



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE INFORMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TEXTO

HÉRIKLES VINÍCYUS FRANÇA CORDEIRO

**EM DIREÇÃO A UM CÁLCULO DE SEQUENTES PARA A LÓGICA DE  
DESCRIÇÃO ALCH**

Recife

2023

**HÉRIKLES VINÍCYUS FRANÇA CORDEIRO**

**EM DIREÇÃO A UM CÁLCULO DE SEQUENTES PARA A LÓGICA DE  
DESCRIÇÃO ALCH**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

**Área de Concentração:** Teoria da Computação  
**Orientadora:** Anjolina Grisi de Oliveira  
**Coorientador:** Frederico Luiz Gonçalves de Freitas

Recife  
2023

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

C798e Cordeiro, Hérícles Vinícyus França  
Em direção a um cálculo de sequentes para a lógica de descrição ALCH /  
Hérícles Vinícyus França Cordeiro – 2023.  
174 f.: il., fig., tab.

Orientadora: Anjolina Grisi de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn,  
Ciência da Computação, Recife, 2023.  
Inclui referências e apêndices.

1. Teoria da Computação. 2. Lógica de descrições. 3. Cálculo de sequentes.  
I. Oliveira, Anjolina Grisi de (orientadora). II. Título

004

CDD (23. ed.)

UFPE - CCEN 2023 – 134

**HÉRIKLES VINÍCYUS FRANÇA CORDEIRO**

**“EM DIREÇÃO A UM CÁLCULO DE SEQUENTES PARA A LÓGICA DE  
DESCRIÇÃO ALCH”**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Aprovado em: 28/06/2023.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Anjolina Grisi de Oliveira  
Centro de Informática / UFPE  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho  
Departamento de Computação / UFRPE

---

Prof. Dr. Pedro Porfirio Muniz Farias  
Dept<sup>o</sup> Informática Aplicada / UNIFOR

*Dedico esta dissertação à minha esposa **Izabela Ferreira da Silva**, sem o seu suporte, companheirismo e amor não teria chegado tão longe.*

## RESUMO

A Lógica de Descrições é um dos formalismos usados para representar conhecimento de um domínio. A lógica de descrição pode ser entendida como um subconjunto da Lógica de Primeira Ordem e é equipada com uma semântica formal e uma sintaxe bem definida. O conhecimento representado em sistemas baseados em lógica de descrições pode ser validado através de diversos métodos, e esses métodos têm a capacidade de inferência para deduzir conhecimento implícito a partir dos conceitos e relações explicitamente representados. Um desses métodos de validação é o Cálculo de Sequentes. As provas geradas por esse método são consideradas de fácil compreensão. Isso é uma grande vantagem em relação a outros métodos de validação, pois a legibilidade/explicabilidade das provas é uma das partes mais fundamentais para um sistema de provas/deduções. Nesta dissertação, investigamos a teoria da prova para a lógica de descrição. Apresentamos um cálculo de sequentes para a  $DL \mathcal{ALCH}$  e comparamos os resultados obtidos com outros cálculos de sequentes para a  $DL$  presentes na literatura.

**Palavras-chave:** logica de descrições; cálculo de sequentes; prova direta; sistema de provas.

## ABSTRACT

Description Logic is one of the formalisms used to represent knowledge of a domain. Description logic can be understood as a subset of First Order Logic and is equipped with formal semantics and well-defined syntax. The knowledge represented in systems based on description logic can be validated through several methods, and these methods have the inference capacity to deduce implicit knowledge from the explicitly represented concepts and relations. One of these validation methods is the Calculus of Sequents. The proofs generated by this method are considered easy to understand. This is a great advantage over other validation methods, as proof readability/explainability is one of the most fundamental parts of a proof/deduction system. In this dissertation, we investigate proof theory for the logic of description. We present a sequent calculation for the DL ALCH and compare the results obtained with other sequent calculations for the DL present in the literature.

**Keywords:** description logic; sequent calculus; direct proof; proof system.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Base de conhecimento no formato $(\mathcal{T}, \mathcal{R}, \text{ e } \mathcal{A})$ . . . . .	31
Figura 2 – Representação visual do modelo semântico teórico . . . . .	32
Figura 3 – Cálculo de sequentes para LPO . . . . .	39
Figura 4 – Árvore de prova da Fórmula 1 . . . . .	41
Figura 5 – Árvore de prova da Fórmula 2 . . . . .	41
Figura 6 – Árvore de prova da Fórmula 3 . . . . .	42
Figura 7 – Árvore de prova da Fórmula 4 . . . . .	42
Figura 8 – Regras para $\mathcal{ALC}$ proposto Borgida, Franconi e Horrocks . . . . .	45
Figura 9 – Exemplo 5 solucionado com CS proposto por Borgida et al. (2000) usando a regra do corte . . . . .	46
Figura 10 – Exemplo 6 solucionado com CS proposto por Borgida et al. (2000) . . .	46
Figura 11 – Exemplo 5 solucionado com CS proposto por Borgida e sem usar a regra do corte . . . . .	47
Figura 12 – Sintaxe dos rótulos . . . . .	48
Figura 13 – Semântica dos rótulo . . . . .	49
Figura 14 – Regras para $\mathcal{ALC}$ proposto por Rademaker . . . . .	50
Figura 15 – Exemplo 7 solucionada com CS proposto por Rademaker (2010) . . . . .	51
Figura 16 – Exemplo 8 solucionado com CS proposto por Rademaker (2010) usando a regra do corte . . . . .	52
Figura 17 – Exemplo 8 solucionado com CS proposto por Rademaker (2010) sem a regra do corte . . . . .	53
Figura 18 – Regras para $\mathcal{ALCH}$ . . . . .	59
Figura 19 – Exemplo 9 solucionado com CS proposto neste capítulo . . . . .	60
Figura 20 – Exemplo 10 solucionado com CS proposto neste capítulo . . . . .	61
Figura 21 – Exemplo 11 solucionado com CS proposta neste capítulo. . . . .	62
Figura 22 – Exemplo 12 solucionado com CS apresentado nesse capítulo . . . . .	66
Figura 23 – Passos adicionais na árvore da figura 22 para verificar se $\mathcal{T} \cup \mathcal{A} \vdash$ $Humano(socrates)$ . . . . .	66
Figura 24 – Exemplo 13 solucionado usando o cálculo proposto por Borgida et al. (2000) . . . . .	68
Figura 25 – Exemplo 13 solucionado com CS proposto por (RADEMAKER, 2010) . .	68
Figura 26 – Exemplo 14 solucionado com CS proposta apresentada neste capítulo .	70
Figura 27 – Exemplo 16 solucionado com CS proposto neste capítulo . . . . .	73
Figura 28 – Exemplo 17 solucionado com CS de Borgida et al. (2000) . . . . .	74
Figura 29 – Exemplo 17 solucionado com CS de Rademaker (2010) . . . . .	74

Figura 30 – Árvore da expressão $\exists h.P \vdash \forall h.P$ usando o cálculo proposto nesse trabalho . . . . .	75
Figura 31 – Árvore da expressão $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$ usando o cálculo proposto neste trabalho . . . . .	75
Figura 32 – Árvore da expressão $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$ caso as regras quantificadas não tivessem as restrições . . . . .	76
Figura 33 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000) . .	95
Figura 34 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\alpha$ . . . . .	95
Figura 35 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\beta$ . . . . .	96
Figura 36 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\gamma$ . . . . .	96
Figura 37 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\delta$ . . . . .	96
Figura 38 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\epsilon$ . . . . .	97
Figura 39 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\zeta$ . . . . .	97
Figura 40 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\eta$ . . . . .	97
Figura 41 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\theta$ . . . . .	98
Figura 42 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\iota$ . . . . .	98
Figura 43 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\kappa$ . . . . .	98
Figura 44 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\lambda$ . . . . .	99
Figura 45 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\mu$ . . . . .	99
Figura 46 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\nu$ . . . . .	99
Figura 47 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\xi$ . . . . .	100
Figura 48 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\pi$ . . . . .	100
Figura 49 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\rho$ . . . . .	100

Figura 50 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\sigma$ . . . . .	101
Figura 51 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\tau$ . . . . .	101
Figura 52 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\upsilon$ . . . . .	101
Figura 53 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\phi$ . . . . .	102
Figura 54 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\chi$ . . . . .	102
Figura 55 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\psi$ . . . . .	102
Figura 56 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\omega$ . . . . .	103
Figura 57 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\alpha$ . . . . .	103
Figura 58 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\beta$ . . . . .	104
Figura 59 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\gamma$ . . . . .	104
Figura 60 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\delta$ . . . . .	105
Figura 61 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\epsilon$ . . . . .	105
Figura 62 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\zeta$ . . . . .	106
Figura 63 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\eta$ . . . . .	106
Figura 64 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\theta$ . . . . .	107
Figura 65 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\iota$ . . . . .	107
Figura 66 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\kappa$ . . . . .	108
Figura 67 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\lambda$ . . . . .	108
Figura 68 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\mu$ . . . . .	109

Figura 69 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\nu$ . . . . .	109
Figura 70 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\xi$ . . . . .	110
Figura 71 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\pi$ . . . . .	110
Figura 72 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\rho$ . . . . .	111
Figura 73 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\sigma$ . . . . .	111
Figura 74 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\tau$ . . . . .	111
Figura 75 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\nu$ . . . . .	112
Figura 76 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\phi$ . . . . .	112
Figura 77 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\chi$ . . . . .	112
Figura 78 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\psi$ . . . . .	113
Figura 79 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\omega$ . . . . .	113
Figura 80 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\alpha\Omega$ . . . . .	113
Figura 81 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\alpha$ . . . . .	114
Figura 82 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\beta$ . . . . .	115
Figura 83 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\gamma$ . . . . .	115
Figura 84 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\delta$ . . . . .	115
Figura 85 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\epsilon$ . . . . .	116
Figura 86 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\zeta$ . . . . .	116
Figura 87 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\eta$ . . . . .	116

