



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jean Ricardo Colaço da Silva

Estudo do Efeito da Dimensionalidade do Espaço em Buscas Aleatórias

Recife

2023

Jean Ricardo Colaço da Silva

Estudo do Efeito da Dimensionalidade do Espaço em Buscas Aleatórias

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador (a): Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

S586e Silva, Jean Ricardo Colaço da
Estudo do efeito da dimensionalidade do espaço em buscas aleatórias / Jean
Ricardo Colaço da Silva. – 2023.
138 f.: il., fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física,
Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Física teórica e computacional. 2. Dimensionalidade do espaço. 3. Buscas
aleatórias. 4. Entropia de Shannon. 5. Distribuição de Lévy. 6. Superdifusão. I.
Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2023 - 114

JEAN RICARDO COLAÇO DA SILVA

**ESTUDO DO EFEITO DA DIMENSIONALIDADE DO ESPAÇO EM BUSCAS
ALEATÓRIAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 04/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Maurício Domingues Coutinho Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Renê Rodrigues Montenegro Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Frederico Borges de Brito
Examinador Externo
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Marcos Gomes Eleuterio da Luz
Examinador Externo
Universidade Federal do Paraná

Dedico esta tese para toda minha família...

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar vivo e com saúde para iniciar e concluir este trabalho, por Ele ter me dado sabedoria em todos os momentos difíceis e por ter me contemplado com pessoas maravilhosas ao meu redor.

À minha esposa Glaucyevonn Guimarães, que sempre foi minha companheira de estudos desde da graduação e sempre me ajudou seja com conversas científicas à inúmeros incentivos de todas as maneiras possíveis.

Ao meu orientador Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, pela enorme paciência que ele teve ao sanar cada dúvida minha, da mais básica a mais complexa, me fazendo amadurecer muito, não apenas no aprendizado de novos conceitos físicos mas também em como ser um bom pesquisador e em como ser um bom profissional.

À toda a minha família por todo carinho e compreensão, em especial a minha adorável avó Josefa Maciel, que apesar de não estar aqui para prestigiar este momento de alegria, sempre desejou o melhor, não só na minha vida pessoal como também na minha vida profissional. Ao meu tio Cleber Eduardo que sempre acreditou em mim em todos os momentos, me incentivando a estudar desde da época do colegial e nunca deixando o desânimo me abater nos períodos difíceis daquela época.

Aos amigos do DF-UFPE, em especial a Rubens Henrique Damascena de Souza que me auxiliou da melhor maneira possível na parte computacional deste trabalho e a Erly José da Costa Aquino pelas discussões científicas e momentos de descontração que me proporcionou muita alegria e ânimo e ao mesmo tempo me incentivaram no andamento deste trabalho.

Aos colegas do LFTC que sempre me ajudaram quando precisei em especial a Hugo de Andrade Araújo que praticamente foi meu coorientador nesta tese.

À todos os professores e funcionários do Departamento de Física que de inúmeras formas contribuíram para este trabalho.

À CAPES por financiar este trabalho, que pra mim foi muito importante.

RESUMO

Neste trabalho investigamos a dependência com a dimensão do espaço de busca de propriedades estatísticas do problema do caminhante aleatório em 1D e 2D realizando uma busca por sítios-alvo cuja localização é desconhecida (*problema da busca aleatória ou random search*). Um dos nossos principais objetivos foi analisar se a dimensionalidade do espaço de busca tem influência direta no mecanismo que controla alguns parâmetros importantes do sistema. Estudamos três quantidades estatísticas (eficiência η , probabilidades do caminhante encontrar o último alvo visitado P_0 e de encontrar os demais sítios P_L e a entropia de Shannon S) relevantes ao problema da busca aleatória. Utilizando técnicas de Física Estatística conseguimos modelar o problema de *random search*, sendo a nossa principal fonte de inspiração a questão ecológica da busca por alimentos feita por várias espécies de animais (problema do *foraging*). Realizamos o estudo descrito para duas distribuições de probabilidades de tamanhos de passos do buscador: a distribuição do tipo lei de potência e a distribuição α -estável de Lévy, com $0 < \alpha \leq 2$. Revisamos para o caso 1D a obtenção de uma expressão analítica para a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos e consequentemente para a eficiência da busca. Além disso, calculamos as probabilidades P_0 e P_L , as quais permitem obter a entropia de Shannon S associada ao problema. Descobrimos que as probabilidades P_0 e P_L , bem como a entropia S , se comportam em função de α de forma bem diferente em uma dimensão e em duas dimensões, um resultado surpreendente até então inédito na literatura. Enquanto em 1D sempre se tem $P_0 \geq P_L$, em 2D ocorre um cruzamento interessante que separa os regimes de busca com $P_0 > P_L$ para os maiores valores de α e $P_0 < P_L$ para os pequenos valores de α , dependendo da distância inicial até o último alvo encontrado. Também obtemos em 2D um máximo na entropia S para $\alpha \in (0, 2]$, não observado em 1D, com exceção do limite balístico $\alpha \rightarrow 0$. Nosso trabalho aprimora a compreensão do papel relevante da dimensionalidade do espaço em buscas aleatórias em diversos contextos, como, por exemplo, no problema das taxas de encontro em biologia e ecologia.

Palavras-chave: dimensionalidade do espaço; buscas aleatórias; entropia de Shannon; distribuição de Lévy; superdifusão.

ABSTRACT

In this work, we investigate the dependence of the statistical properties of the random walker problem in 1D and 2D on the dimension of the search space by performing a search for target sites whose location is unknown (*random search problem*). One of our main objectives was to analyze whether the dimensionality of the search space has a direct influence on the mechanism that controls some important parameters of the system. We study three statistical quantities (efficiency η , probabilities that the walker will find the last visited target P_0 and probabilities of finding the other sites P_L , and the Shannon entropy S) relevant to the random search problem. Using Statistical Physics techniques, we were able to model the random search problem, our main source of inspiration being the ecological question of the search for food by various species of animals (*foraging problem*). We carried out the study described for two probability distributions of seeker step sizes: the power-law type distribution and the α -stable Lévy distribution, with $0 < \alpha \leq 2$. We reviewed the obtainment of an analytic expression for the 1D case for the average distance traveled between two successive encounters and consequently for the search efficiency. Furthermore, we compute the probabilities P_0 and P_L , which allow us to obtain the Shannon entropy S associated with the problem. We found that the probabilities P_0 and P_L , as well as the entropy S , behave quite differently as a function of α in one dimension and in two dimensions, a surprising result hitherto unpublished in the literature. While in 1D you always have $P_0 \geq P_L$, in 2D there is an interesting intersection that separates the search regimes with $P_0 > P_L$ for the largest values of α and $P_0 < P_L$ for the small values of α , depending on the initial distance to the last target found. We also obtain in 2D a maximum entropy S for $\alpha \in (0, 2]$, not observed in 1D, with the exception of the ballistic limit $\alpha \rightarrow 0$. Our work improves the understanding of the relevant role of space dimensionality in random searches in different contexts, as, for example, in the problem of encounter rates in biology and ecology.

Keywords: dimensionality of space; random searches; Shannon entropy; Levy distribution; superdiffusion.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Gráficos que indicam o comportamento de quatro distribuições estáveis definidas pela Eq. (1.81), correspondentes a $\alpha = 2$ (gaussiana), $\alpha = 1$ (Cauchy-Lorentz), $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1,5$. Os gráficos denotam o perfil de $p(x) \times x$ respectivamente. Note que há um crescimento acentuado de $p(x)$ ao passo que α diminui. 43
- Figura 2 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões. Vemos vários sítio-alvo (círculo preto) localizados dentro de uma “caixa” $L \times L$. A regra 1 entrará em vigor quando pelo menos um sítio se encontrar dentro do raio de visão r_v (círculo branco), nesta condição, o caminhante se move até ele em linha reta. Enquanto o alvo não é detectado, o caminhante escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo ℓ_j a partir de um sorteio regido por uma distribuição $p(\ell)$ como descrito na regra 2. Todo o processo de busca está sujeito a condições de contorno periódicas. 50
- Figura 3 – Caminhante aleatório em 1D à procura dos sítios-alvo (círculos pretos) localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$, onde o sentido e o tamanho do passo são sorteados por uma distribuição de tamanho de passos $p(\ell)$. O buscador (quadrado vermelho) se encontra no regime de buscas destrutivas ($x_0/\lambda = 1/2$), isto é, ao capturar o sítio ele jamais poderá retornar a sua localização numa busca posterior.) 52
- Figura 4 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões. Em (a) vemos um sítio-alvo (círculo vermelho) localizado dentro do raio de visão r_v , isto é, o caminhante caminhará até ele em linha reta. Já em (b) vemos a representação do que acontece quando o caminhante ainda não encontra um sítio-alvo, ou seja, ele escolhe um direção aleatória e um comprimento de passo ℓ_j a partir de um sorteio regido por uma distribuição $p(\ell)$ 56
- Figura 5 – Esquema básico de comunicação entre duas entidades distintas. Pode-se ver que o emissor transfere informação (mensagem) que pode ser retirada de um banco de dados (memória) e é transportada fisicamente ao receptor, que por sua vez, tem a escolha de descartar ou armazenar a mesma em sua memória. 73

Figura 6 – Claude Elwood Shannon, “brincando” com Theseus o seu camundongo eletrônico por volta de 1950.	75
Figura 7 – Entropia de Shannon em função da probabilidade p_1 de cair a face “Cara” referente ao lançamento de uma moeda comum.	86
Figura 8 – Eficiência η em função do parâmetro α para buscas aleatórias destrutivas e não-destrutivas. A distribuição de tamanho de passos utilizada foi a lei de potência. Note que a eficiência máxima da busca é obtida para $\alpha \approx 1$ para buscas não-destrutivas e para $\alpha \rightarrow 0$ para buscas destrutivas. Os círculos representam os dados do Método de Monte Carlo, enquanto os quadrados os dados do Método do Operador Integral. Os parâmetros relevantes ao problema que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para vários valores de x_0 como mostra a paleta de cores.	90
Figura 9 – Probabilidades P_0 e P_L de o caminhante detectar os sítios localizados em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, em função do expoente α para os regimes destrutivo e não-destrutivo. As buscas foram conduzidas pela $p(\ell)$ do tipo Lei de Potência. Observe que tivemos uma boa concordância entre os Métodos do Operador Integral (quadrados) e Monte Carlo (círculos), além de concordar bem com a curva teórica analítica (linha sólida). Os parâmetros relevantes ao problema que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para vários valores de x_0 seguindo a paleta de cores da Fig. (8).	93
Figura 10 – Probabilidades P_0 e P_L de o caminhante detectar os sítios localizados em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, em função do expoente α para o regime não-destrutivo, sendo as buscas conduzidas pela $p(\ell)$ do tipo Lei de Potência. Note que a medida que o valor de ℓ_0 diminui, os valores da simulação vão se aproximando da curva analítica exata para P_0 (quadrados) e P_L (círculos). Para a obtenção dos gráficos presentes nesta figura, os parâmetros relevantes do problema foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, para vários valores de ℓ_0 seguindo a paleta de cores com $x_0 = 1$ fixo.	95

- Figura 11 – Entropia de Shannon S em função do expoente α para buscas não-destrutivas e destrutivas associadas a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência. Podemos notar uma boa concordância para os métodos de simulações numéricas Monte Carlo (círculos) e o Método do Operador Integral (quadrados). Também, observamos uma boa concordância entre as simulações e a curva analítica exata associada a S . Para a obtenção dos gráficos presentes nesta figura, os parâmetros relevantes do problema foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para vários valores de x_0 seguindo a paleta de cores. 97
- Figura 12 – Eficiência $\eta \times \alpha$ para buscas aleatórias destrutivas e não-destrutivas. A distribuição de tamanho de passos utilizada foi a de Lévy. Os parâmetros relevantes no modelo de busca que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para 6 valores de x_0 como mostra o conjunto de cores. Observe que o $\eta_{\text{máx}}$ é alcançado para $\alpha \approx 1$ para as buscas assimétricas ($x_0 = 0,4$) e para $\alpha \approx 0$ para buscas simétricas ($x_0 = 500$). 102
- Figura 13 – Probabilidades P_0 e P_L de detecção dos alvos localizados nas extremidades da rede 1D ($x = 0$ e $x = L$), em função do parâmetro α para os regimes simétricos e assimétricos relacionados às buscas de Lévy. Os parâmetros referentes ao problema que utilizamos foram $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para seis valores de x_0 distribuídos em uma paleta de cores. Note que para a distribuição de tamanho de passos de Lévy, não tivemos uma excelente concordância entre o método de Monte Carlo (simulação numérica) e a curva exata (método analítico) para pequenos valores de x_0 . Por outro lado, tivemos uma boa concordância entre as simulações numéricas (círculos) e o método analítico (linha sólida tracejada) para altos e intermediários valores de x_0 105

- Figura 14 – Probabilidades P_0 e P_L de o buscador localizar os sítios-alvo fixado nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, em função do expoente α para o regime de buscas não-destrutivas de Lévy. Para geração dos gráficos presentes na figura, foram ajustados os seguintes parâmetros: $L = 10^3$, $r_v = 0$ e uma varredura com vários valores de ℓ_0 (paleta de cores) para $x_0 = 1$ fixo. Note que ao passo de o valor de ℓ_0 diminui, as curvas de P_0 (quadrados) e P_L (círculos) referentes as simulações vão se aproximando da curva analítica exata (linha sólida tracejada). 107
- Figura 15 – Entropia de Shannon S em função do parâmetro α para buscas aleatórias de carácter destrutivo e não-destrutivo relacionadas a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Para geração dos gráficos presentes nesta figura foram ajustados os seguintes parâmetros: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para 6 diferentes valores de x_0 separados por 6 diferentes cores. Note que temos uma boa concordância entre o método numérico (quadrados) com a curva exata (linha tracejada) para 4 valores de x_0 , a saber: $x_0 = \{(4), (10), (20), (500)\}$ e uma concordância regular para $x_0 = 0,4$ e $x_0 = 1$. 108
- Figura 16 – Eficiência da busca η em função do expoente α para a distribuição de tamanho de passos Lei de Potência em buscas aleatórias bidimensionais. As buscas foram realizadas para 10^6 alvos distribuídos aleatoriamente numa rede de comprimento 10^5 , isto é, $N = 10^6$ e $L \times L = 10^{10}$. Também foram ajustados os parâmetros $\ell_0 = 0,1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 respectivamente. Os resultados de Monte Carlo aparecem em símbolos (círculos) enquanto as linhas sólidas são apenas guias para os olhos. Assim como nas buscas não-destrutivas em 1D, aqui, o valor máximo de η ocorre quando $\alpha \approx 1$ para valores de $x_0 \rightarrow r_v$. Note também que há um surgimento de um platô em η para $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$, que não é observado das buscas 1D (compare com Fig. 8). 113

- Figura 17 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Probabilidades de detecção dos alvos mais próximos (P_0) e distantes (P_L) em função do expoente α relacionadas a distribuição de tamanho de passos ($p(\ell)$) Lei de Potência. Os resultados de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos para P_0 e quadrados para P_L) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Os parâmetros utilizados para esta simulação seguem com os mesmos valores dos utilizados na Fig. (16). Note que as probabilidades 2D exibem um cruzamento interessante não presente em 1D como mostra a Fig. (9). . . . 115
- Figura 18 – Buscas aleatórias bidimensionais. Entropia de Shannon (S) em função do expoente α relacionada a distribuição de tamanho de passos do tipo lei de potência. Os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos) e as linhas sólidas são apenas guia para os olhos. Os parâmetros e as cores são iguais as das Figs. (17) e (16) respectivamente. Os máximos de S que não foram observados em 1D além do caso trivial associado ao limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$), ocorrem no valor α onde $P_0 = P_L = 1/2$ para cada valor de x_0 ilustrado na Fig. (17). 118
- Figura 19 – Buscas aleatórias bidimensionais. Entropia de Shannon S em função da probabilidade do caminhante detectar o último sítio visitado P_0 associada a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência. Os resultados das simulações são denotados por símbolos (quadrados) enquanto a linha sólida tracejada é apenas um guia para os olhos. Note que foi obtido uma sobreposição de curvas para vários valores de x_0 , onde pode-se ver o perfil padrão para a entropia de Shannon (compare com a Fig. 7). 119

Figura 20 – Eficiência da busca η em função do parâmetro α para a distribuição de tamanho de passos de Lévy em buscas aleatórias em duas dimensões. As buscas foram realizadas para 10^6 alvos distribuídos aleatoriamente numa rede de área 10^{10} , isto é, $N = 10^6$ e $L \times L = 10^{10}$. Também foram ajustados os parâmetros $\ell_0 = 0, 1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 respectivamente. Os resultados de Monte Carlo aparecem em símbolos (círculos) enquanto as linhas sólidas são apenas “guias para os olhos”. Assim como nas buscas não-destrutivas em 1D, aqui, o valor máximo de η ocorre quando $\alpha \approx 1$ para valores de $x_0 \rightarrow r_v$. Note também que há um surgimento de um platô em η para $\alpha \leq 0, 5$ e $x_0 \geq 5$, que não é observado das buscas 1D (compare com Fig. 12). 121

Figura 21 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Probabilidades de detecção dos alvos mais próximos (P_0) e distantes (P_L) em função do expoente α relacionadas à $p(\ell)$ de Lévy. Os resultados de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos para P_0 e quadrados para P_L) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Os parâmetros utilizados para esta simulação seguem com os mesmos valores dos utilizados na Fig. (20). Note que as probabilidades 2D exibem um cruzamento interessante não presente em 1D como mostra a Fig. (13). 124

Figura 22 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Entropia de Shannon (S) em função do expoente α relacionada a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos) e as linhas sólidas são apenas guia para os olhos. Os parâmetros e as cores são iguais as das Figs. (21) e (20) respectivamente. Os máximos de S que não foram observados em 1D além do caso trivial associado ao limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$), ocorrem no valor α onde $P_0 = P_L = 1/2$ para cada valor de x_0 ilustrado na Fig. (21). 126

Figura 23 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Entropia de Shannon S em função da probabilidade do caminhante detectar o último sítio visitado P_0 associada a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Os resultados das simulações são denotados por símbolos (círculos) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Note que foi obtido uma superposição de curvas para vários valores de x_0 , onde pode-se ver o perfil padrão para a entropia de Shannon (compare com a Fig. 7). 127

Figura 24 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Em (a) vemos como se comporta os valores de α^* em relação as posições iniciais de cada busca x_0 para a $p(\ell)$ de Lévy e Lei de Potência respectivamente. O parâmetro α^* corresponde aos valores do expoente α no qual S atinge seu máximo para cada valor de x_0 . Os círculos pretos e quadrados vermelhos representam respectivamente, resultados associados às distribuições de tamanho de passos de Lévy e Lei de Potência, enquanto as linhas tracejadas representam os melhores ajustes para o crescimento logarítmico de α^* com x_0 . Em (b) podemos ver os valores da razão P_0/P_L relacionadas ao máximo da eficiência η em 2D em função de vários valores de x_0 . Os símbolos têm o mesmo significado dos de (a), mas aqui, as linhas tracejadas são apenas guia para os olhos. . . . 129

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Possibilidades do lançamento de uma moeda comum.	85
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	Distância de separação média dos sítios-alvo nas buscas 1D.
L	Comprimento dimensional do espaço de busca em 1D e em 2D.
r_v	Raio de visão do buscador.
ρ	Densidade de sítios-alvo.
$p(\ell)$	Distribuição de probabilidades de tamanho de passos.
α	Variável independente da distribuição de tamanho de passos de Lévy e da lei de potência.
β	Parâmetro de assimetria das distribuições α -estáveis de Lévy.
α^*	Valores específicos do expoente α relacionados a valores de máxima entropia em 2D.
x_0	Posição do buscador no início de cada busca.
$\langle L \rangle$	Distância média percorrida entre dois alvos sucessivos que foram capturados.
$\langle n \rangle$	Número médio de passos entre dois encontros sucessivos.
$\langle \ell \rangle$	Comprimento médio de um passo individual.
$\mathcal{L}$	Operador integral.
N	Número médio de sítios-alvo distribuídos na rede 2D.
η	Eficiência da busca.
P_0	Probabilidade de detecção do sítio-alvo localizado em $x = 0$ para buscas em 1D e também a probabilidade de detecção do último sítio-alvo visitado para buscas em 2D.
P_λ ou P_L	Probabilidade de detecção do sítio-alvo localizado em $x = \lambda$ (ou $x = L$) em buscas 1D e também a probabilidade de detecção de qualquer sítio-alvo exceto o último anteriormente visitado em buscas 2D.

S Entropia de Shannon.

SUMÁRIO

1	ASPECTOS GERAIS DAS BUSCAS ALEATÓRIAS	20
1.1	UMA BREVE PASSAGEM PELA HISTÓRIA	20
1.2	EVOLUÇÃO DOS MODELOS FUNDAMENTAIS DE BUSCAS ALEATÓRIAS	23
1.3	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ESTATÍSTICA	26
1.3.1	Distribuições contínuas de variáveis aleatórias	26
1.3.2	Probabilidade Conjunta	29
1.4	O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	31
1.4.1	Caminhadas aleatórias gaussianas em 1D	33
1.4.2	Caminhadas aleatórias gaussianas em 2D	37
1.5	O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE GENERALIZADO	40
1.5.1	Distribuições α-estáveis de Lévy	40
1.5.1.1	<i>Expansão da distribuição de Lévy em uma lei de potência</i>	<i>44</i>
1.5.2	A distribuição de Lévy e o problema da busca aleatória	46
2	O MÉTODO DO OPERADOR INTEGRAL	49
2.1	REGRAS GERAIS DE UM MODELO DE BUSCAS ALEATÓRIAS	49
2.1.1	Buscas aleatórias em uma dimensão	51
2.2	ABORDAGEM ANALÍTICA DE $\langle L \rangle$ E $\langle n \rangle$	52
2.2.1	Determinação de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$	59
2.2.2	A eficiência da busca	62
2.3	CÁLCULO DISCRETO NO ESPAÇO DE BUSCA	63
2.4	ESTUDO DAS PROBABILIDADES P_0 E P_λ	65
2.4.1	Análise qualitativa de P_0 e P_λ	65
2.4.2	Cálculo explícito de P_0 e P_λ	66
2.5	ABORDAGEM ANALÍTICA DE $\langle \ell \rangle$, A E $\mathcal{P}$ PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TAMANHOS DE PASSOS DO TIPO LEI DE POTÊNCIA	68
3	TEORIA DA INFORMAÇÃO CLÁSSICA	73
3.1	FUNDAMENTOS DA TEORIA DA INFORMAÇÃO	73
3.1.1	Biografia e pensamentos de Claude Shannon	74
3.2	CONCEITO DE INFORMAÇÃO	76
3.3	ENTROPIA DE SHANNON	79

3.3.1	Princípio do conceito de entropia utilizado por Shannon	79
3.3.2	A entropia segundo Claude Shannon	80
3.3.3	Entropia de Shannon $\times$ Entropia de Boltzmann	83
3.3.4	Características da Entropia de Shannon	84
4	RESULTADOS NUMÉRICOS EM UMA DIMENSÃO	89
4.1	DISTRIBUIÇÃO LEI DE POTÊNCIA	89
4.1.1	Eficiência da Busca (η)	89
4.1.2	Probabilidades P_0 e P_L	92
4.1.2.1	<i>Comparação das Probabilidades P_0 e P_L para diferentes valores de ℓ_0 . . .</i>	<i>95</i>
4.1.3	Entropia de Shannon (S)	96
4.2	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY	101
4.2.1	Eficiência da Busca (η)	101
4.2.2	Probabilidades P_0 e P_L	104
4.2.2.1	<i>Comparação das Probabilidades P_0 e P_L para diferentes valores de ℓ_0 . . .</i>	<i>106</i>
4.2.3	Entropia de Shannon (S)	107
5	RESULTADOS NUMÉRICOS EM DUAS DIMENSÕES	111
5.1	O MODELO DE BUSCA EM DUAS DIMENSÕES	111
5.2	DISTRIBUIÇÃO LEI DE POTÊNCIA	112
5.2.1	Eficiência da Busca (η)	113
5.2.2	Probabilidades P_0 e P_L	114
5.2.3	Entropia de Shannon (S)	117
5.3	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY	120
5.3.1	Eficiência da Busca (η)	121
5.3.2	Probabilidades P_0 e P_L	123
5.3.3	Entropia de Shannon (S)	125
5.4	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS BUSCAS ALEATÓRIAS DE LÉVY E AS BUSCAS ALEATÓRIAS DA LEI DE POTÊNCIA	128
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	132
	REFERÊNCIAS	134

1 ASPECTOS GERAIS DAS BUSCAS ALEATÓRIAS

No presente trabalho, analisaremos alguns aspectos estatísticos da dinâmica de um caminhante aleatório à procura por sítios-alvo em espaços de busca 1D e 2D. Esse problema, de natureza estatística recebeu um nome especial ao ser incorporado nos domínios da Física Biológica, nome este conhecido como o problema do *foraging* (VISWANATHAN et al., 2011) ou o problema da busca aleatória (*Random Search*). De maneira particular, faremos o nosso estudo seguindo um modelo de comportamento ecológico que descreve a dinâmica dos animais quando estão à procura de alimentos em regime de escassez. Nesse contexto, pensamos no *forager* como um ponto material em uma dinâmica estocástica que eventualmente encontra um sítio-alvo. As aplicações práticas desse problema são incontáveis, abrangendo desde de peixes à procura de algas microscópicas até a pessoas procurando objetos perdidos. Esse tipo de abordagem está diretamente relacionada a observação de um padrão matemático de busca diferente, quando comparado a padrões de busca conduzidos por uma distribuição de tamanho de passos governada pelo Teorema Central do Limite (TCL) (SIMS et al., 2008) (HUMPHRIES et al., 2010) (SEURONT; DUPONCHEL; CHAPPERON, 2007) (KNEGT et al., 2007). Tal comportamento desconforme refere-se de modo direto as dinâmicas de busca regidas pelo Teorema Central do Limite Generalizado (TCLG), como veremos nas seções posteriores.

1.1 UMA BREVE PASSAGEM PELA HISTÓRIA

Realizando uma pequena passagem pela história, pode-se apontar como o marco inicial dos estudos relacionados às buscas aleatórias um evento testemunhado pelo biólogo e químico holandês Jan Ingenhauz em 1785. Ele observou um movimento irregular do pó de carvão suspenso em álcool (INGEN-HOUSZ, 1784). Cerca de quatro décadas depois, o botânico Robert Brown declarou ter visto um suposto movimento irregular de partículas de pólen suspensas em um fluido em repouso (BROWN, 1828). Essa dinâmica descrita por R. Brown em 1827 é denominada nos dias atuais de movimento browniano.

As primeiras tentativas de explicar esse movimento errático vinheram do próprio Robert Brown, que ao continuar com seus experimentos, testificou que as moléculas inorgânicas imersas em um fluido líquido também executavam esse tipo de movimento. Desse modo, ele descartou a possibilidade de que este movimento estivesse relacionado apenas com às partículas

orgânicas, ou seja, associados apenas às partículas “vivas”.

Com o passar dos anos, muitos trabalhos relacionados ao movimento browniano foram desenvolvidos, a maioria até baseados na teoria de probabilidades, porém, estes não se mostraram tão animadores para os pesquisadores no início do século XIX. No entanto, no início do século XX, o tema voltou a despertar o interesse da comunidade científica. Esse fato se deu após o matemático francês Louis Bachelier defender sua tese de doutorado (em 1900) denominada *Teoria da Especulação*. No trabalho em questão, ele utilizou o movimento browniano como base para a criação de um modelo matemático que desenvolvesse melhores soluções para os problemas encontrados no mercado financeiro (BACHELIER, 1900). Por esse motivo e demais contribuições na área de dinâmica estocástica, Bachelier pode ser considerado o pai da matemática financeira.

Um segundo episódio que chamou atenção para o assunto, foi quando o debate entre o estatístico Karl Pearson e o físico Lord Rayleigh veio a público (PEARSON, 1905) (RAYLEIGH, 1905). Esse acontecimento chamou a atenção dos grandes cientistas da época a os quais se destacam, Albert Einstein (EINSTEIN, 1905) (EINSTEIN, 1906) e Marian Smoluchowski (SMOLUCHOWSKI, 1916). Neste momento, foi quando o físico alemão de fato resolveu o problema, deixando publicada a explicação mais aceitável mediante a comunidade científica.

De fato, em 1905, A. Einstein motivado a resolver o problema do movimento browniano, assumiu (assim como R. Brown) que não eram os grãos de pólen que eram a matéria ativa, mas sim que o movimento errático se originava nas colisões dos grãos com as moléculas de água presentes no sistema físico (EINSTEIN, 1905). Naquela época, ainda não se tinha um conhecimento popular da existência das moléculas e muito menos dos átomos. Sendo assim, além de consolidar o conceito da existência das moléculas e consequentemente dos átomos, o alemão ainda conseguiu calcular qual deveria ser o tamanho destas, apenas se utilizando de informações contidas no movimento browniano.

Três anos após as contribuições teóricas de Einstein (em 1908), o físico francês Jean Baptiste Perrin verificou experimentalmente (PERRIN, 1926) todas as previsões deixada pelo físico alemão para o movimento browniano, tendo como destaque a consolidação experimental da existência das moléculas, acabando assim, com todas as discussões a respeito da veracidade do modelo atomístico. Pelo devido reconhecimento a essa contribuição, Perrin ganhou o prêmio Nobel de Física de 1926.

O problema fundamental do caminhante aleatório começou a ser estudando com uma maior atenção a partir da década de 1960, pelo motivo de existir uma carência de modelos estatísticos

que descrevessem bem sistemas biológicos (VISWANATHAN et al., 2011). Dessas colaborações entre os profissionais de Física, Matemática e Biologia, emergiram novas formas de se fazer ciência, no qual todos saíram beneficiados no final. Um dos muitos benefícios alcançados, foi o desenvolvimento de vários modelos teóricos para atacar o problema das buscas aleatórias (VISWANATHAN et al., 2011) (LUZ et al., 2009). Como exemplo de tais modelos, podemos citar as caminhadas aleatórias com correlação (*correlated random walks*) (BARTUMEUS et al., 2005), os modelos de buscas intermitentes (*intermittent searches model*) (BÉNICHOU et al., 2006b) e por fim, os voos ou buscas aleatórias de Lévy (*Lévy flights or random searches*) (VISWANATHAN et al., 1996) (VISWANATHAN et al., 1999a).

Por exemplo, nas buscas aleatórias correlacionadas, é introduzida ao modelo, uma correlação de curto alcance entre as direções dos passos subsequentes. Tais correlações são incorporadas na tentativa de explicar o comportamento real do animal de se manter em uma determinada direção por um longo tempo. Nos dias atuais, utilizam-se modelos mais modernos tais como o das buscas aleatórias adaptativas e as buscas aleatórias compostas. Nesta última, ocorre uma alternância entre regimes de buscas extensivas e intensivas (ROGERS, 2008). Além dessas, têm sido utilizadas também as caminhadas ditas *self-avoiding walks* (SAWs) nas quais o caminhante não pode retornar a um sítio previamente visitado. Como tal, as SAWs também podem levar a algoritmos de buscas bastante eficazes. Por outro lado, não é possível na realidade que o caminhante memorize muitas posições outrora visitadas por muito tempo (SAKIYAMA; GUNJI, 2018).

Desse modo, podemos perceber que nos modelos teóricos originários (MATTHEWS, 1982) havia um grande número de variáveis relacionadas a melhor estratégia de busca para cada espécie de animal. Essas variáveis estão diretamente ligadas, por exemplo, a habilidade de predação, aspectos fisiológicos dentre outras características.

Em vista disso, desenvolveu-se uma grande quantidade de trabalhos a fim de determinar quais as variáveis que de fato seriam relevantes para a otimização da eficiência da busca por alimentos. No entanto, essa abordagem começou a sofrer uma perda de interesse, devido, entre outros aspectos, à dificuldades relacionadas a estudos laboratoriais e observações de campo (VISWANATHAN et al., 2011).

Todos esses modelos de busca desenvolvidos na época junto com os que vinham posteriormente, foram desenvolvidos para atacar problemas do tipo caminhantes aleatórios (*random walks*) e estão incorporados nas *teorias de otimização das buscas aleatórias*, (VISWANATHAN et al., 2011). Essas teorias têm por objetivo identificar quais os parâmetros que definem a

estratégia mais eficiente a ser utilizada pelos animais em busca de alimentos. Na teoria de otimização das buscas aleatórias, o animal em questão, adota uma dinâmica de busca por alimentos que otimiza o ganho líquido de calorias (WERNER; HALL, 1974). É presuposto que esses processos de busca vêm sendo otimizados há milhões de anos. Dessa maneira, os animais que conseguem otimizar esse ganho de energia térmica, em virtude das melhores estratégias de busca conseguem ter sucesso na perpetuação da espécie via um processo evolutivo de seleção natural (WERNER; HALL, 1974).

Em suma, podemos constatar nos modelos citados que em um contexto ecológico, os predadores à procura de alimentos em uma região desconhecida comporta-se como buscadores aleatórios. Porém, é importante salientarmos que o modelo do caminhante aleatório não serve apenas para mapear o comportamento de um animal à procura de alimentos. Ele pode também ser aplicado na extração de petróleo (DULLIEN, 2012), em computadores procurando por informações aleatórias (PIROLLI; CARD, 1995) e também pode ser utilizado para explicar o comportamento dos fótons espalhados em lasers aleatórios (SHARMA; RAMACHANDRAN; KUMAR, 2006). No entanto, apesar do caráter geral da teoria, no nosso trabalho iremos utilizar o contexto ecológico, mantendo assim, a roupagem do problema do *foraging*.

1.2 EVOLUÇÃO DOS MODELOS FUNDAMENTAIS DE BUSCAS ALEATÓRIAS

A partir dos anos de 1990, as colaborações interdisciplinares entre Física e Biologia se intensificaram a fim de um propósito comum, aguçar a compreensão da *teoria de otimização das buscas aleatórias*. Agora, ao invés de manter a atenção nas características específicas de cada animal, passou-se a observar os seus padrões gerais de movimento. Desse modo, surgiu a possibilidade de reduzir o número de variáveis, mantendo o foco apenas nos aspectos estatísticos globais durante a busca. Essa nova maneira de tratar o problema, facilitou a aplicação da teoria e à análise dos dados experimentais (VISWANATHAN et al., 2011).

A maioria dos estudos realizados em buscas aleatórias no contexto do problema do *foraging*, parte do pressuposto de que o animal não sabe a posição espacial de suas presas. Seguindo essa linha, o problema de um animal procurando por alimentos torna-se semelhante ao problema do caminhante aleatório em Física Estatística. Na realidade, sabe-se que animais podem demonstrar algum grau de conhecimento no que diz respeito ao ambiente de busca, onde tal conhecimento depende majoritariamente de sua espécie. Uma teoria dessa magnitude, que leve em consideração esse nível de conhecimento junto com os mecanismos que levem

à localização dos sítios-alvos, será em princípio, um objetivo a ser alcançado na teoria de otimização das buscas aleatórias (VISWANATHAN et al., 2011).

Os primeiros modelos das buscas aleatórias podem ser descritos como modelos relativamente simples quando comparados com os modelos atuais. Esse fato se dá, pois, estes, não possuem nenhum tipo de correlação entre os passos do caminhante e desconsideram qualquer tipo de tendência na busca. Por exemplo, quando uma busca está munida de uma correlação direcional, significa dizer que a direção do passo atual depende das direções dos passos tomadas anteriormente pelo caminhante. Quando não temos esse tipo de correlação, podemos dizer que não há uma direção privilegiada para os deslocamentos, o que implica diretamente que as chances do buscador efetuar um passo em qualquer direção são equiprováveis. Além do mais, na carência de correlações em geral, o comprimento do passo atual também não é influenciado pelos comprimentos prévios. Assim, um buscador com ausência de correlação, tem sua posição atual dependente apenas da posição do último passo executado. Processos estatísticos dessa natureza são ditos markovianos (WEISS; WEISS, 1994).

Como já foi dito, a década de 1990, foi um marco importante no estudo das buscas aleatórias, pois, nesta época, ocorreram evoluções importantes nos modelos estatísticos de busca. O primeiro modelo utilizado para buscas aleatórias realizadas por organismos biológicos foi um aperfeiçoamento da então caminhadas brownianas (KAREIVA; SHIGESADA, 1983) (CRIST et al., 1992) (HILL; HÄDER, 1997) (CODLING et al., 2004). Estes primeiros modelos foram batizados de caminhadas aleatórias correlacionadas (CACs), no qual agora, havia uma conexão entre as sucessivas orientações de passos (PATLAK, 1953). A principal motivação do incremento desta propriedade nos modelos estatísticos, foi a predisposição dos animais a seguir se movimentando ao longo da direção anterior. Isto acarretou em um maior uso dessa propriedade direcional para analisar o deslocamento animal em diferentes conjunturas (MORALES et al., 2004) (CODLING; PLANK; BENHAMOU, 2008) (BÉNICHOU et al., 2006a).

Dessa maneira, o aprimoramento desse modelo introduz uma tendência para uma determinada direção local, ou seja, cada passo tende a apontar na mesma direção do anterior. Contudo, foi observado que, o domínio sobre a direção dos passos futuros decai com o passar do tempo, de modo que, no final, a orientação dos passos se distribui de maneira uniforme após um grande número dos mesmos. Sendo assim, ficou constatado que as caminhadas aleatórias correlacionadas, bem como o movimento browniano, se submetem ao Teorema Central do Limite, isto é, o padrão dos deslocamentos após um grande número de passos tendem a uma distribuição gaussiana.

No decorrer dos anos, um outro modelo de busca foi apresentado à comunidade científica. Conhecido como caminhadas aleatórias intermitentes (CAIs), este modelo, trouxe inovação quando o assunto era detecção de alvos. As CAIs se destacavam ao caracterizar a dinâmica da busca em duas fases distintas: uma fase onde o caminhante apresenta movimentos com maior comprimento de passo (caráter balístico), onde o mesmo não é receptivo ao alvo, e outra fase no qual o caminhante realiza um movimento browniano durante o qual uma varredura local detalhada do espaço de busca é realizada, ocorrendo nesta fase a possível detecção dos sítios (LOMHOLT et al., 2008) (REYNOLDS, 2006).

Uma particularidade deste método, estava na duração relativa entre uma fase e outra, sendo esta ajustável ao ponto de gerar uma estratégia ótima a fim de solucionar o problema. Comparado com as buscas aleatórias comuns, este método demonstrou ser bem mais eficiente (OSHANIN et al., 2009). Atualizações mais recentes nesse modelo sugerem a inclusão de distribuições de tamanho de passos ditas com caudas longas, como por exemplo, a $p(\ell)$ lei de potência na fase de reposição (OSHANIN et al., 2009) como veremos posteriormente.

