



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Manoel Firmino de Souza Neto

Estudos de Física Estatística em Lasers Aleatórios

Recife

2023

Manoel Firmino de Souza Neto

Estudos de Física Estatística em Lasers Aleatórios

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Coorientador: Iván Rene Roa González

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

S729e Souza Neto, Manoel Firmino de
Estudos de física estatística em lasers aleatórios / Manoel Firmino de Souza Neto. – 2023.
101 f.: il., fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2023.
Inclui referências e apêndice.

1. Física teórica e computacional. 2. Lasers aleatórios. 3. Distribuição de Lévy. 4. Vidros de spin. I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2023 - 91

MANOEL FIRMINO DE SOUZA NETO

ESTUDOS DE FÍSICA ESTATÍSTICA EM LASERS ALEATÓRIOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 28/04/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Iván René Róa González
Co-Orientador
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Anderson Stevens Leônidas Gomes
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. José Soares de Andrade Júnior
Examinador Externo
Universidade Federal do Ceará

Eternamente grato aos meus genitores: Mariluce Andrade e Geová Frutuoso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais Mariluce Andrade e Geová Frutuoso pelo imenso carinho, amor, apoio e principalmente paciência que tiveram comigo durante esta fase da minha vida. Sem eles, com toda certeza, eu não seria capaz de chegar aqui.

À minha irmã, Manuella Andrade, e a minha sobrinha, Allana Ferreira, que quando viajam para passar um tempo comigo e meus pais, sabe me distrair quando eu realmente preciso.

Aos amigos que conheço há muito tempo e que foram importantes neste processo da minha vida, esses que mencionarei logo em seguida, já possuo mais de 10 anos de amizade com eles, Gildilayne Medeiros, Harlan Alberto, Roberta Maria, Ana Paula Menezes, Bruno Roberto e Marco Júnior. Dos amigos que surgiram na graduação, na UFPB, Jefferson Oliveira e Alex Prado. Além dos colegas que surgiram na Pós, me ajudando também com algumas disciplinas em que sentia dificuldades, Adonias Barros, Bruno Muller e Edgar Vitor. Com certeza devo ter esquecido alguém, mas para todos, meu imenso e eterno obrigado.

Ao meu orientador e professor Ernesto Raposo, por estar sempre se mostrando preocupado comigo, o senhor é um modelo de pesquisador em quem podemos nos inspirar, além de toda paciência que teve comigo durante a pesquisa, sem mencionar as orientações feitas.

Ao meu coorientador e também professor Iván Rene, que enquanto fazia a minha pesquisa sempre se mostrou paciente, cuidadoso e prestativo, se tornou um exemplo de pesquisador, o senhor ainda vai chegar muito longe.

Não posso deixar de agradecer a todos os professores do curso de física, que contribuíram para a minha formação como estudante e como pessoa.

À agência de investimento à pesquisa FACEPE. O investimento é e sempre será importante para a formação do pesquisador e, conseqüentemente, para a humanidade.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, seja por meio de sugestões, críticas construtivas ou ajuda em momentos de dificuldade.

RESUMO

Lasers aleatórios são sistemas ópticos não-lineares com inhomogeneidades espaciais em seus constituintes e que operam em um regime de emissão caótica. Estes lasers são interessantes por suas propriedades não convencionais, como a ausência de coerência temporal e a amplificação de luz na presença de múltiplos modos com superposição (“overlap”) espacial. A intensidade emitida por estes sistemas fotônicos tem característica aleatória, principalmente para potências de excitação acima do limiar de emissão laser (“laser threshold”). Desse modo, a análise estatística das intensidades emitidas por lasers aleatórios é feita usando distribuições de probabilidade, tais como a distribuição de Lévy, que possui cauda pesada, e a gaussiana, dependendo da potência de excitação. A presença de caudas pesadas nessa distribuição é uma característica importante dos lasers aleatórios, e pode ser explicada pelo acoplamento entre os múltiplos modos que o constituem. Nesse trabalho, revisamos a teoria que explica a presença de tais distribuições e construímos histogramas de intensidade máxima de distribuições de Lévy a partir de dados experimentais de alguns lasers aleatórios. Uma outra característica relevante dos lasers aleatórios é a possibilidade destes exibirem uma fase análoga aos vidros de spins magnéticos, incluindo o fenômeno conhecido como quebra de simetria de réplicas. Tal fenômeno é caracterizado pela distribuição $P(q)$ de valores do parâmetro q de Parisi de overlap de réplicas. Após uma breve introdução à teoria de Parisi no contexto dos lasers aleatórios, calculamos $P(q)$ a partir de dados experimentais e obtemos os perfis que indicam a existência de uma fase com simetria de réplicas abaixo do threshold ($P(q)$ com um único máximo central em $q = 0$) e uma fase vítrea com quebra de simetria de réplicas acima do threshold ($P(q)$ com dois máximos laterais em $q = \pm 1$). Calculamos também o coeficiente de correlação de Pearson, que dá uma medida da correlação linear entre as intensidades de luz em diferentes comprimentos de onda do laser aleatório. Essa medida é útil para ajudar no entendimento das propriedades estatísticas desses sistemas ópticos a partir das medidas de correlação entre os modos. Utilizamos as correlações de Pearson para construir os “mapas de calor” destas correlações. Por fim, no Apêndice nós incluímos os programas escritos em python que calculam a distribuição de intensidades, distribuição $P(q)$ de Parisi, e correlações de Pearson de lasers aleatórios.

Palavras-chave: lasers aleatórios; distribuição de Lévy; vidros de spin; parâmetro de sobreposição de Parisi; quebra de simetria de réplicas; coeficiente de correlação de Pearson.

ABSTRACT

Random lasers are nonlinear optical systems with spatial inhomogeneities in their constituents and operating in a chaotic emission regime. These lasers are interesting for their unconventional properties, such as the absence of temporal coherence and light amplification in the presence of multiple modes with spatial overlap. The intensity emitted by these photonic systems displays random characteristics, mainly for excitation powers above the laser emission threshold. Thus, the statistical analysis of the intensities emitted by random lasers is performed using probability distributions, such as the Lévy distribution, which has a heavy tail, and the Gaussian one, depending on the excitation power. The presence of heavy tails in this distribution is an important characteristic of random lasers, and can be explained by the couplings between the multiple modes that constitute it. In this work, we review the theory that explains the presence of such distributions and build histograms of maximum intensity of Lévy distributions from experimental data of some random lasers. Another relevant feature of random lasers is their possibility of exhibiting a phase analogous to the magnetic spin glasses, including the phenomenon known as replica symmetry breaking. This phenomenon is characterized by the distribution $P(q)$ of values of the Parisi parameter q of overlapping replicas. After a brief introduction to Parisi's theory in the context of random lasers, we calculate $P(q)$ from experimental data and obtain the profiles that indicate the existence of a phase with replica symmetry below the threshold ($P(q)$ with a single central maximum at $q = 0$) and a glassy phase with replica symmetry breaking above threshold ($P(q)$ with two side maxima at $q = \pm 1$). We also calculate Pearson correlation coefficient, which gives a measure of the linear correlation between light intensities at different wavelengths of the random laser. This measure is useful to help understand the statistical properties of these optical systems from the measurement of correlations between modes. We applied Pearson correlations to build heatmaps of these correlations. Finally, in the Appendix we include the codes written in python that calculate the intensity distribution, Parisi $P(q)$ distribution, and Pearson correlations of random lasers.

Keywords: random lasers; Lévy distribution; spin glasses; Parisi overlap parameter; replica symmetry breaking; Pearson correlation coefficient.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Processo de absorção.	14
Figura 2 – Processo de emissão espontânea.	15
Figura 3 – Processo de emissão estimulada.	15
Figura 4 – Laser de Rubi inventado por T. H. Maiman.	16
Figura 5 – Processo de formação do feixe do laser de rubi com átomos de cromo.	16
Figura 6 – Sistema de 2, 3 e 4 níveis.	21
Figura 7 – Representação esquemática de emissão laser em um meio espalhador.	23
Figura 8 – Distribuição das médias dos lançamentos.	41
Figura 9 – Lévy flights.	44
Figura 10 – PDFs de intensidades normalizadas $I/\langle I \rangle$ (em escala log-log) dos modelos diferenciais estocásticos e modelos RPS, exponencial e K	49
Figura 11 – Potência de excitação relativa de $P/P_{th} = 3.9$ para 2000 dos 10^5 espectros emitidos pelo RL do nanopó cristalino dopado com Nd^{3+}	51
Figura 12 – Intensidades máximas I (normalizadas por sua média $\langle I \rangle$) em função do rótulo do espectro $t = 1, 2, \dots, 10^5$	51
Figura 13 – Histograma (círculos) de intensidades dos dados experimentais, com a dis- tribuição Izrailev de ordem $f = 4$ e ordem $f = 6$, e os modelos RPS exponencial e K	52
Figura 14 – Histograma dos dados experimentais com as distribuição de Izrailev de or- dem $f = 4$, $f = 6$, $f = 8$ e $f = 10$	53
Figura 15 – Histograma (círculos) de intensidades máximas I de 10^5 espectros emitidos pelo RL de nanopó cristalino dopado com Nd^{3+} para $P/P_{th} = 1,03$ muito próximo do limiar.	53
Figura 16 – A distribuição $P(q)$ dos valores dos parâmetros de sobreposição de Parisi.	72
Figura 17 – A distribuição $P(q)$ para energia de pulso de excitação de valor 1.6 mJ.	72
Figura 18 – A distribuição $P(q)$ para energia de pulso de excitação de valor 4.7 mJ.	73
Figura 19 – Intensidade máxima para energia de pulso de excitação de valor 1.6 mJ.	74
Figura 20 – Intensidade máxima para energia de pulso de excitação de valor 4.7 mJ.	74
Figura 21 – Mapas de calor dos coeficientes de correlação de Pearson, <i>comprimento de onda (nm) × comprimento de onda (nm)</i>	77

Figura 22 – 1000 perfis de espectros abaixo do limiar.	78
Figura 23 – 1000 perfis de espectros em torno e acima do limiar.	79
Figura 24 – Resultados obtidos de um conjunto de dados.	99
Figura 25 – Valores Críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov.	100

LISTA DE CÓDIGOS

Código Fonte 1 – Análise estatística das intensidades emitidas por lasers aleatórios . .	95
Código Fonte 2 – Teste Kolmogorov-Smirnov	100

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	O PRINCÍPIO DO LASER	14
1.1.1	Coeficientes de Einstein e as equações de taxa	17
1.1.2	Sistemas de 3 e 4 níveis	20
1.2	LASER ALEATÓRIO	22
1.3	EQUAÇÃO DE LANGEVIN E EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK	24
1.4	EQUAÇÕES DE LANGEVIN E FOKKER-PLANCK ASSOCIADAS	28
2	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES: MODELOS E FITS DOS DADOS	36
2.1	O CAMINHANTE ALEATÓRIO	36
2.1.1	Teorema Central do Limite	39
2.1.2	Teorema Central do Limite Generalizado	41
2.2	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY	43
2.3	DISTRIBUIÇÃO DE INTENSIDADE EM LASERS ALEATÓRIOS	44
2.3.1	Modelos baseados em soma de fase aleatória e diferencial estocástico de grau f	46
2.3.2	Comparando as previsões dos modelos com dados experimentais	49
3	FASE VIDRO DE SPINS FOTÔNICAS: TEORIA E DADOS EXPERIMENTAIS PARA A FUNÇÃO DE PARISI	55
3.1	INTRODUÇÃO	55
3.1.1	Formulação hamiltoniana de sistemas RL	56
3.1.2	Sistemas RL com vidro de spin no tratamento estatístico	60
3.2	PARÂMETRO DE SOBREPOSIÇÃO DE PARISI	68
3.3	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	71
4	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON: TEORIA E DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MAPA DE CALOR	75
4.1	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON	75
4.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	76
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	80
	REFERÊNCIAS	82

APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS	90
APÊNDICE B – CÓDIGOS EM PYTHON	95
APÊNDICE C – TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	99

1 INTRODUÇÃO

Quando inferirmos que somos capazes de prever os resultados subsequentes de um conjunto de dados a partir dos dados iniciais das medidas, nos deparamos com um sistema determinístico. Contudo, quando temos uma probabilidade associada a cada medida realizada ou também uma medida futura, é considerado um sistema probabilístico. E nesses dois principais conceitos é que a estatística está definida, pois ela é a análise e interpretação dos dados de um espaço amostral, ou, de maneira mais técnica, “a Estatística é uma ciência que se dedica ao desenvolvimento e ao uso de métodos para a coleta, resumo, organização, apresentação e análise de dados” (FARIAS; SOARES; CÉSAR, 2003). E a estatística está em diversas áreas como na física, matemática, economia, computação, meteorologia, etc, sendo um dos campos da ciência mais antigos, pois nasceu no período muito remoto da antiguidade. Acreditando-se que os primeiros registros de dados estatísticos foram associados a prisioneiros do Egito antigo por volta de 3000 a.C. e estes escreveram nas paredes utilizando gravetos ou pedras.

Sabemos que a estatística é utilizada por povos de todas as culturas, uma vez que temos a incessante necessidade de fazer contagens, avaliar valores e determinar resultados melhores para nossos problemas. Se fizermos uma análise mais refinada da estatística que conhecemos hoje, percebemos que nasceu junto com a teoria das probabilidades entre os séculos XVI e XVII, onde diversos cientistas se interessavam em resolver problemas justamente de caráter probabilístico. E naquela época era muito comum os matemáticos proporem desafios e suas soluções. Dentre estes, podemos citar o Blaise Pascal (1623 – 1662) e o Pierre Fermat (1601 – 1665), pioneiros na teoria das probabilidades (ROGÉRIO, 2013).

Poderia ser contada toda a história, em que os registros se perdem ao longo do tempo, porém, vamos dar um salto para os dias atuais e introduzir a estatística dentro da Física. Acreditamos que na física temos diversos problemas que são interpretados através de teorias, regras e leis estatísticas. Tanto que um dos problemas mais relevantes explicado por teoria estatística na física é o caminhar aleatório. Este problema é extremamente importante para o entendimento deste trabalho, deixando especialmente para ele, no capítulo 2, a seção 2.1. E para afunilar ainda mais o conteúdo a ser tratado neste trabalho, nosso interesse é usar o contexto da física estatística dentro de um outro campo da física: Óptica.

A óptica é o estudo da luz e seus fenômenos, sendo um dos campos mais antigos da ciência. Uma das primeiras descobertas da óptica nos foi fornecida por Isaac Newton em 1704, que

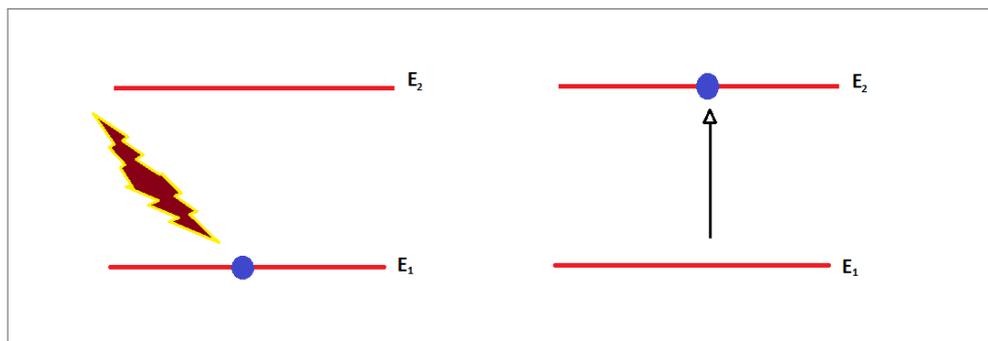
culminou na explicação do arco-íris e alguns outros fenômenos corpusculares da luz. Séculos após, ressaltando aqui que nos referimos na transição entre os séculos XIX e XX, um outro brilhante cientista mostrou que a óptica também era um ramo do eletromagnetismo através de um conjunto de equações que leva seu nome, as Equações de Maxwell (BONI, 2018). E posteriormente vieram as contribuições de Max Planck em 1900 considerando mais uma vez a radiação como partícula, com isso, a luz ficou compreendida como um ente cujo caráter possui comportamento dual, tanto corpuscular quanto ondulatório (EISBERG; RESNICK, 1983).

E a óptica proporcionou uma grande evolução científica e tecnológica, por causa disto, podemos citar algumas invenções revolucionárias como as máquinas fotográficas, lentes oculares, luminárias, televisores, computadores e também surgiram os lasers por volta do ano de 1960, o qual tratamos dele na seção seguinte. Dando uma ressalva, a definição da palavra “Laser”, que em inglês significa “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”, e em português significa “amplificação de luz por emissão estimulada de radiação”.

1.1 O PRINCÍPIO DO LASER

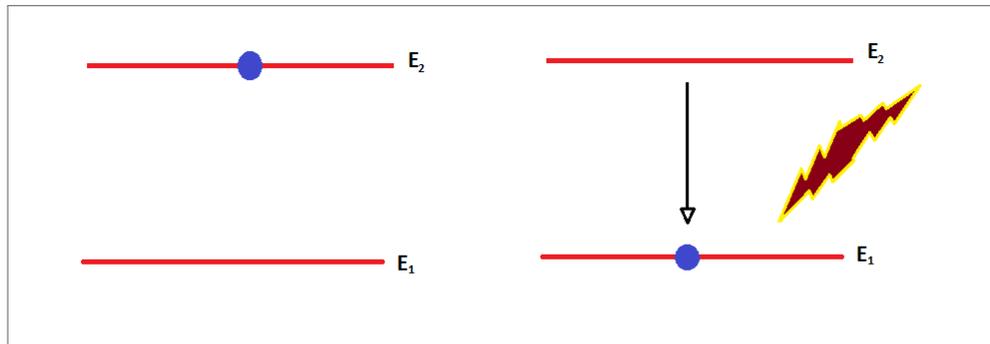
Albert Einstein previu teoricamente em 1917 o processo de emissão estimulada da luz. Reforçando que, poucos anos antes, Niels Bohr já havia abordado em seu modelo atômico a questão da absorção Fig.(1) e emissão espontânea Fig.(2) de quanta de luz (ou fótons) por elétrons realizando transições entre níveis atômicos (BONI, 2018). A primeira situação ocorre quando uma radiação incide em um sistema cuja diferença dos níveis de energia $\Delta E = E_2 - E_1$ é igual a sua energia $E = h\nu$, onde h é a constante de Planck e ν é a frequência da radiação incidente. Ao absorver a energia da radiação, o átomo passa do estado fundamental E_1 para o estado de maior energia, ou estado excitado, E_2 .

Figura 1 – Processo de absorção.



Fonte: O autor (2022).

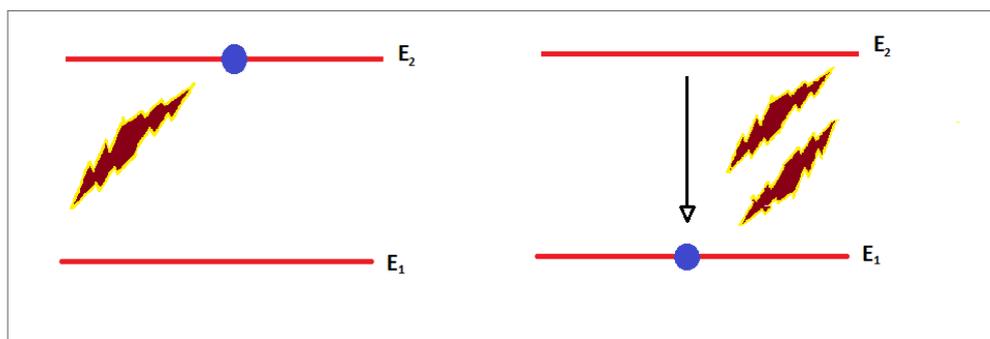
Figura 2 – Processo de emissão espontânea.



Fonte: O autor (2022).

A segunda situação, que é sobre a emissão espontânea, seria o processo inverso à absorção. Neste caso o átomo retorna espontaneamente ao nível fundamental E_1 e com isso libera a radiação (EISBERG; RESNICK, 1983).

Figura 3 – Processo de emissão estimulada.



Fonte: O autor (2022).

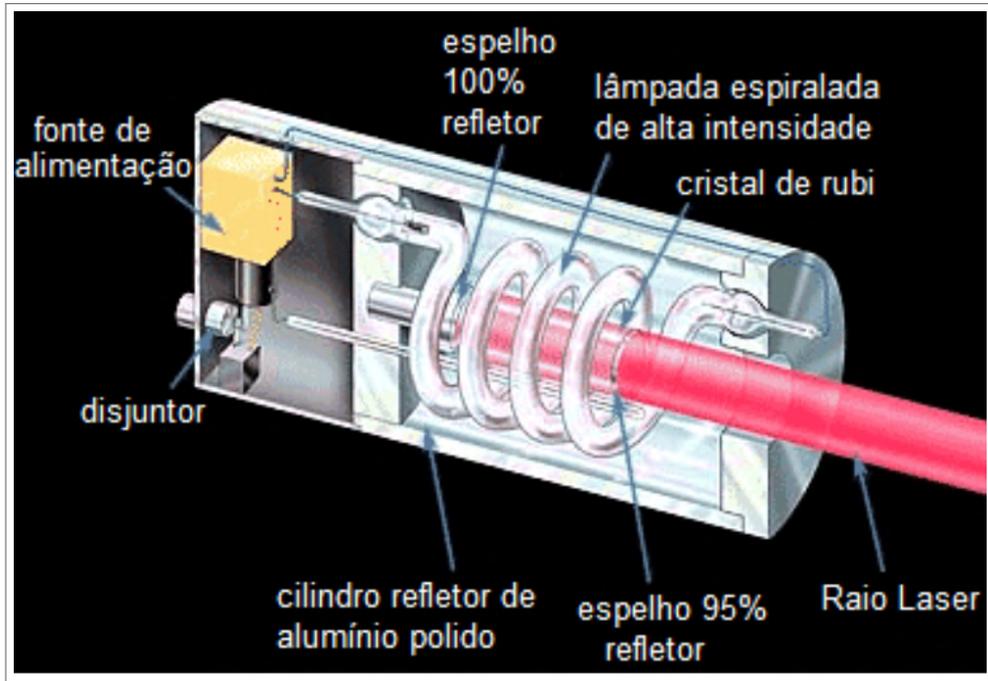
Einstein propôs que o sistema excitado poderia retornar ao nível fundamental não apenas de forma espontânea, mas também de maneira estimulada. E neste regime de emissão estimulada, um fóton incide no átomo que está no nível de maior energia e o átomo relaxa de maneira estimulada ao nível fundamental liberando um fóton idêntico ao que o estimulou, como na Fig(3).

Desse modo houve amplificação da luz, uma vez que entrou um fóton no sistema e saíram dois. Para estes processos, abordaremos as equações teóricas mais a frente.

E em 1960, a teoria de Einstein veio receber uma grande aplicação realizada pelo físico Theodore Harold Maiman, ao inventar o laser de rubi, representado na Fig(4).

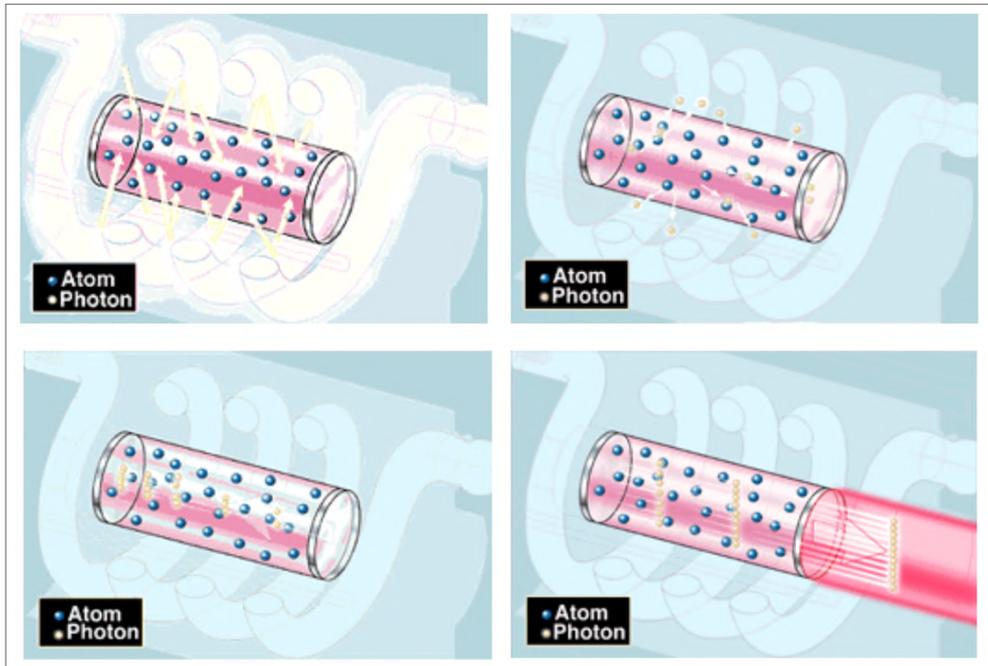
Para o funcionamento do laser de rubi, Maiman utilizou dois espelhos, que formam uma cavidade óptica, cujo primeiro espelho é 100% refletor e o segundo deve ser parcialmente refletor, ou seja, neste segundo espelho, parte da luz reflete e parte da luz refrata. O objetivo

Figura 4 – Laser de Rubi inventado por T. H. Maiman.



Fonte: (DIAZ, 2016).

Figura 5 – Processo de formação do feixe do laser de rubi com átomos de cromo.



Fonte: (DIAZ, 2016).

era excitar os átomos de um cristal de rubi (Al_2O_3), dopado com íons de cromo (Cr^{3+}), através da lâmpada espiralada de alta intensidade de quartzo. A luz do tubo excitava os átomos de cromo e estes liberavam fótons, representados pelas setinhas amarelas, que percorriam todo

o cilindro de alumínio, como mostra a Fig.(5). Devido ao processo de emissão estimulada, os fótons saem com bastante intensidade através do espelho semirrefletor e assim gera-se o feixe do laser.

Os primeiros lasers são normalmente chamados de lasers convencionais. Os seus elementos essenciais, mostrados na Fig.(4), são: a cavidade óptica, constituída pelos espelhos e por um meio de ganho, que é onde as atividades de emissão e absorção acontecem e um deles sendo parcialmente refletor, meio de ganho que é onde a atividade de emissão e absorção acontecem; e também a fonte de excitação que pode ser uma diferença de potencial ou até mesmo uma outra onda eletromagnética, a depender do laser em questão. A cavidade óptica viabiliza os modos ópticos ressonantes e o meio de ganho excitado pela fonte de excitação. Uma das peculiaridades para o meio de ganho é que ele seja altamente transparente à luz emitida, pois o espalhamento dessa radiação causa perdas no sistema.

Todos os processos descritos anteriormente já eram conhecidos antes do laser, se considerarmos o Maser (amplificação de micro-ondas por emissão estimulada de radiação). Esta invenção também recebeu o prêmio Nobel em 1964, e foi dado aos físicos Charles Townes, Nicolay Basov e Aleksandr Prokhorov. Contudo, não será detalhado neste trabalho sobre o Maser, não sendo aqui o ponto principal, pois há um vasto assunto sobre o mesmo em diversos livros, artigos e/ou sites.

1.1.1 Coeficientes de Einstein e as equações de taxa

Vamos começar com uma notação mais simples e aos poucos, em cada capítulo, vamos utilizando maneiras mais gerais de descrever matematicamente os conteúdos abordados. Fazendo uso de um sistema de dois níveis como mostrado nas Figs.(1)-(3), para compreendermos as equações dos processos mencionados anteriormente.

- Absorção

Partindo de um sistema no estado fundamental no qual uma radiação incide (como na Fig.1). Vamos caracterizar o processo como " $R_{1\rightarrow 2}$ ", ou seja, a elevação do sistema que parte do estado fundamental E_1 para o estado excitado E_2 sendo proporcional à um determinado "coeficiente" e também proporcional a densidade de energia da radiação que incide, de forma que,

$$R_{1\rightarrow 2} = B_{12}\rho(\nu), \quad (1.1)$$

onde B_{12} agora se trata do coeficiente de absorção e $\rho(\nu)$, como dito acima, é a densidade de energia da radiação incidente na frequência ν , que vem da discussão do corpo negro realizada por Max Planck (EISBERG; RESNICK, 1983; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016):

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \right), \quad (1.2)$$

onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da onda eletromagnética, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema.

- Emissão espontânea

Quando um átomo está no estado excitado, ele tende de forma espontânea a voltar para o seu estado fundamental. E como discutido na seção anterior (Seção1.1), se existe uma relaxação para o estado fundamental, por consequência uma energia é emitida. Nesse caso não há interferência de alguma radiação incidente, o que ocorre quando nos referirmos ao processo de emissão estimulada. Da mesma maneira que fizemos na Eq.(1.1), vamos também definir um coeficiente para a emissão espontânea, denotado por,

$$A_{2 \rightarrow 1} = A_{21}, \quad (1.3)$$

onde o termo A_{21} é o coeficiente de emissão espontânea, nome adequado pois estamos considerando que o sistema sai do estado 2 para o estado 1 espontaneamente, como mostrado na Fig.(2).

- Emissão estimulada

Como mostrado na Fig.(3), que é o sistema no estado excitado, se um fóton interage com um átomo e este estando no estado excitado, ele irá retornar para o estado fundamental de forma que outro fóton idêntico é gerado. E aqui já podemos definir o coeficiente de emissão estimulada de B_{21} . Concluímos então que se uma densidade de energia é necessária para que haja a emissão estimulada, logo, de forma semelhante à Eq.(1.1), este processo de emissão estimulada será idêntica a $B_{21}\rho(\nu)$. E são esses coeficientes que definimos para a absorção e as emissões que são chamados de "coeficientes de Einstein".

