelo de programação linear;
- Estabelecer um ajuste para melhorar as estimativas da inferência;
- Estabelecer um procedimento para a montagem do questionário;

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, ADIEL TEIXEIRA DE. *Uma metodologia para avaliação de desempenho de sistemas de telecomunicações aplicando a teoria da decisão*. 285f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1985.
- ALMEIDA, ADIEL TEIXEIRA DE; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Decision theory in maintainance strategy for a two-unit redundant standby system. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 42, n. 3, p. 401–407, 1993.
- BARROS DE MELLO, CLAUDIA REGINA; SILVA JR., MANOEL FELICIANO. Trabalho sobre gerenciamento de ações. *Relatório de conclusão da disciplina Teoria da Decisão, do curso de engenharia elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, ministrada pelo prof. Fernando Menezes Campello de Souza*, 1987.
- BARROS FILHO, LUIS CORDEIRO. *Modelos de decisão aplicado à avaliação da manutenibilidade: o caso telecomunicações da CHESF*. 231f. Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1995.
- BARROW, JOHN D. *The infinite book*. London: Vintage, 2005.
- BAYES, TOMAS. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, v. 45, p. 269 – 315, 1970.
- BERGER, JAMES O. *Statistical decision theory and bayesian analysis*. 2. ed. New York: Springer- Velag New York, Inc, 1985. (Springer Series is Statistics).
- BERNSTEIN, PETER L. *Desafio aos deuses: a fascinante história do risco*. 7. ed. Editora Campos, 1997.



- BEZERRA, DIOGO DE CARVALHO. *Carteira de investimento usando teoria de decisão*. 110f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2003.
- BEZERRA, DIOGO DE CARVALHO; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Medidas subjetivas na escolha de um portfólio. *Primeiro Encontro Norte-Nordeste de Finanças*, 2004.
- BILLINGSLEY, PATRICK. *Probability and measure*. 3. ed. John Wiley, 1995.
- BLAND, J. MARTIN; ALTMAN, DOUGLAS G. Measuring agreement in method comparison studies. *Statistical Methods in Medical Research*, v. 8, p. 135–160, 1999.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDA MARIA. *Procedimentos para a aplicação da teoria da decisão*. 67f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007a.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Decisões racionais em situações de incerteza*. Tese para concurso de professor titular (Departamento de engenharia elétrica) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1993.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Introdução aos sistemas probabilísticos*, 2006. Livro em preparação.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Decisões racionais em situações de incerteza*. 2. ed. Recife: Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, 2007b.
- CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *Educação do conhecimento a priori*, 2007c. Livro em preparação.
- CAMPOS, FÁBIO. *Uma extensão à teoria matemática da evidência*. 113f. Tese (Doutorado em ciência da computação) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.
- CAMPOS, FÁBIO; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Extending Dempster-Shafer theory to overcome counter intuitive results. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NATURAL LANGUAGE PROCESSING AND KNOWLEDGE ENGINEERING. Beijing: Publishing House, 2005. p. 729–734.
- CAVALCANTI FILHO, ANTONIO C. COSTA; SILVA JR., BRAZ ISAIAS DA. Estimção de taxa de falhas de equipamentos. *Relatório de conclusão da disciplina Teoria da Decisão, do curso de engenharia*

- elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, ministrada pelo prof. Fernando Menezes Campello de Souza,, 1987.
- DEMPSTER, ARTHUR P. New methods for reasoning towards posterior distributions based on sample data. *Ann. Math. Statist*, v. 37, p. 355–374, 1966.
- FINE, TERRENCE L. *Theories of probability: an examination of foundations*. Academic Press, 1973.
- FINE, TERRENCE L. Lower probability as a representation for uncertainty and chance phenomena. *International Symposium on Information and Coding Theory - ISICT'87*, 1987.
- GARTHWAITE, PAUL H.; KADANE, JOSEPH B; O'HAGAN, ANTHONY. Statistical Methods for Eliciting Probability Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, v. 100, p. 680 – 701, 2005.
- GOSLING, JOHN PAUL. *Elicitation: a nonparametric view*. 180f. Thesis (Doctor of philosophy) — University of Sheffield. Sheffield, 2005.
- HALD, ANDERS. *Probability and measure*. John Wiley, 1990.
- INTRILIGATOR, MICHAEL D. *Mathematical optimization and economic theory*. Prentice-Hall, 1971.
- JAYNES, EDWIN T. Prior probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, v. 4, n. 3, p. 227 – 241, 1968.
- KAHNEMAN, DANIEL; SLOVIC, PAUL; TVERSKY, AMOS. *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- LEAL NETO, ANTENOR GOMES DE BARROS. *Procedimentos para elicitação de preferências e conhecimento a priori*. Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1988.
- LINS, ISIS DIDIER. *Desenvolvimento de software para Teoria da Decisão*. In: XIV CONIC - XIV Congresso de Iniciação Científica da Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.
- MOLINA, EDWARD C. Bayes' theorem: an expository presentation. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 2, n. 1, p. 23–37, 1931.