O principal marco relacionado as estratégias de buscas aleatórias, se deu com o desenvolvimento de novas ferramentas teóricas no contexto de Física Estatística e Sistemas Complexos. Tais ferramentas englobam desde dinâmica superdifusiva até as ideias de escalas (VISWANATHAN et al., 1996). Desse modo, apareceram orientações teóricas de que os voos de Lévy seriam uma estratégia de busca mais eficiente (VISWANATHAN et al., 1999a). Algum tempo depois, foi constatado experimentalmente (SIMS et al., 2008) que animais sob condições particulares, especialmente no regime de escassez de alimentos e desconhecimento da localização dos sítios-alvo, não têm a distribuição de tamanho de passos seguindo o padrão gaussiano, mas sim obedecendo um novo padrão de distribuição da soma dos comprimentos dos passos denominado distribuição de Lévy. Tais experimentos amadureceram a hipótese de que a distribuição de Lévy foi escolhida evolutivamente por dar mais vantagens em relação a detecção dos alvos para o caminhante (HUMPHRIES et al., 2010).

Uma diferença crucial entre as classes de distribuições gaussianas e as de Lévy é perceptível quando observamos o comportamento do caminhante para passos muito longos. Nota-se que as distribuições de Lévy decaem muito mais lentamente com a distância quando comparadas com as distribuições gaussianas, de forma que a probabilidade de ocorrer grandes passos numa distribuição de Lévy é consideravelmente maior do que numa distribuição controlada pelo TCL, conforme abordaremos a seguir.

Nas próximas seções discutiremos de maneira objetiva os fundamentos da mecânica esta-

tística, procurando entender matematicamente os parâmetros relevantes para o problema das buscas aleatórias. Em seguida, discutiremos com mais detalhes o Teorema Central do Limite (TCL), iniciando por sua definição e em seguida fazendo sua demonstração. Também abordaremos a forma generalizada do TCL, a fim de podermos comparar as buscas do tipo Lévy com buscas dominadas por distribuições de tamanho de passos submissas ao TCL. Por fim, iremos nos aprofundar mais na distribuição de tamanho de passos de Lévy, realizando de maneira objetiva a sua expansão na lei de potência no regime de $\ell \gg 1$. Particularmente, vamos estudar algumas propriedades estatísticas relacionadas ao problema das buscas aleatórias. Iremos analisar buscas em uma e em duas dimensões averiguando assim, se a dimensionalidade do espaço de busca tem influência direta no mecanismo que controla alguns parâmetros importantes do sistema. A consolidação deste estudo será o nosso principal objeto de interesse nesta tese.

1.3 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ESTATÍSTICA

Na presente seção discutiremos os elementos básicos da teoria de probabilidades. Abordando desde da definição mais simples de probabilidade até o conceito de probabilidade conjunta. Discutiremos todos os conceitos no regime das distribuições contínuas das variáveis aleatórias.

1.3.1 Distribuições contínuas de variáveis aleatórias

Considere uma variável aleatória x e suponha que queremos saber a probabilidade de, ao medirmos x , possamos encontrar algum valor X entre x e $x + dx$, logo,

$$P(x \leq X \leq x + dx) = p(x)dx, \quad (1.1)$$

no qual X é o valor medido e $p(x)$ é a *função densidade de probabilidade* (PDF), de maneira que $p(x)$ em questão é uma PDF devidamente normalizada.

As distribuições contínuas também estão munidas de algumas propriedades que se encontram nas distribuições discretas, tais como:

- **Valor Esperado:**

Considere uma variável aleatória x e uma PDF contínua $p(x)$. Temos que o valor esperado (*média*) de uma função $F(x)$ é dado por,

$$\langle F(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) F(x). \quad (1.2)$$

Note que sendo x uma variável aleatória, $F(x)$ também se caracteriza como aleatória, e assim também é descrita por uma PDF.

◦ Momentos da Distribuição:

Dado uma variável aleatória x e uma PDF $p(x)$, os momentos da distribuição é definido como sendo,

$$\xi_n \equiv \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n p(x), \quad (1.3)$$

onde, ξ_n pode ser convergente ou divergente (como veremos no caso da PDF α -estável de Lévy). Na mecânica estatística é comum também se definir os momentos centrados $\bar{\xi} \equiv \langle (x - x_0)^n \rangle$, de onde podemos extrair os conceitos de variância ($n = 2$), assimetria ($n = 3$) e curtose ($n = 4$).

◦ Função Característica:

$$\tilde{p}(k) = F.T [p(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) e^{-ikx}, \quad (1.4)$$

que nada mais é do que a transformada de Fourier da PDF, que pode ser recuperada pela transformada inversa dada por,

$$p(x) = I.F.T [\tilde{p}(k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{p}(k) e^{ikx}. \quad (1.5)$$

Expandindo e^{-ikx} em série de Taylor na Eq. (1.4), obtemos,

$$\begin{aligned}\tilde{p}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} x^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle,\end{aligned}\tag{1.6}$$

isto é, $\tilde{p}(k)$ pode ser construída a partir dos momentos de $p(x)$. Multiplicando a Eq. (1.6) por e^{ikx_0} , podemos obter momentos em relação a um valor de referência x_0 , os chamados *momentos centrais*,

$$\begin{aligned}e^{ikx_0} \tilde{p}(k) &= \int \frac{dk}{2\pi} p(x) e^{-ik(x-x_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x - x_0)^n \rangle.\end{aligned}\tag{1.7}$$

◦ **Cumulantes:**

Bem como a função característica, outro conjunto de números que pode ser usado para caracterizar uma distribuição são seus *cumulantes*. Assim, seja κ_n o cumulante de ordem n , é definido que,

$$\ln[\tilde{p}(k)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \kappa_n,\tag{1.8}$$

onde $\ln[\tilde{p}(k)]$ é dita função geratriz dos cumulantes. Substituindo a Eq. (1.6) no lado esquerdo da Eq. (1.8) chegamos em,

$$\ln[\tilde{p}(k)] = \ln \left(\underbrace{1 - ik\xi_1 - \frac{1}{2}k^2\xi_2 - i\frac{1}{6}k^3\xi_3 + \mathcal{O}(k^9)}_{\Delta} \right),\tag{1.9}$$

onde agora ficamos com $\ln[\tilde{p}(k)] = \ln(1 + \Delta)$. Considerando a expansão de $\ln(1 + \Delta)$ em série de Taylor, temos que,

$$\ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \dots.\tag{1.10}$$

Agora, comparando os termos e agrupando as potências de k até $\mathcal{O}(k^4)$ obtemos,

$$\ln[\tilde{p}(k)] = -ik\xi_1 - \frac{k^2}{2}(\xi_2 - \xi_1^2) + i\frac{k^3}{6}(\xi_3 - 3\xi_1\xi_2 + 2\xi_1^3). \quad (1.11)$$

Por fim, comparando a Eq. (1.11) com a Eq. (1.8) conseguimos encontrar os três primeiros cumulantes,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \xi_1 \\ \kappa_2 &= \xi_2 - \xi_1^2 \\ \kappa_3 &= \xi_3 - 3\xi_1\xi_2 + 2\xi_1^3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Note que o primeiro cumulante coincide com a média (valor esperado), o segundo com a variância e o terceiro com a assimetria da distribuição. Os demais cumulantes podem ser obtido prosseguindo com esta análise em ordens mais altas (KARDAR, 2007).

Com essa breve introdução revisitamos alguns conceitos básicos que serão de grande importância na demonstração do TLC. No entanto, antes precisamos esclarecer o conceito de probabilidade conjunta para que só assim, possamos entender o procedimento por completo.

1.3.2 Probabilidade Conjunta

Antes de demonstrarmos o TLC propriamente dito, iremos deixar bem definido o conceito de probabilidade conjunta (KARDAR, 2007). Considere $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ variáveis aleatórias, de maneira que possamos definir,

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N), \quad (1.13)$$

como sendo um vetor no espaço N -dimensional. Nosso principal interesse, é calcularmos a probabilidade de obtermos $\mathbf{x}$ dentro de um determinado volume do espaço N -dimensional. Por exemplo, $\mathbf{x}$ pode representar o vetor posição (x, y, z) de uma molécula de um gás armazenado

em uma sala. Neste caso, queremos a probabilidade de encontrar uma molécula no elemento de volume $dV = dx dy dz$, Portanto,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{x} + d\mathbf{x}) &= P(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_N \leq X_N \leq x_N + dx_N) \\ &\equiv p(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_N, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde $p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_N)$ é a PDF conjunta das variáveis $x_1, \dots, x_N$ e consequentemente, obedece a condição de normalização $p(\mathbf{x}) \geq 0$ e $\int d^N x p(\mathbf{x}) = 1$. Lembrando que estamos considerando a integração sobre todo o intervalo de possíveis valores de $x_1, \dots, x_N$.

Algumas definições relacionadas à PDF de uma variável se estendem trivialmente para as PDFs conjuntas. Por exemplo, considere o **valor esperado** e a **função característica**, as mesmas podem ser dadas por,

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int d^N x f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}), \quad (1.15)$$

e

$$\tilde{p}(\mathbf{k}) = \int d^N x p(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \langle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle, \quad (1.16)$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ e $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N k_i x_i$ respectivamente. Note que $\tilde{p}(\mathbf{k})$ é a transformada de Fourier N -dimensional de $p(\mathbf{x})$, de modo que, sua transformada inversa é representada por,

$$p(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^N} \tilde{p}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.17)$$

Munido dessas definições, podemos finalmente definir os **momentos** e **cumulantes**. Contudo, a expansão em série de Taylor é multivariável e, portanto, envolve termos cruzados, assim,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{k}) &= \langle e^{-ik_1 x_1} \cdots e^{-ik_N x_N} \rangle = \left\langle \left(\sum_{n_1}^{n_N} \frac{(-ik_1)^{n_1}}{n_1!} x_1^{n_1} \cdots \frac{(-ik_N)^{n_N}}{n_N!} x_N^{n_N} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{n_1}^{\infty} \cdots \sum_{n_N}^{\infty} \frac{1}{n_1! \cdots n_N!} \underbrace{\langle x_1 x_2 \cdots x_N \rangle}_{\xi_{n_1 \cdots n_N}} (-ik_1)^{n_1} \cdots (-ik_N)^{n_N}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde $\xi_{n_1 \dots n_N}$ são os respectivos **momentos conjuntos**. Observe que os mesmos são os coeficientes da expansão em torno de $-i\mathbf{k} = 0$, ou seja,

$$\xi_{n_1 \dots n_N} = \frac{\partial^{n_1}}{\partial(-ik_1)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial(-ik_2)^{n_2}} \cdots \frac{\partial^{n_N}}{\partial(-ik_N)^{n_N}} \tilde{p}(\mathbf{k} = 0). \quad (1.19)$$

Realizando um procedimento análogo, conseguimos encontrar uma expressão para os **cumulantes conjuntos**. Os mesmos são dados exatamente pelos coeficientes da expansão de $\ln \tilde{p}(\mathbf{k})$, dados por,

$$\kappa_{n_1 \dots n_N} = \frac{\partial^{n_1}}{\partial(-ik_1)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial(-ik_2)^{n_2}} \cdots \frac{\partial^{n_N}}{\partial(-ik_N)^{n_N}} \ln \tilde{p}(\mathbf{k} = 0). \quad (1.20)$$

1.4 O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Na presente seção iremos discutir um dos principais instrumentos teóricos normalmente utilizado em sistemas físicos com algum grau de aleatoriedade: o Teorema Central do Limite (TCL). De fato, o grande motivo das inúmeras aplicabilidades das distribuições gaussianas no âmbito científico geral, está constituído no TCL (SOARES; SOARES; EMILIANO, 2019). Diversos sistemas simples de caráter aleatório satisfazem suas poucas condições, e este fato deixou quase sempre marcada a presença da distribuição normal na explicação desses fenômenos.

Neste momento, iremos enunciar e demonstrar o Teorema Central do Limite de forma objetiva tomando como pressuposto suas principais características (KARDAR, 2007).

◦ **Teorema:** (Teorema Central do Limite). Seja Θ um conjunto formado por N variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas, obedecendo uma função densidade de probabilidade $p(x)$, com média $\langle x \rangle$ e variância $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ finitas. No limite de $N \rightarrow \infty$ a distribuição de probabilidades que descreve o comportamento da soma dos elementos do conjunto Θ , isto é, $x = \sum_{j=1}^N x_j$, converge para a distribuição gaussiana,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1.21)$$

com média $m = N\langle x \rangle$ e variância $\sigma^2 = N\langle (\Delta x)^2 \rangle$.

Iremos demonstrar o TCL para o caso de N variáveis aleatórias independentes determinadas a partir de uma mesma distribuição de probabilidades $p(\mathbf{x})$, com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Para concretizar tal feito, precisamos obter a PDF da variável $X = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - \langle x \rangle)$, isto é, estamos interessados em calcular o desvio da média das N medidas em relação a $\langle x \rangle$.

Inicialmente vamos considerar o fato de, $X = \sum_{j=1}^N \frac{(x - \langle x \rangle)}{N}$ poder ser escrita como $\sum_{j=1}^N \epsilon_j$, de modo que agora, a nossa PDF de interesse é $p(\epsilon)$, com,

$$\epsilon = \frac{x - \langle x \rangle}{N}. \quad (1.22)$$

Em seguida, note que $p(\epsilon \leq \epsilon_j \leq \epsilon + d\epsilon) = p(x \leq x_j \leq x + dx)$. Então, logo $p(\epsilon)d\epsilon = p(x)dx$, de modo que,

$$\tilde{p}_\epsilon(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon e^{-ik\epsilon} p(\epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{-ik(x - \langle x \rangle)}{N}} p(x). \quad (1.23)$$

Expandindo $e^{\frac{-ik(x - \langle x \rangle)}{N}}$ em série de Taylor, obtemos,

$$\tilde{p}_\epsilon(k) = \left\langle 1 - ik \frac{(x - \langle x \rangle)}{N} + \frac{1}{2} (-ik)^2 \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{N^2} + \dots \right\rangle. \quad (1.24)$$

Como $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$, podemos escrever a seguinte expressão,

$$\tilde{p}_\epsilon(k) = 1 - \frac{k^2}{2} \frac{\sigma_x^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (1.25)$$

Sendo N variáveis independentes, temos,

$$\tilde{p}_X(k) = \int dx_1 \cdots dx_N \exp\left(-ik \sum_{j=1}^N \epsilon_j\right) p(x_1) \cdots p(x_N), \quad (1.26)$$

ou ainda,

$$\tilde{p}_X(k) = \left[\int dx_1 e^{-ik\epsilon_1} p(x_1) \right]^N, \quad (1.27)$$

o que implica diretamente em,

$$\ln \tilde{p}_X(k) \cong \ln \left(1 - \frac{k^2 \sigma_x^2}{2N^2} \right)^N \cong -\frac{k^2 \sigma_x^2}{2N}. \quad (1.28)$$

Assim, fazendo o limite de $N \rightarrow \infty$ chegamos a conclusão que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_X(k) = e^{-\frac{k^2 \sigma_x^2}{2N}}. \quad (1.29)$$

Finalmente, tomando a transformada de Fourier inversa, obtemos,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p \left(X = \sum_{j=1}^N \frac{(x - \langle x \rangle)}{N} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} \exp \left(\frac{-X^2}{2\sigma_X^2} \right), \quad (1.30)$$

no qual, $\sigma_X = \sigma_x / \sqrt{N}$ é o desvio padrão da média das N medidas.

Portanto, observamos que a PDF relacionada à soma das variáveis aleatórias x_j converge para a distribuição normal no limite de $N \rightarrow \infty$ para qualquer $p(x)$ com **média** e **variância** finita, o que caracteriza o TCL como havíamos discutido. Na presente demonstração, consideramos as variáveis x_j independentes, porém, o teorema ainda é válido para variáveis com uma dependência de curto alcance.

Para o caso em que as distribuições de probabilidades $p(x)$ possuírem cumulantes infinitos, como por exemplo, $p(x) \approx 1/|x|^{1+\alpha}$, onde $0 < \alpha \leq 2$, a soma das variáveis x_j independentes converge para a distribuição de Lévy, como discutiremos em seções posteriores (KARDAR, 2007).

1.4.1 Caminhadas aleatórias gaussianas em 1D

Nesta subseção iremos abordar o problema das caminhadas aleatórias gaussianas em uma dimensão. Faremos uma abordagem de forma introdutória a fim de obter um “primeiro contato” com o problema que será discutido nesta tese.

Desse modo, considere um caminhante que se move ao longo de uma reta, partindo da origem. Sempre após um intervalo de tempo τ ele executa um passo de comprimento h

para direita, com probabilidade p ou um passo com a mesma distância para a esquerda, com probabilidade $q = 1 - p$. Com a finalidade de descrever a busca do caminhante vamos introduzir um conjunto de variáveis aleatórias independentes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ que assumem os valores de $+1$ ou -1 conforme o passo seja dado para direita ou para a esquerda, respectivamente (TOMÉ, 2001). Note que a variável σ_j indica o sentido do j -ésimo passo, e portanto, ela toma o valor $+1$ com probabilidade p e o valor -1 com probabilidade q . Finalmente, observe que a posição do caminhante após n passos, isto é, no instante $t = n\tau$, será $x = hm$, em que $m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_n$. A média e variância de σ_j nesse sistema são dadas por,

$$a = \langle \sigma_j \rangle = p - q, \quad (1.31)$$

$$b = \langle \sigma_j^2 \rangle - \langle \sigma_j \rangle^2 = 1 - (p - q)^2 = 4pq, \quad (1.32)$$

respectivamente. A função característica $g(k)$ da variável σ_j é,

$$g(k) = \langle e^{ik\sigma_j} \rangle = pe^{ik} + qe^{-ik}. \quad (1.33)$$

Para determinar a probabilidade $p_n(m)$ de o caminhante estar na posição $x = hm$ depois de executar n passos, isto é, no instante $t = n\tau$, precisamos primeiramente encontrar a função característica correspondente, logo,

$$G_n(k) = [g(k)]^n = (pe^{ik} + qe^{-ik})^n. \quad (1.34)$$

Expandindo $G_n(k)$ em série binomial, obtemos,

$$G_n(k) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell} e^{ik(2\ell-n)}. \quad (1.35)$$

Comparando com a definição de $G_n(k)$, dada por,

$$G_n(k) = \sum_{m=-n}^n p_n(m) e^{ikm}, \quad (1.36)$$

em que m toma os valores $-n, -n+2, \dots$, e n , vemos que,

$$p_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}. \quad (1.37)$$

A média e a variância de m são dadas por,

$$\langle m \rangle = na = n(p - q), \quad (1.38)$$

$$\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = nb = 4npq. \quad (1.39)$$

Se desejarmos obter a distribuição de probabilidades para $n \gg 1$, basta utilizarmos o teorema do limite central, já que a distribuição em questão tem cumulantes finitos. Sendo assim, a partir do resultado da Eq. (1.30), obtemos,

$$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nb}} e^{-(m-na)^2/2nb}, \quad (1.40)$$

válido apenas para $n \gg 1$. A densidade de probabilidade $\rho(x, t) = p_n(m)/h$ da variável x no instante t é,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-ct)^2/4Dt}, \quad (1.41)$$

em que,

$$c = \frac{ha}{\tau} = \frac{h(p - q)}{\tau}, \quad (1.42)$$

$$D = \frac{h^2b}{2\tau} = \frac{h^2 2pq}{\tau}. \quad (1.43)$$

Obtemos ainda os resultados,

$$\langle x \rangle = ct, \quad (1.44)$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2Dt, \quad (1.45)$$

que indicam que c é a velocidade média do caminhante. Caso o modelo do caminhante aleatório seja aplicado para descrever o movimento de uma partícula num certo meio, então D é chamado de coeficiente de difusão.

Consideramos agora uma busca aleatória 1D genérica. Suponha que a cada intervalo de tempo τ o caminhante se desloca de um valor x_j da posição onde se encontra. Suponha também, que ele parta da origem, a posição no instante $t = \tau n$ é $x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$. Seja $p(x_j)$ a densidade de probabilidade de x_j e seja $g(k)$ a correspondente função característica, isto é,

$$g(k) = \langle e^{ikx_j} \rangle = \int p(x_j) e^{ikx_j} dx_j. \quad (1.46)$$

A função característica $G(k)$ corresponde à variável x é dada por,

$$G(k) = [g(k)]^n. \quad (1.47)$$

Para obter a densidade de probabilidades da variável x para $n \gg 1$, utilizaremos a mesma técnica usada para a demonstração do Teorema Central do Limite. Portanto, cabe a nós expandirmos a função característica $g(k)$ em cumulantes até segunda ordem, ou seja,

$$g(k) = e^{iAk - nBk^2/2}, \quad (1.48)$$

desde que a média A e a variância B de x_j existem. Portanto,

$$G(k) = e^{inAK - nBk^2/2}. \quad (1.49)$$

Lembrando que $t = n\tau$ e definindo $c = A/\tau$ e $D = B/2\tau$, assim,

$$G(k) = e^{ictk - Dtk^2}, \quad (1.50)$$

que é justamente a função característica de uma distribuição gaussiana de média ct e variância $2Dt$. Desse modo, a PDF $\rho(x, t)$ de x é,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-ct)^2/4Dt}. \quad (1.51)$$

O resultado da Eq. (1.51) pode ser entendido mais claramente se examinarmos um sistema composto por um conjunto de muitas partículas que executam movimentos aleatórios independentes e se levarmos em conta que a densidade de partículas é proporcional à densidade de probabilidades ρ acima. Para o regime de tempos longos, a densidade de partículas é uma gaussiana centrada em $x = ct$, com largura $\Delta = \sqrt{2Dt}$. É importante notar que $\rho(x, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (1.52)$$

Quando $c = 0$ essa equação se reduz a forma,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1.53)$$

que é a equação da difusão. A Eq. (1.52) é a equação da difusão com o coeficiente de arrasto. Ambas são um caso particular de uma outra equação mais completa: a equação de Fokker-Planck (TOMÉ, 2001).

1.4.2 Caminhadas aleatórias gaussianas em 2D

Nesta seção, vamos considerar a busca aleatória de um caminhante se movendo num espaço bidimensional. As buscas em três ou mais dimensões podem ser tratadas de maneira semelhante. Neste caso, a cada intervalo de tempo τ , o caminhante se desloca da posição onde se encontra para uma nova posição. No j -ésimo intervalo de tempo, denotamos o deslocamento pelo vetor $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$. Para prosseguir com a análise, iremos considerar também que o caminhante esteja na origem das coordenadas, a posição no instante $t = n\tau$ é $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n$. As variáveis $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n$ são consideradas como vetores independentes, com uma determinada distribuição de probabilidades $p(\mathbf{r}_j) = p(x_j, y_j)$ (TOMÉ, 2001). A correspondente função característica $g(\mathbf{k}) = g(k_1, k_2)$ pode ser escrita como,

$$g(\mathbf{k}) = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \rangle = \langle e^{i(k_1x_j+k_2y_j)} \rangle, \quad (1.54)$$

ou ainda por,

$$g(\mathbf{k}) = \int \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} p(\mathbf{r}_j) dx_j dy_j. \quad (1.55)$$

Note que x_j e y_j podem não ser independentes. A função característica $G(\mathbf{k})$, correspondente ao vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é dada por,

$$G(\mathbf{k}) = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \rangle = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\dots+\mathbf{r}_n)} \rangle = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \rangle^n = [g(\mathbf{k})]^n. \quad (1.56)$$

A fim de obter a PDF do vetor $\mathbf{r}$, utilizaremos a mesma técnica usada para demonstrar o TCL, isto é, vamos expandir $g(\mathbf{k})$ em cumulantes até ordem k^2 . Logo,

$$g(\mathbf{k}) = \exp \left\{ i(a_1k_1 + a_2k_2) - \frac{1}{2}(b_{11}k_1^2 + 2b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2) \right\}, \quad (1.57)$$

em que

$$a_1 = \langle x_j \rangle \quad \text{e} \quad a_2 = \langle y_j \rangle \quad (1.58)$$

são cumulantes de primeira ordem e

$$b_{11} = \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2, \quad (1.59)$$

$$b_{12} = \langle x_j y_j \rangle - \langle x_j \rangle \langle y_j \rangle, \quad (1.60)$$

$$b_{22} = \langle y_j^2 \rangle - \langle y_j \rangle^2, \quad (1.61)$$

são os cumulantes de segunda ordem. Assim, para $t = n\tau$ grande temos,

$$G(\mathbf{k}) = \exp \left\{ in(a_1 k_1 + a_2 k_2) - \frac{n}{2}(b_{11} k_1^2 + 2b_{12} k_1 k_2 + b_{22} k_2^2) \right\}. \quad (1.62)$$

A densidade de probabilidade $p_n(\mathbf{r}) = p_n(x, y)$ do vetor aleatório $\mathbf{r} = (x, y)$ pode ser escrita através da expressão,

$$p_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} G(\mathbf{k}) dk_1 dk_2. \quad (1.63)$$

Resolvendo a Eq. (1.63) obtemos uma gaussiana bidimensional dada por,

$$p_n(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{n^2 2D}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4nD} [b_{22}(x - na_1)^2 + 2b_{12}(x - na_1)(y - na_2) + b_{11}(y - na_2)^2] \right\}, \quad (1.64)$$

onde neste caso, $D = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)/2$.

◦ **Exemplo:** Suponha que a cada intervalo de tempo τ um caminhante se desloque uma distância h nas direções $+x$, $-x$, $+y$ ou $-y$ com chances equiprováveis. Nesse caso,

$$p(x_j, y_j) = \frac{1}{4}\delta(x_j - h)\delta(y_j) + \frac{1}{4}\delta(x_j + h)\delta(y_j) + \frac{1}{4}\delta(x_j)\delta(y_j - h) + \frac{1}{4}\delta(x_j)\delta(y_j + h). \quad (1.65)$$

A função característica relacionada ao sistema é,

$$g(k_1, k_2) = \langle e^{i(k_1 x_j + k_2 y_j)} \rangle = \frac{1}{4} (e^{ihk_1} + e^{-ihk_1} + e^{ihk_2} + e^{-ihk_2}), \quad (1.66)$$

ou podemos escrever na seguinte forma,

$$g(k_1, k_2) = \frac{1}{2} (\cos hk_1 + \cos hk_2). \quad (1.67)$$

Para obter resultados válidos para n grande, utilizamos a expansão em cumulantes até ordem de $\mathbf{k}^2$, dada por,

$$g(k_1, k_2) = e^{-h^2(k_1^2 + k_2^2)/4}. \quad (1.68)$$

Sendo assim,

$$G(k_1, k_2) = e^{-nh^2(k_1^2 + k_2^2)/4}, \quad (1.69)$$

no qual tomando a transformada de Fourier inversa da Eq. (1.69), obtemos,

$$p_n(x, y) = \frac{1}{\pi n h^2} e^{-(x^2 + y^2)/nh^2}. \quad (1.70)$$

Definindo o coeficiente de difusão $D = h^2/4\tau$, então a densidade de probabilidade $\rho(x, y, t)$ de x e y no instante t é dada por,

$$\rho(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-(x^2 + y^2)/4Dt}. \quad (1.71)$$

Neste caso, é fácil ver que $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = 2Dt$, de maneira que, $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt$.

1.5 O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE GENERALIZADO

Como foi visto, o TCL institui que a soma de um conjunto de variáveis aleatórias, distribuídas com uma mesma PDF e munidos de valor esperado e variâncias finitas, converge para a distribuição gaussiana no limite de $N \rightarrow \infty$, onde N é o número de medidas realizadas. No entanto, no caso em que a distribuição $p(x)$ não possuir cumulantes finitos, o que acontece? Nesse caso, a soma ainda converge, mas agora, para uma outra família de distribuições, as chamadas distribuições α -estáveis de Lévy (KARDAR, 2007) como veremos adiante.

1.5.1 Distribuições α -estáveis de Lévy

Conforme diz o Teorema Central do Limite, a PDF que distribui a variável,

$$x = \frac{1}{N^{1/2}} (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_N), \quad (1.72)$$

é uma gaussiana, se a distribuição de probabilidades de cada variável ν_j possuir segundo momento bem definido (*cumulantes finitos*) para um valor de N medidas suficientemente grande ($N \gg 1$) (TOMÉ, 2001). Por conveniência, aqui admitimos apenas PDFs com médias nulas. Caso as distribuições das variáveis ν_j sejam gaussianas, não é necessário que N seja grande, isto é, para qualquer valor de N , a distribuição de x será gaussiana se as distribuições de ν_j forem gaussianas. Podemos então dizer, que a distribuição gaussiana é uma distribuição estável para a variável descrita pela Eq. (1.72).

Portanto, outras distribuições estáveis podem ser alcançadas se considerarmos a seguinte variável,

$$y = \frac{1}{N^\beta} (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_N), \quad (1.73)$$

onde $\beta > 0$, retornando ao caso da Eq. (1.72), quando $\beta = 1/2$. Dada a distribuição $p(\nu_j)$, em que estamos considerando ser a mesma para todas as variáveis ν_j , estamos interessados em obter a distribuição $p^*(y)$ da variável y . Escrevendo $\tilde{p}^*(k)$ como a função característica associada a variável y , temos que,

$$\tilde{p}^*(k) = \langle e^{iky} \rangle = \prod_j \langle e^{ik\nu_j/N^\beta} \rangle = \langle e^{ik\nu_1/N^\beta} \rangle^N, \quad (1.74)$$

e assim,

$$\tilde{p}^*(k) = [\tilde{p}(kN^{-\beta})]^N, \quad (1.75)$$

onde $\tilde{p}(k)$ é a função característica relacionadas às variáveis ν_j . Assumindo que a distribuição resultante $p^*(y)$ seja a mesma distribuição para $p(y_j)$, então,

$$\tilde{p}(k) = [\tilde{p}(kN^{-\beta})]^N, \quad (1.76)$$

onde temos justamente a equação que relaciona $\tilde{p}(k)$. A correspondente distribuição de probabilidades é denominada genericamente de distribuição estável. Tomando o logaritmo de ambos os lados da Eq. (1.76), obtemos,

$$\ln \tilde{p}(k) = N \ln \tilde{p}(kN^{-\beta}), \quad (1.77)$$

onde vemos que $\ln \tilde{p}(k)$ é uma função homogênea em k . Em vista disso, uma possível solução dessa equação é dada por,

$$\ln \tilde{p}(k) = -a|k|^\alpha, \quad (1.78)$$

em que $\alpha = 1/\beta$ e $a > 0$. Podemos ir mais além, obtendo uma expressão fechada para $\tilde{p}(k)$, então,

$$\tilde{p}(k) = e^{-a|k|^\alpha}. \quad (1.79)$$

Note que quando $\alpha = 2$ temos que $\beta = 1/2$ e novamente a distribuição estável em questão é a gaussiana. Já quando $0 < \alpha < 2$ elas são denominadas distribuições α -estáveis de Lévy. O exemplo mais simples de uma distribuição de Lévy é obtido para o caso $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e corresponde a chamada distribuição de Cauchy-Lorentz dada por,

$$p(y) = \frac{a}{\pi(y^2 + a^2)}. \quad (1.80)$$

Para valores de $\alpha \in (0, 2)$, a distribuição não tem uma forma fechada simples, mas pode ser obtida a partir da função característica por meio da transformada de Fourier inversa, isto é,

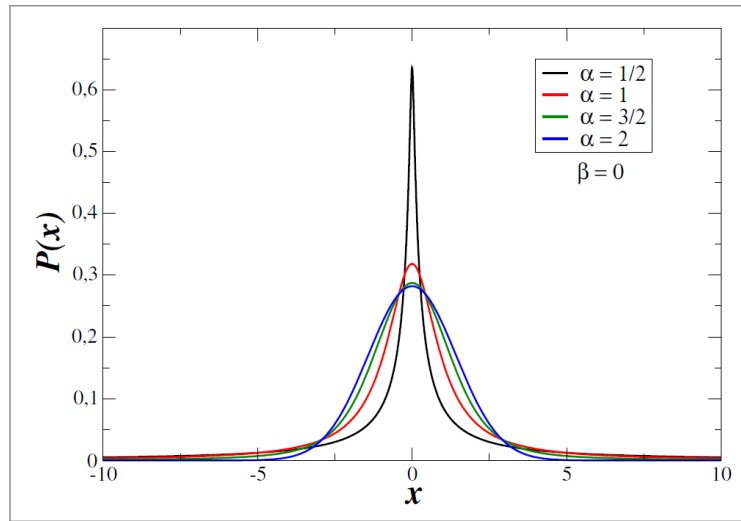
$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky - a|k|^\alpha} dk. \quad (1.81)$$

A Fig. (1) ilustra essas distribuições para os casos $\alpha = 2$ (gaussiana), $\alpha = 1$ (Cauchy-Lorentz), $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1,5$. É interessante notar que, no intervalo $0 < \alpha < 2$, essas distribuições decaem de forma algébrica no limite de $y \rightarrow \infty$. Consequentemente, o comportamento de $p(y)$ para $y \gg 1$ é dado por,

$$p(y) = \frac{A_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}, \quad (1.82)$$

em que $A_\alpha \approx \sin(\pi\alpha/2)\Gamma(1+\alpha)/\pi$. Note que para $y = 0$ a distribuição $p(y)$ diverge. Tomando o logaritmo encontramos $\ln p(y) = \ln A_\alpha - (1+\alpha) \ln |y|$, onde $\ln p(y)$ em função de $\ln y$ possui um comportamento linear.

Figura 1 – Gráficos que indicam o comportamento de quatro distribuições estáveis definidas pela Eq. (1.81), correspondentes a $\alpha = 2$ (gaussiana), $\alpha = 1$ (Cauchy-Lorentz), $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1,5$. Os gráficos denotam o perfil de $p(x) \times x$ respectivamente. Note que há um crescimento acentuado de $p(x)$ ao passo que α diminui.



Fonte: (ARAÚJO, 2017)

Observe que o comportamento algébrico da Eq. (1.82) nos direciona a um importante resultado: as distribuições α -estáveis no intervalo $0 < \alpha < 2$ geralmente possuem cumulantes infinitos (TOMÉ, 2001), porém, dependendo do valor de α a média (primeiro cumulante) pode ser calculada ao passo que a variância (segundo cumulante) não pode. Dessa forma, elas não obedecem às hipóteses do Teorema Central do Limite, e sim do Teorema Central do Limite Generalizado.

As distribuições de Lévy, no intervalo $0 < \alpha < 2$, descrevem fenômenos que representam grandes eventos raros, caracterizados aqui por uma cauda que decai lentamente como $p(y \rightarrow \infty) \sim y^{-(1+\alpha)}$ (KARDAR, 2007). Desse modo, o comportamento assintótico descrito acima, do tipo lei de potência, também conhecido como cauda longa, permite observar com mais facilidade a divergência de alguns momentos da distribuição. Essa propriedade nos motivou a utilizá-la no modelo para buscas aleatórias devido a facilidade ligada a variação de apenas um parâmetro (α). Fazendo somente essa varredura, é possível passar do regime difusivo ($\alpha = 2$) para o superdifusivo ($0 < \alpha < 2$), como veremos mais adiante.

1.5.1.1 Expansão da distribuição de Lévy em uma lei de potência

Ao verificar a Eq. (1.5), vemos que a distribuição de probabilidades $p(x)$ para a soma de N passos é dada pela transformada de Fourier inversa da função característica dos passos individuais, apenas utilizando a condição de que as variáveis x_j são independentes e igualmente distribuídas. Primeiramente, vamos considerar que a variável ℓ represente a soma dos comprimentos de N passos individuais. Fazendo a substituição $x = \ell$ na Eq. (1.5), ficamos com,

$$p(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{p}(k) e^{ik\ell}. \quad (1.83)$$

A função característica determina completamente a distribuição de ℓ e está munida de várias propriedades que serão bastante úteis. Porém, de maneira geral, pode-se mostrar que (NOLAN, 2020) que as distribuições α -estáveis possuem um $\tilde{p}(k)$ na forma,

$$\tilde{p}(k) = \begin{cases} \exp[-|k|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(k))], & \text{para } \alpha \neq 1 \\ \exp[-|k|(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \ln(|k|))], & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.84)$$

em que $0 < \alpha \leq 2$ e $-1 \leq \beta \leq 1$ respectivamente. A função $\text{sign}(k)$ é denominada função sinal. A Eq. (1.84) é a forma geral da função característica da distribuição de Lévy, onde nela, temos presente a fase que depende do parâmetro β , onde este é o responsável pela assimetria na distribuição. De fato, para $\beta = 0$, obtemos a função característica da distribuição de Lévy simétrica dada pela Eq. (1.79).