Para escrever a equação para a relaxação considerando o sistema no estado excitado, temos que a taxa de relaxação para o estado fundamental é:

$$R_{2 \rightarrow 1} = A_{21} + B_{21}\rho(\nu). \quad (1.4)$$

Podemos perceber que a taxa de relaxação $R_{2 \rightarrow 1}$ está diretamente relacionada com as emissões espontânea A_{21} e as emissões estimuladas $B_{21}\rho(\nu)$. Concluímos então que a Eq.(1.1) é a taxa de ocorrer a transição para o estado excitado, enquanto a Eq.(1.4) é a taxa de ocorrer a transição para o estado fundamental. Lembrando que essas equações são válidas para átomos, moléculas e até mesmo os íons (EISBERG; RESNICK, 1983; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

- Coeficientes de Einstein no equilíbrio térmico

O que é comum pensar após as informações dadas até este momento é que, no equilíbrio térmico, as taxas das Eq.(1.1) e Eq.(1.4) se igualam. Considerando uma determinada quantidade de íons no estado fundamental n_1 e uma quantidade de íons que estão no estado excitado n_2 , teremos da Eq.(1.1) e Eq.(1.4),

$$n_1[B_{12}\rho(\nu)] = n_2[A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]. \quad (1.5)$$

E a partir da Eq.(1.5), vamos obter o valor da densidade de energia. Que podemos isolar $\rho(\nu)$ na equação acima, se tornando,

$$\rho(\nu) = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}. \quad (1.6)$$

Dividindo e multiplicando por $1/(n_2 B_{21})$, reobtemos,

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}} - 1}. \quad (1.7)$$

E ao considerar o sistema no equilíbrio térmico, podemos fazer uso da distribuição de Boltzmann para as populações n_1 e n_2 dada por,

$$n_2 = n_1 \exp(-h\nu/kT), \quad (1.8)$$

De modo que aplicando a Eq.(1.8) na Eq.(1.7) temos,

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.9)$$

Comparando as Eq.(1.2) e Eq.(1.9), conclui-se que,

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1. \quad (1.10)$$

Logo, no equilíbrio térmico, a absorção é igual a emissão estimulada. Reforçando que estamos tratando em um sistema de dois níveis. Mas não é só isso que podemos concluir ao comparar as Eq.(1.2) e Eq.(1.9), temos também que,

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (1.11)$$

ou ainda,

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \quad (1.12)$$

Podemos notar na Eq.(1.12) que para altas frequências, como é o caso da luz visível e raios-x, o coeficiente de emissão espontânea A_{21} é maior que o da emissão estimulada B_{21} . Contudo, na região do micro-ondas a frequência é menor, fazendo com que $A_{21} < B_{21}$. Sendo essa a conclusão de que a emissão estimulada poderia ser maior que a emissão espontânea, que ocasionou na invenção do maser, e posteriormente, o surgimento do laser.

E após todas essas informações, podemos construir as equações de taxa de variação da população dos níveis excitado e fundamental, que são,

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1[B_{12}\rho(\nu)] - n_2[A_{21} + B_{21}\rho(\nu)], \quad (1.13)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1[B_{12}\rho(\nu)] + n_2[A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]. \quad (1.14)$$

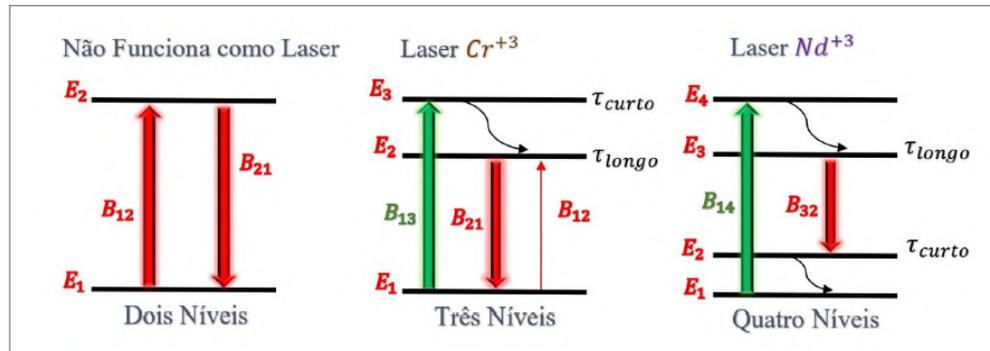
As Eq.(1.13) e Eq.(1.14) são equações de taxa acopladas, sendo justamente uma interpretação da Eq.(1.5). A interpretação segue que a variação temporal da população do estado excitado dn_2/dt aumenta de acordo com o coeficiente de absorção, afinal, se o sistema absorve energia, mais átomos irão popular o estado excitado n_2 . Em contrapartida, decresce de acordo com as emissões espontânea e estimulada, motivo que explica o sinal negativo na frente do segundo termo à direita da Eq.(1.13). Então podemos concluir que, se estamos em um sistema de dois níveis, o que uma população perde, a outra ganha, e isso explica o fato da similaridade entre as Eq.(1.13) e Eq.(1.14), trocando os sinais (EISBERG; RESNICK, 1983; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

1.1.2 Sistemas de 3 e 4 níveis

De modo didático, na seção anterior foi tratado um sistema de 2 níveis, porém, para conseguir amplificação em um sistema de dois níveis é bastante difícil, pois é necessário ter um sistema em que a população total esteja inicialmente no estado excitado, correspondendo a uma situação fora do equilíbrio térmico, e assim que um fóton incidir sobre o sistema, a reação em cadeia faz com que o primeiro átomo relaxe de forma estimulada criando outro fóton que interage com o próximo átomo e assim por diante. Para o laser funcionar, vamos comentar um pouco sobre um sistema de 3 ou 4 níveis.

A Fig.(6) nos mostra, em sequência, os sistemas em 2, 3 e 4 níveis. Os coeficientes B_{ij} significam absorção se $i < j$, ou emissão estimulada caso o contrário, e no geral significa que

Figura 6 – Sistema de 2, 3 e 4 níveis.



Fonte: (ACADEMY, 2018).

está ocorrendo uma transição do estado i para j ou também o inverso. As setas de cor preta indicam um decaimento não-radionativo, ou seja, um decaimento espontâneo. Em um sistema de 2 níveis, levando em consideração a Eq.(1.10), a absorção é igual ao decaimento por emissão estimulada, de forma que este tipo de sistema não serviria para tratarmos do laser. Contudo, em um sistema de 3 níveis, representado pelo desenho do meio da Fig.(6), é suficiente para gerar laser. E é o laser que foi inventado por T. H. Maiman, que funciona com um sistema de 3 níveis, que se utilizou um rubi dopado com íons de cromo Cr^{+3} . Um sistema ainda mais eficiente está demonstrado também na mesma figura, que se utiliza íons de neodímio Nd^{+3} .

Em se tratando do sistema de 3 níveis, se um átomo é excitado para o nível 3, ele pode relaxar muito rapidamente para o nível 2, e com isso o seu tempo de vida τ no nível 3 é muito curto, como também está demonstrado na Fig.(6), e do nível 2 para o nível 1, no relaxamento, é liberado um fóton que pode ser absorvido por outro átomo de um sistema e levar este novo átomo para o nível 2 ou até para o nível 3. Para minimizar o efeito da absorção e do relaxamento não-radioativo, pois o objetivo é amplificar a luz, foi necessário propor um sistema de 4 níveis, pois assim o nível 3 poderá ter um tempo de vida longo. E foi através de pesquisas que foi encontrado esse sistema de 4 níveis nos íons de neodímio em seu estado trivalente. Assim, ao absorver, o átomo que é excitado até o nível 4, pode ter seu relaxamento rapidamente para o nível 3, mas nesse nível o tempo de vida é longo (da ordem de $100 \mu s$), facilitando o decaimento estimulada para o nível 2. E uma vez no nível 2, pode ocorrer uma relaxação rápida ($\ll 1 \mu s$ para o nível 1, evitando uma nova absorção neste nível. Por este motivo, esse sistema é mais eficiente que o de 3 níveis. Além de fazermos muito uso do Nd^{+3} nos experimentos até mesmo de lasers aleatórios, sendo este abordado na próxima seção.

1.2 LASER ALEATÓRIO

Com a invenção do laser, mais tarde começaram a surgir grandes avanços devido aos interesses humanos e também comerciais. O laser é utilizado em muitos lugares e de diversas formas, desde alguns objetos que hoje em dia está em desuso, como em leitores de discos, e outros que estão em uso, como a caneta laser, também em comunicação e até transmissão de dados, mencionando também em diversas outras áreas, de Engenharia até Medicina. E não só isso, o laser convencional foi utilizado para gerar um novo tipo de laser que é o Laser Aleatório (LA), ou em inglês, e como normalmente iremos nos referir a eles, o Random Laser (RL).

O RL é um laser gerado em um meio desordenado. Diferentemente dos lasers convencionais, que necessitam de uma cavidade óptica, o laser aleatório não depende da presença de uma cavidade. A teoria proposta para este tipo de laser surgiu em 1967 no artigo intitulado "Stimulated Emission of an Ensemble of Scattering Particles with Negative Absorption" (LETOKHOV, 1967), onde o autor fez uma interpretação da equação da difusão da física estatística para fótons em um meio desordenado com ganho. E para entendermos o meio desordenado basta sabermos que é um meio no qual estejam compostas partículas dispostas de forma aleatória, ou também, um meio no qual o índice de refração linear muda aleatoriamente dentro desse meio. Após alguns anos da publicação de Letokhov, no ano de 1986, Markushev e colaboradores relataram a primeira demonstração experimental da geração de amplificação radiativa de luz em um meio desordenado utilizando algumas diferentes amostras dopadas com Nd^{3+} (MARKUSHEV; ZOLIN; BRISKINA, 1986). A hipótese de que esta seja a primeira demonstração experimental de um RL, mesmo ter sido mostrado uma constrição espectral no limiar da transição $4F_{3/2} \rightarrow 4F_{11/2}$ como evidência de uma amplificação da luz, não foi totalmente aceita porque havia uma possibilidade da presença de cavidades ressonantes dentro das partículas, nos levando ao caso de um laser convencional. No ano de 1994, Lawandy e colaboradores realizaram a primeira demonstração experimental não ambígua de emissão RL em um sistema desordenado (LAWANDY et al., 1994). A preparação do experimento consistia em soluções de etanol, partículas de dióxido de titânio e Rodamina 640. Os autores mostraram um estreitamento do espectro para a emissão do laser aleatório excitando a amostra com o laser de Nd:YAG em 532 nm , que é justamente uma das características bem fundamentais para este tipo de laser. Não ficando só nisso, uma outra característica importante é do decaimento temporal das emissões encurtando quando há aumento do ganho fornecido, este processo é evidenciado no limiar que opera o laser.

Figura 7 – Representação esquemática de emissão laser em um meio espalhador.



Fonte: (JUNIOR, 2019).

Na Fig.(7) existe uma fonte de luz externa que incide em um conjunto aleatório de partículas que contém corante laser com o propósito de excitar o sistema e obter inversão de população. O corante em seu interior acaba amplificando a luz devido ao processo de emissão estimulada (Seção 1.1.2), fazendo as partículas espalharem a luz. Logo, a luz que é amplificada percorre um trajeto aleatório até deixar o sistema (JUNIOR, 2019).

Em outro panorama de pesquisa dos lasers aleatórios, vários pesquisadores analisaram a analogia entre fenômenos observados nos RLs e a estatística de sistemas complexos. Como será abordado no próximo capítulo (Cap.2), observa-se a partir das flutuações das intensidades de saída dos RLs que há uma transição de regimes estatísticos com aumento no ganho do sistema. Para energias de excitação abaixo do limiar (ou "threshold") de emissão RL, as intensidades emitidas possuem distribuição gaussiana, enquanto que para energias de excitação acima deste limiar a sua distribuição de valores é descrita por uma estatística de Lévy (ver detalhes a seguir).

Em 2013, foi demonstrado tanto de uma forma teórica quanto experimental, uma transição gaussiana-Lévy-gaussiana nos regimes estatísticos das flutuações de intensidades de saída dos RLs (IGNESTI et al., 2013).

É importante mencionar também que os lasers aleatórios possuem variadas aplicações, onde a sua propriedade de baixa coerência é aproveitado. Podendo citar, por exemplo, a mensuração do teor de gordura presente no leite (ABEGÃO et al., 2016), o uso no sensoriamento (CHURKIN et al., 2012), sendo possível, através de tingimento do tecido biológico com corante laser, identificar a presença de células cancerígenas, uma vez que um tecido com células saudáveis emite luz laser com menor aleatoriedade que um tecido cancerígeno (POLSON; VARDENY, 2010), entre outras diversas aplicações. Além desses benefícios já citados, temos ainda o seu baixo custo. Entretanto, uma desvantagem se dá decorrente a complexidade de se ter um tratamento teórico de forma única para esse fenômeno, pois tanto o comportamento aleatório da emissão quanto o próprio mecanismo que se realimenta, são constituídos pela natureza e morfologia do meio de ganho não ordenado (REVILLA et al., 2009). Em resumo, esses dois fatores influenciam totalmente na característica do sistema de tal forma que podem gerar dois tipos de realimentação, comumente chamados de feedback de intensidade e de amplitude.

Antes de prosseguirmos para os capítulos seguintes, ainda é essencial discutir neste capítulo um assunto que descreve "a base" para todos os demais capítulos. De fato, na seção seguinte apresentamos a equação de Langevin, partindo de um movimento browniano para chegarmos na equação de Fokker-Planck, e na última seção faremos considerações sobre meios não lineares com inomogeneidades, polarização não linear, equações de Fokker-Planck e outros assuntos, com foco na descrição dos RLs.

1.3 EQUAÇÃO DE LANGEVIN E EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK

Iniciando com a equação de Langevin, que representa uma abordagem alternativa para a análise de certos processos estocásticos, consistindo de uma equação diferencial estocástica para a velocidade, por exemplo, de um caminhante aleatório. Sabemos que se conhecermos a somatória de todas as forças que atuam em uma partícula de massa m , de acordo com a segunda lei de Newton, conseguiríamos descrever completamente o movimento dessa partícula. Para um caso de colisões de partículas com as moléculas do fluido, vamos considerar que a partícula descreve um movimento browniano unidimensional, separando as forças que atuam na partícula em dois grupos: as forças que existem devido a campos externos (exemplo, campo

gravitacional, campo elétrico, etc.) e as forças internas (exemplo, as colisões aleatórias das moléculas do fluido com a partícula) (SALINAS, 2008; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014).

Considerando o que foi comentado anteriormente, a segunda lei de Newton é dada por,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta\vec{v} + \vec{F}_{al}(t) + \vec{F}_{ext}, \quad (1.15)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula de massa m , β é o coeficiente de arrasto das forças de viscosidade (o atrito com o meio), F_{ext} identifica todas as forças externas, e $\vec{F}_{al}(t)$ representa uma força de caráter aleatório independente da velocidade, mas tratando entre colisões de partículas, representa o bombardeamento das moléculas do fluido. A força $\vec{F}_{al}(t)$ é tal que seu valor médio $\langle \vec{F}_{al}(t) \rangle = 0$ e não apresenta correlações temporais, ou seja,

$$\langle F_{al}(t_i) F_{al}(t_j) \rangle = g\delta(t_i - t_j). \quad (1.16)$$

A Eq.(1.15) é conhecida como equação de Langevin (LEMONS; GYTHIEL, 1997). A solução da equação de Langevin nos informa sobre o comportamento de grandezas médias como posição e velocidade da partícula. Uma solução possível para a equação anterior mas que não iremos abordar o método para encontrar sua solução, pois este se encontra em diversos livros/artigos de Mecânica Estatística e/ou Física Matemática, por exemplo, os livros (ARFKEN; WEBER, 2005; SALINAS, 2008), para o caso em que $F_{ext} = 0$, pode ser escrita na forma,

$$v(t) = v(0) \exp(-\beta t/m) + \exp(-\beta t/m) \int_0^t \exp(\beta\tau/m) F_{al}(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

Dizemos que uma variável é estocástica quando apresenta um comportamento aleatório no tempo. Em geral, muitos processos estocásticos podem ter algum tipo de correlação entre escalas de tempo diferentes. Um dos processos mais simples envolvendo correlações temporais é o processo Markoviano, cujo próximo estado é determinado exclusivamente pelo estado presente (WEISS, 1994; SALINAS, 2008). Quando no processo temos apenas um conjunto discreto de estados, denominamos de cadeias de Markov. Contudo, se o estado futuro é determinado por muitos eventos do passado, dizemos que a caminhada apresenta memória de longo alcance e, nestes casos, o processo é não Markoviano.

Se desejarmos saber qual a probabilidade de um caminhante aleatório chegar na posição x_2 no tempo t_2 após ter estado na posição x_1 no tempo t_1 , precisaremos da noção de probabilidade condicional (e mais detalhes do caminhante aleatório será apresentada no Cap.(2)). Faremos uso da notação $P(A|B)$ para designar a probabilidade condicional de ocorrer A dado que

B ocorreu. A probabilidade condicional pode ser definida pela relação $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Além de obedecer a relação de Chapman-Kolmogorov, que é dado por,

$$P(A_N|B_0) = \sum_{k=1}^N P(A_N|B_k)P(A_k|B_0). \quad (1.18)$$

Utilizaremos o conceito de probabilidade condicional para demonstrar a equação de Fokker-Planck.

A equação de Fokker-Planck é uma equação diferencial que fornece a evolução temporal da densidade de probabilidade de uma dada variável estocástica (RISKEN; FRANK, 1996; SALINAS, 2008). Ou também podemos dizer que a equação de Fokker-Planck é uma equação de movimento para $P(x, t)$. A equação de Fokker-Planck será apresentada na sua forma mais geral e para um sistema em uma dimensão.

Considere v_i como sendo um dado evento (por exemplo, a velocidade) ocorrendo no instante de tempo t_i . Para este conjunto de eventos podemos escrever uma versão contínua da Eq.(1.18) como,

$$P(v_f, t_f|v_i, t_i) = \int P(v_f, t_f|v_k, t_k)P(v_k, t_k - t_i|v_i)dv_k. \quad (1.19)$$

Devido ao fato do instante inicial poder ser escolhido de maneira arbitrária, vamos reescreve a Eq.(1.19) para que as probabilidades dependam apenas do intervalo de tempo entre os instantes inicial e final, ou seja,

$$P(v_f, t_f - t_i|v_i) = \int P(v_f, t_f - t_k|v_k)P(v_k, t_k - t_i|v_i)dv_k. \quad (1.20)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, substituindo $t_f - t_i$ por $t + \Delta t$ e $t_k - t_i$ por t . Teremos,

$$P(v_f, t + \Delta t|v_i) = \int P(v_f, \Delta t|v_k)P(v_k, t|v_i)dv_k. \quad (1.21)$$

A equação acima ainda pode ser reescrita para ser ajustada no contexto do movimento Browniano, obtendo assim,

$$P(v, t + \Delta t|v_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t|v')P(v', t|v_0)dv'. \quad (1.22)$$

onde o termo $P(v, \Delta t|v_0)$ pode ser compreendido como uma probabilidade de transição entre dois estados distintos.

Para encontrarmos uma relação para as probabilidades de transição que relacione apenas os estados inicial e final, é necessário algumas manipulações algébricas. Começando por multiplicar ambos os lados da Eq.(1.22) por uma função bem comportada $\phi(v)$ e integrando cada

termo em v . Tendo, assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v, t + \Delta t | v_0) \phi(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t | v') \phi(v) dv \right) P(v', t | v_0) dv'. \quad (1.23)$$

Expandindo em série de Taylor (vide Apêndice(A)) o termo $P(v, t + \Delta t | v_0)$ e substituindo no lado esquerdo da equação anterior, obtemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v, t + \Delta t | v_0) \phi(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} P(v, t | v_0) \phi(v) dv + \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(v, t | v_0)}{\partial t} \phi(v) dv + \dots \quad (1.24)$$

Expandindo em série de Taylor o termo $\phi(v)$ entre parênteses do lado direito da Eq.(1.24),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t | v') \phi(v) dv &= \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t | v') \times \\ &\left(\phi(v') + \phi'(v')(v - v') + \frac{1}{2} \phi''(v')(v - v')^2 + \dots \right) dv \\ &= \phi(v') + \phi'(v') \mathcal{D}^{(1)}(v') \Delta t + \frac{1}{2} \phi''(v') \mathcal{D}^{(2)}(v') \Delta t + \dots, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde $\mathcal{D}^{(1)}$ e $\mathcal{D}^{(2)}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1)}(v') &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t | v') (v - v') dv, \\ \mathcal{D}^{(2)}(v') &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \Delta t | v') (v - v')^2 dv. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Substituindo a Eq.(1.25) no lado direito da Eq.(1.24), passamos a ter,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v', t | v_0) \left(\phi(v') + \phi'(v') \mathcal{D}^{(1)}(v') \Delta t + \frac{1}{2} \phi''(v') \mathcal{D}^{(2)}(v') \Delta t + \dots \right) dv'. \quad (1.27)$$

Agora será necessário fazer uma integração por partes no segundo e terceiro termos da expressão acima,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(v', t | v_0) \mathcal{D}^{(1)}(v') \phi'(v') dv' &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v') \frac{\partial}{\partial v'} (P(v', t | v_0) \mathcal{D}^{(1)}(v')) dv', \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(v', t | v_0) \mathcal{D}^{(2)}(v') \phi''(v') dv' &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v') \frac{\partial^2}{\partial (v')^2} (P(v', t | v_0) \mathcal{D}^{(2)}(v')) dv'. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Substituindo todos estes valores diretamente na Eq.(1.24) e desprezando os termos de segunda ordem na série de Taylor (Δt pequeno), obtemos finalmente a equação de Fokker-Planck, que é

$$\frac{\partial P(v, t | v_0)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v} (\mathcal{D}^{(1)}(v) P(v, t | v_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\mathcal{D}^{(2)}(v) P(v, t | v_0)), \quad (1.29)$$

sendo que, no contexto da difusão de partículas para o movimento browniano, $\mathcal{D}^{(1)}(v)$ é o coeficiente de arrasto e $\mathcal{D}^{(2)}(v)$ é o coeficiente de difusão (sendo que $\mathcal{D}^{(2)}(v) > 0$). Notemos que v não precisa ser necessariamente a velocidade, fazendo $v = x$, $\mathcal{D}^{(1)}(v) = 0$ e $\mathcal{D}^{(2)}(v) = D$, obtemos

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.30)$$

onde o $D = l^2/(2\tau)$, em que l é um comprimento fixo de passos que leva um tempo τ . Sendo esta última equação conhecida como Equação de Difusão Normal. Assim, percebemos que a equação de difusão normal é um caso particular da equação de Fokker-Planck.

1.4 EQUAÇÕES DE LANGEVIN E FOKKER-PLANCK ASSOCIADAS

Esta seção teve como base o artigo (RAPOSO; GOMES, 2015). Na seção anterior mostramos as Equações de Langevin e de Fokker-Planck, e como obtemos essas equações de maneira mais simplista, contudo, para chegarmos no título que é atribuído a esta seção, vamos rever alguns outros importantes conceitos. Iniciamos considerando um meio dielétrico, que é um material que pode ser polarizado por um campo elétrico externo, ou seja, ele pode armazenar energia elétrica. A polarização elétrica é descrita pela susceptibilidade elétrica do meio, que é uma medida de como ele responde a este campo elétrico. Contudo, teremos como fundamento o meio dielétrico não linear, que é aquele cuja susceptibilidade elétrica depende da intensidade do campo elétrico aplicado. Isso significa que a resposta do material não é linear, e pode levar a efeitos não triviais, como a geração de novas frequências. E mais uma informação, uma cavidade ressonante é uma região do espaço que é capaz de armazenar ondas eletromagnéticas por um período de tempo suficientemente longo (GRIFFITHS, 2010; MACHADO, 2012). Em um laser aleatório a luz é emitida por um meio ativo (como um gás ou um cristal) que é estimulado a emitir luz coerente (WIERSMA, 2008).

Um meio dielétrico não linear desordenado de um laser aleatório é um material que é capaz de armazenar energia óptica, e cuja resposta não linear é afetada pela presença de desordem (ou seja, variações aleatórias na estrutura do material). Isso pode levar a efeitos não lineares interessantes, como a auto-focalização de luz e a geração de novas frequências ópticas. Esses efeitos podem ser explorados para aplicações em óptica não linear e em geração de frequências ópticas, por exemplo (CAO, 2005; CONTI; FRATALOCCHI, 2010; SKIPETROV; OSTROVSKY, 2011). A aleatoriedade espacial do meio ativo implica em um índice de refração estático com um perfil

especialmente aleatório, como

$$n(\mathbf{r}) = c\sqrt{\mu_0\varepsilon(\mathbf{r})}. \quad (1.31)$$

Como, em geral, o meio de ganho do RL pode suportar um grande número N de modos de ressonância sobrepostos (os modos lasers), escrevemos a solução de campo eletromagnético das equações não lineares de Maxwell como (ANGELANI et al., 2006a; ANGELANI et al., 2006b; LEUZZI et al., 2009; CONTI; LEUZZI, 2011),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = Re \left\{ \sum_{n=1}^N a_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_n t) \right\}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = Re \left\{ \sum_{n=1}^N a_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_n t) \right\}, \quad (1.33)$$

onde as amplitudes de campo de valor real $\{\mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \mathbf{H}_n(\mathbf{r})\}$ aparecem acima modificadas pelo pré-fator adimensional dependente do tempo complexo $a_n(t)$ devido a não linearidade do meio de amplificação. E esse pré-fator é dado por,

$$a_n(t) = A_n(t) \exp[i\phi_n(t)], \quad (1.34)$$

em que $A_n(t)$ é a dinâmica da amplitude real evoluindo muito mais lentamente do que a fase $\phi_n(t)$. O sinal de intensidade do RL associado a uma dada frequência de ressonância ω_n pode ser expresso como a média temporal $I_n = \langle I_n(t) \rangle$, com

$$I_n(t) = c_n A_n^2(t), \quad (1.35)$$

e aqui temos uma constante de proporcionalidade dependente do modo c_n , que é fixada através do fluxo médio por área A da potência eletromagnética, que é,

$$c_n = (2A)^{-1} \int_A dA [\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}). \quad (1.36)$$

A intensidade total é,

$$I = \sum_{n=1}^N I_n. \quad (1.37)$$

A dinâmica das amplitudes complexas $\{a_n(t)\}$ é governada pelo sistema de equações de movimento de Langevin acopladas (ANGELANI et al., 2006b):

$$\frac{da_n}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_q a_s a_p^* + (\gamma_n - \alpha_n) a_n + \eta_n, \quad (1.38)$$

com $n = 1, 2, \dots, N$, e também, γ_n e α_n representam, respectivamente, as taxas de amplificação (ganho) e coeficiente de perda de radiação dependentes do modo, o termo complexo η_n

representa o ruído multiplicativo (ANGELANI et al., 2006b), de modo que $\langle \eta_n(t) \rangle = \langle \eta_n^*(t) \rangle = 0$ e correlações bitemporais dadas por $\langle \eta_n(t) \eta_m(t') \rangle = \langle \eta_n^*(t) \eta_m^*(t') \rangle = 0$ e $\langle \eta_n(t) \eta_m^*(t') \rangle = 2D\delta_{n,m}\delta(t-t')$, com a variância D fornecendo uma medida da amplitude do ruído relacionada à temperatura do banho de calor do sistema. Além de que, o símbolo $\{p, q, s\}'$ na Eq.(1.38) indica que a soma é restrita a combinações de modos tais que $\omega_n + \omega_p = \omega_q + \omega_s$ (O'BRYAN; SARGENT, 1973).

Por fim, o tensor complexo de quarta ordem g_{npqs} na Eq.(1.38) marca a assinatura da não linearidade do meio ativo de volume V através da polarização não linear de ordem principal, que é

$$g_{npqs} = \frac{1}{2i} \int_V dV \sum_{\{\alpha, \beta, \varphi, \tau\}=x,y,z}^N \chi_{\alpha\beta\varphi\tau}^{(3)}(\omega_n; \omega_q, \omega_s, -\omega_p, \mathbf{r}) \times E_n^\alpha(\mathbf{r}) E_p^\beta(\mathbf{r}) E_q^\varphi(\mathbf{r}) E_s^\tau(\mathbf{r}), \quad (1.39)$$

onde a aleatoriedade espacial do meio desordenado também está implícita no tensor de suscetibilidade de resposta de terceira ordem $\chi_{\alpha\beta\varphi\tau}^{(3)}(\omega_n; \omega_q, \omega_s, -\omega_p, \mathbf{r})$. De fato, na ausência de desordem, a parte real do tensor g_{npqs} assume um valor constante que se torna $g_{npqs}^R = g$, como no caso de sistemas de laser padrão com bloqueio de modo passivo (LEUZZI et al., 2009; GORDON; FISHER, 2003).

Existe uma dificuldade quando analisamos g_{npqs} na Eq.(1.38) em decorrência da presença de desordem aleatória de N equações acopladas. Podemos contornar a situação fazendo g_{npqs} serem variáveis aleatórias identicamente distribuída g e usando a aplicação de técnicas de quebra de simetria de réplica (ou replica symmetry breaking, em inglês), sobre a qual iremos nos aprofundar no Cap.3) com as fases $\{\phi_n(t)\}$ sendo as variáveis dinâmicas relevantes.