- MORAES, ALESSANDRA BERENGUER DE. *Estudo sobre a educação da utilidade e do conhecimento a priori*. 71f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2003.
- NADLER LINS, GERTRUDES COELHO. *Contribuições a um protocolo de educação do conhecimento a priori*. 67f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2000.
- NADLER LINS, GERTRUDES COELHO; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. A Protocol for the Elicitation of Prior Distributions. *ISIPTA'01*, June 26 - 29, p. 265–273, 2001. Publicado na íntegra nos Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications; Shaker Publishing, The Netherlands, ISBN 90-423-0130-9.
- OAKLEY, JEREMY E.; O'HAGAN, ANTHONY. Uncertainty in prior elicitation: a nonparametric approach. *Biometrika*, 2007.
- O'HAGAN, ANTHONY. Eliciting expert beliefs in substantial practical applications. *The Statistician*, v. 47, p. 21 – 35, 1998.
- O'HAGAN, ANTHONY; BUCK, CAITTLIN E.; ET. AL. *Uncertain judgements: eliciting experts' probabilities*. England: Jonh Wiley, 2006.
- PAULINO, CARLOS DANIEL; TURKMAN, M. ANTÔNIA AMARAL; MURTEIRA, BENTO. *Estatística bayesiana*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.
- PLATO, JAN VON. *Creating modern probability*. UK: Cambride Universty Press, 1998.
- SHAFFER, GLENN. *A mathematical theory of evidence*. 1. ed. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1976.
- SILVA, ALANE ALVES. *Teoria da decisão em cardiologia*. 156f. Dissertação (Mestrado em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.
- SILVA, ALANE ALVES; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. A Protocol for the Elicitation of Imprecise Probabilities. *ISIPTA'05*, 2005.

- STAMFORD DA SILVA, ALEXANDRE. *Desenvolvimento de ferramentas de apoio à decisão: o caso do Porto do Recife*. 216f. Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1994.
- STIGLER, STEPHEN M. *The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900*. 1. ed. The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.
- WALLEY, PETER. *Statistical reasoning with imprecise probability*. Chapman and Hall, 1996.
- WALLEY, PETER. Preface. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 105, p. 1–4, 2002.
- WALLEY, PETER; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. *The economic viability of solar energy systems*. UFPE and Cornell University, 1985. (Relatório Técnico).
- WALLEY, PETER; CAMPELLO DE SOUZA, FERNANDO MENEZES. Uncertainty and indeterminacy in assessing the economic viability of energy options: a case study of solar heating systems in Brazil. *Energy Systems and Policy*, v. 14, p. 281–304, 1990.
- WALLEY, PETER; FINE, TERRENCE L. Towards a frequentist theory of upper and lower probability. *The Annals of Statistics*, v. 10, p. 741–761, 1982.
- WINKLER, ROBERT L. The assessment of prior distributions in bayesian analysis. *Journal of the American Statistical Association*, v. 62, n. 319, p. 776 – 800, 1967.

# CÓDIGO FONTE

Códigos usados nas simulações da estimação da vagueza do problema da seção 4.5.

## Problema com os $a_{ij}$ e $b_s$ do Especialista

### Código das Restrições do Conjunto Viável

```
function Area=simula(N,A,b)

format long; randn('state',sum(100*clock))
%A=[-1,2,0;-1,0,20;0,-1,10;-1,1.5,1.5;-0.5,1,-0.5;-4,-4,1];
%b=[-0.5;0;0;0;0.25;0];

%N=500000;
n=1:N;

% NANN-> Numeros Aleatorios Nao Normalizados
NANN=rand([N,3]);

% Normalizando sum(PP,2) SUML*[1 1 1]

Fator=sum(NANN,2)*[1 1 1]; % Fator de Normalização (Soma das Linhas)

NAN=NANN./Fator; % NAN-> Numeros Aleatorios Normalizados

b1=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(1,:)).*NAN,2)-b(1)))./2;
```

```

b2=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(2,:)).*NAN,2)-b(2)))./2;
b3=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(3,:)).*NAN,2)-b(3)))./2;
b4=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(4,:)).*NAN,2)-b(4)))./2;
b5=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(5,:)).*NAN,2)-b(5)))./2;
b6=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(6,:)).*NAN,2)-b(6)))./2;

bsim=b1.*b2.*b3.*b4.*b5.*b6;

%sum(bsim);

SomaAcumulada=cumsum(bsim); FreqRelativa=SomaAcumulada'./n;

Area=FreqRelativa(N);

