



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**LEONARDO GOMES MACIEL E PEDRO VINICIO DOS SANTOS**

**FERRAMENTA PARA A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL  
UTILIZANDO OS ALGORÍTMOS ENXAME DE  
PARTÍCULAS (PSO) E PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA  
SEQUENCIAL (SQP) INTEGRADOS COM O SOFTWARE  
SAP2000**

RECIFE, 2023

LEONARDO GOMES MACIEL E PEDRO VINICIO DOS SANTOS

**FERRAMENTA PARA A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL UTILIZANDO OS  
ALGORÍTMOS ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO) E PROGRAMAÇÃO  
QUADRÁTICA SEQUENCIAL (SQP) INTEGRADOS COM O SOFTWARE SAP2000**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção de grau de Engenheiro Civil.

**Área de Concentração:** Engenharia Civil

**Orientador:** Prof. Dr. Leonardo Correia de Oliveira

**Coorientador:** Prof. Dr. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva

RECIFE, 2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Maciel, Leonardo Gomes.

Ferramenta para a otimização estrutural utilizando os algoritmos Enxame de Partículas (PSO) e Programação Quadrática Sequencial (SQP) integrados com o software SAP2000. / Leonardo Gomes Maciel, Pedro Vinício dos Santos. - Recife, 2023.

46 : il., tab.

Orientador(a): Leonardo Correia de Oliveira

Coorientador(a): Silvana Maria Bastos Afonso da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Engenharia Civil - Bacharelado, 2023.

1. Otimização Estrutural. 2. PSO. 3. SQP. 4. Estruturas Metálicas. I. Santos, Pedro Vinício dos. II. Oliveira, Leonardo Correia de. (Orientação). III. Silva, Silvana Maria Bastos Afonso da. (Coorientação). IV. Título.

LEONARDO GOMES MACIEL E PEDRO VINICIO DOS SANTOS

**FERRAMENTA PARA A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL  
UTILIZANDO OS ALGORÍTMOS ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO) E  
PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL (SQP) INTEGRADOS  
COM O SOFTWARE SAP2000**

Monografia apresentada à Universidade Federal  
de Pernambuco como parte dos requisitos para  
obtenção de grau de Engenheiro Civil.

Aprovados em: 11/05/2023

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Leonardo Correia de Oliveira (Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva (Coorientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Bernardo Horowitz (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Paulo de Araújo Regis (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

“O Senhor é o meu pastor, nada me faltará”

“Sim, grandes coisas fez o Senhor por nós, por isso estamos alegres”

-Salmos 23:1; Salmos 126:3

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus. Sem Ele, nada disso seria possível.

Ao meu orientador, Dr. Leonardo Correia de Oliveira e coorientadora, Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva pela disponibilidade, paciência, empatia e auxílio ao longo da realização desse trabalho.

A toda comunidade da Universidade Federal de Pernambuco, que contribuiu de forma direta ou indireta neste trabalho. Em especial a meus amigos: Allan, César, Marcio, Jônathas Ferreira, Maria Izabel.

A minha amiga e ex-professora da Universidade de Pernambuco, Amanda Pereira, por ter me aconselhado e auxiliado durante a realização deste trabalho.

A minha mãe, por ter me dado a vida e me ajudado da forma que ela conseguia nas suas condições.

A minha amiga e namorada, Maria Eduarda, que me apoia e me acompanha desde o ensino médio. Que me escutou e me aconselhou bastante nesse período turbulento da minha vida.

Aos meus tios, Reginaldo e Juvenita pelo amor, educação e moradia. Sem o apoio deles, não conseguiria finalizar o ensino médio.

Aos meus primos, Danilo, Gabriela e Renatha pela presença na minha vida em momentos descontraídos.

A minha avó, Severina (in memoriam), que desde criança cuidou de mim e acreditou que eu alcançaria muito mais do que poderia imaginar. Sem sua presença, eu não estaria vivo aqui hoje podendo finalizar meu curso.

Leonardo Gomes Maciel

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, quero agradecer a Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais e ao meu irmão, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência em alguns momentos e me apoiaram e financeiramente e psicologicamente para que esse sonho se realizasse.

Ao meu orientador, Dr. Leonardo Correia de Oliveira e coorientadora, Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva pela disponibilidade, paciência, empatia e auxílio ao longo da realização desse trabalho.

Aos meus amigos Leonardo Maciel, minha dupla de TCC, Jônathas Ferreira, César Lira, Maria Izabel e Marília Gabriela. Eles foram fundamentais para que essa caminhada se tornasse mais leve e divertida.

Aos meus colegas de turma, por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

A minha Noiva MSc Chris Taíne, que chegou na fase final dessa caminhada, mas foi de fundamental importância sendo paciente e me aconselhando bastante ao decorrer da graduação.

À universidade Federal de Pernambuco, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

Pedro Vinicio dos Santos

## RESUMO

O objetivo do presente trabalho é a comparação do Algoritmo de Enxame de Partículas (PSO), utilizado como método de otimização paramétrica de estruturas metálicas em problemas de engenharia, com a solução da literatura e com o método de Programação Quadrática Sequencial (Sequential Quadratic Programming - SQP) para determinados casos utilizados, como, por exemplo, vigas com cargas distribuídas e axial, pórticos planos com cargas paralelas e transversal ao plano. A estrutura é modelada no programa SAP 2000 na versão de 2014 e os parâmetros da seção transversal de cada elemento da estrutura são alterados pelos otimizadores, SQP e PSO, programados no MATLAB versão 2022. Todo o dimensionamento e verificações foram feitos conforme a NBR 8800/2008. Também se estuda o comportamento e desempenho do referido algoritmo para variações em seus parâmetros de entrada nestes mesmos exemplos analisados. Conforme os resultados apresentados, em termos de precisão, os métodos tiveram desempenho equivalentes.

**Palavras-chave:** Otimização Estrutural, PSO, SQP, estruturas metálicas.

## **ABSTRACT**

The objective of the present work is the comparison of the Particle Swarm Algorithm (PSO), used as a parametric optimization method for steel structures in engineering problems, with the literature solution and with the Sequential Quadratic Programming (SQP) method for certain cases used, as, for example, beams with distributed and axial loads, plane frames with parallel and transversal loads to the plane. The structure is modeled in the SAP 2000 program in the 2014 version and the cross section parameters of each element of the structure are changed by the optimizers, SQP and PSO, programmed in MATLAB version 2022. All the dimensioning and verifications were done according to NBR 8800/2008. The behavior and performance of the algorithm is also studied for variations in its input parameters in these same analyzed examples. According to the results presented, in terms of accuracy, the methods had equivalent performance.

**Keywords:** Structural Optimization, PSO, SQP, metallic structures.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	9
1.1 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO .....	10
1.2 OBJETIVOS .....	10
<b>1.2.1 Objetivos Gerais</b> .....	10
2.1 FERRAMENTA DE ANÁLISE ESTRUTURAL 3D (SAP 2000) .....	11
<b>2.1.1 Método dos Elementos Finitos</b> .....	12
2.2 MATLAB.....	13
2.3 ESTUDO PARAMÉTRICO DE ESTRUTURAS .....	15
2.4 OTIMIZAÇÃO .....	16
<b>2.4.1 Conceito</b> .....	16
<b>2.4.2 Elementos do Processo de Otimização</b> .....	17
2.4.2.1 Função Objetivo .....	17
2.4.2.2 Variáveis de Projeto .....	17
2.4.2.3 Restrições .....	18
2.5 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS.....	18
<b>2.5.1 Definição</b> .....	18
<b>2.5.2 Distribuição Inicial</b> .....	20
<b>2.5.3 Iteração do Algoritmo</b> .....	20
<b>2.5.4 Critérios de Parada</b> .....	21
<b>2.5.5 Normalização</b> .....	22
2.6 OTIMIZAÇÃO POR PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL .....	23
<b>2.6.1 Conceito</b> .....	23
<b>3. DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS</b> .....	24
3.1 CONDIÇÕES GERAIS PARA O DIMENSIONAMENTO .....	24
3.2 VERIFICAÇÃO DO ESFORÇO NORMAL RESISTENTE .....	27
3.3 VERIFICAÇÃO DO MOMENTO RESISTENTE .....	29
3.4 VERIFICAÇÃO DO CORTANTE RESISTENTE .....	31
<b>4. RESULTADOS</b> .....	32
4.1 VIGA COM CARGA DISTRIBUÍDA E ESFORÇO AXIAL .....	34
4.2 PÓRTICO COM 3 BARRAS DE SEÇÕES DISTINTAS.....	36
4.3 PÓRTICO COM TRÊS BARRAS DE COM DUAS SEÇÕES.....	39
<b>5. CONCLUSÕES</b> .....	44
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	45

## 1. INTRODUÇÃO

Em todo projeto estrutural na Engenharia Civil busca-se alcançar o melhor resultado considerando 3 pontos fundamentais: funcionalidade, segurança e economia. Com o desenvolvimento tecnológico nas últimas décadas, foi possível desenvolver programas e modelos computacionais com o intuito facilitar o engenheiro na tomada de decisões.

Com o avanço de projetos mais complexos e com custos associados elevados, houve um maior interesse em estudar técnicas matemáticas que consigam resolver problemas atrelados a restrições (SILVA, 2016). Nesse contexto, estudos sobre otimização foram desenvolvidos com o intuito de obter um melhor resultado para a função objetivo (o que se deseja otimizar), considerando seus parâmetros (variáveis de projeto) a otimizadores e simulações computacionais.

Neste trabalho será apresentado uma ferramenta para otimização estrutural com simulação computacional, utilizando os algoritmos Enxame de Partículas (KENNEDY, EBERHART, 1995) e Programação Sequencial Quadrática (Chardaire & Sutter (1995) gerenciado em um código desenvolvido em MATLAB (MATHWORKS, 2022), para entrada e saída de dados, integrado ao software de cálculo estrutural SAP2000, devido a sua interface gráfica e intuitiva.

Tradicionalmente, a maioria das aplicações na engenharia consideram parâmetros determinísticos, podendo diminuir o desempenho das estruturas devidos às perturbações e incertezas, que podem ser desde um defeito de fábrica na peça, até falha humana em processos de construção (SILVA, 2016). Por conta disso, no manuscrito foram implementados coeficientes de majoração de cargas e restrições de projeto de acordo com a NBR 8800 (ABNT, 2008), intitulada “Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios”, a fim de garantir a estabilidade da estrutura.