Podemos multiplicar ambos os lados da Eq.(1.38) pelo complexo da Eq.(1.34), obtendo,

$$a_n^* \frac{da_n}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_n^* a_q a_s a_p^* + a_n^* (\gamma_n - \alpha_n) a_n + a_n^* \eta_n, \quad (1.40)$$

Aplicando a relação da Eq.(1.35) na Eq.(1.34) e seu complexo, na Eq.(1.40), reobtemos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[i\phi_n(t)] \right\} &= -\frac{1}{2} \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_n^* a_q a_s a_p^* + \\ &+ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] (\gamma_n - \alpha_n) \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[i\phi_n(t)] + a_n^* \eta_n, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Primeiramente, resolvendo o lado esquerdo da igualdade da Eq.(1.41),

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[i\phi_n(t)] \right\} &= \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \times \\ \left\{ \frac{1}{2} \frac{[I_n]^{-1/2}}{c_n^{1/2}} \exp[i\phi_n(t)] \frac{dI_n}{dt} + \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} i \exp[\phi_n(t)] \frac{d\phi_n(t)}{dt} \right\}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

desprezando o último termo pois consideramos a parte real,

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[i\phi_n(t)] \right\} &= \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \times \\ \left\{ \frac{1}{2} \frac{[I_n]^{-1/2}}{c_n^{1/2}} \exp[i\phi_n(t)] \frac{dI_n}{dt} \right\} &= \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n(t)] \frac{1}{2} \frac{[I_n]^{-1/2}}{c_n^{1/2}} \times \\ \exp[i\phi_n(t)] \frac{dI_n}{dt} &= \frac{1}{2c_n} \frac{dI_n}{dt}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

colocando o resultado da Eq.(1.43) de volta na Eq.(1.41), teremos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c_n} \frac{dI_n}{dt} &= -\frac{1}{2} \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_n^* a_q a_s a_p^* + \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \times \\ \exp[i(\phi_n(t) - \phi_n(t))] &(\gamma_n - \alpha_n) + a_n^* \eta_n, \end{aligned} \quad (1.44)$$

ou mais ainda,

$$\frac{1}{2c_n} \frac{dI_n}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_n^* a_q a_s a_p^* + \frac{I_n}{c_n} (\gamma_n - \alpha_n) + a_n^* \eta_n, \quad (1.45)$$

Por fim, organizando os termos e determinando a parte real,

$$\frac{1}{c_n} \frac{dI_n}{dt} = -Re \left\{ \sum_{\{p,q,s\}'=1}^N g_{npqs} a_n^* a_q a_s a_p^* - 2a_n^* \eta_n \right\} + 2 \frac{I_n}{c_n} (\gamma_n - \alpha_n), \quad (1.46)$$

Para analisarmos as combinações de modos, devemos notar a soma restrita que está abrangendo três classes, sendo elas: $\omega_n = \omega_q$ e $\omega_n = \omega_s$, também $\omega_n = \omega_s$, e $\omega_q = \omega_p$, além de considerar as demais possibilidades desde que $\omega_n + \omega_p = \omega_q + \omega_s$. Contudo, a última classe normalmente é desconsiderada (ANGELANI et al., 2006b; O'BRYAN; SARGENT, 1973), com isso, vamos fazer uso de algumas dessas classes na somatória da Eq.(1.46) e fazendo uso das Eqs.(1.34) e (1.35):

- $n = p = q = s$

$$\begin{aligned} \sum_{n=p=q=s=1}^N g_{nnnn} a_n^* a_n a_n a_n^* &= g_{nnnn}^R \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \times \\ \exp[i(\phi_n - \phi_n + \phi_n - \phi_n)] &= g_{nnnn}^R \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^2, \end{aligned} \quad (1.47)$$

- $n = q$ e $p = s$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1(s \neq n)}^N g_{nsns} a_n^* a_n a_s a_s^* &= \sum_{s=1(s \neq n)}^N g_{nsns}^R \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_s}{c_s} \right]^{1/2} \left[\frac{I_s}{c_s} \right]^{1/2} \times \\ \exp[i(\phi_n - \phi_n)] \exp[i(\phi_s - \phi_s)] &= \sum_{s=1(s \neq n)}^N g_{nsns}^R \frac{I_n I_s}{c_n c_s}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

▪ $n = s$ e $p = q$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1(p \neq n)}^N g_{nppn} a_n^* a_p a_n a_p^* &= \sum_{p=1(p \neq n)}^N g_{nppn}^R \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_p}{c_p} \right]^{1/2} \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \left[\frac{I_p}{c_p} \right]^{1/2} \times \\ \exp[i(\phi_n - \phi_n)] \exp[i(\phi_p - \phi_p)] &= \sum_{p=1(p \neq n)}^N g_{nppn}^R \frac{I_n I_p}{c_n c_p}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

e chamando $p = s$, temos,

$$\sum_{s=1(s \neq n)}^N g_{nssn}^R \frac{I_n I_s}{c_n c_s}. \quad (1.50)$$

Colocando os resultados das Eqs.(1.47),(1.48) e (1.50) na Eq.(1.46) e passando o termo c_n do lado esquerdo da equação para o lado direito, reobtemos assim,

$$\begin{aligned} \frac{dI_n}{dt} &= -g_{nnnn}^R \frac{I_n^2}{c_n} - I_n \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} + \\ &+ 2c_n \text{Re}\{a_n^* \eta_n\} + 2I_n(\gamma_n - \alpha_n). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Analisando o terceiro termo da equação acima, em que o ruído óptico pode ser expresso como uma soma dos processos estocásticos estatisticamente independentes aditivos e multiplicativos (SCHENZLE; BRAND, 1979), de forma que $\eta_n(t) = \eta_n^{(0)}(t) + a_n(t)\eta_n^{(1)}(t)$, então teremos,

$$\begin{aligned} \text{Re}\{a_n^* \eta_n\} &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n] \left[\eta_n^{(0)} + a_n \eta_n^{(1)} \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n] \left[\eta_n^{(0)} + \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[i\phi_n] \eta_n^{(1)} \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} \exp[-i\phi_n] \eta_n^{(0)} + \frac{I_n}{c_n} \eta_n^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (1.52)$$

como $\exp(-i\phi_n) = \cos \phi_n - i \sin \phi_n$, e considerando a parte real,

$$\begin{aligned} \text{Re}\{a_n^* \eta_n\} &= \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} [\cos \phi_n - i \sin \phi_n] \eta_n^{(0)} + \frac{I_n}{c_n} \eta_n^{(1)} \\ &= \left[\frac{I_n}{c_n} \right]^{1/2} [\cos \phi_n \eta_n^{(0)R} + \sin \phi_n \eta_n^{(0)I}] + \frac{I_n}{c_n} \eta_n^{(1)R}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Como as fases ϕ_n variam muito rápido em comparação com as amplitudes $\{A_n(t)\}$, elas podem ser calculadas em média, levando ao sistema correspondente de equações estocásticas acopladas de Langevin que governam a dinâmica do modo intensidades. Então usando o resultado da Eq.(1.53) na Eq.(1.51), e os termos com $\eta_n^{(0)}$ são desconsiderados, temos,

$$\frac{dI_n}{dt} = -g_{nnnn}^R \frac{I_n^2}{c_n} - I_n \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} + 2c_n \frac{I_n}{c_n} \eta_n^{(1)R} + 2I_n(\gamma_n - \alpha_n), \quad (1.54)$$

e reorganizando,

$$\frac{dI_n}{dt} = -g_{nnnn}^R \frac{I_n^2}{c_n} - I_n \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} + 2I_n \eta_n^{(1)R} + 2I_n(\gamma_n - \alpha_n), \quad (1.55)$$

com $n = 1, 2, \dots, N$.

Quando analisamos a Eq.(1.55) podemos notar a presença do ruído multiplicativo, por este motivo, podemos fazer um vínculo entre o sistema de equações de Langevin acopladas e também a equação de Fokker-Planck, usando como base as Eqs.(1.15) e (1.29), de maneira mais simples, sendo esta equação normalmente apresentada nos textos como (SOARES; LARA; DIETERICH, 2022; VICTOR, 2019),

$$\frac{\partial p(v, t; v_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} [A(v)p(v, t; v_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(v)p(v, t; v_0)]. \quad (1.56)$$

A equação de Fokker-Planck para a densidade de probabilidade de intensidades $P(\{I_m\})$ é dado como,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial I_n} [(\mathcal{L} + 2QI_n)P] + 2Q \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2}{\partial I_n^2} (I_n^2 P), \quad (1.57)$$

sendo o parâmetro Q o parâmetro que controla o ruído multiplicativo através de $\langle \eta_n^{(1)R}(t) \eta_m^{(1)R}(t') \rangle = Q \delta_{n,m} \delta(t - t')$, e nós definimos,

$$\mathcal{L}(\{I_m\}) = -g_{nnnn}^R \frac{I_n^2}{c_n} - I_n \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} + 2I_n(\gamma_n - \alpha_n). \quad (1.58)$$

Podemos utilizar uma notação simplificada, tal que, reescrevemos a Eq.(1.55), como,

$$\frac{dI_n}{dt} = d_n I_n - b_n I_n^2 + 2I_n \eta_n^{(1)R} \quad (1.59)$$

sendo a equação de Langevin e,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial I_n} [(\mathcal{L}_n + 2QI_n)P] + 2Q \frac{\partial^2}{\partial I_n^2} (I_n^2 P), \quad (1.60)$$

a equação de Fokker-Planck, no qual

$$\mathcal{L}_n(\{I_m\}) = d_n I_n - b_n I_n^2 + 2I_n, \quad (1.61)$$

e os novos coeficientes estão apenas indicando que,

$$d_n = - \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} + 2I_n(\gamma_n - \alpha_n) \quad (1.62)$$

e

$$b_n = \frac{g_{nnnn}^R}{c_n}. \quad (1.63)$$

A partir da dinâmica das intensidades, poderemos calcular a função de densidade de probabilidade usando as Eqs.(1.60) e (1.61), com sua solução estacionária descrita por (RAPOSO; GOMES, 2015),

$$P_{ss}(I_n) = \frac{C_n}{I_n^{\mu_n}} \exp\left(-\frac{g_{nnnn}^R}{2c_n Q} I_n\right), \quad (1.64)$$

onde a constante de normalização é,

$$C_n = \frac{1}{\Gamma(2d_n/2Q)} \left(\frac{b_n}{2Q}\right)^{d_n/(2Q)}, \quad (1.65)$$

sendo o expoente da lei de potência definido como

$$\mu_n = 1 + \frac{1}{2Q} \sum_{s=1(s \neq n)}^N (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_s}{c_s} - \frac{1}{Q}(\gamma_n - \alpha_n). \quad (1.66)$$

A Eq.(1.64) corresponde ao limite assintótico da distribuição de Lévy (RAPOSO; GOMES, 2015). É a solução do modelo. E esta distribuição pode ser usada para caracterizar os espectros dos lasers aleatórios acima do limiar de emissão.

Tratamos a relação entre as quantidades expostas na Eq.(1.66) e os parâmetros experimentais como a energia de bombeamento e a força da desordem no capítulo seguinte, o Cap.(2). Por ora, escrevemos os vetores deslocamento e indução magnética, respectivamente, como $\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, sendo a polarização não linear de ordem principal, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\{n,p,q,s\}'} \sum_{\alpha,\beta,\varphi,\tau} \mathbf{e}_\alpha \chi_{\alpha\beta\varphi\tau}^{(3)}(\omega_n; \omega_q, \omega_s, -\omega_p, \mathbf{r}) \times \\ &E_p^\beta(\mathbf{r}) E_q^\varphi(\mathbf{r}) E_s^\tau(\mathbf{r}) \exp(-\omega_n t), \end{aligned} \quad (1.67)$$

no qual o tensor g_{npqs} foi definido na Eq.(1.39) e estamos considerando o termo real da Eq.(1.67). A contribuição para a energia eletromagnética média devido ao caráter não linear do meio ativo é,

$$E_{NL} = \frac{1}{2} \sum_{n,s} (g_{nsns}^R + g_{nssn}^R) \frac{I_n}{c_n} \frac{I_s}{c_s}. \quad (1.68)$$

Uma energia de bombeamento crescente E_p induzida no RL através da fonte de laser de bombeamento, leva a uma soma maior na Eq.(1.66). Em contra-partida, a amplitude do ruído

Q é proporcional à temperatura do banho de calor do sistema e desempenha um papel oposto em relação à energia de bombeamento na Eq.(1.66). E isso é possível, podendo consultar alguns artigos que citam sobre isto (UPPU; MUJUMDAR, 2014; WIERSMA; CAVALIERI, 2001; LEONETTI; CONTI, 2010).

E os termos g_{nsns}^R e g_{nssn}^R também incorporam as propriedades de desordem aleatória do meio ativo. Em particular, a força da desordem é medida através da variância das distribuições de valores de g_{nsns}^R e g_{nssn}^R na Eq.(1.66). De fato, na ausência de desordem a dispersão dessas quantidades é nula, o que leva a $g_{nsns}^R = g_{nssn}^R = g$ (RAPOSO; GOMES, 2015).

A Eq.(1.67) pode ser reescrita de maneira mais apropriada para compreendermos algumas seções seguintes (como a Seção 2.3.1), pois quando consideramos uma polarização não linear \mathbf{P}_{NL} que tem componentes geralmente escritos em termos dos tensores efetivos de suscetibilidade não linear $X^{(f-1)}$ de ordem f (usando a convenção de somatório de Einstein) (GONZÁLEZ et al., 2021). A equação passa a ser,

$$P_{NL,n} = \epsilon_0(\chi_p^{(1)} E_p + \chi_{npq}^{(2)} E_p E_q + \chi_{npqs}^{(3)} E_p E_q E_s + \chi_{npqst}^{(4)} E_p E_q E_s E_t + \chi_{npqstu}^{(5)} E_p E_q E_s E_t E_u + \dots). \quad (1.69)$$

E a equação de Langevin, que apresentamos inicialmente na Eq.(1.38) e, posteriormente (e de maneira mais geral), na Eq.(1.59), para ter relação ao tratarmos com a ordem do tensor f da equação acima, e evitarmos o uso excessivo dos somatórios, reescrevemos como,

$$\frac{da_n}{dt} = -\frac{\partial \Theta^{(f)}}{\partial a_n^*} + \eta_n(t), \quad (1.70)$$

onde a função $\Theta^{(f)}$ esta descrevendo o que foi abordado desde o início desta seção (das Eqs(1.32)-(1.37)), que é a interação entre o campo elétrico e a polarização não linear como uma expansão em série até a ordem f nos campos, ou de ordem $(f - 1)$ nas suscetibilidades não lineares efetivas. E esta função geralmente é dado, em termos também de ordem f , como,

$$\Theta^{(f)} = g_{np}^{(2)} a_n a_p^* + g_{npqs}^{(4)} a_n a_p^* a_q a_s^* + g_{npqstu}^{(6)} a_n a_p^* a_q a_s^* a_t a_u^* + \dots + \mathcal{O}(g^{(f)} a^{(f/2)} a^{*(f/2)}). \quad (1.71)$$

De fato, veremos em seguida que a solução da equação de Fokker-Planck com não-linearidades de ordens superiores irá gerar a chamada distribuição de Izrailev de intensidades emitidas pelos RLs (ver a seguir).

2 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES: MODELOS E FITS DOS DADOS

2.1 O CAMINHANTE ALEATÓRIO

Vamos iniciar esse capítulo lembrando o conceito do Teorema Central do Limite para, logo em seguida, discutirmos sobre a distribuição de Lévy.

Se considerarmos a soma x de N variáveis aleatórias s_i independentes e identicamente distribuídas de acordo com a distribuição $w = w(s_i)$ (SALINAS, 2008), temos:

$$x = \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.1)$$

Para um caminhante aleatório (em 1-dimensão), podemos interpretar s_i como o deslocamento associado ao i -ésimo passo, portanto, x será a posição do caminhante após N passos. A probabilidade $p(x)$ de determinar o valor da soma x nos limites entre x e $x + dx$ é justamente a probabilidade de encontrar o caminhante neste intervalo. E, para isso, como os passos são estatisticamente independentes, a probabilidade de uma sequência única de passos com o i -ésimo deslocamento entre s_i e $s_i + ds_i$ é obtido pelo produto das suas respectivas probabilidades, ou seja, por $w(s_1)ds_1 \cdot w(s_2)ds_2 \cdot \dots \cdot w(s_N)ds_N$.

Após fazermos a soma desta probabilidade sobre todos os deslocamentos individuais que sejam consistentes com a condição dada de que o deslocamento total x sempre esteja justamente entre os limites x e $x + dx$, teremos o que esperamos, a probabilidade total $p(x)dx$. E agora fazemos,

$$p(x) = \int \dots \int w(s_1)w(s_2)\dots w(s_N)ds_1ds_2\dots ds_N, \quad (2.2)$$

levando em conta que a integração é sobre todos os possíveis valores das variáveis s_i , e a única restrição que temos é

$$x < \sum_{i=1}^N s_i < x + dx. \quad (2.3)$$

Agora temos um novo problema, que a integral é bem complicada de calcular porque a restrição adicional deixa os limites de integração difícil de serem explicitados. Porém, uma possível abordagem para contornar essa dificuldade é fazer uso das funções especiais, também descritas com mais detalhes no Apêndice A.

Temos um problema geométrico e podemos resolvê-la integrando sobre todos os valores da variável s_i sem restrição, mas ao fazer isso, devemos estar cientes de que essa a dificuldade das condições de contorno é passada para o integrando, e o ponto chave é que fazemos uso

da Função de Dirac, então temos a nova expressão

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)w(s_2)\dots w(s_N) \left[\delta \left(x - \sum_{i=1}^N s_i \right) \right] ds_1 ds_2 \dots ds_N, \quad (2.4)$$

e a restrição do domínio de integração não existe mais. E para solucionar essa nova equação, a função δ precisa ser reformulada com o auxílio da transformada de Fourier (e o Teorema da Função Inversa), ou seja,

$$\delta \left(x - \sum_{i=1}^N s_i \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(ik \left[\sum_{i=1}^N s_i - x \right] \right) dk. \quad (2.5)$$

Utilizando o resultado da Eq.(2.5) em (2.4), reobtemos

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)\dots w(s_N) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp ik(s_1 + \dots + s_N - x) dk \right) ds_1 \dots ds_N, \quad (2.6)$$

e reorganizando,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1) \exp(iks_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_N) \exp(iks_N) ds_N, \quad (2.7)$$

Ficando mais acessível em resolver o problema anterior, pois a variável de integração passa despercebida e as variáveis individuais de s_i estão igualmente distribuídas, mesmo tendo N integrais, todas elas podem ser resumidas em

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \exp(iks) ds. \quad (2.8)$$

A função $F(k)$ é a transformada de Fourier da distribuição $w(s)$, e é chamada de *função característica* associada a esta distribuição.

Em resumo, a Eq.(2.7) se torna

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) [F(k)]^N dk. \quad (2.9)$$

A Eq.(2.9) nos informa que a distribuição final para a soma de N variáveis s_i é a transformada de Fourier inversa da função característica dos passos individuais elevada à N -ésima potência. Percebemos que no momento só usamos apenas a condição de que as variáveis s_i são independentes e estão identicamente distribuídas. Este resultado para a distribuição de probabilidades $p(x)$ do caminhante após N passos é válido independentemente à finitude dos momentos de $w(s)$. Portanto, para resolver esse problema completamente, faremos o cálculo de duas integrais de Fourier. Mais adiante faremos uso deste resultado.

Os cálculos demonstrados, por conseguinte, servirão para provarmos o Teorema Central do Limite (TCL). Contudo, precisamos descobrir que aproximações para as expressões acima (Eq.

(2.9)) são apropriadas no limite de um número muito grande de variáveis aleatórias, $N \gg 1$. O integrando de $F(k)$ contém o fator $\exp(iks)$, uma função oscilatória de s que oscila mais rapidamente à medida que k aumenta de magnitude, logo, a quantidade $F(k)$ tende em geral a ser cada vez menor nesse limite. Elevando F a uma grande potência N , segue que $[F(k)]^N$ decai rapidamente quando k aumenta. Logo, para calcular $p(x)$ pela equação anterior, um conhecimento de $[F(k)]^N$ para *pequenos* valores de k é suficiente, já que para grandes valores de k a contribuição de $[F(k)]^N$ na integral será extremamente pequena. Podemos então aproximar $[F(k)]^N$ por uma expansão em potências de k . Todavia, como $[F(k)]^N$ varia muito rapidamente com k , é aconselhável procurar uma expansão em série de potências que convirja mais rapidamente, como o logaritmo natural $\ln[F(k)]^N$, uma vez que ele varia bem lentamente.

Contudo, precisamos obter $F(k)$ para pequenos valores de k , e para isso, vamos expandir $\exp(iks)$ em série de Taylor, e a expressão que teremos é,

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \exp(iks) ds = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \left(1 + iks - \frac{1}{2}k^2s^2 + \dots \right) ds, \quad (2.10)$$

ou ainda

$$F(k) = 1 + ik\bar{s} - \frac{1}{2}k^2\overline{s^2} + \dots, \quad (2.11)$$

aonde

$$\bar{s}^n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) s^n ds \quad (2.12)$$

é uma constante que representa a definição usual do n -ésimo momento da distribuição $w(s)$. Temos que assumir a hipótese fundamental de que $|w(s)| \rightarrow 0$ vá bastante rápido, o suficiente para que $|s| \rightarrow \infty$, de forma que esses dois primeiros momentos sejam finitos. Usando a expansão anterior,

$$\ln[F(k)]^N = N \ln F = N \ln \left[1 + ik\bar{s} - \frac{1}{2}k^2\overline{s^2} + \dots \right]. \quad (2.13)$$

Da expansão do logaritmo em série de Taylor, válida para $g \ll 1$,

$$\ln(1 + g) = g - \frac{1}{2}g^2 + \dots, \quad (2.14)$$

mantendo os termos quadráticos em k , a equação pode ser reescrita como

$$\ln F^N \approx N \left[\left(ik\bar{s} - \frac{1}{2}k^2\overline{s^2} \right) - \frac{1}{2}(ik\bar{s})^2 \right] = N \left[ik\bar{s} - \frac{1}{2}(\overline{\Delta s})^2 k^2 \right], \quad (2.15)$$

onde definimos a expressão para a variância

$$\overline{(\Delta s)^2} \equiv \overline{(s^2)} - \overline{(s)}^2. \quad (2.16)$$

Por fim, obtemos

$$F^N(k) = \exp\left(i\bar{s}Nk - \frac{1}{2}N(\overline{\Delta s})^2k^2\right). \quad (2.17)$$

Substituindo na Eq.(2.9), encontramos

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik(N\bar{s} - x) - \frac{1}{2}N(\overline{\Delta s})^2k^2\right) dk. \quad (2.18)$$

Esta integral é da forma ($a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2 + bu) du = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(u - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}\right) du. \quad (2.19)$$

Fazendo a substituição $g = u - b/2a$ e usando o resultado para a integral gaussiana, a expressão acima se reduz a

$$\exp(b^2/4a) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ag^2) dg = \exp(b^2/4a) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2.20)$$

Identificando, ainda, $b = i(N\bar{s} - x)$ e $a = N(\overline{\Delta s})^2/2$, podemos reescrever a Eq.(2.18) como,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{N(\overline{\Delta s})^2}} \exp(-(N\bar{s} - x)^2/2N(\overline{\Delta s})^2). \quad (2.21)$$

de modo que, definimos

$$\mu \equiv N\bar{s} \quad (2.22)$$

e

$$\sigma^2 \equiv N(\overline{\Delta s})^2, \quad (2.23)$$

E o resultado é a importante *distribuição gaussiana*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2), \quad (2.24)$$

sendo a distribuição para a soma das variáveis s_i no limite em que $N \rightarrow \infty$, e nos informando a densidade de probabilidade de encontrar o caminhante em uma posição específica x após muitos passos.

2.1.1 Teorema Central do Limite

Brevemente, o Teorema Central do Limite (TCL) afirma que a soma de N variáveis aleatórias independentes x , com mesma distribuição e variância finita, é uma variável que se aproxima da distribuição gaussiana quando N aumenta. Vamos considerar, como na maioria dos textos sobre o assunto, um dado não viciado. Sabemos que o dado possui 6 lados e cada

um desses lados enumerado de 1 a 6. Se eu te perguntasse qual a probabilidade de você tirar exatamente o resultado 5 só com um lançamento? Obviamente a resposta é $1/6$. Contudo, agora não queremos ver o resultado em tirarmos determinado valor entre 1 e 6 e sim como a média se comporta com 10 lançamentos, 50 lançamentos, 100 lançamentos.

Para que isso seja analisado, temos um forte ponto a se considerar, Pois, para apenas 6 lançamentos, a média dos resultados obtidos é 3.5. Se tivermos 20 lançamentos, a média dos resultados obtidos também é 3.5. E não difere do fato de termos 100 lançamentos, a média desses lançamentos sempre estará em torno de 3.5. Podemos exemplificar fazendo uso dos dados na Tabela (1) para um dado sem vício (SILVEIRA, 2018).

Tabela 1 – Lançamentos, média e desvio padrão de dados não viciados.

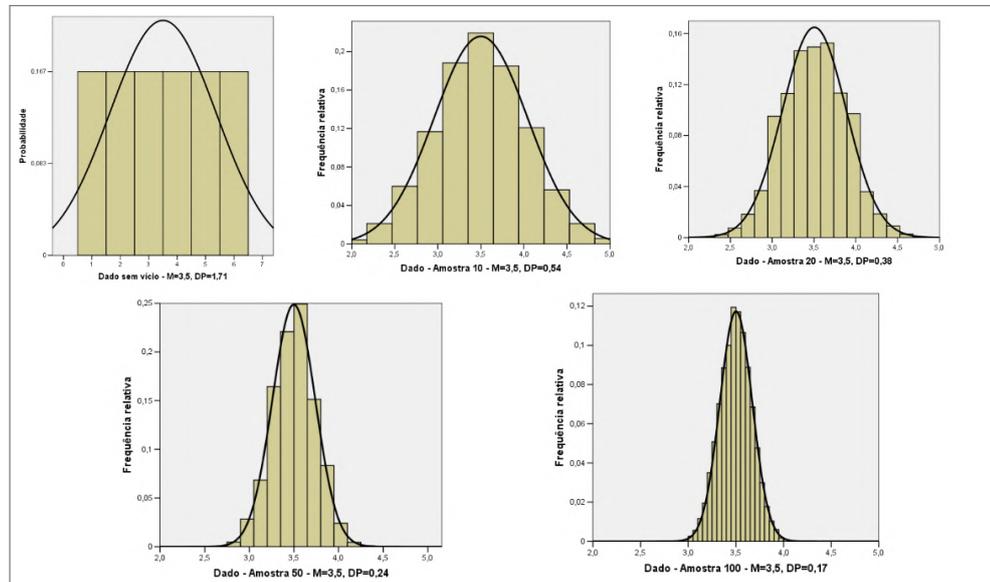
Lançamentos	Média	Desvio padrão
6	3,5	1,71
10	3,5	0,54
20	3,5	0,38
50	3,5	0,24
100	3,5	0,17

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A sensação que passa, se for analisar só a média, é que os valores extremos, ou seja, o valor 1 e 6 parece q ocorre menos do que os valores entre eles, mas isso é apenas a média e também o valor obtido pode ser qualquer um dos valores dos dados e não exatamente o valor 1 ou 6. Conforme cresce o tamanho das amostras, mais estreita é a distribuição das médias amostrais e melhor é a aderência da distribuição das médias à curva (SHIMAKUR, 2016). A generalidade deste resultado é a razão de grande parte das médias de quantidades mensuráveis estar distribuída de forma gaussiana, o que ressalta sua extrema importância. A Fig.(8) nos mostra a distribuição das médias de determinados lançamentos (amostra) do dado sem vício por sua frequência relativa.

E o motivo pelo qual comentamos sobre o TCL logo após termos em mãos a Eq.(2.4) e sendo um gancho que será utilizado na Seção(2.2), é o fato da distribuição de Lévy não satisfazer a hipótese de finitude, não satisfazendo aos requisitos do TCL e gerando inúmeras consequências na busca aleatória. Por isso temos distribuições que satisfazem o TCL como outras que não o satisfazem, e sobre essas, elas são governadas pelo chamado TCL generalizado, como veremos na seção seguinte.

Figura 8 – Distribuição das médias dos lançamentos.



Fonte: (SILVEIRA, 2018)

2.1.2 Teorema Central do Limite Generalizado

Como dito anteriormente, o TCL tem a sua limitação, pois agora temos distribuições que não satisfazem a hipótese de finitude do segundo momento da distribuição, e para isso, o maior responsável pela iniciativa sobre o assunto foi o matemático francês Paul Lévy (KLAFTER; SHLESINGER; ZUMOFEN, 1996). O objetivo é encontrar distribuições estáveis que não obedecem o TCL (segundo momento divergente), isto é, distribuições $p_N(x)$ para a soma dos N passos $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ que possuem a mesma distribuição $p(x)$ dos passos individuais.

Pelo TCL estudado na seção anterior, poderíamos dizer (e que é uma resposta aceitável), é que $p(x)$ deve ser uma gaussiana, porque a soma de N gaussianas ainda é uma gaussiana, com os passos individuais N vezes a variância da distribuição inicial. E não é a única porque o próprio Lévy provou que existe outras respostas e, todas elas, envolvem variáveis aleatórias com variâncias infinitas (ROCHA, 2020).

Agora adentramos em formulação matemática, o primeiro que podemos mencionar e que contribuiu foi o Augustin Cauchy, que em 1853 percebeu a existência de outras soluções para o problema da adição de N variáveis aleatórias, sendo uma delas a função característica, definida como a transformada de Fourier da distribuição p_N , (ver Eq.(2.8)):

$$\phi_N(k) = \exp(-N|k|^\alpha) \quad (2.25)$$

Da expressão acima, se fizermos uma transformada voltando ao espaço x e atribuindo

$\alpha = 1$, temos a conhecida *distribuição de Cauchy*, que é

$$p_N(k) = \frac{1}{\phi N(1 + (x/N)^2)} = \frac{1}{N} p_1(x/N). \quad (2.26)$$

Analisaremos mais essa situação ($\alpha = 1$) na seção seguinte, por ora, podemos comentar que a distribuição de passo único $p_1(x)$ está conectada com N passos, o $p_N(x)$. Na década de 1930 Lévy generalizou este resultado obtendo as chamadas distribuições α -estáveis de Lévy, com parâmetro α compreendido entre 0 e 2 e $p(x)$ será positiva para todo x , apenas não sendo normalizável à unidade.

Quando nos referirmos as distribuições α -estáveis de Lévy, nos referirmos aquelas que constituem a classe de todas as distribuições estáveis. Enquanto, a nomenclatura distribuição de Lévy é geralmente empregada para caracterizar uma escolha particular dos parâmetros que definem as distribuições α -estáveis, explicitamente $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$, utilizaremos a denominação distribuição de Lévy para as distribuições α -estáveis de uma forma geral. Existem três expressões fechadas conhecidas para as densidades de probabilidade $p(x)$: as distribuições gaussianas (quando $\alpha = 2$), de Cauchy e de Lévy (UPPU; MUJUMDAR, 2014).

Ainda não temos a forma geral de parametrização de todas as possíveis distribuições estáveis $p(x)$. Para obtê-la, devemos utilizar a função característica definida a partir da transformada de Fourier da função densidade de probabilidade $p(x)$, ou seja,

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)p(x)dx. \quad (2.27)$$

as distribuições estáveis possuem, de modo geral, função característica da forma

$$\phi(k; \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |k|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan(\pi\alpha/2)] + i\mu k), & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma |k| [1 + (2i\beta/\pi) \operatorname{sgn}(k) \ln |k|] + i\mu k), & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

onde $\phi(k)$ determina completamente a distribuição de x , e os intervalos $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, e a função sinal que é $\operatorname{sgn}(k)$. O parâmetro α é conhecido também como "expoente de Lévy" e é o responsável pela variação das distribuições, a introdução de uma fase dependendo do novo parâmetro β é responsável pela assimetria da distribuição e também denominado como parâmetro Skewness, o parâmetro μ é o de localização e σ é a largura.

A principal importância das distribuições estáveis reside justamente no fato de que estas se comportam como "atratores" estatísticos, de modo semelhante ao comportamento de gaussianas como consequência do TCL, mas com um abarcamento muito maior por não exigirem

finitude dos momentos. Este importante resultado é conhecido como o Teorema Central do Limite generalizado.

Reafirmando, o TCL diz que a soma normalizada de termos independentes com média e variância finitas converge para uma distribuição gaussiana. Por outro lado, o TCL generalizado mostra que se o requisito da variância e momento finitos for ignorado, os únicos resultados limites possíveis são as distribuições estáveis, descritas pela Eq.(2.28).