Figura 88 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\theta$ . . . . .	117
Figura 89 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\iota$ . . . . .	117
Figura 90 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\kappa$ . . . . .	117
Figura 91 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\lambda$ . . . . .	118
Figura 92 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\mu$ . . . . .	118
Figura 93 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\nu$ . . . . .	118
Figura 94 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\xi$ . . . . .	119
Figura 95 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\pi$ . . . . .	119
Figura 96 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\rho$ . . . . .	119
Figura 97 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\sigma$ . . . . .	120
Figura 98 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\tau$ . . . . .	120
Figura 99 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\nu$ . . . . .	120
Figura 100 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\phi$ . . . . .	121
Figura 101 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\chi$ . . . . .	121
Figura 102 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\psi$ . . . . .	121
Figura 103 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\beta\omega$ . . . . .	122
Figura 104 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\alpha$ . . . . .	122
Figura 105 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\beta$ . . . . .	122
Figura 106 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\gamma$ . . . . .	123

Figura 107–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\delta$ . . . . .	123
Figura 108–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\epsilon$ . . . . .	123
Figura 109–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\zeta$ . . . . .	124
Figura 110–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\vartheta$ . . . . .	125
Figura 111–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\eta$ . . . . .	125
Figura 112–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\theta$ . . . . .	125
Figura 113–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\iota$ . . . . .	126
Figura 114–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\kappa$ . . . . .	126
Figura 115–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\lambda$ . . . . .	126
Figura 116–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\mu$ . . . . .	127
Figura 117–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\nu$ . . . . .	127
Figura 118–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\xi$ . . . . .	127
Figura 119–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\varpi$ . . . . .	128
Figura 120–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\pi$ . . . . .	128
Figura 121–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\rho$ . . . . .	128
Figura 122–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\sigma$ . . . . .	129
Figura 123–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\tau$ . . . . .	129
Figura 124–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\nu$ . . . . .	129
Figura 125–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\Omega$ . . . . .	130

Figura 126–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\phi$ . . . . .	130
Figura 127–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\chi$ . . . . .	130
Figura 128–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\Phi$ . . . . .	131
Figura 129–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\psi$ . . . . .	131
Figura 130–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\gamma\omega$ . . . . .	132
Figura 131–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\alpha$ . . . . .	132
Figura 132–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\beta$ . . . . .	133
Figura 133–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\gamma$ . . . . .	133
Figura 134–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\delta$ . . . . .	134
Figura 135–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\sigma$ . . . . .	134
Figura 136–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\Omega$ . . . . .	134
Figura 137–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\epsilon$ . . . . .	135
Figura 138–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\zeta$ . . . . .	135
Figura 139–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\eta$ . . . . .	135
Figura 140–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\theta$ . . . . .	135
Figura 141–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\iota$ . . . . .	136
Figura 142–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\lambda$ . . . . .	136
Figura 143–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\kappa$ . . . . .	136
Figura 144–Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000):	
Continuação ramo $\delta\mu$ . . . . .	136

Figura 145 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\delta\nu$ . . . . .	137
Figura 146 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\delta\xi$ . . . . .	137
Figura 147 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\delta\pi$ . . . . .	137
Figura 148 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo $\delta\rho$ . . . . .	137
Figura 149 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010) . . . .	139
Figura 150 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\alpha$ . . . . .	139
Figura 151 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\beta$ . . . . .	140
Figura 152 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\gamma$ . . . . .	140
Figura 153 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\delta$ . . . . .	141
Figura 154 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\epsilon$ . . . . .	141
Figura 155 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\zeta$ . . . . .	142
Figura 156 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\eta$ . . . . .	142
Figura 157 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\theta$ . . . . .	143
Figura 158 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\iota$ . . . . .	143
Figura 159 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\kappa$ . . . . .	144
Figura 160 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\lambda$ . . . . .	144
Figura 161 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\mu$ . . . . .	145
Figura 162 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\nu$ . . . . .	145
Figura 163 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\xi$ . . . . .	146
Figura 164 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Con- tinuação ramo $\pi$ . . . . .	146

Figura 165 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\rho$ . . . . .	147
Figura 166 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\sigma$ . . . . .	147
Figura 167 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\tau$ . . . . .	148
Figura 168 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\nu$ . . . . .	148
Figura 169 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\phi$ . . . . .	149
Figura 170 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\chi$ . . . . .	149
Figura 171 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\psi$ . . . . .	150
Figura 172 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\omega$ . . . . .	150
Figura 173 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\alpha$ . . . . .	151
Figura 174 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\beta$ . . . . .	151
Figura 175 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\gamma$ . . . . .	152
Figura 176 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\delta$ . . . . .	152
Figura 177 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\epsilon$ . . . . .	153
Figura 178 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\zeta$ . . . . .	153
Figura 179 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\eta$ . . . . .	154
Figura 180 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\theta$ . . . . .	154
Figura 181 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\iota$ . . . . .	155
Figura 182 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\kappa$ . . . . .	155
Figura 183 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\lambda$ . . . . .	156

Figura 184 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\mu$ . . . . .	156
Figura 185 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\nu$ . . . . .	157
Figura 186 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\xi$ . . . . .	157
Figura 187 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\pi$ . . . . .	158
Figura 188 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\rho$ . . . . .	159
Figura 189 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\sigma$ . . . . .	159
Figura 190 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\tau$ . . . . .	159
Figura 191 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\nu$ . . . . .	160
Figura 192 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\phi$ . . . . .	160
Figura 193 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\chi$ . . . . .	160
Figura 194 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\psi$ . . . . .	161
Figura 195 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\alpha\omega$ . . . . .	161
Figura 196 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\alpha$ . . . . .	161
Figura 197 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\beta$ . . . . .	162
Figura 198 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\gamma$ . . . . .	162
Figura 199 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\delta$ . . . . .	162
Figura 200 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\epsilon$ . . . . .	163
Figura 201 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\zeta$ . . . . .	163
Figura 202 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\eta$ . . . . .	163

Figura 203 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\theta$ . . . . .	164
Figura 204 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\nu$ . . . . .	164
Figura 205 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\kappa$ . . . . .	164
Figura 206 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\lambda$ . . . . .	165
Figura 207 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\mu$ . . . . .	165
Figura 208 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\nu$ . . . . .	165
Figura 209 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\xi$ . . . . .	166
Figura 210 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\pi$ . . . . .	166
Figura 211 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\rho$ . . . . .	166
Figura 212 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\sigma$ . . . . .	167
Figura 213 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\tau$ . . . . .	167
Figura 214 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\nu$ . . . . .	167
Figura 215 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\phi$ . . . . .	168
Figura 216 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\chi$ . . . . .	168
Figura 217 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\psi$ . . . . .	168
Figura 218 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\beta\omega$ . . . . .	169
Figura 219 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\alpha$ . . . . .	169
Figura 220 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\beta$ . . . . .	169
Figura 221 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\gamma$ . . . . .	170

Figura 222 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\delta$ . . . . .	170
Figura 223 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\epsilon$ . . . . .	170
Figura 224 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\zeta$ . . . . .	171
Figura 225 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\eta$ . . . . .	171
Figura 226 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\theta$ . . . . .	171
Figura 227 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\iota$ . . . . .	172
Figura 228 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\kappa$ . . . . .	172
Figura 229 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\lambda$ . . . . .	172
Figura 230 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\mu$ . . . . .	173
Figura 231 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\nu$ . . . . .	173
Figura 232 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\xi$ . . . . .	173
Figura 233 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\pi$ . . . . .	174
Figura 234 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\rho$ . . . . .	174
Figura 235 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo $\gamma\sigma$ . . . . .	174

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela para tradução entre $DL$ e LPO . . . . .	33
Tabela 2 – Tabela ilustrando o comportamentos das regras $r\forall$ , $l\exists$ , $r\exists$ e $l\forall$ . . . . .	72

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma$	Letra grega Gamma
$\gamma$	Letra grega gamma
$\Delta$	Letra grega Delta
$\delta$	Letra grega delta
$\Pi$	Letra grega Pi
$\pi$	Letra grega pi
$\Sigma$	Letra grega Sigma
$\sigma$	Letra grega sigma
$\alpha$	Letra grega alfa
$\beta$	Letra grega beta
$\phi$	Letra grega phi
$\tau$	Letra grega tau
$\Theta$	Letra grega Theta
$\Omega$	Letra grega Ômega
$\mathbb{N}$	Números naturais
$\Lambda$	Lambda
$\zeta$	Letra grega minúscula zeta
$=$	Igualdade
$\in$	Pertence
$\notin$	Não Pertence
$\emptyset$	Conjunto Vazio
$\subseteq$	Subconjunto
$\cap$	Interseção
$\cup$	União

$\times$	Produto Cartesiano
$\vdash$	<i>Turnstile</i>
$\models$	Consequência lógica
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$\leftrightarrow$	Bimplicação
$\Rightarrow$	Implicação
$\rightarrow$	Implicação na Logica de Primeira Ordem
$\wedge$	Conjunção na Logica de Primeira Ordem
$\vee$	Disjunção na Logica de Primeira Ordem
$\top$	Top
$\perp$	Bottom
$\neg$	Negação
$\sqcap$	Conjunção na Logica de Descrições
$\sqcup$	Disjunção na Logica de Descrições
$\sqsubseteq$	Subsunção
$\equiv$	Equivalência
$\forall$	Quantificador universal / Restrição universal
$\exists$	Quantificador existencial / Restrição existencial