## 1.1 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

As técnicas de otimização através de simulação computacional permitem criar o comportamento similar de um sistema em condições reais de operação. Esse sistema pode ser avaliado levando em consideração diferentes perspectivas no projeto, como variáveis de custo, deformações excessivas, consumo de materiais, etc. Elas também permitem a avaliação de diferentes cenários, permitindo que engenheiros possam criar projetos robustos através de uma análise detalhada de projeto, testando hipóteses.

Dessa forma, com a consideração de todas as informações necessárias na elaboração do projeto, é possível obter uma solução ótima através da otimização de um modelo matemático do problema proposto. Com isso, é possível tornar a estrutura mais esbelta, reduzindo o custo, quantidade de material e recursos naturais, por exemplo.

Portanto, com o uso de técnicas de otimização através de simulação computacional, é possível elaborar projetos mais econômicos, considerando os objetivos e as restrições definidas durante o seu planejamento, minimizando o impacto ambiental ocasionado pelo superdimensionamento de uma estrutura, por exemplo. Nesse cenário, o interesse em algoritmos que consigam resolver tais problemas se torna bastante relevante.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivos Gerais

Este trabalho possui como objetivo estudar o comportamento dos otimizadores Enxame de Partículas (PSO) e Programação Sequencial Quadrática (SQP) através de ferramentas computacionais aplicada em problemas considerando critérios da norma brasileira NBR 8800/2008. Os esforços nos elementos das estruturas foram obtidos através do SAP2000 (COMPUTERS AND STRUCTURES, 2016), e a viabilidade das estruturas dimensionadas foi verificada nos otimizadores através da imposição de restrições. Apesar de considerar os critérios presentes na NBR8800 (ABNT, 2008) a análise da viabilidade da estrutura não contempla a verificação das deformações máximas nos elementos estruturais.

### Objetivos Específicos

Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- Verificar o desempenho do PSO e do SQP na otimização de pórticos bidimensionais e espaciais de acordo com a NBR 8800 (ABNT, 2008);
- Comparar a solução ótima determinística nos resultados obtidos com o PSO e o algoritmo SQP em problemas estruturais;

- Realizar processo híbrido de otimização, inserindo a solução ótima obtida no PSO como ponto inicial para o SQP;
- Comparar solução híbrida com os resultados obtidos com os algoritmos PSO e SQP utilizados de forma isolada.

## **REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 FERRAMENTA DE ANÁLISE ESTRUTURAL 3D (SAP 2000)**

Neste trabalho foi utilizado o programa SAP2000 como ferramenta de uso para a análise estrutural. Este software foi desenvolvido pela empresa americana *Computers and Structures Inc* (CSI). Ele é utilizado para projetar e analisar estruturas de edifícios, pontes, torres, entre outras aplicações, calculado através do método dos Elementos Finitos (COMPUTERS AND STRUCTURES, 2016), descrito brevemente na seção 2.1.1.

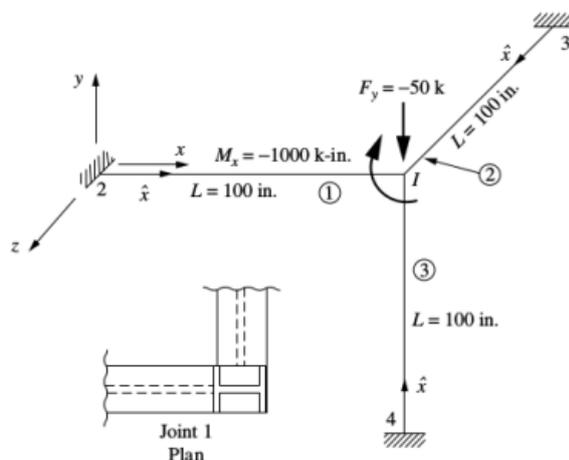
O SAP2000 é amplamente utilizado pelos engenheiros por possuir uma interface gráfica intuitiva e por ser capaz de criar modelos integrados as características inseridas pelo usuário acerca das cargas, materiais e propriedades. Seus resultados são diversos, podem ser desde apresentar o diagrama de esforços a partir das combinações de ações, a visualizar as reações de apoio, o deslocamento em qualquer ponto na estrutura, etc.

Outra característica relevante é a sua capacidade de se integrar com outros softwares, tornando-o versátil para o engenheiro. Nesta monografia foi integrado o Excel, para o armazenamento das características da estrutura e seus esforços, e o MATLAB a realização das otimizações considerando os algoritmos PSO e SQP.

Por questões didáticas, a princípio foi realizado a validação do conhecimento dos estudantes acerca do programa através da implementação de uma estrutura espacial estudada por Logan (LOGAN, 2011) demonstrada na Figura 1. Na Tabela 1 é possível observar as propriedades do material e algumas características geométricas da seção. Foi consolidado o conhecimento dos estudantes sobre o programa, como pode ser observado na Tabela 2. É importante destacar que as translações apresentadas a seguir estarão em polegadas e as rotações em radianos.

É possível observar através da Tabela 2 que os resultados apresentados na literatura são idênticos aos encontrados a partir do emprego no software, constatando o conhecimento dos estudantes acerca do software.

Figura 1- Pórtico espacial para análise linear.



Fonte: Logan (2011, p. 262)

Tabela 1- Propriedades do material e características da seção.

E	30000 ksi
G	10000 ksi
J	50 pol <sup>4</sup>
I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub>	100 pol <sup>4</sup>
A	10 pol <sup>2</sup>
L	100 pol

Fonte: Os Autores.

Tabela 2 – Comparativo entre os deslocamentos encontrados através do software SAP200

Deslocamento	(LOGAN, 2011)	Autor
dx	$7.098 \cdot 10^{(-5)}$	$7.098 \cdot 10^{(-5)}$
dy	$-1.4 \cdot 10^{(-2)}$	$-1.4 \cdot 10^{(-2)}$
dz	$-2.352 \cdot 10^{(-3)}$	$-2.352 \cdot 10^{(-3)}$
Θ <sub>x</sub>	$-3.996 \cdot 10^{(-3)}$	$-3.996 \cdot 10^{(-3)}$
Θ <sub>y</sub>	$1.78 \cdot 10^{(-5)}$	$1.78 \cdot 10^{(-5)}$
Θ <sub>z</sub>	$-1.033 \cdot 10^{(-4)}$	$-1.033 \cdot 10^{(-4)}$

Fonte: Os Autores.

### 2.1.1 Método dos Elementos Finitos

Como o SAP200 é um programa que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para sua análise, torna-se imprescindível seu conhecimento. Ele vem sendo utilizado em

grande escala devido a construções cada vez mais robustas alinhada com o avanço tecnológico das últimas décadas.

O método consiste em fazer uma aproximação discreta (número de incógnitas finito) para um problema contínuo (número infinito de incógnitas). Para isso a geometria do problema é dividida em pequenos elementos, sendo geralmente em formato de barras (elementos com 1 dimensão), triangulares ou quadriláteros (2 ou 3 dimensões) (Caixeta, Fátima, 2018). Cada elemento é conectado entre si por pontos, denominado de nós. O conjunto nó e elemento denomina-se malha. A precisão do método se dá a partir do tamanho da malha.

De forma geral, o método pode ser dividido nas seguintes etapas:

- Discretizar a região de análise em um número finito de sub-regiões (elementos);
- Obtenção das equações de cada elemento;
- Montar um sistema global que inclui as equações de todos os elementos;
- Resolver o Sistema de Equações global obtido.

## 2.2 MATLAB

Para realizar a otimização das estruturas com os dados obtidos pelo SAP2000, foi feito o estudo acerca da plataforma de programação e computação numérica denominada MATLAB (MATHWORKS, 2022). Ele é amplamente utilizado em áreas voltadas a ciências exatas para a resolução de problemas de cálculo numérico, machine learning, análise de dados, simulações, entre outros.

O MATLAB possui uma linguagem própria onde é possível criar scripts com saídas, além de bibliotecas de funções dentro do próprio sistema, permitindo aos usuários que não precisem escrever um código do zero. Neste trabalho foi aproveitado seus benefícios e utilizados os algoritmos disponibilizados pela plataforma para simulação computacional das estruturas que serão apresentadas na seção 4.

Através do programa, foi possível construir um script que automaticamente selecionasse as dimensões da estrutura através dele e enviá-las ao SAP2000 para que ele armazenasse os dados e fizesse a análise estrutural, apresentado na Figura 2. E em seguida, verifica se as restrições foram atendidas. Para realizar esse processo, foi fundamental o material desenvolvido na tese realizada pela Dra. Mariella Santos (SANTOS, 2020). Na

seguinte figura, é possível observar a etapa na qual o MATLAB cria o arquivo do tipo “\$2k” para sua análise estrutural via SAP2000.

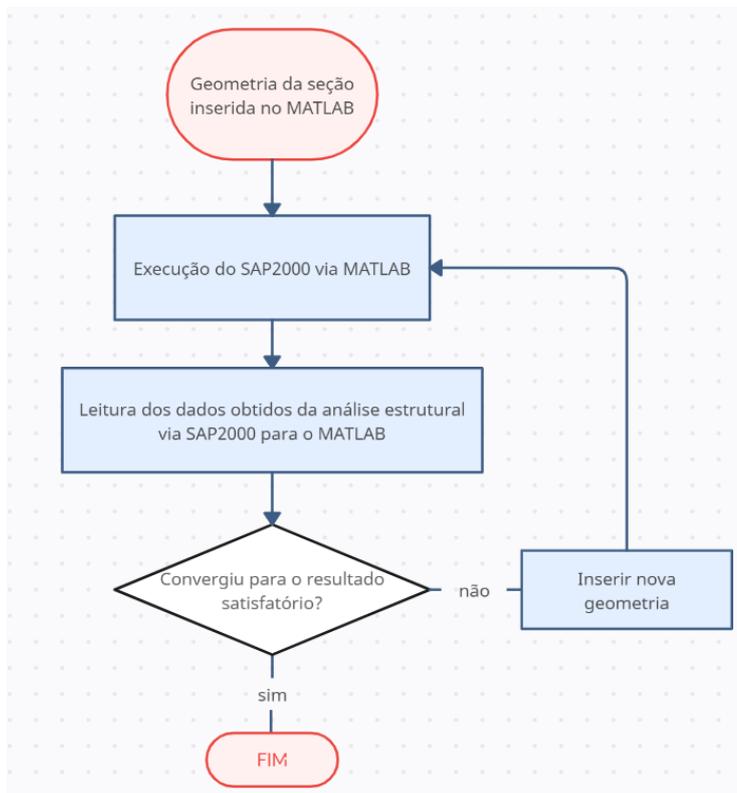
Figura 2 – Chamada do SAP com as informações fornecidas pelo MATLAB.

```
[SAPFile, SAPBaseName] = makeFileName(runDir);%cria arquivo $2k com nome aleatório  
  
processFilesNcte(templateFileName,fullfile(runDir, SAPFile.Input), tags, ac,'\$');  
  
cwd = pwd(); cd(runDir);  
  
% Processamento do arquivo no SAP  
  
comando=['"C:\Program Files (x86)\Computers and Structures\SAP2000 14\Sap2000.exe" '  
'' runDir '\ SAPFile.Input '' ' /R /C'];  
  
status = system(comando);
```

Fonte: Os autores

Atualmente, o processo de análise das estruturas está sendo realizado da forma que é representada o fluxograma da Figura 3. É importante destacar que neste processo será implementado o algoritmo Enxame de Partículas (PSO) e o algoritmo Sequencial Quadrático (SQP) para que não haja a necessidade de o aluno inserir uma nova geometria e verificar se as restrições foram atendidas no MATLAB até encontrar um resultado satisfatório.