2.2 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY

Como dito na seção anterior, a generalização do TCL nos diz que a distribuição normal é um caso especial da α -estável, ou, a distribuição de Lévy, e normalmente vemos esse resultado com outra aparência, que só é necessário tirar o logaritmo em ambos os lados da Eq.(2.28), ou seja,

$$\ln \phi(k; \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |k|^\alpha (1 - i\beta \tan(\pi\alpha/2) \operatorname{sgn}(k)) + i\mu k, & \text{se } \alpha \neq 1. \\ -\sigma |k| (1 + (2i\beta/\pi) \operatorname{sgn}(k) \ln |k|) + i\mu k, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

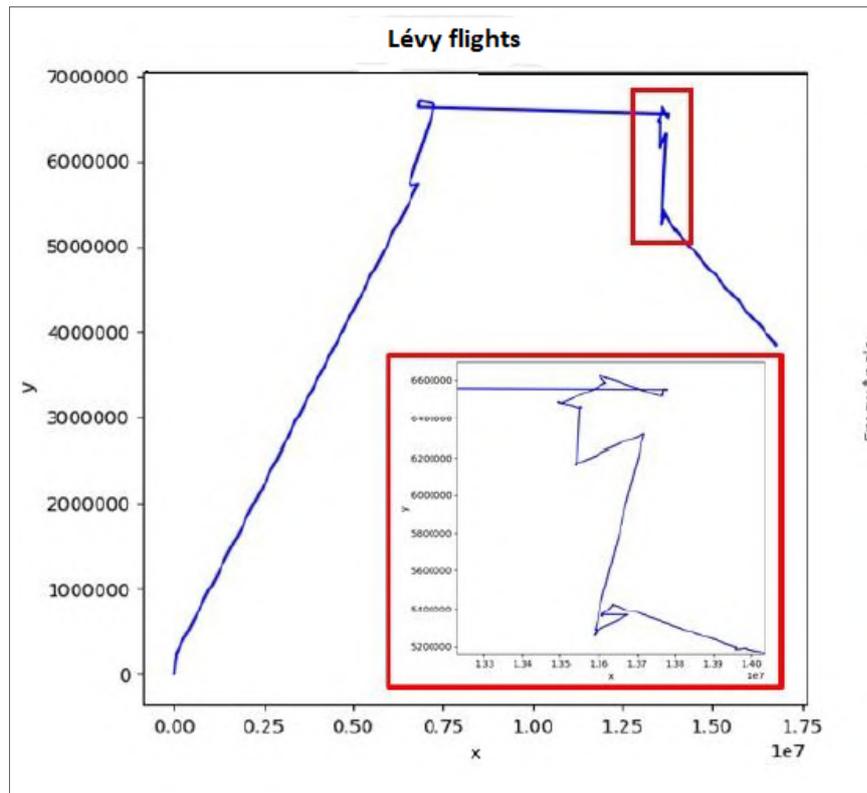
A transformada inversa de Fourier da função de densidade de probabilidade, em inglês, probability density function (PDF), consegue descrever completamente uma distribuição de cauda longa, uma vez que o expoente α descreve a taxa na qual as caudas diminuem, com $\alpha = 2$ indicando o comportamento Gaussiano e $\alpha < 2$ indicando o comportamento de Lévy, lembrando que $\alpha \in (0, 2]$ (ROCHA, 2020).

Vamos agora imaginar a seguinte situação para descrevermos brevemente os Lévy flights e a diferença com as Lévy walks, pois não tem como falarmos de um sem mencionar o outro: uma partícula que procura alimentos, quando chega em uma região onde há bastante alimentos fica por lá até se satisfazer ou não haver mais alimento. Feito isso, essa partícula tende a ir para um outro lugar distante dali onde terá alimentos novamente. Isto é como imaginar um caminhante aleatório, mas dessa vez são os chamados Lévy flights, que através do exemplo citado, podemos resumir que são definidos como passos instantâneos (duração nula), de forma que a partícula efetivamente salta entre as posições de destino no espaço de busca. Consequentemente, o deslocamento médio quadrático não existe como função do tempo. Essa propriedade impede aplicações diretas de Lévy flights em fenômenos físicos (SANTOS, 2021).

E nas Lévy walks, a partícula viaja com velocidade constante, independente do tamanho do passo. Então, o tempo de percurso é proporcional à distância total percorrida, logo, faz com que

o deslocamento médio quadrático exista como função do tempo e cresça super-linearmente, ou mais ainda, de forma super difusiva (SANTOS, 2009). É esta propriedade que torna as Lévy walks adequadas para modelar o comportamento de difusão anômala. A diferença reside no fato de que a distância total percorrida em um Lévy flight corresponde então ao tempo total de percurso em uma Lévy walk.

Figura 9 – Lévy flights.



Fonte: (SANTOS, 2021)

Na Fig. (9) representamos os Lévy flights em duas dimensões da partícula. Notamos que em muitos momentos, como é o caso da região demarcada em vermelho, a partícula faz pequenos "deslocamentos". Porém, em outros momentos esse deslocamento é muito longo, o que significaria que foi em busca de alimento em outro lugar distante.

2.3 DISTRIBUIÇÃO DE INTENSIDADE EM LASERS ALEATÓRIOS

No Cap.1 estudamos os RLs, a história de origem (que ainda é bem recente) e sua matemática por trás. Nesta seção, iniciamos uma análise comparativa de duas classes de modelos teóricos para a função densidade de probabilidade (PDF) de $P(I)$ da intensidade I emitida por RLs (GONZÁLEZ et al., 2021). As previsões dos modelos utilizados nesta seção foram com-

paradas com os resultados experimentais de dois sistemas RL. O primeiro sistema é sobre a dispersão de ondas eletromagnéticas em um meio aleatório com amplitudes de campo e fases sendo tratadas como variáveis independentes aleatórias ou localmente correlacionadas, e para esse sistema nos referimos como modelos baseados em soma de fase aleatória, em inglês, random phase sum (RPS) (GONZÁLEZ et al., 2021).

O modelo RPS produz uma distribuição de Rayleigh para a amplitude do campo e uma distribuição exponencial para a intensidade quando a fase e amplitude do campo elétrico são consideradas como variáveis aleatórias não correlacionadas. Em contrapartida, quando nos referirmos as variáveis aleatórias que exibem correlações locais, o modelo RPS modificado dá origem a distribuições K tanto para a amplitude quanto para a intensidade do campo.

O segundo sistema de modelos para a PDF de intensidades são baseados em equações diferenciais estocásticas que descrevem a dinâmica dos modos de interação não linear em um meio aleatório (RAPOSO; GOMES, 2015). Generalizamos e estendemos esse sistema de modelos para levar em conta as não linearidades ópticas de qualquer grau f nas interações dos modos. É importante observar que as contribuições não lineares de ordem superior tornam-se cada vez mais relevantes à medida que a potência de excitação aumenta acima do limite. Portanto, a generalização proposta neste trabalho permite levar em consideração a influência de ψ^{f-1} qualquer grau de suscetibilidade não linear nas propriedades de emissão dos RLs. Com isso, surge uma nova família de distribuições de intensidade, as distribuições Izrailev generalizadas de ordem f .

Foram feitas as análises com os dados experimentais de dois RLs importantes e bastante distintos, mas, no caso dos conteúdos que se seguirão, o dado experimental foi exclusivamente de um baseado em nanopó cristalino de borato de alumínio e ítrio (YAB) com íons de neodímio Nd^{3+} trivalentes. O outro foi um sistema corante-coloidal especialmente projetado com nanopartículas de TiO_2 funcionalizadas, estando disponível para consulta em (GONZÁLEZ et al., 2021). E para cada sistema foram realizadas a análise estatística de um extenso conjunto ($\sim 10^5$) de espectros de emissão, para a situação em que o RL opera acima do limiar. Embora os modelos baseados em RPS não forneçam ajustes satisfatórios dos dados experimentais, um excelente acordo é encontrado com o modelo diferencial estocástico, indicando que ele pode capturar adequadamente a influência de não linearidades ópticas de alta ordem na distribuição de intensidade de RLs acima do limiar.

Revisitamos aqui os modelos baseados em RPS com variáveis aleatórias independentes ou variáveis localmente correlacionadas. Além de apresentarmos o modelo diferencial estocástico e

calculada também a distribuição de intensidades emitidas para um grau geral de não linearidade óptica, com a proposta de uma nova família de distribuições de intensidade.

2.3.1 Modelos baseados em soma de fase aleatória e diferencial estocástico de grau f

Para tratarmos o modelo RPS com variáveis aleatórias independentes, consideramos que o campo elétrico espalhado em um meio aleatório é descrito como um somatório de contribuições individuais de muitos termos aleatório N , ou mais ainda, $E = \sum_{k=1}^N A_k \exp(i\phi_k) = \sum_{k=1}^N (X_k + iY_k) = A \exp(i\phi)$. Logo, as PDF de amplitudes podem ser essencialmente determinadas de um somatório de N variáveis aleatórias complexas independentes e identicamente distribuídas. Aplicando o TCL no limite $N \rightarrow \infty$, os componentes de quadratura X_k e Y_k são normalmente distribuídos. O modelo RPS assume que:

- (i) as variáveis aleatórias que descrevem as fases ϕ_k e as amplitudes A_k são não correlacionadas e estatisticamente independentes com segundo momento finito;
- (ii) as fases aleatórias são uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi)$.

Assim, no regime em que se aplicam as premissas do TCL (visto na Seção 2.1.1), a PDF das amplitudes de campo A é dada no modelo RPS pela distribuição de Rayleigh,

$$P_R(A) = \frac{A}{b^2} \exp(-A^2/(2b^2)), \quad (2.30)$$

com segundo momento $b = \langle A^2 \rangle$. Fazendo uso da relação $I = A^2$, temos, como normalmente é denominada, a distribuição exponencial,

$$P(I) = \langle I \rangle^{-1} \exp(-I/\langle I \rangle). \quad (2.31)$$

Devemos perceber que o modelo RPS pode ser ainda mais generalizado caso o número N de termos no campo elétrico seja ele próprio uma variável aleatória com distribuição binomial negativa de média $\langle N \rangle$ e variância normalizada $\langle N \rangle^{-1} + \kappa^{-1}$ com $\kappa > 0$. No limite assintótico $\langle N \rangle \rightarrow \infty$, encontra-se a distribuição gamma,

$$P(I) = \frac{\kappa^\kappa I^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa) \langle I \rangle^\kappa} \exp(-\kappa I/\langle I \rangle), \quad (2.32)$$

onde $\Gamma(x)$ denota a função gamma. Notamos que se fizermos $\kappa = 1$ na Eq.(2.32) obtemos justamente a Equação (2.31).

Se considerarmos os fatos iniciais de variáveis aleatórias estatisticamente independentes do TCL modificada através da introdução de variáveis localmente correlacionadas, temos como consequência, levando em consideração tal desvio do TCL, a PDF de intensidades neste modelo RPS modificado, que assume a forma de uma distribuição K ,

$$P_K(I) = \frac{2M}{\langle I \rangle \Gamma(M)} \left(\frac{MI}{\langle I \rangle} \right)^{\frac{M-1}{2}} K_{M-1} \left(2\sqrt{MI/\langle I \rangle} \right), \quad (2.33)$$

onde M é um parâmetro livre e $K_\nu(x)$ denota a função de Bessel modificada de segundo tipo. Percebe-se que a Equação (2.33) também se aproxima da distribuição exponencial (a Eq.2.31), no limite $M \rightarrow \infty$.

Analisando os espectros de emissão dos RLs percebemos que é o resultado de um processo de transporte óptico no qual as ondas eletromagnéticas são espalhadas e amplificadas de forma desordenada. Levando em conta o que foi discutido na Seção.(1.2 e 1.3) do Cap.1, e no início dessa seção, temos uma ligação entre os espectros da luz emitida dos RLs e os modelos baseados em RPS de dispersão de ondas eletromagnéticas. Considerando de forma adequada a desordem e as propriedades não lineares do sistema RL, que são incorporadas na dinâmica estocástica dos modos de laser interativos, ao invés de apenas assumindo variáveis aleatórias independentes ou localmente correlacionadas identicamente distribuídas, como nos modelos RPS discutido mais acima. Assim, diferentemente dos modelos baseados em RPS, na abordagem apresentada a seguir, a dinâmica dos modos de laser interativos é formulada em termos de equações diferenciais estocásticas que governam as amplitudes dos modos.

Para dar continuidade com o assunto, precisamos adentrar na formulação do campo eletromagnético em um meio não linear desordenado com índice de refração $n(\mathbf{r})$ que exhibe perfil espacial aleatório, como em um sistema RL que pode ser descrito pelas equações não lineares de Maxwell. E aqui nos referirmos a polarização no material não linear que surge como resultado da interação com a radiação eletromagnética que é dado por $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}$, no Cap.1, Seção(1.3), com \mathbf{P}_{NL} mostrado na Eq.(1.69) e utilizamos a equação de Langevin acopladas, as Eqs.(1.70) e (1.71), para que possamos utilizar a solução estacionária da equação de Fokker-Planck da PDF das intensidades emitidas I , e com isso, fazemos uso diretamente da expressão que nos informa até um grau geral de não linearidade óptica $f \geq 4$ como,

$$P_f(I) = N_f I^{\xi_f - 1} \exp \left(- \sum_{\kappa=2}^{f/2} c_\kappa I^{(\kappa-1)} \right), \quad (2.34)$$

onde N_f é a constante de normalização e ξ_f e c_κ são parâmetros relacionados à intensidade do ruído e acoplamentos advindos da ordem f na equação de Langevin. A Eq.(2.34) pode ser

conhecida como distribuição Izrailev, e com $f = 6$ para caracterizar os espectro de autovalores de sistemas clássicos e quânticos com dinâmica mista, nos quais os comportamentos regulares e caóticos podem coexistir. A generalização para qualquer grau f de não linearidade óptica através da Eq.(2.34) nos permite considerar a influência de qualquer grau f de suscetibilidade não linear $\chi^{(f-1)}$ nas distribuições de intensidade de sistemas RL.

Devemos observar que, como o RL é excitado por potências de bombeamento mais intensas acima do limiar, efeitos ópticos não lineares de ordens superiores tornam-se cada vez mais relevantes e mais termos na soma da Eq.(2.34) são bastante necessários para uma descrição adequada da distribuição de intensidade em RLs, sendo demonstrado na próxima seção, em que foi feito um histograma com 4 ordens.

Através da Eq.(2.34), vamos determinar algumas distribuições Izrailev, começando na ordem $f = 4$, em que temos 2 representações, uma em forma de distribuição gamma, que é

$$P_{f=4}(I) = N_4 I^{\xi_4 - 1} \exp(-c_2 I), \quad (2.35)$$

em que $\xi > 0$, ou uma distribuição de lei de potência de cauda pesada com atenuação exponencial, e

$$P_{f=4}(I) = \frac{N_4}{I^\mu} \exp(-c_2 I), \quad (2.36)$$

em que $\xi < 0$, com o expoente da lei de potência $\mu = 1 + |\xi_4|$. Essas duas PDFs, a Eq.(2.35) e a Eq.(2.36), podem apresentar propriedades estatísticas notavelmente distintas.

De ordem $f = 6$ assume a forma,

$$P_{f=6}(I) = N_6 I^{\xi_6 - 1} \exp(-c_3 I^2 - c_2 I), \quad (2.37)$$

E ainda temos, para efeito, de ordem $f = 8$ e $f = 10$ dados respectivamente por,

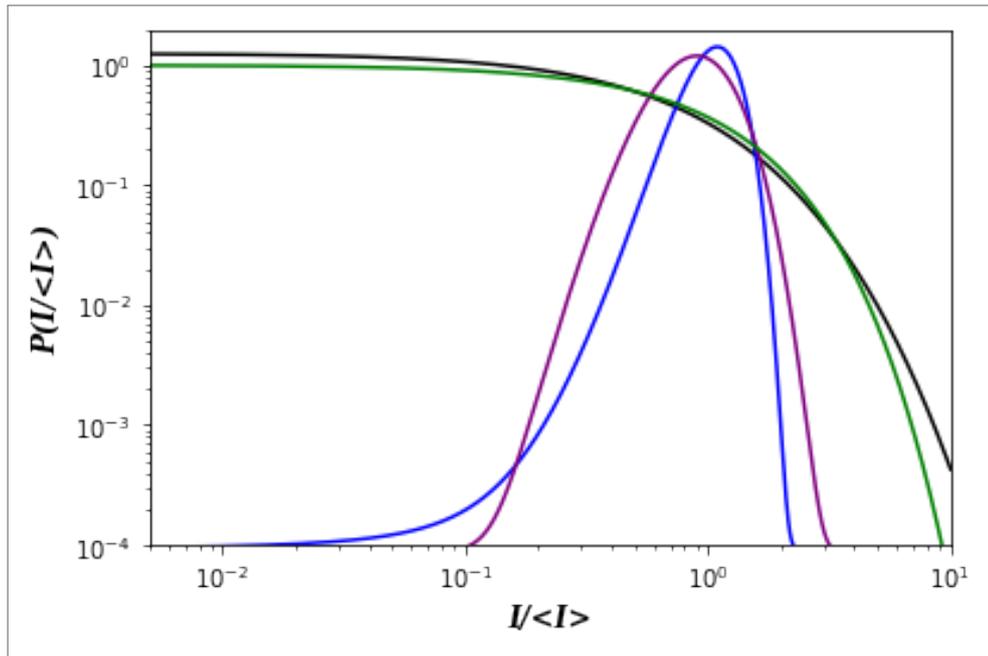
$$P_{f=8}(I) = N_8 I^{\xi_8 - 1} \exp(-c_4 I^3 - c_3 I^2 - c_2 I), \quad (2.38)$$

$$P_{f=10}(I) = N_{10} I^{\xi_{10} - 1} \exp(-c_5 I^4 - c_4 I^3 - c_3 I^2 - c_2 I). \quad (2.39)$$

Se na Eq.(2.35) fizermos $\xi_4 = 1$, obtemos exatamente a Eq.(2.31). O que diferencia imensamente a distribuição gamma dado pela Eq.(2.35) da lei de potência, dado pela Eq.(2.36), é que a distribuição gamma exibe um segundo momento finito pertence à classe de PDFs cujas estatísticas são conduzidas pelo TCL (2.1.1), com distribuição da soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas convergindo assintoticamente para uma Gaussiana, enquanto a PDF de lei de potência sem a o fator exponencial apresenta um segundo momento

infinito se $1 < \mu < 3$, sendo assim regido pela TCL generalizada (2.1.2) com soma de variáveis descrita pela distribuição de Lévy α -estável do índice de estabilidade $\alpha = \mu - 1$. Iremos, mais a frente, fazer uso também da Eq.(2.28), que como foi estudado, é a PDF da distribuição de Lévy α -estável.

Figura 10 – PDFs de intensidades normalizadas $I/\langle I \rangle$ (em escala log-log) dos modelos diferenciais estocásticos e modelos RPS, exponencial e K .



Fonte: O autor (2022).

A Fig.(10) nos apresenta, para uma maneira geral, as distribuições Izailev de ordem $f = 4$, de linha em cor roxa, e de ordem $f = 6$, de linha em cor azul, Eqs.(2.35) e (2.37), respectivamente. Aonde os valores dos parâmetros para $f = 4$ são: $\xi_4 = 12.5$ e $c_2 = 8.6$, e para $f = 6$ temos: $\xi_6 = 1.5$, $c_2 = -19.5$ e $c_3 = 7.6$. Além das PDFs dos modelos baseados RPS, a exponencial, que foi dado pela Eq.(2.31), de linha em cor verde, para $\langle I \rangle = 1$ e a distribuição K , dado pela Eq.(2.33), de linha em cor preta, para $M = 5$ e $\langle I \rangle = 1$. Considerando que a escala no gráfico é log-log. Uma análise detalhada nos informa que a faixa de intensidades $I/\langle I \rangle$ normalizadas nas quais as PDFs Izailev exibem probabilidades relevantes é mais estreita tanto nos regimes baixo, quanto no regime alto, de $I/\langle I \rangle$.

2.3.2 Comparando as previsões dos modelos com dados experimentais

Com toda teoria das previsões dos modelos diferenciais em RPS e estocásticos discutidos na seção anterior, fazemos no momento presente, uma abordagem para comparar com os

dados experimentais. Esses dados que foram analisados estatisticamente e obtidos por uso de dois RLs bastante diferentes e de suma importância, para um grande número de espectros, aproximadamente $\sim 10^5$. Contudo, para esta seção, utilizamos os dados de um RL para comparar os dados experimentais, o outro pode ser lido no artigo (GONZÁLEZ et al., 2021), como comentado anteriormente.

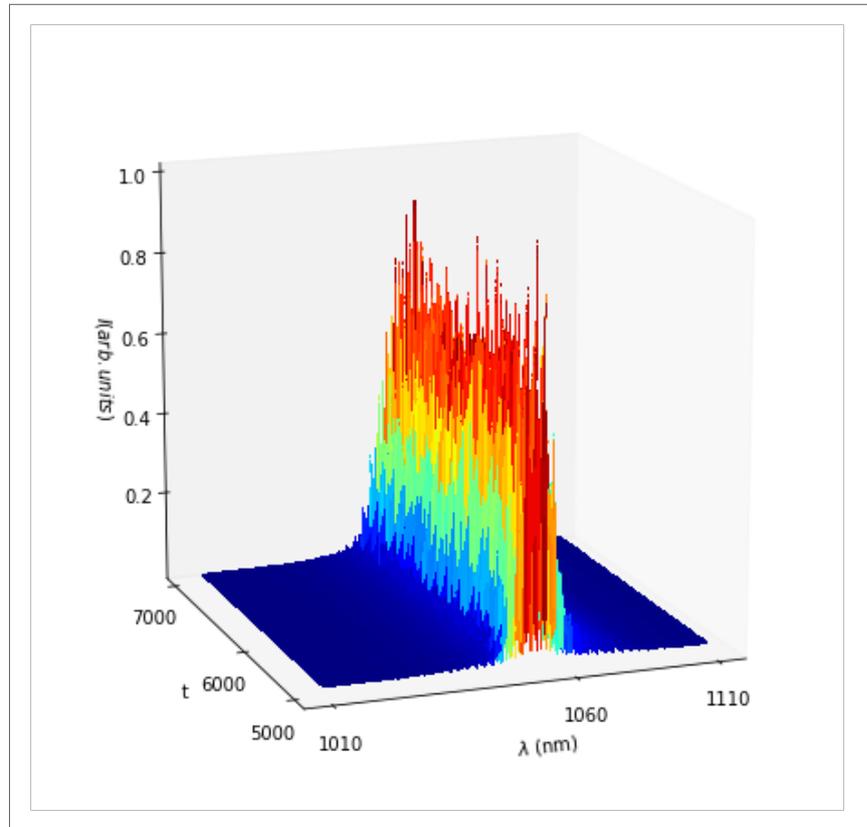
O caso tratado como estudo é do RL baseado em um nanopó cristalino YAB dopado com íons Nd^{3+} (CARREÑO et al., 2016). Para excitar, foi utilizado um oscilador ótico paramétrico (OPO) operando no comprimento de onda de 808 nm , em que a taxa de repetição foi de 10 Hz e largura de pulso de 5 ns . De acordo com os níveis de energia Nd^{3+} em YAB , que ao excitar a transição $F_{9/2}^4 \rightarrow F_{5/2}^4$ em 808 nm , obtemos uma emissão RL em 1064 nm , que corresponde a transição do Nd^{3+} de $F_{3/2}^4 \rightarrow F_{11/2}^4$. Foi coletado um grande conjunto de 10^5 espectros de emissão no regime RL para cada potência de excitação P acima do limiar, no qual em $P/P_{th} = 1.03$ e $P/P_{th} = 3.9$, onde o limite de energia RL é 0.32 mJ , corresponde ao limiar de potência $P_{th} = 64 \text{ kW}$ (MOURA et al., 2020). E com essas informações e dados coletados em mãos, obtivermos as figuras a seguir, no qual, cada uma foi obtida com o uso da linguagem de programação Python.

A Fig.(11) nos mostra uma excitação bem acima do limiar $P/P_{th} = 3.9$, foram analisados 2000 dos 10^5 espectros dos dados e a faixa escolhida foi a que continha o maior valor da intensidade, e podemos perceber que a intensidade máxima é próximo do valor $\lambda = 1064 \text{ nm}$.

A Fig.(12) apresenta as séries de intensidades máximas I , normalizado pela sua média $\langle I \rangle$, e o gráfico é em relação aos espectros, no qual representamos como $t = 1, 2, \dots, 10^5$. E desse resultado, ainda construímos o histograma de $P(I/\langle I \rangle)$, que fizemos uso na Fig.(13).

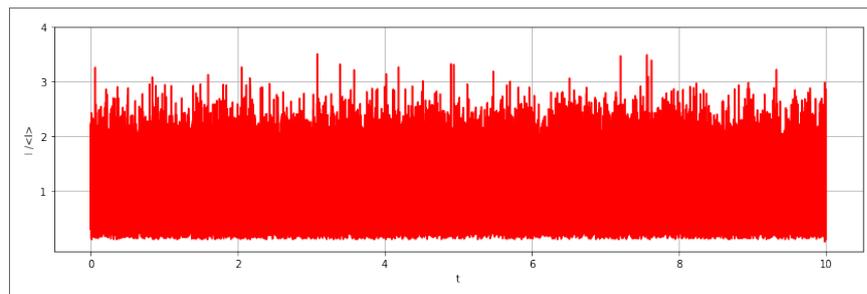
A figura que nos apresenta cada um dos tipos de modelos estudado na sessão anterior, é a Fig.(13), além de que, utilizamos o histograma produzido através dos dados da Fig.(12), que está representado na figura por círculos de cor verde, e podemos perceber que a distribuição Izrailev de ordem $f = 6$, dado pela Eq.(2.37), é a que mais se aproximou dos dados experimentais, nos regimes de baixa, média e alta intensidades, e com os parâmetros dados por $\xi_6 = 2.6$, $c_2 = 0.60$ e $c_3 = 0.77$, sendo a linha de cor azul. Agora comentamos dos resultados que não coincidiram com os dados experimentais, o da linha de cor roxa é a distribuição de Izrailev de ordem $f = 4$, dado pela Eq.(2.35), e com os parâmetros que são $\xi_4 = 3.9$ e $c_2 = 3.8$. E também faz parte os modelos RPS, a distribuição exponencial que é dada pela Eq.(2.31), a linha de cor vermelha, e a distribuição K , com $\langle I \rangle = 1$ e dada pela Eq.(2.33), com a linha de cor preta. Sendo a escala do gráfico o log-log. Mesmo a PDF de Izrailev de ordem $f = 4$ não

Figura 11 – Potência de excitação relativa de $P/P_{th} = 3.9$ para 2000 dos 10^5 espectros emitidos pelo RL do nanopó cristalino dopado com Nd^{3+} .



Fonte: O autor (2022).

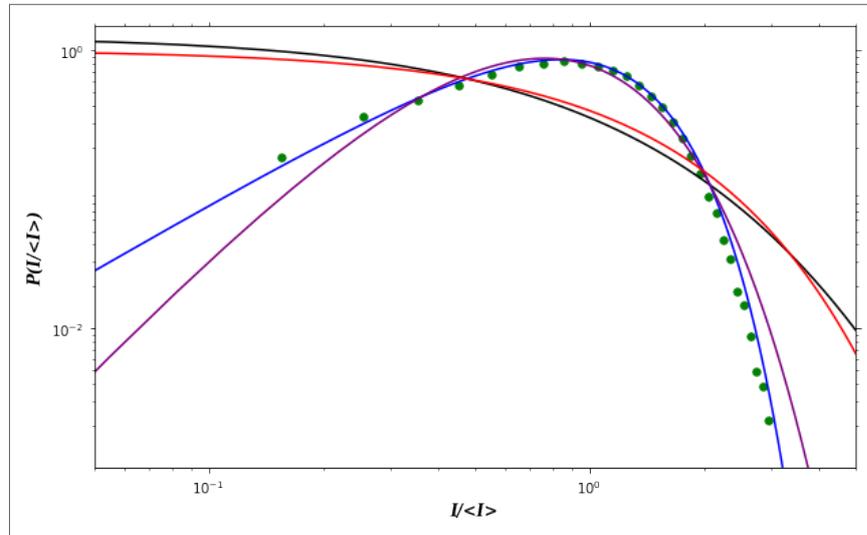
Figura 12 – Intensidades máximas I (normalizadas por sua média $\langle I \rangle$) em função do rótulo do espectro $t = 1, 2, \dots, 10^5$.



Fonte: O autor (2022).

ter correspondido perfeitamente o histograma dos dados experimentais, podemos considerar que ele funciona razoavelmente bem só que para valores de intensidade intermediária (vejamos o valor em torno do máximo no gráfico e podemos perceber), ou seja, nos regimes de baixa e alta intensidade não obtemos resultados estatísticos para descrevê-lo. Em contrapartida, as distribuições exponencial e K falham desmedidamente em ajustar os dados em toda a faixa de intensidade. De fato, neste regime de alta excitação, com a potência de entrada P quase

Figura 13 – Histograma (círculos) de intensidades dos dados experimentais, com a distribuição Izrailev de ordem $f = 4$ e ordem $f = 6$, e os modelos RPS exponencial e K .



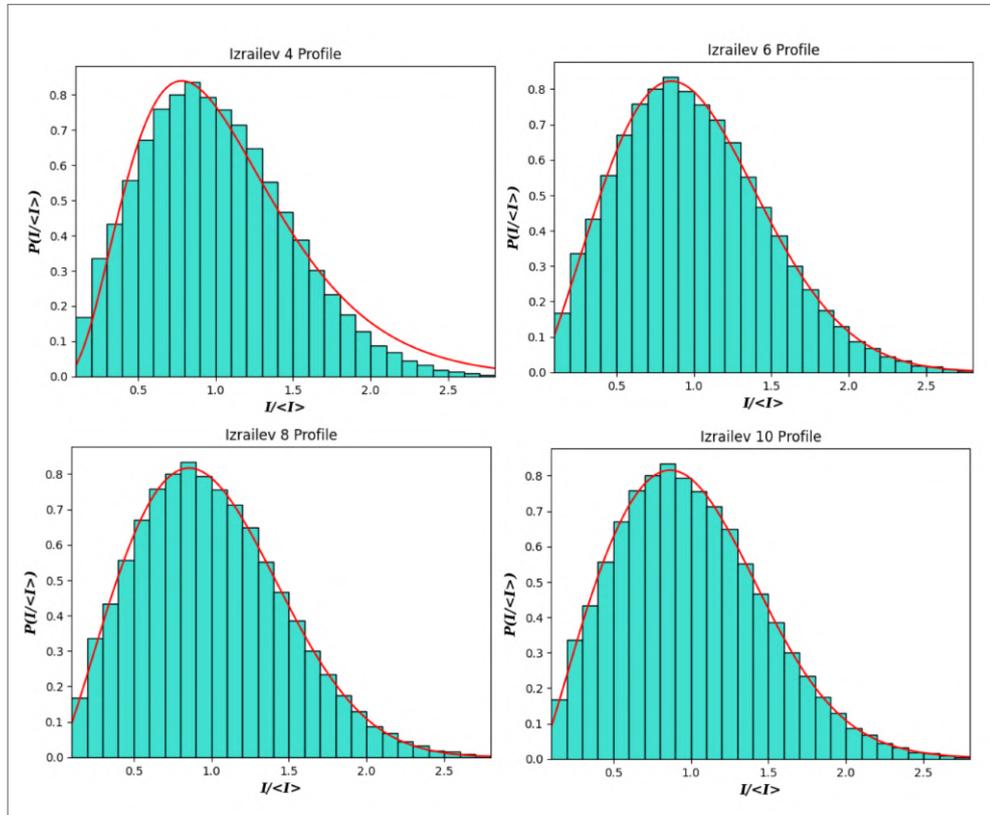
Fonte: O autor (2022).