Aqui também vamos considerar $a = \ell_0$ uma constante com dimensão de comprimento. Vimos que o TCL generalizado garante que após um número grande de passos N a PDF para um deslocamento ℓ em um processo de caminhadas de Lévy converge para uma família de distribuições de Lévy, chamadas usualmente de distribuições α -estáveis de Lévy. Em vista disso, note que a parte imaginária se anula na integração da Eq. (1.83), consequentemente, obtemos no caso simétrico,

$$p(\ell) = \int_0^\infty \frac{\cos(k\ell)}{\pi} e^{-N\ell_0^\alpha k^\alpha} dk, \quad (1.85)$$

com $0 < \alpha \leq 2$. Integrando por partes a equação acima, encontramos,

$$p(\ell) = \frac{N\ell_0\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k\ell)}{\ell} k^{\alpha-1} e^{-N\ell_0 k^\alpha} dk. \quad (1.86)$$

Fazendo uma substituição simples, $y = k\ell \Rightarrow dy = \ell dk$, logo,

$$p(\ell) = \frac{N\ell_0\alpha}{\pi\ell^{1+\alpha}} \int_0^\infty y^{\alpha-1} \sin(y) e^{-N\ell_0 y^\alpha / \ell^\alpha} dy. \quad (1.87)$$

Considerando o limite de $\ell \rightarrow \infty$ com $0 < \alpha < 2$, encontramos,

$$p(\ell) \approx \frac{N\ell_0\alpha}{\pi\ell^{1+\alpha}} \int_0^\infty y^{\alpha-1} \sin(y) dy. \quad (1.88)$$

Resolvendo a integral separadamente, encontramos que, $\int_0^\infty y^{\alpha-1} \sin(y) dy = \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)$, onde $\Gamma(\alpha)$ é a função gama. Sendo assim, vemos que no limite assintótico com $\ell \gg 1$, temos que,

$$p(\ell) \approx \frac{N\ell_0\alpha\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi} \frac{1}{\ell^{1+\alpha}}, \quad (1.89)$$

ou ainda, fazendo $A_\alpha = N\ell_0\alpha\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)/\pi$, finalmente encontramos,

$$p(\ell) \approx \frac{A_\alpha}{|\ell|^{1+\alpha}}, \quad (1.90)$$

para $0 < \alpha < 2$. Sendo assim, verificamos que para $\ell \gg 1$, a distribuição de Lévy se comporta como uma lei de potência, demonstrando assim, uma das distribuições que estudaremos neste trabalho. Aqui, iremos considerar um caminhante aleatório em espaços de busca 1D e 2D, com comprimentos de passos individuais ℓ independentes, distribuídos por uma PDF de Lévy e uma lei de potência dada por,

$$p(\ell) = \frac{A_\ell}{|\ell|^{1+\alpha}}, \quad \text{se } |\ell| \geq \ell_0, \quad (1.91)$$

em que, caso contrário $p(\ell) = 0$, devido ao truncamento inferior em $\ell = \ell_0$, pois, distribuições com $\ell_0 = 0$ não são normalizáveis. A partir deste momento associaremos também em 1D,

passos de tamanhos negativos ($|\ell| = -\ell$) com os deslocamentos para a esquerda e passos de tamanhos positivos ($|\ell| = \ell$) com deslocamentos para direita, com passos de tamanhos idênticos em qualquer dos dois sentidos sendo equiprováveis. Com as presentes considerações, podemos normalizar a $p(\ell)$ acima e obter uma expressão fechada para A_ℓ . Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\ell) d\ell = A_\ell \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{d\ell}{|\ell|^{\alpha+1}} + A_\ell \int_{\ell_0}^{+\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^{\alpha+1}} = 1. \quad (1.92)$$

Substituindo $u = -\ell \rightarrow du = -d\ell$ e ajustando os limites de integração na primeira integral, temos

$$A_\ell \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{-du}{|-u|^{\alpha+1}} = A_\ell \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{du}{|u|^{\alpha+1}}, \quad (1.93)$$

o que deixa a integral acima igual à segunda. Assim, resolvendo as duas partes temos,

$$\begin{aligned} 2A_\ell \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^{\alpha+1}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\ell_0^{-\alpha}}{\alpha} &= \frac{1}{2A_\ell} \\ \Rightarrow A_\ell &= \frac{\alpha}{2} \ell_0^\alpha. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Observamos que para a distribuição não divergir precisamos impor $\alpha > 0$. Desta forma, podemos reescrever a nossa distribuição como,

$$p(\ell) = \frac{A_\ell}{|\ell|^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2} \ell_0^\alpha \frac{1}{|\ell|^{\alpha+1}}, \text{ se } |\ell| \geq \ell_0. \quad (1.95)$$

Em nosso trabalho, esse será o formato da lei de potência que utilizaremos. Também, verificaremos que mesmo a lei de potência sendo o limite assintótico da distribuição de Lévy, as duas $p(\ell)$ tem algumas diferenças quantitativas que serão exploradas nos capítulos posteriores.

1.5.2 A distribuição de Lévy e o problema da busca aleatória

Ao analisar com detalhes o problema da busca aleatória, pode-se dizer que a distribuição de Lévy, dentre as outras, é a que melhor se adequa ao problema quando o assunto é modelagem

computacional. Isso se dá, por conta da sua capacidade de computar eventos estatísticos raros quando comparada com as distribuições gaussianas ou qualquer outra PDF governada pelo TCL. As $p(\ell)$'s de Lévy, por exemplo, já foram utilizadas para modelar a trajetória de um fóton em um meio turbulento (RAPOSO et al., 2022), para modelar o episódio da inversão de pólos magnéticos da Terra (CARBONE et al., 2006). Partindo para as ciências biológicas, as distribuições de Lévy também já foram utilizadas por cientistas para a modelagem do evento das batidas do coração, sendo estas com valores $\alpha = 1,7$ associadas às pessoas saudáveis, e $\alpha > 2$ (comportamento normal) relacionadas às pessoas com alguma patologia (PENG et al., 1993).

Estando sempre presente na maioria dos eventos estatísticos, a distribuição de Lévy também se apresenta no problema ecológico de buscas por alimentos (problema do *foraging*). Tendo em vista que, nesse contexto, já foram observadas as chamadas difusões anômalas, descritas por ter um grande número de pequenos saltos intercalados por longos saltos raros.

Nessa circunstância, é conveniente diferenciar as chamadas caminhadas de Lévy (*Lévy walks*) dos ditos voos de Lévy (*Lévy flights*) (VISWANATHAN et al., 1996) (SHLESINGER; ZASLAVSKY; FRISCH, 1995). Nas caminhadas de Lévy, o buscador viaja com velocidade constante e finita e em geral indepedente do tamanho do passo. Desse modo, o tempo para o caminhante percorrer toda a trajetória é proporcional à distância total de todo o percurso. Este fato acarreta diretamente na existência de um deslocamento quadrático médio dependente do tempo. Por outro lado, nos voos de Lévy os passos são instantâneos, ou seja, passos sem nenhuma duração temporal, de maneira que o caminhante salta dentre diferentes posições no espaço de busca sem que um intervalo de tempo Δt seja definido entre duas posições ocupadas. Dessa forma, podemos observar que o deslocamento médio quadrático não pode existir em função do tempo. Por esse motivo, é praticamente impossível a utilização dos voos de Lévy em fenômenos físicos realistas. Por tal motivo, as *Lévy walks* são as candidatas ideais para modelar o comportamento de uma partícula em difusão anômala.

Neste trabalho, usaremos os conceitos e técnicas de física estatística e sistemas complexos de forma direta e objetiva para observarmos o comportamento das distribuições de Lévy e lei de potência respectivamente. Daremos uma atenção maior nos aspectos de um parâmetro específico que até então não comentamos, a chamada *entropia de Shannon* para as buscas de Lévy. Abordaremos o tema de forma sucinta no capítulo 3, onde explicaremos os principais tópicos da Teoria da Informação Clássica.

No próximo capítulo, iremos nos aprofundar em um modelo (método) de buscas aleatórias

denominado de *Método do Operador Integral*. Lá evidenciaremos todo formalismo teórico que compõe o modelo. Aplicaremos o mesmo, especificamente para às buscas dominadas pela lei de potência, procurando interpretar nossos resultados a luz da teoria geral das buscas aleatórias.

2 O MÉTODO DO OPERADOR INTEGRAL

Neste capítulo discutiremos os principais elementos do método do operador integral, método este, aplicado às buscas aleatórias unidimensionais, no qual um caminhante procura por sítios-alvo espalhados ao longo de uma trajetória retilínea. Inicialmente, definiremos as regras gerais que comandam o modelo computacional que utilizamos, em seguida calcularemos de forma global o livre caminho médio percorrido pelo buscador até o encontro de um sítio e mostraremos que o mesmo está fortemente relacionado com a eficiência da busca. Também vamos obter uma expressão para as probabilidades de o caminhante encontrar os seus alvos, onde os mesmos estarão localizados em posições opostas em relação ao ponto de partida. De maneira sucinta, mostraremos como ocorre o processo de discretização do espaço de busca, tendo em vista a necessidade da obtenção dos resultados numéricos. Por último, calcularemos analiticamente o livre caminho médio, os elementos da matriz de saltos entre os sítios e a probabilidade de que o buscador alcance cada alvo existente. Nessa etapa, usaremos como gerador do tamanho e direção dos passos do caminhante a distribuição de probabilidades do tipo lei de potência.

2.1 REGRAS GERAIS DE UM MODELO DE BUSCAS ALEATÓRIAS

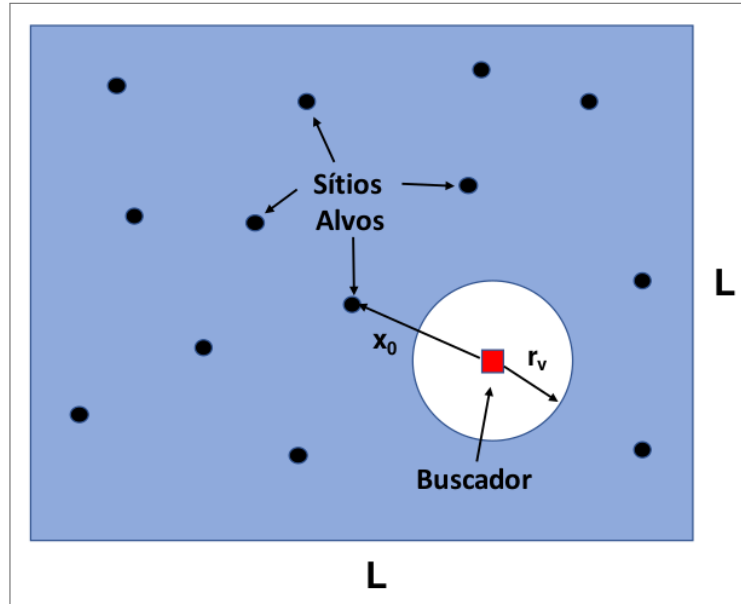
Daremos início ao capítulo, descrevendo de forma objetiva o modelo teórico de buscas aleatórias que utilizamos nesta tese. Em seguida, vamos nos limitar a um caminhante num espaço de busca unidimensional, que é o nosso caso de interesse no momento, levando em conta que queremos compreender o método do operador integral.

Considere um caminhante aleatório em um espaço d -dimensional procurando por sítios-alvo distribuídos aleatoriamente, separados por uma distância média λ entre eles. Neste processo de busca, o caçador possui uma distância limite ao seu redor para que o sítio seja detectado por ele, isto é, o alvo só será encontrado quando o mesmo se localizar dentro das fronteiras dessa distância. Esta peculiaridade presente no modelo recebeu o nome de “raio de visão”, no qual denotaremos por r_v . Em sua caminhada, o buscador se comporta balísticamente quando está à procura do alvo, nesse percurso, ele varre um “volume” proporcional a r_v^{d-1} . Sendo assim, podemos dizer nessas condições que λ seria o comprimento médio entre dois sítios-alvo nesse corredor (VISWANATHAN et al., 1999b), ou seja,

$$\lambda \sim \frac{1}{\rho r_v^{d-1}}, \quad (2.1)$$

onde ρ é interpretada como a densidade de sítios-alvo (RAPOSO, 2003). O procedimento geral de busca aleatória que consideraremos no modelo obedece de forma objetiva duas regras que veremos a seguir. No entanto, antes de examinarmos as mesmas, podemos contemplar um esquema ilustrativo do modelo de busca em duas dimensões como mostra a Fig. 2.

Figura 2 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões. Vemos vários sítio-alvo (círculo preto) localizados dentro de uma “caixa” $L \times L$. A regra 1 entrará em vigor quando pelo menos um sítio se encontrar dentro do raio de visão r_v (círculo branco), nesta condição, o caminhante se move até ele em linha reta. Enquanto o alvo não é detectado, o caminhante escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo ℓ_j a partir de um sorteio regido por uma distribuição $p(\ell)$ como descrito na regra 2. Todo o processo de busca está sujeito a condições de contorno periódicas.



Fonte: O autor (2023)

A Fig. 2 nos traz um esquema onde um caminhante aleatório realiza buscas em um espaço de busca em duas dimensões. A ordem e o tipo de ação a ser executada pelo buscador durante a sua busca segue um padrão governado pelas regras apresentadas a seguir:

1. Se existir um sítio presente no limite do raio de visão r_v do buscador, o mesmo se direcionará em linha reta ao sítio detectado.
2. Se não existir um sítio, ocorre um sorteio do tamanho do passo, regido por uma distribuição de probabilidades $p(\ell)$, e da sua direção, uniformemente distribuída em todo o espaço.

O caminhante então inicia o processo de busca sempre procurando por um sítio-alvo dentro do raio r_v à medida que se desloca. Se ao longo da extensão do passo ele detecta um sítio, o passo é truncado e ele se dirige ao sítio em linha reta, segundo a regra 1. Se nenhum sítio é detectado ao final do passo, então o processo de busca se reinicia a partir do início da regra dois.

Este tipo de modelo se adequa consideravelmente ao problema biológico do *foraging* onde neste sistema temos a permissão para estudar essencialmente dois casos, a saber: busca **destrutiva** e busca **não destrutiva** (VISWANATHAN et al., 1999b). De maneira sucinta, a busca **destrutiva** acontece quando o sítio-alvo, outrora encontrado pelo caminhante, se torna indetectável em uma busca posterior. Em um problema biológico, podemos considerar que a presa foi totalmente consumida pelo predador e o seu ciclo de reprodução demora um tempo maior para acontecer do que o tempo da caça. Dessa maneira, a busca **não destrutiva** se dá quando o sítio-alvo pode ser visitado pelo caminhante por diversas vezes, o que ocorre quando um predador não consome sua presa totalmente podendo assim, retornar ao seu encontro quando desejar.

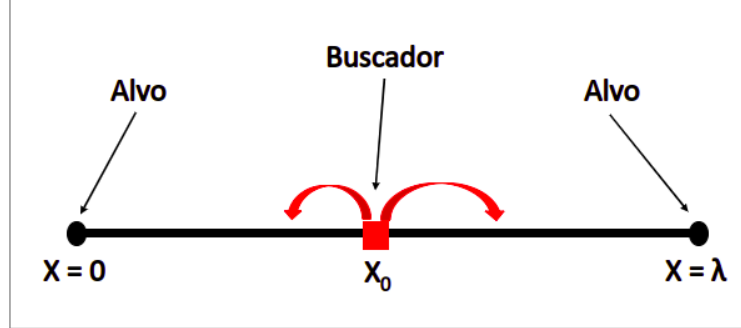
2.1.1 Buscas aleatórias em uma dimensão

Neste momento, vamos descrever o problema do caminhante aleatório unidimensional, onde nas seções posteriores iremos realizar o cálculo do livre caminho médio percorrido por um buscador em um intervalo finito contendo dois sítios-alvos e o número médio de passos dados até o encontro de um sítio.

Como podemos verificar na Fig. (3), um caminhante aleatório está a procura de sítios-alvo em uma rede unidimensional com condições de contorno absorventes. A busca se inicia a partir de uma posição inicial x_0 dentro do intervalo total, isto é, $0 < x_0 < \lambda$. Os sítios-alvo, por sua vez, encontram-se localizados nas bordas, exatamente nas posições de $x = 0$ e $x = \lambda$ respectivamente. De maneira geral, assim que ocorre a captura do alvo, uma nova busca se inicia com um novo valor de x_0 . Isto significa que para cada encontro (*caminhante + sítio-alvo*) um sorteio de uma nova posição inicial é feito, tornando cada busca isolada e independente da anterior. Desse modo, entendemos que a distância total percorrida em uma trajetória é a soma interligada de cada percurso isolado, intercalados de encontros sucessivos entre o buscador e o alvo capturado (VISWANATHAN et al., 1999b).

Como discutimos anteriormente, após a captura de um sítio-alvo um sorteio de um novo

Figura 3 – Caminhante aleatório em 1D à procura dos sítios-alvo (círculos pretos) localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$, onde o sentido e o tamanho do passo são sorteados por uma distribuição de tamanho de passos $p(\ell)$. O buscador (quadrado vermelho) se encontra no regime de buscas destrutivas ($x_0/\lambda = 1/2$), isto é, ao capturar o sítio ele jamais poderá retornar a sua localização numa busca posterior.)



Fonte: O autor (2023)

x_0 acontece. Por esta razão, neste modelo é comum escolhermos uma função densidade de probabilidades (pdf) para a distribuição das posições iniciais, isto é, $p(x_0)$. Neste trabalho, vamos considerar que para cada nova busca o valor de x_0 será fixo. Posteriormente, veremos que para as buscas destrutivas e não destrutivas escolheremos respectivamente, $x_0 = \lambda/2$ e $x_0 \approx r_v$.

2.2 ABORDAGEM ANALÍTICA DE $\langle L \rangle$ E $\langle n \rangle$

Após a descrição do nosso modelo de buscas em 1D, vamos agora nos concentrar em encontrar uma expressão analítica para alguns parâmetros que nos serão muito úteis. Primeiro, vamos calcular explicitamente a distância média percorrida entre dois alvos sucessivos que foram apanhados, $\langle L \rangle$. Posteriormente, calcularemos o número médio de passos entre dois encontros subsequentes, $\langle n \rangle$, para um caminhante que parte de uma posição inicial x_0 (BULDYREV et al., 2001b)(BULDYREV et al., 2001a).

Inicialmente, suponha que o caminhante encontre um dos sítios após n passos. A distância total percorrida até que o encontro entre o buscador e o alvo ocorra é:

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\ell_i|, \quad (2.2)$$

onde $|\ell_i|$ representa o comprimento do i -ésimo passo. Percebemos que o número médio de passos n será maior de acordo com a distância que o caminhante estiver inicialmente dos

sítios presentes na busca. Isso acontece porque se o “caçador” estiver inicialmente próximo a sua “presa” será maior a probabilidade desta ser encontrada, implicando em um n menor. Portanto, verificamos que a distância total percorrida da caminhada tem uma dependência com a posição inicial x_0 , ou seja, $L_n = L_n(x_0)$. Tomando a média sobre o comprimento total trilhado pelo buscador até o encontro de um alvo, temos que:

$$\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle, \quad (2.3)$$

onde podemos atestar o importante detalhe de que n é um número que está contido no intervalo $1 \leq n < \infty$. Essa informação nos mostra que no processo de busca, um sítio pode ser detectado no primeiro passo, $n = 1$, ou em um número grande de passos, $n \gg 1$. Partindo desse fato, vamos definir P_n como a probabilidade de um alvo ser encontrado após um número n de passos. Assim, ao realizarmos a média sobre todo o passeio partindo de x_0 precisamos considerar o peso estatístico associado aos encontros com diferentes n 's, isto é,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle. \quad (2.4)$$

Pelo fato de P_n representar uma probabilidade, sabemos que todos os valores de P_n para cada valor de n existente estão conectados por uma normalização, de maneira que $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$. Isto quer dizer que no processo de busca, pelo menos um dos sítios localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$ será descoberto.

Para obtermos uma expressão para P_n , precisamos definir uma função densidade de probabilidade, $\rho_n(x_n)$ de encontrar o *forager* num intermédio entre x_n e $x_n + dx_n$ após n passos. Sendo assim, a probabilidade de que o caçador ainda **não** tenha encontrado um sítio depois de n passos é:

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.5)$$

Por completeza, a probabilidade de encontrar um sítio após $n' \geq n + 1$ passos é:

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - \tilde{P}_n. \quad (2.6)$$

O entendimento desses resultados nos possibilita obter uma expressão para a probabilidade de um sítio ser encontrado em sua posição exata após n passos, a qual é dada por,

$$P_n = |P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n}| = |\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1}|, \quad (2.7)$$

onde utilizando a Eq. (2.5), podemos representar nosso resultado em termo da seguinte integral,

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx. \quad (2.8)$$

É bem notável lembrar que $\rho_i(x)$ é a densidade de probabilidades de o sítio **não** ser detectado, portanto $\rho_{n-1}(x) > \rho_n(x)$. Isso acontece pois a probabilidade de encontrar o alvo aumenta à medida que n cresce. Fazendo agora a substituição da Eq. (2.8) na Eq. (2.4), ficamos com,

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Neste momento, vamos trocar o índice no primeiro somatório, $n \rightarrow n+1$, e complementaremos com o termo de $n = 0$ no segundo somatório, considerando que $L_0 = 0$. Dessa maneira agora temos que,

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_{n+1} \rangle(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) [\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da Eq. (2.3) obtemos que

$$\langle L_n \rangle(x) = \langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle, \quad (2.11)$$

deste modo,

$$\begin{aligned}
\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x) &= (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle + \langle |\ell_{n+1}| \rangle) \\
&\quad - (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle) \\
&= \langle |\ell_{n+1}| \rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dessa maneira, $\langle L \rangle$ pode ser representado da seguinte forma:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell_{n+1}| \rangle(x). \tag{2.13}$$

Pelo fato de $\langle |\ell_{n+1}| \rangle$ corresponder ao comprimento médio de um passo individual, ele não depende da ordem de n ou $n \pm i$ e sim apenas do x_0 . Ou seja, o n -ésimo passo depende da posição x_{n-1} onde o passo $n-1$ por sua vez, depende de x_{n-2} e assim sucessivamente até alcançarmos a dependência de $\langle |\ell| \rangle$ com $x = x_0$. Por essa razão, podemos representar a média $\langle |\ell| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\ell| p(\ell) d\ell$ explicitamente como,

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{r_v}^{x_0-\ell_0} (x_0 - x) p(x - x_0) dx + \int_{x_0+\ell_0}^{\lambda-r_v} (x - x_0) p(x - x_0) dx + \\
&\quad + (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{r_v} p(x - x_0) dx + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda-r_v}^{\infty} p(x - x_0) dx,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $x_0 \in [r_v + \ell_0, \lambda - r_v - \ell_0]$, em que ℓ_0 é o comprimento de passo mínimo do caminhante. Realizando a substituição $\ell = x - x_0$ acima, obtemos,

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{-(x_0-r_v)}^{-\ell_0} |\ell| p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-r_v-x_0} |\ell| p(\ell) d\ell \\
&\quad + (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{-(x_0-r_v)} p(\ell) d\ell + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda-r_v-x_0}^{\infty} p(\ell) d\ell,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

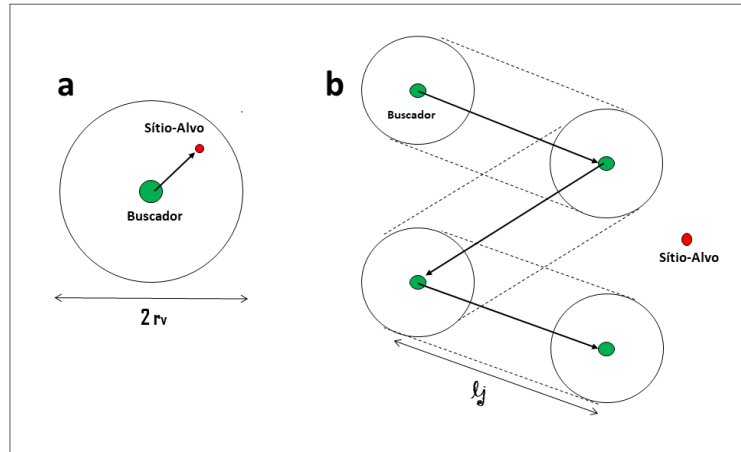
em que as duas primeiras integrais representam buscas nos dois sentidos (*esquerda* e *direita*) sem que tenha ocorrido um encontro. As integrais restantes (*terceira* e *quarta*) representam as buscas onde irão ocorrer detecção de sítios.

Um esquema detalhado das buscas em duas dimensões pode ser observado na Fig. (4), onde é possível verificar em (a) o momento em que ocorre a detecção do sítio, isto é, o alvo

encontra-se dentro do raio de visão. Também pode-se acompanhar em **(b)** a dinâmica balística do caminhante enquanto o mesmo não descobre nenhum sítio presente no espaço de busca. A Fig. (4) ilustra bem o significado das Eq. (2.14) e da Eq. (2.15), mostrando como as integrais imersas na simulação conseguem gerar esse perfil de busca.

Note que ao definirmos ℓ_0 como comprimento de passo mínimo, gerou uma consequência direta para a função densidade de probabilidade do *forager*, uma vez que $|\ell|$ em nenhum momento pode ter um valor menor do que ℓ_0 . Assim, constatamos que para $\ell < \ell_0$, $p(\ell) = 0$ e esta conclusão nos leva a uma próxima para as duas primeiras integrais. A primeira será nula para $r_v < x_0 \leq r_v + \ell_0$ e a segunda para $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 < \lambda - r_v$.

Figura 4 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões. Em **(a)** vemos um sítio-alvo (círculo vermelho) localizado dentro do raio de visão r_v , isto é, o caminhante caminhará até ele em linha reta. Já em **(b)** vemos a representação do que acontece quando o caminhante ainda não encontra um sítio-alvo, ou seja, ele escolhe um direção aleatória e um comprimento de passo ℓ_j a partir de um sorteio regido por uma distribuição $p(\ell)$.



Fonte: O autor (2023)

Pelo motivo que discutimos no parágrafo anterior, podemos agora reescrever Eq. (2.13) em função de x , logo,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle(x). \quad (2.16)$$

A partir deste ponto não podemos avançar na demonstração de uma expressão mais completa para $\langle L \rangle$, uma vez que para tal feito, precisamos desenvolver mais $\rho_n(x)$. Portanto, de modo geral, podemos representar $\rho_n(x)$ da seguinte maneira,

$$\rho_i(x_i) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_{i-1}(x_{i-1}) p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}. \quad (2.17)$$

A Eq. (2.17) nos mostra que a soma que realizamos foi sobre todas as possibilidades de chegarmos ao sítio de x_i partindo do sítio x_{i-1} , com o passo de tamanho $|x_i - x_{i-1}|$ executado com probabilidade $p(x_i - x_{i-1})dx_{i-1}$.

Como um exemplo simples, considere um buscador que inicia sua busca partindo de $x_0 = \omega$, com $r_v < \omega < \lambda - r_v$, assim, no início da caminhada sua densidade de probabilidade $\rho_0(x_0)$ será uma função delta de Dirac, isto é, $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - \omega)$. Então, para este caso temos,

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_0(x_0)p(x_1 - x_0)dx_0 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \delta(x_0 - \omega)p(x_1 - x_0)dx_0 \\ &= p(x_1 - \omega).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos deduzir uma equação para a densidade de probabilidades após os dois primeiros passos, $\rho_2(x_2)$, tal que,

$$\begin{aligned}\rho_2(x_2) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_1(x_1)p(x_2 - x_1)dx_1 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_2 - x_1)p(x_1 - x_0)\rho_0(x_0)dx_1dx_0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Prosseguindo com a execução desse processo, conseguimos encontrar uma relação de recorrência para a densidade de probabilidades em seu n -ésimo passo, através do método de indução, sendo assim,

$$\begin{aligned}\rho_n(x_n) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_n - x_{n-1})\rho_{n-1}(x_{n-1})dx_{n-1} \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0).\end{aligned}\tag{2.20}$$

De posse da Eq. (2.20) e da compreensão do processo discutido, podemos retornar ao desenvolvimento da expressão para $\langle L \rangle$. Desse modo, substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.16) obtemos,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left\{ \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0) \right\} \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n. \quad (2.21)$$

Por conta da independência estatística do integrando da Eq. (2.21), definiremos um operador integral com a finalidade de progredirmos na determinação de $\langle L \rangle$ (BULDYREV et al., 2001b)(BULDYREV et al., 2001a). Seja $\mathcal{L}$ o operador integral dado por,

$$\mathcal{L}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega - x) f(x) dx. \quad (2.22)$$

Para o nosso caso específico $f(x) = \rho_n(x)$ e $\omega = x_{n+1}$, de modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\rho_n(x_n)](x_{n+1}) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_{n+1} - x_n) \rho_n(x_n) dx_n \\ &= \rho_{n+1}(x_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para $n = 0$,

$$\rho_1(x_1) = [\mathcal{L}\rho_0(x_0)](x_1); \quad (2.24)$$

para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2) &= [\mathcal{L}\rho_1(x_1)](x_2) \\ &= [\mathcal{L}[\mathcal{L}\rho_0(x_0)]](x_2) \\ &= [\mathcal{L}^2\rho_0(x_0)](x_2); \end{aligned} \quad (2.25)$$

e para o n -ésimo termo,

$$\begin{aligned} \rho_n(x_n) &= \mathcal{L}[\rho_{n-1}(x_{n-1})] \\ &= \mathcal{L}[\mathcal{L}(\rho_{n-2}(x_{n-2}))] \\ &= \dots = \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)](x_n); \end{aligned} \quad (2.26)$$

de modo que finalmente podemos escrever,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.27)$$

2.2.1 Determinação de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$

Após estabelecermos o operador integral $\mathcal{L}$, vamos dar continuidade ao cálculo para obtenção de $\langle L \rangle$. Isto é, a partir de,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx, \quad (2.28)$$

chegamos a,

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] (x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.29)$$

A partir desse momento vamos demonstrar que o operador integral $\mathcal{L}$ possui módulo menor ou igual a um, isto é, $\|\mathcal{L}\| \leq 1$, desse modo,

Prova: Seja $\mathbb{V}$ o espaço das funções contínuas munido de um produto interno definido por,

$$\langle f, g \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)g(x)dx, \quad (2.30)$$

para $x \in [r_v, \lambda - r_v]$. Sabemos que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, sendo assim,

$$\|f\|^2 = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)^2 dx. \quad (2.31)$$

Fazendo uso do teorema do valor máximo observamos que,

$$\int f(x)g(x)dx \leq \max[f] \int g(x)dx. \quad (2.32)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}[\rho_n(x)](\omega)| &= \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(\omega-x)\rho_n(x)dx \right| \\
&\leq \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\omega-x)\rho_n(x)|dx \\
&= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\omega-x)||\rho_n(x)|dx \leq \max[P(\omega-x)] \overbrace{\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x)dx}^{=1} \\
&= \max[P(\omega-x)] \equiv \mathcal{N} \leq 1,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

mostrando que de fato $\|\mathcal{L}\| \leq 1$. Na expressão acima, levamos em consideração que densidades de probabilidades são sempre maiores ou iguais a zero. O fato da norma do operador $\mathcal{L}$ ser menor ou igual à unidade (HASSANI, 2009) junto com o fato do mesmo possuir autovalores não nulos nos permite utilizar a seguinte relação:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] (x) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \rho_0](x), \tag{2.34}$$

em que $\mathcal{I}$ é o operador identidade e $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso a $(\mathcal{I} - \mathcal{L})$. Utilizando que $\rho_0 = \delta(x_0 - \omega)$ e a Eq. (2.34), podemos representar $\langle L \rangle$ como,

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \delta(x_0 - \omega)] (x) \langle |\ell| \rangle (x) dx. \tag{2.35}$$

Note que, o fato de $\mathcal{L}$ possuir norma unitária, possibilita escrever $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ em uma forma integral com um núcleo identificado por $K(x, x_0)$, de modo que,

$$(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) dx_0. \tag{2.36}$$

Por conseguinte, substituindo a Eq. (2.36) na Eq. (2.35) temos,

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \omega) \langle |\ell| \rangle (x) dx dx_0 \\
&= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) \langle |\ell| \rangle (x) dx.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Este fato finalmente nos possibilita escrever,

$$\langle L \rangle(\omega) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle(x)](\omega). \quad (2.38)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos calcular o número médio de passos para o encontro de um sítio, de maneira que o mesmo é definido como,

$$N \equiv \langle n \rangle = \sum_n P_n n. \quad (2.39)$$

Substituindo a expressão para P_n acima encontramos,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) (n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) n. \end{aligned} \quad (2.40)$$

De modo semelhante de como fizemos para $\langle L \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) dx \\ &= (\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} h(x), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $h(x)$ é uma função genérica que $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ está atuando. Deste modo, vemos que os autovalores (*espectro*) do operador $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ são determinados através do espectro de $\mathcal{L}$. O valor de $\langle L \rangle$ pode ser obtido numericamente a partir da discretização do espaço, conforme mostraremos nas seções posteriores.

Uma consequência interessante de $\mathcal{N} \leq 1$ que vale a pena nós verificarmos, é que podemos demonstrar analiticamente que de fato, à medida que o número de passos n executados pelo caminhante aumenta, a probabilidade do mesmo **não** encontrar um sítio diminui. Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) dx < \mathcal{N}^n \\ \ln(\tilde{P}_n) &< n \ln(\mathcal{N}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para $\mathcal{N} < 1$ temos que $\ln(\mathcal{N}) < 0$, de modo que, definindo $\gamma = |\ln \mathcal{N}|$, podemos escrever,

$$\tilde{P}_n < \exp(-\gamma n). \quad (2.43)$$

Logo, confirmamos que a probabilidade de um alvo não ser detectado pelo caminhante decai de maneira bem rápida à medida que n vai aumentando (BULDYREV et al., 2001b) (BULDYREV et al., 2001a).

2.2.2 A eficiência da busca

Neste trabalho, vamos estabelecer o conceito de *eficiência da busca* (BARTUMEUS et al., 2014) como sendo a razão entre o número de sítios detectados ($N_{\text{Detectado}}$) e a distância total percorrida pelo caminhante (L_{Total}), de maneira que,

$$\eta = \frac{N_{\text{Detectado}}}{L_{\text{Total}}}, \quad (2.44)$$

em que consideraremos $L_{\text{Total}} = N_{\text{Detectado}} \langle L \rangle$, onde $\langle L \rangle$ é a distância média percorrida entre dois sítios consecutivos. Sendo assim,

$$\eta = \frac{N_{\text{Detectado}}}{L_{\text{Total}}} = \frac{N_{\text{Detectado}}}{N_{\text{Detectado}} \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle}. \quad (2.45)$$

De modo geral, o que podemos interpretar da Eq. (2.45) é que um *forager* é mais eficiente em sua busca se o mesmo localiza mais sítios percorrendo a menor distância possível. O que mais chama atenção dessa interpretação, é o fato de toda eficiência do processo depender apenas da distância média entre dois alvos. Contudo, podemos progredir para além desta expressão fazendo a seguinte aproximação,

$$\langle L \rangle = \langle \ell \rangle \langle n \rangle, \quad (2.46)$$

no qual a partir deste ponto, vamos escrever $N \equiv \langle n \rangle$ como número médio de passos entre dois encontros sucessivos. Assim, podemos denotar também a eficiência aproximadamente como,

$$\eta = \frac{1}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\langle \ell \rangle \langle n \rangle} \approx \frac{1}{N \langle \ell \rangle}, \quad (2.47)$$

onde a mesma agora depende explicitamente do número médio de passos entre dois sítios seguidos e do comprimento médio de um passo individual.

2.3 CÁLCULO DISCRETO NO ESPAÇO DE BUSCA

Nas seções anteriores, conseguimos alcançar uma representação analítica final para $\langle L \rangle$. Entretanto, obter valores do mesmo no espaço contínuo se torna impraticável, devido a dificuldade que se tem em operar com a expressão formal, Eq. (2.38). Contudo, como opção de solução para contornar este problema, realizaremos em seguida a discretização do espaço de busca (BULDYREV et al., 2001b)(BULDYREV et al., 2001a).

No processo de discretização iremos considerar que as posições $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$ sejam múltiplos de um comprimento discreto que vamos denotar como Δx . Este parâmetro terá um valor menor do que o de qualquer outra grandeza relevante do problema, tais como (ℓ_0, r_v, λ) respectivamente. Partindo dessa consideração, podemos escrever nosso espaço de extensão λ como sendo $M \equiv \lambda/\Delta x$ com posições agora discretas denotadas por $x = i\Delta x$, em que $i = (0, 1, 2, 3, \dots, M)$. Assim, os sítios da rede que estão localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$ estarão relacionados com os índices $i = 0$ e $i = M$ respectivamente.

Analogamente estabelecemos $\ell_0 = m_0 \Delta x$ e $r_v = m_r \Delta x$, onde m_0 e $m_r \in \mathbb{Z}$. O limite contínuo pode ser recuperado simplesmente fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, com λ fixo. Uma outra consequência do processo é que o cálculo de integração passa a ser agora uma soma discreta, isto é,

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \implies \sum_{i=1}^N \Delta x_i.$$

A partir dessas definições, vamos escrever $\langle L \rangle$ partindo da Eq. (2.38) na forma discreta, logo,

$$\begin{aligned} \langle L \rangle(\omega) &= [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle(x)](\omega) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) \langle |\ell| \rangle(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N K(\omega, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Fazendo $\omega = x_j$, temos,

$$\langle L \rangle(x_j) = \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i. \quad (2.49)$$

Observe que podemos representar a Eq. (2.49) em uma forma matricial, pois, o produto do núcleo pelo elemento de discretização, $K(x_j, x_i) \Delta x_i$, é uma matriz discreta $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x}$. Já $\langle L \rangle(x_j) \equiv \langle L_j \rangle$ e $\langle |\ell| \rangle(x_i) \equiv \langle |\ell_i| \rangle$ são vetores no espaço discreto. Portanto, escrevemos,

$$\langle \mathbf{L} \rangle = (\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x}) \langle \vec{|\ell|} \rangle, \quad (2.50)$$

em que escrevendo a expressão em sua forma matricial, encontramos,

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \langle L_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) \Delta x_1 & \dots & K(x_1, x_i) \Delta x_i & \dots & K(x_1, x_N) \Delta x_N \\ K(x_2, x_1) \Delta x_1 & \dots & K(x_2, x_i) \Delta x_i & \dots & K(x_2, x_N) \Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_j, x_1) \Delta x_1 & \dots & K(x_j, x_i) \Delta x_i & \dots & K(x_j, x_N) \Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1) \Delta x_1 & \dots & K(x_N, x_i) \Delta x_i & \dots & K(x_N, x_N) \Delta x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \langle |\ell_2| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Constatamos a eficiência do processo de discretização, tendo em vista que agora podemos calcular $\langle L \rangle$ e conseqüentemente a eficiência da busca η . Nossa preocupação neste momento é em calcular a matriz $\mathbf{K}$, para tal, se faz necessário discretizar o operador $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$, porém, até agora não conseguimos encontrar a matriz do seu núcleo. Sendo assim, para que consigamos calcular $\mathbf{K}$, vamos aplicar um procedimento semelhante ao que aplicamos para o operador $\mathcal{L}$ e por conseguinte, podemos de fato obter a expressão discretizada para $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ nos utilizando das operações com matrizes. Finalmente, após esse procedimento poderemos calcular o núcleo do operador em questão.

A partir deste momento, vamos estabelecer $\mathbf{A}$ como a matriz no espaço discreto que está relacionada ao operador $\mathcal{L}$. Precisamos obter os elementos da matriz $\mathbf{A}$ e para tal, se faz necessário calcularmos a integral da distribuição $p(\ell)$ no intervalo $[x_j - x_i, x_j - x_i + \Delta x_i]$:

$$A_{ij} = \int_{(x_j-x_i)}^{(x_j-x_i)+\Delta x_i} p(\ell) d\ell, \text{ para } |x_j - x_i| \geq \ell_0. \quad (2.52)$$

O fato de $\mathcal{L}$ ser um operador auto-adjunto, isto é, $A_{ij} = A_{ji}$, nos permite escrever a Eq. (2.52) da seguinte maneira,

$$A_{ij} = A_{ji} = \int_{|x_j-x_i|}^{|x_j-x_i|+\Delta x_i} p(\ell) d\ell, \text{ para } |x_j - x_i| \geq \ell_0, \quad (2.53)$$

onde $[A]_{ii} = [A]_{ij} = 0$ se $|x_j - x_i| < \ell_0$, pois, $p(\ell) = 0$ quando $\ell < \ell_0 = m_0 \Delta x$. Para finalizar o nosso raciocínio, faremos um breve comentário sobre o cálculo do vetor $\langle |\vec{\ell}| \rangle$. As componentes deste objeto se edificam apenas calculando $\langle |\ell| \rangle(x)$, procedimento que já discutimos nas seções anteriores, em seguida basta aplicarmos para x_j . Assim, completamos o cálculo que fornecem os valores da eficiência da busca (BULDYREV et al., 2001b)(BULDYREV et al., 2001a).