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>24</b>
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	25
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	25
<b>2</b>	<b>LÓGICA DE DESCRIÇÕES</b>	<b>27</b>
2.1	INTRODUÇÃO	27
<b>2.1.1</b>	<b>Sintaxe</b>	<b>28</b>
2.1.1.1	Exemplos	29
<b>2.1.2</b>	<b>Semântica</b>	<b>29</b>
2.1.2.1	Exemplos	30
<b>2.1.3</b>	<b>Base de conhecimento</b>	<b>31</b>
<b>2.1.4</b>	<b>Equivalência entre a <i>DL</i> com a LPO</b>	<b>33</b>
<b>2.1.5</b>	<b>Inferência em <i>DL</i></b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DE SEQUENTES PARA A LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM</b>	<b>35</b>
3.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	35
3.2	CÁLCULO DE SEQUENTES PARA LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM	36
<b>3.2.1</b>	<b>Exemplos</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>CÁLCULO DE SEQUENTES PARA LÓGICA DE DESCRIÇÕES</b>	<b>43</b>
4.1	CÁLCULO DE SEQUENTES PARA <i>ALC</i> PROPOSTO POR BORGIDA <i>ET AL.</i>	43
<b>4.1.1</b>	<b>Exemplos</b>	<b>45</b>
4.2	CÁLCULO DE SEQUENTES PARA <i>ALC</i> PROPOSTO POR RADEMAKER	48
<b>4.2.1</b>	<b>Exemplos</b>	<b>51</b>
4.2.1.1	Corretude do cálculo de sequeute de Rademaker	54
<b>5</b>	<b>PROPOSTAS DE CÁLCULO DE SEQUENTES PARA <i>DL-ALCH</i></b>	<b>58</b>
5.1	PROPOSTA	58
<b>5.1.1</b>	<b>Exemplos</b>	<b>60</b>
5.2	DIFERENÇAS ENTRE O CS PROPOSTO E OS CÁLCULOS APRESENTADOS NO CAPÍTULO ANTERIOR	63
<b>5.2.1</b>	<b>Regras Diretas</b>	<b>64</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Base de conhecimento</b>	<b>64</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Equivalência e Subsunção</b>	<b>69</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Regras para validar restrição de valor e restrição existencial</b>	<b>71</b>

5.2.5	Aplicação das Regras Quantificadas em uma Expressão Não Válida	75
6	<b>CORRETUDE DO CÁLCULO DE SEQUENTES PARA DL-ALCH PROPOSTO</b>	<b>77</b>
6.1	PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS	77
6.2	CORRETUDE	78
6.2.1	<b>Regras</b>	<b>79</b>
7	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>89</b>
7.1	TRABALHOS FUTUROS	89
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>91</b>
	<b>APÊNDICE A – EXEMPLO 15 SOLUCIONADO COM O CS APRESENTADO POR BORGIDA ET AL. (2000)</b>	<b>94</b>
	<b>APÊNDICE B – EXEMPLO 15 SOLUCIONADO COM O CS APRESENTADO POR RADEMAKER (2010)</b>	<b>138</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Lógica de Descrições (Nesse trabalho será usado a sigla *DL*, do inglês *Description Logic*) é um subconjunto decidível, elegante e poderoso da Lógica de Primeira Ordem (LPO). Esse formalismo é amplamente utilizado para representar conhecimento, (assim como outros formalismos também fazem, Ex: Redes Semânticas, Quadros e Gráficos Conceituais) (BAADER et al., 2010). Porém, os sistemas de representação do conhecimento em *DL* fornecem vários recursos para inferência de conhecimento implícito a partir do conhecimento explícito. Os raciocinadores e provadores desenvolvidos baseados nessa lógica são os principais motores para esse recurso de dedução. Para construir uma prova em cima de uma base de conhecimento é necessário usar algum sistema de prova de teoremas para avaliar se a base é válida. Os métodos de raciocínios são procedimentos fundamentados em sistemas de prova que constroem/encontram as provas aplicando uma série de regras preestabelecidas. Os métodos de raciocínios são fundamentais no domínio dos provadores automáticos de teoremas (LYON, 2021).

A união da expressividade da lógica de descrições com o desempenho dos provadores automáticos de teoremas gera uma ferramenta poderosa de raciocínio. Porém nem sempre os resultados obtidos e o caminho percorrido para chegar na conclusão é de fácil entendimento para quem está familiarizado com os conceitos lógicos. Para um *Sistema Baseado em Conhecimento*, o entendimento dos passos usados para chegar até a conclusão desempenha um papel crucial, pois elucidam as regras fundamentais do domínio utilizado pelos sistemas, o raciocínio seguido pelos motores de inferência e a estratégia adotada para alcançar uma conclusão.

Problemas relacionados à explicabilidade de uma prova não se restringem apenas aos sistemas baseados em *DL*. Em outras áreas de prova de teoremas, também está presente o desejo de fornecer explicações sobre por que os teoremas/conjunto de fórmulas são válidos. Porém, alguns métodos de raciocínio como Resolução, Método de Conexões e Tableau não possuem uma inteligibilidade considerada mais próximo ao raciocínio humano. Pensando nisso, diversos trabalhos foram desenvolvidos buscando um método raciocínio com provas mais semelhante à lógica do pensamento humana. Dois métodos possuem essa característica: a *Dedução Natural* e o *Cálculo de Sequentes* (CS) (BORGIDA et al., 2000). Esses dois métodos foram desenvolvidos por Gentzen (1935) e cada um desses métodos possuem suas características distintas, porém suas provas são consideradas mais fáceis de serem apresentadas aos usuários (por esse motivo diversos sistemas de geração de linguagem natural foram desenvolvidos para produzir explicações).

Comparada à Dedução Natural, o CS apresenta uma abordagem mais organizada e estruturada, o que beneficia a aplicação em algoritmos de prova. Essencialmente, o cálculo de sequentes é um método da lógica formal que cada linha de uma prova é uma

tautologia. Isso caracteriza sua natureza como um estilo de argumentação Silva (2017). Dado esses pontos, diversos autores desenvolveram formas tentando aproveitar a junção do poder de expressividade de lógica de descrições e a explicabilidade do CS. Grande parte desses trabalhos estão focados na validação de subsunção<sup>1</sup>, o que acaba limitando as análises nos casos com expressões mais complexas. Ademais, esses trabalhos não apresentam regras diretas para realizar a manipulação e validação da Abox<sup>2</sup>, parte fundamental na representação de conhecimento em *DL*.

## 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Com base no que foi apresentado, a principal motivação deste trabalho vem das lacunas apresentadas nos cálculos de sequentes para *DL*. Logo, os objetivos deste trabalho são:

- **Objetivo Principal:** Dado o cenário apresentado acima e a motivação do trabalho, o objetivo principal desta dissertação é desenvolver um proposta de *Cálculo de Sequentes* para a *Lógica de Descrições* com regras capazes de manipular a *Tbox*, a *Abox* e todos os símbolos lógicos pertencentes a *DL-ALCH*.
- **Objetivos específicos:**
  - Estudar o cálculo de sequentes apresentado por Gentzen (1935) e entender suas características para adaptar ao contexto da lógica de descrições;
  - Estudar e analisar os cálculos de sequentes para *DL* presentes na literatura;
  - Desenvolver um conjunto de regras a fim de trabalhar diretamente na estrutura original das expressões, sem qualquer necessidade de conversão/adaptação;
  - Apresentar a corretude do cálculo desenvolvido, juntamente com uma série de exemplos para solidificar o entendimento das regras propostas;

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está constituído da seguinte forma:

- O Capítulo 2 apresenta sobre Lógica de Descrições, descrevendo sua sintaxe, semântica, construção de base de conhecimento em *DL*, Equivalência da lógica de descrições e lógica de primeira ordem;
- O Capítulo 3 discorre sobre sistemas de prova, uma visão geral sobre Cálculo de Sequentes para Lógica de Primeiro Ordem;
- O Capítulo 4 apresenta dois Cálculos de Sequentes para Lógica de Descrições *ALC* que foram apresentados por Borgida et al. (2000) e Rademaker (2010).

<sup>1</sup> conceito será descrito na seção 2

<sup>2</sup> conceito será descrito na seção 2

- No Capítulo 5 está a propostas calculo de sequentes para Lógica de descrições  $\mathcal{ALCH}$  com seu conjunto de regras, também contêm comparações entre os cálculos do capítulo 4 e a proposta desse trabalho;
- No Capítulo 6 é apresenta do a corretude do calculo proposto nesse trabalho;
- O Capítulo 7 apresenta a conclusão e os trabalhos futuros.

## 2 LÓGICA DE DESCRIÇÕES

Nesta seção será apresentada uma introdução à Lógica de Descrições. Depois será explicado o conceito de sintaxe e a semântica para *DL*  $\mathcal{ALCH}$  (Acrônimo de *Attributive Language with Complement and role Hierarchy* que tem como tradução "Linguagem Atributiva com Complemento e Hierarquia de Papéis"). Em seguida, explicações de como as bases de conhecimento em *DL* são construídas (apresentando exemplos) e como conclusões podem ser extraídas.

### 2.1 INTRODUÇÃO

A Lógica de Descrições é um fragmento decidível de Lógica de Primeira Ordem (LPO). A *DL* pode ser vista como uma família de formalismos lógicos com semântica bem definida, amplamente utilizada para representar conhecimento em um determinado domínio. (BAADER et al., 2007). A *DL* é massivamente empregada na área de inteligência artificial simbólica (IA), com destaque na criação de modelos ontológicos para Web Semântica, sendo bem sucedida devido à sua expressividade (SILVA, 2019).

Seu formalismo dá aos sistemas com IA o poder de inferir e extrair informações implícitas a partir do conhecimento explícito através de raciocínio. É possível oferecer suporte para solucionar problemas complexos por meio de raciocínio. Alguns exemplos de aplicações da *DL* são: Verificação de consistência de leis (FREITAS; CANDEIAS; STUCKENSCHMIDT, 2011), Reutilização forense de análise de padrões de comportamento na vigilância visual (HAN; HUTTER; STECHELE, 2011), Representação de terminologia médica (NOY et al., 2008), Importação e reutilização de conceitos de múltiplos domínios (BORGIDA; SERAFINI, 2003), dentre outros.

As linguagens de descrições são diferenciadas pelos construtores que podem ser usados, sendo  $\mathcal{ACC}$  a *DL* mais básica e com uma boa expressividade. Em *DL* é possível definir os conceitos atômicos (análogos aos predicados unários na LPO) e os papéis atômicos, também chamado de relações (análoga aos predicados binários na LPO) (BAADER et al., 2017). Ao definir a lógica de descrições como fragmento decidível da LPO, fixo-se a aridade dos conceitos em 1 e a aridade dos papeis em 2 (SATTLER; CALVANESE; MOLITOR, 2003)

Segundo Baader et al. (2007), usando a teoria dos conjuntos os conceitos podem ser interpretados como:

- Um **conceito** é um conjunto de indivíduos;
  - Ex.: *C*, *D*, *Homen*, *Mulher*, *Cat*, *Pet*, *CatOwner*.
- Um **papel** é um conjunto de pares de indivíduos relacionados;
  - Ex.: *r*, *child*, *isPet*, *hasPet*, *hasCat*, *casadoCom*.