4 vezes maior que P_{th} , contribuições não lineares de ordem superior parecem ser necessárias para fornecer uma descrição estatística satisfatória em toda a faixa de intensidades. Podemos entender melhor com a Fig.(14), aonde exibimos mais duas ordens da distribuição Izrailev, de ordem $f = 8$ e $f = 10$.

Na Fig.(14) apresentamos 4 ordens, na qual fizemos uso das Eqs.(2.35), (2.37), (2.38) e (2.39), correspondendo respectivamente a $f = 4$, $f = 6$, $f = 8$ e $f = 10$. Para $f = 4$ temos os parâmetros $\xi_4 = 3.68$ e $c_2 = 3.42$. De ordem $f = 6$ temos $\xi_6 = 2.15$, $c_2 = -0.50$ e $c_3 = 1.08$. De ordem $f = 8$ os parâmetros são $\xi_8 = 2.43$, $c_2 = 0.84$, $c_3 = 0.19$ e $c_4 = 0.22$. E para o de ordem $f = 10$ temos $\xi_{10} = 2.74$, $c_2 = 3.03$, $c_3 = -2.12$, $c_4 = 1.47$ e $c_5 = -0.05$. Notamos que a distribuição Izrailev de cada uma das imagens é de linha em cor vermelha. E pela figura percebemos que quanto maior for a ordem de Izrailev, mais se ajusta ao histograma dos dados experimentais. E a Fig.(14) tem sua aparência gaussiana, o que é comentado sobre isso no Apêndice(C).

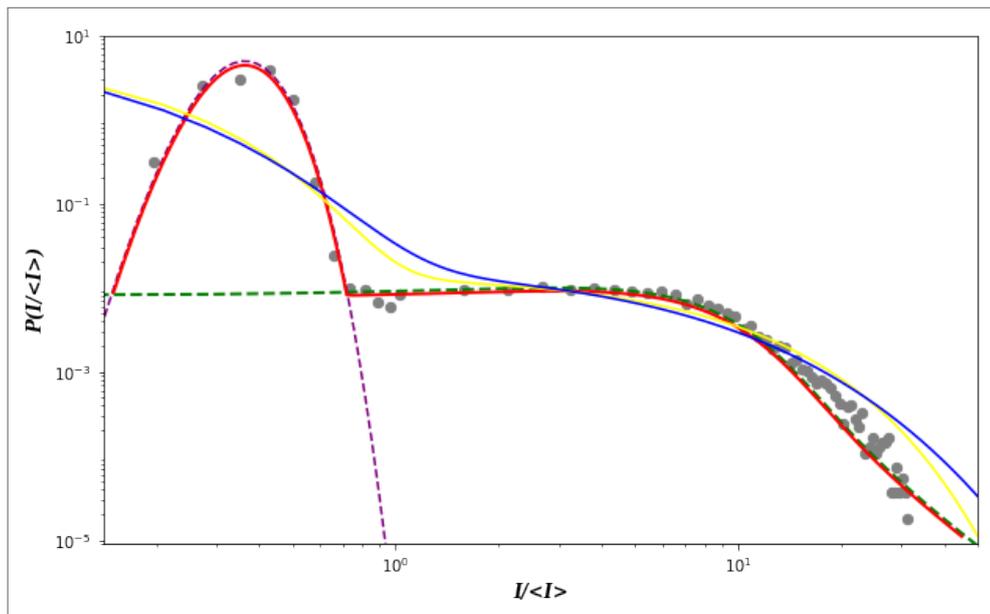
A Fig.(15) demonstra-se ser mais complexa pois emerge ligeiramente acima do limiar, e que os histogramas (círculos de cor cinza) são as intensidades máximas I de 10^5 espectros emitidos pelo RL baseado em um nanopó cristalino dopado Nd^{3+} para, neste caso, $P/P_{th} = 1.03$. Podemos perceber na figura que temos dois máximos, e estão relacionados a eventos de emissão espontâneo baixo I e estimulado intermediário-alto I . Foi usado uma mistura estatística para ajustar os dados, que é dado por $P(I/\langle I \rangle) = pP_1(I/\langle I \rangle) + (1 - p)P_2(I/\langle I \rangle)$, e que a representação p e $(1 - p)$ aparece muito na física estatística, sendo no nosso caso as

Figura 14 – Histograma dos dados experimentais com as distribuição de Izrailev de ordem $f = 4$, $f = 6$, $f = 8$ e $f = 10$.



Fonte: O autor (2022).

Figura 15 – Histograma (círculos) de intensidades máximas I de 10^5 espectros emitidos pelo RL de nanopó cristalino dopado com Nd^{3+} para $P/P_{th} = 1,03$ muito próximo do limiar.



Fonte: O autor (2022).

intensidades emitidas no regime escolhido.

A linha de cor amarela representa duas exponenciais, com $\langle I \rangle = 0.15$ e $\langle I \rangle = 7.0$ e a linha de cor azul representa as duas distribuições K , com $M = 5.0$, $\langle I \rangle = 0.15$ e $\langle I \rangle = 7.0$, em ambos os casos, a primeira PDF tem peso $p = 0.9$, ou mais ainda, os modelos baseados em RPS não fornecem bons resultados para essa ocasião. Contudo, o modelo diferencial estocástico mais uma vez sai na frente dessa corrida. Em que, temos a distribuição gamma (a Eq.2.35) representada por roxo tracejado, com os parâmetros $\xi = 22.0$, $c_2 = 57.9$ e $p = 0.9$, e a PDF de Lévy, a Eq.2.28, com os parâmetros $\alpha = 1.8$, $\beta = 1.0$, $\sigma = 3.4$ e $\mu = 4.2$, e de cor verde tracejado. A linha em cor vermelha é justamente a mistura da distribuição gamma com o distribuição de Lévy. Estando consistentemente associadas com I baixo no regime fraco de flutuações de intensidade do tipo Gaussiano e os regimes intermediário-alto de flutuações fortes do tipo Lévy.

No regime de emissão do RL bem acima do limiar, a contribuição mais significativa para a intensidade emitida vem da emissão estimulada, o que explica a presença de apenas um único máximo no histograma da Fig.(13). No próximo capítulo, iremos tratar do parâmetro de sobreposição de Parisi, que é usado para quantificar a quebra de simetria além de descrever a estrutura de algumas configurações de baixa energia para um sistema desordenado.

3 FASE VIDRO DE SPINS FOTÔNICAS: TEORIA E DADOS EXPERIMENTAIS PARA A FUNÇÃO DE PARISI

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descreveremos a fase vidro de spins fotônica e o fenômeno da quebra de simetria de réplicas, ou, em inglês, replica symmetry breaking (RSB). Contudo, para tanto será necessário, inicialmente, comentar sobre a fase magnética de vidro de spins, da qual a teoria em sistemas fotônicos se originou (ANTENUCCI et al., 2016). Porém, o que vem a ser um vidro de spins? A expressão vidro de spins, ou em inglês spins glass, diz respeito a um ordenamento magnético em que os spins apontam em direções aleatórias que praticamente não mudam com o tempo, e por isso o termo "vidro". Utilizando uma descrição mais técnica, a fase vidro de spins corresponde a a configurações desordenadas de spins em temperaturas abaixo de certa temperatura crítica de "congelamento" (ou "freezing") (LIMA, 2006). Para o estado vidro de spins são essenciais dois ingredientes:

- i) É necessário existir competições entre as interações de spins diferentes, no sentido de não existir configuração de spins favorável para todas as interações (o que dá origem ao que comumente se chama de "frustração");
- ii) Algum tipo de aleatoriedade ou desordem deve estar presente no sistema, seja, por exemplo, nas próprias interações entre os spins ou ainda na ocupação aleatória de sítios da rede por spins ou por partículas não magnéticas.

Na fase de vidro de spins, os spins apresentam correlações no tempo bastante forte, além de pequenas flutuações, quando comparadas com a fase paramagnética não correlacionada em altas temperaturas.

O surgimento do conceito de RSB foi apresentado inicialmente por Parisi (PARISI, 1979; PARISI, 1980; MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986), sendo utilizado para justificar que os sistemas de vidro de spin orientado de forma idêntica com a mesma distribuição de interações spin-spin de longo alcance aleatoriamente desordenadas sob condições idênticas (ou seja, cópias ou réplicas do sistema de spin) pode atingir diferentes estados e levar a medidas distintas de observáveis. O fenômeno RSB surge quando a energia livre do sistema se divide em um grande número de mínimos locais no espaço de configuração, que são separados por barreiras de energia relevantes. Como o sistema pode eventualmente ficar preso em um desses mínimos

locais por um tempo consideravelmente longo, dificultando assim seu comportamento ergódico, surgem propriedades dependentes do histórico da medição, como efeitos de irreversibilidade e histerese magnética.

A caracterização do fenômeno RSB em sistemas de spin magnético pode ser realizada através da análise da distribuição de valores de uma função de correlação spin-spin para um grande número de réplicas do sistema. Esta quantidade mede a sobreposição entre cada duas réplicas do sistema, sendo assim denominada parâmetro de sobreposição de réplicas. Se as réplicas são consideradas simétricas (independentes, não correlacionadas), então a distribuição dos valores desta réplica sobre o parâmetro é centrada em torno de zero, cenário observado na fase paramagnética em altas temperaturas. A simetria da réplica também pode ser identificada no estado ferromagnético sem desordem abaixo da temperatura crítica. Por outro lado, se a distribuição dos valores de sobreposição da réplica exibir um máximo (ou máximos) em valores diferentes de zero da réplica parâmetro de sobreposição, então a simetria das réplicas é quebrada e uma fase de vidro de spin com RSB e correlações não triviais entre as réplicas do sistema emerge nesses sistemas magnéticos fortemente desordenados em temperaturas abaixo de alguma temperatura crítica de congelamento (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986).

Dado essas informações iniciais, inclusive os itens (i) e (ii) acima, podemos dizer que a desordem e frustração são considerados ingredientes essenciais para uma fase de vidro de spin. E não só isso, devido a orientação aleatória dos spins, a magnetização do sistema tem resultado nulo quando consideramos a fase de vidro de spin em baixa temperatura, assim como no estado paramagnético de alta temperatura. Portanto, a magnetização não pode ser considerada como o parâmetro de ordem da fase do vidro de spin. E o que pode ser feito para considerarmos como parâmetro de ordem da fase do vidro de spin se a magnetização não pode ser? O que é aceito está associado diretamente às distribuição de valores do parâmetro de sobreposição da réplica, pois a temperatura crítica de congelamento marca a fronteira entre as fases com comportamentos bastante distintos da quantidade em questão (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986; PARISI, 1979; PARISI, 1980).

3.1.1 Formulação hamiltoniana de sistemas RL

Após uma breve discussão sobre o vidro de spin de sistemas fotônicos, vamos recorrer a base teórica, na qual trataremos a formulação hamiltoniana dos sistemas fotônicos multimodo abertos e fechados com desordem ou não.

A formulação apresentada a seguir é de acordo com os textos (HACKENBROICH; VIVIESCAS; HAAKE, 2002; VIVIESCAS; HACKENBROICH, 2003; HACKENBROICH, 2005), além de fazer uso para RLs e lasers de fibra aleatórias, Temos o hamiltoniano de sistemas quânticos do ambiente (que iremos nos referir outrora como banho) e que é descrito como

$$H = H_B + H_S + H_{SB}, \quad (3.1)$$

onde os primeiros dois termos descreve, respectivamente, o campo eletromagnético quantizado fora e dentro do ambiente do sistema, enquanto H_{SB} considera a interação sistema-banho.

Para separar as contribuições do campo eletromagnético nas regiões fora e dentro do sistema é necessário partir da energia eletromagnética clássica, e não só isso, é considerado a quantização adequada dos campos, permitindo identificar

$$\begin{aligned} H_S &= \sum_u \omega_u \alpha_u^\dagger(t) \alpha_u(t), \\ H_B &= \int d\omega \sum_v \omega \beta_v^\dagger(\omega, t) \beta_v(\omega, t), \\ H_{SB} &= \int d\omega \sum_{u,v} W_{uv}(\omega) \alpha_u^\dagger(t) \beta_v(\omega, t) + h.c., \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\alpha_u(t)$ e $\alpha_u^\dagger(t)$ são os operadores de aniquilação e criação, conceitos estes que advém das relações de comutação canônica da representação de Heisenberg, que são atribuídos aos automodos de campo do sistema com autofrequências discretas ω_u e u são índices inteiros. De modo análogo, $\beta_v^\dagger(\omega, t)$ e $\beta_v(\omega, t)$ forma um conjunto contínuo de operadores pelos modos fora do sistema com frequência contínua ω com seu índice discreto de canal relacionado v . Faltando descrever o H_B que é um grande reservatório de osciladores quânticos interagindo em ambos os lados com os operadores $\alpha_u(t)$ e $\alpha_u^\dagger(t)$, como indicado em H_{SB} pelas amplitudes juntas $W_u(\omega)$ em uma aproximação. Logo, a descrição de sistemas fechados, sem vazamento de energia para a região externa e sem interação, envolve apenas H_S (HACKENBROICH; VIVIESCAS; HAAKE, 2002; VIVIESCAS; HACKENBROICH, 2003; HACKENBROICH, 2005).

As equações de Heisenberg do movimento que obtemos das Eqs.(3.1) e (3.2) nos dá

$$\frac{d\alpha_u}{dt} = -i\omega_u \alpha_u - i \int d\omega \sum_v W_{uv} \beta_v, \quad (3.3)$$

e

$$\frac{d\beta_v}{dt} = -i\omega \beta_v - i \int d\omega \sum_u \hbar W_{uv}^* \alpha_u. \quad (3.4)$$

Observamos que a equação da dinâmica para os campos $\beta_v(\omega, t)$ pode ser resolvida formalmente, com o resultado substituído na Eq.(3.3) no tratamento que se segue.

Porém só isso não é o suficiente, ainda temos que considerar a interação átomo-campo de Jaynes-Cummings, que surge por conta dos efeitos não lineares decorrentes do ganho no sistema e com isso acrescentamos a H_S na Eq.(3.2) (JAYNES; CUMMINGS, 1963). O que surge de novo é a introdução do termo $\int d\mathbf{r} g_u^*(\mathbf{r}) \sigma_-(\mathbf{r}, t)$ do lado direito de $d\alpha_u/dt$ em Eq.(3.3), e a integral cobre toda a região interna e σ_- se refere ao operador redutor de densidade atômica dos átomos (ou íons) responsáveis pelas emissões estimuladas de fótons. Restando agora o acoplamento átomo-campo $g_u(\mathbf{r})$ sendo proporcional a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_u(\mathbf{r})$, onde \mathbf{p} representa os elementos da matriz dipolo atômica e $\mathbf{E}_u(\mathbf{r})$ é a amplitude do campo elétrico dentro do sistema. E para completar, se estamos tratando de um caso em que o meio não linear de um sistema apresenta alguma desordem estrutural, o seu índice de refração $n(\mathbf{r})$ é um perfil espacial aleatório que influencia de modo único o campo eletromagnético.

O que se ganha também na interação átomo-campo é a evolução temporal dos operadores α_u e β_v considerando em conjunto com as equações dinâmicas para σ_- e o operador de inversão de densidade $\sigma_z(\mathbf{r}, t)$, ou seja,

$$\frac{d\sigma_-}{dt} = -\sigma_-(\gamma_\perp + i\omega_a) + 2 \sum_u g_r \sigma_z \alpha_u + L_- , \quad (3.5)$$

e

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = \gamma_\parallel (B\rho - \sigma_z) - \sum_u (g_u^* \sigma_- \alpha_u^\dagger + h.c.) + L_z , \quad (3.6)$$

onde γ_\perp e γ_\parallel são as taxas de decaimento, ω_a é a frequência da transição atômica ativa, $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade atômica, $L_-(\mathbf{r}, t)$ e $L_z(\mathbf{r}, t)$ surgem do acoplamento dos átomos do sistema com o banho externo, e B é a intensidade da bomba.

A evolução da dinâmica de σ_- e σ_z é mais rápida do que α_u e α_v , então as Eqs.(3.5) e (3.6) podem ser resolvidos recursivamente no regime estacionário e, além disso, a solução para σ_- até terceira ordem nos campos α_u , tem os termos de ruído ignorados nas Eqs.(3.5) e (3.6), e com essas informações podemos colocar de volta na equação de movimento para $d\alpha_u/dt$. Além do mais, considerando amplitudes de acoplamento W_{uv} independente de ω para uma banda suficientemente larga em torno de ω_a , que é a aproximação de Markov, e a forma final de $d\alpha_u/dt$ é comparando com a equação de movimento de Heisenberg para $\alpha_u(t)$, o que permite escrever uma expressão quântica não-hermitiana efetiva (devido à abertura do sistema) para a expressão hamiltoniana do sistema fotônico multimodo até quarta ordem nos operadores α_u e α_u^\dagger como,

$$H_S = -\frac{1}{2} \sum_{u_1 u_2} g_{u_1 u_2}^{(2)} \alpha_{u_1}^\dagger \alpha_{u_2} - \frac{1}{4!} \sum_{u_1 u_2 u_3 u_4} g_{u_1 u_2 u_3 u_4}^{(4)} \alpha_{u_1}^\dagger \alpha_{u_2} \alpha_{u_3}^\dagger \alpha_{u_4} , \quad (3.7)$$

com

$$\begin{aligned}
g_{u_1 u_2}^{(2)} &= -2\omega_{u_1} \delta_{u_1 u_2} + 2\pi(WW^\dagger)_{u_1 u_2} + G_{u_1 u_2}^{(2)}, \\
G_{u_1 u_2}^{(2)} &\propto S \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) g_{u_1}^*(\mathbf{r}) g_{u_2}(\mathbf{r}), \\
g_{u_1 u_2 u_3 u_4}^{(4)} &\propto S \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) g_{u_1}^*(\mathbf{r}) g_{u_2}(\mathbf{r}) g_{u_3}^*(\mathbf{r}) g_{u_4}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

E o hamiltoniano da interação do sistema-banho na Eq.(3.2) pode ser escrito na forma

$$H_{SB} = \sum_u iL_u \alpha_u^\dagger + h.c., \tag{3.9}$$

com

$$L_u(t) \equiv -i \int d\omega \sum_v \exp^{-i\omega(t-t_0)} w_{uv} \beta_v(\omega, t_0) \tag{3.10}$$

aonde passa a ser entendido como um operador de ruído quântico (GARDINER; ZOLLER, 2004) que depende dos operadores de banho apenas no tempo dado $t = t_0$. Da Eq.(3.10) nós observamos que a correlação de ruído $\langle L_u^*(t) L_{u'}(t') \rangle$ normalmente não é proporcional a $\delta_{u,u'} \delta(t-t')$, que implica em um ruído não multiplicativo. Contudo, o ruído pode ser multiplicativo e não correlacionado em uma base adequada de modos de amplitude lenta quando é tratado no contexto semiclássico, conforme discutido a seguir.

No contexto em questão, o acoplamento quártico $g^{(4)}$ no Hamiltoniano efetivo, a Eq.(3.7), é justamente a principal fonte de não linearidade, pois se relaciona com a susceptibilidade não linear $\chi^{(3)}$. Ainda damos destaque no caráter desordenado dos acoplamentos $g^{(p)}$ em H_S , tanto o quadrático (ordem $p = 2$) quanto o quártico ($p = 4$), que deve-se em parte às posições aleatórias dos átomos ou íons estimulados e ao perfil espacial aleatório do índice de refração.

No Hamiltoniano sistema-banho quântico similar de spins interativos, também expressamos os termos de operadores de criação e aniquilação, no qual o ambiente externo de osciladores quânticos se acopla também em uma forma bilinear com os operadores de spin do sistema. Nesse caso, o hamiltoniano quântico efetivo geral exhibe spins interagindo até a ordem p -ésima. Além disso, uma restrição esférica na soma de operadores de spin quadrado é introduzido, o que acaba definindo um modelo esférico p -spin quântico (no contexto fotônico, a restrição análoga corresponde à fixação da potência óptica total (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016)). Quando os acoplamentos aleatórios de ordem p com distribuições Gaussianas são considerados no caso $p > 2$, uma fase de vidro de spin emerge sob o formalismo RSB de Parisi (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986). Que discutiremos na próxima

subseção que tais características encontrarão as suas contrapartes fotônicas na análise física estatística de sistema RL governados por um hamiltoniano efetivo análogo à Eq.(3.7).

3.1.2 Sistemas RL com vidro de spin no tratamento estatístico

Retornando ao contexto semiclássico, a formulação hamiltoniana que é semelhante a Eq.(3.7) mas com os operadores quânticos α_u^\dagger e α_u substituídos por seus valores complexos esperados α_u^* e α_u , respectivamente, também produz uma fase fotônica de vidro de spin RSB em sistemas RL multimodo em cavidades fechadas ou abertas para desordem suficientemente forte em $p = 2$ e $p = 4$ acoplados aleatoriamente (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016).

É observado ainda que, além de considerar os valores esperados dos operadores de campo na versão semiclássica da Eq.(3.7), também é conveniente trabalhar com base nos modos de amplitude lenta $\bar{a}_u(t)$, definidos como

$$\alpha_\lambda(t) = \sum_u A_{\lambda u} \bar{a}_u(t), \quad (3.11)$$

com

$$\bar{a}_u(t) = a_u(t) \exp(-i\omega_u t), \quad (3.12)$$

onde as dinâmicas dos modos de amplitude $a_u(t)$ evolui mais lentamente que do que as escalas de tempo típicas ω_u^{-1} . Neste ponto notamos que, como a escolha da base em Eq.(3.11) não é única, pode ser escolhida uma base de modos de lenta amplitude no ruído L_λ , na Eq.(3.10), que deve-se justamente ao acoplamento do ambiente externo sendo branco e não correlacionado.

Da Eq.(3.7) e negligenciando a forma semiclássica da Eq.(3.9) para o termo de ruído relacionado à interação do sistema-banho, o hamiltoniano efetivo semiclássico do sistema laser multimodo é dado por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{u_1 u_2 | FMC} \bar{g}_{u_1 u_2}^{(2)} a_{u_1}^* a_{u_2} - \frac{1}{4!} \sum_{u_1 u_2 u_3 u_4 | FMC} \bar{g}_{u_1 u_2 u_3 u_4}^{(4)} a_{u_1}^* a_{u_2} a_{u_3}^* a_{u_4}, \quad (3.13)$$

em que as barras sobre os acoplamentos quadrático e quártico denota que os elementos da matriz $A_{\lambda u}$ foram incorporados com a mudança de base na Eq.(3.11), e FMC nas somas está indicando as condições de união, na qual as frequências se aplicam, ou mais ainda, $|\omega_{u_1} - \omega_{u_2}| < \gamma$ na primeira soma e $|\omega_{u_1} - \omega_{u_2} + \omega_{u_3} - \omega_{u_4}| < \gamma$ na segunda, com γ representando a largura de linha do modo típico. As restrições em questão surgem da

transformada de Fourier dos modos de amplitude lenta, na forma $\bar{a}_u(\omega) \approx \delta(\omega - \omega_u)$. O hamiltoniano na Eq.(3.13) representa o quadro semiclássico na aproximação de modos de amplitude lenta para a descrição das propriedades fotônicas de sistemas fechados ou abertos com meios não lineares desordenados. Em particular, recordamos que os RLs são geralmente sistemas abertos com meios aleatórios não lineares, como discutido no Cap.(1).

Conforme o que foi discutido, os acoplamentos quadráticos e quárticos na Eq.(3.13) carregam a assinatura da desordem estrutural no caso de sistemas RL. Porém o seu cálculo explícito a partir dos primeiros princípios é inviável e, para fins práticos, uma possibilidade é supor que os seus valores sejam obtidos de alguma função de densidade de probabilidade (PDF).

Trataremos a abordagem de campo médio dos acoplamentos e que os modos entre eles são estatisticamente independentes, fazendo com que o primeiro e o segundo momentos de suas distribuições se tornem os únicos essenciais, além de considerar que todos os acoplamentos em uma dada ordem (quadrática ou quártica) sejam obtidas da mesma PDF, juntamente com o relaxamento das restrições *FMC*, de modo que qualquer combinação de modos seja permitida em cada soma, fazendo com que a Eq.(3.13) seja reformulada na forma hamiltoniana para,

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{su} J_{su} a_s^* a_u - \frac{1}{4!} \sum_{suvy} J_{suvy} a_s^* a_u a_v^* a_y, \quad (3.14)$$

sendo o valor real dos acoplamentos de segunda e quarta ordem são, respectivamente, denotados por J_{su} ($p = 2$) e J_{suvy} ($p = 4$), dados na abordagem de campo médio por distribuições Gaussianas geralmente escritas como

$$P(J_{i_1 \dots i_p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \exp \left[-\frac{(J_{i_1 \dots i_p} - \bar{J}_0^{(p)})^2}{2\sigma_p^2} \right]. \quad (3.15)$$

Notamos da Eq.(3.15) que as PDFs Gaussiana $p = 2$ e $p = 4$ do primeiro e segundo momentos tem sido convenientemente rescalado pelo número N de modos do sistema,

$$e \quad \begin{aligned} \sigma_p^2 &= \frac{p! J_p^2}{2N^{p-1}} \\ \bar{J}_0^{(p)} &= \frac{J_0^{(p)}}{N^{p-1}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $J_0^{(p)}$ e J_p são escalas de energia associadas respectivamente com as propriedades desordenadas (variância) e ordenadas (média) do sistema. Em (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016) os autores introduzem a seguinte parame-

trização,

$$\begin{aligned} J_0^{(4)} &= \alpha_0 J_0, \quad \alpha_0 = \left(\frac{J_0^{(2)}}{J_0^{(4)}} + 1 \right)^{-1}, \quad J_0 = J_0^{(2)} + J_0^{(4)}, \\ J_4 &= J, \quad \alpha = \left(\frac{J_2}{J_4} + 1 \right)^{-1}, \quad J = J_2 + J_4, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os parâmetros α_0 e α controla o grau de não linearidade e tem os seus valores mais alto no intervalo $[0, 1]$, significando carácter não linear mais forte. Além disso, para um sistema em equilíbrio com a fonte de bombeamento externa, a intensidade óptica total é constante, tendo agora um novo parâmetro ϵ dado como,

$$\epsilon = \epsilon N = \sum_u |a_u|^2, \quad (3.18)$$

que representa necessariamente a intensidade média por modo. Como dito acima, a restrição é análoga àquela dos modelos de spin esférico (CRISANTI; SOMMERS, 1992; CUGLIANDOLO et al., 2002), e com isso a Eq.(3.14) passa a ser analisada como um hamiltoniano semiclássico esférico complexo (justamente devido à natureza complexa das variáveis tratadas a_u) que é $(p = 2) + (p = 4)$ para sistemas de laser multimodo geralmente abertos e desordenados. Tal similitude também abre a possibilidade de uma fase de vidro de spin fotônico com propriedades RSB em sistemas RL, sendo também detalhado abaixo, em analogia ao caso encontrado de spin esférico $(p = 2) + (p = 4)$ nos modelos desordenado.

A força de desordem e a taxa de bombeamento pode ser expressa por, respectivamente, como

$$\begin{aligned} R_J &= \frac{J}{J_0} \\ e \quad P &= \epsilon \sqrt{\beta J_0}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo $\beta = (k_B T)^{-1}$, onde k_B denota a constante de Boltzmann, e T representa a temperatura do banho de calor (sendo proporcional à autocorrelação do ruído branco). Um detalhe importante é perceber que da Eq.(3.19), a temperatura fotônica desempenha essencialmente o papel da potência de excitação de entrada inversa. Ou mais ainda, é possível antecipar que as fases de baixa temperatura na descrição análoga de sistemas magnéticos desordenados (como já mencionamos no vidro de spin com RSB) acabarão encontrando suas contrapartes nos regimes fotônicos de alta potência de excitação acima do laser. Na parametrização acima, o diagrama de fases do sistema decorrente da análise física estatística do hamiltoniano

Eq.(3.14) será plotado a seguir em função dos parâmetros relevantes que determinam seu comportamento fotônico, a saber, $\alpha = \alpha_0$, R_J e P .

Podemos separar a parte real e imaginária das variáveis de amplitude dos modos complexos a_u na forma reescalada,

$$a_u = \sqrt{\epsilon}(\sigma_u + i\tau_u), \quad (3.20)$$

de uma forma que a constante esférica na intensidade óptica total, na Eq.(3.18), se torne,

$$\sum_u (\sigma_u^2 + \tau_u^2) = N. \quad (3.21)$$

Substituindo a Eq.(3.20) na Eq.(3.14), o hamiltoniano H pode ser convenientemente reformulado em termos do novo conjunto de variáveis reais σ_u e τ_u .

A física estatística para abordar a Eq.(3.14) começa escrevendo a função de partição do sistema fotônico para uma dada realização J dos acoplamentos gaussianos de segunda e quarta ordem entre os modos, como

$$Z_N(J) = \int D_a \exp(-\beta H[a, J]), \quad (3.22)$$

com

$$D_a \equiv \prod_{u=1}^N da_u da_u^*. \quad (3.23)$$

A energia livre por número N de modos no limite termodinâmico é expressa pelo seu peso adequado de cada realização J na forma

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \int DJ P[J] \ln Z_N[J] \equiv - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \overline{\ln Z_N[J]}. \quad (3.24)$$

Neste ponto é importante frisar que o cálculo da densidade de energia livre f pode ser realizado com a ajuda do chamado truque de réplica (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986), que tira proveito de uma forma de limite bem conhecida para a função \ln na Eq.(3.24). Nesta abordagem, n cópias (inteiras) do sistema são consideradas com a mesma realização e distribuições de acoplamentos, e n ser real no limite $n \rightarrow 0$ é tido como

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\beta N} \left[\frac{\overline{(Z_N[J])^n} - 1}{n} \right], \quad (3.25)$$

onde

$$\overline{(Z_N[J])^n} = \int DJ P[J] \int Da_1 \dots Da_n \exp[-\beta(H[a_1, J] + \dots + H[a_n, J])]. \quad (3.26)$$

Uma observação importante a se fazer é perceber que a exponencial na Eq(3.26) apresenta uma soma de hamiltonianos, cada um deles com a mesma realização J de acoplamentos de

segunda e quarta ordem entre os modos, mas com conjuntos distintos de variáveis de amplitude dos modos, $a_a \equiv \{a_u^a\}$, e índices dado por $u = 1, 2, \dots, N$, atribuindo a diferentes réplicas do sistema $a = 1, 2, \dots, n$, e não confunda o índice da réplica a com as variáveis dos modos de amplitudes $\{a_u^a\}$, uma vez que os índices da réplica são apresentados aqui pelas letras a e b .