```

### Estimativa da Área do Conjunto Viável

```

clc
clear
echo
off

A=[-1,2,0;-1,0,20;0,-1,10;-1,1.5,1.5;-0.5,1,-0.5;-4,-4,1];
b=[-0.5;0;0;0;0.25;0];
ks=1000000;
k=5000;
FR=zeros(k,1); for i=1:k,
    FR(i)=simula(ks,A,b)*sqrt(3)/2;
    disp(num2str(i))
end FRm=mean(FR) FRvar=var(FR)

```

## Problema com os $a_{ij} = 1$ e $b_s = 0$

### Código das Restrições do Conjunto Viável

```
function Area=simula2(N,A,b)

format long; randn('state',sum(100*clock))
%A=[-1,2,0;-1,0,20;0,-1,10;-1,1.5,1.5;-0.5,1,-0.5;-4,-4,1];
%b=[-0.5;0;0;0;0.25;0];

%N=500000;
n=1:N;

% NANN-> Numeros Aleatorios Nao Normalizados
NANN=rand([N,3]);

% Normalizando sum(PP,2) SUML*[1 1 1]

Fator=sum(NANN,2)*[1 1 1]; % Fator de Normalização (Soma das Linhas)

NAN=NANN./Fator; % NAN-> Numeros Aleatorios Normalizados

b1=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(1,:)).*NAN,2)-b(1)))./2;
b2=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(2,:)).*NAN,2)-b(2)))./2;
b3=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(3,:)).*NAN,2)-b(3)))./2;
b4=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(4,:)).*NAN,2)-b(4)))./2;
b5=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(5,:)).*NAN,2)-b(5)))./2;
b6=(1-sign(sum((ones(N,1)*A(6,:)).*NAN,2)-b(6)))./2;

bsim=b1.*b2.*b3.*b4.*b5.*b6;
```

```
%sum(bsim);
```

```
SomaAcumulada=cumsum(bsim); FreqRelativa=SomaAcumulada'./n;
```

```
Area=FreqRelativa(N);
```

### Estimativa da Área do Conjunto Viável

```
clc
```

```
clear
```

```
echo
```

```
off
```

```
A=[-1,1,0;-1,0,1;0,-1,1;-1,1,1;-1,1,-1;-1,-1,1];
```

```
b=[0;0;0;0;0;0;0];
```

```
ks=1000000;
```

```
k=2000;
```

```
FR=zeros(k,1); for i=1:k,
```

```
    FR(i)=Simula2(ks,A,b)*sqrt(3)/2;
```

```
    disp(num2str(i))
```

```
end FRm=mean(FR) FRvar=var(FR)
```



# A EDUCAÇÃO DAS OPINIÕES DOS ESPECIALISTAS SOBRE OS PREÇOS DA ENERGIA

## Carta aos Setores

A carta a seguir foi enviada à Companhia Hidrelétrica do São Francisco (CHESF) e ao Ministério das Minas e Energia.

*“Recife, 25 de abril de 1985*

*Ilmo. Sr.*

*Prezado Senhor*

*O Laboratório de Estudos Energéticos (LEE) do Departamento de Eletrônica e Sistemas (DES) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) estuda de uma forma abrangente a problemática energética, em particular a do Nordeste brasileiro, e participa efetivamente do esforço desenvolvimentista no setor.*

*É redundante insistir na importância do setor energético, e daí é fácil entender porque um grupo trabalhando em Engenharia de Sistemas convergiu os interesses e esforços no estudo de problemas ligados à energia solar. Esse estudo, inclusive, é de natureza nitidamente interdisciplinar, e o interesse deve-se à importância do recurso solar no Nordeste brasileiro.*

*Entre outras pesquisas estamos desenvolvendo uma "Metodologia para Análise de Risco no Uso da Energia Solar", que inclui estudo de viabilidade econômica em*

situações de incerteza, e além de considerar dados históricos e informações de campo, incorpora opiniões de especialistas do setor energético.

Ficariamos muito gratos se V.Sa. pudesse responder às questões que seguem em anexos, e devolve-las o mais breve possível ao nosso Departamento. Caso V.Sa. conheça outras pessoas especializadas que pudessem também contribuir seria interessante fotocopiar as questões e distribuir.

Quando a pesquisa estiver concluída, enviaremos a V.Sa. os resultados, incluindo as opiniões de outros especialistas.

Certos da atenção e do interesse de V.Sa. com relação ao assunto, subscrevemo-nos.

Atenciosamente

Fernando Menezes Campello de Souza

- Chefe do DES -

Nosso Endereço: Departamento de Eletrônica e Sistemas Centro de Tecnologia

Universidade Federal de Pernambuco Cidade Universitária, S/No RECIFE - PE -  
CEP.: 50.000.