Figura 3 – Fluxograma do processo atualmente.



Fonte: Os Autores.

## 2.3 ESTUDO PARAMÉTRICO DE ESTRUTURAS

Após feita a conexão do SAP2000 no código do MATLAB, foi realizado um estudo paramétrico da estrutura apresentada na Figura 4, onde foram feitas variações na seção transversal. Embora seja uma aplicação simples, é possível observar com ela características do projeto, garantindo a estabilidade estrutural. Neste caso, foi variada as seções com o intuito de avaliar as deformações nos nós.

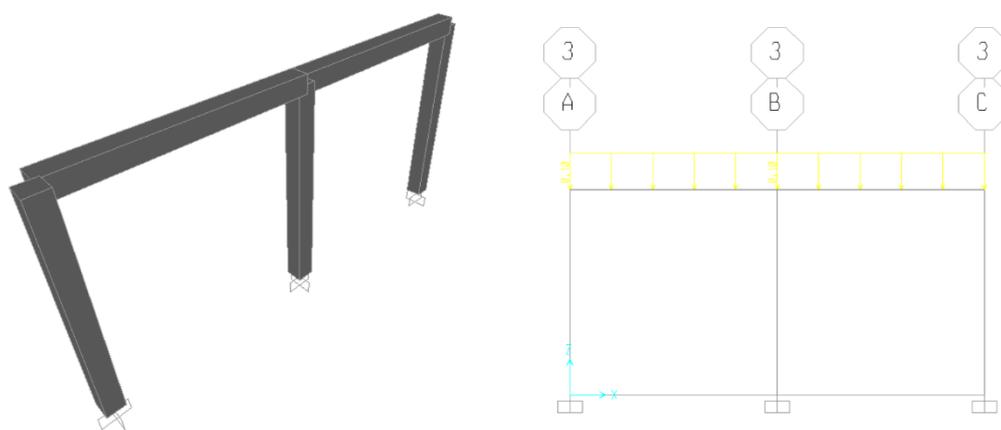


Figura 4 – Pórtico Bidimensional

Fonte: Os Autores

Tabela 3 – Seção 15cm x 50cm

U1	U2	U3	R1	R2	R3
cm	cm	cm	Radians	Radians	Radians
0	0	0	0	0	0
0,000712	0	-0,00491	0	0,000296	0
-3,6E-13	0	-0,0124	0	-1,6E-15	0
0	0	0	0	0	0
-0,00071	0	-0,00491	0	-0,0003	0
0	0	0	0	0	0

Fonte: Os Autores

Tabela 4 - Seção 25cm x 60xm

<b>U1</b>	<b>U2</b>	<b>U3</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>
cm	cm	cm	Radians	Radians	Radians
0	0	0	0	0	0
0,000359	0	-0,00247	0	0,000106	0
2,08E-13	0	-0,00618	0	8,75E-16	0
0	0	0	0	0	0
-0,00036	0	-0,00247	0	-0,00011	0
0	0	0	0	0	0

Fonte: Os Autores

A partir dos dados apresentados na Tabela 3 e na Tabela 4, é possível observar que tal como esperado, à medida que a área da seção aumenta, menores são os valores dos deslocamentos nos nós, sendo assim coerente com a realidade.

## 2.4 OTIMIZAÇÃO

### 2.4.1 Conceito

Atualmente, temas voltados a redução de impactos ambientais e aproveitamento dos recursos vem sendo bastante discutido na comunidade científica. Graças ao avanço computacional, foi possível realizar estudos acerca de otimização na engenharia civil, no intuito de reduzir a quantidade de recursos utilizados e o tempo voltado a elaboração de projetos.

Otimização se refere a busca do melhor resultado para uma função e seus respectivos parâmetros (variáveis de projeto) pré-determinados dentro dos limites de projeto, através de um conjunto de técnicas estudadas (OLIVEIRA, 2008).

Um problema de otimização estrutural pressupõe a ideia que seja possível realizar alterações em suas características de modo que atenda suas especificidades. Com isso, é possível obter um melhor desempenho alinhado com a redução de custos tendo em vista os requisitos de segurança.

De acordo com Pauli (2022) para elaborar um problema de otimização é necessário:

- Uma função de desempenho (ou objetivo);

- Um conjunto de variáveis de projeto, responsáveis pela mudança no resultado ótimo;
- Restrições que devem ser respeitadas;

## 2.4.2 Elementos do Processo de Otimização

### 2.4.2.1 Função Objetivo

É o que se deseja otimizar, maximizando ou minimizando. Quando representado matematicamente, é possível calcular uma solução ótima no âmbito da otimização levando em consideração das variáveis de projeto e as restrições pré-determinadas. Na área de estruturas, peso, deslocamentos, tensões, frequências de vibração, custo são usadas como função de desempenho (MAIA, 2009). Ela pode ser uniobjetivo ou multiobjetivo, a depender do que se deseja determinar.

A otimização busca o melhor valor entre os objetivos existentes dentro dos limites/restrições do projeto. Esse valor segundo Silva (2016) pode ter duas naturezas:

- Local: Melhor solução encontrada em uma sub-região do espaço possível;
- Global: Melhor solução encontrada entre todo o espaço possível.

Sua representação matemática pode ser dada por:

$$fObj = f(x) \quad (\text{Eq. 2.1})$$

Onde  $x$  representa o conjunto das variáveis de projeto.

### 2.4.2.2 Variáveis de Projeto

Também chamadas de variáveis de otimização, são os parâmetros que definem o sistema e que podem ser alterados durante o processo de otimização dentro dos limites ( $x_l \leq x_k \leq x_u$ ) permitidos, a fim de se obter o melhor resultado da função.

. Eles são representados por um vetor, conforme a expressão (4.2).

$$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \quad (\text{Eq. 2.2})$$

Onde  $n$  representa o número total de variáveis de projeto no problema.

Em cada problema existirá um conjunto de variáveis capaz de descrevê-lo, uma vez que obtido seus valores tem-se um dimensionamento de projeto. Na análise estrutural as variáveis de projeto podem ser: dimensões de seção transversal ou comprimento das barras, propriedades do material, como módulo de elasticidade e tensões admissíveis, por exemplo (OLIVEIRA, 2008).

#### 2.4.2.3 Restrições

As restrições são responsáveis por representar o projeto com mais fidelidade a realidade, levando em consideração natureza econômica, especial, de tensões, deformações, etc (ALVES, 2018).

As restrições são responsáveis por determinar a região viável do projeto. Esta região contém todas as soluções possíveis para o problema, atendendo a todos os critérios.

Elas podem ser caracterizadas:

De igualdade se:

$$h_i = h_{max} \quad (\text{Eq. 2.3})$$

De desigualdade se:

$$g_i \leq g_{max} \quad (\text{Eq. 2.4})$$

As restrições de desigualdade podem ser consideradas ativas quando as variáveis de projeto encontradas na função objetivo resultam em zero, isto é  $g_i(x) = 0$ .

De limite se:

$$x_l \leq x_k \leq x_u \quad (\text{Eq. 2.5})$$

Geralmente são imposições geométricas que limitam as variáveis de projeto (SILVA, 2016).

## 2.5 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS

### 2.5.1 Definição

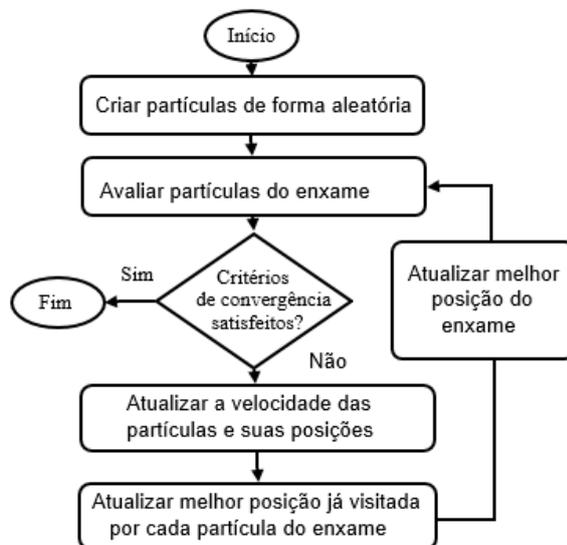
O Algoritmo Enxame de Partículas - PSO (do inglês: Particle Swarm Optimization), foi desenvolvido por Kennedy & Eberhart em 1995 e faz parte do ramo da computação

evolucionária por ser originado da observação de bandos de aves e cardumes de peixes. As partículas, consideradas possíveis soluções, fazem analogia ao comportamento de pássaros a procura de alimento através do aprendizado individual e em bando. Para este trabalho, foi utilizado o algoritmo disponibilizado na biblioteca do Matlab (MATWORKS, 2022), portanto, todas as explicações apresentadas a seguir descrevem seu funcionamento. Nesta rotina, foram realizadas modificações sugeridas por Mezura-Montes e Coello Coello (2011), e em Pedersen (2010).

Por ser um método metaheurístico, que não calcula vetores gradientes (derivadas parciais) durante seu processo de otimização, possui uma maior probabilidade de encontrar a solução ótima global em domínios que possuam muitos picos e vales, além de descontinuidades (OLIVEIRA, 2008).

O algoritmo inicia criando partículas iniciais e as associando velocidades iniciais. É feita a avaliação da função objetivo na qual é determinada qual o melhor valor encontrado entre todas as partículas (gbest) e individualmente (pbest) em todas as iterações. Para que a partícula altere sua posição, são calculadas novas velocidades com base na velocidade atual, no melhor resultado individual e global. A partir desse valor, é atualizado iterativamente os locais de cada partícula, somando a posição anterior mais a velocidade atual. As iterações continuam até que o algoritmo atinja um critério de parada. Esse critério de parada pode ser o número máximo de iterações, um valor desejado da função objetivo etc. Seu funcionamento pode ser representado da seguinte maneira:

Figura 5 - Fluxograma do PSO



Fonte: Vidal Et Al (2020).