E é aconselhável definir as seguintes matrizes e variáveis,

$$Q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_u (\sigma_u^a \sigma_u^b + \tau_u^a \tau_u^b) = \frac{1}{\epsilon} \sum_u \text{Re}[a_u^a (a_u^b)^*], \quad (3.27)$$

$$R_{ab} = \frac{1}{N} \sum_u (\sigma_u^a \sigma_u^b - \tau_u^a \tau_u^b) = \frac{1}{\epsilon} \sum_u \text{Re}[a_u^a a_u^b], \quad (3.28)$$

e

$$m_\sigma = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_u \sigma_u^a, \quad m_\tau = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_u \tau_u^a, \quad (3.29)$$

então

$$m_\sigma + im_\tau = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \sum_u a_u^a. \quad (3.30)$$

Das equações acima, fica mais claro que Q_{ab} e R_{ab} levam em conta a sobreposição entre as réplicas a e b , que retratando ao seu análogo complexo, é definido como o parâmetro de sobreposição da réplica real na abordagem RSB de Parisi para a teoria do vidro de spin de sistemas magnéticos desordenados (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986). Da mesma forma, as variáveis m_σ e m_τ são os análogos da magnetização. Além de observarmos que o índice de réplica a não aparece em m_σ e m_τ , que justificaremos logo em seguida. As quantidades Q_{ab} , R_{ab} , m_σ e m_τ na verdade constituem os parâmetros de ordem que irão caracterizar as diversas fases fotônicas do sistema laser multimodo (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016).

Em termos das quantidades definidas nas Eqs.(3.27)-(3.29), a n -ésima ordem média da função de partição na Eq.(3.26) é expressa como

$$\overline{Z_N^n} = \int DQDRDm_\tau Dm_\sigma \exp(-NG[Q, R, m_\tau, m_\sigma]), \quad (3.31)$$

em que o funcional G é tido como

$$\begin{aligned} G[Q, R, m_\sigma, m_\tau] = & -\frac{1}{2} \sum_{ab} g(Q_{ab}, R_{ab}) - nk(m_\sigma, m_\tau) \\ & -\frac{1}{2} \ln \det(Q + R) + \frac{m_\sigma^2}{2} \sum_{ab} (Q + R)_{ab}^{-1} \\ & -\frac{1}{2} \ln \det(Q - R) + \frac{m_\tau^2}{2} \sum_{ab} (Q - R)_{ab}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e fazendo uso da definição de funções auxiliares, que são

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \zeta_2(x^2 + y^2) + \frac{\zeta_4}{2}(x^4 + y^4 + 4x^2y^2), \\ h(x, y) &= b_2(x^2 + y^2) + b_4(x^2 + y^2)^4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Os parâmetros acima b_2 , b_4 , ζ_2 e ζ_4 podem ser expressos em termos das variáveis relevantes do sistema α_0 , α , R_J e P (referente as Eqs.(3.17) e (3.19), ou seja,

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(1 - \alpha_0)}{4} P \sqrt{\beta J_0}, \quad b_4 = \frac{\alpha_0}{96} P^2, \\ \zeta_2 &= \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \beta J_0 P^2 R_J^2, \quad \zeta_4 = \frac{\alpha^2}{6} P^4 R_J^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para lidarmos com a integral na Eq.(3.31) no espaço de réplica, o método de extremização do ponto de sela pode ser aplicado no limite termodinâmico, de modo que,

$$f = f_0 + \lim_{n \rightarrow 0} \text{Extr} \frac{1}{\beta n} G[Q, R, m_\sigma, m_\tau], \quad (3.35)$$

sendo a constante f_0 termodinamicamente irrelevante e G é avaliado em seu ponto estacionário no limite $n \rightarrow 0$, ou seja, um ponto de máximo (ou mínimo) com relação às variações em Q e R (ou m_σ e m_τ).

Ainda falta fazer o cálculo do funcional $G[Q, R, m_\sigma, m_\tau]$ na Eq.(3.32) no ponto estacionário. contudo, seguindo o que está descrito em (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016), com base na abordagem RSB de Parisi para sistemas de vidro de spin, chegamos a uma conclusão de que logo após o que foi estabelecido, a equação é resolvida de modo mais simples na simetria de réplicas, de modo que $Q_{ab} = Q$ e $R_{ab} = R$ para qualquer par de réplicas distintas a e b , não é termodinamicamente estável e nem mais relevante quando se trata do espaço dos parâmetros, notadamente na região com altos poderes de excitação (análogo a baixas temperaturass). Sem considerar as variáveis m_σ e m_τ na Eq.(3.29) são réplicas simétricas (ou seja, independentes da réplica particular a), uma vez que são grandezas de réplica única.

Uma dificuldade semelhante com a réplica simétrica foi enfrentada por Parisi na abordagem estatística para sistemas de vidro de spin no final dos anos de 1970. Com o intuito de contornar o problema, Parisi introduziu nos seus conteúdos de RSB que, dependendo da região do espaço de parâmetros, duas réplicas do sistema a e b podem, em princípio, não ser totalmente equivalentes ou simétricos (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986; PARISI, 1979; PARISI, 1980). O que acaba implicando nos valores de Q_{ab} diferindo para $a \neq b$ (o mesmo se aplica para R_{ab}).

Usando este contexto, a distribuição de probabilidade dos valores dessas grandezas tornam-se um parâmetro de ordem separando as fases com e sem RSB. Para mais, no caso em que a simetria da réplica é quebrada, acaba sendo possível que sistemas identicamente preparados evoluam sob condições termodinâmicas equivalentes (ou mais ainda, cópias do sistema) que atingem diferentes configurações de equilíbrio, dando assim origem a propriedades que são geralmente dependentes sobre a história da medição, conforme discutido na Seção(3.1).

Considerando um ponto de vista mais prático, Parisi projetou um esquema de cálculo para abordagem RSB consistindo no caso de um sistema com n réplicas, uma matriz M de $n \times n$ pode ser construída no estado RSB de passos R descrito pelos parâmetros $(M_{R+1}, M_R, \dots, M_0)$. A matriz é dividida em blocos de matrizes diagonais de tamanho linear decrescente p_r , com $1 = p_{R+1} < p_R < \dots < p = n$. E atribuímos $M_{ab} = M_r$ se as réplicas a e b pertencem ao mesmo bloco (indicamos ver (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016; MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986; PARISI, 1979; PARISI, 1980), para mais detalhes do esquema do cálculo RSB de Parisi).

E antes de continuarmos é importante perceber que na Eq.(3.28) e Eq.(3.28) que ambas as matrizes Q_{ab} e R_{ab} compreendem misturas de produtos $\sigma_u^a \sigma_u^b$ e $\tau_u^a \tau_u^b$ das partes real e imaginário das variáveis de amplitude dos modos a_u^a e a_u^b , como vemos na Eq.(3.20). E para resolver isso, podemos definir as seguintes matrizes a serem incorporadas nos cálculos que se seguem, que são

$$\begin{aligned} A_{ab} &= Q_{ab} + R_{ab} = \frac{2}{N} \sum_u \sigma_u^a \sigma_u^b, \\ B_{ab} &= Q_{ab} - R_{ab} = \frac{2}{N} \sum_u \tau_u^a \tau_u^b. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A análise estacionária do funcional $[Q, R, m_\tau, m_\sigma]$ dada pela Eq.(3.32) com respeito a variações em Q, R, m_τ, m_σ é realmente bastante interessante. Ao expressarmos os resultados obtidos em termos das matrizes definidas na Eq.(3.36), é obtido as seguintes equações de ponto de sela no limite do truque de réplica $p_0 = n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \Upsilon(Q_0, R_0) - \frac{(A_0 - m_\sigma^2)}{(A_1^2)} - \frac{(B_0 - m_\tau^2)}{(B_1^2)} &= 0, \\ \Upsilon(Q_r, R_r) - \Upsilon(Q_{r-1}, R_{r-1}) - \frac{(A_r - A_{r-1})}{(A_r A_{r+1})} - \frac{(B_r - B_{r-1})}{(B_r B_{r+1})} &= 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

em relação a Q_{ab} , com $r = 1, \dots, R$ e definindo $\Upsilon(x, t) = \partial g(x, y) / \partial x$. E para R_{ab} temos,

$$\begin{aligned} \Upsilon(R_0, Q_0) - \frac{(A_0 - m_\sigma^2)}{(A_1^2)} + \frac{(B_0 - m_\tau^2)}{(B_1^2)} &= 0, \\ \Upsilon(R_r, Q_r) - \Upsilon(R_{r-1}, Q_{r-1}) - \frac{(A_r - A_{r-1})}{(A_r A_{r+1})} + \frac{(B_r - B_{r-1})}{(B_r B_{r+1})} &= 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

com $r = 1, \dots, R + 1$ e os valores de contorno $Q_{R+1} = 1$ e $R_{R+1} = \bar{R}$, e por fim,

$$m_\sigma = bA_{\hat{1}}, \quad (3.39)$$

para variações em m_σ ou m_τ , com $b = (2b_2 + 4b_4 m_\sigma^2) m_\sigma$ e considerando o caso $m_\tau = 0$ (e a partir daqui, $m_\tau = 0$ será considerando sem perda de generalidade (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI et al., 2016)). Acima, a notação com chapéu representa a réplica da transformada de Fourier de uma matriz M_r do R -RSB, dado por

$$\begin{aligned} M_{\hat{u}} &= \sum_{r=u}^{R+1} p_r (M_r - M_{r-1}), \\ M_r &= \sum_{u=0}^r \frac{1}{p_u} (M_{\hat{u}} - M_{\hat{u+1}}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

com valores nulos para essas quantidades quando os índices estão fora dos respectivos intervalos de definição. Com isso, a solução do ponto de sela para G na abordagem R -RSB é lida como

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{R+1} (p + r - p_{r+1}) g(Q_r, R_r) - k(m_\sigma, m_\tau) + \frac{m_\sigma^2}{2A_{\hat{0}}} + \frac{m_\tau^2}{2B_{\hat{0}}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(A_{R+1} - A_R) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{R+1} \frac{1}{p_r} \ln \left(\frac{A_{\hat{r}}}{A_{\hat{r+1}}} \right) + \frac{A_0}{A_{\hat{1}}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(B_{R+1} - B_R) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{R+1} \frac{1}{p_r} \ln \left(\frac{B_{\hat{r}}}{B_{\hat{r+1}}} \right) + \frac{B_0}{B_{\hat{1}}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

As equações estacionárias, que são as Eqs.(3.37)-(3.39), apresentam soluções com $m_\tau = 0$ na forma geral $B_r = 0$ e $Q_r = R_r$ para $r = 0, \dots, R$. Os autores empregaram o esquema de cálculo acima no caso específico para $R = 1$, de modo que $r = 0, 1, \dots$, na chamada abordagem RSB de uma etapa (1RSB) para o funcional $G[Q, R, m_\sigma, m_\tau]$ na Eq.(3.32). Além de que, todo o cálculo apresentado até aqui também tem forte impacto nas análises do diagrama de fases de sistemas de laser multimodo, no qual, quatro fases foram identificadas, são elas: onda incoerente ou também denominada onda contínua (em inglês, incoherent wave ou continuous wave), laser de travamento de modo (em inglês, mode locking laser), o laser aleatório como já comentado, e a onda de bloqueio de fase (ou em inglês, phase locking wave), para mais informações, veja em (ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a) e (ANTENUCCI et al., 2016).

3.2 PARÂMETRO DE SOBREPOSIÇÃO DE PARISI

A função de Parisi é um conceito teórico importante na física estatística, e tem sido aplicada em diferentes áreas da física, incluindo lasers aleatórios. A função de Parisi descreve as flutuações da energia livre em sistemas desordenados, que apresentam múltiplos mínimos locais em sua superfície de energia livre. Essa função foi proposta por Giorgio Parisi por volta da década de 1980 (PARISI, 1979), para descrever o comportamento dos vidros de spin, que são sistemas magnéticos desordenados com múltiplos estados de equilíbrio, como discutido na seção anterior.

Sendo uma importante ferramenta para entender a natureza complexa e desordenada dos lasers aleatórios. Em particular, ela é usada para descrever a distribuição estatística das intensidades de luz em diferentes pontos do sistema, e para prever a correlação entre essas intensidades. Quando mencionamos sobre os sistemas desordenados, é entendido como uma abordagem mais geral, que busca compreender a natureza estatística de sistemas desordenados em termos de suas flutuações e correlações.

Como é tratado neste trabalho a física de lasers aleatórios, essa função de Parisi descreve a distribuição de intensidades de luz em diferentes pontos do sistema, e para prever a correlação entre essas intensidades (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986). Ela é especialmente útil para entender a natureza complexa e aleatória da emissão de luz em lasers aleatórios baseados em materiais desordenados, como vidros dopados com íons de terras raras (como grande parte do nosso estudo neste trabalho com o Nd^{3+}).

Temos também o parâmetro de sobreposição de Parisi (ou em inglês, Parisi overlap parameter), que é uma medida usada para descrever o grau de sobreposição de configurações em um sistema com muitos graus de liberdade. Ele é frequentemente usado em modelos de vidros de spin, como o modelo de spin de Edwards-Anderson (BERG; BILLOIRE; JANKE, 2002), para descrever a estrutura das configurações de baixa energia.

A transição da fase fotônica paramagnética para a fase vítrea com RSB é um exemplo de fenômeno que pode ser descrito usando o parâmetro de sobreposição de Parisi. Esse tipo de transição ocorre em sistemas desordenados, onde assumimos que, ao iniciar a medição do espectro, o sistema possui as mesmas condições físicas, por isso podemos usar o truque de réplica para fazer nossa análise estatística. Ao aplicar esta abordagem a sistemas de RL, percebemos ausência de correlações em baixas potências de bombeamento. Logo para altas potências de bombeamento, acima do limiar de emissão do laser, uma transição de fase é

caracterizada pela presença de espectros fortemente correlacionados, ou seja, neste regime existem correlações entre réplicas próximas e distantes. Nesta fase, a correlação entre réplicas oscila entre correlações positivas e anti correlações, exibindo um comportamento semelhante ao fenômeno de frustração em cadeias de spin. Uma característica conhecida como quebra de simetria da réplica. E como foi abordado sobre o RSB, que resumidamente, descreve como uma propriedade de um sistema com muitos graus de liberdade pode ser diverso em diferentes cópias do sistema. O parâmetro de sobreposição de Parisi é usado para quantificar essa quebra de simetria e descrever a estrutura das configurações de baixa energia em um sistema desordenado.

Durante o conteúdo do Cap.(1), na Seção(1.3), foi mostrado a solução estacionária da Eq.(1.60) com as Eqs.(1.62) e (1.63), que é dado pela Eq.(1.64), (SCHENZLE; BRAND, 1979; RAPOSO; GOMES, 2015), no qual, reescrevendo aqui e considerando termos quadráticos e quárticos (dos tensores), podemos resumir em,

$$P(I_n) = A_n I_n^{(-\mu_n)} \exp(-b_n I_n / 2Q), \quad (3.42)$$

com $I_n > 0$, A_n dado pela Eq.(1.65) e μ_n dado pela Eq.(1.66), apenas fazendo suas modificações considerando os valores dos termos já mencionados (GOMES et al., 2016).

A estatística da soma de N variáveis aleatórias independentes x com distribuição de lei de potência $P(x) = Ax^{-\mu}$, no qual $1 < \mu < 3$, é descrita pela distribuição de Lévy α -estável com $\alpha = \mu - 1$, para uma dada intensidade de desordem, temos também uma variação na taxa de bombeamento crescente (ou energia de pulso de excitação), não só isso, essas estatísticas de intensidades de emissão acabam mudando progressivamente, de um regime tipo Gaussiano (quando é $\mu_n \leq 1$, $\alpha = 2$), para um tipo Lévy (quando é $1 < \mu_n < 3$, $\alpha = \mu_n - 1$) e posteriormente para um regime Gaussiano (quando é $\mu_n \geq 3$, $\alpha = 2$). Ou mais ainda, também foi comentado no Cap.(2), Seção (2.2) os regimes aqui discutidos, caso seja de interesse se aprofundar, aconselho consultar o artigo (RAPOSO; GOMES, 2015) para mais esclarecimentos.

Pode ser feita uma correlação com RSB vítrea que tem como princípio as propostas (LEPRI et al., 2007; IGNESTI et al., 2013; UPPU; MUJUMDAR, 2014) que são atribuídas ao índice de Lévy que se identifica como um limite de RL, passando a ser determinado pelo parâmetro q_{max} . O que pode ser entendido é que os resultados mais recentes em sistemas RL evidenciam (GOMES et al., 2016):

- i) no regime Gaussiano de flutuação fraca *prelasing*¹ em baixas energias de bombeamento, o que corresponde a fase paramagnética fotônica (ou mesmo a onda de bloqueio de

¹ Prelasing é uma fase em que o sistema ainda não está emitindo luz laser.

fase) com $q_{max} = 0$ (ANGELANI et al., 2006b; ANGELANI et al., 2006a; LEUZZI et al., 2009; CONTI; LEUZZI, 2011), seguido por;

- ii) a mudança súbita em α no limiar do RL para o regime do tipo Lévy fortemente flutuante em energias de bombeamento intermediárias, o que também sinaliza da transição RSB para o regime vítreo com $q_{max} \neq 0$ (GHOFRANIHA et al., 2015; ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015b), e por fim;
- iii) um cruzamento consecutivo em altas energias de bombeamento para o chamado regime de auto-média RL, com $q_{max} \neq 0$ e estatísticas gaussianas das intensidades emitidas (IGNESTI et al., 2013; UPPU; MUJUMDAR, 2014; UPPU; MUJUMDAR, 2011; UPPU; TIWARI; MUJUMDAR, 2012; UPPU; MUJUMDAR, 2013; UPPU; MUJUMDAR, 2015).

Na próxima seção será abordado os dados experimentais, pois analisaremos alguns gráficos com este novo conceito sendo abordado aqui. No momento, é adequado dizer que as medições em sistemas RL reais do parâmetro q_{max} discutidas acima foi possível, cujo comportamento identifica o limite entre as fases paramagnética prelasing e RL vítro, além do índice de Lévy α definir as estatísticas das flutuações de intensidade como, ou sendo Gaussianas ou do tipo Lévy. Ambos os fenômenos decorrem do mesmo referencial teórico, o que facilita a empregar no mesmo conjunto de medidas, ou mais ainda, nas flutuações de intensidade espectral, que serve para obter ambas as grandezas por meio de uma análise adequada.

Podemos caracterizar na transição fotônica RSB vítreo uma nova abordagem para um parâmetro de sobreposição $q_{\gamma\beta}$ que é análogo ao parâmetro de sobreposição de Parisi na teoria de vidro de spin (MÉZARD; PARISI; VIRASORO, 1986). Sendo possível calcular as correlações de dois pontos, sendo esses dois pontos entre amplitudes de modo a_n (ANTENUCCI et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015a), de fases (ANGELANI et al., 2006b; ANGELANI et al., 2006a; LEUZZI et al., 2009; CONTI; LEUZZI, 2011) ou até mesmo de intensidades $I_n \propto |a_n|^2$ (GHOFRANIHA et al., 2015; ANTENUCCI; CRISANTI; LEUZZI, 2015b), entretando, os últimos sejam os únicos acessíveis experimentalmente. Em particular, medindo as flutuações na intensidade espectral média sobre N disparos (ou réplicas do sistema), o parâmetro de sobreposição tem a forma,

$$q_{\gamma\beta} = \frac{\sum_k \Delta_\gamma(k) \Delta_\beta(k)}{\sqrt{\sum_k \Delta_\gamma^2(k)} \sqrt{\sum_k \Delta_\beta^2(k)}}, \quad (3.43)$$

onde $\gamma, \beta = 1, 2, 3, \dots, N_s$ denota os rótulos de réplica, k é $\bar{I}(k) = \sum_{\gamma=1}^{N_s} I_\gamma(k) / N_s$ representando a intensidade média no comprimento de onda, e $\Delta_\gamma(k) = I_\gamma(k) - \bar{I}(k)$ é a flutuação da

intensidade (MÉZARD et al., 1984; GOMES et al., 2016). A PDF $P(q)$ é justamente o parâmetro de sobreposição de Parisi na teoria da RSB de vidros de spins, e retrata a distribuição de sobreposições de réplica $q = q_{\gamma\beta}$, ie indica se é uma fase paramagnética não correlacionada fotônica ou uma fase de vidro de spin se atingir o pico exclusivamente em $q = 0$ (sem RSB) ou também em valores $|q| \neq 0$, respectivamente. No capítulo seguinte, iremos ver a diferença entre a representação do parâmetro de sobreposição de Parisi e o coeficiente de Pearson. O valor $|q| = q_{max}$ no qual a distribuição $P(q)$ assume seu máximo está relacionado ao parâmetro de ordem de Edward-Anderson (BERG; BILLOIRE; JANKE, 2002) na teoria de vidro de spin. Para concluir essa seção, podemos resumir a equação de sobreposição de Parisi na seguinte fórmula,

$$P_{M=\lambda, N=\beta} = q_{\gamma\beta} = \frac{\sum_i \Delta_{\gamma i} \Delta_{\beta i}}{\sqrt{[\sum_i (\Delta_{\gamma i})^2][\sum_i (\Delta_{\beta i})^2]}}, \quad (3.44)$$

no qual foi atribuído os valores de $M = \lambda$ e $N = \beta$, além do índice de comprimento de onda ser $K = i$ (CORONEL et al., 2021). No próximo capítulo (Cap.(4)) apresentamos uma fórmula mais geral, que inclui também a correlação de Pearson.

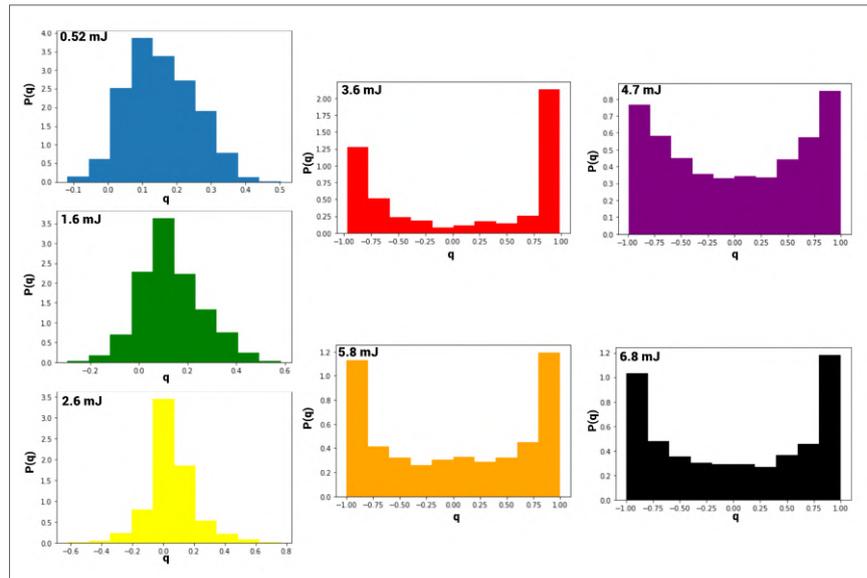
3.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Apresentaremos a seguir a análise estatística de resultados experimentais através de códigos que construímos utilizando a linguagem de programação Python, em conexão com o uso de bibliotecas normalmente conhecidas, como pandas, matplotlib, seaborn, numpy e scikit-learn. Para mais detalhes, veja o Apêndice.(B).

Trataremos um novo conjunto de dados obtidos a partir de um RL à base de Nd composto por íons Nd^{3+} em nanocristal em pó (Nd:YAG) para energias de pulso de excitação (CORONEL et al., 2022). O conjunto de dados consiste em seis tipos de pulsos de energia, sendo os valores: 0.52 mJ, 1.6 mJ, 2.6 mJ, 3.6 mJ, 4.7 mJ, 5.8 mJ e 6.8 mJ. Com isso, o interesse foi poder determinar em qual região estaria a intensidade máxima desses pulsos e logo após, construímos um gráfico da distribuição $P(q)$ através da Eq.(3.44) para cada um desses pulsos.

A Fig.(16) nos apresenta um histograma de $P(q)$ para cada conjunto de dados, sendo representados por cada um deles de uma cor específica, como: azul - 0.52 mJ, verde - 1.6 mJ, amarelo - 2.6 mJ, vermelho - 3.6 mJ, roxo - 4.7 mJ, laranja - 5.8 mJ e preto - 6.8 mJ. Os três primeiros valores (0.52 mJ, 1.6 mJ, 2.6 mJ) nos indicam que esses valores estão abaixo do limiar. O valor 3.6 mJ se encontra em torno do limiar. Enquanto os últimos três valores (4.7

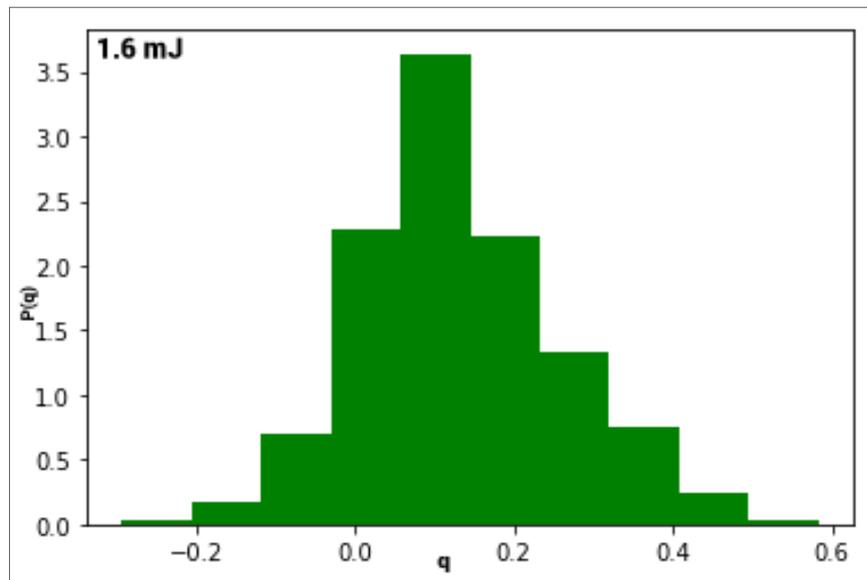
Figura 16 – A distribuição $P(q)$ dos valores dos parâmetros de sobreposição de Parisi.



Fonte: O autor (2022).

mJ, 5.8 mJ, 6.8 mJ) indicam que está acima do limiar. Esses resultados ficarão mais claros quando criarmos os mapas de calor, no próximo capítulo, na Seção 4.2, deste mesmo conjunto de dados.

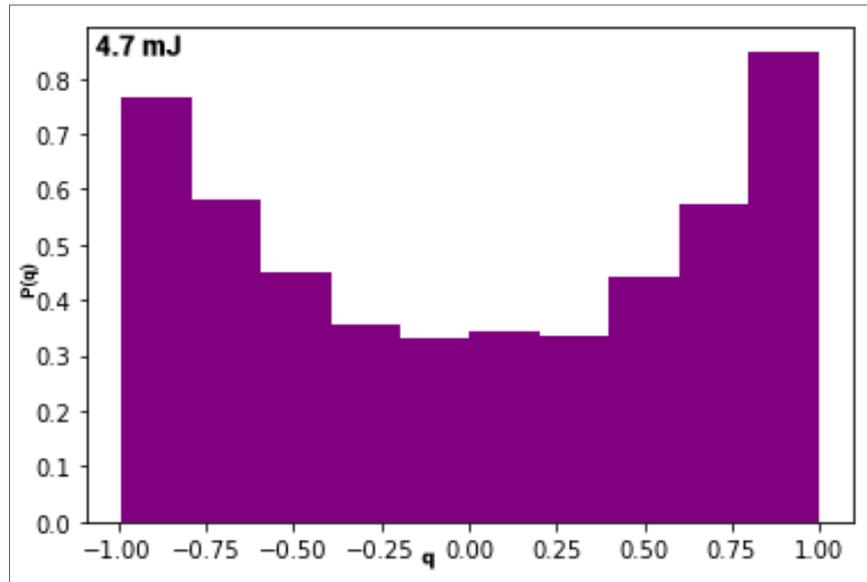
Figura 17 – A distribuição $P(q)$ para energia de pulso de excitação de valor 1.6 mJ.



Fonte: O autor (2022).

Analisando as Figs.(17) e (18), a primeira mencionada aqui podemos perceber que quando está abaixo do limiar, o seu comportamento tem a "aparência"de uma Gaussiana. Enquanto para a segunda distribuição apresentada, está acima do limiar, e sua aparência vai ficando

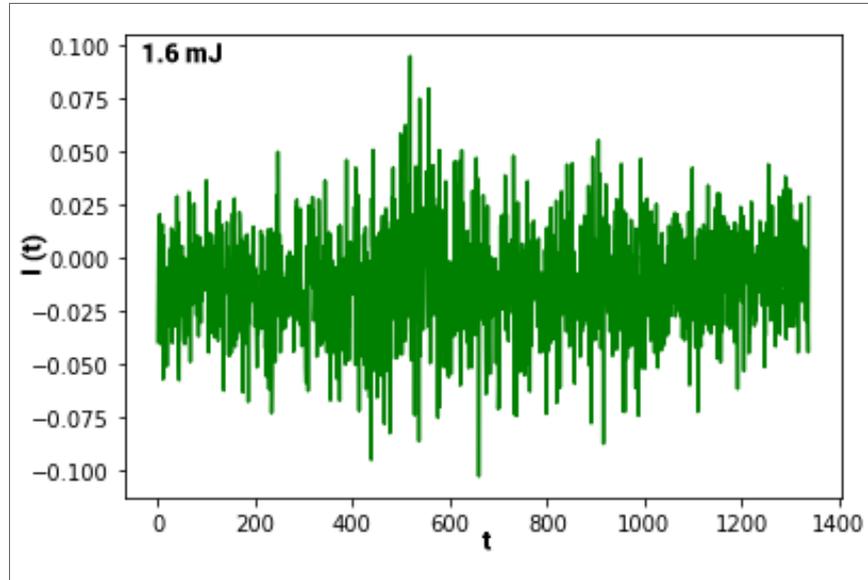
Figura 18 – A distribuição $P(q)$ para energia de pulso de excitação de valor 4.7 mJ.