”

## **QUESTIONÁRIO PARA A EDUCAÇÃO DAS OPINIÕES DOS ESPECIALISTAS SOBRE OS PREÇOS DA ENERGIA**

“Nome:

Endereço:

Um dos fatores que influenciam decisivamente sobre a atratividade e a viabilidade dos investimentos em equipamentos de energia solar (para uso residencial e industrial) é a inflação relativa dos preços da energia convencional (eletricidade e óleo combustível) com respeito aos

preços dos bens e serviços da economia como um todo. O que interessa, por exemplo, é a relação:

$$\frac{(\text{preço de uma unidade de energia elétrica no tempo futuro } t)}{(\text{valor final do preço atual de uma unidade de energia elétrica se investido de } 0 \text{ a } t)}$$

A incerteza quanto aos valores futuros dessa relação dificulta bastante a apreciação, por parte dos potenciais investidores, das vantagens do investimento em energia solar. É fundamental pois que se combine informações provenientes de dados e fatos concretos com informações obtidas a partir de opiniões de especialistas sobre os preços da energia.

Com relação às opiniões que se está solicitando neste questionário, é importante ser realista quanto às incertezas. Não se está esperando nem solicitando previsões de valores exatos. A idéia é trabalhar com desigualdades e faixas de valores.

Um dos objetivos da pesquisa sobre a viabilidade da energia solar é estabelecer perspectivas coerentes quanto ao tempo de retorno e o valor esperado do investimento em energia solar.

## **1. Possíveis Cenários**

Liste os possíveis fatores que influenciarão a taxa de inflação no preço da energia elétrica. Inclua fatores políticos, econômicos, técnicos, etc., indicando especialmente aqueles que são os mais favoráveis e os menos favoráveis a um rápido aumento no preço. Explique resumidamente porque os cenários apresentados são possíveis e plausíveis. Considere horizontes de um, dois, três, cinco, dez e vinte anos.

## **2. Uso dos Cenários**

Use os cenários apresentados no item **1.** para avaliar os possíveis valores numéricos das taxas de inflação do preço da energia elétrica. Seja claro com respeito ao significado de números como 3%, 5%, 300%, etc. Explique brevemente o que eles significam. Ordene os cenários começando pelo mais provável, e dê uma faixa de probabilidade para cada cenário. Considere horizontes de um, dois, três, cinco, dez e vinte anos.

## **3. Avalie as probabilidades dos possíveis valores numéricos das taxas de inflação**

Para exemplificar considere o seguinte exemplo. Um indivíduo coloca Cr\$ 100,00 na caderneta de poupança, e ao final de um ano o seu saldo é Cr\$ 400,00. Se Cr\$ 100,00 fosse o preço de um kilowatt-hora, qual seria o preço do kilowatt-hora no final do mesmo ano? Suponha que, pela sua experiência e sentimento da questão, a sua opinião é de que esse preço no final do ano seria qualquer coisa como Cr\$ 420,00. A taxa relativa de inflação seria então:

$$TR = \left( \frac{420}{400} - 1 \right) \times 100\% = (1,05 - 1) \times 100\% = 5\%.$$

Note que esta taxa relativa pode ser negativa.

Compare então as seguintes probabilidades:

$P(TR > 5\%)$  = Probabilidade de que a taxa relativa de inflação da energia seja maior do que 5% (=0,3, por exemplo).

”

	1	2	3	5	10	20
$P(TR > -100\%) =$						
$P(TR > -75\%) =$						
$P(TR > -50\%) =$						
$P(TR > -25\%) =$						
$P(TR > -20\%) =$						
$P(TR > -15\%) =$						
$P(TR > -10\%) =$						
$P(TR > -8\%) =$						
$P(TR > -6\%) =$						
$P(TR > -4\%) =$						
$P(TR > -2\%) =$						
$P(TR > 0\%) =$						
$P(TR > 2\%) =$						
$P(TR > 4\%) =$						
$P(TR > 6\%) =$						
$P(TR > 8\%) =$						
$P(TR > 10\%) =$						
$P(TR > 15\%) =$						
$P(TR > 20\%) =$						
$P(TR > 25\%) =$						
$P(TR > 50\%) =$						
$P(TR > 75\%) =$						
$P(TR > 100\%) =$						

O questionário a seguir foi enviado a especialistas (tipicamente engenheiros mecânicos) do setor de aquecimento (fabricação de *boilers*, trocadores de calor, evaporadores, etc.).