Com esses dois elementos, é possível definir as instâncias (constantes) de conceitos, as instâncias de relações, as relações entre conceitos e as relações entre conceitos e instâncias. A partir desses componentes é possível representar infinitos domínios arbitrários de conhecimento, uma característica distintiva das *DL* em relação às outras linguagens de modelagem.

A *DL-ALCH* pode ser entendida como uma extensão do *ALC*, adicionando hierarquias de papéis, logo, as definições pertencentes a *ALC* também pertencem a *ALCH* (SAHOO; THIRUNARAYAN, 2009). O  $\mathcal{H}$  representa a adição do construtor de subsunção ( $\sqsubseteq$ ) para relações, assim, criando uma hierarquia (acíclica) entre funções. Os construtores de conceitos são usados para produzir descrições mais complexas a partir de conceitos atômicos e funções atômicas.

Abaixo segue a definição da sintaxe e semântica da *DL-ALCH*, apresentando o significado de cada construtor.

### 2.1.1 Sintaxe

Schmidt-Schauß e Smolka (1991) definiram formalmente *DL ALC* como uma tupla ordenada  $(N_C, N_R, N_O)$ , onde  $N_C$  representa um conjunto de conceitos atômicos e/ou compostos<sup>1</sup>,  $N_R$  um conjunto de relações e  $N_O$  um conjunto de indivíduos (instâncias de  $N_C$  e  $N_R$ ). Baader et al. (2017) e Sahoo e Thirunarayan (2009) apresentam o formalismo *DL ALCH* como:

**Definição 1** (*Formalismo DL ALCH*) (Baader et al. (2017) e Sahoo e Thirunarayan (2009)): *Seja  $N_C$  um conjunto de nomes de conceitos (atômicos e/ou compostos) e  $N_R$  um conjunto de nomes de papéis disjuntos de  $N_C$ . O conjunto de descrições de conceitos ALCH sobre  $N_C$  e  $N_R$  é definido indutivamente como:*

- *Todo conceito  $C \in N_C$  é uma descrição de conceito ALCH;*
- *$\top$  (top concept) e  $\perp$  (bottom concept) são descrições de conceito do ALCH;*
- *Se  $C$  e  $D$  são descrições de conceito de ALCH  $\in N_C$  e  $r$  e  $s$  são nomes de relações (onde  $r$  e  $s \in N_R$ ), então as fórmulas abaixo também são descrições de conceito de ALCH:*
  - $\neg C$  (Negação),
  - $C \sqcap D$  (Conjunção),
  - $C \sqcup D$  (Disjunção),
  - $\exists r.C$  (Restrição existencial),

<sup>1</sup> Um conceito é considerado composto quando ele usa pelo menos um dos operadores listados na definição 1

- $\forall r.C$  (*Restrição de valor*), e
- $r \sqsubseteq s$  (*Hierarquia de relações*).
- *Obs: Ao representar um conceito ou uma relação arbitrária como mostrado acima, existem variáveis implícitas:*
  - \*  $C \Leftrightarrow C(x)$ ;
  - \*  $r \Leftrightarrow r(x, y)$ .

Com exceção da hierarquia de relações ( $r \sqsubseteq s$ ), as demais definições também são definições de  $\mathcal{ALC}$ .

Com a definição 1 podemos distinguir entre expressões que são bem-formadas e aquelas que não são bem-formadas. Por exemplo,  $\exists r.C$  e  $A \sqcap \exists r.\forall s.(E \sqcup \neg F)$  são descrições de conceitos  $\mathcal{ALC}$ , enquanto  $\exists C$  e  $\forall s.s$  não são.

#### 2.1.1.1 Exemplos

- *Employee, Parent, Man, Woman, Cat, Pet* representam conceitos que definem classes ou subconjuntos de objetos do universo;
- representam relacionamento entre indivíduos;
- $\neg Cat$  representam os indivíduos que não pertencem ao conceito *Cat* (também pode ser lido com conjunto complementar de *Cat*);
- $Employee \sqcap Woman$  representa a *intersecção* dos indivíduos que pertencem ao mesmo tempo ao conceito de *Employee* e *Woman*;
- $Parent \sqcup Man$  representa a *união* dos indivíduos que pertencem ao mesmo tempo ao conceito de *Parent* e *Man*;
- $\exists hasCat.CatOwner$  define todos os indivíduos  $x$ , onde existe ao menos um indivíduo  $y$ , relacionado a  $x$  através de *hasCat*, que é membro de *CatOwner*;
- $\forall isPet.Cat$  define o conjunto de todos os indivíduos  $x$ , onde todos os elementos relacionados a  $x$  através de *isPet* são membros do conceito *Cat*;
- $hasCat \sqsubseteq hasPet$  define que os indivíduos que estão relacionados através de *hasCat* também pertencem à *hasPet*.

#### 2.1.2 Semântica

Para interpretação de cada significado dos conceitos apresentados na seção 2.1.1, É possível usar uma estrutura que consiste em um par composto por um conjunto não vazio chamado domínio de interpretação ( $\Delta^{\mathcal{I}}$ ) e uma função de interpretação ( $\cdot^{\mathcal{I}}$ ) (BAADER et al., 2017).

**Definição 2** (Semântica) (BAADER et al., 2017): Uma interpretação  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  sobre a tupla  $(N_C, N_R, N_O)$  consiste de um conjunto não vazio  $\Delta^{\mathcal{I}}$ , chamado o domínio de  $\mathcal{I}$ , e uma função  $\cdot^{\mathcal{I}}$  que mapeia:

- todo conceito  $C \in N_C$  é um conjunto  $C^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ , e
- toda regra  $r \in N_R$  é uma relação binária  $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ .

O mapeamento  $\cdot^{\mathcal{I}}$  para todos os conceitos  $C, D$  pertencentes a  $N_C$ , todas as relações  $r$  e  $s$  pertencentes a  $N_R$ ,  $\top$  e  $\perp$  pode ser interpretado como:

- $\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$
- $\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- $(C)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}}$
- $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
- $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{ se } (x, y) \in r^{\mathcal{I}}, \text{ estão } y \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ com } (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ e } y \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(r \sqsubseteq s)^{\mathcal{I}} = r^{\mathcal{I}} \subseteq s^{\mathcal{I}}$

Com exceção de hierarquia de relações, as demais definições também são definições de  $\mathcal{ALC}$ .

### 2.1.2.1 Exemplos

Dado o universo do discurso  $\Delta^I$ , onde as relações com os indivíduos:

- **Conceito:** *Pet* é um conceito pertencente a  $\Delta^I$ , é o mesmo que afirmar: "a interpretação de *Pet* está contida em  $\Delta^I$ " ( $Pet^I \subseteq \Delta^I$ );
- **Instância :** *gato de botas* é uma instância pertencente a  $\Delta^I$  ( $gato\ de\ botas^I \subseteq \Delta^I$ ), *gato de botas* é um animal de estimação,  $Pet(gato\ de\ botas)$ ;
- **Relação entre indivíduos:** A relação *hasPet* conecta dois indivíduos de  $\Delta^I$ , onde  $hasPet^I \in (\Delta^I \times \Delta^I)$ . Se *jon* é uma instância do conceito *Man* e tem um gato chamado *garfield*,  $Cat(garfield)$ . A relação pode ser declarada como  $hasPet(jon, garfield)$ ;
- **Subsunção de relações:** Sendo *hasCat* e *hasPet* relações pertencentes a  $(\Delta^I \times \Delta^I)$ , a subsunção  $hasCat \sqsubseteq hasPet$  representa que os pares ordenados contidos em  $hasCat^I$  estão presentes em  $hasPet^I$ .

### 2.1.3 Base de conhecimento

Uma base de conhecimento em *DL-ALCH* (*DL-KB*: sigla em inglês de *Description-Logic knowledge bases*) pode ser definida como trio  $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A})$ . O  $\mathcal{T}$  representa os axiomas terminológicos (TBox);  $\mathcal{R}$  representa os axiomas de relação (RBox); já o  $\mathcal{A}$  representa os axiomas assertivos (ABox). Silva (2017) define a TBox como a parte de  $\mathcal{K}$  que abrange os conceitos gerais. Já a RBox consiste na parte de  $\mathcal{K}$  onde ocorre as inclusões e definições de funções/papais atômicos e suas relações. Em algumas fontes a Tbox e Rbox podem ser representadas apenas como  $\mathcal{T}$  (AUTEXIER; HUTTER, 2013). ABox é a parte da base de conhecimento que contém os indivíduos que representam instâncias dos elementos que compõem a TBox e a Rbox (BAADER et al., 2017). Assim é possível dizer que em uma aplicação que utiliza uma base de conhecimento baseado em *DL*, se faz necessário construir as definições de conceitos e relações que descrevem noções relevantes para o domínio de aplicativo.

**Definição 3** (*Base de Conhecimento*) (BAADER et al., 2017): Em *DL* uma base de conhecimento é um trio  $(\mathcal{T}, \mathcal{R}, e \mathcal{A})$ .  $\mathcal{T}$  é a TBox,  $\mathcal{R}$  é a RBox, e  $\mathcal{A}$  é a ABox.

Figura 1 – Base de conhecimento no formato  $(\mathcal{T}, \mathcal{R}, e \mathcal{A})$

- $\mathcal{T} = \{Employee, Parent, Man, Woman, Cat, Pet\};$
- $\mathcal{R} = \{r, child, hasPet, hasCat, marriedWith\};$
- $\mathcal{A} = \{Employee(ana), Employee(pedro), Employee(joão), Parent(maria), Parent(carlos), Man(pedro), Man(joão), Man(carlos), Woman(ana), Woman(maria), Cat(simba), Cat(whiskers), Pet(simba), Pet(whiskers), r(ana, pedro), child(maria, ana), hasPet(carlos, whiskers), hasCat(joão, simba), marriedWith(pedro, maria)\};$

**Fonte:** O autor (2023)

Para tornar mais palpável o conceito de base de conhecimento baseado em *DL*, é possível comparar a *DL-KB* com um banco de dados. A TBox e a Rbox representam o esquema de banco de dados (expressando as restrições gerais do conhecimento representado), e a ABox como as instâncias dos esquemas (os elementos concretos, suas propriedades e seus relacionamentos) (BAADER et al., 2017).