Fonte: O autor (2022).

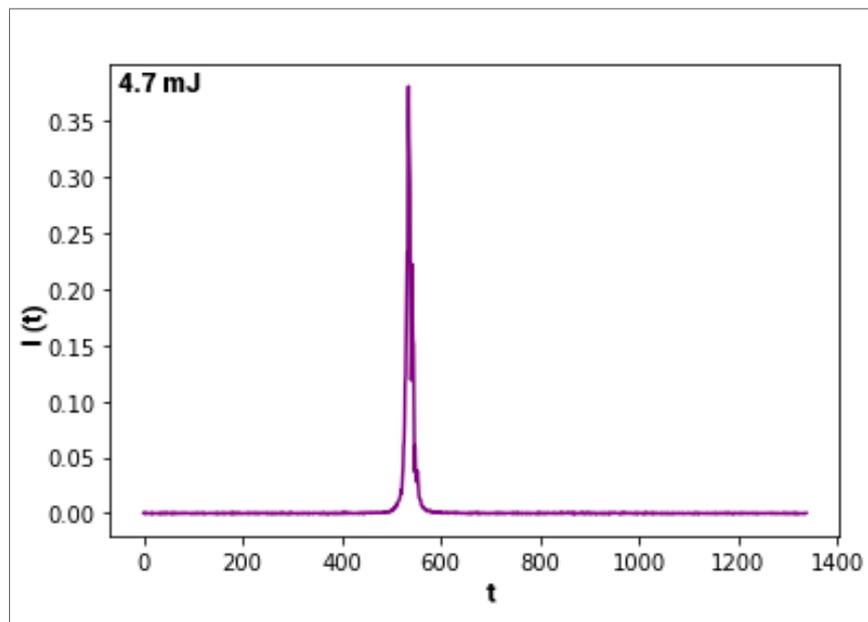
mais "achatada" no centro. Esses fatos decorrem justamente quando a fase fotônica replica-simétrica paramagnética ou uma RSB da fase vítrea, respectivamente, se apresentar um único perfil máximo com valores q distribuídos em torno de $q = 0$ (sem RSB) ou se um pico duplo $P(q)$ emerge (RSB), com a saturação ocorrendo quando os máximos $P(q)$ ocorrem nos valores extremos $q = \pm 1$. Um fato curioso é que ao analisar suas faixas de valores de intensidade máxima, a primeira tem um comportamento muito "desordenado", enquanto a segunda, o seu comportamento é o esperado e com isso podemos até a determinar a faixa no qual estão concentrados as intensidades máximas, como podemos ver nas Figs.(19) e (20), respectivamente.

Figura 19 – Intensidade máxima para energia de pulso de excitação de valor 1.6 mJ.



Fonte: O autor (2022).

Figura 20 – Intensidade máxima para energia de pulso de excitação de valor 4.7 mJ.



Fonte: O autor (2022).

4 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON: TEORIA E DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MAPA DE CALOR

4.1 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON

Em lasers aleatórios, os coeficientes de correlação de Pearson podem ser usados para quantificar a correlação entre as flutuações de intensidades em réplicas distintas (via o parâmetro de Parisi), ou para medir a correlação entre comprimentos de onda distintos na mesma réplica, como descrito a seguir.

A distribuição de intensidades ópticas em diferentes modos pode ser retratada por uma distribuição de probabilidade complexa. A correlação entre as intensidades ópticas pode ser afetada por vários fatores, como as propriedades ópticas do meio ativo e o espalhamento da luz pelo meio desordenado. Esses coeficientes podem ser calculados usando as intensidades ópticas medidas em diferentes modos (MERRILL; HUI; DUFRESNE, 2016).

Descreveremos a seguir a definição de um coeficiente de correlação de Pearson modificado para englobar ambas as correlação de Parisi entre réplicas e as correlações entre comprimentos de onda distintos na mesma réplica. Relembrando que desde o capítulo anterior, estamos denotando $I_{\gamma i}$ como sendo a intensidade emitida pelo RL Nd:YAG de comprimento de onda λ_i no espectro γ . Além de definir I_i como a intensidade do comprimento de onda γ_i em média sobre o espectro $\overline{\Delta_{\gamma i}}$ sendo a diferença relativa (flutuação) com respeito a esta média, ou sendo, $\overline{\Delta_{\gamma i}} = \Delta_{\gamma i} / \sqrt{\sum_K (\Delta_{\gamma i})^2}$ (MÉZARD et al., 1984), onde $\Delta_{\gamma i}$, da mesma forma que já foi apresentado. Nossa notação segue a mesma do artigo (CORONEL et al., 2022), com isso, esclarecendo como essas notações estão representadas, as letras latinas maiúsculas representam os espectros (por exemplo, $K = \gamma$) ou comprimentos de onda (como exemplo, $K = i$). Com estas definições, podemos agora escrever o coeficiente de Pearson modificado, dado por,

$$P_{MN} = \overline{\Delta_{MK}} \overline{\Delta_{NK}}, \quad (4.1)$$

onde, como mais uma vez, usamos a convenção do somatório de Einstein sobre índices repetidos. A normalização de $\Delta_{\gamma i}$ pelo fator $\sqrt{\sum_K (\Delta_{\gamma i})^2}$ leva P_{MN} a ter seu domínio restringido, por isso $P_{MN} \in [-1, 1]$.

Este coeficiente de Pearson modificado carrega consigo duas fortes equações, uma delas já abordada e retornamos a comentar, que são os parâmetros de sobreposição de Parisi $q_{\gamma\beta}$, dado pela Eq.(3.44), que como comentado, caracteriza as fase vítrea fotônicas com RSB, e a

outra é a correlação de Pearson C_{ij} entre as flutuações de intensidade.

Discutido o essencial sobre os parâmetros de sobreposição de Parisi anteriormente, trataremos do outro, e para isso, na Eq.(4.1) indexamos os comprimentos de onda $M = i$ e $N = j$ e o índice do espectro é $K = \gamma$, escrevemos o coeficiente de correlação padrão de Pearson (MONTINARO et al., 2018; LEONETTI; CONTI; LOPEZ, 2011) entre as flutuações de intensidade nos comprimentos de onda λ_i e λ_j , logo,

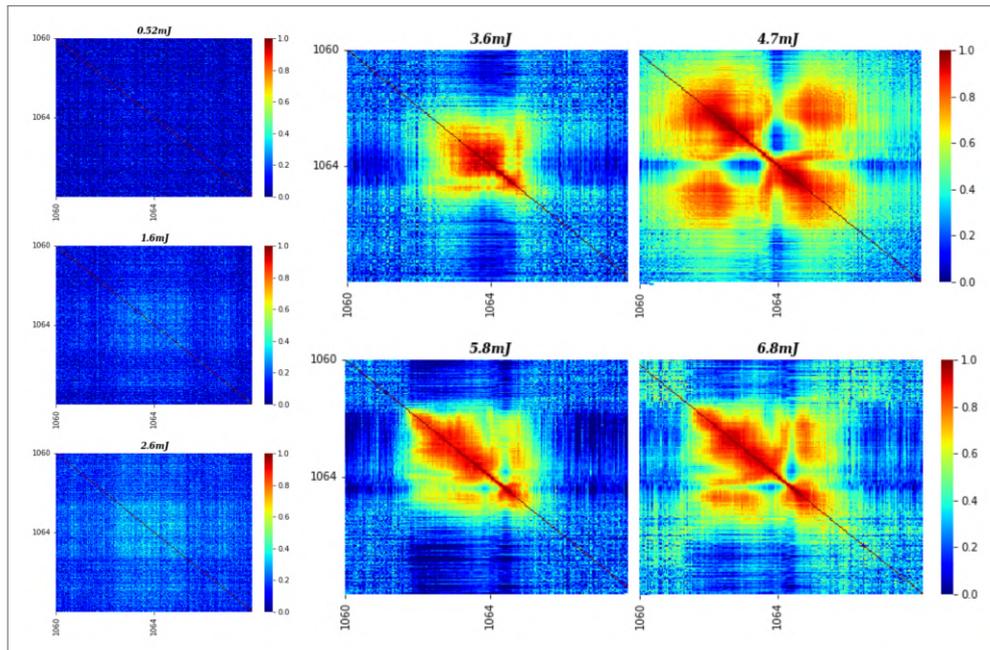
$$P_{M=i,N=j} = C_{ij} = \frac{\sum_{\gamma} \Delta_{\gamma i} \Delta_{\gamma j}}{\sqrt{[\sum_{\gamma} (\Delta_{\gamma i})^2][\sum_{\gamma} (\Delta_{\gamma j})^2]}}, \quad (4.2)$$

Com uma análise minuciosa, o principal ponto de diferença da Eq.(4.2) em relação a Eq.(3.44) é o somatório sobre todos os comprimentos de onda, uma vez que no coeficiente de Pearson C_{ij} as somas são sobre os espectros γ emitidos em diferentes tempos. O que implica é que, a Eq.(4.2) está considerando a evolução dinâmica da correlação entre flutuações de intensidade. Por exemplo, quando dois modos estão presentes no sistema com comprimentos de onda λ_i e λ_j , um valor nulo de C_{ij} implica que esses modos estão se comportando estatisticamente de maneira não correlacionada no decorrer do intervalo de tempo da série espectral. Entretanto, se tivermos um C_{ij} seja positivo, ou negativo, isso implica que as flutuações na intensidade do modo λ_i são positivamente (ou negativamente) correlacionadas com as do modo λ_j , de maneira que os modos acoplados espacialmente sobrepostos compartilham (ou competem por) ganho ao longo da série de medição de tempo (CORONEL et al., 2022), e por isso também que leva o nome de coeficiente de correlação.

4.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os gráficos que se seguem ainda são dos conjunto de dados obtidos de RLs baseados em Nd^{3+} para energias de pulso de excitação, os mesmos apresentados no Cap.(3), Seção (3.3). Porém, externando novamente, o conjunto de dados consiste em seis tipos de pulsos de energia, sendo os valores: 0.52 mJ, 1.6 mJ, 2.6 mJ, 3.6 mJ, 4.7 mJ, 5.8 mJ e 6.8 mJ (CORONEL et al., 2022). E o interesse foi poder determinar os comprimentos de onda, e que, com o auxílio da Eq.(4.2), criarmos os gráficos fazendo uso do conceito de "mapa de calor"(a partir de agora iremos retirar as aspas, a ideia de escrever com aspas é para dizer que quando tratamos mapas de calor, na linguagem Python principalmente, queremos entender quais pontos possuem maior atividade, enquanto nossa situação é entendida como os comprimentos de onda estão se relacionando no tempo com uma faixa de valores bem específicas).

Figura 21 – Mapas de calor dos coeficientes de correlação de Pearson, *comprimento de onda (nm) × comprimento de onda (nm)* .

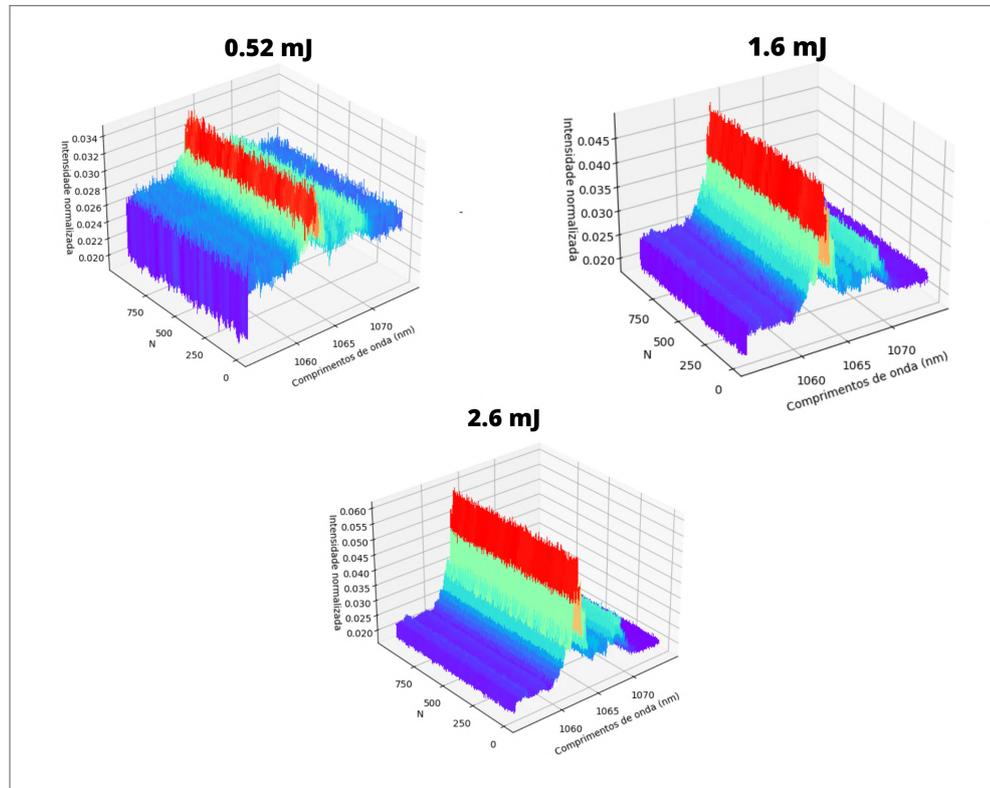


Fonte: O autor (2022).

A Fig.(21) nos apresenta os mapas de calor para cada conjunto de dados, no qual, lendo da esquerda para a direita, os três gráficos da primeira coluna se referem aos que estão abaixo do limiar, que são os valores: 0.52 mJ, 1.6 mJ e 2.6 mJ. O valor 3.6 mJ se encontra em torno do limiar, que é o primeiro da segunda coluna. Enquanto os últimos três valores: 4.7 mJ, 5.8 mJ, 6.8 mJ, ou seja, os demais mapas indica que está acima do limiar. Um detalhe a se observar é no mapa de calor de valor 4.7 mJ, que é o primeiro que está acima do limiar e suas flutuações na intensidade são bastante correlacionadas.

Nas Fig.(22) e (23), representamos os perfis de 1000 espectros registrados, contudo, para a primeira figura, são os perfis que estão abaixo do limiar (0.52 mJ, 1.6 mJ e 2.6 mJ), enquanto a segunda figura, temos os demais casos já mencionados (3.6 mJ para o que se encontra em torno do limiar, e 4.7 mJ, 5.8 mJ, 6.8 mJ acima do limiar). À medida que a potência de excitação aumenta ainda mais, as flutuações de intensidade diminuem (Fig.23, os gráficos dos três últimos valores, que são os valores 4.7 mJ, 5.8 mJ, 6.8) no regime RSB acima do limiar demonstrando um $P(q)$ bimodal (Fig.16, cor roxo, laranja e preto), com correlações ainda mais fortes entre modos (Fig.21, também os gráficos dos três últimos valores, mesmos valores já mencionados) que compartilham o ganho de forma cada vez mais homogênea. Esta fase é denominada um regime de ganho auto média, com distribuição gaussiana das intensidades emitidas. Isso contrasta com as estatísticas de intensidade do tipo Lévy observadas perto

Figura 22 – 1000 perfis de espectros abaixo do limiar.

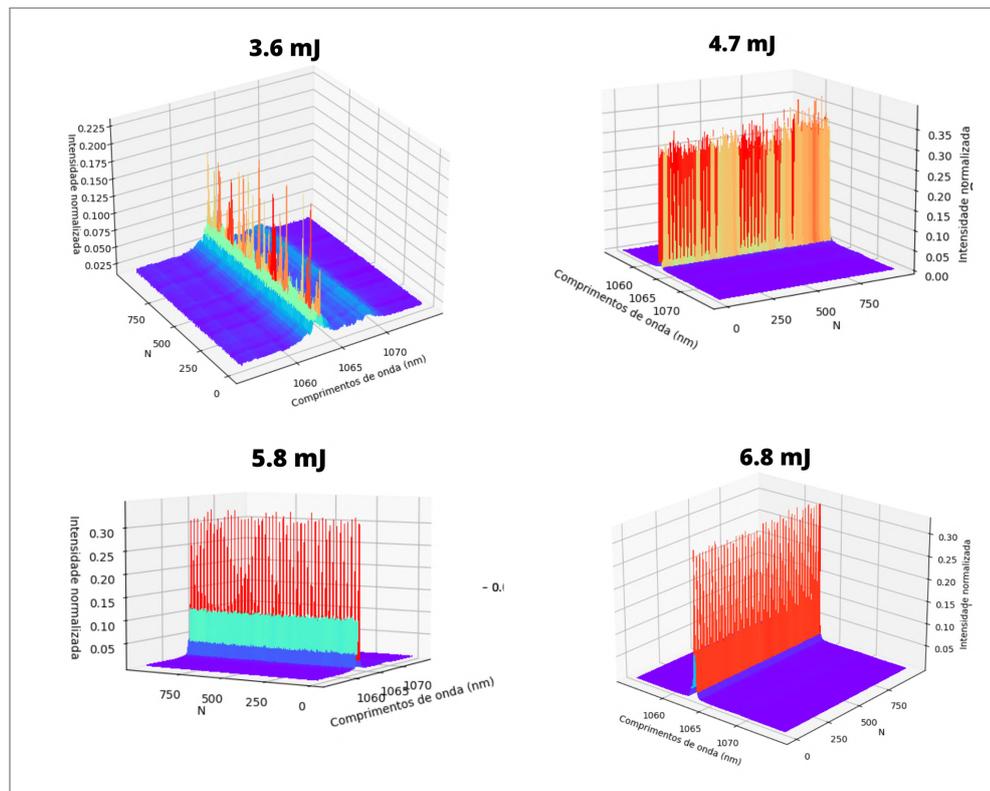


Fonte: O autor (2022).

do limiar e o primeiro regime gaussiano prelasing abaixo do limite (UPPU; MUJUMDAR, 2014; RAPOSO; GOMES, 2015).

E como os modos se sobrepõem espacialmente e estocasticamente competindo por ganho, notamos na Fig.21 (toda a figura) que essa competição pode favorecer alguns subconjuntos de modos, exibindo valores de correlação cruzada de Pearson mais fortes, enquanto prejudica outros com correlação mais baixa (regiões de mapa de calor menos intensas) (CORONEL et al., 2022). Por fim, concluindo as nossas análises.

Figura 23 – 1000 perfis de espectros em torno e acima do limiar.



Fonte: O autor (2022).

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, abordamos os sistemas fotônicos de lasers aleatórios (ou random lasers - RLs) através de técnicas de física estatística, com o objetivo de estudar fenômenos como, por exemplo, a quebra de simetria de réplicas, a estatística de Lévy de intensidades emitidas e as correlações entre modos. No Cap.(1), apresentamos as motivações do problema e apontamos para o fato de que os RLs têm despertado um interesse crescente na comunidade científica, uma vez que já podem, inclusive, ser utilizados em uma variedade de aplicações, desde a comunicação óptica até a detecção remota. Do ponto de vista teórico, as equações de Langevin e Fokker-Planck são importantes para descrever o comportamento estocástico de sistemas físicos complexos, incluindo RLs. Essas equações descrevem a evolução temporal das distribuições de probabilidade dos estados desses sistemas, e são fundamentais para entender uma variedade de fenômenos físicos, desde a dinâmica molecular até os processos estocásticos em sistemas complexos como redes neurais.

No Cap.(2) foi realizado um estudo comparativo de duas classes de modelos para as distribuições de intensidades emitidas em RLs. Comparando as previsões teóricas com resultados experimentais, observamos que os modelos baseados em RPS não fornecem bons ajustes de dados. De fato, um bom ajuste foi obtido com o modelo diferencial estocástico para as amplitudes dos modos, que pode levar em conta as não linearidades ópticas em graus superiores, introduzindo, assim, uma nova família de distribuições Izrailev generalizadas. O método utilizado para ajuste dos dados experimentais com os resultados teóricos foi implementado em um código escrito em linguagem python, disponibilizado no Apêndice (B) dessa dissertação.

No Cap.(3) e (4), analisamos as correlações das flutuações de intensidade, fazendo a introdução de um coeficiente de Pearson modificado que compreende simultaneamente o parâmetro de sobreposição de Parisi, utilizado para caracterizar as propriedades estatísticas de RLs. Tais medidas de correlação permitiram inferir a presença de quebra de simetria de réplicas (replica symmetry breaking - RSB) na fase fotônica vítrea do RL, em conjunto com o aumento na correlação entre modos na mesma réplica, medido pelo coeficiente de correlação de Pearson. O código para tais análise também encontra-se no Apêndice (B) mencionado.

Como uma das perspectivas futuras, citamos o estudo da turbulência em RLs e sua relação com a fase vítrea com RSB. Estes problemas estão entre os mais elusivos da física. O comportamento do tipo turbulência fotônica foi recentemente relatado em um laser de fibra

aleatória (CORONEL et al., 2022; GONZÁLEZ et al., 2017; GONZÁLEZ et al., 2018) e no livro (BOHR et al., 1998). Pretendemos, assim, expandir os nossos códigos para permitir o estudo da fase turbulenta via a análise das flutuações de intensidade entre réplicas consecutivas do RL.

Concluimos mencionando que todos os gráficos apresentados neste trabalho foram feitos usando a linguagem Python e o código está disponível no Apêndice (B).

REFERÊNCIAS

- ABEGÃO, L. M. G.; PAGANI, A. A. C.; ZÍLIO, S. C.; ALENCAR, M. A. R. C.; RODRIGUES, J. J. Measuring milk fat content by random laser emission. *Scientific Reports*, v. 6, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep35119>>.
- ACADEMY, K. *Modelo de Bohr do hidrogênio*. 2018. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/science/physics/quantum-physics/atoms-and-electrons/a/bohrs-model-of-hydrogen>>. Acesso em: 22 fev. 2023.
- ANGELANI, L.; CONTI, C.; RUOCCO, G.; ZAMPONI, F. Glassy behavior of light. *Physical Review Letters*, v. 96, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.065702>>.
- ANGELANI, L.; CONTI, C.; RUOCCO, G.; ZAMPONI, F. Glassy behavior of light in random lasers. *Physical Review B*, v. 74, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.104207>>.
- ANTENUCCI, F.; CONTI, C.; CRISANTI, A.; LEUZZI, L. General phase diagram of multimodal ordered and disordered lasers in closed and open cavities. *Physical Review Letters*, v. 114, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.043901>>.
- ANTENUCCI, F.; CRISANTI, A.; IBÁÑEZ-BERGANZA, M.; MARRUZZO, A.; LEUZZI, L. Statistical mechanics models for multimode lasers and random lasers. *Philosophical Magazine*, v. 96, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786435.2016.1145359>>.
- ANTENUCCI, F.; CRISANTI, A.; LEUZZI, L. Complex spherical 2+4 spin glass: A model for nonlinear optics in random media. *Physical Review A*, v. 91, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053816>>.
- ANTENUCCI, F.; CRISANTI, A.; LEUZZI, L. The glassy random laser: replica symmetry breaking in the intensity fluctuations of emission spectra. *Scientific Reports*, v. 5, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep16792>>.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods For Physicists*. [S.l.]: Elsevier Academic, 2005. v. 6.
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. *Elementos de Física Matemática*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2010. v. 1.
- BERG, B. A.; BILLOIRE, A.; JANKE, W. Functional form of the parisi overlap distribution for the three-dimensional edwards-anderson ising spin glass. *Physical Review E*, v. 65, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.045102>>.
- BOHR, T.; JENSEN, M. H.; PALADIN, G.; VULPIANI, A. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge University Press, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511599972>>.
- BONI, K. T. *História da Física*. Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018. Disponível em: <http://cm-cls-content.s3.amazonaws.com/201802/INTERATIVAS_2_0/HISTORIA_DA_FISICA/U1/LIVRO_UNICO.pdf>.

BRAGA, C. L. R. *Notas de Física-Matemática*. Livraria da Física, 2006. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5270146/mod_resource/content/1/Notas%20de%20F%C3%ADsica%20Matem%C3%A1tica%20-%20C%20L%20R%20Braga.pdf>.

CAO, H. Review on latest developments in random lasers with coherent feedback. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 38, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/49/004>>.

CARREÑO, S. J. M.; MOURA, A. L.; PINCHEIRA, P. I. R.; FABRIS, Z. V.; MAIA, L. J. Q.; GOMES, A. S. L.; ARAÚJO, C. B. Interplay between random laser performance and self-frequency conversions in $\text{Nd}_{x_1}\text{Y}_{1.00x_2}\text{Al}_3(\text{BO}_3)_4$ nanocrystals powders. *Optical Materials*, v. 54, 2016.

CHURKIN, D.; EL-TAHER, A. E.; VATNIK, I. D.; ANIA-CASTAÑÓN, J. D.; HARPER, P.; PODIVILOV, E. V.; BABIN, S. A.; TURITSYN, S. K. Experimental and theoretical study of longitudinal power distribution in a random dfb fiber laser. *Optics Express*, v. 10, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/OE.20.011178>>.

CONTI, C.; FRATALOCCHI, A. Dynamic light diffusion, three-dimensional anderson localization and lasing in inverted opals. *Nature Physics*, v. 7, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys1035>>.

CONTI, C.; LEUZZI, L. Complexity of waves in nonlinear disordered media. *Physical Review B*, v. 83, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.134204>>.

CORONEL, E. D.; DAS, A.; GONZÁLEZ, I. R. R.; GOMES, A. S. L.; MARGULIS, W.; WEID, J. P. V. D.; RAPOSO, E. P. Evaluation of pearson correlation coefficient and paris parameter of replica symmetry breaking in a hybrid electronically addressable random fiber laser. *Optics Express*, v. 29, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/OE.431981>>.

CORONEL, E. D.; SILVA-NETO, M. L. da; MOURA, A. L.; GONZÁLEZ, I. R. R.; PUGINA, R. S.; HILÁRIO, E. G.; ROCHA, E. G. da; CAIUT, J. M. A.; GOMES, A. S. L.; RAPOSO, E. P. Simultaneous evaluation of intermittency effects, replica symmetry breaking and modes dynamics correlations in a $\text{Nd}:\text{YAG}$ random laser. *Scientific Reports*, v. 12, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41598-022-05090-5>>.

CRISANTI, A.; SOMMERS, H. J. The spherical p-spin interaction spin glass model: the statics. *Physik B - Condensed Matter*, v. 87, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01309287>>.

CUGLIANDOLO, L. F.; GREMPEL, D. R.; LOZANO, G.; LOZZA, H.; SANTOS, C. A. da S. Dissipative effects on quantum glassy systems. *Physical Review B*, v. 66, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.014444>>.

DIAZ, E. *LASER - histórico e aplicações*. 2016. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/13211191-Laser-historico-e-aplicacoes.html>>. Acesso em: 07 jan. 2023.

EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. [S.l.]: Editora Campus Elsevier, 1983. v. 1.

FARIAS, A.; SOARES, J.; CÉSAR, C. *Introdução à Estatística*. [S.l.]: LTC, 2003.

GARDINER, C.; ZOLLER, P. *Quantum Noise*. Springer Berlin, 2004. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/9783540223016>>.

- GHOFRANIHA, N.; VIOLA, I.; MARIA, F. D.; BARBARELLA, G.; GIGLI, G.; LEUZZI, L.; CONTI, C. Experimental evidence of replica symmetry breaking in random lasers. *Nature Communications*, v. 6, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms7058>>.
- GOMES, A. S. L.; RAPOSO, E. P.; MOURA, A. L.; FEWO, S. I.; PINCHEIRA, P. I. R.; JEREZ, V.; MAIA, L. J. Q.; ARAÚJO, C. B. de. Observation of lévy distribution and replica symmetry breaking in random lasers from a single set of measurements. *Scientific Reports*, v. 6, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep27987>>.
- GONZÁLEZ, I. R. R.; LIMA, B. C.; PINCHEIRA, P. I. R.; BRUM, A. A.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L.; MENEZES, L. S.; RAPOSO, E. C. P.; GOMES, A. S. L.; KASHYAP, R. Turbulence hierarchy in a random fibre laser. *Nature Communications*, v. 8, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms15731>>.
- GONZÁLEZ, I. R. R.; PINCHEIRA, P. I. R.; MACÊDO, A. M. S.; MENEZES, L. d. S.; GOMES, A. S. L.; RAPOSO, E. C. P. Intensity distribution in random lasers: comparison between a stochastic differential model of interacting modes and random phase sum-based models. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 38, n. 8, p. 2391–2398, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/JOSAB.433317>>.
- GONZÁLEZ, I. R. R.; RAPOSO, E. C. P.; MACÊDO, A. M. S.; MENEZES, L. S.; GOMES, A. S. L. Coexistence of turbulence-like and glassy behavior in a photonic system. *Scientific Reports*, v. 8, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41598-018-35434-z>>.
- GORDON, A.; FISHER, B. Phase transition theory of pulse formation in passively mode-locked lasers with dispersion and kerr nonlinearity. *Optics Communications*, v. 223, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(03\)01622-5](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(03)01622-5)>.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010.
- HACKENBROICH, G. Statistical theory of multimode random lasers. *Journals of Physics A*, v. 38, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/49/005>>.
- HACKENBROICH, G.; VIVIESCAS, C.; HAAKE, F. Field quantization for chaotic resonators with overlapping modes. *Physical Review Letters*, v. 89, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.083902>>.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física - Óptica e Física Moderna*. [S.l.]: LTC, 2016. v. 4.
- IGNESTI, E.; TOMMASI, F.; FINI, L.; LEPRI, S.; RADHALAKSHMI, V.; WIERSMA, D.; CAVALIERI, S. Experimental and theoretical investigation of statistical regimes in random laser emission. *Physical Review A*, v. 88, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.033820>>.
- JAYNES, E.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *IEEE Xplore*, v. 51, 1963. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>>.
- JUNIOR, F. W. S. S. *Caracterização de laser aleatório em fibras poliméricas produzidas pela técnica de eletrofiação*. 2019. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/12672/2/FRANCISCO_WELDEM_S_\%20SOUSA_JUNIOR.pdf>.