### **QUESTIONÁRIO PARA A EDUCAÇÃO DAS OPINIÕES DOS ESPECIALISTAS SOBRE O TEMPO DE VIDA ÚTIL DE EQUIPAMENTOS SOLARES**

“Nome:

Endereço:

Entre os fatores que influenciam decisivamente sobre a atratividade e a viabilidade dos investimentos em equipamentos de energia solar (para uso residencial e industrial) estão a confiabilidade e a manutenibilidade desses equipamentos. O importante aqui é o tempo de vida útil do equipamento e o custo de manutenção durante esse tempo operacional. Esse custo total tem a ver com o custo dos reparos, a frequência dos reparos, o custo do seguro, e

	1	2	3	5	10	20
$P(TR < -80\%) =$						
$P(TR < -60\%) =$						
$P(TR < -40\%) =$						
$P(TR < -30\%) =$						
$P(TR < -18\%) =$						
$P(TR < -12\%) =$						
$P(TR < -9\%) =$						
$P(TR < -7\%) =$						
$P(TR < -5\%) =$						
$P(TR < -3\%) =$						
$P(TR < -1\%) =$						
$P(TR < 1\%) =$						
$P(TR < 3\%) =$						
$P(TR < 5\%) =$						
$P(TR < 7\%) =$						
$P(TR < 9\%) =$						
$P(TR < 12\%) =$						
$P(TR < 18\%) =$						
$P(TR < 30\%) =$						
$P(TR < 40\%) =$						
$P(TR < 60\%) =$						
$P(TR < 80\%) =$						

qualquer outro custo operacional.

A **confiabilidade** de um equipamento ou sistema pode ser definida como a probabilidade de que ele não deixará de operar em um dado intervalo de tempo. De forma simples, é a probabilidade de sucesso. A frequência na qual as falhas ocorrem é usada como um parâmetro para a formulação matemática da confiabilidade e é chamada de **taxa de falhas**.

Pode-se distinguir três tipos característicos de falha:

1. A **falha prematura**; é resultante de técnicas infelizes de fabricação e controle de qualidade durante o processo de produção, e ocorrem nas primeiras horas ou dias de operação.
2. A **falha casual (sem causa aparente)**; as falhas causais são aquelas que nenhuma boa técnica pode eliminar. São causadas por uma espécie de acumulação de fadigas repentinas, além da resistência de projeto do componente. Assim, o mecanismo físico dessas falhas é um acúmulo repentino de ação de fadiga. Ocorrem em intervalos aleatórios, irregulares e inesperados. Não se pode prever sua ocorrência, mas elas seguem certas regras de comportamento coletivo, tal que a frequência de sua ocorrência durante períodos

suficientemente longos é aproximadamente constante, logo o período de observação desta frequência deve ser dimensionado adequadamente.

Uma maneira de estimar a taxa de falhas é dividir o número total de falhas num determinado intervalo de tempo, pelo número total de equipamentos em operação.

3. **A falha devida ao envelhecimento;** falhas causadas pela idade do equipamento ocorrem em função do desgaste físico natural dos componentes e implicam num tempo de vida médio de desgaste das peças.

Os três tipos de falha são diferenciados, pois cada um tem uma distribuição de probabilidade específica, requerendo tratamento diferenciado e adequado.

A curva da taxa de falhas em função do tempo de vida tem o formato geral mostrado na figura 1.

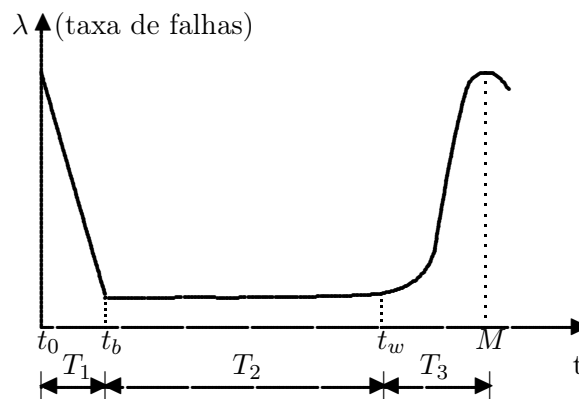


Figura 1: Curva da banheira.

Tem-se três fases:

1. De  $t_0$  a  $t_b$ , inicia com alta taxa de falhas que decresce rapidamente, em função de falhas prematuras que ocorrem neste período, às vezes denominado de período de mortalidade infantil;
2. De  $t_b$  a  $t_w$ , taxa de falhas aproximadamente constante e de baixo valor; período de vida útil, com falhas casuais;
3. De  $t_w$  a  $M$ , começa com o desgaste, onde a taxa de falhas aumenta muito rapidamente. O tempo  $M$  é o de vida média de desgaste. Até  $t_w$  pequena percentagem da população tem falhado, mas cerca da metade falha entre  $t_w$  e  $M$ , por exemplo.