**Definição 4** (*TBox*) (BAADER et al., 2017): Para  $C$  e  $D \in N_C$  (onde esses conceitos podem ser atômicos e/ou compostos), uma expressão  $C \sqsubseteq D$  é chamado de inclusão de conceito geral (GCI - sigla em inglês para general concept inclusion) ou subsunção.  $C \equiv D$  é usado para abreviar o GCI  $(C \sqsubseteq D) \sqcap (D \sqsubseteq C)$ , essa abreviação também pode ser chamado de axioma de equivalência. Um conjunto finito de GCI é chamado de TBox.

**Definição 5** (*RBox*) (BAADER et al., 2017): Para  $r$  e  $s \in N_R$ , uma expressão  $r \sqsubseteq s$  é chamada de axioma de inclusão de papéis (RIA - sigla em inglês para role inclusion axiom). Um conjunto finito de RIA é chamado de *RBox*.

**Definição 6** (*ABox*) (BAADER et al., 2017): Seja  $\mathcal{J}$  um conjunto de nomes individuais disjuntos de  $N_C$  e  $N_R$ , onde

- $a, b \in \mathcal{J}$ ;
- $C \in N_C$ ; e
- $r \in N_R$ .

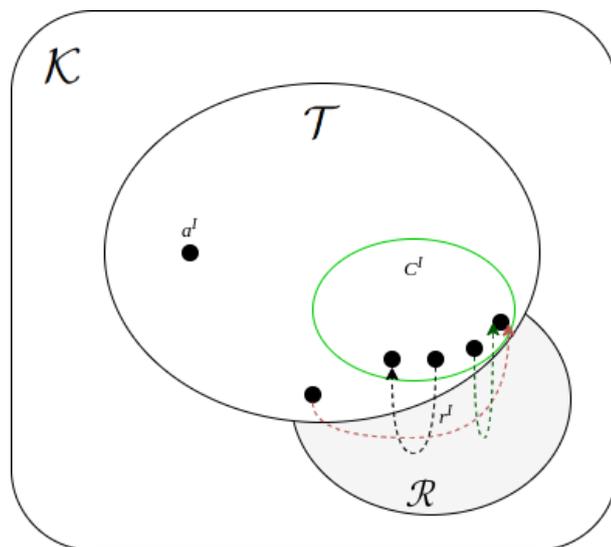
Nesse contexto, as expressões na forma  $C(a)$  e  $r(a, b) \in \mathcal{A}$

**Definição 7** (*Interpretação da TBox*) (BAADER et al., 2017): Uma interpretação  $\mathcal{I}$  satisfaz uma expressão  $C \sqsubseteq D$  se e somente se  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ . Um modelo de  $\mathcal{T}$  é uma interpretação que satisfaça cada  $C \sqsubseteq D$  em uma *TBox*.

**Definição 8** (*Interpretação da RBox*) (BAADER et al., 2017): Uma interpretação  $\mathcal{I}$  satisfaz um RIA  $r \sqsubseteq s$  se e somente se  $r^{\mathcal{I}} \subseteq s^{\mathcal{I}}$ . Um modelo de  $\mathcal{R}$  é uma interpretação que satisfaça cada RIA em uma *RBox*.

**Definição 9** (*Interpretação da ABox*) (BAADER et al., 2017): Uma interpretação  $\mathcal{I}$  é um modelo que satisfaz  $C(a)$  se  $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ , e  $\mathcal{I}$  é um modelo que satisfaz  $r(a, b)$  se  $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in r^{\mathcal{I}}$ . Uma interpretação que satisfaça cada conceito de  $N_C$  e cada relação de  $N_R$  em um *ABox*  $A$  é chamada de modelo de  $A$ .

Figura 2 – Representação visual do modelo semântico teórico



$$\mathcal{T} = \{\dots, C, \dots\}, \mathcal{A} = \{\dots, a, \dots\}, \mathcal{R} = \{\dots, r, \dots\}$$

Fonte: O autor (2023)

A figura 2 é uma representação gráfica de um modelo semântica para uma base de conhecimento em  $DL\text{-}\mathcal{ALCH}$ . Os círculos pretos representam os indivíduos pertencentes a Abox; A elipse branca representa a TBox; a elipse verde representa o conjunto de indivíduos pertencentes ao conceito  $C$ ; as linhas tracejadas representam os pares ordenados onde a ordem é dada pela direção da seta; A elipse cinza denota o conjunto de relacionamentos da Rbox.

#### 2.1.4 Equivalência entre a $DL$ com a LPO

Como definido na seção 2.1 a  $DL$  é um fragmento de Lógica de Primeira Ordem decível. Dessa forma, é possível transformar qualquer expressão de  $DL$  em uma expressão equivalente em LPO. A tabela 1 mostra as equivalências entre  $\mathcal{ALCH}$  e LPO.

Tabela 1 – Tabela para tradução entre  $DL$  e LPO

Conceito	$DL$	LPO
Classe	$C$	$\forall x(C(x))$
Negação	$\neg C$	$\forall x(\neg C(x))$
Conjunção	$C \sqcap D$	$\forall x(C(x) \wedge D(x))$
Disjunção	$C \sqcup D$	$\forall x(C(x) \vee D(x))$
Restrição existencial	$\exists r.C$	$\forall x \exists y(r(x, y) \wedge C(y))$
Restrição de valor	$\forall r.C$	$\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow C(y))$
Subsunção	$C \sqsubseteq D$	$\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$
Equivalência	$C \equiv D$	$\forall x(C(x) \leftrightarrow D(x))$
Hierarquia de relações	$r \sqsubseteq s$	$\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow s(x, y))$
Equivalência de relações	$r \equiv s$	$\forall x \forall y(r(x, y) \leftrightarrow s(x, y))$

Fonte: O autor (2023)

As informações apresentadas da tabela 1 e usando a equivalência da implicação ( $\rightarrow$ ) e a equivalência da bimplicação ( $\leftrightarrow$ ) é possível obter (usando  $\Leftrightarrow$  para representar que as duas expressões têm o mesmo significado semântico):

- $C \sqsubseteq D \Leftrightarrow \neg C \sqcup D$ 
  1.  $C \sqsubseteq D$  (Subsunção)
  2.  $\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$  (Equivalência da subsunção para LPO)
  3.  $\forall x(\neg C(x) \vee D(x))$  (Equivalência da  $\rightarrow$ )
  4.  $\neg C \sqcup D$
- $C \equiv D \Leftrightarrow (C \sqsubseteq D) \sqcap (D \sqsubseteq C)$ 
  1.  $C \equiv D$  (Equivalência  $DL$ )

2.  $\forall x(C(x) \leftrightarrow D(x))$  (Equivalência  $\equiv$  em LPO)
3.  $\forall x((C(x) \rightarrow D(x)) \wedge (D(x) \rightarrow C(x)))$  (Equivalência  $\leftrightarrow$ )
4.  $\forall x(C(x) \rightarrow D(x)) \wedge \forall x(D(x) \rightarrow C(x))$  (Equivalência  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ )
5.  $(C \sqsubseteq D) \sqcap (D \sqsubseteq C)$

### 2.1.5 Inferência em DL

O processo de inferir conhecimentos que não foram declarados diretamente na *DL-KB* pode ser entendido como um algoritmo capaz de raciocinar sobre a TBox, a Rbox e a ABox, e assim, extraíndo conhecimento implícito. Segundo Brachman e Levesque (2004) raciocinar é o ato de manipular formalmente os símbolos que representam conceitos de tal maneira que seja possível construir (inferir) representações de novas proposições. Abaixo seguem as definições formais de *Satisfabilidade*, *Subsunção*, *Equivalência*, *Disjunção*, *Consistência* e *Instância* apresentados por Baader et al. (2010):

**Definição 10** (*Satisfabilidade*):  $C$  é satisfatível em relação a  $\mathcal{T}$  se e somente se existe um modelo  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$  e existir um  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  onde  $d \in C^{\mathcal{I}}$ ;

**Definição 11** (*Subsunção*):  $C$  é subsumido por  $D$  em relação a  $\mathcal{T}$ , escrito com  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ , se  $C^{\mathcal{I}} \sqsubseteq D^{\mathcal{I}}$  para todo modelo  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ ;

**Definição 12** (*Equivalência*):  $C$  e  $D$  são equivalentes em relação a  $\mathcal{T}$ , escrito como  $\mathcal{T} \models C \equiv D$ , se  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$  para todo modelo  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ ;

**Definição 13** (*Disjunção*):  $C$  e  $D$  são disjuntos em relação a  $\mathcal{T}$  se  $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$  para todo modelo  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ ;

**Definição 14** (*Consistência*): Uma ABox  $\mathcal{A}$  é consistente em relação  $\mathcal{T}$ , se houver uma interpretação que é um modelo de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{T}$ ;

**Definição 15** (*Instância*):  $b$  é uma instância de  $C$  em relação a  $\mathcal{A}$ , escrito  $\mathcal{A} \models C(b)$ , se  $b^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$  para todo modelo  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$ .

### 3 CÁLCULO DE SEQUENTES PARA A LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

O capítulo tem o objetivo de fornecer uma explicação concisa dos conceitos fundamentais relacionados a sistemas de prova e provas. Em seguida, oferece uma visão geral do Cálculo de Sequentes para Lógica de Primeira Ordem e conclui apresentando exemplos de provas usando o CS.

#### 3.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

**Definição 16** (*Sistemas de Prova*) (KFOURY; MOLL; ARBIB, 2012): Sendo  $\Gamma$  um conjunto de fórmulas de uma linguagem  $\mathcal{L}$ . Um sistema de prova  $\mathcal{P}$  é um par  $\mathcal{P} = (\Delta, \mathcal{R})$ , onde  $\Delta \subseteq \Gamma$  é um conjunto de axiomas e  $\mathcal{R}$  é um conjunto finito de regras de inferência.

**Definição 17** (*Prova Formal*) (ENDERTON, 2001): Uma Prova Formal de  $\phi$  a partir de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$  é uma sequência finita  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de fórmulas tal que  $\alpha_n$  é  $\phi$  e para cada  $k \leq n$ , ou

- (i)  $\alpha_k$  está em  $\Gamma \cup \Delta$ , onde  $\Delta$  é um conjunto de axiomas, ou
- (ii)  $\alpha_k$  é obtida por regra de inferência a partir de duas fórmulas anteriores na sequência; isto é, para algum  $i$  e  $j$  menor que  $k$ ,  $\alpha_i \cap \alpha_j \vdash \alpha_k$ .