## 2.5.2 Distribuição Inicial

Por padrão, o PSO disponibilizado na biblioteca do Matlab inicia com um contador do zero e são criadas partículas aleatórias de distância uniforme dentro dos limites definidos pelo usuário. Se não houver nenhuma especificação, o PSO criará partículas no intervalo de -1000 a 1000. Uma partícula “i” de posição  $x_i$  possui um vetor linha com o número de variáveis (nvars) de elementos definidos pelo usuário. De forma análoga é aplicado para as velocidades iniciais (v) dentro do espaço uniforme  $[-r,r]$  onde r é o vetor de intervalos iniciais.

A rotina avalia a função objetivo para cada partícula, armazenando a posição atual  $p_i$ . A cada iteração, é localizada a melhor partícula a partir do resultado da função objetivo (gbest). Esse resultado pode ser representado da seguinte forma:

$$f_{obj} = \min ( fun( x_i ) ) \quad (\text{Eq. 2.6})$$

Onde  $fun( x_i )$  (eq. 2.6) representa a função aplicada a partícula i.

Para a inércia (w) (eq. 2.7), é considerado inicialmente o maior valor dentro do intervalo especificado. Caso o valor da inércia seja negativo, o próprio programa se ajustará com o mínimo predefinido na sua configuração (0.1). Estudos realizados por Silva (2016), descreve a inércia como um dos parâmetros que mais interferem na busca do resultado ótimo. Caso seu valor definido seja muito alto, sua busca global se torna mais ampla, porém isso diminui a precisão individual de cada partícula, dificultando a busca por um resultado ótimo. Por essa razão, ficou definido neste trabalho o seu valor estando entre o intervalo [0.8, 1.4] de acordo com os estudos realizados por Shi e Eberhart (1998).

Para os parâmetros referentes a confiança individual e global são predefinidos como 1.49. Porém, nesta dissertação foram considerados como  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 2$  (eq. 2.7) para que exista um equilíbrio entre a confiança da partícula e no enxame (KENNEDY & EBERHART, 1995).

## 2.5.3 Iteração do Algoritmo

Para cada partícula “i” na posição  $x_i$  do enxame, o algoritmo atualiza da seguinte maneira:

1. É escolhido um subconjunto aleatório S de N partículas diferentes de i;
2. É encontrado o melhor resultado entre os vizinhos (gbest) e sua posição;

3. Com variáveis aleatórias randômicas  $r_1$  e  $r_2$  que variam entre  $[0,1]$ . Atualiza-se a velocidade considerando o número de variáveis definido pelo usuário a partir da seguinte equação:

$$v_i^{t+1} = wv_i^t + r_1c_1(p_i - x_i^t) + r_2c_2(p_b - x_i^t) \quad (\text{Eq. 2.7})$$

Essa atualização utiliza as seguintes variáveis:

- A velocidade anterior ( $v_i^t$ );
- A diferença entre a melhor posição encontrada da partícula e a sua posição atual ( $p_i - x_i^t$ )
- A diferença entre a melhor posição encontrada no enxame e a sua posição atual ( $p_b - x_i^t$ );

4. É atualizado a posição:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad (\text{Eq. 2.8})$$

5. Se qualquer componente de  $x_i^{t+1}$  estiver fora dos limites (lb e ub) seu valor é definido igual a esse limite. Se qualquer componente de  $v_i^{t+1}$  estiver fora dos limites  $[-r, r]$  seu componente é definido igual a zero;

6. É avaliado a função objetivo na nova posição  $x_i^{t+1}$  ;

7. Se  $fun(x_i^{t+1}) < fun(x_i^t)$ , então é definido que a melhor posição para esta partícula se torna a posição avaliada. Sendo assim o pbest  $fun(x_i^{t+1})$  e  $p_b = x_i^{t+1}$  ;

8. É avaliado o melhor valor encontrado entre todas as partículas  $\min ( fun(x_i) )$  e sua posição  $p_b$ ;

9. Se na etapa anterior o melhor valor da função foi modificado o contador de melhor valor encontrado repetidamente durante as iterações é zerado. Caso o melhor valor encontrado continue o mesmo, é somado mais um ao seu valor atual;

10. Esse processo continua até que o valor predefinido (20) ou o prescrito pelo usuário seja atendido. Enquanto se encontra no processo iterativo, a inércia da partícula ( $w$ ) ela pode ser alterada caso sejam satisfeitos os casos apresentados na Eq. 2.9:

$$w = \left\{ \begin{array}{l} 2 * w \text{ se } c < 2 \text{ e haja diminuição no } f_{min} \\ w/2 \text{ se } c > 5 \text{ e haja diminuição no } f_{min} \\ w \text{ e } c = c + 1 \text{ caso não haja diminuição no } f_{min} \end{array} \right\} \quad (\text{Eq. 2.9})$$

O processo de otimização é iniciado com  $c = 0$

#### 2.5.4 Critérios de Parada

O programa é finalizado quando atinge os seguintes critérios de parada:

Tabela 5 - Critérios de Parada para o PSO

Opções de Parada	Descrição	Saída
MaxStallIterations and FunctionTolerance	A mudança relativa no melhor valor da função nas últimas iterações é menor que a “FunctionTolerance” (default, 10e-6).	1
MaxIterations	A rotina atingiu o número máximo de iterações.	0
OutputFcn ou PlotFcn	“OutputFcn” or “PlotFcn” podem parar as iterações.	-1
ObjectiveLimit	O valor da gbest é menor que ObjectiveLimit (-1.0000e+20).	-3
MaxStallTime	O gbest não mudou nos últimos “MaxStallTime” segundos.	-4
MaxTime	A rotina excedeu o tempo definido de “MaxTime” segundos.	-5

Fonte: MATLAB (2022).

### 2.5.5 Normalização

É comum em problemas de otimização a desproporção entre as variáveis de projetos e/ou das funções objetivo, dificultando o otimizador a encontrar soluções ótimas (OLIVEIRA, 2008). Para contornar esse problema a função objetivo foi normalizada, como consta a Equação 4.11, é calculada a razão entre a função objetivo no ponto  $x_i$  e no ponto inicial  $x_0$  onde este foi imputado como a posição média entre os limites superiores e inferiores do problema.

$$f_{norm}(x_i) = \frac{f(x_i)}{f(x_0)} \quad (\text{Eq. 2.10})$$

Além do problema apresentado acima, o PSO disponível no MATLAB não considera a possibilidade de consideração de restrições nos problemas, que é indispensável dentro da engenharia estrutural. Para isso, foi utilizada uma função de penalidade quadrática atrelada a função normalizada.

## 2.6 OTIMIZAÇÃO POR PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

### 2.6.1 Conceito

A programação quadrática sequencial (SQP) é um método iterativo para otimização não linear restrita. Os métodos SQP são usados em problemas matemáticos para os quais a função objetivo e as restrições são duas vezes continuamente diferenciáveis.

Os métodos SQP resolvem uma sequência de subproblemas de otimização, cada um dos quais otimiza um modelo quadrático do objetivo sujeito a uma linearização das restrições. Se o problema for irrestrito, o método se reduz ao método de Newton para encontrar um ponto onde o gradiente do objetivo se anula. Se o problema tiver apenas restrições de igualdade, então o método é equivalente a aplicar o método de Newton às condições de otimização de primeira ordem. Para o presente trabalho foi utilizado o algoritmo disponibilizado na biblioteca do MATLAB

### 2.6.2 Utilização do SQP no MATLAB

A utilização do algoritmo do SQP é através da função FMINCON encontrada na biblioteca do MATLAB. O intuito da função apresentada é encontrar o mínimo valor possível para o problema de uma função  $f(x)$  multivariável não linear restrita para isso é preciso entrar com alguns parâmetros como mostra a foto abaixo.

$$C(x) \leq 0 \quad (\text{Eq. 2.11})$$

$$Ceq = 0 \quad (\text{Eq. 2.12})$$

$$A * x \leq b \quad (\text{Eq. 2.13})$$

$$Aeq * x = beq \quad (\text{Eq. 2.14})$$

$$lb \leq x \leq ub \quad (\text{Eq. 2.15})$$

Onde  $x$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$  e  $ub$  são vetores,  $A$  e  $Aeq$  são matrizes,  $C$  e  $Ceq$  são funções que retornam vetores e  $f(x)$  é uma função que retorna um número escalar. Foi necessário Iniciar com um ponto de partida chamado X0 que em alguns testes foram a média do lb com ub e em outros testes o X0 foi uma partícula gerada pelo algoritmo PSO.

É importante salientar que a função Fmincon só resolve problemas de valores reais e os pontos por ela encontrado são mínimos locais.

### 3. DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS METÁLICAS

Para o dimensionamento das estruturas metálicas, foi considerada a NBR 8800 (ABNT, 2008), onde é determinado os requisitos básicos do projeto a partir do método do estados-limites. Este método avalia o nível de segurança da estrutura a partir da capacidade que ela resiste as várias ações ao longo da sua vida útil sem atingir nenhum dos seus valores indicados pelos estados-limites. De acordo com Ataíde (2006) Considera-se os estados-limites divididos em:

- Estado limite último: Indicador relacionado a capacidade resistente da estrutura. Caso esse valor seja ultrapassado a estrutura está na iminência ao colapso. Este deve ter uma probabilidade baixa de ocorrência, devido ao risco em perdas humanas.

- Estado limite de serviço: Indicador relacionado ao conforto do usuário garantindo sua utilização normal, sua durabilidade e aparência. Para as análises realizadas na Seção 4, as deformações não foram levadas em consideração em virtude que o SAP2000 não disponibiliza a deformação máxima em sua tabela de formato xls. Dessa forma, não fora calculado o estado limite de serviço nesse trabalho.

#### 3.1 CONDIÇÕES GERAIS PARA O DIMENSIONAMENTO

Para efeito de cálculo, foram consideradas as propriedades mecânicas do aço mencionadas na NBR 8800 (ABNT, 2008). São elas:

- Módulo de elasticidade,  $E = E_a = 200\ 000\ MPa$ ;
- Coeficiente de Poisson,  $\nu_a = 0,3$ ;
- Módulo de elasticidade transversal,  $G = 77\ 000\ MPa$ ;
- Coeficiente de dilatação térmica,  $\beta_a = 1,2 \times 10^{-5}\ ^\circ C^{-1}$ ;
- Massa específica,  $\rho_a = 7\ 850\ kg/m^3$ .