- KLAFTER, J.; SHLESINGER, M. F.; ZUMOFEN, G. Fractal generalizations of brownian motion have proven to be a rich field in probability theory, statistical physics and chaotic dynamics. *Physical Today*, v. 49, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.881487>>.
- LAWANDY, N. M.; BALACHANDRAN, R. M.; GOMES, A. S. L.; SAUVAIN, E. Laser action in strongly scattering media. *Nature*, v. 368, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/368436a0>>.
- LEMONS, D. S.; GYTHIEL, A. On the theory of brownian motion" ["sur la théorie du mouvement brownien"]. *American Journal of Physics*, v. 65, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.18725>>.
- LEONETTI, M.; CONTI, C. Haus/gross-pitaevskii equation for random lasers. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 27, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/JOSAB.27.001446>>.
- LEONETTI, M.; CONTI, C.; LOPEZ, C. The mode-locking transition of random lasers. *Nature Photonics*, v. 5, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.217>>.
- LEPRI, S.; CAVALIERI, S.; OPPO, G.-L.; WIERSMA, D. S. Statistical regimes of random laser fluctuations. *Physical Review A*, v. 75, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.063820>>.
- LETOKHOV, V. S. Stimulated emission of an ensemble of scattering particles with negative absorption. 1967. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1967ZhPmR...5.262L/abstract>>.
- LEUZZI, L.; CONTI, C.; FOLLI, V.; ANGELANI, L.; RUOCCO, G. Phase diagram and complexity of mode-locked lasers: From order to disorder. *Physical Review Letters*, v. 102, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.083901>>.
- LIMA, K. A. P. de. *Vidro de spin Ising no limiar da percolação: comportamento dinâmico e histerese*. 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/6711/1/arquivo7771_1.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2023.
- LONDRINA, U. E. de. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*. 2018. Disponível em: <<http://www.uel.br/projetos/experimental/pages/arquivos/Kolmogorov-Smirnov.html>>. Acesso em: 27 maio 2023.
- MACHADO, K. D. *Eletromagnetismo*. [S.l.]: Toda Palavra, 2012. v. 2.
- MARKUSHEV, V. M.; ZOLIN, V. F.; BRISKINA, C. M. Luminescence and stimulated emission of neodymium in sodium lanthanum molybdate powders. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, v. 16, 1986. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1070/QE1986v016n02ABEH005792>>.
- MENEZES, N. N. C. *Introdução à Programação com Python*. [S.l.]: Novatec, 2019.
- MERRILL, J. S.; HUI, C.; DUFRESNE, E. R. Dissipative effects on quantum glassy systems. *Physical Review A*, v. 93, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.021801>>.

MONTINARO, M.; RESTA, V.; CAMPOSEO, A.; MOFFA, M.; MORELLO, G.; PERSANO, L.; KAZLAUSKAS, K.; JURSENAS, S.; TOMKEVICIENE, A.; GRAZULEVICIUS, J. V.; PISIGNANO, D. Diverse regimes of mode intensity correlation in nanofiber random lasers through nanoparticle doping. *ACS Photonics*, v. 5, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.7b01329>>.

MORAES, R. de O. *Tabela com valores críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov*. 2019. Disponível em: <<https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2637981&forceview=1>>. Acesso em: 27 maio 2023.

MOURA, A. L.; CARREÑO, S. J. M.; PINCHEIRA, P. I. R.; MAIA, L. J. Q.; JEREZ, V.; RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L.; ARAÚJO, C. B. Nonlinear effects and photonic phase transitions in nd^{3+} -doped nanocrystal-based random lasers. *Appl. Opt.*, v. 59, 2020. Disponível em : <>.

MÉZARD, M.; PARISI, G.; SOURLAS, N.; TOULOUSE, G.; VIRASORO, M. Replica symmetry breaking and the nature of the spin glass phase. *Journal de Physique*, v. 45, 1984. Disponível em: <<https://hal.science/jpa-00209816/document>>.

MÉZARD, M.; PARISI, G.; VIRASORO, M. *Spin Glass Theory and Beyond*. World Scientific, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/0271>>.

NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. v. 2.

NETO, M. F. S.; GONZÁLEZ, I. R. R.; RAPOSO, E. C. P. *Statistical analysis of emitted intensities from random lasers: probability distribution, Parisi overlap function, and Pearson correlation coefficient*. 2022. Disponível em: <https://github.com/Ell-neto/Statisc_Analy_RL>. Acesso em: 26 mar. 2023.

O'BRYAN, I. C. L.; SARGENT, I. M. Theory of multimode laser operation. *Physical Review A*, v. 8, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.8.3071>>.

PARISI, G. Infinite number of order parameters for spin-glasses. *Physical Review Letters*, v. 43, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.1754>>.

PARISI, G. A sequence of approximated solutions to the s-k model for spin glasses. *Journals of Physics A*, v. 13, 1980. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/4/009>>.

POLSON, R. C.; VARDENY, Z. V. Cancerous tissue mapping from random lasing emission spectra. *Journal of Optics*, v. 12, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/2040-8978/12/2/024010>>.

-
- RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L. Analytical solution for the lévy-like steady-state distribution of intensities in random lasers. *Physical Review A*, v. 91, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043827>>.
- REVILLA, S. G.; ZAYAT, M.; BALDA, R.; OTHOUM, M. A.; LEVY, D.; FERNÁNDEZ, J. 1 low threshold random lasing in dye-doped silica nano powders. *Optics Express*, v. 17, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/OE.17.013202>>.
- RIBEIRO, E. M. S. *Teste Kolmogorov-Smirnov*. 2019. Disponível em: <<https://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=17684>>. Acesso em: 27 maio 2023.
- RISKEN, H.; FRANK, T. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications (Springer Series in Synergetics, 18)*. [S.l.]: Springer, 1996.
- ROCHA, E. C. *Estrutura analítica complexa das distribuições estáveis de Lévy*. Tese (Doutorado), 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/31016>>. Acesso em: 27 dez. 2022.
- ROGÉRIO, S. M. *Introdução à História da Matemática*. CAED-UFGM, 2013. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.
- SANTOS, E. P. *Observações estatísticas e experimentais das flutuações de intensidade de lasers*. 2021.
- SANTOS, M. C. *Busca Markoviana super difusa*. 2009. Disponível em: <<http://educapes.capes.gov.br/handle/1884/19068>>.
- SCHENZLE, A.; BRAND, H. Multiplicative stochastic processes in statistical physics. *Physical Review A*, v. 20, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.1628>>.
- SHIMAKUR. *Teorema Central do Limite*. 2016. Disponível em: <<http://www.leg.ufpr.br/~silvia/CE001/node38.html>>. Acesso em: 26 dez. 2022.
- SILVEIRA, F. L. d. S. *Teorema Central do Limite: exemplificações utilizando o Método de Monte Carlo*. 2018. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~lang/Textos/Teorema_Central_Limite.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2022.

SKIPETROV, S. E.; OSTROVSKY, P. M. Probability theory of lasing in a random laser. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 93, 2011.

SOARES, A.; LARA, R. A.; DIETERICH, S. H. *Equação de Fokker-Planck*. 2022. Disponível em: <https://fiscomp.if.ufrgs.br/index.php/Equa%C3%A7%C3%A3o_de_Fokker-Planck#Dedu.C3.A7.C3.A3o_da_equa.C3.A7.C3.A3o_de_Fokker-Planck>. Acesso em: 16 fev. 2023.

TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*. Edusp, 2014. Disponível em: <http://fge.if.usp.br/~ttome/cursos/dinamicaestocastica/de_aula5.pdf>.

UPPU, R.; MUJUMDAR, S. On the coherent modes of ultranarrowband random lasers with nonresonant feedback. *Applied Optics*, v. 50, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/AO.50.000E13>>.

UPPU, R.; MUJUMDAR, S. Dependence of the gaussian-lévy transition on the disorder strength in random lasers. *Physical Review A*, v. 87, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.013822>>.

UPPU, R.; MUJUMDAR, S. Lévy exponents as universal identifiers of threshold and criticality in random lasers. *Physical Review A*, v. 90, p. 025801–1,025801–5, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.025801>>.

UPPU, R.; MUJUMDAR, S. Exponentially tempered lévy sums in random lasers. *Physical Review Letters*, v. 114, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.183903>>.

UPPU, R.; TIWARI, A. K.; MUJUMDAR, S. Identification of statistical regimes and crossovers in coherent random laser emission. *Optics Letters*, v. 37, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/OL.37.000662>>.

VICTOR, J. *A equação de Fokker e Planck para o movimento browniano*. 2019. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/55977781/equacao-de-fokker-planck-para-o-movimento-browniano>>. Acesso em: 16 fev. 2023.

VIVIESCAS, C.; HACKENBROICH, G. Field quantization for open optical cavities. *Physical Review A*, v. 67, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.013805>>.

WEISS, G. H. *Aspects and applications of the random walk*. [S.l.]: North Holland, 1994.

WIERSMA, D. S. The physics and applications of random lasers. *Nature Physics*, v. 4, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys971>>.

WIERSMA, D. S.; CAVALIERI, S. A temperature-tunable random laser. *Nature*, v. 414, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/414708a>>.

WIKIPÉDIA. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teste_Kolmogorov-Smirnov>. Acesso em: 27 maio 2023.

WIKIR. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*. 2021. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/wiki-r/index.php?title=Teste_de_kolmogorov-Smirnov>. Acesso em: 27 maio 2023.

APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS

A.1 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Como na maioria das situações físicas, as funções encontradas são não nulas em pequenos intervalos de tempo, como por exemplo, nas colisões onde forças muito intensas agem em pequenos intervalos de tempo, iniciaremos esta parte com o estudo da função generalizada - delta de Dirac.

Essa função generalizada (BASSALO; CATTANI, 2010) foi apresentada pela primeira vez na Física por Dirac em seu livro - "The Principles of Quantum Mechanics", publicado pela Universidade de Oxford, em 1930. O fundamento matemático foi feito por Laurent Schwartz, o estudo das Distribuições, quer analítico, quer algébrico, é excelentemente feito por Jean-Paul Marchand.

A "função"delta de Dirac (no estudo de Análise de Sistemas, ela se denomina - Função Impulso), pode ser definida de várias maneiras. Consideremos a seguinte função,

$$\delta_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{se } |t| < a. \\ 0, & \text{se } |t| > a. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Seja ainda a função,

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t). \quad (\text{A.2})$$

Agora tomemos uma função (tensorial ou espinorial) $\phi(t)$, chamada função teste, contínua e identicamente nula, fora de algum intervalo finito. A Função Generalizada (Distribuição - segundo Schwartz, Função Imprópria - segundo Dirac) - $\delta(t)$ é definida pela seguinte relação,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) \quad (\text{A.3})$$

que não tem significado como uma integral ordinária. A "Função"delta de Dirac nunca será tomada isolada, apenas envolvendo integrais.

A.1.1 Propriedades da "função" $\delta(t)$

I. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t+t_0) \right]_{t=0} = \phi(t_0);$

II. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t);$

III. $\delta(-t) = \delta(t)$;

IV. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, com $f(t)$ contínua em $t = 0$;

V. $t\delta(t) = 0$;

VI. $\delta[\chi(t)] = \sum_i \frac{\delta t - t_i}{|\chi'(t_i)|}$;

VII. Derivada da função: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t)dt = -\phi'(0)$ (ARFKEN; WEBER, 2005).

A.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

Existe uma técnica operacional que permite representar as funções não periódicas por meio de séries de Fourier. Essa representação, chamada de *representação em frequência* da função dada, é muito útil em situações físicas, principalmente no estudo da Análise Espectral (BASSALO; CATTANI, 2010).

Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ e absolutamente integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)|f(t)|dt < \infty. \quad (\text{A.4})$$

A nova função definida por,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv \mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) \exp(-i\omega t)dt, \quad (\text{A.5})$$

é denominada como a **transformada de Fourier da função** $f(t)$.

Similarmente, podemos definir a operação inversa chamada **antitransformada** ou **conjugada**, através da equação,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}(\omega)\} \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) \exp(i\omega t)dw. \quad (\text{A.6})$$

É necessário compreender que oss autores que tratam do estudo das transformadas de Fourier não são unânimes em sua definição. Existem várias definições e a passagem de uma para outra se faz através de uma mudança adequada de variáveis.

A.2.1 Propriedades da transformada de Fourier

Não estamos interessado em provar os teoremas, pois já existe uma vasta coleção de livros que tratam com mais detalhes as provas dos teoremas abaixo mencionados, podendo

consultar as provas nos livros (ARFKEN; WEBER, 2005; BASSALO; CATTANI, 2010; NETO, 2011) e outros de sua preferência. A ideia é tratar como uma consulta rápida para as necessidades dos capítulos apresentados neste trabalho.

Teoremas:

I. Se $f(t)$ é real, então $\mathcal{F}(-\omega) = \mathcal{F}^*(\omega)$, onde * indica complexo conjugado;

II. A transformada de Fourier é linear;

III. Se a é real, então:

$$(i) \quad \mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} \frac{\omega}{a}.$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}\{f(-t)\} = \mathcal{F}(-\omega);$$

IV. Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f(\omega)\}$, então, $\mathcal{F}\{f(t \mp t_0)\} = \exp(\mp i\omega t_0) \mathcal{F}(\omega)$;

V. Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}(\omega)$, então, $\mathcal{F}\{f(t) \exp(\mp i\omega_0 t)\} = \mathcal{F}\{\omega \pm \omega_0\}$;

VI. (i) Se $f(t)$ (contínua) $\rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \pm\infty$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = (i\omega) \mathcal{F}(\omega)$.

(ii) Se $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ (contínuas) $\rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \pm\infty$, então $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \mathcal{F}(\omega)$;

VII. Se $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}(\omega)$, admitir derivadas até n -ésima ordem, então, $\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = (-t)^{-n} \times \mathcal{F}^{(n)}(\omega)$.

A.2.2 Transformada de Fourier de algumas funções especiais

Também temos a transformada de Fourier para algumas funções especiais desde que satisfaçam à condição de integrabilidade absoluta. Fazemos o cálculo da transformada, de uma maneira operacional, usando a teoria da "função" delta de Dirac desenvolvida na Seção (A.1.1), o estudo rigoroso é feito através da Teoria das Distribuições (BRAGA, 2006).

1. Distribuição de Dirac

Pela definição de transformada de Fourier, podemos escrever,

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt = \exp(-i\omega t)|_{t=0} = 1. \quad (\text{A.7})$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1. \quad (\text{A.8})$$

Sendo $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{I}$ (a demonstração dessa afirmação é feita usando o Teorema da Função Inversa), teremos:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^*(\delta(t)) = \delta(t) = \mathcal{F}^*(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (\text{A.9})$$

Portanto,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (\text{A.10})$$

2. Função Constante

Se $f(t) = C$, usando a definição da transformada de Fourier, virá:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{C\} &= \int_{-\infty}^{\infty} C \exp(-i\omega t) dt = C \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(-\omega t) dt = \\ &= 2\pi C \delta(-\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Portanto (Propriedades da "função" $\delta(t)$, III),

$$\mathcal{F}\{C\} = 2\pi C \delta(\omega). \quad (\text{A.12})$$

3. Função Periódica

Uma dada função periódica $f(t)$, poderá ser sempre representada por uma série de Fourier (NETO, 2011; BASSALO; CATTANI, 2010). Assim,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega_0 t); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{A.13})$$

Calculando a transformada de Fourier da função $f(t)$ representada por uma série de Fourier, obteremos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}\{\exp(in\omega_0 t)\} dt \\ &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp it(n\omega_0 - \omega) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Usando o resultado do item (1. - Distribuição de Dirac) desta seção, o resultado final é,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0). \quad (\text{A.15})$$

A.3 SÉRIE DE TAYLOR

Uma série de Taylor é a série de funções da forma (ARFKEN; WEBER, 2005),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (\text{A.16})$$

sendo

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

onde $f(x)$ é uma função analítica dada. Neste caso, a série acima é dita ser a série de Taylor de $f(x)$ em torno do ponto $x = a$. Concomitantemente, o polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x = a$ de uma dada função n -vezes diferenciável neste ponto é dado por,

$$g(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \quad (\text{A.17})$$

No caso particular de $a = 0$, a série da Eq.(A.17) também é chamada de **Série de Maclaurin** ou, quando for o caso, de polinômio de Maclaurin.

APÊNDICE B – CÓDIGOS EM PYTHON

Neste apêndice, disponibilizamos os códigos que utilizamos para a construção dos gráficos que foram mostrados durante toda a dissertação, sendo feito na linguagem de programação Python, onde criamos um pacote e este, que está disponível na plataforma GitHub, podendo ser acessado nesta referência (NETO; GONZÁLEZ; RAPOSO, 2022). Criamos também, dentro do README.md do pacote disponibilizado, todas as instruções de como criar cada gráfico de maneira mais adequada e correta, além de um arquivo com o título "test.py" com o intuito de orientar como fazer uso de cada função dentro do código, e a base principal da construção do pacote foi feito usando o conceito de herança (MENEZES, 2019) na linguagem python.

Código Fonte 1 – Análise estatística das intensidades emitidas por lasers aleatórios

```

1  import numpy as np
   import pandas as pd
3  import seaborn as sns
   import matplotlib.pyplot as plt
5
   from random import randint
7  from scipy.optimize import curve_fit
9
11 class Opers:
12
13     def __init__(self, data):
14         self.data = data
15
16     @staticmethod
17     def deltaxit(data):
18         s, t = data.shape
19         p = np.zeros((s, t))
20         for j in range(t+1):
21             p = data[:,j] - np.mean(data[:,j])
22
23     def mat_norm(self, med=None):
24         ma = np.array(self.data)
25
26         if med:
27             ma_df = pd.DataFrame(ma)
28             ma = Opers.deltait(ma_df)
29
30         t1, t2 = ma.shape
31         um = np.ones(t1)

```

```

ze = np.zeros((t1, t2))
33     ts = []

35     for i in range(0, t1):
        um[i] = np.linalg.norm(ma[i, :])
37         ze[i, :] = (ma[i, :] / um[i])

39     for j in range(1, t1 - 1):
        med = t1 - j
41         for k in range(0, med):
            t = np.dot(ze[k, :], ze[j + k, :])
43             ts.append(t)

45     return ze, ts

47
class GrafIzra(Oper):
49
    def __init__(self, data):
51         Oper.__init__(self, data)

53     def fit_izra(self, model, density, color1, color2, title='', glog=None):
        x = self.data
55         parameters = []

57         if glog:
            mm = plt.hist(x, bins=np.arange(0, 2.0, 0.1), density=density, color=
                color1)
59         else:
            mm = plt.hist(x, ec='k', bins=np.arange(0, 1.8, 0.1), density=density
                , color=color1)

61         bins = mm[1][1:]
63         medbins = [i - 0.05 for i in bins]
        freq = mm[0]

65
        if model == 'izrailev4':
67             def izrailev(x, a, b, c):
                return ((x ** (a - 1)) / b) * np.exp(-x * c)
69         elif model == 'izrailev6':
            def izrailev(x, a, b, c, d):
71                 return ((x ** (a - 1)) / b) * np.exp(-(d * x ** 2) - x * c)
        elif model == 'izrailev8':
73             def izrailev(x, a, b, c, d, f):
                return ((x ** (a - 1)) / b) * np.exp(-(f * x ** 3) - (d * x ** 2)
                    - x * c)
75         elif model == 'izrailev10':

```

```

    def izrailev(x, a, b, c, d, f, g):
77         return ((x ** (a - 1)) / b) * np.exp(-(g * x ** 4) - (f * x ** 3)
                - (d * x ** 2) - x * c)
    else:
79         return 'Invalid Model'

81     # Plotting the graph
    parametros, error = curve_fit(izrailev, medbins, freq)
83     for par in parametros:
        parameters.append(par)
85
    xfit = np.arange(0, 2, 0.01)
87     plt.plot(xfit, izrailev(xfit, *parametros), color=color2)
    if glog:
89         plt.scatter(medbins, freq, s=18, c='black')
        plt.yscale('log')
91         plt.xscale('log')
    plt.xlim(0.01, 1.8)
93     plt.title(f'Izrailev {title} Profile')
    plt.show()
95
    # Analyzing the parameters
97     return parameters, error

99
class GraftsVar(Operators):
101
    def __init__(self, data):
103         Operators.__init__(self, data)

105     @staticmethod
    def sohist(data, density, color, title=''):
107         counts, bins = np.histogram(data, density=density)
        plt.hist(bins[:-1], bins, weights=counts, color=color)
109         plt.title(title, fontsize=11, fontweight='bold', fontstyle='italic',
                fontfamily='serif')
        plt.show()
111
    def varii(self, color, vall=None, title=''):
113         ze, _ = Operators(self.data).mat_norm()

115         plt.plot(ze[vall, :], color=color)
        plt.title(title, fontsize=11, fontweight='bold', fontstyle='italic',
                fontfamily='serif')
117         plt.show()

119         return ze

```

```
121     def graf_s_a(self, color, title='', titlex='', titley='', titlez=''):
122         df = self.data
123         f = df.shape[0]
124         i = randint(0, df.shape[0] - 1)
125         diff = f - i
126         m1 = df[i:f]
127         x = np.linspace(1055, 1075, df.shape[1])
128         y = np.linspace(0, 1000, diff)
129         xx, yy = np.meshgrid(x, y)
130         fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
131         surf = ax.plot_surface(xx, yy, m1, cmap=color, linewidth=0.3, antialiased
132                               =False)
133         fig.colorbar(surf, shrink=False)
134
135         plt.xticks([1060, 1065, 1070])
136         plt.yticks([0, 250, 500, 750])
137         plt.title(title, fontsize=12, fontweight='bold', fontstyle='italic',
138                 fontfamily='serif')
139         ax.set(xlabel=r"%s" % titlex, ylabel=r"%s" % titley, zlabel=r"%s" %
140              titlez)
141         plt.gcf().set_size_inches(12, 8)
142         plt.show()
143
144     @staticmethod
145     def ht_map(data, cmap, title='', titlex='', titley=''):
146         dft = pd.DataFrame(data)
147         der = dft.corr()
148         sns.heatmap(der, cmap=cmap, vmin=0, linecolor='red')
149         plt.xticks([0, 100], [1060, 1064])
150         plt.xlabel(titlex)
151         plt.yticks([0, 100], [1060, 1064])
152         plt.ylabel(titley)
153         plt.title(title, fontsize=12, fontweight='bold', fontstyle='italic',
154                 fontfamily='serif')
155         plt.show()
```

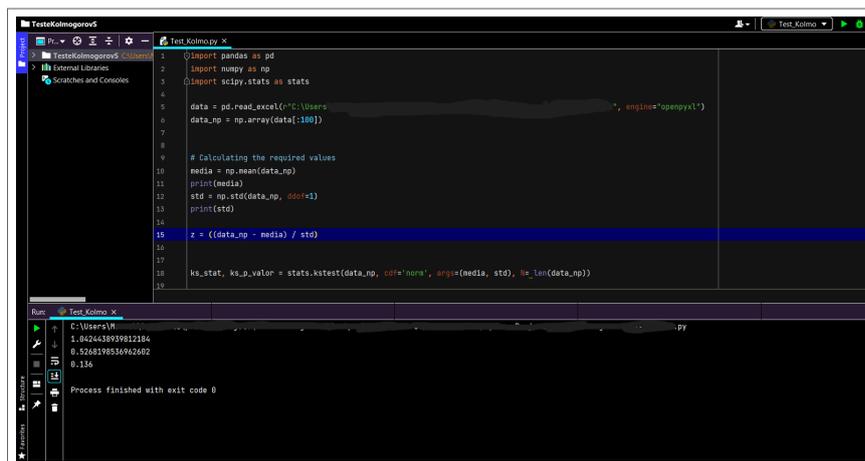
Fonte: (NETO; GONZÁLEZ; RAPOSO, 2022)

APÊNDICE C – TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

A ideia de utilizar o Teste de Kolmogorov-Smirnov em uma parte da amostra dos dados, dados estes que construímos os gráficos da Fig.(14) que apresenta uma forma Gaussiana, a ideia é comparar a função de distribuição cumulativa observada de uma variável com uma distribuição teórica especificada, que pode ser normal (gaussiana), uniforme, Poisson ou exponencial, sendo no nosso caso, a distribuição normal. O valor de Kolmogorov-Smirnov é calculado a partir da diferença maior, neste caso é o valor absoluto (RIBEIRO, 2019). Esse teste de qualidade do ajuste testa se as observações podem razoavelmente ter vindo da distribuição especificada.

Foi construído um código na linguagem python para fazer o teste, o conjunto de dados consistia em mais de 100000 dados, sendo "pesado" para conseguir fazer o código calcular diretamente a estatística de Kolmogorov-Smirnov e o valor de p . Contudo, foi viável pegar $n = 100$ dados desse conjunto, e reforço que independente dos 100 dados escolhidos para calculá-los, o resultado obtido é quase igual ao mostrado na Fig.(24) (exceções decorrem das casas decimais), sendo mais viável calcular o valor crítico de Kolmogorov-Smirnov, que na figura em questão, retorna um valor de 0.136, numa correção de significância de 0.05. Reforçando que a distribuição de Kolmogorov não depende do tamanho da amostra.

Figura 24 – Resultados obtidos de um conjunto de dados.



```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 import scipy.stats as stats
4
5 data = pd.read_excel("C:\Users\
6 data_np = np.array(data[:100])
7
8
9 # Calculating the required values
10 media = np.mean(data_np)
11 print(media)
12 std = np.std(data_np, ddof=1)
13 print(std)
14
15 z = ((data_np - media) / std)
16
17
18 ks_stat, ks_p_valor = stats.kstest(data_np, cdf='norm', args=(media, std), n=len(data_np))
19

```

Run: Test Kolmo x

C:\Users\... .py

1.042438939812184

0.5302878536942662

0.136

Process finished with exit code 0

Fonte: O autor (2023).

Foi possível comparar o resultado obtido por uma tabela de valores críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov, tabela mostrada na Fig.(25) e disponível na internet (MORAES, 2019). O que podemos concluir é que a aparência da Fig.(14) de fato pode ser compreendida como uma distribuição normal. É importante lembrar que esse valor crítico é válido para o teste

bilateral (dois lados) com uma distribuição de Kolmogorov assintótica.

Figura 25 – Valores Críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov.

Valores Críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov														
N	5%	1%	N	5%	1%	N	5%	1%	N	5%	1%	N	5%	1%
1	0,9750	0,9950	21	0,2872	0,3443	41	0,2076	0,2490	61	0,1709	0,2051	81	0,1487	0,1784
2	0,8419	0,9293	22	0,2809	0,3367	42	0,2052	0,2461	62	0,1696	0,2034	82	0,1478	0,1773
3	0,7076	0,8290	23	0,2749	0,3295	43	0,2028	0,2433	63	0,1682	0,2018	83	0,1469	0,1763
4	0,6239	0,7342	24	0,2693	0,3229	44	0,2006	0,2406	64	0,1669	0,2003	84	0,1460	0,1752
5	0,5633	0,6685	25	0,2640	0,3166	45	0,1984	0,2380	65	0,1657	0,1988	85	0,1452	0,1742
6	0,5193	0,6166	26	0,2591	0,3106	46	0,1963	0,2354	66	0,1644	0,1973	86	0,1444	0,1732
7	0,4834	0,5758	27	0,2544	0,3050	47	0,1942	0,2330	67	0,1632	0,1958	87	0,1435	0,1722
8	0,4543	0,5418	28	0,2499	0,2997	48	0,1922	0,2306	68	0,1620	0,1944	88	0,1427	0,1713
9	0,4300	0,5133	29	0,2457	0,2947	49	0,1903	0,2283	69	0,1609	0,1930	89	0,1419	0,1703
10	0,4092	0,4889	30	0,2417	0,2899	50	0,1884	0,2260	70	0,1597	0,1917	90	0,1412	0,1694
11	0,3912	0,4677	31	0,2379	0,2853	51	0,1866	0,2239	71	0,1586	0,1903	91	0,1404	0,1685
12	0,3754	0,4490	32	0,2342	0,2809	52	0,1848	0,2217	72	0,1576	0,1890	92	0,1396	0,1676
13	0,3614	0,4325	33	0,2308	0,2768	53	0,1831	0,2197	73	0,1565	0,1878	93	0,1389	0,1667
14	0,3489	0,4176	34	0,2274	0,2728	54	0,1814	0,2177	74	0,1554	0,1865	94	0,1382	0,1658
15	0,3376	0,4042	35	0,2242	0,2690	55	0,1798	0,2157	75	0,1544	0,1853	95	0,1375	0,1649
16	0,3273	0,3920	36	0,2212	0,2653	56	0,1782	0,2138	76	0,1534	0,1841	96	0,1368	0,1641
17	0,3180	0,3809	37	0,2183	0,2618	57	0,1767	0,2120	77	0,1524	0,1829	97	0,1361	0,1632
18	0,3094	0,3706	38	0,2154	0,2584	58	0,1752	0,2102	78	0,1515	0,1817	98	0,1354	0,1624
19	0,3014	0,3612	39	0,2127	0,2552	59	0,1737	0,2084	79	0,1505	0,1806	99	0,1347	0,1616
20	0,2941	0,3524	40	0,2101	0,2521	60	0,1723	0,2067	80	0,1496	0,1795	100	0,1340	0,1608

Fonte: O autor (2023).

O código dos testes estão disponíveis logo abaixo. E para mais informações sobre o Teste de Kolmogorov-Smirnov, pode ser consultado também nestes links: (RIBEIRO, 2019; LONDRINA, 2018; WIKIR, 2021; WIKIPÉDIA, 2022)

Código Fonte 2 – Teste Kolmogorov-Smirnov

```

1 import pandas as pd
  import numpy as np
3 import scipy.stats as stats

5 # 1
  data = pd.read_excel(r"file path", engine="openpyxl")
7 data_np = np.array(data)

9 # 2 - Calculating the required values
  med = np.mean(data_np)
11 print(med)
  std = np.std(data_np, ddof=1)
13 print(std)

15 # 3 - Calculating the value of the Kolmogorov-Smirnov statistic for the data
  ks_stat, ks_p_valor = stats.kstest(data_np, cdf='norm', args=(med, std), N = len(
    y))
17

  # 4 - Checking the critical value of the Kolmogorov-Smirnov test
19 def kolmogorov_smirnov_critico(n):
    # table of critical values for the kolmogorov-smirnov test - 95% confidence
21    # Source: https://www.soest.hawaii.edu/GG/FACULTY/ITO/GG413/
      K_S_Table_one_Sample.pdf

```

```
# Source: http://www.real-statistics.com/statistics-tables/kolmogorov-smirnov-table/
23 # alpha = 0.05 (95% confidential level)

25 if n <= 40:
    kolmogorov_critico = data_np
27     ks_critico = kolmogorov_critico[n - 1]
    elif n > 40:
29         kolmogorov_critico = 1.36 / (np.sqrt(n))
        ks_critico = kolmogorov_critico
31     else:
        pass
33
    return ks_critico
35

37 ks_critico = kolmogorov_smirnov_critico(len(data_np))
print(ks_critico)
```

Fonte: O autor (2023).