Caso as condições da definição 17 sejam atendidas, então  $\Gamma \vdash \phi$ . O símbolo  $\vdash$  é chamado de *turnstile* (ou *catraca*) e pode ser lido como:  $\phi$  é **dedutível a partir de**  $\Gamma$ .

A seguir, são listados três importantes teoremas dentro do contexto de teoria da prova.

**Definição 18** (*Teorema da Dedução*) (ENDERTON, 2001; VIEIRA, 2007):  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$  se, e somente se,  $\Gamma \vdash \{\alpha\} \rightarrow \beta$ , assim como:

- $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\alpha\}$
- Se  $\Gamma \vdash \{\alpha\}$  e  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta\}$ , então  $\Gamma \vdash \{\beta\}$ ;
- Se  $\Gamma \vdash \{\alpha\}$ , então  $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \{\alpha\}$ . Ou seja, a lógica é monotônica.
- $\Gamma \vdash \{\alpha\}$  se e somente se  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  é insatisfável.

**Definição 19** (*Teorema da Corretude*) (ENDERTON, 2001): Estabelecendo  $\Gamma$  como conjunto de fórmulas arbitrárias e  $\phi$  como uma fórmula arbitrária a ser provada,

- se  $\Gamma \vdash \phi$ , então  $\Gamma \models \phi$

O teorema da corretude garante que se  $\phi$  é dedutível a partir das fórmulas em  $\Gamma$  então  $\phi$  é consequência lógica de  $\Gamma$ . Em outras palavras, esse teorema declara que tudo que é derivável no sistema é verdade.

**Definição 20** (*Teorema da Completude*) (ENDERTON, 2001): Estabelecendo  $\Gamma$  como conjunto de fórmulas arbitrárias e  $\phi$  como uma fórmula arbitrária a ser provada,

- se  $\Gamma \models \phi$ , então  $\Gamma \vdash \phi$

O teorema da Completude declara que tudo que é semanticamente obtido pode ser também obtido no sistema dedutivo. Se  $\phi$  é consequência lógica de  $\Gamma$  então  $\phi$  é dedutível a partir das fórmulas de  $\Gamma$ . Em outras palavras, tudo que é verdade é possível derivar.

### 3.2 CÁLCULO DE SEQUENTES PARA LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

Gentzen apresentou no trabalho "Estudos Sobre Raciocínio Lógico" (do alemão *Untersuchungen über das logische schließen*) de 1935 o **Cálculo de Sequentes** (CS), um sistema de dedução com regras bem definidas, trazendo a capacidade de construir as provas e de se estudar as metapropriedades dos sistemas lógicos (MARTINS; OLIVEIRA; QUEIROZ, 2001). A Teoria da Prova desenvolvida por Gentzen é destacada por “[...] demonstrar a validade de um argumento de uma maneira usualmente mais rápida, apenas trabalhando com regras em métodos finitários” (SILVESTRINI, 2007).

**Definição 21** (*Sequente*) (GENTZEN, 1964): Um sequente é uma expressão no formato  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m$ , tal que  $m$  e  $n$  são maiores ou iguais a 0. Essa expressão pode ser representada como  $\Gamma \vdash \Delta$ . As fórmulas de  $\Gamma$  compõem o antecedente e as fórmulas de  $\Delta$  compõem o sucedente do sequente. Ambas as expressões podem estar vazias.

O sequente  $\Gamma \vdash \Delta$  tem o seguinte significado axiomático:  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \vdash (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$ . Se o antecedente estiver vazio, o sequente se reduz à expressão  $\vdash (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$ . Se o sucedente estiver vazio, a sequência significa o mesmo que a fórmula  $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$  ou  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \text{Falso}$ . Se  $\Gamma$  e  $\Delta$  forem vazias, o sequente representa o falso, ou absurdo.

A seguir, serão dadas as definições de **Prova no cálculo de sequentes de Gentzen**, **Fórmula válida no cálculo de sequentes**, **Derivação Normal**, **Propriedade da Subfórmula**:

**Definição 22** (*Prova no cálculo de sequentes de Gentzen*) (GENTZEN, 1935; TROELSTRA; SCHWICHTENBERG, 2000): Provas ou deduções em CS são definidas como árvores finitas com uma única raiz, com axiomas nas folhas, e cada rótulo de nó conectado com os rótulos dos nós sucessores (imediatos, se houver) de acordo com uma regra. As regras são divididas em regras à esquerda do turnstile ( $l$ ), à direita do turnstile ( $r$ ), Axioma de terminação ( $=$ ) e Regra do Corte (definição 26).

**Definição 23** (*Fórmula válida no cálculo de seqüentes*)(SILVA, 2017): Uma fórmula  $F$  é válida em lógica clássica se e somente se existe uma dedução para  $F$  no correspondente cálculo de seqüentes.

**Definição 24** (*Derivação Normal*) (DALEN; DALEN, 1994): Uma derivação  $\Gamma$  é irredutível se não existir uma outra derivação  $\Gamma'$  tal que  $\Gamma < \Gamma'$ , ou seja, sem a presença de cortes. Quando isso ocorre, a derivação  $\Gamma$  é está na **forma normal**.

**Definição 25** (*Propriedade da Subfórmula*) (DALEN, 1994 apud SILVA, 2017): Em uma derivação normal de  $\Gamma \vdash \phi$ , cada fórmula é uma subfórmula de uma hipótese em  $\Gamma$  ou de  $\phi$ .

O esquema de figura de inferência para CS apresentado por Gentzen (1935) é composto pelo conjunto de **Regras Lógicas** (ou **Regras Operacionais**), **Regras Estruturas** e o **Axioma de Terminação**. Esses conceitos podem ser entendidos como:

1. (*Regras Lógicas*): As regras lógicas do cálculo de seqüentes podem ser entendidas como as regras que concedem significado individualizado e operacional para as constantes lógicas. As regras lógicas, tanto à direita quanto à esquerda do  $\vdash$ , podem ser vistas, respectivamente, como as regras de eliminação e introdução das constantes lógicas no sistema de dedução natural.
  - Para um operador lógico arbitrário ( $\odot$ ),  $l\odot$  e  $r\odot$  indicam as regras onde uma fórmula com  $\odot$  como operador principal são aplicadas, à esquerda (l) ou à direita (r) do  $\vdash$ .
2. (*Regras Estruturais*): De forma geral, existem propriedades das derivações que servem apenas a nível de metalinguagem. No sistema proposto por Gentzen (1935) as regras estruturais definem estas propriedades de forma explícita dentro do próprio cálculo. Desta forma, o cálculo de seqüentes pode ser visto como um meta-cálculo, pois permite representar a nível de objeto as meta-propriedades das derivações.
  - As regras estruturais são as seguintes: **contração**,<sup>1</sup> **enfraquecimento**<sup>2</sup> e **permutação**,<sup>3</sup>. Respectivamente,  $\diamond c$ ,  $\diamond w$  e  $\diamond p$ , onde  $\diamond$  pode ser  $l$  ou  $r$ , indicando a aplicação da regra à esquerda ou à direita, respectivamente, do  $\vdash$ . Além dessas regras existe a regra do corte (*cut*, em inglês)
3. (*Axioma de Terminação*): O Axioma de Terminação, também conhecida como axioma de identidade, é análogo a propriedade reflexiva da relação de derivabilidade:

<sup>1</sup> contraction, em inglês

<sup>2</sup> weakening, em inglês

<sup>3</sup> permutation, em inglês

qualquer fórmula é derivada dela mesma ( $\phi$  é derivável de  $\phi$ ). Esse axioma é fundamental para qualquer prova no cálculo de seqüentes, pois as folhas da árvore de prova estão rotuladas com ele.

Na Figura 3 estão as Regras Lógicas, as Regras Estruturais e o Axioma de Terminação para o cálculo de seqüentes na Lógica de Primeira Ordem (LPO). Nas regras os símbolos  $\alpha$  e  $\beta$  representam fórmulas arbitrárias;  $\Gamma, \Delta, \Sigma$  e  $\Pi$  representam conjunto de fórmulas arbitrárias;  $x$  e  $y$  representam variáveis arbitrárias;  $t$  é a representação de um termo qualquer; A notação  $[x/t]$  representa a substituição de  $x$  por um termo  $t$ <sup>4</sup>.

É possível estabelecer usando as definições 20 e 23 que:  $\alpha$  é um teorema das hipóteses  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se e somente se existir uma prova de  $\alpha$  em  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  no cálculo de seqüentes. Tal prova possui uma estrutura de árvore onde a raiz é  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \alpha$  (denominada como seqüente final), as folhas são do tipo  $\alpha \vdash \alpha$  (chamado por seqüentes iniciais), os seqüentes intermediários são alcançados a partir das aplicação das regras de inferência do cálculo.

<sup>4</sup> o conceito de substituição será melhor desenvolvido na seção 5.2.2

Figura 3 – Cálculo de sequentes para LPO

**Axioma de Terminação**

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} (=)$$

**Regras Lógicas**

$$\frac{\Gamma, \alpha, \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} (l\wedge_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta} (r\vee_1)$$

$$\frac{\Gamma, \beta, \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} (l\wedge_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta} (r\vee_2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Pi, \beta \vdash \Sigma}{\Pi, \Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta, \Sigma} (l\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Pi \vdash \beta, \Sigma}{\Pi, \Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta, \Sigma} (r\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Pi, \beta \vdash \Sigma}{\Pi, \Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta, \Sigma} (l\rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta} (r\rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \Delta} (l\neg)$$

$$\frac{\Gamma \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \alpha, \Delta} (r\neg)$$

$$\frac{\Gamma, \beta[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \beta \vdash \Delta} (l\exists^*)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x \beta \Delta} (r\forall)^*$$

$$\frac{\Gamma, \beta[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \beta \vdash \Delta} (l\forall)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \beta, \Delta} (r\exists)$$

**Regras Estruturais**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} (lw)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} (rw)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} (lc)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} (rc)$$

$$\frac{\Gamma, \beta, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta} (lp)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta} (rp)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \alpha, \Sigma \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \Delta, \Pi} (corte)$$

**Fonte:** Silva (2017)

Ao observar as regras acima é possível destacar três destas regras  $l\exists$ ,  $r\forall$  e a regra do *corte*. A regra do corte se destaca por ser a única regra que, quando a prova é construída

de baixo para cima, permite a introdução de fórmulas que não estão presentes no sequente raiz da árvore de prova.