2.4 ESTUDO DAS PROBABILIDADES P_0 E P_λ

Dedicaremos esta seção ao estudo das probabilidades de um caminhante aleatório encontrar sítios-alvos localizados nas posições $x = 0$ e $x = \lambda$. Nos concentraremos no entendimento de um método que irá permitir obter os valores de P_0 e P_λ em buscas aleatórias 1D respectivamente (BARTUMEUS et al., 2014).

2.4.1 Análise qualitativa de P_0 e P_λ

Dando início a nossa análise, mostraremos um esquema de fatoração para o livre caminho médio entre dois encontros sucessivos. Observando primeiro que o mesmo pode ser escrito como,

$$\langle L \rangle = P_0 \langle L_0 \rangle + P_\lambda \langle L_\lambda \rangle. \quad (2.54)$$

Como bem sabemos, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, o que significa que no final da busca um sítio sempre será localizado. Assim, para o nosso caso, $P_0 + P_\lambda = 1$ e percebemos que temos um peso estatístico associado ao encontro de cada alvo. Por exemplo, na busca *não destrutiva*, $x_0 < \lambda/2$

e conseqüentemente a distância média percorrida até o sítio mais próximo, $\langle L_0 \rangle$, é menor do que a distância média percorrida para encontrar o sítio mais distante, $\langle L_\lambda \rangle$. Já para a busca *destrutiva* ($x_0 = \lambda/2$), ambos os sítios de fronteira estão inicialmente equidistantes do buscador, de modo que $\langle L_0 \rangle = \langle L_\lambda \rangle$ e $P_0 = P_\lambda = 1/2$.

2.4.2 Cálculo explícito de P_0 e P_λ

A partir deste momento, vamos fazer uma abordagem quantitativa a fim de encontrarmos P_0 e P_λ . Considere um buscador em 1D que inicia sua busca a partir de $x_0 = \phi$, seu objetivo é detectar os sítios-alvo localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$. Sabemos que após percorrer n passos, o caminhante atinge o alvo em $x = \lambda$. Na seção (2.2) demonstramos uma expressão que calcula a densidade de probabilidade depois de n passos dados, Eq. (2.20). Realizando um processo semelhante, podemos escrever que,

$$P_{\lambda n}(\phi) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}), \quad (2.55)$$

onde $\rho_{n-1}(x_{n-1})dx_{n-1}$ é a probabilidade do buscador estar localizado entre as posições indicadas no intervalo $[x_{n-1}, x_{n-1} + dx_{n-1}]$ após executar $n-1$ passos. Sendo assim, podemos ver que por enquanto, nenhum sítio foi encontrado, isto é, $x_{n-1} \in [r_v, \lambda - r_v]$. Por completeza, o outro termo do integrando ($\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1})$) nos fornece a probabilidade que o caçador dê um passo de tamanho $\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}$ de maneira que o alvo em $x = \lambda$ seja alcançado no n -ésimo passo. A Eq. (2.55) nos fornece basicamente todos os valores possíveis para x_{n-1} .

Desse modo, a probabilidade total das buscas é simplesmente a soma de todos os $P_{\lambda n}$ sobre todas as possibilidades. Isto se dá devido a **não** dependência estatística das prováveis caminhadas que comecem em $x_0 = \phi$ e terminem em $x = \lambda$. Sendo assim,

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda n}(\phi). \quad (2.56)$$

Então, substituindo a Eq. (2.55) na Eq. (2.56) temos,

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}). \quad (2.57)$$

Fazendo $k = n - 1$,

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r_r}^{\lambda-r_v} \rho_k(x_k) dx_k \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_k). \quad (2.58)$$

Note que à Eq. (2.58) é análoga à Eq. (2.16) mudando apenas as grandezas envolvidas. Logo, isso nos permite aplicar o mesmo procedimento utilizado naquele caso, gerando para este caso,

$$P_\lambda(\phi) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)]. \quad (2.59)$$

Do mesmo modo que fizemos para a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, é preciso estar no limite discreto para se obter as informações no qual podemos trabalhar. Assim, a Eq. (2.59) se torna,

$$P_{\lambda, \ell_0} = [(\mathcal{I} - \mathbf{A})^{-1} P_{\ell_0}], \quad (2.60)$$

de modo que os elementos de $\mathbf{A}$ foram calculados na seção (2.3). Podemos atestar de maneira simples que P_{λ, ℓ_0} e P_{ℓ_0} representam vetores coluna com dimensões $(M - 2m_r - 1) \times 1$, tendo em vista que, utilizamos o mesmo mecanismo de discretização de antes. O interessante é que antes de particionarmos o espaço, podemos calcular $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$ de maneira objetiva, usando a seguinte equação,

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \int_{\lambda-r_v-\phi}^{\infty} p(\ell) d\ell, \quad (2.61)$$

em que a Eq. (2.61) é válida para $r_v < \phi \leq \lambda - r_v - \ell_0$. Em contrapartida, se o buscador começar muito perto do alvo em $x = \lambda$, ou seja, $\lambda - r_v - \ell_0 < \phi < \lambda - r_v$, entendemos que qualquer movimento para direita levará a localização do sítio. Analogamente, uma vez que a mobilidade para os dois sentidos são equiprováveis, temos que,

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \frac{1}{2}, \quad (2.62)$$

para este caso, isto é, se $\lambda - r_v - \ell_0 < \phi < \lambda - r_v$. Semelhantemente, podemos nos utilizar

deste mesmo procedimento que descrevemos para calcular $P_0(\phi)$ (BARTUMEUS et al., 2014). Entretanto, conhecendo os valores de P_λ fica mais simples extrair P_0 através da condição de normalização $P_\lambda + P_0 = 1$. Isto é,

$$P_0 = 1 - P_\lambda \quad (2.63)$$

2.5 ABORDAGEM ANALÍTICA DE $\langle |\ell| \rangle$, $\mathbf{A}$ E $\mathcal{P}$ PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TAMANHOS DE PASSOS DO TIPO LEI DE POTÊNCIA

Neste momento, vamos detalhar os cálculos referentes ao parâmetro $\langle |\ell| \rangle$, ao elementos da matriz $\mathbf{A}$ e da probabilidade $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_0)$. Faremos esse procedimento para a distribuição de tamanho de passos do tipo lei de potência, considerando que essas informações analíticas são indispensáveis para nosso estudo em uma dimensão.

Vamos dar início ao nosso procedimento, calculando $\langle |\ell| \rangle$ nos utilizando da Eq. (2.15). A $p(\ell)$ em questão será a distribuição de Lévy no limite assintótico $\ell \gg 1$, o que em outras palavras, é a distribuição de tamanho de passos lei de potência. No qual podemos representá-la por,

$$p(\ell) = \frac{(\mu - 1) \ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|\ell|^\mu} \text{ se } \ell \geq \ell_0, \quad (2.64)$$

e $p(\ell) = 0$ se $\ell < \ell_0$, tendo em vista que ℓ_0 é o comprimento de passo mínimo e o parâmetro de interesse $\mu = \alpha + 1$ satisfaz a condição $1 < \mu \leq 3$. Primeiro de tudo, vamos escrever a Eq. (2.15) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{\ell_0}^{x_0 - r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{x_0 - r_v}^{\infty} (x_0 - r_v) p(\ell) d\ell \\ &+ \int_{\ell_0}^{\lambda - x_0 - r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{\lambda - x_0 - r_v}^{\infty} (\lambda - x_0 - r_v) p(\ell) d\ell, \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde podemos simplificar a expressão acima utilizando a condição de normalização dada por,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\ell) d\ell = 1. \quad (2.66)$$

Como nosso comprimento de passo mínimo é ℓ_0 , podemos escrever a Eq. (2.66) como,

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell &= \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{x_0-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell \\ &= \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x_0-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Aplicando a Eq. (2.67) na Eq. (2.65) e reorganizando os termos obtemos,

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} [\ell - (x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell \\ &\quad + \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Note que a Eq. (2.15) que demonstramos anteriormente, sofre mudanças a depender do intervalo que o caminhante estiver. Portanto, caso $r_v \leq x_0 \leq r_v + \ell_0$ temos que $(x_0 - r_v) \leq \ell_0$ e a primeira integral se anulam, pelo fato de que $p(\ell) = 0$ se $\ell < \ell_0$. Sendo assim, neste caso temos,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (2.69)$$

Entretanto, se $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v$ implica diretamente em $(\lambda - x_0 - r_v) \leq \ell_0$ onde agora é a segunda integral que se anula, deixando a expressão original como sendo,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} [\ell - (x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (2.70)$$

Por fim, se $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$ recuperamos a Eq. (2.67). Devido as considerações feitas na Eq.(2.65), podemos de fato calcular $\langle |\ell| \rangle(x_0)$ para a distribuição lei de potência. Para tal feito, vamos considerar uma busca com início em $r_v \leq x_0 \leq r_v + \ell_0$ no caso de $\mu \neq 2$, assim temos,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell, \quad (2.71)$$

onde resolvendo a integral restante da Eq. (2.71) obtemos,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[1 + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]. \quad (2.72)$$

Agora para o mesmo caso, porém com $\mu = 2$, encontramos,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda - x_0 - r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] \ell^{-2} d\ell + \frac{\lambda - 2r_v}{2}, \quad (2.73)$$

onde resolvendo a integral, agora para a Eq. (2.73), ficamos com,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.74)$$

Para o segundo caso, ou seja, quando o caminhante parte de uma posição $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v$, temos para $\mu \neq 2$

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{x_0 - r_v} [\ell - (x_0 - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell, \quad (2.75)$$

que se reduz a,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[1 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]. \quad (2.76)$$

Note que a equação acima é semelhante à Eq. (2.71), com a diferença da troca de $(x_0 - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x_0 - r_v)$. Continuando para $\mu = 2$ e seguindo o raciocínio acima para a troca dos valores, temos que,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{(x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.77)$$

Para o último caso que corresponde ao caçador começando em $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$, basta somar os dois resultados dos extremos que obtivemos nas equações anteriores e subtrair a constante $(\lambda - 2r_v)/2$, de modo que,

para $\mu \neq 2$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[2 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right]; \quad (2.78)$$

para $\mu = 2$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0}{2} \left[2 + \ln \left(\frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) + \ln \left(\frac{(x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right], \quad (2.79)$$

que podemos simplificá-la para,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \ell_0 \left[1 + \ln \left(\frac{[(\lambda - x_0 - r_v)(x_0 - r_v)]^{1/2}}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.80)$$

Agora, vamos calcular os elementos de matriz A_{ij} que se refere à matriz $\mathbf{A}$ partindo da Eq. (2.52), onde se $|x_j - x_i| < \ell_0 \rightarrow A_{ii} = A_{ij} = 0$. Logo, para a $p(\ell)$ sendo a lei de potência no domínio de $|x_j - x_i| \geq \ell_0$, temos,

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + \Delta x_i} \frac{1}{\ell^\mu} d\ell, \quad (2.81)$$

ou mais precisamente,

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|x_j - x_i|}{\ell_0} \right)^{1-\mu} - \left(\frac{|x_j - x_i| + dx}{\ell_0} \right)^{1-\mu} \right]. \quad (2.82)$$

Por fim, vamos obter a expressão discretizada fazendo $x_i = i dx$ e $\ell_0 = i_\ell dx$, em que i e $i_\ell \in \mathbb{N}$ de modo que encontramos,

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|j - i|}{i_\ell} \right)^{1-\mu} - \left(\frac{|j - i| + 1}{i_\ell} \right)^{1-\mu} \right]. \quad (2.83)$$

Colocando fim nesta seção, vamos calcular $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$ referente a distribuição do tipo lei de potência. Dessa forma, operando com a Eq. (2.61), temos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) &= \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell \\
&= \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \left[\frac{-(\lambda - r_v - \phi)^{1-\mu}}{1 - \mu} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ell_0^{\mu-1} (\lambda - r_v - \phi)^{1-\mu},
\end{aligned} \tag{2.84}$$

de modo que a equação acima pode ser reescrita como,

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\lambda - r_v - \phi)}{\ell_0} \right]^{1-\mu}, \tag{2.85}$$

para $\phi \leq \lambda - r_v - \ell_0$, e caso contrário $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = 1/2$. No capítulo seguinte vamos discutir alguns elementos da Teoria da Informação a fim de fortalecer nosso acervo teórico. Estabeleceremos o conceito formal de informação e definiremos o grau de desordem associado a informação de um sistema de natureza estocástica. Esta última atende pelo nome de entropia de Shannon em homenagem ao matemático e engenheiro americano Claude Elwood Shannon, principal colaborador e desenvolvedor da Teoria da Informação.

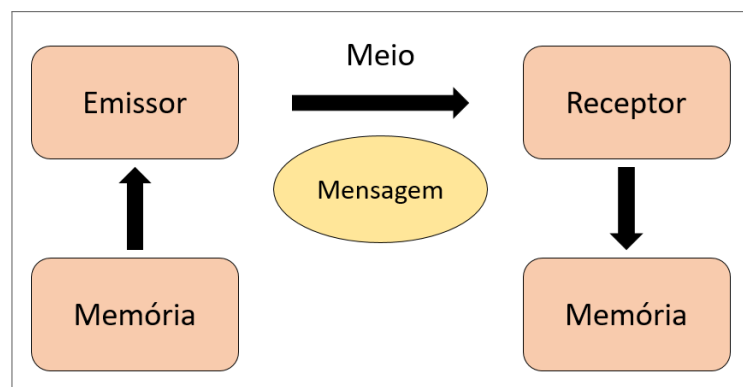
3 TEORIA DA INFORMAÇÃO CLÁSSICA

No presente capítulo, iremos tratar os fundamentos da Teoria da Informação clássica, no qual se alicerça no conceito bruto de informação e na definição da entropia associada ao sistema. Inicialmente, mergulharemos no significado estatístico de informação chegando ao estágio de calcularmos uma expressão matemática que quantifica tal grandeza. Por conseguinte, criaremos uma ponte entre o significado de entropia e a quantidade de informação presente em um evento e a partir daí, estabeleceremos um tratamento matemático que nos possibilitará obter um dos principais resultados de interesse nesta tese, a entropia de Shannon.

3.1 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA INFORMAÇÃO

O que é Teoria da Informação Clássica? De maneira não rigorosa, ela é uma teoria que desvenda como os procedimentos de envio, recepção, armazenamento e troca de informação ocorrem. A Fig. 5 ilustra um esquema de como esses processos estão interligados num contexto de comunicação entre duas partes (COVER; THOMAS, 1991) (CARRIJO et al., 2012).

Figura 5 – Esquema básico de comunicação entre duas entidades distintas. Pode-se ver que o emissor transfere informação (mensagem) que pode ser retirada de um banco de dados (memória) e é transportada fisicamente ao receptor, que por sua vez, tem a escolha de descartar ou armazenar a mesma em sua memória.



Fonte: O autor (2023)

Um bom exemplo de se observar o que se foi ilustrado é a transmissão de um arquivo de texto pela internet através do uso de fibras ópticas, onde o mesmo encontra-se armazenado num disco rígido de um computador e será recebido por outra máquina e armazenado em sua memória. De maneira geral, uma mensagem escrita com símbolos tais como letras e números são codificadas. Nos computadores por sua vez, usa-se a linguagem binária composta apenas

pelos elementos $\{0, 1\}$, de modo que, cada caractere é relacionado a uma palavra-código por meio de uma regra de codificação.

3.1.1 Biografia e pensamentos de Claude Shannon

Atualmente, é possível apreciar muitos registros no formato de livros e artigos refletindo o pensamento de Claude Shannon. No entanto, como na maioria das vezes, percebe-se que o destaque se dá mais aos aspectos exóticos de seu comportamento de que às suas ideias e motivações, fazendo com que suas contribuições sejam mais admiradas do que entendidas (PINEDA et al., 2006).

Claude Elwood Shannon nasceu em 30 de abril de 1916 em Petoskey, no estado de Michigan, Estados Unidos, e faleceu em 24 de fevereiro de 2001 de causas naturais. Nos seus primeiros 16 anos de vida, morou na cidade de Gaylord, localizada também em Michigan e frequentou a escola pública onde sua mãe foi diretora e também professora de línguas. Na sua infância, sua maior diversão já era brincar com objetos de origem mecânica. Incontáveis foram as engenhocas construídas por ele, como por exemplo, um barco controlado por rádio e um telégrafo entre sua casa e a do vizinho usando um par de fios de arame farpado que cercava o pasto. Entre seus jogos favoritos estavam alguns jogos mentais como a resolução de criptogramas. Dentre os seus ídolos, Shannon sempre destacava os nomes do inventor Thomas Edison e os cientistas Newton, Darwin, Einstein e Von Neumann (PINEDA et al., 2006).

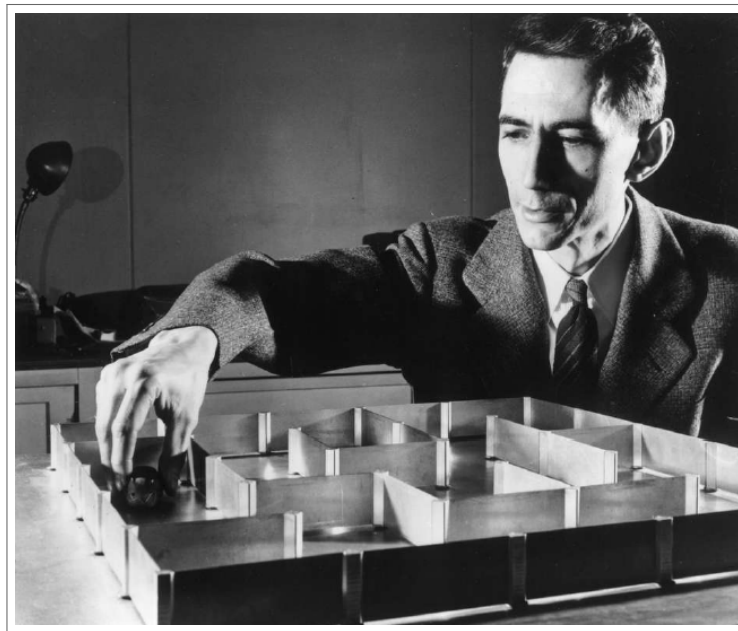
Em sua juventude, Shannon ingressou na universidade e formou-se em Matemática e Engenharia, tendo se tornado posteriormente Mestre em Engenharia e Doutor em Matemática. Estando ativo na pesquisa científica e tecnológica, ele trabalhou durante 15 anos a partir da década de 1940, como pesquisador nos Laboratórios Bell até se concentrar inteiramente a sua atividade de docência no MIT.

A sua forma racional de pensar nos ajuda a explicar a sua indiferença em relação à Teoria da Informação. Segundo (PINEDA et al., 2006), para algumas pessoas a sua falta de interesse teria sido motivada pelo descontentamento com os rumos que a Teoria estava tomando: havia distorções dos conceitos quando aplicadas em outras disciplinas e isso gerava um incômodo para ele. Somam-se também a isso, o surgimento de correntes místicos-religiosas que se apoiavam na Teoria, reação inesperada que foi provocada nas pessoas que eram de fora da academia (PINEDA et al., 2006).

Inúmeros debates sobre a Teoria da Informação e suas extensões também ocorriam nas

conferências sobre cibernética patrocinadas pela Fundação Marcy. Ao todo aconteceram dez conferências Marcy, dentre os períodos de 1946 a 1953 sob a coordenação de John von Neumann e Nobert Wiener, no qual se reuniam grandes pesquisadores de renome para apresentações e discussões de projetos. A principal motivação do evento era explorar analogias entre seres vivos e máquinas para uma possível aplicação militar no futuro (HAWKING; KORYTOWSKI; NETO, 2001). Shannon participou algumas vezes como convidado e em uma dessas apresentações ele apresentou Theseus, um camundongo eletrônico (ver Fig. 6) que foi capaz de sair de um labirinto. Raramente via-se nessas conferências máquinas em pleno funcionamento (HUGILL, 1999). É até engraçado ver como ele subestimava suas criações, as tratando apenas como “brinquedos divertidos”. No entanto, algumas delas serviram como comprovação das suas ideias, como por exemplo, o caso do próprio Theseus e da máquina de jogar xadrez.

Figura 6 – Claude Elwood Shannon, “brincando” com Theseus o seu camundongo eletrônico por volta de 1950.



Fonte: (WASON, 2017)

É de suma importância relatarmos aqui a interação de Shannon com Alan Turing durante a Segunda Guerra Mundial, bem como sua participação no *Project X*, um projeto secreto conduzido pelos laboratórios Bell com a finalidade de estudar criptografia da voz humana. Até então eram utilizados o método da distorção das ondas sonoras, o que era pouco eficaz pois requeria um ouvinte paciente e completamente atento ao som transmitido. Por outro lado, o *Project X* também trabalhava com a quantização das ondas sonoras, fazendo com que o resultado desse processo estivesse vinculado a uma chave, chave esta que deveria ser do

conhecimento apenas do receptor e transmissor da mensagem (HODGES, 2014).

Embora Shannon tenha declarado total liberdade para escolher o tema do seu trabalho nos Laboratórios Bell, a escolha de trabalhar com sistemas de sigilo talvez não tenha sido simples coincidência entre suas vontades e os interesses de seu empregador (determinados no contexto da Segunda Guerra), caso contrário não teria sido preciso mudar seus interesses de pesquisa em teoria da comunicação para uma teoria sobre criptografia.

O problema associado a criptografia está relacionado a outro bem próximo, que é o de determinar a quantidade de informação contida em um determinado evento probabilístico. Um evento pode ser, por exemplo, um lançamento de dados, ou de uma moeda ou de um sorteio de loteria. Porém, antes de nos aprofundarmos no entendimento da quantidade de informação de um determinado evento, vamos primeiro nos atentar ao seu conceito formal.

3.2 CONCEITO DE INFORMAÇÃO

Cotidianamente observamos as pessoas associarem o conceito de informação com as palavras ditas por um indivíduo, quando na verdade a informação está relacionada com o que um indivíduo pode ou não dizer. Então, partindo dessa prerrogativa, podemos nos perguntar de um modo mais rigoroso, o que é informação? Respondendo essa pergunta a luz da Teoria da Informação, podemos afirmar que *informação é a redução de incerteza oferecida quando se obtém resposta a uma pergunta*. Pensando bem, antes de uma mensagem ser enviada, tem-se a hipótese de que exista um conjunto de possíveis candidatas a serem recebidas e cada uma delas tem uma probabilidade de ocorrência. Consequentemente, a incerteza da informação diminui quando o receptor recebe a mensagem (PINEDA et al., 2006) (SHANNON, 1948).

Desse modo, constatamos que a redução de incerteza de uma suposta mensagem está relacionada com a sua probabilidade de ocorrência, isto é, uma mensagem provável de ser dita contém menos informação do que uma mensagem mais improvável. Por exemplo, se é dito no noticiário que uma forte seca atingiu a região do Sertão nordestino, essa mensagem, teoricamente, contém menos informação do que se for dito que a seca atingiu a região da floresta Amazônica.

Partindo para uma abordagem matemática, vamos verificar como se dá o conceito de informação de um modo analítico, ou seja, vamos calcular uma expressão para a quantidade de informação presente em uma mensagem (KARDAR, 2007).

Seja uma variável aleatória com um conjunto discreto de resultados $U = \{x_i\}$ com pro-

babilidades $\{P_i\}$ de ocorrência, onde $i = (1, 2, \dots, M)$ e $\sum_i P_i = 1$. Como já discutimos, o conteúdo da informação presente numa distribuição de probabilidades tem um significado preciso. Assim, podemos construir uma mensagem de N caracteres que independem dos resultados da variável aleatória. O fato de existirem M possibilidades para cada caracter nesta mensagem, implica que o conteúdo aparente de informação associado é $N \log_2 M$ bits. Para exemplificar, considere um remetente que pretende enviar uma mensagem utilizando o alfabeto da língua inglesa que contém 26 letras, consequentemente, para cada letra que deseja enviar ao destinatário ele terá que escolher entre 26 símbolos. Logo, se ele planeja utilizar 5 emblemas do alfabeto, terá 26^5 possíveis combinações para formar sua mensagem. A transmissão de todos esses bits binários de informação precisam acontecer para que a mensagem chegue completa. Ao mesmo tempo, as probabilidades P_i selecionam as mensagens mais prováveis de acontecer. Por exemplo, se $P_4 \gg P_1$ é menos provável construir uma mensagem com mais resultados x_1 do que x_4 .

Desse modo, o número de mensagens possíveis corresponde ao número de maneiras de organizar N_i caracteres dependentes dos resultados x_i sendo este dado pelo coeficiente multinomial,

$$g = \frac{N!}{\prod_{i=1}^M N_i!} \quad (3.1)$$

onde g é muito menos do que o número total de mensagens dado por M^N . Para determinarmos o número de bits de informação, vale a pena notar que,

$$\begin{aligned} \log_2(g) &\approx \log_2 \left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^M N_i!} \right) \\ &\approx \log_2(N!) - \log_2 \left(\prod_{i=1}^M N_i! \right) \\ &\approx \log_2(N!) - \sum_{i=1}^M \log_2(N_i!). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considerando o limite para $N \rightarrow \infty$, podemos utilizar a aproximação de Stirling,

$$\log(x!) = x \log(x) - x + \mathcal{O}(\log(x)). \quad (3.3)$$

Assim, para o nosso caso ficamos com,

$$\begin{aligned}\log_2(g) &\approx N \log_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N_i \log_2(N_i) - N_i) \\ &\approx N \log_2(N) - N - \sum_{i=1}^M N_i \log_2(N_i) + \sum_{i=1}^M N_i.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Particularmente, no limite de $N \gg 1$ presumimos que a mensagem contenha aproximadamente $N_i = N P_i$ ocorrências de cada símbolo. Logo,

$$\begin{aligned}\log_2(g) &\approx N \log_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N P_i) \log_2(N P_i) + \sum_{i=1}^M N P_i \\ &\approx N \log_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N P_i) (\log_2(N) + \log_2(P_i)) + N \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i}_{=1} \\ &\approx N \log_2(N) - N \sum_{i=1}^M P_i \log_2(N) - N \sum_{i=1}^M P_i \log_2(P_i) \\ &\approx N \log_2(N) - N \log_2(N) \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i}_{=1} - N \sum_{i=1}^M P_i \log_2(P_i) \\ \log_2(g) &\approx -N \sum_{i=1}^M P_i \log_2(P_i) \text{ para } (N \rightarrow \infty).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Como já foi discutido, o resultado obtido na Eq. (3.5) sempre terá um valor menor do que os $N \log_2(M)$ para qualquer distribuição de probabilidades $\{P_i\}$ não uniforme. Portanto, o **conteúdo informacional** será a *diferença por tentativa* considerando uma certa distribuição de probabilidades. Assim,

$$\begin{aligned}I[(P_i)] &= \log_2(M) - \left(- \sum_{i=1}^M P_i \log_2(P_i) \right) \\ &= \log_2(M) + \sum_{i=1}^M P_i \log_2(P_i).\end{aligned}\quad (3.6)$$

3.3 ENTROPIA DE SHANNON

Qual o real significado de quando afirmamos que desejamos saber a *quantidade de informação* contida em um evento? Suponha que o evento seja jogar uma moeda e observar se foi cara ou coroa que caiu com a face para cima. Qual informação temos sobre o resultado antes de a moeda cair? Para uma moeda comum (não viciada) o que se sabe é que as chances de sair cara ou coroa são as mesmas. Porém, se a moeda possuir coroa nas duas faces, pode-se afirmar com certeza que após o lançamento sairá coroa. Isto é, no primeiro caso, a informação está oculta, sendo descoberta apenas após a jogada, enquanto no segundo não há informação oculta. A quantidade de informação oculta em um evento é o que desejamos saber. Pois, só teremos noção do quão incertos estamos a respeito de algum resultado após realizarmos a medição da mesma.

3.3.1 Princípio do conceito de entropia utilizado por Shannon

Podemos investigar o conceito de entropia de duas maneiras, sendo a primeira ligada ao grau de desorganização da matéria e a segunda à tendência de desorganização de toda a matéria. A termodinâmica afirma que a entropia nunca diminui num sistema fechado, isto é, seu grau de desorganização pode aumentar, porém jamais diminuir. Deste fato, decorre que a entropia é uma função de estado que descreve o grau de desorganização da matéria de um sistema que evolui continuamente no tempo, caracterizando assim um processo irreversível. Existem várias outras interpretações físicas e cosmológicas que são bastante profundas, mas neste trabalho iremos nos restringir a interpretações que estão intimamente relacionadas com a Teoria da Informação, o que impõe abordar o conceito de entropia conforme pensado por Ludwig Boltzmann.

Boltzmann define a entropia, de modo geral, em termos estatísticos, dentro de um contexto mecânico. Como se sabe, cabe aos domínios da estatística estudar uma amostragem ou população, isto é, estudar um conjunto finito de objetos. Observando bem, é impossível investigar as propriedades macroscópicas da matéria pelas características individuais de cada molécula. Portanto a entropia definida por Boltzmann é uma estatística sobre uma quantidade de matéria, ou seja, um número que descreve as moléculas coletivamente (KARDAR, 2007) (PINEDA et al., 2006).

A abordagem utilizada por Boltzmann para encontrar uma equação satisfatória para a

entropia baseou-se essencialmente em uma proposição de Maxwell para a *distribuição de velocidades* de partículas livres de um gás. A descrição do que aconteceria dentro de um recipiente repleto de gás fornece uma breve explicação: moléculas inicialmente em um estado organizado (onde foram introduzidas no mesmo recipiente com a mesma velocidade), começariam pouco a pouco a exibir variações de suas velocidades individuais em decorrência das colisões entre elas (no modelo proposto o choque com as paredes foram considerados como colisões perfeitamente elásticas, o que não alteraria o módulo da velocidade da molécula que colidisse contra ela), até que atingissem um estado de desordem máxima (LINDLEY, 2001). Boltzmann propõe que o estado mais molecularmente desorganizado seria aquele em que a distribuição de velocidades fosse homogênea. Note que é a distribuição das velocidades, e não as velocidades em si, que são homogêneas.

A proposição de Boltzmann resulta em equações integrais cuja a resolução é impraticável. Posteriormente, uma abordagem alternativa foi proposta por Max Planck. Segundo a teoria quântica, átomos e moléculas não se encontram em qualquer estado contínuo, mas em estados estáveis discretos, sendo que a transição de um estado para outro envolve absorção ou emissão de energia. A contagem destes estados quantizados está relacionada à medida da entropia do sistema (PINEDA et al., 2006). Além do mais, a determinação precisa da entropia continua é impraticável, o que proporcionou o surgimento de cálculos aproximados, através da criação de amostras discretas de velocidade, isto é, criando faixas de velocidades (PINEDA et al., 2006). Por outro lado, notamos que Shannon empregou princípios semelhantes na *Teoria Matemática da Comunicação* quando formulou o método de transformação de sinais contínuos em discretos (PINEDA et al., 2006).

3.3.2 A entropia segundo Claude Shannon

Embora a definição de informação que vimos apresente resultados interessantes, ela não permite determinar diretamente qual é a incerteza contida em um sistema conhecendo os possíveis estados que podem ser acessados e suas respectivas probabilidades.

Desse modo, considere uma situação em que se queira saber a quantidade de incerteza de um elemento σ_i ser o resultado da realização de um evento E_Λ com espaço amostral Λ . Ou seja, quanto maior a probabilidade $p(\{\sigma_i\})$, mais certeza temos sobre o resultado. Assim, entende-se por “incerteza” de σ_i a medida do quão *não* esperado é que o resultado de um evento seja σ_i . A essa quantidade, é dado também o nome de *autoinformação* $s(p(\{\sigma_i\}))$.

Portanto, quanto menos autoinformação seus elementos apresentarem, menor será a incerteza associada. Podemos então quantificar a quantidade de informação contida em um evento, que possui uma medida de probabilidade relacionada p , utilizando o conceito de autoinformação por meio dos postulados na Eq. (3.7):

$$\begin{aligned}
 & \cdot 0. s(p(\{\sigma_i\})) \text{ é não-negativa } \forall \sigma \in \Lambda; \\
 & \cdot 1. s(p(\{\sigma_i\})) \text{ é contínua em } (0, 1] \forall \sigma \in \Lambda; \\
 & \cdot 2. s(p(\{\sigma_i\})) \text{ é estritamente decrescente } \forall \sigma \in \Lambda; \\
 & \cdot 3. s[p(\{\sigma_1\}) \cdot p(\{\sigma_2\})] = s[p(\{\sigma_1\})] + s[p(\{\sigma_2\})] \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Lambda; \\
 & \cdot 4. S(p) = \sum_{\sigma} s(p(\{\sigma\})),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $S(p)$ representa a quantidade de informação contida em um evento (SHANNON, 1948).

O postulado zero é a exigência de que a quantidade de autoinformação não pode ser um número negativo. Já o primeiro, representa uma boa medida de uma variável real. O segundo postulado, confirma o que afirmamos anteriormente, quando dissemos que a autoinformação sempre diminui. O terceiro surge da constatação de que se um resultado σ surge a partir de dois outros resultados independentes σ_1 e σ_2 , então temos que a autoinformação de σ_1 mais a autoinformação de σ_2 é exatamente a autoinformação de σ . Por fim, temos o quarto postulado que diz que a incerteza sobre o resultado de um evento é a média das incertezas sobre seus possíveis resultados. Então, em decorrência desses postulados, surge o seguinte teorema:

◦ **Teorema** (Entropia de Shannon): *A função que satisfaz os quatro postulados denotados na Eq. (3.7) é $S(p) = -K \sum_{i=1}^n p(\{\sigma_i\}) \log_d p(\{\sigma_i\})$, em que $|\Lambda| = n$, d é a base do logaritmo e K é uma constante positiva. Essa função é conhecida como Entropia de Shannon (SHANNON, 1948).*

Demonstração: Seja $p_1 \notin \{0, 1\}$ a probabilidade de ocorrência de um resultado σ_1 e $p_2 \notin \{0, 1\}$ a de ocorrência de um resultado σ_2 . Seja n e m números naturais arbitrários, tal que,

$$p_2^m \geq p_1^n > p_2^{m+1}. \tag{3.8}$$

Pelo postulado 3 sabemos que,

$$s(p_1^n) = ns(p_1) \quad \text{e} \quad s(p_2^m) = ms(p_2). \quad (3.9)$$

Tomando o logaritmo da Eq. (3.8), ficamos com,

$$\begin{aligned} m \log_d p_2 &\geq n \log_d p_1 > (m+1) \log_d p_2 \\ \frac{m}{n} &\leq \frac{\log_d p_1}{\log_d p_2} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \\ \left| \frac{\log_d p_1}{\log_d p_2} - \frac{m}{n} \right| &< \frac{1}{n} \equiv \epsilon. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como n é arbitrário, ϵ também é, assim pelo postulado 2 temos,

$$\begin{aligned} s(p_2^m) &\leq s(p_1^n) < s(p_2^{m+1}) \\ m s(p_2) &\leq n s(p_1) < (m+1) s(p_2) \\ \frac{m}{n} &\leq \frac{s(p_1)}{s(p_2)} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \\ \left| \frac{s(p_1)}{s(p_2)} - \frac{m}{n} \right| &< \frac{1}{n} \equiv \epsilon. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O postulado zero nos permite inalterar as desigualdades quando as dividimos por $n s(p_2)$, logo pela desigualdade triangular obtemos,

$$\left| \frac{s(p_1)}{s(p_2)} - \frac{\log_d p_1}{\log_d p_2} \right| \leq \left| \frac{s(p_1)}{s(p_2)} - \frac{m}{n} \right| + \left| -\frac{\log_d p_1}{\log_d p_2} + \frac{m}{n} \right| < 2\epsilon. \quad (3.12)$$

Assim, pelo postulado 1, sabemos que $\frac{\log_d p_1}{\log_d p_2}$ é o resultado do limite de $-\frac{s(p_1)}{s(p_2)}$ respectivamente. Como p_1 e p_2 são arbitrários, $s(p_1) = -K \log_d p_1$ para $p_1 \in (0, 1)$ e K é uma constante positiva. O resultado não foi mostrado para $p_1 = 1$, mas, se $p_1 = 1 \rightarrow s(1) = 0$, o que está correto. Desse modo, seja $E_\Lambda = \{(\sigma_i, p(\{\sigma_i\})) | i \in \{1, \dots, n\}\}$, pelo postulado 4 encontramos,

$$S(p) = -K \sum_{i=1}^n p(\{\sigma_i\}) \log_d p(\{\sigma_i\}), \quad (3.13)$$

em que $p(\{\sigma_i\}) \neq 0 \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, n\}$.

Como K é uma constante arbitrária, costumasse fazer $K = 1$. Um outro costume bastante comum é trabalhar com o logaritmo na base 2, isso se dá para “amarrar” os valores da entropia num intervalo de 0 a 1. Dessa maneira, a entropia de Shannon pode ser reescrita como:

$$S(E_\Lambda) = - \sum_{i=1}^n p(\{\sigma_i\}) \log_2 p(\{\sigma_i\}), \quad (3.14)$$

onde podemos dizer que S é a *quantidade média de informação* por sinal de um repertório (SHANNON, 1948).

3.3.3 Entropia de Shannon $\times$ Entropia de Boltzmann

Uma das ideias que Shannon teve em relação ao seu conceito de entropia foi propor que a quantidade de informação contida em um evento era compatível com o conceito de entropia da mecânica estatística (PINEDA et al., 2006). Dessa forma, podemos de fato constatar mais facilmente essa afirmação relacionando a entropia de Shannon com a definição de entropia do ensemble microcanônico.

◦ **Prova:** Quando tratamos a entropia na interpretação do ensemble microcanônico, temos que a probabilidade de cada microestado acessível ao sistema (*sistemas que só podem ser acessados discretamente*) é dada pelo postulado fundamental da mecânica estatística, isto é,

$$p_j = \frac{1}{\Omega_j}, \quad (3.15)$$

onde Ω_j é o número de microestados acessíveis. Como sabemos, K é uma constante positiva e arbitrária, assim, podemos considerar $K = K_B$, onde, K_B é a constante de Boltzmann ($K_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$). Logo, partindo da Eq. (3.13) e substituindo as considerações, temos,

$$\begin{aligned}
S(p) &= -K \sum_j p_j \log_d(p_j) \\
&= -K_B \sum_{j=1}^{\Omega} \frac{1}{\Omega_j} \ln \left(\frac{1}{\Omega_j} \right), \tag{3.16}
\end{aligned}$$

onde consideramos $d = e = 2,71828\dots$ (*número de Euler*) e realizamos a soma sobre todos os microestados disponíveis. Assim, prosseguindo com o desenvolvimento encontramos,

$$\begin{aligned}
S &= -K_B \sum_{j=1}^{\Omega} \frac{1}{\Omega_j} \ln \left(\frac{1}{\Omega_j} \right) \\
&= -K_B \Omega \left[\frac{1}{\Omega} \ln \left(\frac{1}{\Omega} \right) \right] \\
&= -K_B \ln \left(\frac{1}{\Omega} \right) \\
&= -K_B \underbrace{[\ln 1]}_{=0} - \ln \Omega \\
&= -K_B (-\ln \Omega) \\
S &= K_B \ln \Omega \tag{3.17}
\end{aligned}$$

onde $S = K_B \ln \Omega$ é a definição da entropia no ensemble microcanônico.