A manutenibilidade pode ser definida como a probabilidade de que um dispositivo ou sistema tendo falhado, será restaurado para operação efetiva dentro de um dado período de tempo, quando a ação de manutenção é executada de acordo com procedimentos prescritos.

Do ponto de vista do projeto, o objetivo da manutenibilidade é projetar e desenvolver sistemas e equipamentos que podem ser mantidos no menor tempo, ao menor custo, e com a mínima despesa de recursos de suporte, sem afetar adversamente as características de desempenho e segurança.

### **1. Quando é que se decide que a vida útil de um equipamento de energia solar terminou?**

Procure caracterizar o que vem a ser o tempo de vida útil (TVU) de um equipamento de energia solar para aquecimento d'água (coletor, reservatório, etc.). Apresente os dados objetivos sobre esse assunto; fatos concretos sobre casos reais, indicando as causas do fim do período utilizável dos equipamentos (ferrugem, corrosão, vazamentos, queda da pintura, etc.). Quando é que se deve substituir todo o equipamento? Que equipamento?

### **2. Qual o tempo de vida útil dos equipamentos solares (coletor, reservatório, controles, etc.)?**

Apresente uma cota superior (limite superior) para o tempo de vida útil desses equipamentos, e uma cota inferior. Todos esses valores devem ser subjetivos. Quais são as causas do término do período útil dos dispositivos?

### **3. Avalie subjetivamente as seguintes probabilidades:**



	Coletores	Reservatório	Controles
$P(TVU \geq 30 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 25 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 20 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 17 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 14 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 12 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 10 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 8 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 6 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 4 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \geq 2 \text{ anos}) =$			

	Coletores	Reservatório	Controles
$P(TVU \leq 27 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 24 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 21 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 18 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 15 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 13 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 11 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 9 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 7 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 5 \text{ anos}) =$			
$P(TVU \leq 3 \text{ anos}) =$			

Em que tempos as probabilidades abaixo são verdadeiras?

Coletores	Reservatórios	Controles
$P(TVU \geq \quad) = 0,50$	$P(TVU \geq \quad) = 0,50$	$P(TVU \geq \quad) = 0,50$
$P(TVU \geq \quad) = 0,10$	$P(TVU \geq \quad) = 0,10$	$P(TVU \geq \quad) = 0,10$
$P(TVU \geq \quad) = 0,25$	$P(TVU \geq \quad) = 0,25$	$P(TVU \geq \quad) = 0,25$
$P(TVU \geq \quad) = 0,75$	$P(TVU \geq \quad) = 0,75$	$P(TVU \geq \quad) = 0,75$
$P(TVU \geq \quad) = 0,90$	$P(TVU \geq \quad) = 0,90$	$P(TVU \geq \quad) = 0,90$

Seja  $TF$  o tempo em que ocorre a primeira falha. Avalie as probabilidades abaixo.

	Coletores	Reservatórios	Controles
$P(TF \geq 1 \text{ ano}) =$			
$P(TF \geq 2 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 5 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 7 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 10 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 13 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 18 \text{ anos}) =$			
$P(TF \geq 25 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 3 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 6 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 8 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 9 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 12 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 15 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 20 \text{ anos}) =$			
$P(TF \leq 30 \text{ anos}) =$			

**4. Tente especificar os tipos de equipamento e caracterizar três tipos de manutenção:**

Nenhuma, boa e de média qualidade. Quais os custos dessas manutenções, e em geral quando é que elas ocorrem?

**5. Qual o valor de sucata dos equipamentos de energia solar?**

Isto é, ao fim da sua vida útil, quanto se pode obter por ele no mercado de materiais usados (ferro velho, por exemplo)?

”

# QUESTIONÁRIO DE BARROS DE MELLO E SILVA JR.

“Os questionários foram respondidos por dois especialistas no equipamento tratado, a saber, o engenheiro Inaldo Barbosa e o técnico Agenor. O primeiro questionário apresentado a seguir foi respondido pelo engenheiro Inaldo Barbosa.”

“1. Qual a taxa de falhas do equipamento? R.

$$MTBF \begin{cases} \text{Transmissor} = 170000 \text{ hs} \\ \text{Sistema de Controle} = 2270000 \text{ hs} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{MTBF} = 5.882E - 6$$

2. Qual o número de falhas do equipamento na sua opinião? R. Para um período de dois anos é de quatro falhas.

3. Qual a probabilidade de que o equipamento não falhe nenhuma vez? R. 10%.

4. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo uma vez? R. 20%.

5. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo duas vezes? R. 40%

6. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo três vezes? R. 50%.

7. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo quatro vezes? R. 70%.

8. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo doze vezes? R. 10%.

9. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo vinte vezes? R. 1%.

10. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo vinte e oito vezes?

R. 0,50%.

11. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo trinta e seis vezes?

R. 0,50%.

O questionário a seguir foi respondido por Agenor, um dos técnicos responsáveis pela manutenção das linhas.

1. Qual o número de falhas do equipamento na sua opinião? R. Para um período de dois anos é de seis falhas.

2. Qual a probabilidade de que o equipamento não falhe nenhuma vez? R. 0,10%.

3. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo uma vez? R. 0,20%.

4. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo três vezes? R. 90%

5. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo cinco vezes? R. 80%.

6. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo seis vezes? R. 70%.

7. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo treze vezes? R. 20%.

8. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo vinte e uma vezes?

R. 5%.

9. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo vinte e oito vezes?

R. 0,30%.

10. Qual a probabilidade do equipamento falhar no máximo trinta e seis vezes?

R. 0,00%.”

“Observação: Na elaboração de tais perguntas consideramos que o melhor caso seria aquele em que não houvesse falha de qualquer dos equipamentos, e o pior caso seria aquele em que os trinta e seis falhassem.

A partir dos pontos obtidos, traçamos as curvas de densidade de probabilidade de cada indivíduo (neste caso obtivemos uma densidade de probabilidade de Rayleigh). As curvas vêm a seguir. É interessante observar que a curva correspondente ao levantamento realizado com o engenheiro Inaldo Barbosa corresponde muito mais à forma esperada da distribuição, provando

que, apesar de já não ter um contato tão direto e constante com a referida linha — conforme ele próprio nos informou — suas informações se aproximavam muito mais da realidade.”

## Questionário de Cavalcanti Filho e Silva Jr.

“Na CHESF (Companhia Hidroelétrica do São Francisco) temos 17 enlaces que são usados para comunicações entre as centrais regionais da mesma. Cada enlace é composto de dois aparelhos chamados TIC’s. Temos o TIC que emite, o TICE, e o TIC que recebe as informações, o TICR. [...] calcular (estimar) a taxa de falhas dos equipamentos.”

### “3. ESTIMAÇÃO DO NÚMERO DE FALHAS MENSAL

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Queremos estimar o número de falhas mensal dos aparelhos citados anteriormente. Temos as seguintes informações:

1.  $\theta$  é fixo.
2.  $P(x|\theta)$  é aproximado por uma distribuição de Poisson de parâmetro  $\theta$ .
3. Temos acesso a um especialista que pode nos ajudar, respondendo a um questionário, a eduzir a função conhecimento *a priori* para o  $\theta$ .
4. Temos acesso a uma massa de dados referentes ao número de falhas mensais desde Jan-85 até Dez-86.
5. A perda é quadrática.

#### 3.2 EDUCAÇÃO DA FUNÇÃO CONHECIMENTO A PRIORI

A função conhecimento *a priori* foi eduzida com as informações do engenheiro Hélio Burle de Menezes ao responder ao seguinte questionário:

1. Qual a taxa de falhas mensal na sua opinião? (TAXA1)
2. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser igual a TAXA1?
3. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser igual a TAXA1/2?
4. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser igual a TAXA1/4?

5. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser igual a  $TAXA * 3/4$ ?
6. Estime uma taxa de falhas grande o bastante de modo que seja inverossímil. ( $TAXA2$ ).
7. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser  $TAXA3 = (TAXA1 + TAXA2)/2$ ?
8. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser  $(TAXA3 + TAXA2)/2$ ?
9. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser  $(TAXA1 + TAXA3) * 3/4$ ?
10. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser 1% da  $TAXA1$ ?
11. Qual a probabilidade da taxa de falhas ser 99% da  $TAXA3$ ?

Concluída a abordagem do questionário partimos para estimar a função com os dados recolhidos. Depois de algumas tentativas, tivemos que a dita função se aproximava de uma distribuição Rayleigh de  $b = 15, 13$ .

Procedimento:  $b(E(X)/1, 253) * 2$ , onde  $E(X)$  é a esperança feita com os dados disponíveis.”

A Tabela 1 resume a densidade *a priori* de  $\theta$  do especialista, o engenheiro Hélio Burle de Menezes.

Tabela 1: A distribuição *a priori* eduzida do engenheiro Hélio Burle de Menezes.

Caso	$\theta$	$\pi(\theta)$
1	0,0	1,0
2	1,0	15,0
3	2,0	30,0
4	3,0	40,0
5	4,0	70,0
6	12,0	1,0
7	17,0	0,0
8	24,0	0,0
9	30,0	0,0

Os registros da CHESF são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: Dados relativos ao número de falhas por mês (1985–1986).