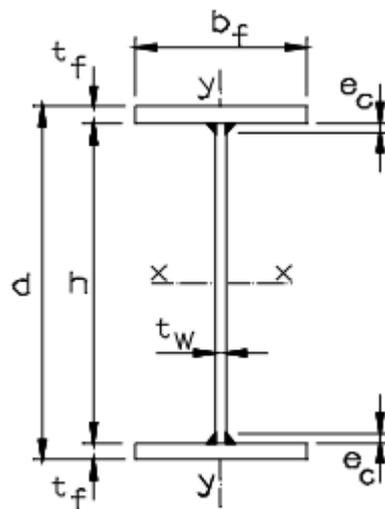
Existem vários componentes presentes em uma estrutura metálica, tais como: chapas de ligação, parafusos, chumbadores e perfis, cada um dos componentes possui sua função específica para a resistência do material a algum esforço solicitante.

Para este trabalho foram utilizados perfis do tipo soldados, onde são constituídos por chapas de aço unidas por soldagem. Estes perfis são amplamente utilizados devido a versatilidade de possíveis dimensionamentos que se pode obter, possuindo um peso inferior em comparação a perfis laminados, por exemplo (SILVA, FRUCHTENGARTEN, 2012).

Para a geometria da seção foram utilizados os perfis de seção I simétrica, isto é, que apresentam simetria na sua seção transversal em relação aos eixos X-X e Y-Y. Ao decorrer deste trabalho, será apresentado informações da norma referente apenas a estas características. Para análise de outros perfis, recomenda-se o uso da norma vigente. Na Figura 6 é possível observar os elementos geométricos referentes a seção mencionada acima. Onde:

- $b_f$ : Largura da mesa;
- $d$ : Altura externa da seção;
- $h$ : Altura interna da seção;
- $t_f$ : Espessura da mesa;
- $t_w$ : Espessura da alma;
- $e_c$ : Dimensão nominal mínima de solda de filete, quando executada por processo diferente de arco submerso.

Figura 6 - Perfil Simétrico.



Fonte: SILVA & FRUCHTENGARTEN, 2012.

A série simétrica é dividida em:

- Série CS: Perfis soldados tipo pilar, sendo  $d/b_f = 1$ . Especificada na norma NBR 5884;
- Série CVS: Perfis soldados tipo viga-pilar, sendo  $1 < d/b_f \leq 1,5$ . Especificada na norma NBR 5884;
- Série VS: Perfis soldados tipo viga, sendo  $1,5 < d/b_f \leq 4$ . Especificada na norma NBR 5884;

- Série PS: Perfis soldados simétricos cujas dimensões não estão especificadas na NBR 5884, mas que seguem as demais especificações da Norma Brasileira.

Na análise estrutural deve-se levar em consideração todas as ações que possam causar algum efeito relevante para estrutura. De acordo com a NBR 8681 (ABNT, 2004), as ações podem ser classificadas em permanentes, variáveis e excepcionais.

- Ações Permanentes: São aquelas que ocorrem durante toda vida útil da estrutura. Elementos construtivos são considerados como ações permanentes.
- Ações Variáveis: São aquelas que apresentam variações nos seus valores durante o tempo de vida útil da estrutura. Geralmente são consideradas ações variáveis aquelas causadas pelo uso e ocupação da edificação, tais como sobrecargas em pisos e coberturas, e equipamentos. Também faz parte os efeitos da ação do vento e variação de temperatura na estrutura.
- Ações Excepcionais: São aquelas que possuem probabilidade muito baixa de ocorrência durante a vida útil da estrutura. Devem ser consideradas em projetos específicos. São consideradas ações excepcionais efeitos de explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes e terremotos. Seus valores devem ter como referência as normas brasileiras específicas de cada caso.

Para as ações mencionadas acima é feita a majoração dos valores através do coeficiente  $\gamma_f$  que é o produto das seguintes parcelas:

$$\gamma_f = \gamma_{f1} * \gamma_{f2} * \gamma_{f3} \quad (\text{Eq. 3.1})$$

Onde:

- $\gamma_{f1}$  é a parcela que considera a variabilidade das ações;
- $\gamma_{f2}$  é a parcela que considera a atuação simultânea das ações;
- $\gamma_{f3}$  é a parcela que considera possíveis erros estruturais, desde problemas construtivos ao método de cálculo empregado.

O produto de  $\gamma_{f1} * \gamma_{f3}$  e a parcela  $\gamma_{f2}$  resultam nos valores apresentados na Tabela 6 respectivamente a seguir:

Tabela 6 - Valores dos Coeficientes de Ponderação  $\gamma_{f1} * \gamma_{f3}$  das Ações.

Combinações	Ações permanentes ( $\gamma_g$ ) <sup>a,c</sup>					
	Diretas					Indiretas
	Peso próprio de estruturas metálicas	Peso próprio de estruturas pré-moldadas	Peso próprio de estruturas moldadas no local e de elementos construtivos industrializados e empuxos permanentes	Peso próprio de elementos construtivos industrializados com adições <i>in loco</i>	Peso próprio de elementos construtivos em geral e equipamentos	
Normais	1,25 (1,00)	1,30 (1,00)	1,35 (1,00)	1,40 (1,00)	1,50 (1,00)	1,20 (0)
	Ações variáveis ( $\gamma_q$ ) <sup>a,d</sup>					
	Efeito da temperatura <sup>b</sup>	Ação do vento	Ações truncadas <sup>e</sup>	Demais ações variáveis, incluindo as decorrentes do uso e ocupação		
Normais	1,20	1,40	1,20	1,50		

Fonte: Adaptado de NBR 8800 (ABNT, 2008).

Levando em consideração os coeficientes de majoração é possível calcular o carregamento de uma estrutura. De acordo com a NBR 8800 (ABNT, 2008), um carregamento é definido pela combinação dos esforços que possuem a probabilidade de atuarem simultaneamente. Tendo em vista essa situação, a combinação dos esforços deve ser calculada nas situações mais desfavoráveis, verificando-se os estados-limites último e de serviço.

Para a combinação última é aplicada a seguinte equação:

$$F_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} * F_{Gi,k}) + \gamma_{q1} * F_{Q1,k} + \sum_{j=1}^n (\gamma_{qj} * \psi_{0j} * F_{Qj,k}) \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Onde:

- $F_{Gi,k}$  representa o valor característico da ação permanente;
- $F_{Q1,k}$  representa o valor característico da ação principal variável;
- $F_{Qj,k}$  representa os valores característicos das ações variáveis remanescentes.

### 3.2 VERIFICAÇÃO DO ESFORÇO NORMAL RESISTENTE

O esforço normal resistente de cálculo ( $N_{rd}$ ) será calculado de acordo com a formulação apresentada na NBR 8800/2008 (Anexo E) para vigas de dupla simetria e almas não esbeltas. Os parâmetros como carga crítica nas direções X (para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia  $x$  da seção transversal), Y (para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia  $y$  da seção transversal) e Z (para flambagem por torção em relação ao eixo longitudinal  $z$ ) e raio de giração são calculados para verificar se irá ocorrer ou não a flambagem por flexão.

Onde  $K_x$  e  $K_y$  variam de acordo com o tipo de apoio conforme mostra a tabela abaixo, o  $K_z$  é o coeficiente de flambagem para torção, sendo 1 quando ambas as extremidades da barra possuírem rotação em torno do eixo longitudinal impedida e empenamento livre e 2 quando uma das extremidades da barra possuir rotação em torno do eixo longitudinal e empenamento livres e, a outra extremidade, rotação e empenamento impedidos.

Sabendo as cargas críticas em todas as direções, o menor será escolhido para efeito de cálculo. De acordo com o item 5.3.3 da NBR 8800/2008 é aplicado um fator de redução no menor carga crítica selecionado obtendo a força normal de cálculo. Caso o esforço solicitante de projeto seja menor do que a carga crítica o projeto a carga está aprovada para o esforço normal.

Em casos que os efeitos de projetos sejam maiores do que a carga crítica algumas alterações podem ser feitas como

- Alterar as condições de contraventamento do pilar - redução do comprimento de flambagem;
- Modificar a seção transversal (dimensões ou forma) - aumento do momento de inércia

Figura 7 - Coeficientes de flambagem por flexão em elementos isolados

A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Valores teóricos de $K_x$ ou $K_y$	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
Valores recomendados	0,65	0,80	1,2	1,0	2,1	2,0
Código para condição de apoio	Rotação e translação impedidas Rotação livre, translação impedida Rotação impedida, translação livre Rotação e translação livres					

FONTE: NBR 8800/2008

Onde  $r_x$  e  $r_y$  são os raios de giração em relação aos eixos centrais  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $x_o$  e  $y_o$  são as coordenadas do centro de cisalhamento na direção dos eixos centrais  $x$  e  $y$ , respectivamente, em relação ao centro geométrico da seção

### 3.3 VERIFICAÇÃO DO MOMENTO RESISTENTE

O momento resistente de cálculo ( $M_{rd}$ ) será calculado de acordo com a formulação apresentada na NBR 8800 (ABNT, 2008) (Anexo G) para vigas de alma não-esbelta. Por definição, vigas de alma não-esbelta são aquelas formadas por seções I, U, H, caixão e tubulares retangulares, quando perpendiculares ao eixo de flexão, possui um índice de esbeltez igual a  $\lambda \leq \lambda_r$ . Outras seções incluem tubos circulares com relação  $\frac{d \text{ (diâmetro)}}{e \text{ (espessura)}} \leq 0,45 * \frac{E}{f_y}$ , seções T formadas por duas cantoneiras em T e seções sólidas circulares ou retangulares com quaisquer dimensões.

A norma vigente apresenta três estados limites aplicáveis a flexão: Flambagem Lateral com Torção (FLT), Flambagem Local da Mesa Comprimida (FLM) e Flambagem Local da Alma (FLA). A seguir é possível observar os parâmetros referentes ao momento fletor resistente aplicável ao perfil analisado nesta dissertação.

Figura 8 - Parâmetros Referentes ao Momento Fletor Resistente.