3.3.4 Características da Entropia de Shannon

De maneira geral, observamos que a entropia de Shannon tem algumas características interessantes, como por exemplo:

- (1) À medida que um determinado resultado se torna mais provável de acontecer, do que outros, a **entropia decresce**.
- (2) A **máxima entropia** só acontece quando a informação permanece totalmente oculta.
- (3) Ao se ter certeza sobre um determinado resultado em um evento composto por duas possibilidades de acontecimentos, a **entropia é nula**. Algebricamente, podemos associar esse

caso a uma situação em que o resultado “premiado” foi sorteado pela distribuição do tipo função delta, $p_i = \delta_{ij}$.

Por sua vez, S também mede a dispersividade (*desordem*) de uma distribuição. Um ponto interessante em destaque sobre a teoria desenvolvida por Shannon, foi a sua observação sobre os graus de redundâncias presentes no idioma no qual a informação esta sendo transmitida (SHANNON, 1948). Sabendo disso, o que seria redundância a luz da Teoria da Informação? *É tudo aquilo que não é fundamental para o entendimento de uma mensagem e pode ser entendida como uma medida complementar à entropia*. Isto é, redundância é a entropia complementar para que a mensagem obtenha a entropia máxima.

Uma boa forma de medir quantitativamente as estimativas de uma distribuição de probabilidades é através de S . Quando não se tem qualquer informação, a melhor estimativa de equidade é que todos os valores de M (*resultados possíveis*) sejam igualmente prováveis. Esta é a distribuição eleita para alcançar a entropia máxima. Caso informações adicionais estejam em evidência, pode-se obter a estimativa imparcial maximizando a entropia submetida às restrições impostas por essa informação.

Afim de verificar o comportamento da entropia de Shannon, vamos revisitar o exemplo mencionado no primeiro parágrafo da seção (3.3), que é o de o lançamento de uma moeda comum (*não viciada*). Neste caso, temos as seguintes possibilidades de resultados após o lançamento:

Quadro 1 – Possibilidades do lançamento de uma moeda comum.

Possibilidade 1	Possibilidade 2
“Cara”	“Coroa”

Fonte: O autor (2023)

A partir de agora vamos considerar p_1 a probabilidade da moeda cair na face “cara” e p_2 a probabilidade de cair “coroa”, de modo que $p_1 + p_2 = 1$ ou 100%. Assim, para uma moeda não viciada, temos que $p_1 = p_2 = 50\%$. Munido desses fatores podemos calcular a entropia de Shannon associada a este evento.

Utilizando a Eq. (3.14), chegamos em,

$$S(p_1, p_2) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2, \quad (3.18)$$

onde utilizamos o logaritmo na base 2 para podermos obter a resposta em bits. Desse modo,

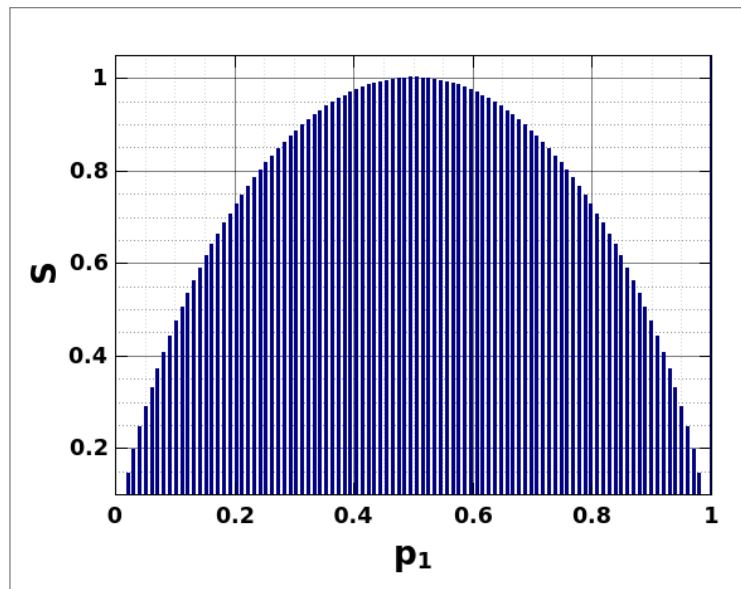
$$S = -(0,5) \log_2(0,5) - (0,5) \log_2(0,5) = 0,5 + 0,5 = 1. \quad (3.19)$$

assim, concluímos que a entropia de Shannon associada a este vento é 1 bit. Podemos também analisar o comportamento da entropia geometricamente, para isso, basta escrevermos S em função de p_1 ou de p_2 . Fazendo em função de p_1 , temos,

$$\begin{aligned} S &= -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 \\ &= -p_1 \log_2 p_1 - (1 - p_1) \log_2(1 - p_1), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde usamos que $p_2 = 1 - p_1$. Dessa maneira, podemos obter o gráfico de S em função de p_1 como mostra a Fig. (7).

Figura 7 – Entropia de Shannon em função da probabilidade p_1 de cair a face “Cara” referente ao lançamento de uma moeda comum.



Fonte: O autor (2023).

Note que a entropia de Shannon atinge seu ponto de máximo justamente para $p_1 = p_2 = 0,5 = 50\%$, ou seja, exatamente no momento de maior incerteza do evento, já que neste instante as chances da moeda cair com a face “Cara” ou “Coroa” são equiprováveis. Este

resultado convém com a nossa leitura da Teoria da Informação Clássica, já que a mesma equivale a situação de uma transmissão de mensagem no qual os símbolos tem a mesma probabilidade de ocorrência, de maneira que a entropia atinge seu valor máximo (SHANNON, 1948).

Continuando a análise da Fig. (7), percebemos que quanto maior for a diferença de probabilidades de ocorrência dos dois resultados possíveis no evento, maior também será o declínio da entropia em relação ao seu valor máximo. Isto é, S será nulo quando uma das probabilidades (p_1 ou p_2) for 100%. Com o intuito de verificar a veracidade desse fato, considere um novo exemplo. Seja agora um lançamento de uma moeda “viciada”, neste evento atual, $p_1 = 80\%$ (probabilidade de cair “Cara”) e $p_2 = 20\%$ de cair a face “Coroa”. Qual a entropia de Shannon associada a este novo evento?

Solução: Temos que $p_1 = 0,8$ e $p_2 = 0,2$, assim a entropia desse novo sistema é,

$$\begin{aligned} S &= -(0,8) \log_2(0,8) - (0,2) \log_2(0,2) \\ &\approx 0,721. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Isto é, a entropia neste evento tem um valor menor do que quando $p_1 = p_2 = 0,5$. Desse modo, concluímos de fato que S declina quando a diferença de probabilidades de se obter resultados diferentes aumenta.

Um fato interessante é que também pode-se estender a entropia de Shannon para uma variável aleatória contínua, onde a mesma se escreve,

$$S(p) = - \int dx p(x) \log_d[p(x)] = - \langle \log_d p(x) \rangle. \quad (3.22)$$

Os resultados desta tese referentes a entropia de Shannon, foram obtidos utilizando apenas a representação discreta (Eq. (3.14)), tendo em vista que no problema de buscas aleatórias temos duas probabilidades de capturas de sítios alvos, P_0 e P_L respectivamente. Tornando, nesse sentido, o evento semelhante ao do lançamento de uma moeda.

No decorrer do capítulo, vimos que podemos obter resultados práticos e importantes a respeito da entropia de Shannon. Porém, veremos que existe uma grande semelhança entre

o exemplo que vimos aqui e o nosso sistema de estudo. No próximo capítulo, vamos utilizar os resultados analíticos e conclusões obtidas neste para interpretar um dos nossos principais resultados, levando em consideração de que nosso problema se tem também apenas duas opções de escolha no que diz respeito as probabilidades envolvidas. De forma mais completa, faremos um estudo detalhado da eficiência, das probabilidades P_0 e P_L e da entropia de Shannon geradas pelas distribuições de probabilidades para os tamanhos de passos do tipo Lévy e a Lei de Potência.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS EM UMA DIMENSÃO

No presente capítulo faremos um estudo dos nossos principais resultados numa rede unidimensional. Os mesmos referem-se a eficiência da busca, às probabilidades do caminhante encontrar algum dos sítios-alvo e a entropia de Shannon atrelada a busca respectivamente. Iremos averiguar as três quantidades para duas distribuições de tamanhos de passos, a saber: Lévy e a Lei de Potência, onde destacaremos as principais diferenças entre elas. O estudo será composto por ambos os tipos de busca (*não-destrutivas* e *destrutivas*), porém, daremos uma atenção maior para as buscas não-destrutivas, por estas apresentarem, de forma geral, uma eficiência superior comparada com a das buscas destrutivas. Por fim, discutiremos o mecanismo relacionado à eficiência da busca em relação ao comportamento da entropia de Shannon.

4.1 DISTRIBUIÇÃO LEI DE POTÊNCIA

Nesta seção, analisaremos os aspectos estatísticos das buscas aleatórias não-destrutivas e destrutivas, onde evidenciaremos as quantidades η , P_0 , P_L e S para a distribuição de tamanho de passos do tipo lei de potência. As simulações numéricas que foram utilizadas para a obtenção desses resultados, seguiram o modelo geral de buscas aleatórias unidimensionais descrito na subseção (2.1.1), onde aqui $\lambda = L$ respectivamente.

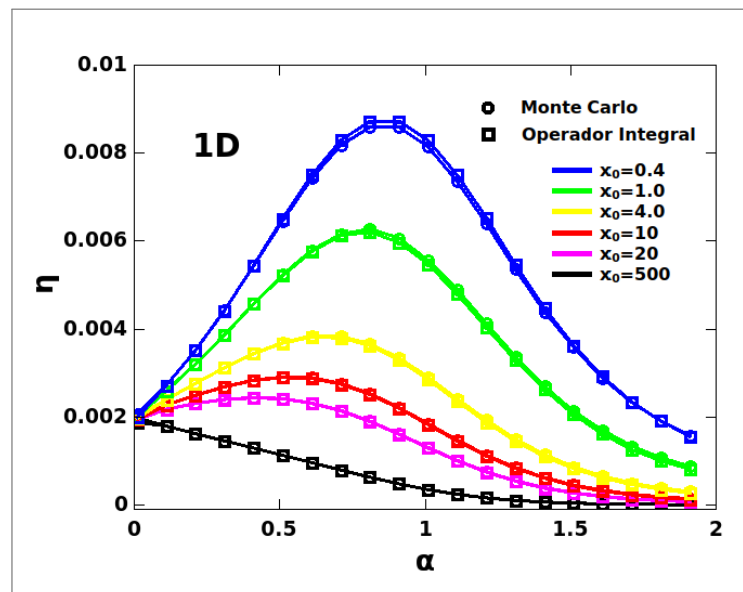
4.1.1 Eficiência da Busca (η)

Considere inicialmente a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência (Pareto) como sendo da forma, $P(\ell_j) \sim 1/\ell_j^{\alpha+1}$, com $0 < \alpha \leq 2$. A variação do expoente α caracteriza diferentes distribuições de probabilidades, no qual, tomando o exemplo do caso especial $\alpha = 2$, vamos nos deparar com somas de deslocamentos que convergem para a distribuição normal, decorrência do Teorema Central do Limite. Bem como temos também, o caso da convergência para a distribuição de Cauchy-Lorentz ($\alpha = 1$). Já para distribuições com $\alpha \rightarrow 0$, nos deparamos com longos passos e deslocamentos balísticos. Os casos onde $\alpha \leq 0$ a soma dos passos convergem para distribuições que não podem ser normalizadas (VISWANATHAN et al., 1999b).

A Fig. (8) apresenta a eficiência da busca η em função do parâmetro α . Os dados da

figura foram obtidos através de dois tipos de simulações numéricas, a saber: **Método do Operador Integral** (*descrito no capítulo 2*) e o **Método de Monte Carlo** (COLAÇO et al., 2022). Apesar do nome, o segundo método que utilizamos advém de simulações numéricas que também seguem as regras do caminhante aleatório presentes no capítulo. 2, em que novamente somos nós que realizamos o sorteio dos passos do buscador. Para gerarmos os gráficos da Fig. (8), realizamos as simulações numéricas estabelecendo os seguintes valores para os parâmetros relevantes do sistema, $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ isso para vários valores de x_0 , como mostra a paleta de cores. Para a PDF da Lei de Potência, a variável independente é o parâmetro α , onde $0 < \alpha \leq 2$. Como nos utilizamos do tratamento discreto do sistema, optamos por fazer a varredura do α em pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$.

Figura 8 – Eficiência η em função do parâmetro α para buscas aleatórias destrutivas e não-destrutivas. A distribuição de tamanho de passos utilizada foi a lei de potência. Note que a eficiência máxima da busca é obtida para $\alpha \approx 1$ para buscas não-destrutivas e para $\alpha \rightarrow 0$ para buscas destrutivas. Os círculos representam os dados do Método de Monte Carlo, enquanto os quadrados os dados do Método do Operador Integral. Os parâmetros relevantes ao problema que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para vários valores de x_0 como mostra a paleta de cores.



Fonte: O autor (2023)

Uma das primeiras coisas que se pode notar na Fig. (8) é que temos uma boa concordância entre os dois métodos de simulação numérica que utilizamos, isto é, entre o Método de Monte Carlo (círculos) e o Método do Operador Integral (quadrados). As linhas sólidas são apenas “guias para os olhos”. Em particular, os chamados regimes não-destrutivos (assimétricos) e os destrutivos (simétricos) correspondem respectivamente, a posição inicial do buscador, isto é, caso o caminhante se encontre muito próximo do último alvo encontrado ($x_0/L \ll 1$) a

sua próxima busca será no regime não-destrutivo. Já o caso que o mesmo se localize muito distante do último sítio detectado ($x_0/L = 1/2$) a sua próxima busca será no regime destrutivo (VISWANATHAN et al., 2011) (MÉNDEZ; CAMPOS; BARTUMEUS, 2016).

No regime não-destrutivo a eficiência da busca se comporta de uma forma singular. Observe que os menores valores de η se dão para $\alpha \approx 0$ e para $\alpha = 2$, enquanto que o seu valor máximo está associado a $\alpha \approx 1$ conforme representado em símbolos azuis na Fig. (8) para $x_0 = 0, 4$. Este fato se justifica, pois, como discutimos no capítulo (2), a eficiência da busca varia com o inverso de dois parâmetros relevantes no problema, que são: o número médio de passos entre dois encontros N , e do comprimento médio de um passo individual $\langle \ell \rangle$ (Eq. 2.47). Sendo assim, note que a eficiência sofre um decaimento quando temos grandes valores de N e de $\langle \ell \rangle$. Sabendo disso, podemos chegar a seguinte conclusão sobre a eficiência da busca não-destrutiva: como já é de nosso conhecimento, para $\alpha \approx 0$ o caminhante encontra-se no regime balístico o que implica que o tamanho do seu passo individual assume grandes valores. Por outro lado, para $\alpha = 2$, o comprimento $\langle \ell \rangle$ é pequeno e por conta disso, o caminhante tem, em média, de realizar um grande número de passos N para encontrar o sítio. Portanto, percebemos que por esta razão a eficiência da busca é baixa para esses valores de α , tendo em vista que, nas extremidades temos os menores valores de η . Assim, espera-se que para valores intermediários de α ($\alpha \approx 1$) um máximo possa emergir, associada a uma estratégia que combine um grande número de pequenos passos intermediado por grandes passos que tem uma probabilidade baixa de ocorrência. E esta hipótese foi numericamente constatada na Fig. (8).

Conforme constatado no parágrafo anterior, o valor máximo da eficiência que foi obtido para $\alpha \approx 1$ representa um equilíbrio entre a estratégia de execução de passos longos, favorecida por $\alpha \rightarrow 0$ e aquela em que ocorre um aumento no número médio de passos que o caminhante deve exercer entre dois encontros consecutivos, favorecida para $\alpha \rightarrow 2$. Uma boa explicação para esse equilíbrio é dada da seguinte forma: Como no caso *não-destrutivo* a posição inicial do buscador é próxima de um dos sítios ($x_0 \approx r_v$), a forma mais eficiente do caminhante otimizar o processo de busca é executando um número considerável de passos curtos para que ele consiga alcançar o alvo mais próximo, mas também eventualmente realizar passos mais longos para poder alcançar o alvo mais distante. Deste modo é que surge o valor ótimo interposto para α , ou seja, irá emergir um valor máximo de η para $\alpha \approx 1$ como já havíamos discutido.

Na Fig. (8) podemos observar que para o caso de $x_0/L = 1/2$ (busca destrutiva), temos

que o valor máximo da eficiência está associado a valores de $\alpha \approx 0$. Este fato se dá porque diferente da busca não-destrutiva, o caçador encontra-se longe dos dois sítios presentes no intervalo, de modo que, para alcançá-los de uma forma mais otimizada ele precisa adotar uma estratégia que seja composta apenas de passos mais longos e com direções aleatórias. Sendo assim, como já havíamos discutido, o regime de passos extensos e balísticos acontece, na lei de potência, quando os valores de $\alpha \rightarrow 0$. Portanto, constatamos de fato que para $x_0/L = 1/2$ obtemos a eficiência máxima, isto é, $\eta_{\text{máx}} = 1/x_0 = 0,002$, quando $\alpha \rightarrow 0$ de acordo com o gráfico com símbolos pretos da Fig. (8). Este fato mostra que o caminhante alterna a sua estratégia de busca para cada regime.

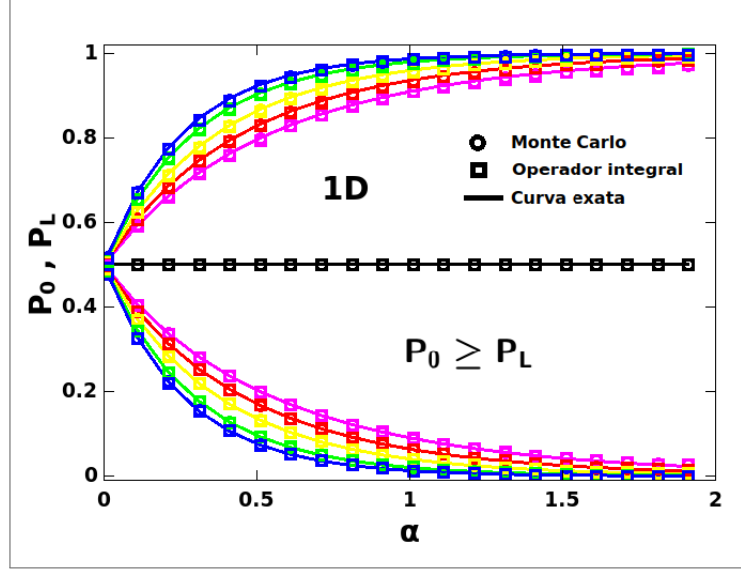
Finalmente, podemos notar que a medida que o valor de x_0 vai aumentando, acontece uma queda na eficiência da busca e no valor de α associado ao $\eta_{\text{máx}}$. Este fato, que já foi descrito na literatura (VISWANATHAN et al., 2011) (MÉNDEZ; CAMPOS; BARTUMEUS, 2016), mostrou que a eficiência é maximizada para alguns valores de α que depende de x_0 , ou seja, $\alpha = \bar{\alpha}(x_0)$. Os resultados também mostram que os valores de η e $\bar{\alpha}(x_0)$ diminuem com x_0 e ficam restritos ao intervalo $0 < \bar{\alpha}(x_0) \leq 1$.

4.1.2 Probabilidades P_0 e P_L

Nesta etapa investigamos a probabilidade P_0 de encontrar o último alvo visitado após começar a uma distância x_0 dele. Por completeza, também analisamos a probabilidade complementar P_L (em 1D P_L está relacionado a probabilidade do encontro do alvo que está a uma distância inicial $L - x_0$ do buscador). A Fig. (9) ilustra as probabilidades P_0 e P_L em função do expoente α para o regime simétrico e também para o regime assimétrico. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da subseção (4.1.1) seguindo a mesma paleta de cores, isto é, $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ com $0 < \alpha \leq 2$ variando em pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$. Novamente, analisamos vários valores de x_0 explorando os dois regimes de busca. Para o método do operador integral, utilizamos $\Delta x = 0,2$ como elemento de discretização.

A Fig. (9) mostra uma boa concordância entre os resultados de Monte Carlo (círculos), Operador Integral (quadrados) e as expressões analíticas exatas (linha sólida) para as probabilidades P_0 e P_L (BULDYREV et al., 2001b) (BULDYREV et al., 2001a). A curva analítica exata foi obtida com o auxílio da literatura, onde verificamos que podemos representar P_L analiticamente da seguinte maneira,

Figura 9 – Probabilidades P_0 e P_L de o caminhante detectar os sítios localizados em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, em função do expoente α para os regimes destrutivo e não-destrutivo. As buscas foram conduzidas pela $p(\ell)$ do tipo Lei de Potência. Observe que tivemos uma boa concordância entre os Métodos do Operador Integral (quadrados) e Monte Carlo (círculos), além de concordar bem com a curva teórica analítica (linha sólida). Os parâmetros relevantes ao problema que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para vários valores de x_0 seguindo a paleta de cores da Fig. (8).



Fonte: O autor (2023)

$$P_L(x_0, \alpha) = f(x_0, \alpha) \left(\frac{x_0}{L} \right)^{\alpha/2}, \quad (4.1)$$

onde a expressão se aplica para $\ell_0 \rightarrow 0$. A função $f(x_0, \alpha)$ é representada por,

$$f(x_0, \alpha) = \frac{{}_2F_1(\alpha/2, 1 - \alpha/2; 1 + \alpha/2; x_0/L)}{\alpha B(\alpha/2, \alpha/2)}, \quad (4.2)$$

em que ${}_2F_1$ e B denotam a função hipergeométrica e a função beta respectivamente. Para obtermos a curva analítica de P_0 , utilizamos a propriedade de completeza das propabilidades, isto é, $P_0 = 1 - P_L$.

Assim como na subseção (4.1.1), primeiramente iremos interpretar os resultados da busca não-destrutiva. Sendo assim, partindo desta consideração, podemos afirmar que no regime em que $\alpha \approx 0$, temos um longo comprimento de passo individual ($\langle \ell \rangle \gg 1$) o que implica em passos largos e uma dinâmica balística de busca. Isto significa que, ao executar esses passos a probabilidade de se encontrar sítios em regiões mais distantes aumenta, mais especificamente o alvo localizado em $x = L$ (Fig. 3). No entanto, esta probabilidade nunca chega a ser tão

grande quanto a de ele encontrar o sítio localizado em $x = 0$, considerando que estamos analisando a busca no regime assimétrico ($x_0 \approx r_v$). Portanto, chegamos a conclusão que os valores de $\alpha \approx 0$ estão associados a maior probabilidade possível do caminhante detectar o sítio em $x = L$. Conforme o parâmetro α vai crescendo, o tamanho médio do passo individual diminui, ou seja, o buscador vai entrando em um regime de passos mais curtos, de maneira que a probabilidade de se encontrar alvos em regiões mais distantes decresce, justificando, desse modo, o motivo da diminuição monotônica de P_L à medida que α aumenta.

De maneira análoga, podemos explicar o crescimento monotônico de P_0 com o expoente α . Sendo assim, como para $\alpha \approx 0$ o buscador está no regime de passos mais longos, o alvo que está na região mais distante tem a maior probabilidade de ser encontrado, implicando que a probabilidade P_0 de se encontrar o alvo mais próximo é a menor possível. Como estamos no regime assimétrico, o caminhante parte para a sua busca em uma posição inicial próxima ao sítio em $x = 0$, de maneira que ele já inicia sua procura com grandes chances de detectar este sítio. Todavia, à medida que $\alpha \rightarrow 2$ o tamanho médio do passo individual diminui, ao mesmo tempo que, aumenta o número médio de passos entre dois encontros sucessivos, fazendo crescer gradativamente as suas chances de encontrar o sítio em $x = 0$, justificando o motivo de P_0 atingir seu valor máximo quando $\alpha = 2$.

Por completeza, vamos explicar o resultado para o caso simétrico. O gráfico constante composto pelos símbolos pretos presentes na Fig. (9) mostra o comportamento das probabilidades P_0 e P_L para o regime com $x_0/L = 1/2$. Como já foi dito, a situação do caminhante iniciar sua busca da posição $x_0 = L/2$ não estabelece uma condição vantajosa para a busca destrutiva. Portanto, a melhor estratégia para caçar os alvos seria o buscador se deslocar balisticamente em todas as direções possíveis. Nesta circunstância, as probabilidades P_0 e P_L de o caçador rastrear os sítios-alvo localizados em $x = 0$ e $x = L$ são as mesmas. Ou seja, $P_0 = P_L = 1/2$ independente de o caminhante executar passos longos ou curtos, isto é, independente do valor do parâmetro α . Um outro fato interessante decorrente da independência dos valores de P_0 e P_L na busca destrutiva é que esses valores também não dependem da PDF que determina o tamanho e a direção dos passos do buscador. Isto é, $P_0 = P_L = 1/2$ para qualquer distribuição de tamanho de passos no regime simétrico.

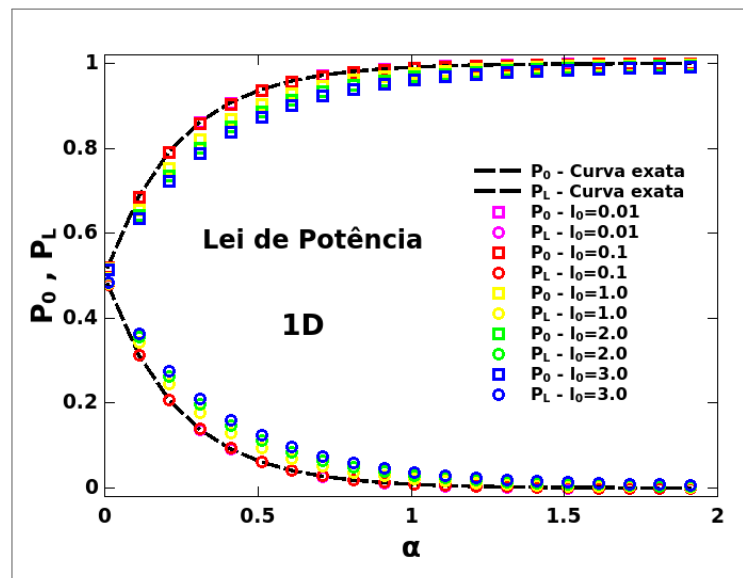
Em suma, quando o caçador inicia sua busca a partir de uma posição centralizada na rede unidimensional, isto é, quando $x_0/L = 1/2$, verificamos que $P_0 = P_L = 1/2$ para qualquer valor de α como já era esperado. No entanto, a medida que x_0 diminui, ou seja, quando o buscador começa sua busca mais perto do último alvo visitado, P_0 aumenta monotonicamente

para qualquer valor de α . Também constatamos que $P_0 > P_L \forall x_0/L < 1/2$ e $\alpha > 0$. Este resultado indica que em 1D o último alvo encontrado é sempre detectado com maior probabilidade comparado com o outro alvo da rede (sítio-alvo mais distante), resultado que não se sustenta em 2D, como veremos mais adiante.

4.1.2.1 Comparação das Probabilidades P_0 e P_L para diferentes valores de ℓ_0

Com o objetivo de investigar mais o comportamento das probabilidades P_0 e P_L em uma dimensão, realizamos um estudo comparativo com mais detalhes a respeito das simulações numéricas e a curva analítica exata. A Fig. (10) ilustra o comportamento das curvas de P_0 e P_L para uma busca não-destrutiva com diferentes valores de ℓ_0 , tendo em vista que, para as buscas destrutivas as probabilidades P_0 e P_L assumem o valor de $1/2$ para qualquer valor de ℓ_0 . Tal como na Fig. (9), os parâmetros utilizados para a geração da Fig. (10) foram $L = 10^3$, $r_v = 0$, $x_0 = 2$ (busca não-destrutiva) e uma varredura de ℓ_0 no intervalo de $0,01 \leq \ell_0 \leq 3$. Para cada valor de ℓ_0 , o parâmetro α variou no intervalo $0 < \alpha \leq 2$ em pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$ respectivamente.

Figura 10 – Probabilidades P_0 e P_L de o caminhante detectar os sítios localizados em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, em função do expoente α para o regime não-destrutivo, sendo as buscas conduzidas pela $p(\ell)$ do tipo Lei de Potência. Note que a medida que o valor de ℓ_0 diminui, os valores da simulação vão se aproximando da curva analítica exata para P_0 (quadrados) e P_L (círculos). Para a obtenção dos gráficos presentes nesta figura, os parâmetros relevantes do problema foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, para vários valores de ℓ_0 seguindo a paleta de cores com $x_0 = 1$ fixo.



Fonte: O autor (2023)

Observe que os quadrados denotam a probabilidade de o caminhante localizar novamente o último sítio encontrado (P_0), enquanto que os círculos representam a probabilidade de o buscador detectar o sítio complementar localizado em $x = L$ (P_L). A curva tracejada de cor preta (curva exata) foi gerada através da Eq. (4.1) com o apoio da Eq. (4.2) e a mesma representa a curva analítica exata para as probabilidades de detecção dos alvos. Como já foi dito, nesse modelo de buscas aleatórias, para se realizar as simulações numéricas, se faz necessário estabelecer um comprimento de passo mínimo para o caminhante aleatório (ℓ_0). Isso se dá porque precisamos discretizar o problema para fazermos a leitura numérica do mesmo.

O estudo foi feito explorando 5 valores diferentes de ℓ_0 como mostra a Fig. (10). O que constatamos foi que as curvas de P_0 e P_L se aproximam das curvas teóricas analíticas, conforme o valor do comprimento de passo mínimo ℓ_0 vai diminuindo. Este resultado fortalece o que já está descrito na literatura (BULDYREV et al., 2001b) (BULDYREV et al., 2001a), que estabelece validade para a Eq. (4.1) quando $\ell_0 \rightarrow 0$. Um outro detalhe observado, foi que a partir de $\ell_0 = 0,1$ não tivemos uma aproximação mais significativa dos dados numéricos com a curva analítica exata, o que nos permitiu realizar boas simulações com um baixo custo computacional.

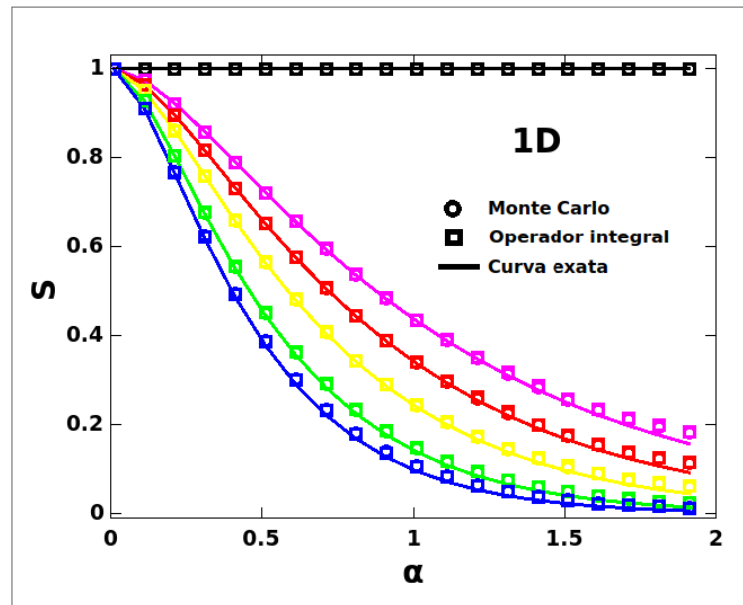
4.1.3 Entropia de Shannon (S)

Uma indagação importante de ser feita no problema das buscas aleatórias é verificar se existe uma relação direta ou indireta entre o máximo da eficiência da busca observado no regime não-destrutivo e algum tipo de extremização (máximo ou mínimo) na entropia de Shannon (S) associada a busca. Sendo assim, o nosso objetivo nesta subseção é analisar o comportamento de S com o expoente α para a PDF da Lei de Potência.

A Fig. (11) ilustra o comportamento da função $S \times \alpha$ para buscas aleatórias unidimensionais destrutivas e não-destrutivas associadas a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência. Os parâmetros utilizados têm os mesmos valores das subseções anteriores, isto é, $L = 10^3$, $\ell_0 = 0,2$, $r_v = 0$, onde $0 < \alpha \leq 2$ varrendo pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$. Semelhantemente, examinamos vários valores de x_0 averiguando os regimes simétrico e assimétrico seguindo a mesma paleta de cores da Fig. (8) respectivamente. Assim como nas subseções (4.1.1) e (4.1.2) utilizamos $\Delta x = 0,2$ como elemento de discretização para o método do operador integral. Da mesma maneira que a eficiência (η) e as probabilidades (P_0 e P_L) observamos uma boa concordância entre os resultados analíticos exatos (linhas

sólidas) e os métodos de simulação numéricas que utilizamos a saber: Monte Carlo (círculos) e o Método do operador integral (quadrados). A curva analítica exata para a entropia S foi gerada com o auxílio da Eq. (4.1) no qual nos utilizamos do seguinte “artifício”: No problema das buscas aleatórias em 1D, a entropia de Shannon pode ser escrita como $S(P_0, P_L) = -P_0 \log_2(P_0) - P_L \log_2(P_L)$, como $P_0 + P_L = 1$, podemos escrever S em função de apenas uma das probabilidades existentes, isto é, $S = S(P_0)$ ou $S = S(P_L)$. Como já temos conhecimento, a Eq. (4.1) denota a expressão analítica exata para a probabilidade do caminhante encontrar o sítio localizado em $x = L$, sendo assim, para que conseguíssemos obter uma expressão analítica exata para S , foi conveniente optarmos por representar a entropia como uma função puramente de P_L , ou seja, $S = S(P_L)$.

Figura 11 – Entropia de Shannon S em função do expoente α para buscas não-destrutivas e destrutivas associadas a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência. Podemos notar uma boa concordância para os métodos de simulações numéricas Monte Carlo (círculos) e o Método do Operador Integral (quadrados). Também, observamos uma boa concordância entre as simulações e a curva analítica exata associada a S . Para a obtenção dos gráficos presentes nesta figura, os parâmetros relevantes do problema foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0, 2$ para vários valores de x_0 seguindo a paleta de cores.



Fonte: O autor (2023)

Para realizar o procedimento descrito de forma analítica, precisamos lembrar que em nosso problema, P_L é dada pela Eq. (4.1) e que a entropia em função de P_L é dada por $S(P_L) = -(1 - P_L) \log_2(1 - P_L) - P_L \log_2 P_L$ respectivamente. Dessa maneira, vendo que a Eq. (4.1) depende implicitamente da função beta e sabendo também que a mesma pode ser escrita (HASSANI, 2009) como,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (4.3)$$

munida da seguinte relação de recorrência,

$$B(z; a, b) = B(a, b) - B(1 - z; b, a), \quad (4.4)$$

podemos obter para o nosso caso, após a execução de alguns cálculos, que

$$1 - P_L = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2)} B\left(1 - \frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right). \quad (4.5)$$

Consequentemente, de posse desse resultado, finalmente podemos demonstrar uma expressão analítica exata para as curvas da entropia de Shannon, desse modo, obtemos que,

$$\begin{aligned} S(P_L) = & -\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2)} \{ \log_2 \Gamma(\alpha) \left[B\left(1 - \frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) + B\left(\frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \right] \right. \\ & + \log_2 \left(\frac{1}{\Gamma^2(\alpha/2)} \right) \left[B\left(1 - \frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) + B\left(\frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ & + B\left(1 - \frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \log_2 B\left(1 - \frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \\ & \left. + B\left(\frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \log_2 B\left(\frac{x}{L}; \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

onde $B(x/L; \alpha/2, \alpha/2)$ é a função beta e $\Gamma(\alpha)$ é a função gamma respectivamente.

No primeiro momento vamos investigar a dependência da entropia de Shannon com o parâmetro α para o regime das buscas aleatórias não-destrutivas ($x_0 \approx r_v$). Isto é, vamos explicar a causa das curvas presentes na Fig. (11) de cores azul, verde, amarela, vermelha e rosa estarem decaindo monotonicamente. Revisitando o problema do lançamento de uma moeda comum descrito na subseção (3.3.4), observamos que existe uma semelhança como o problema das buscas aleatórias 1D, no sentido de duas possibilidades se apresentam em ambas as situações (“Cara” ou “Coroa” na situação do lançamento da moeda, detecção do sítio fixado em $x = 0$ ou detecção do sítio fixado em $x = L$ no caso das buscas aleatórias 1D). Sendo assim, podemos nos utilizar da conclusão que tiramos no problema da moeda, para também explicar o decaimento monotônico de S na Fig. (11). A conclusão que tiramos no caso do

problema do lançamento da moeda afirma que *a entropia de Shannon decai monotonicamente à medida que a diferença de probabilidades dos dois eventos possíveis aumenta*. Analisando a Fig. (9), verificamos que é exatamente isso que acontece com as probabilidades para às buscas não-destrutivas, isto é, à medida que o parâmetro α aumenta, ocorre um decréscimo dos valores de P_L e um acréscimo nos valores de P_0 , implicando no aumento da diferença entre as probabilidades conforme o parâmetro α estende o seu valor. Portanto, visto que esse fato acontece com as probabilidades, é natural esperarmos um máximo da entropia em $\alpha \approx 0$ (valor de α onde $P_0 \approx P_L$) e um decaimento monotônico da entropia S neste caso (buscas aleatórias 1D). Assim, o comportamento monotônico de P_0 e P_L em função de x_0 e α implica que S sempre diminui com α para um determinado x_0 fixo e sempre aumenta com x_0 para um valor de α fixo.