**Definição 26** (*Regra do corte*) (*GIRARD; TAYLOR; LAFONT, 1989*): *Seja  $\Gamma$  sequentes e  $\alpha$  um fórmula arbitrária.  $\Gamma \vdash \alpha$ , se e somente se, existe uma prova em CS de  $\alpha$  cujas folhas ou são axiomas lógicos ou são fórmulas obtidos pela substituição de fórmulas pertencentes a  $\Gamma$ , onde a regra do corte é somente aplicada com uma premissa sendo um axioma.*

As demais regras tem como característica que todas as fórmulas presentes nos nós intermediários são subfórmulas das fórmulas presentes no sequente raiz, sendo essa uma característica fundamental para a criação de provadores automáticos de teoremas. As provas livre de corte são essenciais na criação dos provadores. Baseado nisso, para se obter provas livre do corte é necessário usar o principal teorema de Gentzen (1935), o **Teorema da Eliminação do Corte** que diz:

**Teorema 1** (*Teorema da Eliminação do Corte*): *Toda Prova no cálculo de sequentes pode ser construída sem a regra do corte, não existindo prejuízo na validade das provas.*

Em outras palavras, o Teorema 1 estabelece que, mesmo sem utilizar a regra do corte, é possível construir provas válidas em um sistema lógico. Uma implicação imediata desse Teorema é a propriedade da subfórmula (apresentada na definição 25).

Já as regras  $l\exists$  e  $r\forall$  possuem uma condicionante para evitar dedução de falácias, conhecida como restrição de autovariável. A restrição de autovariável (*Eigenvariable*) declara que as variáveis que aparecem pelas regras  $l\exists$  e  $r\forall$  devem ser distintas de qualquer outra variável presente em passos anteriores da prova. Ao aplicar as regras as  $l\exists$  e  $r\forall$ , a restrição de autovariável garante que as variáveis que estão sendo quantificadas não entrem em conflito com outras variáveis na prova, ajudando a manter a correção e a clareza da prova e garantindo que as variáveis usadas nesses quantificadores sejam limitadas localmente dentro de seus escopos específicos. O exemplo 4 ilustra a tentativa de validar uma fórmula que contem uma falácia. Com esse exemplo, é possível observar a propriedade da restrição de autovariável.

### 3.2.1 Exemplos

A seguinte notação é utilizada nos exemplos dessa seção:

- $P$  e  $C$  são predicados,  $P$  com aridade 1 e  $C$  com aridade 0;
- $x$  e  $y$  são variáveis; e
- $a$  é uma contante.

**Exemplo 1** —  $\vdash \forall.x (\forall.y Py \rightarrow Px)$

Figura 4 – Árvore de prova da Fórmula 1

$$\frac{\frac{\frac{\overline{Pa \vdash Pa} (=)}{\forall.y Py \vdash Pa} (l\forall)}{\vdash \forall.y Py \rightarrow Pa} (r\rightarrow)}{\vdash \forall.x (\forall.y Py \rightarrow Px)} (r\forall)$$

**Fonte:** O autor (2023)

**Exemplo 2** —  $\vdash \forall.x (Px \rightarrow C) \rightarrow (\exists.x Px \rightarrow C)$

Figura 5 – Árvore de prova da Fórmula 2

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{Pa \vdash Pa} (=)}{Pa, Pa \rightarrow C \vdash C} (l\rightarrow)}{Pa, \forall.x (Px \rightarrow C) \vdash C} (l\forall)}{\forall.x (Px \rightarrow C), Pa \vdash C} (lp)}{\forall.x (Px \rightarrow C), \exists.x Px \vdash C} (l\exists)}{\forall.x (Px \rightarrow C) \vdash \exists.x Px \rightarrow C} (r\rightarrow)}{\vdash \forall.x (Px \rightarrow C) \rightarrow (\exists.x Px \rightarrow C)} (r\rightarrow)$$

**Fonte:** O autor (2023)

**Exemplo 3** —  $\exists.xPx \rightarrow C \vdash \forall.x (Px \rightarrow C)$

Figura 6 – Árvore de prova da Fórmula 3

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{Pa \vdash Pa} (=)}{Pa \vdash \exists.x Px} (r\exists) \\
 \frac{Pa \vdash \exists.x Px}{Pa \vdash C, \exists.x Px} (rw) \\
 \frac{\vdash Pa \rightarrow C, \exists.x Px}{\vdash \forall.x (Px \rightarrow C), \exists.x Px} (r\rightarrow) \\
 \frac{\vdash \forall.x (Px \rightarrow C), \exists.x Px}{\vdash \exists.x Px, \forall.x (Px \rightarrow C)} (r\forall) \\
 \frac{\vdash \exists.x Px, \forall.x (Px \rightarrow C)}{\exists.x Px \rightarrow C \vdash \forall.x (Px \rightarrow C), \forall.x (Px \rightarrow C)} (rp) \\
 \frac{\exists.x Px \rightarrow C \vdash \forall.x (Px \rightarrow C), \forall.x (Px \rightarrow C)}{\exists.x Px \rightarrow C \vdash \forall.x (Px \rightarrow C)} (rc)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\overline{C \vdash C} (=)}{C, Pa \vdash C} (lw) \\
 \frac{C, Pa \vdash C}{C \vdash Pa \rightarrow C} (r\rightarrow) \\
 \frac{C \vdash Pa \rightarrow C}{C \vdash \forall.x (Px \rightarrow C)} (r\forall)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

**Exemplo 4** — *Validação de uma formula não valida:*  $\vdash \exists.xP(x) \rightarrow \forall.xP(x)$

Figura 7 – Árvore de prova da Fórmula 4

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{P(a) \vdash P(b)} (\neq)}{P(a) \vdash \forall.xP(x)} (r\forall) \\
 \frac{P(a) \vdash \forall.xP(x)}{\exists.xP(x) \vdash \forall.xP(x)} (l\exists) \\
 \frac{\exists.xP(x) \vdash \forall.xP(x)}{\vdash \exists.xP(x) \rightarrow \forall.xP(x)} (r\rightarrow)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

## 4 CÁLCULO DE SEQUENTES PARA LÓGICA DE DESCRIÇÕES

Esta seção apresenta dois cálculos de sequentes para a lógica de descrições  $\mathcal{ALC}$ . A motivação de usar o CS no contexto da  $DL$  está presente no artigo *Using Patterns to Explain Inferences in  $\mathcal{ALCHI}$*  (DENG; HAARSLEV; SHIRI, 2007), que aponta o cálculo desenvolvido por Gentzen (1935) como uma maneira natural de explicar a subsunção. Antes de apresentar esses cálculos, é importante definir a notação que será utilizada:

- $\alpha$  e  $\beta$ : Um conceito arbitrário, uma instancia de conceito arbitrário, uma relação arbitrária, ou uma instancia de relação arbitrária;
- $\Gamma, \Delta, \Sigma$  e  $\Pi$ : Representam lista arbitrárias de elementos  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- $r$ : Representa uma relação binária em  $DL$ ;
- A semântica e sintaxe seguirá o que foi definido em 2.1.2 e 2.1.1, respectivamente.

**Definição 27** *Sequente em  $DL$* : Para a lógica de descrições, a estrutura do sequente apresentada na definição 21 é representada como:

$$\prod_{i=0}^m \alpha_i \vdash \bigsqcup_{j=0}^n \beta_j \quad (4.1)$$

onde  $m$  e  $n \in \mathbb{N}$ ;

A representação apresentada na definição acima preserva o significado semântico do cálculo de sequente da lógica de primeira ordem.

### 4.1 CÁLCULO DE SEQUENTES PARA $\mathcal{ALC}$ PROPOSTO POR BORGIDA ET AL.

Os cálculos de sequentes axiomatizam a relação de consequência lógica, traçando um paralelo óbvio com a relação de subsunção, um conceito importante para a representação e os cálculos  $DL$  (PALMEIRA; FREITAS; OTTEN, 2019). Sabendo disto, Borgida, Franconi e Horrocks (2000) construíram um conjunto de regras como uma extensão do cálculo sequencial padrão a fim de usar no contexto do fragmento  $DL\text{-}\mathcal{ALC}$  para inferências de subsunção. O objetivo desse conjunto de regras é simular o comportamento do raciocínio humano Deng, Haarslev e Shiri (2007).

Borgida et al. (2000) classificou como “menos naturais”, no contexto de  $DLs$ , as regras lógicas e estruturas do cálculo de sequentes em sua concepção original que movem as fórmulas de um lado da *turnstile* para o outro.

Na proposta apresentada por estes autores não existem regras para a implicação, pois o objetivo do cálculo é realizar inferências na subsunção, e como visto na tabela

1 a implicação pode ser entendida como subsunção, logo a  $\sqsubseteq$  é diretamente convertida para *turnstile* e para subsunções múltiplas os parênteses auxiliam na identificação das subsunções principais<sup>1</sup>.