Tipo de seção e eixo de flexão	Estados-limites aplicáveis	$M_r$	$M_{cr}$	$\lambda$	$\lambda_p$	$\lambda_r$
Seções I e H com dois eixos de simetria e seções U não sujeitas a momento de torção, fletidas em relação ao eixo de maior momento de inércia	FLT	$(f_y - \sigma_r)W$ Ver Nota 5	Ver Nota 1	$\frac{L_b}{r_y}$	$1,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	Ver Nota 1
	FLM	$(f_y - \sigma_r)W$ Ver Nota 5	Ver Nota 6	$\frac{b/t}{\text{Ver Nota 8}}$	$0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	Ver Nota 6
	FLA	$f_y W$	Viga de alma esbelta (Anexo H)	$\frac{h}{t_w}$	$3,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$5,70 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
Seções I e H com dois eixos de simetria e seções U fletidas em relação ao eixo de menor momento de inércia	FLM Ver Nota 3	$(f_y - \sigma_r)W$	Ver Nota 6	$\frac{b/t}{\text{Ver Nota 8}}$	$0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	Ver Nota 6
	FLA Ver Nota 3	$f_y W_{ef}$ Ver Nota 4	$\frac{W_{ef}^2}{W} f_y$ Ver Nota 4	$\frac{h}{t_w}$	$1,12 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,40 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

Fonte: Adaptado de NBR 8800 (ABNT, 2008).

Nota 1:

$$\lambda_r = \frac{1,38 \sqrt{I_y J}}{r_y J \beta_1} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{27 C_w \beta_1^2}{I_y}}} \quad (\text{Eq. 3.3})$$

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E I_y}{L_b^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} * (1 + 0,039 * \frac{J L_b^2}{C_w})} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Onde:

$$B_1 = \frac{(f_y \sigma_r) W}{E J} \quad (\text{Eq. 3.5})$$

$$C_w = \frac{I_y (d t_f)^2}{4}, \text{ para seções I} \quad (\text{Eq. 3.6})$$

Nota 4:  $W_{ef}$  é o módulo de resistência mínimo elástico para uma seção que possui uma mesa comprimida de largura igual a  $b_{ef}$  (largura efetiva).

$$b_{ef} = 1,92 * t * \sqrt{\frac{E}{\sigma}} * \left[ 1 - \frac{c_a}{b/t} * \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \right] \leq b \quad (\text{Eq. 3.7})$$

Onde  $c_a$  é um coeficiente igual a 0,38 para mesas ou almas de seções não tubulares retangulares,  $b$  e  $t$  se referem a largura e espessura de um elemento AA.

Nota 6: Para perfis soldados

$$M_{cr} = \frac{0.90 * E * k_c}{\lambda^2} * W_C \quad (\text{Eq. 3.8})$$

$$\lambda_r = 0.95 \sqrt{\frac{E}{f_y - \sigma_r / k_c}} \quad (\text{Eq. 3.9})$$

$$k_c = 4 * \frac{4}{\sqrt{h/t_w}}, \text{ sendo } 0.35 \leq k_c \leq 0.76 \quad (\text{Eq. 3.10})$$

Nota 8:  $b/t$  é a relação entre a largura metade da largura e a espessura da mesa do perfil I.

### 3.4 VERIFICAÇÃO DO CORTANTE RESISTENTE

O esforço cortante resistente de cálculo ( $V_{rd}$ ) será calculado de acordo com a formulação apresentada na NBR 8800/2008 que consta no item 5.4.3.1. É necessário descobrir os lambdas (colocar letra grega) para fazer a comparação na qual no item 5.4.3.1.1. como mostra a imagem abaixo.

#### Imagem do procedimento para cálculo do $V_{rd}$

**5.4.3.1.1** Em seções I, H e U fletidas em relação ao eixo central de inércia perpendicular à alma (eixo de maior momento inércia), a força cortante resistente de cálculo,  $V_{Rd}$ , é dada por:

- para  $\lambda \leq \lambda_p$ :  $V_{Rd} = \frac{V_{pl}}{\gamma_{a1}}$
- para  $\lambda_p < \lambda \leq \lambda_r$ :  $V_{Rd} = \frac{\lambda_p}{\lambda} \frac{V_{pl}}{\gamma_{a1}}$
- para  $\lambda > \lambda_r$ :  $V_{Rd} = 1,24 \left( \frac{\lambda_p}{\lambda} \right)^2 \frac{V_{pl}}{\gamma_{a1}}$

onde:

$$\lambda = \frac{h}{t_w}$$

$$\lambda_p = 1,10 \sqrt{\frac{k_v E}{f_y}}$$

$$\lambda_r = 1,37 \sqrt{\frac{k_v E}{f_y}}$$

O - 33.000.167/0036-31

Fonte: NBR 8800/2008

Fazendo a devida comparação a norma já indica qual cálculo deve ser feito para obter o  $V_{rd}$ , essa verificação deve ser feita para o sentido X e Y da peça em estudo. Consideramos o menor valor entre eles.

#### 4. RESULTADOS

Para todos os casos que serão apresentados a seguir, existem parâmetros que são comuns e de grande importância a serem apresentados, pois o comportamento dos otimizadores (PSO e SQP) e seus resultados são relacionados aos valores atribuídos a estas. Levando em consideração as informações apresentadas no capítulo 3, foram considerados os seguintes parâmetros:

Tabela 7 - Parâmetros Relacionados ao PSO

Número de Partículas	50
Número de Iterações	100
Número de Avaliações Máximo	5050
Número de Rodadas da Otimização	10
Intervalo da Inércia da Partícula (w)	[0.8,1.4]
Confiança Individual (c1)	2
Confiança Global (c2)	2

Fonte: Os Autores.

Tabela 8 - Parâmetros Relacionados ao SQP

Número máximo de Interações	400
Número Máximo de avaliação de função	700
Step Tolerance	$1 \cdot 10^{-6}$
Constraint Tolerance	$1 \cdot 10^{-8}$
Finite Difference Step Size	$1 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Os Autores.

Para que fosse demonstrada a vantagem de utilizar algoritmos em problemas estruturais, foram apresentadas situações práticas na engenharia, utilizando pórticos metálicos submetidos a carregamento estático, dessa forma, cada estrutura terá a particularidade apresentada quando descrita. Em todos os casos apresentados, foram realizadas análises uni-

objetivo, tendo como função objetivo a minimização do custo através da redução do seu volume. Foi realizada uma análise individual e comparativa entre o desempenho dos otimizadores e o seu resultado em conjunto, onde utilizou-se o melhor resultado obtido pelo PSO como ponto de partida para o SQP.

A geometria e o carregamento são apresentados em cada exemplo. As variáveis de projeto de cada caso são as dimensões da seção transversal de perfil I, com limites de acordo com os perfis soldados (CS, CVS, VS e OS) descritos na seção **Erro! Fonte de referência não encontrada.** Os limites adotados são:  $0.15\text{ m} \leq b_f \leq 0.550\text{ m}$ ;  $0.15\text{ m} \leq h \leq 2\text{ m}$ ;  $0.008\text{ m} \leq t_f \leq 0.0445\text{ m}$ ; e  $0.0063\text{ m} \leq t_w \leq 0.016\text{ m}$ .

De forma geral, os problemas que serão apresentados a seguir podem ser formulados da seguinte maneira:

$$\text{Min } C(b_f, h, t_f, t_w) = \sum_{i=1}^n (2 * (b_{fi} * t_{fi}) + (h_i - 2 * t_{fi}) * t_{wi}) * L_i \quad (\text{Eq.5.1})$$

Sujeito à:

$$g_1(\text{Flex}_{\text{compressão}}) = \text{Flex}_{\text{compressão}} - \text{Flex}_{\text{compressãoMax}} \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.2})$$

$$g_2(M_2) = M_2 / \text{Mrd}_{\text{menorInercia}} - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.3})$$

$$g_3(M_3) = M_3 / \text{Mrd}_{\text{maiorInercia}} - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.4})$$

$$g_4(V_2) = V_2 / \text{Vrd}_Y - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.5})$$

$$g_5(V_3) = V_3 / \text{Vrd}_X - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.6})$$

$$g_6(P) = P / N_e - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.7})$$

$$g_7(P) = P / \text{Nrd} - 1 \leq 0 \quad (\text{Eq. 5.8})$$

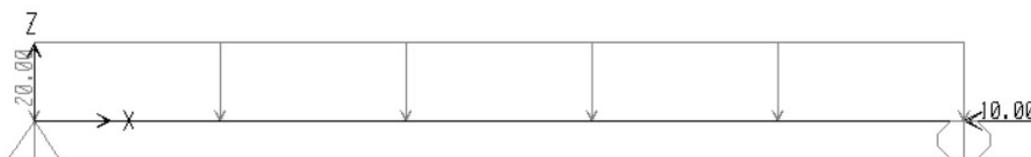
A equação 5.1 representa a função objetivo do problema e se refere ao custo da estrutura em análise onde “i” representa o volume de um dos elementos da estrutura.

As restrições acima são referentes aos limites, respectivamente, na flexo-compressão, do momento em torno do menor eixo de inércia, do momento em torno do maior eixo de inércia, do cortante em “Y” do cortante em “X”, da carga crítica de flambagem e o esforço cortante, para todos os elementos da estrutura. Para efeito de estudo, foram consideradas as restrições ativas aquelas que possuem resultados com zero até a quarta casa decimal.

#### 4.1 VIGA COM CARGA DISTRIBUÍDA E ESFORÇO AXIAL

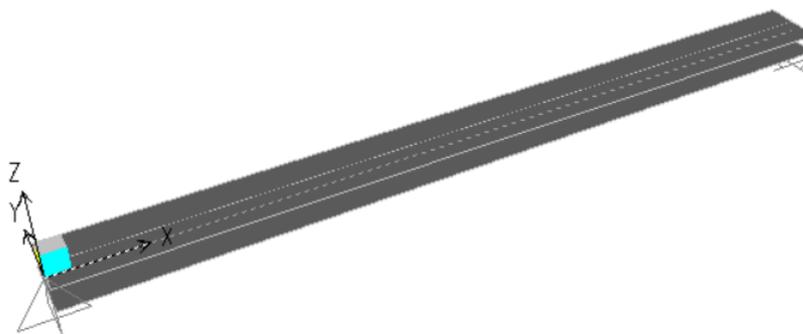
Neste caso foi dimensionado uma viga que possui um comprimento de 5 metros, como demonstra a Figura 9. Embora seja simples por se tratar de apenas um elemento, em termos matemáticos, a presença do esforço axial e da carga distribuída serve como primeiro passo para resolver problemas mais complexos que envolvam um número “n” de elementos. Além disso, as ações atuantes combinadas proporcionam um efeito de flexo-compressão, uma das análises relevantes no dimensionamento. A seguir é possível visualizar como foi desenvolvida a viga no SAP2000 e os resultados das otimizações realizadas.

Figura 9 - Viga com carga distribuída e esforço axial.



Fonte: Os Autores.

Figura 10 - Viga com profundidade.



Fonte: Os Autores.