Esse resultado pode ser também verificado analiticamente maximizando a função $S = S(P_0)$ ou $S = S(P_L)$, isto é, fazendo $dS/dP_0 = 0$ ou $dS/dP_L = 0$ respectivamente. Portanto, considere a entropia de Shannon, associada as buscas aleatórias 1D escrita da seguinte forma,

$$S(P_0, P_L) = -P_0 \log_2 P_0 - P_L \log_2 P_L, \quad (4.7)$$

onde também vamos considerar a relação de completeza $P_0 + P_L = 1$. Tomando, $P_L = 1 - P_0$ através da relação de completeza e substituindo na Eq. (4.7), obtemos a função $S(P_0)$ como sendo,

$$S(P_0) = -P_0 \log_2 P_0 - (1 - P_0) \log_2(1 - P_0), \quad (4.8)$$

a função que desejamos maximizar. Assim, calculando $dS(P_0)/dP_0 = 0$, iremos alcançar a condição necessária para que $S = S_{\text{máx}}$ como almejamos. Então, diferenciando a Eq. (4.8), em relação a P_0 temos,

$$\begin{aligned} \frac{dS(P_0)}{dP_0} &= -\frac{d}{dP_0} [P_0 \log_2 P_0] - \frac{d}{dP_0} [(1 - P_0) \log_2(1 - P_0)] = 0 \\ &= -\left[\log_2 P_0 + \frac{P_0}{P_0}\right] - \left[-\log_2(1 - P_0) + \frac{(1 - P_0)}{(1 - P_0)}\right] = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde simplificando os termos ficamos com,

$$\begin{aligned}
\frac{dS(P_0)}{dP_0} &= -\log_2 P_0 - 1 + \log_2 \underbrace{(1 - P_0)}_{P_L} + 1 = 0 \\
&= -\log_2 P_0 + \log_2 P_L = 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

e conseqüentemente, $\log_2 P_L = \log_2 P_0$ o que implica diretamente em $P_L = P_0$. Vale a pena destacar a importância desse resultado, tendo em vista que, foi a conexão dos resultados descritos nas Figs. (11) e (12), isto é, $S = S_{\text{máx}}$ para valores de $P_0 = P_L$ como havíamos discutido no momento anterior.

Este raciocínio analítico também se aplica para às buscas em 2D, porém, com a diferença de que em 1D o buscador não pode “errar” um alvo quando salta sobre ele sem que o mesmo seja detectado o que não acontece em 2D como veremos mais adiante. Em vista disso, em 1D sempre terminamos com $P_0 \geq P_L$ para quaisquer $x_0 \leq L/2$ e qualquer valor de α , sendo a entropia máxima apenas alcançada no limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$).

A Fig. (11) também ilustra como se comporta a entropia $S \times \alpha$ no regime de buscas destrutivas. O resultado é composto pelos símbolos (quadrados e círculos e linha sólida) de cor preta. Este comportamento pode ser explicado com o apoio da Fig. (9), onde é possível verificar que para $x_0/L = 1/2$ temos os valores $P_0 = P_L = 0,5$. Desse modo, podemos calcular S analiticamente para este regime, logo,

$$\begin{aligned}
S(P_0, P_L) &= - \sum_{j=P_0, P_L} P_j \log_2(P_j) = -P_0 \log_2(P_0) - P_L \log_2(P_L) \\
&= -2 P_0 \log_2(P_0) = -2 (0,5) \log_2(0,5) \\
&= \log_2(2) = 1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Note que este resultado independe do valor do parâmetro α , o que significa que $S = 1$ para qualquer distribuição de tamanho de passos para as buscas aleatórias no regime simétrico.

Retornando para o regime das buscas assimétricas ($x_0/L < 1/2$) podemos agora de fato comparar os gráficos $\eta \times \alpha$ com $S \times \alpha$. O estudo foi realizado com o intuito de averiguar se os pontos máximos da eficiência estão atrelados a pontos de extremização da entropia de Shannon. Como é possível observar este fato *não* se confirmou. Portanto, pode-se concluir que

o processo de maximização da eficiência nas buscas não-destrutivas para a Lei de Potência, não está relacionada a um mecanismo de extremização da entropia. De fato, a mecânica de otimização da eficiência da busca envolve o compromisso com a execução de passos largos favorecidos pela dinâmica balística $\alpha \rightarrow 0$ e por deslocamentos individuais mais curtos ($N \gg 1$) favorecidos pela dinâmica gaussiana $\alpha \rightarrow 2$ como já discutimos na subseção (4.1.1). Porém, a análise e a compreensão do papel da entropia de Shannon, especialmente no caso das buscas não-destrutivas é importante para o entendimento das buscas aleatórias eficientes. A ausência de um máximo de S para $\alpha > 0$ em caminhadas aleatórias 1D, contrasta notavelmente com um comportamento bastante distinto de S em buscas 2D como veremos mais adiante.

4.2 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY

Assim como na seção (4.1) vamos estudar algumas particularidades de natureza estatística das buscas aleatórias não-destrutivas e destrutivas, no qual deixaremos em destaque novamente as quantidades η , P_0 , P_L e S . A diferença está unicamente na distribuição de tamanho de passos, onde nesta etapa do estudo utilizamos a distribuição de Lévy. As simulações numéricas que foram utilizadas para a construção dos resultados a seguir, obedeceram o modelo geral de buscas aleatórias unidimensionais descrito na subseção (2.1.1) respectivamente.

4.2.1 Eficiência da Busca (η)

Nesta subseção vamos analisar o comportamento da eficiência da busca relacionada a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Sendo assim, considere o tamanho e a direção do passo do caminhante sorteado pela seguinte distribuição (LECCARDI, 2005),

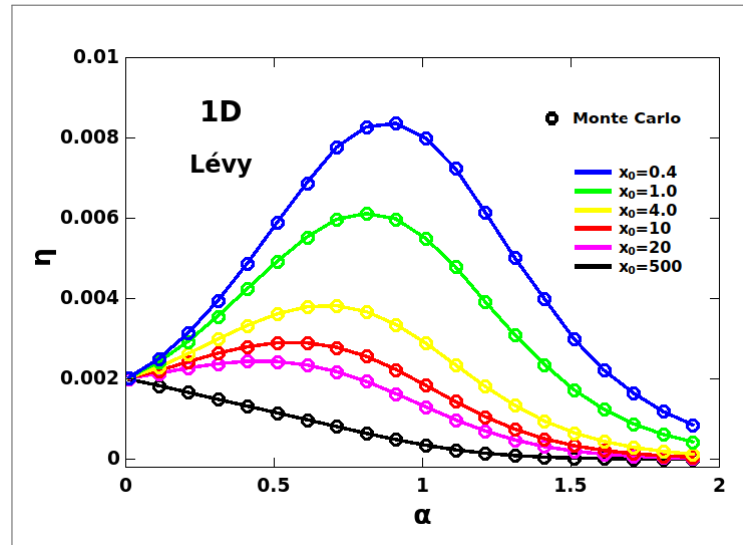
$$P(\ell(\alpha), \Phi) = C \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos[(1-\alpha)\Phi]}{W} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} + \tau, \quad (4.12)$$

em que em nossas simulações assumimos que $\tau = 0$ e $C = \ell_0$ respectivamente. Uma outra consideração que assumimos também em nossas simulações foi que a variável W se distribui exponencialmente e este fato implica que a mesma pode ser representada como $W = -\log X$, onde X é uma variável aleatória (LECCARDI, 2005). Por fim, assumimos $\Phi = \pi(X - 1/2)$ como uma distribuição uniforme de ângulos, em que X é a mesma variável aleatória que compõe

W . Assim como na distribuição do tipo Lei de Potência, temos as mesmas características associadas ao expoente α , isto é, sua varredura no intervalo de $(0, 2]$ configura diferentes distribuições de probabilidades, tendo como principais exemplos os casos de $\alpha = 2$ (distribuição gaussiana), $\alpha = 1$ (distribuição de Cauchy) e $\alpha \rightarrow 0$ (distribuições com longos passos e deslocamentos balísticos). As distribuições com $\alpha \leq 0$ correspondem a casos que não são normalizáveis (VISWANATHAN et al., 1999b).

A Fig. (12) ilustra a eficiência da busca η em função do parâmetro α . Os gráficos foram obtidos para $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para seis valores de x_0 diferentes. Os dados dos gráficos foram obtidos através da simulação de **Monte Carlo**. Para a PDF de Lévy, uma das variáveis independentes é o parâmetro α com $\alpha \in (0, 2]$, onde ao discretizar o nosso sistema escolhemos uma varredura $d\alpha = 0,1$ para os possíveis valores de α .

Figura 12 – Eficiência $\eta \times \alpha$ para buscas aleatórias destrutivas e não-destrutivas. A distribuição de tamanho de passos utilizada foi a de Lévy. Os parâmetros relevantes no modelo de busca que utilizamos foram respectivamente: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para 6 valores de x_0 como mostra o conjunto de cores. Observe que o $\eta_{\text{máx}}$ é alcançado para $\alpha \approx 1$ para as buscas assimétricas ($x_0 = 0,4$) e para $\alpha \approx 0$ para buscas simétricas ($x_0 = 500$).



Fonte: O autor (2023)

De maneira geral, é possível observar primeiramente que existe uma grande semelhança qualitativa entre os gráficos da Fig. (12) com os gráficos da Fig. (8) para os dois regimes de busca. Esse resultado já era esperado, tendo em vista que, a distribuição de tamanho de passos de Lévy converge para a distribuição Lei de Potência para passos com comprimentos muito longos. Vale a pena lembrar que os regimes destrutivos e não-destrutivos são definidos de acordo com a posição inicial do buscador, isto é, para $x_0 \approx r_v$ temos um regime de buscas assimétrica, já para $x_0 = L/2$ vamos ter um regime de busca totalmente simétrico em uma

dimensão.

Tal como na Fig. (8), podemos notar que a eficiência máxima no regime de buscas não-destrutivas na Fig. (12) acontece também para valores de $\alpha \approx 1$, assim como os menores valores de η estão associados a $\alpha \approx 0$ e a $\alpha = 2$. Estes resultados se dão, pois, a eficiência da busca é inversamente proporcional ao número médio de passos entre dois encontros consecutivos N e ao comprimento médio de um passo individual $\langle \ell \rangle$. Sendo assim, quando $\alpha \rightarrow 2$ (regime gaussiano) o caminhante passa a executar passos cada vez mais curtos, implicando em altos valores de N e consequentemente baixos valores de η , já que $\eta = 1/N\langle \ell \rangle$. De maneira análoga, podemos explicar o outro ponto baixo da eficiência nas buscas não-destrutivas de Lévy, isto é, para valores de $\alpha \rightarrow 0$. Nesta condição, o buscador se desloca balisticamente executando passos cada vez mais longos, e isto significa que teremos valores de $\langle \ell \rangle$ cada vez mais altos, explicando assim, o motivo de obtermos um baixo valor de η quando estamos com $\alpha \approx 0$. Por outro lado, para atingir o valor máximo da eficiência, o caminhante precisa adotar a estratégia de combinar passos curtos a fim de capturar o sítio localizado em $x = 0$ e eventuais passos longos aumentando assim, a probabilidade de captura do sítio mais distante localizado em $x = L$. Por consequência desse fato, o valor de α relacionado a essa estratégia de maximização de η é $\alpha \approx 1$, considerando que entre dois pontos mínimos torna-se concebível o surgimento de um ponto de máximo.

Para as buscas destrutivas ($x_0 = 500$), a Fig. (12) mostra um valor de $\eta_{\text{máx}}$ muito próximo de $1/x_0 = 0,002$ para valores de $\alpha \approx 0$. Em contrapartida, a medida que α vai aumentando, η sofre um decaimento monotônico até atingir o valor mínimo da eficiência, que acontece para $\alpha = 2$. Os resultados descritos podem ser explicados através da melhor estratégia de otimização para este regime. Dessa maneira, como o caminhante inicia sua busca em $x_0 = L/2$, o mais sensato a se fazer para tentar alcançar os dois sítios da rede é se deslocar balisticamente em qualquer uma das duas direções permitidas na rede 1D. E como já discutimos na subseção (4.1.1), essa situação acontece quando $\alpha \rightarrow 0$. Por outro lado, quando o buscador passa a executar passos mais curtos (regime gaussiano), ele não consegue alcançar nenhum dos dois sítios-alvo que estão localizados nas extremidades do intervalo, fazendo com que $\eta \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 2$.

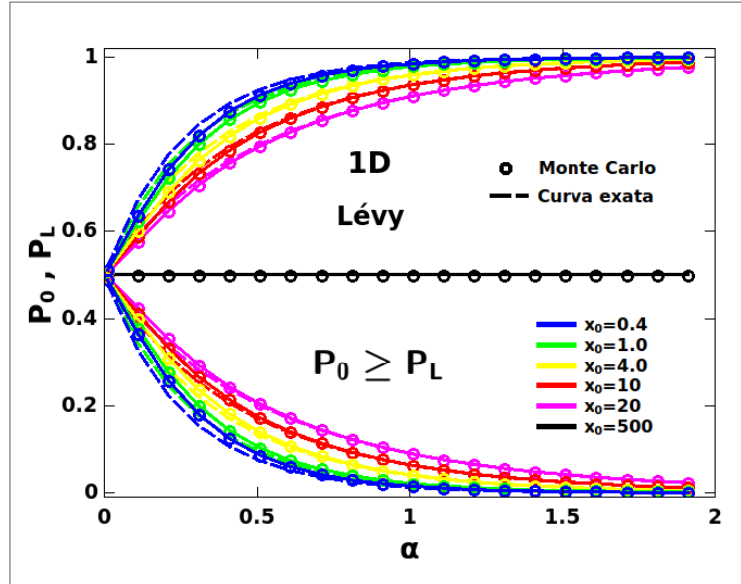
4.2.2 Probabilidades P_0 e P_L

Neste momento, novamente iremos examinar as probabilidades P_0 e P_L de detecção dos sítios presentes na rede 1D. Lembrando que P_0 representa a probabilidade do caminhante capturar o último alvo visitado quando se trata de buscas não-destrutivas (em buscas destrutivas os alvos uma vez detectados jamais poderão ser localizados em buscas posteriores). Consequentemente, P_L se caracteriza por ser a probabilidade do buscador capturar o outro sítio que ainda não foi detectado. Na Fig. (13) podemos observar como se comporta as probabilidades P_0 e P_L em função do parâmetro α para a distribuição de tamanho de passos de Lévy (Eq. 4.12). A figura mostra os resultados para buscas destrutivas e não-destrutivas. Bem como na Fig. (12), o esboço dos gráficos da Fig. (13) foram alcançados com os seguintes valores de L , r_v , ℓ_0 e x_0 , a saber: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ e $x_0 = (\{0,4\} \{1\} \{4\} \{10\} \{20\} \text{ e } \{500\})$ respectivamente. Como já justificamos anteriormente, $0 < \alpha \leq 2$, e $d\alpha = 0,1$ foi o nosso elemento de discretização. Os resultados que compõe a Fig. (13) foram gerados através da simulação de **Monte Carlo** (círculos) e da **curva analítica** exata (linha sólida tracejada) produzida pela Eq. (4.1) associada à Eq. (4.2) (BULDYREV et al., 2001b) (BULDYREV et al., 2001a).

A Fig. (13) apresenta uma boa concordância entre o método de Monte Carlo (círculos) com as curvas oriundas das expressões analíticas (linha sólida tracejada), exceto para os gráficos com $x_0 = 0,4$ e $x_0 = 1$, onde temos uma concordância regular. Este fato ocorreu porque como discutimos na subseção (4.1.2), as Eq. (4.1) e Eq. (4.2) se aplicam com uma maior precisão quando $\ell_0 \approx 0$. E pela razão de neste momento estarmos trabalhando com a distribuição de tamanho de passos de Lévy, podemos observar com mais detalhes essa desconformidade.

Conforme a subseção (4.2.1), vamos inicialmente discutir os resultados associados as buscas não-destrutivas. Portanto, como em outrora foi discutido (subseção 4.1.2), nesta situação, podemos investigar duas regiões de interesse, a saber: regiões de longos passos individuais ($\alpha \approx 0$) e a região com um grande número médio de passos ($\alpha \rightarrow 2$). Para o caso de $\alpha \rightarrow 0$, podemos observar que o caminhante atinge o seu maior valor de P_L e consequentemente o seu menor valor de P_0 . Este fato acontece devido a os longos passos executados pelo buscador nessa região, ou seja, ao exercer a dinâmica balística de busca, o caminhante se encontra no seu melhor momento para localizar o sítio fixado em $x = L$, por essa razão, temos a justificativa de o maior valor de P_L está associado a valores de $\alpha \approx 0$. Por outro lado, ao adotar longos comprimentos médios de passos individuais, o buscador se encontra no seu pior

Figura 13 – Probabilidades P_0 e P_L de detecção dos alvos localizados nas extremidades da rede 1D ($x = 0$ e $x = L$), em função do parâmetro α para os regimes simétricos e assimétricos relacionados às buscas de Lévy. Os parâmetros referentes ao problema que utilizamos foram $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para seis valores de x_0 distribuídos em uma paleta de cores. Note que para a distribuição de tamanho de passos de Lévy, não tivemos uma exelente concordância entre o método de Monte Carlo (simulação numérica) e a curva exata (método analítico) para pequenos valores de x_0 . Por outro lado, tivemos uma boa concordância entre as simulações numéricas (círculos) e o método analítico (linha sólida tracejada) para altos e intermediários valores de x_0 .



Fonte: O autor (2023)

momento para detectar o alvo localizado em $x = 0$, isto é, P_0 assume seu menor valor quando o caminhante está se movendo na dinâmica balística de busca, como podemos visualizar na Fig. (13).

Nas proximidades do regime gaussiano ($\alpha \approx 2$) a Fig. (13) nos mostra a região onde temos a maior diferença entre P_0 e P_L , isto é, a probabilidade de encontrar o sítio em $x = 0$ assume seu maior valor, enquanto a probabilidade de encontrar o alvo em $x = L$ encontra-se com o seu menor valor possível. Este resultado pode ser explicado ao lembrarmos que quando $\alpha \rightarrow 2$ o caminhante passa a executar passos mais curtos, fazendo com que o número médio de passos (N) aumente progressivamente. Desse modo, ao operar com pequenos passos a probabilidade do buscador detectar o último sítio outrora encontrado (P_0) é a maior possível, tendo em vista que o mesmo se encontra numa busca não-destrutiva. Em contrapartida, quando $N \gg 1$ o caminhante praticamente não tem chance de detectar o sítio fixado em $x = L$, considerando que o tamanho dos passos executados por ele tem um comprimento muito curto e que o seu ponto de partida é muito longe da posição espacial deste sítio-alvo ($x = L$). Assim, podemos constatar que para todos os valores de α a probabilidade P_0 é sempre maior ou igual a P_L , isto é, $P_0 \geq P_L \forall \alpha$.

Para o regime de buscas destrutivas, temos uma explicação idêntica a discutida na subseção (4.1.2), para o caso simétrico, tendo em vista que, quando $x_0/L = 1/2$ as probabilidades P_0 e P_L assumem o mesmo valor, isto é, $P_0 = P_L = 0,5$, independente da distribuição de tamanho de passos (PDF) utilizada. Esse fato decorre, por conta da estratégia de busca adotada pelo caminhante, ou seja, quando o buscador parte para a sua busca com $x_0 = L/2$ a melhor chance que ele tem de encontrar os dois alvos fixados nas extremidades da rede 1D se dá quando ele adota uma dinâmica balística de busca. Nessa dinâmica, o caçador executa grandes passos com direções aleatórias sem nenhum privilégio de detecção de algum dos alvos, justificando assim, a igualdade dos valores de P_0 e P_L durante toda a busca respectivamente.

4.2.2.1 Comparação das Probabilidades P_0 e P_L para diferentes valores de ℓ_0

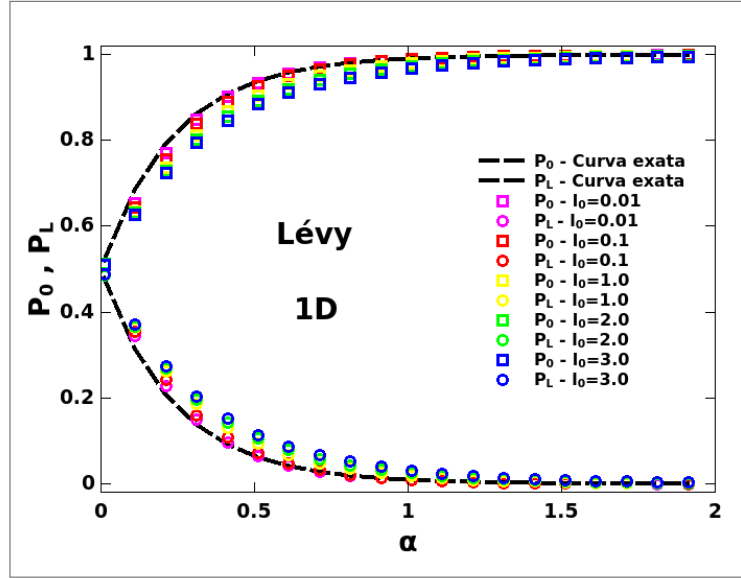
De maneira semelhante ao que foi feito com a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência (subseção 4.1.2.1), realizamos um estudo comparativo mais detalhado das probabilidades P_0 e P_L , agora, para a distribuição de tamanho de passos de Lévy. O objetivo foi varrer diferentes valores de ℓ_0 e investigar como se dá a aproximação das curvas numéricas das probabilidades P_0 e P_L com a curva teórica analítica estabelecida pelas Eq. (4.1) e Eq. (4.2).

A Fig. (14) denota como se dão as curvas referentes as probabilidades P_0 e P_L em função do parâmetro $0 < \alpha \leq 2$. As simulações foram executadas para diferentes valores de ℓ_0 para buscas no regime assimétrico, considerando que, no regime simétrico $P_0 = P_L = 0,5$ para qualquer valor de ℓ_0 . Os parâmetros ajustados para a geração da Fig. (14) foram: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $x_0 = 1$ (busca não-destrutiva) para 5 valores de ℓ_0 diferentes a saber: $\ell_0 = (\{0,01\}, \{0,1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\})$. Para cada valor de ℓ_0 o parâmetro α variou em pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$ respectivamente.

Note que a probabilidade P_0 está representada pelos quadrados, enquanto que P_L pode ser identificado como círculos. Um outro detalhe é que tanto P_0 quanto P_L se apresentam com diferentes cores, isto foi feito de modo que cada cor representa uma simulação com um valor de ℓ_0 respectivamente. Assim como na subseção (4.1.2.1) a obtenção da curva tracejada de cor preta (curva exata), contou com o apoio das Eq. (4.1) e Eq. (4.2).

Como bem sabemos, para que consigamos obter êxito na execução das simulações numéricas, se faz necessário emergir um comprimento de passo mínimo (ℓ_0). A medida que $\ell_0 \rightarrow 0$ a expressão para o cálculo de P_L converge para a Eq. (4.1) respectivamente. De fato, note

Figura 14 – Probabilidades P_0 e P_L de o buscador localizar os sítios-alvo fixado nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, em função do expoente α para o regime de buscas não-destrutivas de Lévy. Para geração dos gráficos presentes na figura, foram ajustados os seguintes parâmetros: $L = 10^3$, $r_v = 0$ e uma varredura com vários valores de ℓ_0 (paleta de cores) para $x_0 = 1$ fixo. Note que ao passo de o valor de ℓ_0 diminui, as curvas de P_0 (quadrados) e P_L (círculos) referentes as simulações vão se aproximando da curva analítica exata (linha sólida tracejada).



Fonte: O autor (2023)

que as curvas numéricas para P_0 e P_L (quadrados e círculos) se aproximam suavemente das curvas exatas (linha sólida tracejada) ao passo que os valores de ℓ_0 diminuem progressivamente. Esse resultado foi importante, pois, dessa maneira, conseguimos verificar mais uma vez as conclusões presentes na literatura (BULDYREV et al., 2001b) (BULDYREV et al., 2001a), agora para a distribuição de tamanho de passos de Lévy. O ponto que talvez seja o mais importante dessa análise é que para a PDF de Lévy, podemos de fato observar a convergência dos dados numéricos com a curva analítica exata. Note que agora é possível observar que as curvas numéricas com $\ell_0 = 0,01$ estão mais próximas da curva analítica exata do que as curvas numéricas geradas com $\ell_0 = 0,1$. Esse fato não ocorreu quando utilizamos a distribuição de tamanho de passos Lei de Potência como mostra a Fig. (10). Porém, qualitativamente temos um comportamento muito similar entre os resultados atribuídos a distribuição de tamanho de passos de Lévy com os resultados oriundos da PDF Lei de Potência como já era esperado.

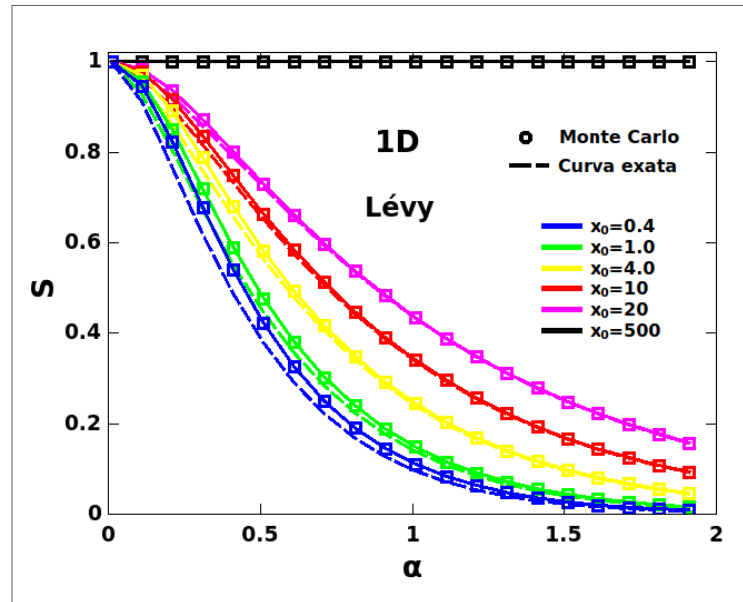
4.2.3 Entropia de Shannon (S)

Bem como foi feito na subseção (4.1.3), iremos agora investigar como se apresentam as curvas da entropia de Shannon (S) em função do parâmetro α para a distribuição de tamanho

de passos de Lévy. Também, iremos analisar se existe uma conexão direta ou indireta entre o valor máximo da eficiência (η) das buscas não-destrutivas com algum tipo de maximização ou minimização de S associada a mesma busca.

Observando a Fig. (15), certificamos como se dá o comportamento da entropia de Shannon (S) em função do expoente α para buscas aleatórias de carácter destrutivo e não-destrutivo relacionadas a distribuição de tamanho de passos de Lévy (Eq. 4.12).

Figura 15 – Entropia de Shannon S em função do parâmetro α para buscas aleatórias de carácter destrutivo e não-destrutivo relacionadas a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Para geração dos gráficos presentes nesta figura foram ajustados os seguintes parâmetros: $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ para 6 diferentes valores de x_0 separados por 6 diferentes cores. Note que temos uma boa concordância entre o método numérico (quadrados) com a curva exata (linha tracejada) para 4 valores de x_0 , a saber: $x_0 = \{(4), (10), (20), (500)\}$ e uma concordância regular para $x_0 = 0,4$ e $x_0 = 1$.



Fonte: O autor (2023)

O ajuste dos principais parâmetros utilizados foram $L = 10^3$, $r_v = 0$, $\ell_0 = 0,2$ onde $\alpha \in (0, 2]$ se intercalando em pequenos intervalos $d\alpha = 0,1$ respectivamente. Assim como para a eficiência η e as probabilidades P_0 e P_L , averiguamos 6 diferentes valores de x_0 explorando os regimes de buscas destrutivo e não-destrutivo. Semelhantemente ao estudo realizado na subseção (4.1.3), tivemos uma boa concordância entre as simulações numéricas (**Método de Monte Carlo** - quadrados) e as curvas oriundas do método analítico (Eq. 4.1 - linha tracejada). A concordância se deu de uma forma mais acentuada para 4 valores diferentes de x_0 a saber, $x_0 = \{(4), (10), (20), (500)\}$. Por outro lado, a mesma aconteceu de forma regular para $x_0 = 0,4$ e $x_0 = 1$. Este comportamento já era esperado, tendo em vista que, a concordância entre os métodos numérico e analítico para P_0 e P_L referentes a estes valores

de x_0 ($x_0 = 0,4$ e $x_0 = 1$) também tiveram uma concordância regular. Este problema foi solucionado na subseção (4.2.2.1) onde verificamos que para obtermos uma boa concordância entre o método de Monte Carlo e o método analítico, basta considerarmos que $\ell_0 \rightarrow 0$ nas simulações numéricas. O procedimento utilizado para obtenção da curva analítica exata para a entropia S , foi descrito com mais detalhes na subseção (4.1.3). Em suma, apenas escrevemos S em função da probabilidade P_L , ou seja, $S = S(P_L)$ e em seguida, contamos com o auxílio da Eq. (4.1). Este “artifício” nos possibilitou obter a equação que reproduziram as curvas analíticas exatas da Fig. (15).

Primordialmente, vamos examinar os gráficos de $S \times \alpha$ para as buscas não-destrutivas. Mais precisamente, vamos justificar o decaimento monotônico da entropia em decorrência do expoente α . No regime de dinâmica balística de busca ($\alpha \rightarrow 0$), note que a entropia S se aproxima de seu valor máximo, isto é $S \approx 1$. Isso acontece pois quando $\alpha \approx 0$ o caminhante está executando longos comprimentos de passos individuais o que possibilita a detecção do sítio assentado em $x = L$ logo no primeiro passo. Em contrapartida, o caminhante está numa busca totalmente assimétrica ($x_0 \approx r_v$), o que favorece de maneira igual a localização do alvo fixado em $x = 0$. Essa condição, torna as chances de detecção dos dois alvos totalmente equiprováveis como foi discutido na subseção (4.2.2). Em outras palavras, $P_0 = P_L = 0,5$ quando $\alpha \approx 0$. Nesse cenário, temos uma total incerteza de qual dos dois sítios será descoberto no primeiro momento e como a entropia de Shannon mede a quantidade de incerteza associada a um determinado evento estatístico, temos que S atinge seu valor máximo no regime da dinâmica balística, isto é, $S = 1$. Ao passo de o parâmetro α crescer de valor ($\alpha \rightarrow 2$) o buscador passa a exercer uma dinâmica com comprimento de passos mais curtos. Nessa circunstância, a probabilidade do caminhante encontrar o alvo em $x = 0$ (P_0) é muito superior à probabilidade complementar P_L , ou seja, $P_0 \approx 1$ e $P_L \approx 0$ quando $\alpha = 2$ (ver Fig. 13). Portanto, podemos constatar que na dinâmica gaussiana de busca ($\alpha = 2$) não temos qualquer quantidade de incerteza relacionada ao evento de descoberta dos sítios, considerando que nesse regime, já é certo que o alvo localizado em $x = 0$ será descoberto. Sendo assim, a entropia de Shannon S atinge seu valor mínimo na dinâmica gaussiana de buscas, isto é, $S = 0$ quando $\alpha = 2$. Dessa forma, fica claro perceber que a alternâncias dos tipos de dinâmica busca (balística e gaussiana) é o principal motivo que leva a um decaimento monotônico da entropia nas buscas não-destrutivas.

Por completeza, vamos analisar a Fig. (15) com foco agora nas buscas destrutivas ($x_0 = L/2$). O gráfico de interesse é o composto pelos dados (quadrados e linha tracejada) de cor

preta. Analogamente, podemos repetir o procedimento utilizado na Eq. (4.11) e confirmar mais uma vez que $S = 1$ para o regime simétrico de buscas. Lembrando que este resultado independe do expoente α e da distribuição de tamanho de passos (PDF) que está sendo utilizada. Porém, vamos dar uma justificativa à luz da Teoria da Informação Clássica.

Ao recordar as buscas destrutivas ($x_0/L = 1/2$), lembramos que para ter êxito em sua busca, o caminhante se vê “forçado” a adotar a dinâmica balística de busca, tendo em vista que, essa é a melhor estratégia para que ele possa ser eficiente na captura dos dois sítios-alvo espalhados na rede 1D. Como já foi discutido, nessa performance, as chances dele detectar qualquer um dos dois sítios são equiprováveis durante toda a busca, ou seja, $P_0 = P_L = 0,5 \forall \alpha$. Dessa maneira, a maior quantidade de incerteza se estabelece durante toda a busca, fazendo assim, S atingir seu maior valor durante esse período. Em suma, $S = 1$ durante toda a busca simétrica e esse resultado é válido para qualquer valor do parâmetro α e para qualquer distribuição de tamanho de passos eventualmente utilizada.

Como já era esperado, os resultados (η , P_0 e P_L , S) provenientes das distribuições de tamanho de passos de Lévy e Lei de Potência se mostraram muito parecidos de forma qualitativa. Inclusive, verificamos mais uma vez que o mecanismo de maximização da eficiência η não está relacionado a nenhum mecanismo de extremização (máximo ou mínimo) da entropia de Shannon (S) em 1D. Realmente, a mecânica de maximização da eficiência se dá pela alternância de estratégias de busca que partem da dinâmica balística ($\alpha \rightarrow 0$) indo até a dinâmica gaussiana ($\alpha = 2$). Enquanto a entropia de Shannon depende exclusivamente das probabilidades de descoberta dos sítios-alvo equidistantes presentes no espaço de busca. No entanto, o comportamento de S se dará de forma bastante distinta nas caminhadas aleatórias 2D como veremos a seguir.

Neste capítulo, realizamos um estudo detalhado a respeito das quantidades η , P_0 , P_L e S relacionadas as distribuições de tamanho de passos (PDF) de Lévy e Lei de Potência em buscas aleatórias unidimensionais. No próximo capítulo, faremos uma análise detalhada e verificaremos como essas quantidades se comportam em um espaço de busca bidimensional. Isto é, estudaremos a eficiência da busca, as probabilidades de localização dos sítios e a entropia de Shannon associadas as distribuições de Lévy e Lei de Potência para uma rede 2D e destacaremos as principais diferenças desses resultados com os que foram evidenciados nesse capítulo.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS EM DUAS DIMENSÕES

No atual capítulo, iremos analisar a dinâmica de um caminhante aleatório em um espaço de busca bidimensional (ver Fig. 2). O objetivo do estudo refere-se novamente a examinar a eficiência da busca (η), as probabilidades de detecção dos sítios-alvo (P_0 e P_L) e a entropia de Shannon (S) associada a busca respectivamente. Investigaremos as três quantidades para as distribuições de tamanho de passos de Lévy e a Lei de Potência, no qual, destacaremos as principais diferenças entre elas. Também realizaremos uma análise comparativa que envolve a razão P_0/P_L e o parâmetro α^* (valor do expoente α onde ocorre o cruzamento de P_0 com P_L) todos em função da posição inicial x_0 para as duas distribuições de tamanho de passos em questão. Mais uma vez, daremos destaque para os resultados provenientes das buscas não-destrutivas, onde por sua vez, apresentaram uma maior eficiência quando comparada com a das buscas destrutivas.

5.1 O MODELO DE BUSCA EM DUAS DIMENSÕES

O modelo de buscas aleatórias 2D que utilizamos, consiste em um espaço de busca quadrado com dimensões $L \times L$ munido de condições de contorno periódicas (ver Fig. 2). Diante disso, N sítios-alvo são distribuídos aleatoriamente de forma uniforme na rede 2D, com uma densidade de sítios dada por N/L^2 . A dinâmica de busca em 2D consiste em um buscador a procura por sítios-alvo, no qual, o mesmo executa passos de comprimento $\ell > 0$ a partir de uma distribuição de tamanho de passos (PDF) $p(\ell)$ respectivamente.

Os resultados que veremos a seguir serão originários de caminhandas aleatórias no qual, o comprimento do passo foi sorteado por distribuições de tamanho de passos α - estável de Lévy e a Lei de Potência, uma vez que essas PDFs são exelentes escolhas para buscas aleatórias eficientes (VISWANATHAN et al., 2011) (MÉNDEZ; CAMPOS; BARTUMEUS, 2016). No que se refere à direção do passo, assumimos que a mesma se dá a partir de uma distribuição uniforme de ângulos pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi)$.

Durante o processo de busca, o caminhante percorre uma distância r_v ao longo de cada passo. Se um alvo for descoberto, então a etapa é truncada e a busca recomeça com o caminhante, agora, a uma distância $x_0 > r_v$ do último sítio visitado (ver seção 2.1). Aqui estamos interessados no regime de baixa densidade de sítios-alvo ($N/L^2 \ll 1/r_v^2$), onde é

muito provável que uma etapa se encerre sem que nem um alvo seja encontrado.

Uma observação para se atentar nas buscas aleatórias 2D é que não temos um método do operador integral e nem expressões analíticas exatas que possam calcular as quantidades η , P_0 , P_L e S como fizemos nas buscas 1D. Sendo assim, para os resultados 2D, que serão descritos neste capítulo, utilizamos apenas o método numérico de **Monte Carlo**. O algoritmo original que serviu como base para nossas simulações foi desenvolvido por **S. V. Buldyrev**, onde através de uma pequena adaptação, adicionamos as etapas necessárias para a obtenção dos dados referentes as probabilidades P_0 e P_L e consequentemente os dados relacionados à entropia S .

5.2 DISTRIBUIÇÃO LEI DE POTÊNCIA

Tal como no capítulo (4), consideraremos inicialmente a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência (Pareto) como sendo da seguinte forma:

$$p(\ell) = \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^{\alpha+1}}, \quad \ell \geq \ell_0, \quad (5.1)$$

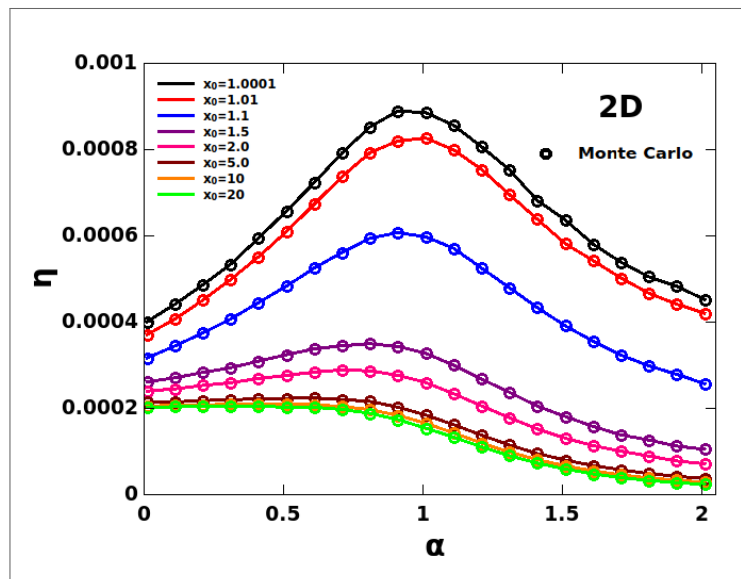
e $p(\ell) = 0$ caso contrário. De maneira mais específica, ℓ_0 se define como sendo o comprimento de passo mínimo e o expoente α controla o formato da cauda e a magnitude de suas flutuações ($\alpha \leq 0$ não produz distribuição de tamanho de passos normalizáveis). De fato, quando temos $\alpha \geq 2$ a variância relacionada a Eq. (5.1) tem o seu valor finito, de modo que, a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes exibe um padrão estatístico gaussiano governadas pelo Teorema Central do Limite. Por outro lado, durante o intervalo de $0 < \alpha < 2$ a variância em questão tem valores infinitos, indicando assim, que a soma do grande número das variáveis aleatórias independentes apresenta um padrão estatístico de Lévy conduzidas pelo Teorema Central do Limite Generalizado (UCHAIKIN; ZOLOTAREV, 2011) (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994). Sendo assim, varrendo apenas um único parâmetro α obtemos acesso tanto a dinâmica de busca difusiva (gaussiana), quanto a dinâmica de busca superdifusiva (Lévy) para a PDF do tipo Lei de Potência. Em princípio, o valor do comprimento ℓ_0 é livre, porém, para o contexto de busca que estamos adotando em nossas simulações, é conveniente escolher um valor de ℓ_0 menor do que a distância inicial até o alvo mais próximo x_0 . Por completeza, lembramos que a Eq. (5.1) representa o limite da distribuição α -estável de Lévy

para comprimentos de passos grandes.