Mês	Número de falhas
1	4
2	5
3	4
4	8
5	8
6	9
7	2
8	2
9	10
10	5
11	4
12	5
13	3
14	1
15	1
16	9
17	5
18	4
19	3
20	6
21	5
22	3
23	6
24	8

# EDUCAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO *A Priori* DO TEMPO DE TRAMITAÇÃO DE UM EMPENHO NA UNIVERSIDADE

QUESTIONÁRIO PARA A EDUCAÇÃO DO CONHECIMENTO *A PRIORI* DE UM ESPECIALISTA (MÉTODO CDF)

Nome do entrevistado:

Data da entrevista.

Introdução

- Introduzir o problema sob consideração.
- Inquirir sobre o grau de conhecimento do entrevistado em estatística, deixando claro que não é necessário que a pessoa tenha qualquer familiaridade com conceitos de probabilidade.
- Discutir aspectos relacionados com a teoria subjetivista da probabilidade, estatística bayesiana, etc.
- Reforçar o interesse no conhecimento que a pessoa tenha sobre a variável em estudo, assinalando que não existe uma resposta correta a ser dada às perguntas (estamos interessados em obter suas expectativas pessoais relacionadas com a variável). Seu conhecimento é de interesse, não importando o quão vago ou geral ele seja.

1. Estabelecer o valor mínimo e o valor máximo da variável

Valor Mínimo:



Valor Máximo:

2. Solicitar à pessoa a dividir este segmento em dois equiprováveis (se necessário, esclarecer a questão de forma a tornar o ponto mais claro).

---

3. Fazer novas subdivisões de forma a encontrar mais alguns fractis da distribuições (6 pontos).

_____	_____
_____	_____
_____	_____

4. Checar para possíveis inconsistências.

---

## QUESTIONÁRIO PARA A EDUCAÇÃO DO CONHECIMENTO *A PRIORI* DE UM ESPECIALISTA (MÉTODO DO INTERVALO FIXO)

Nome do entrevistado:

Data da entrevista.

Introdução

- Introduzir o problema sob consideração.
- Inquirir sobre o grau de conhecimento do entrevistado em estatística, deixando claro que não é necessário que a pessoa tenha qualquer familiaridade com conceitos de probabilidade.
- Discutir aspectos relacionados com a teoria subjetivista da probabilidade, estatística bayesiana, etc.
- Reforçar o interesse no conhecimento que a pessoa tenha sobre a variável em estudo, assinalando que não existe uma resposta correta a ser dada às perguntas (estamos interessados em obter suas expectativas pessoais relacionadas com a variável). Seu conhecimento é de interesse, não importando o quão vago ou geral ele seja.

1. Estabelecer o valor mínimo e o valor máximo da variável

Valor Mínimo:

Valor Máximo:

2. Identificar o valor mais provável para a variável em estudo.

Valor:

3. Dividir o intervalo em partes iguais e oferecer três destas ao entrevistado aleatoriamente para este estabelecer suas expectativas.

Mais provável:

Menos provável:

Solicitar, a seguir, as probabilidades associadas aos três eventos.

4. Descobrir a probabilidade do evento que contem o valor mais provável (procurar comparar com as probabilidades já estabelecidas).

5. Encontrar as probabilidades dos demais eventos e checar possíveis inconsistências.”

O primeiro entrevistado é formado em engenharia elétrica e com pós-graduação em engenharia nuclear. Já cursara estatística, mas não estava muito familiarizado com estatística bayesiana. As respostas dele ao questionário do método CDF foram:

Menor valor: 1

Maior valor: 40

A Tabela 3 resume os resultados.

Tabela 3: Os resultados do método CDF para o primeiro entrevistado.

Caso	Dias	Probabilidade
1	3	0,0100
2	5	0,1250
3	7	0,2500
4	8	0,3750
5	10	0,5000
6	12	0,6250
7	15	0,7500
8	20	0,8750
9	40	0,9900

Para o método do intervalo fixo os resultados são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4: Os resultados do método do intervalo fixo para o primeiro entrevistado.

Caso	Dias	Probabilidade
1	9	0,0400
2	15	0,1300
3	21	0,2500
4	27	0,4200
5	33	0,9200
6	39	0,9900

Tabela 5: O resultado final para o primeiro entrevistado.

Caso	Dias	Probabilidade
1	3	0,0100
2	5	0,0450
3	7	0,0850
4	9	0,1150
5	11	0,1850
6	13	0,2950
7	15	0,4200
8	17	0,5600
9	19	0,6600
10	21	0,7300
11	23	0,7850
12	25	0,8300
13	27	0,8650
14	29	0,8900
15	31	0,9200
16	33	0,9400
17	35	0,9650
18	37	0,9750
19	39	0,9900