Através dos resultados encontrados nas Tabela 9 e Tabela 10 é possível observar que todos os otimizadores apresentaram resultados satisfatórios, por serem uma seção que atende aos esforços solicitantes. Isso se dá ao fato de possuir apenas 4 variáveis de projeto, reduzindo

o trabalho dos otimizadores na busca de um resultado ótimo. No PSO as restrições não se tornaram ativas, porém não foram violadas. No SQP tendo o X0 como uma partícula do PSO as restrições também não estão ativas, mas o resultado se torna válido pois podemos aproximar o resultado encontrado em ambos os métodos para um perfil de uso comercial. O resultado obtido pelo SQP (Xmed), partindo do X0 como a médias entre os limites superiores e inferiores, foi insatisfatório pois as restrições ficaram distantes de zero e o volume ficou 82% maior do que o PSO. Enquanto o resultado obtido pelo SQP com o ponto de partida a primeira rodada do PSO ficou 2,08% maior que o PSO. As restrições apresentadas na Tabela 11 representam os valores calculados a partir da rodada de referência, isto é, a rodada onde os algoritmos apresentaram o melhor resultado.

Tabela 9 - Resultados da otimização da viga com o PSO e SQP

OTIMIZADOR	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções*	$\mu$	$\sigma$
PSO	0.3232	0.1500	0.0106	0.0063	0.0385	4450	0.0385	7.7538e-5
SQP	0.3291	0.1690	0.0105	0.0063	0.0393	67	-	-
SQP (Xmed)	0.3235	1.0062	0.0121	0.0063	0.0701	93	-	-

Fonte: Os Autores.

\*As avaliações de funções apresentadas acima representam a rodada tomada como valor de referência, isto é, a rodada onde os algoritmos apresentaram o melhor resultado.

Tabela 10 - Restrições da otimização da viga com o PSO e SQP.

OTIMIZADOR	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
PSO	-0.0015	-1.0000	-0.0071	-0.3301	-1.0000	-0.9945	-0.9888
SQP	-0.0028	-1.0000	-0.0079	-0.4050	-1.0000	-0.9958	-0.9857

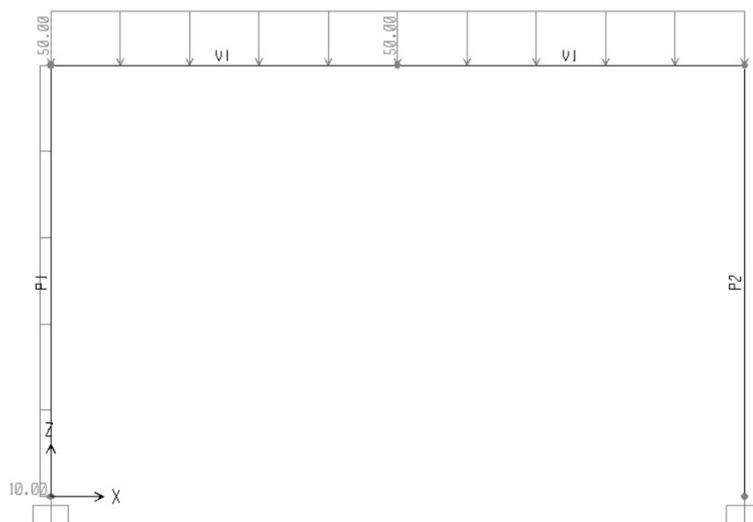
SQP(Xmed)	-0.0226	-1.0000	-0.0330	-0.9175	-1.0000	-0.9972	-0.9911
-----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Fonte: Os Autores.

#### 4.2 PÓRTICO COM 3 BARRAS DE SEÇÕES DISTINTAS

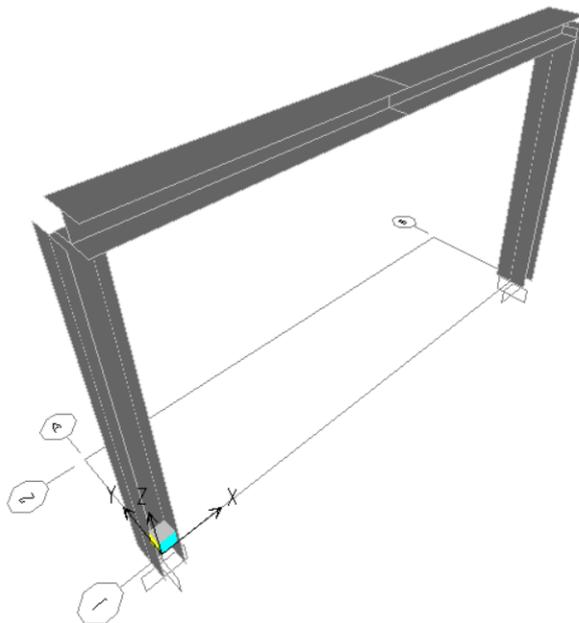
Neste caso, a estrutura em questão possui três seções distintas, pois cada um dos elementos está sujeito a uma combinação de carregamento diferente, como pode ser observado na Figura 11. A viga possui um comprimento de 4 metros e está engastada, transferindo assim os momentos para os pilares, que possuem um comprimento de 2.5 metros, estes que estão engastados.

Figura 11 - Pórtico Bidimensional.



Fonte: Os Autores.

Figura 12 - Pórtico bidimensional com profundidade.



Fonte: Os Autores.

Tabela 11 - Resultados da otimização do pórtico 2D com o PSO.

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções*	$\mu$	$\sigma$
P1	0.3159	0.1500	0.0080	0.0063	0.0580	5050	0.060 7	0.0021
P2	0.3036	0.1500	0.0095	0.0063				
V1	0.3005	0.1739	0.0096	0.0063				

\*As avaliações de funções apresentadas acima representam a rodada tomada como valor de referência, isto é, a rodada onde os algoritmos apresentaram o melhor resultado.

Tabela 13 - Resultados da otimização do pórtico 2D com o SQP com X da primeira rodada do PSO

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções
P1	0.3240	0.1505	0.0080	0.0063	0.0573	168

P2	0.2922	0.1501	0.0097	0.0063		
V1	0.3326	0.1595	0.0085	0.0063		

Tabela 124 - Resultados da otimização do pórtico 2D com o SQP com X médio

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções
P1	0.2827	1.0731	0.0095	0.0063	0.1133	193
P2	0.2913	1.0707	0.0101	0.0063		
V1	0.2807	1.0778	0.0114	0.0063		

Tabela 135 - Restrições da otimização do pórtico 2D com o PSO.

Seção*	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	-0.0433	-1.0000	-0.1072	-0.6547	-1.0000	-0.9770	-0.8723
P2	-0.0715	-1.0000	-0.1270	-0.6547	-1.0000	-0.9788	-0.8891
V1	-0.0123	-1.0000	-0.0277	-0.0039	-1.0000	-0.9963	-0.9691

\*As restrições apresentadas na Tabela 15 representam os valores calculados a partir da rodada de referência.

Tabela 16 - Restrições da otimização do pórtico 2D com o SQP X PSO

Seção	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	-0.0050	-1.0000	-0.0682	-0.6388	-1.0000	-0.9779	-0.8734
P2	-0.007	-1.0000	-0.0633	-0.6380	-1.0000	-0.9782	-0.8875
V1	-0.0002	-1.0000	-0.0185	0.0832	-1.0000	-0.9959	-0.9635

Tabela 17 - Restrições da otimização do pórtico 2D com o SQP X médio

Seção	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

P1	-0.0012	-1.0000	-0.0592	-0.9576	-1.0000	-0.9914	-0.8840
P2	-0.0045	-1.0000	-0.0589	-0.9616	-1.0000	-0.9921	-0.8912
V1	0.0009	-1.0000	-0.0084	-0.8280	-1.0000	-0.9990	-0.9813

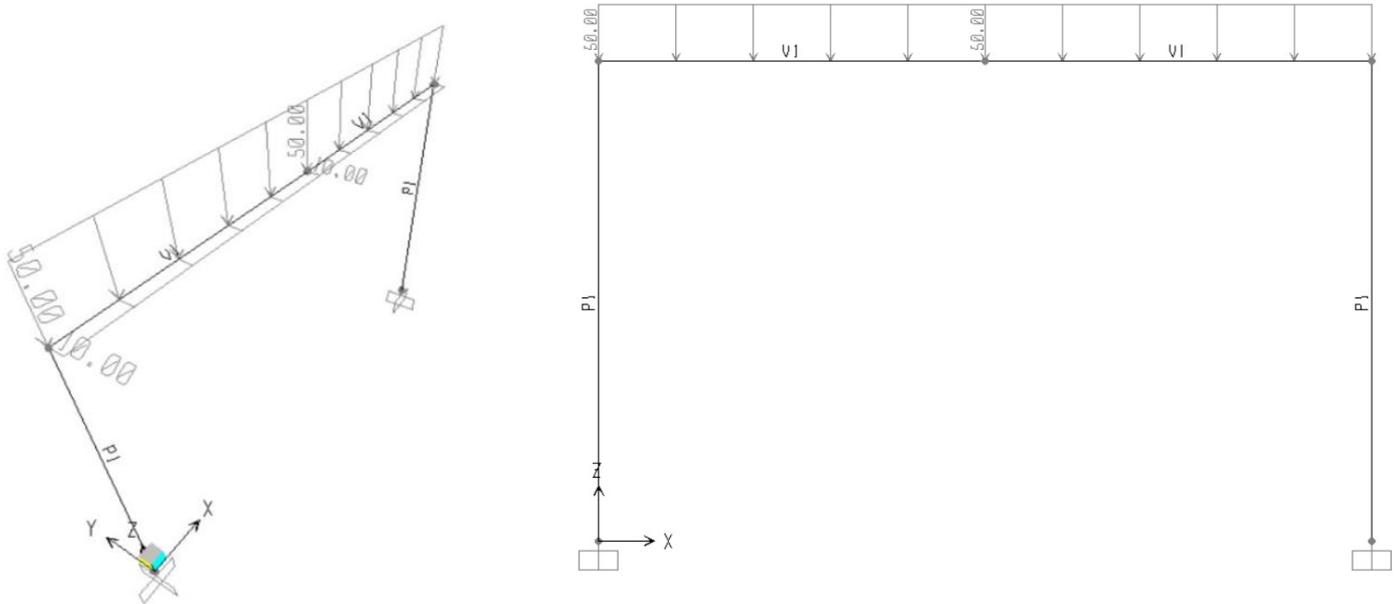
A partir dos resultados apresentados nas duas tabelas referentes ao PSO, é possível observar que o resultado é insatisfatório se for levar em consideração que as restrições não estão ativas. Isso se dá ao fato do número de variáveis de projeto (Tabela 12), devido a pouca mudança das últimas 20 iterações na função objetivo serem baixas e o número de rodadas implementadas. Para resultados mais satisfatórios seria necessário um número maior de iterações a se repetir na função objetivo e um maior número de rodadas.