5.2.1 Eficiência da Busca (η)

A partir deste momento, vamos estudar alguns aspectos estatísticos das buscas aleatórias em duas dimensões para a distribuição de tamanho de passos Lei de Potência. A Fig. (16) ilustra o comportamento da eficiência da busca η em função do expoente α . Os dados relacionados à figura, foram adquiridos através de simulações numéricas utilizando o **Método de Monte Carlo**. Os gráficos da Fig. (16) foram obtidos levando em conta os seguintes valores para os parâmetros relevantes do sistema, $N = 10^6$ (número de alvos na rede 2D), $L = 10^5$ (comprimento de uma dimensão da rede) o que implica em uma área $L \times L = 10^{10}$ e consequentemente em uma densidade de alvos dada por $N/L^2 = 10^{-4}$. Também foram fixados $\ell_0 = 0, 1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 como mostra a paleta de cores presente na figura. Por fim, sabendo que $\alpha \in (0, 2]$, realizamos nossa varredura intercalando seus valores em pequenos intervalos $d\alpha = 0, 1$ respectivamente.

Figura 16 – Eficiência da busca η em função do expoente α para a distribuição de tamanho de passos Lei de Potência em buscas aleatórias bidimensionais. As buscas foram realizadas para 10^6 alvos distribuídos aleatoriamente numa rede de comprimento 10^5 , isto é, $N = 10^6$ e $L \times L = 10^{10}$. Também foram ajustados os parâmetros $\ell_0 = 0, 1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 respectivamente. Os resultados de Monte Carlo aparecem em símbolos (círculos) enquanto as linhas sólidas são apenas guias para os olhos. Assim como nas buscas não-destrutivas em 1D, aqui, o valor máximo de η ocorre quando $\alpha \approx 1$ para valores de $x_0 \rightarrow r_v$. Note também que há um surgimento de um platô em η para $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$, que não é observado das buscas 1D (compare com Fig. 8).



Fonte: O autor (2023)

O primeiro detalhe para se atentar na Fig. (16) é que os resultados provenientes das

simulações numéricas (Monte Carlo) estão representados por símbolos (círculos), enquanto as linhas sólidas representam apenas um “guia para os olhos”. Como já discutimos no capítulo (4), os regimes ditos assimétricos (não-destrutivos) e os simétricos (destrutivos) está relacionado a distância inicial do buscador ao último sítio encontrado por ele. Sendo assim, caso o caminhante se localize muito próximo ao último alvo detectado ($x_0/L \ll 1$) a sua próxima busca se dará no regime não-destrutivo. Por outro lado, se o caçador se localizar muito distante do último alvo encontrado ($x_0/L = 1/2$) sua próxima caminhada será no regime destrutivo.

De maneira geral, podemos observar que a eficiência a busca η em função do parâmetro α e x_0 em 2D, se assemelha ao comportamento dos gráficos $\eta \times \alpha$ em 1D (compare com a Fig. 8). Essa semelhança inclui tanto o regime não-destrutivo ($x_0/L \ll 1$) quanto o regime destrutivo ($x_0/L \sim 1/2$), no tocante a eficiência η atingir os seus valores máximo e mínimo para baixas densidades de sítios como nas buscas em 1D, isto é, $\eta_{\text{máx}}$ para $\alpha \approx 1$ nas buscas assimétricas e $\eta_{\text{máx}}$ para $\alpha \rightarrow 0$ nas buscas simétricas respectivamente.

De modo complementar, verificamos também que os valores mínimos de η tanto para buscas em 1D, quanto para buscas em 2D se concentram nas duas extremidades para as buscas não-destrutivas, ou seja, para $\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow 2$ e na extremidade direita ($\alpha = 2$) para as buscas destrutivas respectivamente. No entanto, é de suma importância notar também que uma espécie de platô se estabelece em η (SANTOS et al., 2004) para valores de $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$, enfatizando que, diferentemente das buscas em 1D, nenhum ganho significativo na eficiência da busca η em 2D ocorre nessa faixa de parâmetros. Além disso, bem como em uma dimensão, observamos que para os valores intermediários de x_0/L em 2D, o expoente α é uma função da posição inicial x_0 no intervalo de $(0, 1]$, isto é, $\alpha = \bar{\alpha}(x_0) \in (0, 1]$, onde $\eta_{\text{máx}}$ geralmente diminui com x_0 neste intermédio como podemos verificar na Fig. (16).

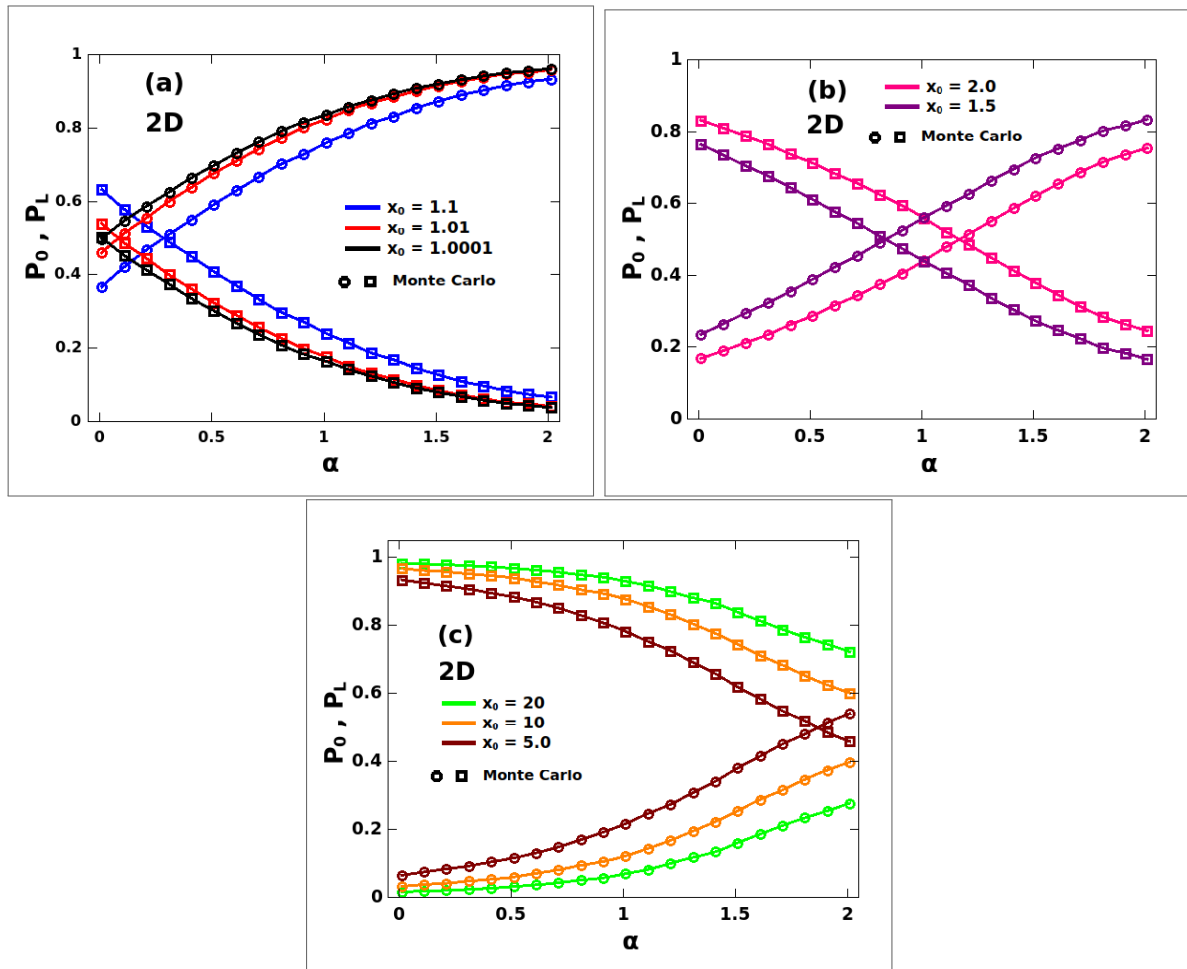
5.2.2 Probabilidades P_0 e P_L

Assim como no capítulo anterior (4) iremos agora apresentar os resultados referentes a probabilidade de localização dos alvos mais próximos (P_0) e de maneira complementar, a probabilidade de localização dos alvos mais distantes do buscador na rede 2D (P_L). A Fig. (17) mostra como se comporta às probabilidades P_0 e P_L ao passo que, o expoente α evolui. Esse comportamento pode ser observado para os regimes de busca destrutiva e não-destrutiva respectivamente. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da subseção (5.2.1), ou seja, $N = 10^6$, $L = 10^5$ ($L \times L = 10^{10}$), $N/L^2 = 10^{-4}$ (regime de escassez de sítios), $\ell_0 = 0,1$

e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 ilustrados numa paleta de cores. A evolução do parâmetro α novamente se deu dentro do intervalo $(0, 2]$, de forma gradual, levando em consideração pequenas variações $d\alpha = 0,1$ respectivamente.

O primeiro detalhe para se atentar na Fig. (17), é que os resultados das simulações numéricas (Monte Carlo) estão representados por símbolos (círculos e quadrados), enquanto as linhas sólidas servem apenas de “guia para os olhos”. Assim como nas análises numéricas em 1D, daremos uma importância especial as probabilidades P_0 e P_L relacionadas as buscas não-destrutivas.

Figura 17 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Probabilidades de detecção dos alvos mais próximos (P_0) e distantes (P_L) em função do expoente α relacionadas a distribuição de tamanho de passos ($p(\ell)$) Lei de Potência. Os resultados de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos para P_0 e quadrados para P_L) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Os parâmetros utilizados para esta simulação seguem com os mesmos valores dos utilizados na Fig. (16). Note que as probabilidades 2D exibem um cruzamento interessante não presente em 1D como mostra a Fig. (9).



Fonte: O autor (2023)

A Fig. (17.a) e Fig. (17.b) ilustra como P_0 e P_L variam em função do expoente α para o

regime assimétrico de buscas, ou seja, para $x_0 \approx r_v$. Bem como, a Fig. (17.c) mostra o perfil das probabilidades para valores de x_0 cada vez maiores. Dessa maneira, observamos de imediato que para $x_0 = 1,0001$, as probabilidades se comportam de maneira semelhante a os resultados das buscas não-destrutivas em uma dimensão, isto é, $P_0 \geq P_L$ para todo $\alpha \in (0, 2]$. Por outro lado, a medida que os valores de x_0 vão aumentando, alguns cruzamentos interessantes de P_0 e P_L em 2D começam a emergir, isto é, as curvas de P_0 e P_L se interceptam para valores de $\alpha \neq 0$ (COLAÇO et al., 2022). Na Fig. (17.a), note que o primeiro destes cruzamentos que foram relatados aparece quando $x_0 = 1,01$ para $\alpha \approx 0$, em seguida podemos observar outra interceptação quando $x_0 = 1,1$ agora para $\alpha \approx 0,5$ e assim por diante, como podemos visualizar na Fig. (17.b). Este fato mostra que em 2D, nem sempre $P_0 \geq P_L$ (comparar com a Fig. 9), fato este que podemos verificar por exemplo, no gráfico relacionado à $x_0 = 1,5$ presente na Fig. (17.b), neste caso, $P_L > P_0$ para $\alpha = 0,5$ respectivamente. Essa faixa de domínio onde $P_0 < P_L$ se amplia cada vez mais, para buscas com valores de x_0 cada vez maiores.

De maneira similar, na Fig. (17.c) podemos observar a continuação desse fenômeno estatístico emergente oriundo do efeito da dimensionalidade do espaço de busca. Sendo assim, observamos um cruzamento de P_0 e P_L em buscas com $x_0 = 5$ próximo de $\alpha = 1,9$ acompanhadas por uma longa faixa de domínio de P_L sobre P_0 , ou seja, para $x_0 = 5$, temos uma maior probabilidade de encontrar alvos distantes (P_L) para $\alpha \leq 1,8$. Complementarmente, para valores de $x_0 = 10$ e $x_0 = 20$, observamos que $P_L \geq P_0$ para todo valor de α .

Portanto, podemos constatar que para valores de x_0 muito próximos de r_v , a probabilidade de localizar os sítios mais próximos (P_0) é maior do que a probabilidade de localizar sítios mais distantes (P_L) exeto no regime de dinâmica balística ($\alpha \rightarrow 0$). Esse fato ocorre, devido ao caminhante iniciar sua busca muito próximo a o último sítio encontrado, assim, ao se encontrar na dinâmica gaussiana ($\alpha \approx 2$), ele opera com pequenos passos, tendo assim, uma maior chance de capturar, mais uma vez, os alvos que estão nas suas proximidades. Porém, quando o mesmo se encontra na dinâmica balística, grandes saltos estão sendo efetuados, aumentando assim, as chances do buscador capturar alvos que estão localizados em posições distantes à dele, fazendo com que apenas nesse regime, P_L seja maior do que P_0 .

Em contrapartida, para altos valores de x_0 , temos uma dominância de P_L sobre P_0 para todas as dinâmicas de busca, seja à regida por longos passos (balística) ou, seja ela controlada pela dinâmica gaussiana ($\alpha \approx 2$) caracterizada pela execução de passos curtos. Esse resultado se deu, por conta da distância do último alvo capturado, que o buscador inicia sua nova busca,

isto é, quando o caminhante se encontra no regime controlado pela dinâmica balística (longos passos), praticamente não existe chances de ele detectar sítios próximos, pois, além de ele está efetuando passos largos, o próprio caçador encontra-se distante de todos os alvos da rede 2D, fazendo assim, prevalecer quase que por unanimidade, apenas as chances de captura dos sítios mais distantes ($P_L \gg P_0$). De modo complementar, quando o caminhante passa a executar passos com pequenos comprimentos, a probabilidade de ele detectar sítios mais próximos à ele, tem um crescimento monotônico, mas não a ponto de superar as chances de ele localizar alvos mais distantes. Isso se dá, pois, o buscador está muito distante dos alvos da rede, e a estratégia de exercer passos curtos, não contribui significativamente para a detecção desses tais alvos próximos.

5.2.3 Entropia de Shannon (S)

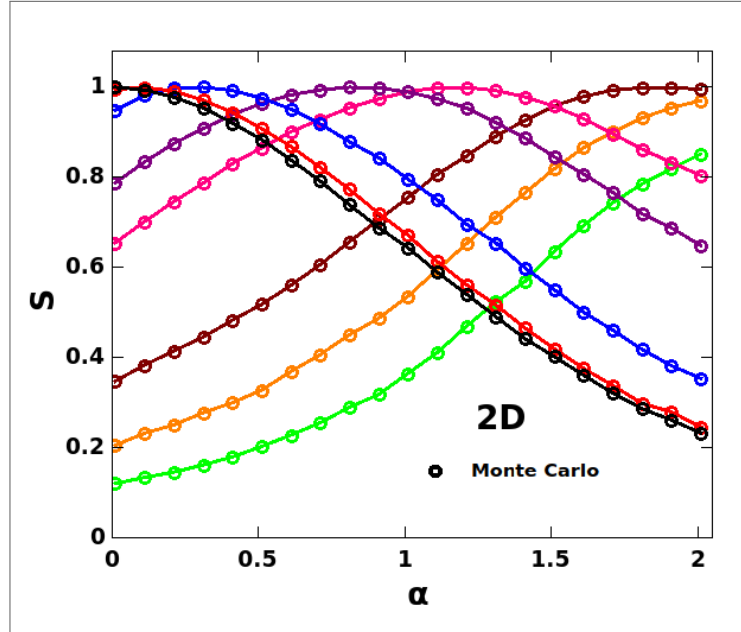
Uma maneira interessante de ter uma boa leitura de um sistema dinâmico aleatório é ter conhecimento de como se comporta a entropia de Shannon associada ao mesmo. Por conta disso, dedicaremos esta subseção ao estudo da entropia de Shannon (S), associada a dinâmica das buscas aleatórias 2D relacionada a $p(\ell)$ do tipo lei de potência, a fim de ter um resultado complementar ao que obtivemos na subseção (5.2.2).

A Fig. (18) mostra como se dão as curvas da entropia de Shannon (S) em função do expoente α , referentes as buscas não-destrutivas relacionadas a distribuição de tamanho de passos Lei de Potência. As simulações numéricas (círculos - Monte Carlo) foram ajustadas com os parâmetros $N = 10^6$, $L \times L = 10^{10}$, $N/L^2 = 10^{-4}$, $\ell_0 = 0, 1$, bem como, $r_v = 1$ para alguns valores de x_0 , evidenciados na paleta de cores presente nas Figs. (16) e (17). Note que, assim como nas análises anteriores, o expoente α , varreu o intervalo de $(0, 2]$ aplicando pequenas flutuações $d\alpha = 0, 1$.

De modo análogo às subseções anteriores, vamos realizar o nosso estudo, focando nas buscas não-destrutivas, por estas demonstrarem resultados mais promissores quando comparada com as buscas destrutivas. Um primeiro detalhe que podemos atentar é que agora nas buscas aleatórias 2D, temos vários pontos máximos referente a os valores da entropia de Shannon, resultado este que não foi observado em uma dimensão (ver Fig. 11), no qual, tivemos apenas um máximo de S localizado no limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$).

O fato das probabilidades P_0 e P_L se interceptarem em vários valores de α , ocasionou à emergência de vários valores máximos para S ($S = 1$ para $\alpha > 0$) não observados em 1D.

Figura 18 – Buscas aleatórias bidimensionais. Entropia de Shannon (S) em função do expoente α relacionada a distribuição de tamanho de passos do tipo lei de potência. Os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos) e as linhas sólidas são apenas guia para os olhos. Os parâmetros e as cores são iguais as das Figs. (17) e (16) respectivamente. Os máximos de S que não foram observados em 1D além do caso trivial associado ao limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$), ocorrem no valor α onde $P_0 = P_L = 1/2$ para cada valor de x_0 ilustrado na Fig. (17).



Fonte: O autor (2023)

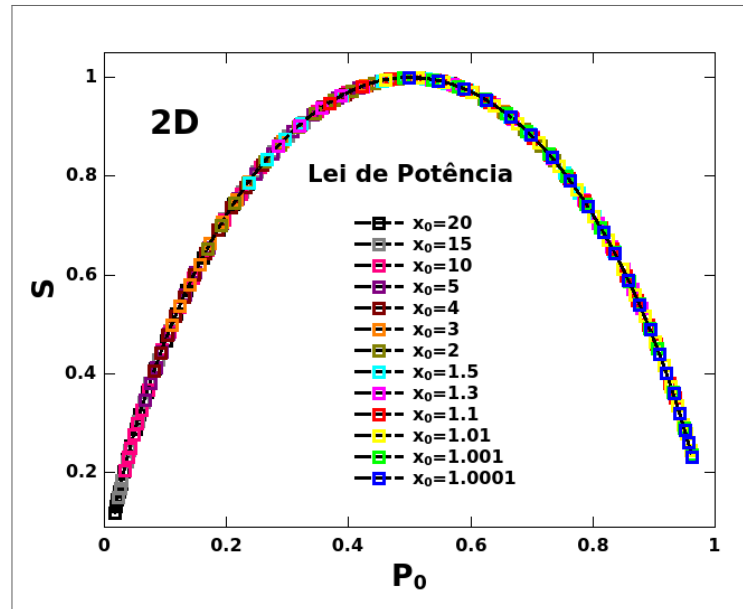
Assim como esperado, esse máximo está relacionado precisamente, no valor de α para o qual $P_0 = P_L = 1/2$. Além disso, mantendo a consistência com a Fig. (17), os valores de entropia máxima ($S_{\text{máx}}$) estão associados a os valores mais altos de α onde o parâmetro x_0 é maior.

A origem física dos cruzamentos presentes na Fig. (17) reside no fato que em 2D, o buscador pode realmente passar muito próximo de um alvo (a uma distância $\geq r_v$) sem detectá-lo. Tomemos, por exemplo, o primeiro passo de um buscador iniciando sua caminhada a uma pequena distância $x_0 > r_v$ do último alvo visitado. Se em 2D o caminhante não der a direção do passo dentro da faixa de ângulo correta, ele perderá o círculo de detecção de raio r_v ao redor do sítio mais próximo e, no limite balístico, certamente seguirá para uma posição bem distante logo no primeiro passo (observe que a probabilidade de não detecção do alvo mais próximo em 2D tende a um, conforme $r_v \rightarrow 0$; este fato destaca a relevância do parâmetro r_v em buscas em duas dimensões, resultado este que contrasta com as buscas em 1D).

Fica assim claro que, dependendo dos valores de x_0 e α , a probabilidade de encontrar o último alvo visitado em uma rede de busca 2D, pode ser realmente menor do que a probabilidade de localizar qualquer outro alvo respectivamente ($P_0 < P_L$). Sendo assim, com toda certeza, um $S = S_{\text{máx}}$ surge em 2D quando $P_0 = P_L$ para valores específicos de x_0 e $\alpha > 0$.

De maneira complementar, realizamos um segundo estudo (agora menor) sobre a entropia de Shannon. A Fig. (19) ilustra a entropia S em função da probabilidade de detecção do último sítio visitado P_0 para buscas aleatórias em 2D, sendo essas realizadas com a $p(\ell)$ do tipo Lei de Potência. Os ajustes para os parâmetros das simulações, correspondem ao da Fig. (18) respectivamente. Os resultados estão representados por símbolos (quadrados) de cores variadas, para vários valores de x_0 , enquanto as linhas sólidas tracejadas são apenas “guia para os olhos”.

Figura 19 – Buscas aleatórias bidimensionais. Entropia de Shannon S em função da probabilidade do caminhante detectar o último sítio visitado P_0 associada a distribuição de tamanho de passos do tipo Lei de Potência. Os resultados das simulações são denotados por símbolos (quadrados) enquanto a linha sólida tracejada é apenas um guia para os olhos. Note que foi obtido uma sobreposição de curvas para vários valores de x_0 , onde pode-se ver o perfil padrão para a entropia de Shannon (compare com a Fig. 7).



Fonte: O autor (2023)

Primeiramente, note que na Fig. (19) podemos ver que cada cor associada a os quadrados, representa um valor para a posição inicial de cada busca x_0 . Sendo assim, vemos inicialmente que para $x_0 = 1,0001$, temos uma entropia S totalmente assimétrica em relação a $P_0 = 1/2$, com o máximo $S = 1$ sendo alcançado exatamente neste ponto ($P_0 = 1/2$), no qual corresponde às buscas no regime balístico ($\alpha \rightarrow 0$) como discutimos nos parágrafos anteriores. À medida que o expoente α aumenta, a probabilidade de alcançar alvos mais distantes P_L diminui, fazendo com que a probabilidade de detectar o último alvo visitado P_0 aumente correspondendo assim, a uma diminuição de S . Conforme os valores de x_0 vão crescendo, a assimetria de S em relação a $P_0 = 1/2$ vai diminuindo, assumindo valores para $P_0 < 1/2$ e

valores para $P_0 > 1/2$ como pode ser constatado. Por fim, observamos que para valores de x_0 progressivamente maiores, ocorre uma tendência de inversão de perfil de S em relação a P_0 , quando comparado ao perfil associado à $x_0 = 1,0001$. Podemos verificar essa tendência de inversão, quando analisamos o caso de $x_0 = 10$ e um perfil completamente invertido para $x_0 = 20$. Porém, a principal constatação desses resultados foi que a superposição de todos os gráficos da Fig. (19), considerando todos os valores de x_0 , ilustra o comportamento padrão da entropia de Shannon S , fortalecendo a teoria que discutimos na subseção (3.3.4), no qual, vimos que sempre teremos um S máximo, quando às chances associadas ao evento em questão, forem totalmente equiprováveis, o que no nosso caso, implica em $P_0 = P_L = 1/2$.

5.3 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY

Bem como discutimos no capítulo. 1, ao considerarmos uma variável aleatória $u \in (-\infty, \infty)$, vimos que a mesma só será distribuída de acordo com a família de distribuições α -estáveis de Lévy se sua PDF for dada por (UCHAIKIN; ZOLOTAREV, 2011) (SAMORODNITSKY; TAQQU, 2017),

$$p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-|ck|^\alpha [1 - \beta \operatorname{sgn}(k) \Phi(k)] - ik(u-\nu)}. \quad (5.2)$$

O parâmetro de estabilidade de Lévy é o expoente $\alpha \in (0, 2]$, pois, o mesmo orienta as principais propriedades estatísticas da variável u . De fato, enquanto o valor limite $\alpha = 2$ é regido pelo TLC (Teorema do Limite Central), o intervalo $0 < \alpha < 2$, que define a flutuação dinâmica da variável u , é governada pelo TCLG (Teorema Central do Limite Generalizado). Além disso, temos que, $\beta \in [-1, 1]$ é o parâmetro de assimetria, $c > 0$ é um fator de escala, ν é um parâmetro de deslocamento, sgn é a função sinal e por fim, $\Phi = \tan(\pi\alpha/2)$ se $\alpha \neq 1$ e $\Phi(k) = (-2/\pi) \log |k|$ se $\alpha = 1$. Para considerarmos distribuições não assimétricas (simétricas) centradas em $u = 0$, basta fixarmos $\beta = 0$ e $\nu = 0$ na Eq. (5.2). Na presente tese, para os comprimentos dos passos definidos como positivos, consideramos para a PDF de Lévy a seguinte regra, $p(\ell) = p(|u|) + p(-|u|) = 2p(|u|)$ no domínio de $\ell > 0$.

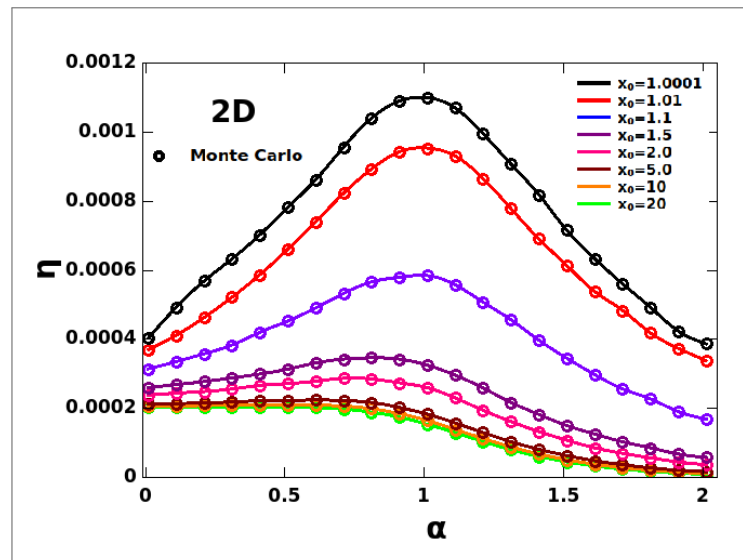
Uma observação importante é que se expandirmos a $p(\ell)$ de Lévy em série de Taylor no limite de $\ell \gg 1$ para $0 < \alpha < 2$, obtem-se (UCHAIKIN; ZOLOTAREV, 2011) (SAMORODNITSKY; TAQQU, 2017) a PDF da lei de potência (Eq. 5.1) mas com $\alpha \ell_0^\alpha$ sendo substituído por $2c^\alpha \Gamma(\alpha +$

1) $\sin(\pi\alpha/2)/\pi$. Para fins da obtenção dos resultados numéricos nesta seção ($p(\ell)$ de Lévy), utilizamos a Eq. (4.12) como a representação da distribuição de tamanho de passos de Lévy, assim como foi feito no capítulo (4).

5.3.1 Eficiência da Busca (η)

Bem como na subseção (5.2.1), neste momento, vamos discutir os aspectos estatísticos das buscas aleatórias em 2D, porém, agora para a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Sendo assim, ao observar a Fig. (20), podemos contemplar como se dão as curvas da eficiência da busca (η) em função do parâmetro α . Semelhantemente às seções anteriores deste capítulo, os dados que geraram à Fig. (20), foram oriundos das simulações numéricas de **Monte Carlo**. As simulações numéricas foram realizadas com $N = 10^6$ alvos, um comprimento da rede $L = 10^5$, uma densidade de alvos $N/L^2 = 10^{-4}$, um comprimento de passo mínimo $\ell_0 = 0,1$ e um raio de visão $r_v = 1$, para vários valores de x_0 com pequenos intervalos de variação $d\alpha = 0,1$.

Figura 20 – Eficiência da busca η em função do parâmetro α para a distribuição de tamanho de passos de Lévy em buscas aleatórias em duas dimensões. As buscas foram realizadas para 10^6 alvos distribuídos aleatoriamente numa rede de área 10^{10} , isto é, $N = 10^6$ e $L \times L = 10^{10}$. Também foram ajustados os parâmetros $\ell_0 = 0,1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 respectivamente. Os resultados de Monte Carlo aparecem em símbolos (círculos) enquanto as linhas sólidas são apenas “guias para os olhos”. Assim como nas buscas não-destrutivas em 1D, aqui, o valor máximo de η ocorre quando $\alpha \approx 1$ para valores de $x_0 \rightarrow r_v$. Note também que há um surgimento de um platô em η para $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$, que não é observado das buscas 1D (compare com Fig. 12).



Fonte: O autor (2023)

Primordialmente, observamos na Fig. (20), que os resultados decorrentes das simulações

de Monte Carlo, estão denotados por símbolos (círculos), ao passo que, as linhas sólidas representam um “guia para os olhos”. De imediato, também podemos constatar que existe uma grande semelhança qualitativa entre a Fig. (16) e a Fig. (20). Esse episódio ocorre justamente pelo motivo da lei de potência ser o resultado da expansão da PDF de Lévy no limite dos longos comprimentos de passos individuais ($\ell \gg 1$). Consequentemente, é natural esperarmos essa conformidade qualitativa.

De modo particular, na Fig. (20) é possível notar como se dão as curvas de $\eta \times \alpha(x_0)$ para buscas aleatórias associadas a Lévy 2D. Assim como no caso da lei de potência (subseção. 5.2.1), podemos ver um comportamento similar da eficiência da Lévy 2D com a eficiência da Lévy 1D (ver Fig. 12) no sentido de olharmos para qual valor de α iremos obter o valor de $\eta_{\text{máx}}$. Essa paridade se faz presente nos dois regimes de buscas, ou seja, nas buscas destrutivas ($\alpha \rightarrow 0$) e não destrutivas ($\alpha \approx 1$).

Também, é fácil perceber que os valores mínimos de η ($\eta_{\text{mín}}$) estão associados a os valores extremos de α ($\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha = 2$) quando se trata de buscas assimétricas. Por outro lado, o $\eta_{\text{mín}}$ relacionado às buscas simétricas se concentra apenas na extremidade direita ($\alpha = 2$). Em conformidade com a Fig. (16), é possível, mais uma vez, verificar a existência de um “tímido” platô na eficiência η para valores de $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$. Esse fato indica que em 2D, não ocorre nenhum ganho real de η nesse intervalo de parâmetros. Além disso, também como constatamos em 1D (Fig. 12), observamos que para valores medianos de x_0/L , o $\eta_{\text{máx}}$ se torna uma função do parâmetro α , que agora, se comporta como função da posição inicial x_0 e está contido no intervalo de $(0, 1]$, ou seja, $\alpha = \bar{\alpha}(x_0) \in (0, 1]$. O interessante é que nessa configuração, o $\eta_{\text{máx}}$ decai à medida que x_0 aumenta, como podemos também checar no caso Lévy 1D e lei de potência em uma e duas dimensões.

Um resultado interessante que também era esperado, foi que às buscas de Lévy foram mais eficientes do que às buscas conduzidas pela lei de potência para o regime não-destrutivo. Por exemplo, note que para $x_0 = 1,0001$ o valor de η supera 1×10^{-3} quase alcançando o valor de $1,2 \times 10^{-3}$ (ver Fig. 20). Por outro lado, na Fig. (16) verificamos que para o mesmo valor de $x_0 = 1,0001$, o valor da eficiência da busca supera 8×10^{-4} e se aproxima de 1×10^{-3} . Esse fato acontece, porque quando o caminhante está sob o domínio da $p(\ell)$ lei de potência, ele não pode executar passos menores do que o comprimento mínimo ℓ_0 , e essa restrição compromete a captura dos alvos que estão nessa faixa de distância ($\ell < \ell_0$). Essa delimitação de comprimento de passo, não existe na $p(\ell)$ de Lévy, o que possibilita em uma maior detecção de sítios-alvo e consequentemente num aumento significativo da eficiência da busca η .

5.3.2 Probabilidades P_0 e P_L

Seguindo com à análise da distribuição de tamanho de passos de Lévy para buscas em 2D, iremos neste momento, estudar como se comporta as probabilidades de captura dos alvos em função do parâmetro α associadas às buscas de Lévy, isto é, vamos investigar P_0 e $P_L \times \alpha$ para a $p(\ell)$ de Lévy. Na Fig. (21) podemos observar a dependência das probabilidades P_0 e P_L com o expoente α . Essa dependência acontece para os regimes de buscas não-destrutivas e também para buscas destrutivas. Os gráficos foram obtidos para os parâmetros $N = 10^6$, $L \times L = 10^{10}$, $N/L^2 = 10^{-4}$ (escassez de sítios-alvo), $\ell_0 = 0, 1$ e $r_v = 1$ para vários valores de x_0 respectivamente. Novamente, o expoente α encontra-se no intervalo $0 < \alpha \leq 2$ variando discretamente em pequenos intervalos $d\alpha = 0, 1$.

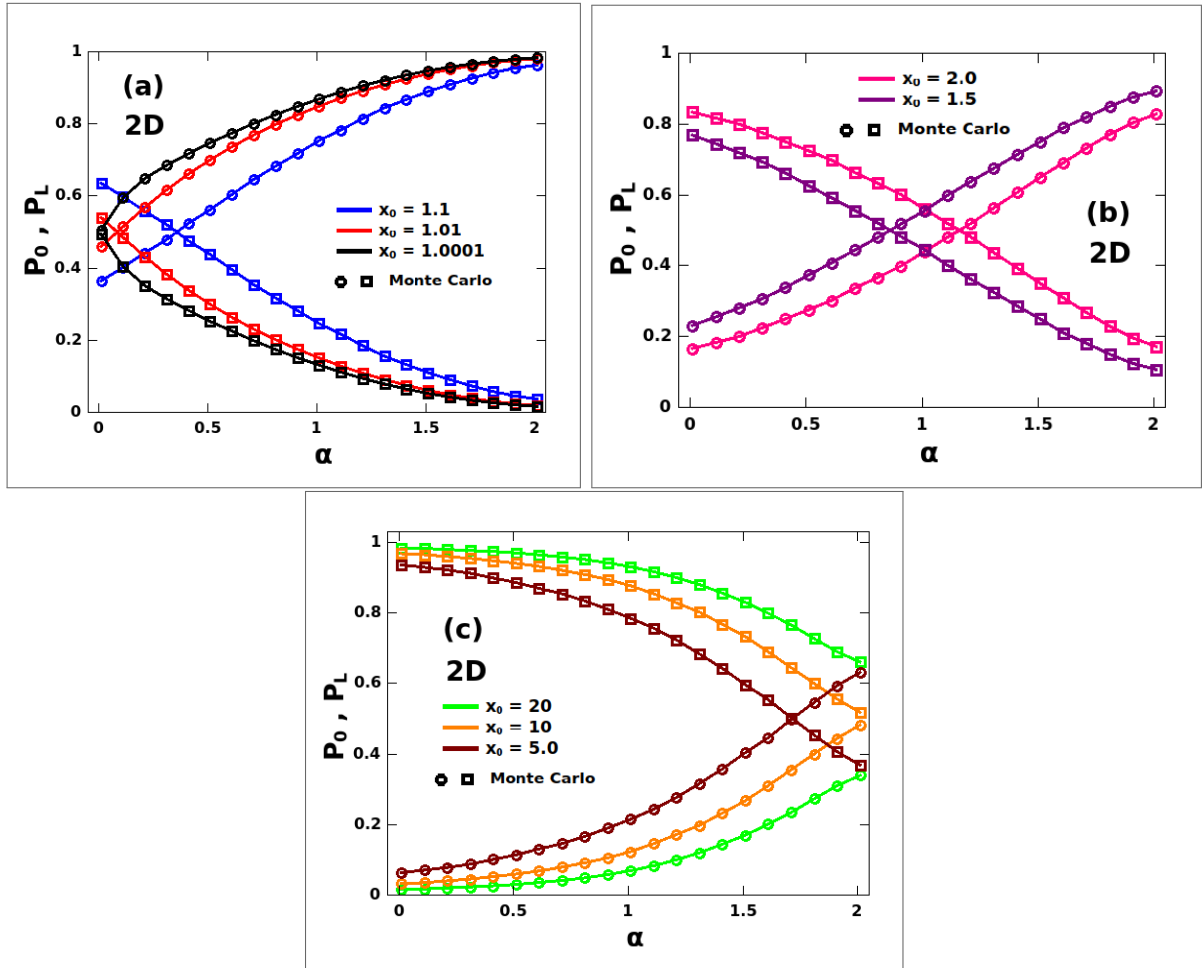
Primeiramente, note que os resultados de Monte Carlo estão representados por símbolos (círculos e quadrados), enquanto as linhas sólidas são apenas “guia para os olhos”. Bem como na subseção. (5.2.2), iremos nos concentrar no estudo das probabilidades referentes às buscas não-destrutivas.

Uma segunda observação relevante é a semelhança qualitativa entre às Fig. (21) e a Fig. (17). Esse resultado já era esperado, tendo em vista que, a $p(\ell)$ de Lévy é a versão mais completa da $p(\ell)$ lei de potência. Por esse motivo, faremos uma discussão um pouco mais breve dos resultados, nos atentando apenas nas diferenças entre as curvas.