O resultado obtido com o SQP considerando a melhor solução obtida pelo PSO como ponto de partida teve resultado satisfatório, tendo em vista que foi obtido 0 até a terceira casa decimal da primeira restrição do Pilar 2. Ainda nos testes com o SQP, o resultado obtido com o SQP considerando o ponto de partida como a média dos limites superiores e inferiores, não foi satisfatório, pois a solução fornecida pelo otimizador apresentava a informação que o otimizador convergiu para um ponto insatisfatório. Para melhorar a solução, foram feitos ajustes nas configurações do SQP, diminuindo o tamanho da diferença finita do SQP para  $1 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4.3 PÓRTICO COM TRÊS BARRAS DE COM DUAS SEÇÕES

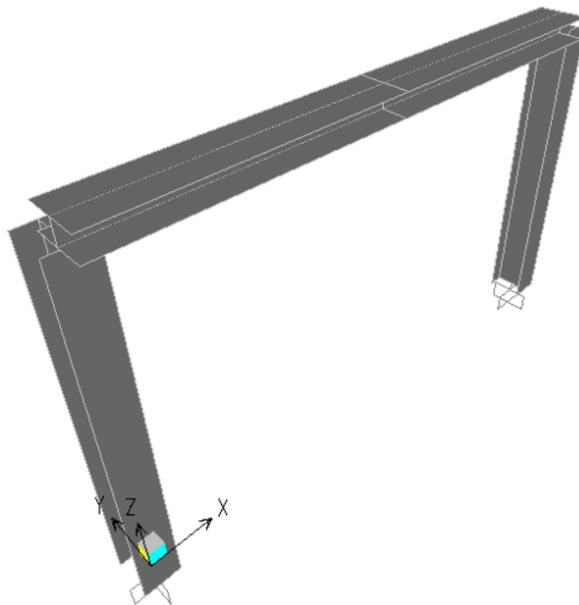
Neste caso será avaliado o pórtico o mesmo pórtico do caso 2 com carga distribuída obliquamente e verticalmente a viga como é apresentada na figura abaixo.

Figura 13 - Pórtico Tridimensional.



Fonte: Os Autores.

Figura 14 - Pórtico tridimensional com profundidade.



Fonte: Os Autores.

Como as cargas são simétricas para os pilares, não há necessidade de haver duas seções distintas, reduzindo assim a dificuldade da busca pelo resultado ótimo nos otimizadores, devido à redução de variáveis de projeto em comparação ao Caso 2.

Nas Tabela e 21 é possível perceber que o que o PSO encontrou um resultado satisfatório na otimização. Porém, levando em consideração as restrições apresentadas na , é perceptível que seria necessário um maior número de iterações que repetissem o

Seção*	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	-0.0030	-0.6913	-0.3560	-0.9731	-0.8276	-0.9682	-0.9115
V1	-0.0115	-0.7355	-0.2909	-0.3528	-0.9700	-0.9905	-0.9703

valor da função objetivo para que o resultado se tornasse, de fato, uma boa opção para o dimensionamento (restrição ativa). Uma alternativa para que o resultado seja melhor é aumentar o número de rodadas para este caso.

Os resultados do SQP, com o X inicial sendo a primeira partícula do PSO, mostrado na Tabela 19 foi satisfatório pois foram obtidas restrições iguais a zero como mostra a Tabela 22, porém o volume deu maior do que o resultado apresentado pelo PSO. Os resultados do SQP, tendo o X0 inicial a média entre os limites superiores e inferiores, tiveram as restrições satisfeitas, porém o resultado do volume não foi satisfatório pois deu um volume de 66% maior que o encontrado no PSO.

Tabela 18 - Resultados da otimização do pórtico 3D com o PSO

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções*	$\mu$	$\sigma$
P1	0.2524	0.2767	0.0145	0.0067	0.0772	4850	0.0817	0.0038
V1	0.3651	0.1570	0.0090	0.0105				

Fonte: Os Autores

\*As avaliações de funções apresentadas acima representam a rodada tomada como valor de referência, isto é, a rodada onde os algoritmos apresentaram o melhor resultado.

Tabela 19 - Resultados da otimização do pórtico 3D com o SQP X PSO

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções
P1	0.3008	0.1500	0.0108	0.0063	0.0783	63
V1	0.3113	0.4326	0.0127	0.0063		

Fonte: Os Autores

Tabela 20 - Resultados da otimização do pórtico 3D com o SQP X médio

Seção	$b_f(m)$	$h(m)$	$t_f(m)$	$t_w(m)$	Volume ( $m^3$ )	Avaliações de funções
P1	0.3011	1.0738	0.0103	0.0067	0.1282	104
V1	0.3006	1.0724	0.0142	0.0067		

Tabela 21 - Restrições da otimização do pórtico 3D com o PSO.

Seção*	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	-0.0030	-0.6913	-0.3560	-0.9731	-0.8276	-0.9682	-0.9115
V1	-0.0115	-0.7355	-0.2909	-0.3528	-0.9700	-0.9905	-0.9703

Fonte: Os Autores

\*As restrições apresentadas na Tabela 15 representam os valores calculados a partir da rodada de referência.

Tabela 22 - Restrições da otimização do pórtico 3D com o SQP X PSO

Seção	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	0.0000	-0.7257	-0.3232	-0.7910	-0.9616	-0.9819	-0.9021
V1	-0.0001	-0.9340	-0.0699	-0.8642	-0.9275	-0.9995	-0.9924

Fonte: Os Autores

Tabela 23 - Restrições da otimização do pórtico 3D com o SQP X médio

Seção	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$
P1	-0.0453	-0.0050	-0.1003	-0.9682	-0.9900	-0.9931	-0.9000
V1	-0.0002	-0.9788	-0.0219	-0.8735	-0.9080	-0.9999	-0.9989

Fonte: Os Autores

## 5. CONCLUSÕES

Devido às limitações computacionais das máquinas utilizadas e o tempo disponível, não foi possível realizar uma análise mais aprofundada para melhorar os resultados obtidos utilizando o PSO. Tendo como estudo a comparação com o otimizador SQP, considerando diferentes pontos de partida: o  $X_0$  igual ao resultado obtido pelo PSO; e o  $X_0$  igual a média entre os limites superior e inferior, foi possível encontrar restrições ativas em todos os casos em que o SQP utilizou a solução do PSO como ponto de partida, porém só houve melhoria da solução no segundo caso descrito nesse trabalho. Os resultados do SPQ partindo do valor médio dos limites das variáveis não foram satisfatórios, pois as restrições não se tornaram ativas.

Através os resultados obtidos, o algoritmo recomendado para otimização estrutural é o SQP considerando o ponto de partida ( $X_0$ ) a primeira rodada do PSO. Embora na maior parte dos casos o PSO apresentasse um resultado melhor (caso da viga e do pórtico 3D) levando em consideração o volume, o SQP combinado com o PSO possui um tempo de convergência consideravelmente menor e a diferença de volume entre os 2 é pequena. Isso pode ser comprovado, por exemplo, no caso da viga, onde enquanto para o PSO foram necessárias 4450 avaliações de funções para que fosse encontrado um resultado satisfatório, o SQP com ponto de partida ( $X_0$ ) a primeira rodada do PSO, foram necessárias apenas 67 avaliações. Além disso, a diferença de volume entre elas é de apenas 2,08%.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT NBR 8681/2004 **Ações e segurança nas estruturas – Procedimento.**

ABNT NBR 8800/2008 **Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios.**

ALVES, B. S. **Otimização baseada em confiabilidade de pórticos de concreto armado.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

ATAÍDE, César Alexandre Varela; CORRÊA, Márcio Roberto Silva. **Estudo comparativo entre o método das tensões admissíveis e o método dos estados limites para a alvenaria estrutural.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 8, n. 34, p. 105-136, 2006.

Caixeta, Dara Jane de Abreu; Oliveira, Gleiciany Fátima. **Estudo do método de elementos finitos como ferramenta na engenharia civil.** 2018.

COMPUTERS & STRUCTURES, Inc. **SAP2000, CSI Analysis Reference Manual.** 2016.

TAVARES, Yuri; NEDJAH, Nadia; DE MACEDO MOURELLE, Luiza. **Utilização de otimização por enxame de partículas e algoritmos genéticos em rastreamento de padrões.** In: 12 Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional. 2015.

KENNEDY, J. & EBERHART, R., 1995. **Particle Swarm Optimization.** International Conference on Neural Network. Perth, Australia, 1995.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method.** [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 20, 24, 25, 33, 34 e 35.

MATHWORKS Inc., MATLAB Help Center, 2022.

MAIA, João Paulo Ribeiro. **Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta solver.** Universidade de São Paulo, 2009.

Mezura-Montes, E., and C. A. Coello Coello. **Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future.** Swarm and Evolutionary Computation. 2011, pp. 173–194.

OLIVEIRA, L. C. **Otimização estrutural utilizando o algoritmo evolucionário do Enxame de Partículas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, 2008.

PAULI, Mateus Kreutz et al. **Utilização do BIM na otimização de vigas parede em betão armado por meio de algoritmo genético.** 2022. Dissertação de Mestrado.

Pedersen, M. E. **Good Parameters for Particle Swarm Optimization.** Luxembourg: Hvass Laboratories, 2010.

VARGAS, D. E. C. et al. **Um algoritmo baseado em evolução diferencial para problemas de otimização estrutural multiobjetivo com restrições.** Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 32, n. 2, p. 91-99, 2016.

SALLES, H. S. et al. **Otimização de um pórtico tridimensional de concreto armado.** Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza, v. 2, n. 1, p. 6-14, 2018.

SANTOS, M. F. L. O. **Procedimento adaptativo de correção de contra flecha utilizando processo estocástico em pontes em balanços sucessivos considerando fenômeno de fluência.** Tese de Doutorado.2020.

SHI, Y. & EBERHART, R., 1998. **Parameter Selection in Particle Swarm Optimization.** s.l.:s.n.

SILVA, H. V. C., **Otimização estrutural sob incertezas.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

SILVA, V. & FRUCHTENGARTEN, J. **Dimensionamento de Estruturas de Aço.** Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da escola Politécnica da USP. 2012.

SILVA et al. **Estudo Comparativo de Técnicas de Inteligência de Enxame na Redução da Ordem de Sistemas Dinâmicos Lineares.** Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional. 2020.