De modo geral, podemos observar a variação de P_0 e P_L com o expoente α para às buscas assimétricas de Lévy ($x_0 \rightarrow r_v$), verificando as Fig. (21.a) e a Fig. (21.b) respectivamente. De maneira complementar, a Fig. (21.c) denota os gráficos de P_0 e $P_L \times \alpha$ para valores de x_0 maiores. Similarmente às Fig. (17.a) e Fig. (17.b), vemos que para valores de $x_0 \approx r_v$, a probabilidade de localizar o último sítio visitado (P_0) é predominantemente maior do que a probabilidade de detecção dos demais alvos (P_L), para toda faixa de valores de α . Em contrapartida, ao passo que, x_0 , torna seu valor mais acrescido, notamos o aparecimento de algumas intersecções entre as probabilidades P_0 e P_L , resultado este que não foi observado em 1D. Um outro ponto interessante é que o domínio de P_0 sobre P_L não prevalece para todo valor de x_0 como ocorreu em 1D, pelo contrário, à medida que x_0 aumenta, uma reviravolta entre às probabilidades acontece, isto é, P_L começa a dominar sobre P_0 numa faixa do expoente α cada vez maior. Essa nova faixa de domínio fica mais evidente na Fig. (21.c), no qual é possível verificar o comportamento de P_0 e P_L em função de α para grandes valores de x_0 .

Como já discutimos, existem grandes semelhanças qualitativas entre às Fig. (17) e a

Figura 21 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Probabilidades de detecção dos alvos mais próximos (P_0) e distantes (P_L) em função do expoente α relacionadas à $p(\ell)$ de Lévy. Os resultados de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos para P_0 e quadrados para P_L) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Os parâmetros utilizados para esta simulação seguem com os mesmos valores dos utilizados na Fig. (20). Note que as probabilidades 2D exibem um cruzamento interessante não presente em 1D como mostra a Fig. (13).



Fonte: O autor (2023)

Fig. (21), porém, existem também algumas diferenças que é de grande valia comentarmos. Começamos olhando para o caso de $x_0 = 1,0001$, note que para a distribuição de tamanho de passos de Lévy, o crescimento de P_0 , bem como, o decréscimo de P_L se dão de forma mais acentuadas, quando comparada com a $p(\ell)$ da lei de potência (Fig. 17.a). Uma outra diferença, bastante interessante, está na Fig. (21.c). É possível observar que o cruzamento das probabilidades P_0 e P_L para $x_0 = 5$ se dão, também, de uma forma mais acentuada e por consequência disso, esta convergência ocorre para um valor de α um pouco menor ($\alpha \approx 1,7$), quando comparado ao mesmo caso na Fig. (17.c). Esse fato, trás uma consequência particular para o caso de $x_0 = 10$. Note que um cruzamento entre P_0 e P_L quase acontece neste caso ($x_0 = 10$) para $\alpha = 2$, e esse resultado, até então, não havia sido emergido. Portanto, cons-

tatamos que para às buscas associadas à Lévy 2D, as probabilidades P_0 e P_L em função do parâmetro α se comportam de maneira similar às curvas P_0 e $P_L \times \alpha$ controladas pela $p(\ell)$ da lei de potência. No entanto, alguns resultados diferentes emergiram, tendo como destaque o “quase” cruzamento de P_0 e P_L em $\alpha = 2$ para o caso de $x_0 = 10$, o que implica em um “novo” valor máximo para a entropia S como veremos a seguir.

5.3.3 Entropia de Shannon (S)

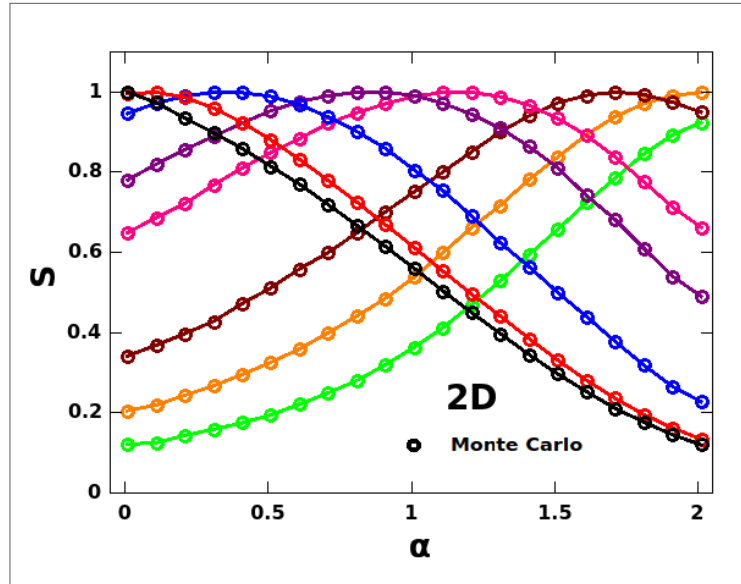
Como já discutimos nas subseções anteriores, compreender os padrões da entropia de Shannon (S) é de suma importância para um bom entendimento de um sistema dinâmico aleatório. Portanto, esta subseção será destinada à análise da entropia de Shannon nas buscas aleatórias bidimensionais, associadas a distribuição de tamanho de passos de Lévy, ou seja, iremos entender como S se comporta durante a varredura do expoente α em um regime de escassez de sítios-alvo.

De modo particular, é possível verificar na Fig. (22) os gráficos referentes a $S \times \alpha$ relacionadas às buscas não-destrutivas pertinentes a $p(\ell)$ de Lévy. Os resultados de Monte Carlo estão representados por símbolos (círculos), enquanto as linhas sólidas são “guia para os olhos”. As curvas foram obtidas para $N = 10^6$, $L = 10^5$, $N/L^2 = 10^{-4}$, $\ell_0 = 0, 1$ e $r_v = 1$ para os valores de x_0 destacados nas paletas de cores presentes nas Fig. (20) e Fig. (21) respectivamente. Bem como nas outras simulações, vemos que o expoente α flutuou em pequenos intervalos $d\alpha = 0, 1$.

De maneira mais objetiva, vamos analisar os resultados provenientes das buscas não-destrutivas, por esses, terem demonstrado aspectos estatísticos mais interessantes, quando comparados com os resultados das buscas destrutivas. Em primeiro lugar, note que existe uma grande semelhança qualitativa entre à Fig. (22) e a Fig. (18), por essa razão, iremos discutir os resultados dessa subseção de uma forma mais objetiva. Em segundo, como já esperávamos, vemos que vários pontos de $S_{\text{máx}}$ apareceram para $\alpha > 0$, se contrapondo ao caso da entropia S em 1D (Fig. 15), no qual, se manifestou apenas um valor de $S_{\text{máx}}$ para $\alpha \rightarrow 0$.

Como já foi discutido, verificamos que os valores máximos de $S = 1$ para $\alpha > 0$, surgiram devido aos cruzamentos das probabilidades P_0 e P_L presentes na Fig. (21), isto é, teremos um $S_{\text{máx}}$ quando $P_0 = P_L$ (Eq. 4.10). Tirando esse fato, observamos também que para valores de x_0 maiores, os valores máximos de S aparecem associados a valores mais altos do parâmetro α , porém, de uma forma mais acentuada quando comparada ao caso da lei de potência (Fig. 18).

Figura 22 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Entropia de Shannon (S) em função do expoente α relacionada a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo são mostrados em símbolos (círculos) e as linhas sólidas são apenas guia para os olhos. Os parâmetros e as cores são iguais as das Figs. (21) e (20) respectivamente. Os máximos de S que não foram observados em 1D além do caso trivial associado ao limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$), ocorrem no valor α onde $P_0 = P_L = 1/2$ para cada valor de x_0 ilustrado na Fig. (21).



Fonte: O autor (2023)

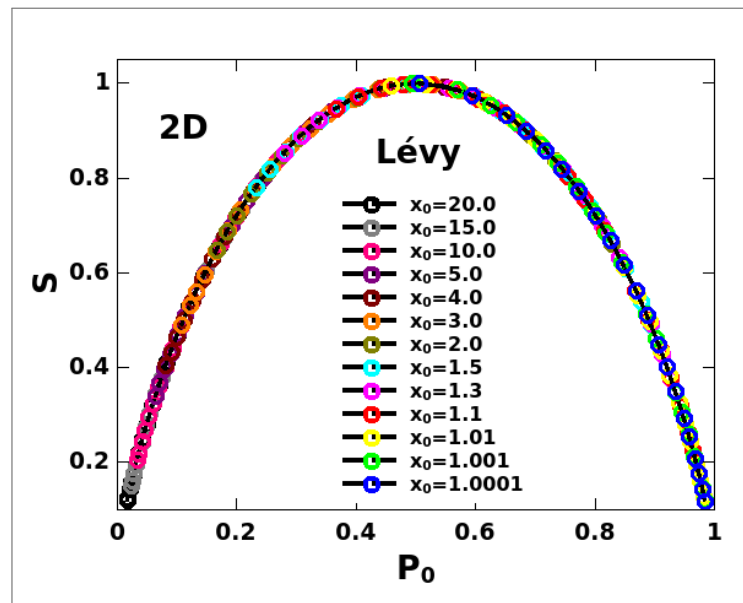
Ao compararmos a entropia S das buscas de Lévy (Fig. 22) com às entropias de Shannon referentes às buscas da lei de potência (Fig. 18), percebemos algumas diferenças quantitativas. Evidentemente, as principais diferenças estão para os casos dos valores mais altos de x_0 , isto é, para $x_0 = 5$, $x_0 = 10$ e $x_0 = 20$ respectivamente. Podemos observar que ocorreram algumas translações do ponto de máximo da entropia S nos dois casos. Por exemplo, analisando o caso de $x_0 = 5$, vemos que para a $p(\ell)$ da lei de potência, o valor de $S_{\text{máx}}$ não está bem definido no eixo α , o mesmo encontra-se timidamente próximo a $\alpha = 1,8$, sendo bem difícil de identifica-lo qualitativamente. Por outro lado, quando olhamos o mesmo caso, agora, para a $p(\ell)$ de Lévy, percebemos com mais nitidez que temos $S = 1$ para $\alpha = 1,7$. Essa percepção visual se manifesta melhor, devido a os aclives e declives que antecedem e procedem a região do valor máximo de S .

Para os casos de $x_0 = 10$ e $x_0 = 20$, a diferença é mais quantitativa. Por exemplo, para $x_0 = 10$, vemos que na lei de potência, temos que S não atinge seu maior valor possível, ou seja, $S \approx 1$ para $\alpha = 2$, enquanto que na Lévy, a entropia S é exatamente igual a 1 para o mesmo valor de α , ou seja, $S = 1$ para $\alpha = 2$. Já, no caso de $x_0 = 20$, observamos que para nenhuma $p(\ell)$ (lei de potência ou Lévy) a entropia de Shannon S atingiu seu maior valor possível ($S = 1$), porém, para a $p(\ell)$ de Lévy, a entropia S tem um valor superior a 0,9 para

$\alpha = 2$, ao passo que, a entropia de Shannon relacionada à $p(\ell)$ da lei de potência, é mais próxima de 0,8 para $\alpha = 2$.

Tal como na subsecção. (5.2.3), realizamos um estudo complementar da entropia de Shannon S . Neste momento, iremos ver como a mesma se comporta em função da probabilidade de detecção do último sítio visitado P_0 , para buscas em 2D, relacionadas a distribuição de tamanho de passos de Lévy. A Fig. (23) nos mostra o comportamento das curvas $S \times P_0$, para vários valores de x_0 que estão indicados na peleta de cores. Os resultados das simulações de Monte Carlo, estão representados por símbolos (círculos), ao mesmo tempo, as linhas sólidas são apenas um “guia para os olhos”.

Figura 23 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Entropia de Shannon S em função da probabilidade do caminhante detectar o último sítio visitado P_0 associada a distribuição de tamanho de passos de Lévy. Os resultados das simulações são denotados por símbolos (círculos) enquanto a linha sólida é apenas um guia para os olhos. Note que foi obtido uma superposição de curvas para vários valores de x_0 , onde pode-se ver o perfil padrão para a entropia de Shannon (compare com a Fig. 7).



Fonte: O autor (2023)

Inicialmente, observe que cada cor que está presente nos símbolos, representam uma simulação para um valor da posição inicial x_0 . Note também, que existe uma grande semelhança qualitativa entre à Fig. (23) e a Fig. (19), resultado que já estávamos esperando, devido a relação próxima entre a $p(\ell)$ de Lévy com a $p(\ell)$ da lei de potência.

De maneira geral, observamos a repetição do mesmo comportamento que constatamos na Fig. (19). Portanto, verificamos que para os valores menores de x_0 ($x_0 = 1,0001$, $x_0 = 1,001$) temos uma assimetria à direita da entropia S em relação ao valor de $P_0 = 1/2$. Conforme o valor de x_0 vai aumentando, essa assimetria em relação a $P_0 = 1/2$ vai se invertendo, atingindo

o ponto de máxima inversão (assimetria à esquerda), para os maiores valores de x_0 ($x_0 = 10$, $x_0 = 15$ e $x_0 = 20$). Os valores de x_0 medianos, são os que geraram as curvas de transição de simetria, ou seja, as curvas que melhor compõe a região onde se encontra o valor da entropia máxima. Todavia, a principal constatação desse resultado, é que a superposição de todos os gráficos referentes a todos os valores de x_0 , formam, geometricamente, um único gráfico que representa o comportamento “padrão” da entropia de Shannon S .

Por fim, podemos apontar algumas diferenças quantitativas relacionadas à Fig. (23) e a Fig. (19). Notavelmente, vemos que a principal diferença se encontra na região de $P_0 \sim 1$, especificamente na curva associada a $x_0 = 1,0001$. Percebemos que para a $p(\ell)$ da lei de potência, o valor mínimo de S nessa região ($P_0 \sim 1$) ficou próximo de 0,2. Em contrapartida, para a distribuição de tamanho de passos de Lévy, o valor mínimo alcançado nessa região ficou próximo de zero, deixando assim, o gráfico proveniente da superposição (padrão da entropia), totalmente simétrico.

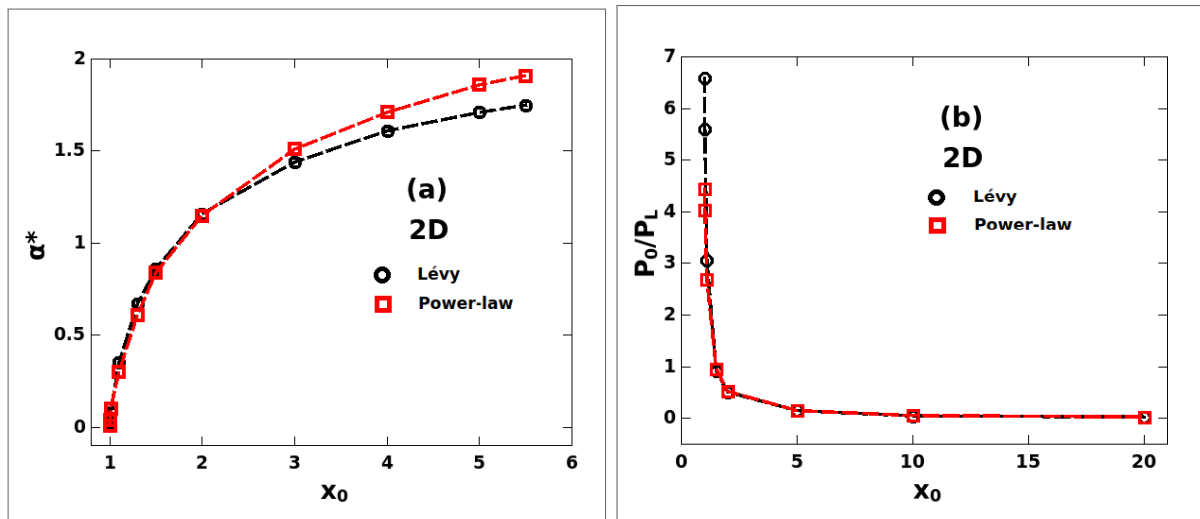
5.4 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS BUSCAS ALEATÓRIAS DE LÉVY E AS BUSCAS ALEATÓRIAS DA LEI DE POTÊNCIA

Diferente dos resultados que vínhamos discutindo nas seções anteriores, nesta seção, vamos abordar alguns aspectos particulares pertinentes as distribuições de tamanho de passos de Lévy e lei de potência respectivamente. Sendo mais específico, vamos discutir alguns resultados que diz respeito a alguns valores específicos do parâmetro α ($\alpha = \alpha^*$) associados ao máximo da entropia S , bem como resultados que mostram a relação dos valores da razão P_0/P_L relacionados a máximos da eficiência η em 2D.

Na Fig. (24.a), apresentamos o valor do parâmetro $\alpha = \alpha^*$ em função de várias posições x_0 . Os valores α^* significam valores específicos do expoente α relacionados a os valores da entropia máxima em 2D ($S = 1$), que por sua vez, estão também ligados a os valores de α no qual $P_0 = P_L = 1/2$ respectivamente. Esse comportamento pode ser observado tanto para a PDF de Lévy (círculos pretos) quanto para a lei de potência (quadrados vermelhos). Em particular, nossos resultados numéricos para a $p(\ell)$ Lévy-2D (Monte Carlo) foram obtidos usando o algoritmo de McCulloch para amostragem de números aleatórios distribuídos (CHAMBERS; MALLOWS; STUCK, 1976), com $N = 10^6$, $L = 10^5$, densidade de alvos $N/L^2 = 10^{-4}$, $r_v = 1$ e $c = 1$ para vários valores de x_0 .

Comparando por exemplo, a Fig. (16) com a Fig. (24.a) percebemos que os valores de α^*

Figura 24 – Buscas aleatórias em duas dimensões. Em (a) vemos como se comporta os valores de α^* em relação as posições iniciais de cada busca x_0 para a $p(\ell)$ de Lévy e Lei de Potência respectivamente. O parâmetro α^* corresponde aos valores do expoente α no qual S atinge seu máximo para cada valor de x_0 . Os círculos pretos e quadrados vermelhos representam respectivamente, resultados associados às distribuições de tamanho de passos de Lévy e Lei de Potência, enquanto as linhas tracejadas representam os melhores ajustes para o crescimento logarítmico de α^* com x_0 . Em (b) podemos ver os valores da razão P_0/P_L relacionadas ao máximo da eficiência η em 2D em função de vários valores de x_0 . Os símbolos têm o mesmo significado dos de (a), mas aqui, as linhas tracejadas são apenas guia para os olhos.



Fonte: O autor (2023)

para cada x_0 não corresponde aos valores de α para o qual a eficiência η em 2D é máxima. De fato, olhando para a Fig. (16), vemos que os valores de $\bar{\alpha}$ (valores de α que correspondem ao máximo de η) decrescem à medida que o valor de x_0 aumenta. Um segundo detalhe, é que $\bar{\alpha} \in (0, 1)$. Uma tendência notavelmente oposta pode ser verificada na Fig. (24.a), onde podemos ver que α^* aumenta monotonicamente ao passo que x_0 cresce em valor numérico. Vemos também um intervalo de valores mais amplo para α^* , isto é, $\alpha^* \in (0, 2)$. O fato de que a entropia S considera apenas as probabilidades de detecção dos alvos e não leva em consideração as distâncias relevantes percorridas pelo caminhante que servem para determinar η , é concebível que o mecanismo de equilíbrio de compromisso que leva ao máximo da eficiência, não corresponda a os fatores discutidos acima para a maximização de S .

Uma observação importante na Fig. (24.a) é que as curvas das PDFs de Lévy e lei de potência quase se coincidem no intervalo $0 < \alpha < 1$, uma vez que esse intermédio favorece valores de ℓ maiores no que diz respeito, à expansão em séries de Taylor da distribuição de Lévy no formato da lei de potência. Por outro lado, olhando para o intervalo de $1 < \alpha < 2$, vemos que os valores da entropia $S_{\text{máx}}$, para os presentes x_0 , são obtidos com um α ligeiramente maior para a $p(\ell)$ da lei de potência. De fato, à medida que o valor limite $\alpha = 2$ da dinâmica

gaussiana se aproxima, pequenos passos com $\ell < \ell_0$ são proibidos na PDF da lei de potência (Eq. 5.1), o que não acontece na distribuição de Lévy. Sendo assim, levando em consideração os valores de x_0 não muito pequenos (por exemplo, $x_0 \approx 6$ na Fig. 24.a) constatamos que a condição $P_0 = P_L = 1/2$ para o máximo $S = 1$ é satisfeita para um α um pouco maior para a $p(\ell)$ da lei de potência.

Com relação ao formato das curvas na Fig. (24.a), podemos fazer algumas observações. Primeiro, note que P_0 , P_L e S devem, de fato, ser funções da variável reduzida adimensional $\bar{x}_0 = (x_0 - r_v)/L$, onde $x_0 - r_v$ corresponde a distância inicial efetiva do caminhante até o último alvo visitado nas buscas em 2D. O limite balístico $\alpha^* \rightarrow 0$ na Fig. (24.a) descreve a situação de que $x_0 \rightarrow r_v$ (ou $\bar{x}_0 \rightarrow 0$), destacando neste caso que a localização dos alvos inicialmente muito próximos e distantes ocorrem com a mesma probabilidade na rede de busca 2D (veja também a Fig. (18)). No regime de $\bar{x}_0 \rightarrow 0$, o movimento do caminhante aleatório nas proximidades da borda do círculo de detecção de raio r_v (ver Fig. 2) em torno do alvo mais próximo é essencialmente unidimensional e, portanto, (BULDYREV et al., 2021) espera-se manter a escala 1D para as probabilidades que pode ser representada na forma $P_L \sim \bar{x}_0^{\alpha/2}$ (ver Eq. 4.1). Além disso, diferenciando a entropia S em relação ao expoente α no limite balístico ($\alpha \rightarrow 0$) encontramos uma escala logarítmica para α^* , isto é, $\alpha^* \sim \ln(1 + \gamma \bar{x}_0)$, onde γ é uma constante que escala com o limite balístico $\alpha^* \rightarrow 0$ (ou $\bar{x}_0 \rightarrow 0$) para $L \gg x_0$ fixo. Na verdade, um bom ajuste que descreve o crescimento logarítmico de α^* com x_0 é observado para ambas as PDFs na Fig. (24) e é dado por,

$$\alpha^* = \frac{1}{b} \ln \left[1 + \frac{(x_0 - r_v)}{a} \right], \quad (5.3)$$

com valores de melhor ajuste dados por $a = 0,13$ e $b = 1,88$ para a $p(\ell)$ da lei de potência e $a = 0,06$ e $b = 2,50$ para a distribuição de Lévy. Note que há uma consistência nos valores dos parâmetros a e b quando se refere ao crescimento mais rápido da lei de potência em relação a Lévy (compare os dois valores de b).

De maneira complementar a os resultados discutidos nos parágrafos anteriores, um resultado interessante pode ser visto na Fig. (24 .b), no qual, podemos ver os gráficos da razão P_0/P_L relacionados a máxima eficiência η da busca em função de vários valores de x_0 . Para as duas PDFs em questão (lei de potência e Lévy), notamos que os valores da razão P_0/P_L que otimizam η variam em uma ampla faixa e geralmente têm valores diferentes de $P_0/P_L = 1$,

razão que aponta a máximização da entropia S , ou seja, quando $S = 1$.

De modo geral, discutimos neste capítulo os principais aspectos das buscas aleatórias bidimensionais para duas PDFs diferentes, a saber: a $p(\ell)$ de Lévy e a lei de potência respectivamente. Neste capítulo e no capítulo (4), foram evidenciadas as mudanças que ocorrem em uma busca aleatória quando escolhemos uma determinada distribuição de tamanho de passos e a dimensão da rede de busca em ambos os casos não-destrutivo e destrutivo. Uma das nossas principais conclusões foi constatar um interessante cruzamento entre as probabilidades de detecção dos alvos P_0 e P_L nas buscas em 2D. Esse resultado, proporcionou o aparecimento de pontos máximos da entropia de Shannon para vários valores de x_0 , fato que não tinha se observado em buscas em 1D. Constatamos ainda que, na eficiência η das buscas em 2D, ocorreu um estabelecimento de uma espécie de platô para valores de $\alpha \leq 0,5$ e $x_0 \geq 5$ (ver Fig. 16), evidenciando mais um fato que não ocorreu nas buscas em 1D (ver Fig. 8). Portanto, pudemos acompanhar de perto o efeito que a dimensionalidade do espaço de busca pode ocasionar quando estamos tratando de buscas aleatórias eficientes.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho investigamos o efeito da dimensionalidade do espaço de busca no qual consideramos um número de amostras estatisticamente relevantes ao se tratar do problema das buscas aleatórias. Aqui, realizamos nossos estudos utilizando duas distribuições de tamanho de passos, a saber: **distribuições α -estáveis de Lévy** e a **lei de potência** respectivamente. Como principais resultados, verificamos que as probabilidades de retornar ao último alvo encontrado (P_0) e de encontrar alvos mais distantes (P_L), bem como a entropia de Shannon (S) associada, são afetadas de maneira importante pela dimensão do espaço de busca.

O espaço de parâmetros das buscas aleatórias em 2D no regime de baixa densidade de alvos, mostrou-se ser bipartido, com $P_0 > P_L$ para os valores de α maiores e $P_0 < P_L$ para os valores menores de α , a depender da distância x_0 do buscador até o último alvo encontrado. Esse resultado contrasta com as buscas em 1D, onde verificamos que $P_0 \geq P_L$ para qualquer distância x_0 e parâmetro α . Além disso, para cada valor de x_0 a entropia de Shannon associada às buscas em 2D apresenta um máximo no intervalo de $0 < \alpha \leq 2$, o que não ocorre nas buscas unidimensionais. Em particular, a entropia é uma quantidade fundamental para entender a ecologia do espaço de busca (ver exemplo, (CUSHMAN, 2018)), e aqui mostramos que a dimensionalidade é central para o comportamento da entropia associada à descoberta de sítios-alvos próximos e distantes em função do expoente α . Em contrapartida, os mecanismos de otimização de busca não podem ser explicados apenas em termos de uma entropia baseada apenas nas probabilidades de detecção P_0 e P_L . Tais resultados, portanto, geram o importante questionamento de qual deve ser uma definição adequada de entropia para caracterizar os processos de buscas aleatórias.

Os caminhantes aleatórios têm muitas aplicações em vários sistemas nos quais a dimensionalidade do espaço de busca é fundamental, como no problema biológico/ecológico do *foraging*, no qual as taxas de encontros desempenham um papel importante. Desse modo, abordar a questão de como quantidades estatisticamente relevantes se comportam com a dimensão pode ser de suma importância. Esperamos que nossas descobertas possam estimular mais pesquisas teóricas e experimentais para avançar na compreensão geral dos processos de buscas aleatórias.

Dentre nossas perspectivas de investigações futuras, pretendemos continuar nossas análises

ses, porém, envolvendo agora outras distribuições de tamanho de passos. Pretendemos estudar algumas distribuições que são bastante utilizadas no contexto biológico do problema do *foraging*, tais como, a distribuição gama, hiperexponenciais ou a *stretched exponential*. Uma segunda perspectiva futura, envolve aprofundarmos mais a questão da dimensionalidade do espaço de busca, para distribuições que maximizam a eficiência das buscas não-destrutivas, se possível, caracterizando em maiores detalhes como se comportam as quantidades η , P_0 e P_L e S nas buscas aleatórias em 3D.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, H. d. A. Superdifusão em espaços finitos e derivadas fracionárias. Universidade Federal de Pernambuco, 2017.
- BACHELIER, L. Theorie de la speculation, doctor thesis, annales scientifiques ecole normale sperieure iii-17. *The random character of stock market prices*, MIT Press, 1900.
- BARTUMEUS, F.; LUZ, M. G. E. da; VISWANATHAN, G. M.; CATALAN, J. Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 86, n. 11, p. 3078–3087, 2005.
- BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. da. Stochastic optimal foraging: tuning intensive and extensive dynamics in random searches. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 9, p. e106373, 2014.
- BÉNICHOU, O.; COPPEY, M.; MOREAU, M.; VOITURIEZ, R. Intermittent search strategies: When losing time becomes efficient. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 75, n. 2, p. 349, 2006.
- BÉNICHOU, O.; LOVERDO, C.; MOREAU, M.; VOITURIEZ, R. Two-dimensional intermittent search processes: An alternative to lévy flight strategies. *Physical Review E*, APS, v. 74, n. 2, p. 020102, 2006.
- BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828.
- BULDYREV, S.; GITTERMAN, M.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A. Y.; LUZ, M. da; RAPOSO, E.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 302, n. 1-4, p. 148–161, 2001.
- BULDYREV, S.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A. Y.; LUZ, M. D.; RAPOSO, E.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 4, p. 041108, 2001.
- BULDYREV, S.; RAPOSO, E.; BARTUMEUS, F.; HAVLIN, S.; RUSCH, F.; LUZ, M. D.; VISWANATHAN, G. Comment on “inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$ ”. *Physical review letters*, APS, v. 126, n. 4, p. 048901, 2021.
- CARBONE, V.; SORRISO-VALVO, L.; VECCHIO, A.; LEPRETI, F.; VELTRI, P.; HARABAGLIA, P.; GUERRA, I. Clustering of polarity reversals of the geomagnetic field. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 12, p. 128501, 2006.
- CARRIJO, T. M. et al. Correlações quânticas e generalização da entropia de von neumann. Universidade Federal de Goiás, 2012.
- CHAMBERS, J. M.; MALLOWS, C. L.; STUCK, B. A method for simulating stable random variables. *Journal of the american statistical association*, Taylor & Francis, v. 71, n. 354, p. 340–344, 1976.

- CODLING, E.; HILL, N.; PITCHFORD, J.; SIMPSON, S. Random walk models for the movement and recruitment of reef fish larvae. *Marine Ecology Progress Series*, v. 279, p. 215–224, 2004.
- CODLING, E. A.; PLANK, M. J.; BENHAMOU, S. Random walk models in biology. *Journal of the Royal society interface*, The Royal Society London, v. 5, n. 25, p. 813–834, 2008.
- COLAÇO, J.; ARAÚJO, H.; LUZ, M. da; VISWANATHAN, G.; BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. Effect of the search space dimensionality for finding close and faraway targets in random searches. *Physical Review E*, APS, v. 106, n. 3, p. 034124, 2022.
- COVER, T. M.; THOMAS, J. A. Information theory and the stock market. *Elements of Information Theory*. Wiley Inc., New York, p. 543–556, 1991.
- CRIST, T. O.; GUERTIN, D. S.; WIENS, J. A.; MILNE, B. T. Animal movement in heterogeneous landscapes: an experiment with eleodes beetles in shortgrass prairie. *Functional Ecology*, JSTOR, p. 536–544, 1992.
- CUSHMAN, S. A. *Entropy in landscape ecology*. [S.l.]: MDPI, 2018. 314 p.
- DULLIEN, F. A. *Porous media: fluid transport and pore structure*. [S.l.]: Academic press, 2012.
- EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, v. 17, n. 322.8, p. 549–560, 1905.
- EINSTEIN, A. Zur theorie der brownschen bewegung. *Annalen der physik*, Wiley Online Library, v. 324, n. 2, p. 371–381, 1906.
- HASSANI, S. *Mathematical methods: for students of physics and related fields*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 2.
- HAWKING, S.; KORYTOWSKI, I.; NETO, A. D. O universo numa casca de noz..[revisão técnica]. 2001.
- HILL, N.; HÄDER, D.-P. A biased random walk model for the trajectories of swimming micro-organisms. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 186, n. 4, p. 503–526, 1997.
- HODGES, A. Alan turing: the enigma. In: *Alan Turing: The Enigma*. [S.l.]: Princeton University Press, 2014.
- HUGILL, P. J. *Global communications since 1844: Geopolitics and technology*. [S.l.]: JHU Press, 1999.
- HUMPHRIES, N. E.; QUEIROZ, N.; DYER, J. R.; PADE, N. G.; MUSYL, M. K.; SCHAEFER, K. M.; FULLER, D. W.; BRUNNSCHWEILER, J. M.; DOYLE, T. K.; HOUGHTON, J. D. et al. Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 465, n. 7301, p. 1066–1069, 2010.
- INGEN-HOUSZ, J. *Vermischte schriften physisch-medicinischen inhalts*. [S.l.]: Wappler, 1784. v. 2.
- KARDAR, M. *Statistical physics of particles*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

- KAREIVA, P.; SHIGESADA, N. Analyzing insect movement as a correlated random walk. *Oecologia*, Springer, v. 56, p. 234–238, 1983.
- KNEGT, H. J. de; HENGVELD, G.; LANGEVELDE, F. van; BOER, W. F. de; KIRKMAN, K. P. Patch density determines movement patterns and foraging efficiency of large herbivores. *Behavioral Ecology*, Oxford University Press, v. 18, n. 6, p. 1065–1072, 2007.
- LECCARDI, M. Comparison of three algorithms for levy noise generation. In: *Proceedings of fifth EUROMECH nonlinear dynamics conference*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1–14.
- LINDLEY, D. *Boltzmann's atom: The great debate that launched a revolution in physics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2001.
- LOMHOLT, M. A.; TAL, K.; METZLER, R.; JOSEPH, K. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 105, n. 32, p. 11055–11059, 2008.
- LUZ, M. G. D.; GROSBERG, A.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. The random search problem: trends and perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 43, p. 430301, 2009.
- MATTHEWS, G. Behavioural ecology: an evolutionary approach, edited by jr krebs and nb daves. blackwell scientific publications, £ 18.95. hardback, £ 8.50 paperback. *Oryx*, Cambridge University Press, v. 16, n. 3, p. 284–285, 1982.
- MÉNDEZ, V.; CAMPOS, D.; BARTUMEUS, F. *Stochastic foundations in movement ecology*. [S.l.]: Springer, 2016.
- MORALES, J. M.; HAYDON, D. T.; FRAIR, J.; HOLSINGER, K. E.; FRYXELL, J. M. Extracting more out of relocation data: building movement models as mixtures of random walks. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 85, n. 9, p. 2436–2445, 2004.
- NOLAN, J. P. Univariate stable distributions. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, DOI*, Springer, v. 10, p. 978–3, 2020.
- OSHANIN, G.; LINDENBERG, K.; WIO, H. S.; BURLATSKY, S. Efficient search by optimized intermittent random walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 43, p. 434008, 2009.
- PATLAK, C. S. Random walk with persistence and external bias. *The bulletin of mathematical biophysics*, Springer, v. 15, p. 311–338, 1953.
- PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1865, p. 294–294, 1905.
- PENG, C.-K.; MIETUS, J.; HAUSDORFF, J.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 9, p. 1343, 1993.
- PERRIN, J. B. Discontinuous structure of matter. *Nobel Lecture*, 1926.
- PINEDA, J. O. d. C. et al. A entropia segundo claude shannon: o desenvolvimento do conceito fundamental da teoria da informação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

- PIROLI, P.; CARD, S. Information foraging in information access environments. In: *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 51–58.
- RAPOSO, E. Ep raposo, sv buldyrev, mge da luz, mc santos, he stanley, and gm viswanathan, phys. rev. lett. 91, 240601 (2003). *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, p. 240601, 2003.
- RAPOSO, E. P.; GONZÁLEZ, I. R.; CORONEL, E. D.; MACÊDO, A. M.; MENEZES, L. d. S.; KASHYAP, R.; GOMES, A. S.; KAISER, R. Intensity g (2) correlations in random fiber lasers: A random-matrix-theory approach. *Physical Review A*, APS, v. 105, n. 3, p. L031502, 2022.
- RAYLEIGH, L. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 72, p. 318, 1905.
- REYNOLDS, A. On the intermittent behaviour of foraging animals. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 75, n. 4, p. 517, 2006.
- ROGERS, G. L. Multiple path analysis of reflectance from turbid media. *JOSA A*, Optica Publishing Group, v. 25, n. 11, p. 2879–2883, 2008.
- SAKIYAMA, T.; GUNJI, Y.-P. Optimal random search using limited spatial memory. *Royal Society open science*, The Royal Society Publishing, v. 5, n. 3, p. 171057, 2018.
- SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. Stable non-gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance chapman & hall: New york. *BAYESIAN INFERENCE FOR VECTOR ARMA MODELS*, v. 475, 1994.
- SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance: stochastic modeling*. [S.l.]: Routledge, 2017.
- SANTOS, M.; RAPOSO, E.; VISWANATHAN, G.; LUZ, M. D. Optimal random searches of revisitable targets: crossover from superdiffusive to ballistic random walks. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 67, n. 5, p. 734, 2004.
- SEURONT, L.; DUPONCHEL, A.-C.; CHAPPERON, C. Heavy-tailed distributions in the intermittent motion behaviour of the intertidal gastropod littorina littorea. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 385, n. 2, p. 573–582, 2007.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- SHARMA, D.; RAMACHANDRAN, H.; KUMAR, N. Lévy statistical fluctuations from a random amplifying medium. *Fluctuation and Noise Letters*, World Scientific, v. 6, n. 01, p. L95–L101, 2006.
- SHLESINGER, M. F.; ZASLAVSKY, G. M.; FRISCH, U. Lévy flights and related topics in physics. Springer, 1995.
- SIMS, D. W.; SOUTHALL, E. J.; HUMPHRIES, N. E.; HAYS, G. C.; BRADSHAW, C. J.; PITCHFORD, J. W.; JAMES, A.; AHMED, M. Z.; BRIERLEY, A. S.; HINDELL, M. A. et al. Scaling laws of marine predator search behaviour. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 451, n. 7182, p. 1098–1102, 2008.

SMOLUCHOWSKI, M. v. Zusammenfassende bearbeitungen. *Physik. Zeitschr*, v. 17, p. 585, 1916.

SOARES, D. J. M.; SOARES, T. E. A.; EMILIANO, P. C. Uma aplicação do teorema central do limite/an application of the central limit theorem. *Brazilian Journal of Development*, v. 5, n. 12, p. 32165–32173, 2019.

TOMÉ, T. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. [S.l.]: Edusp, 2001.

UCHAIKIN, V. V.; ZOLOTAREV, V. M. Chance and stability. In: *Chance and Stability*. [S.l.]: de Gruyter, 2011.

VISWANATHAN, G. M.; AFANASYEV, V.; BULDYREV, S. V.; MURPHY, E. J.; PRINCE, P. A.; STANLEY, H. E. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 381, n. 6581, p. 413–415, 1996.

VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LUZ, M. D.; RAPOSO, E.; STANLEY, H. E. Optimizing the success of random searches. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 401, n. 6756, p. 911–914, 1999.

VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LUZ, M. D.; RAPOSO, E.; STANLEY, H. E. Optimizing the success of random searches. *nature*, Nature Publishing Group, v. 401, n. 6756, p. 911, 1999.

VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. D.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.

WASON, E. *Claude Shannon: information icon*. 2017. Disponível em: <<https://ece.engin.umich.edu/stories/claude-shannon-information-icon>>. Acesso em: 04 out. 2017.

WEISS, G. H.; WEISS, G. H. *Aspects and applications of the random walk*. [S.l.]: Elsevier Science & Technology, 1994.

WERNER, E. E.; HALL, D. J. Optimal foraging and the size selection of prey by the bluegill sunfish (*lepomis macrochirus*). *Ecology*, Wiley Online Library, v. 55, n. 5, p. 1042–1052, 1974.