Os autores dessa propostas classificaram como “menos naturais”, no contexto de *DLs*, as regras lógicas e estruturas do cálculo de sequentes em sua concepção original que movem as fórmulas de um lado da *turnstile* para o outro. Dessa forma, não criaram regras com essa característica, preservando a estrutura da subsunção original. Para contornar a decisão de não mover as fórmulas em relação ao  $\vdash$ , foram criadas regras nas quais a negação é inserida na frente dos símbolos lógicos  $\Box$  e  $\sqcup$ , eliminando as regras de negação  $l\neg$ ,  $r\neg$ , que mudam os termos do lado esquerdo para o lado direito (e na direção inversa também). Silva (2017) separou esse cálculo em 3 partes, onde as duas primeiras descrevem os conjuntos de regras, enquanto a última descreve o conjunto de axiomas:

- (*Regras para fórmulas proposicionais*): as regras  $\Box$  e  $\sqcup$  têm um par homólogo para negação ( $\neg\Box$ ,  $\neg\sqcup$ ), enquanto a regra de negação ( $\neg$ ) é modificada para uma negação dupla ( $\neg\neg$ ). Formando cinco regras para fórmulas proposicionais do lado esquerdo e lado direito;
- (*Regras para fórmulas quantificadas*): assim como as regras anteriores, as regras com quantificadores possuem a negação na frente do  $l\forall$  e  $r\exists$ , gerando as regras  $l\neg\forall$  e  $r\neg\exists$ . Existem quatro regras de quantificação, não contendo as regras  $r\forall$  e  $l\exists$  e nem seu homólogos negados. Existe uma condição para a aplicação das regras  $\forall$  e  $\exists$ . A condição declara que a regra é aplicável se todas as fórmulas universais e existenciais homólogas estão "reunidas" nos lados esquerdo e direito do sequente na pré-condição. A regra é então aplicada uma única vez;
- (*Axiomas de terminação*): diferentemente do cálculo de sequentes mostrado na figura 3 onde existe apenas o axioma  $\alpha \vdash \alpha$ , neste cálculo existem seis axiomas de terminação permitidos. Isso ocorre devido a escolha dos autores em não desenvolver as regras da  $\neg$ , onde ocorreria uma mudança das fórmulas do antecedente do sequente para o sucedente ou vice e versa. Portanto, os axiomas de terminação adicionais são necessários para garantir a finalização da validação.

Como informado anteriormente, não existem regras para manipular expressões que contém múltiplas subsunções. Para contornar essa limitação Silva (2017) incrementou ao cálculo de Borgida et al. (2000) a regra do corte, ausente no cálculo original<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Neste trabalho as subsunções que não são as principais serão convertida para sua equivalência apresentada em 2.1.4

<sup>2</sup> seguindo o que foi estabelecido da teorema 1, é possível propor que *Se existe uma prova na lógica clássica para sequente, então é possível provar o mesmo em lógica clássica com corte.*

Figura 8 – Regras para  $\mathcal{ALC}$  proposto Borgida, Franconi e Horrocks**Regras para Fórmulas**

$$\begin{array}{l}
\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \sqcap \beta \vdash \Delta} (l\sqcap) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \sqcup \beta, \Delta} (r\sqcup) \\
\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \sqcup \beta \vdash \Delta} (l\sqcup) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \sqcap \beta, \Delta} (r\sqcap) \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \neg\beta \vdash \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \sqcap \beta) \vdash \Delta} (l\neg\sqcap) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\alpha, \neg\beta, \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\alpha \sqcap \beta), \Delta} (r\neg\sqcap) \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \sqcup \beta) \vdash \Delta} (l\neg\sqcup) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \neg\beta, \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\alpha \sqcup \beta), \Delta} (r\neg\sqcup) \\
\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash \Delta} (l\neg\neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha, \Delta} (r\neg\neg) \\
\frac{\Gamma', \beta \vdash \Delta'}{\Gamma, \exists r.\beta \vdash \Delta} (l\exists) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \beta, \Delta'}{\Gamma \vdash \forall r.\beta, \Delta} (r\forall) \\
\frac{\Gamma', \neg\beta \vdash \Delta'}{\Gamma, \neg\forall r.\beta \vdash \Delta} (l\neg\forall) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \neg\beta, \Delta'}{\Gamma \vdash \neg\exists r.\beta, \Delta} (r\neg\exists)
\end{array}$$

onde  $\Gamma' = \{\alpha \mid \forall r.\alpha \in \Gamma\} \cup \{\neg\alpha \mid \neg\exists r.\alpha \in \Gamma\}$ , e  $\Delta' = \{\alpha \mid \exists r.\alpha \in \Delta\} \cup \{\neg\alpha \mid \neg\forall r.\alpha \in \Delta\}$

**Axiomas de Terminação**

$$\begin{array}{l}
\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta \quad (=) \qquad \Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\alpha, \Delta \quad (=) \\
\Gamma, \neg\alpha, \alpha \vdash \Delta \quad (l\uparrow) \qquad \Gamma \vdash \neg\alpha, \alpha, \Delta \quad (r\uparrow) \\
\Gamma, \perp \vdash \Delta \quad (l\perp) \qquad \Gamma, \top \vdash \Delta \quad (r\top)
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \alpha, \Sigma \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \Delta, \Pi} (cut)$$

**Fonte:** Borgida et al. (2000)

**4.1.1 Exemplos**

Abaixo seguem alguns exemplos de verificação da validade de fórmulas  $\mathcal{ALC}$  usando o cálculo de seqüentes apresentado por Borgida et al. (2000):

**Exemplo 5** —  $\exists hasPat.Cat \sqsubseteq CatOwner, OldLady \sqsubseteq \exists hasPat.Animal \sqcap \forall hasPat.Cat \vdash OldLady \sqsubseteq CatOwner$

- Obs.: por questão de organização a árvores seguirá a seguinte representação:  $hasPat = h$ ;  $Cat = C$ ;  $CatOwner = CO$ ;  $OldLady = O$ ;  $Animal = A$ .

Figura 9 – Exemplo 5 solucionado com CS proposto por Borgida et al. (2000) usando a regra do corte

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A, C \vdash C} (=)}{\exists h.A, \exists h.C \vdash \exists h.C} (l\exists)}{\exists h.A \sqcap \exists h.C \vdash \exists h.C} (l\sqcap)}{OL \vdash \exists h.C} \quad \frac{OL \vdash \exists h.A \sqcap \exists h.C}{O \vdash CO} (cut) \quad \frac{\exists h.C \vdash CO}{O \vdash CO} (cut)$$

**Fonte:** O Autor (2023)

**Exemplo 6** —  $\exists child.\top \sqcap \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \sqsubseteq \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)$

Figura 10 – Exemplo 6 solucionado com CS proposto por Borgida et al. (2000)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\top, Doctor, \neg Lawyer \vdash Rich, Doctor} (=)}{\top, \neg\neg Doctor, \neg Lawyer \vdash Rich, Doctor} (l\neg\neg)}{\top, \neg\neg Doctor, Lawyer \vdash Rich \sqcup Doctor} (r\sqcup)}{\top, \neg\neg Doctor, \neg\neg Doctor, \neg\neg Lawyer \vdash \forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (r\forall)}{\top, \neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (l\neg\sqcup)}{\frac{\exists child.\top, \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)}{\exists child.\top \sqcap \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (l\exists)} (l\sqcap)$$

**Fonte:** O Autor (2023)



## 4.2 CÁLCULO DE SEQUENTES PARA $\mathcal{ALC}$ PROPOSTO POR RADEMAKER

Rademaker (2010) no trabalho *A Proof Theory for Description Logics*<sup>3</sup> apresentou uma proposta de cálculo de sequentes para axiomatização da subsunção para lógicas de descrições. Este sistema foi desenvolvido com o intuito de funcionar como uma extensão da *DL* com construtores de papéis e subsunções de papéis. No cálculo é definido o conceito de rótulos, que pode ser entendido como uma lista de nomes de papéis para os quantificadores existenciais e universais. A sintaxe dos rótulos pode ser encontrada na figura 12, onde  $R$  é usado para representar os nomes de papéis atômicos,  $L$  a lista de rótulos e  $\phi_c$  para descrições de conceitos de  $\mathcal{ALC}$  (com exceção da subsunção e equivalência).

Figura 12 – Sintaxe dos rótulos

$$L \rightarrow \forall R, L \mid \exists R, L \mid \emptyset$$

$$\phi_{lc} \rightarrow {}^L\phi_c$$

$$\phi_c \rightarrow \top \mid \perp \mid A \mid \neg\phi_c \mid \phi_c \sqcap \phi_c \mid \phi_c \sqcup \phi_c \mid \exists R.\phi_c \mid \forall R.\phi_c$$

**Fonte:** Rademaker (2010)

**Definição 28** (*Equivalência entre  $\mathcal{ALC}$  e rótulos*): Os conceitos rotulados têm uma semântica equivalente aos conceitos  $\mathcal{ALC}$ . A lista de rótulos pode ser entendida como os prefixos dos papéis de um conceito.

$$\bullet \text{ Ex: } \exists R_2.\forall Q_2.\forall R_1.\forall Q_1.\alpha \equiv \exists R_2.\forall Q_2.\forall R_1.\forall Q_1.\alpha$$

Rademaker, Haeusler e Chalub (2018) apontam que esse sistema pode melhorar a extração de conteúdo computacional das provas de *DLs* para fins de explicação das provas. Alguns pontos sobre os rótulos valem ser destacados (RADEMAKER, 2010):

- Os rótulos podem ser entendidos como artefatos sintáticos do sistema, o que significa que os conceitos rotulados e os equivalentes em *DL- $\mathcal{ALC}$*  têm as mesmas semânticas;
- Sempre que um papel é promovido a rótulo, as regras do cálculo podem compor ou decompor a descrição do conceito, assim, preservando o prefixo do papel armazenado como rótulo (funcionando com uma espécie de “contexto” onde ocorre a manipulação de conceitos).

Como informado na definição 28, qualquer conceito rotulado possui um conceito equivalente em  $\mathcal{ALC}$ , a semântica de um conceito rotulado pode ser obtida por uma transformação formal para um conceito  $\mathcal{ALC}$ . A transformação formal é dada pela função  $\sigma$  que

<sup>3</sup> Tradução do inglês: Uma Teoria de Prova para Lógicas de Descrição.

recebe um conceito rotulado e retorna um conceito  $\mathcal{ALC}$ . Sendo  $\alpha$  um do conceito  $\mathcal{ALC}$ , a função  $\sigma$  é recursivamente definida como:

Figura 13 – Semântica dos rótulo

$$\begin{aligned}\sigma(\emptyset\alpha) &= \alpha \\ \sigma(\forall R, L\alpha) &= \forall R.\sigma(L\alpha) \\ \sigma(\exists R, L\alpha) &= \exists R.\sigma(L\alpha)\end{aligned}$$

**Fonte:** Rademaker (2010)

Além do que foi definido no início da seção 4, existem outras definições que valem ser destacadas para este CS:

- $\delta_i$  e  $\gamma_i$  representam conceitos rotulados;
- $L\Gamma$ : lista de fórmulas rotuladas no formato  $L\gamma_0, \dots, L\gamma_k$ , para  $\gamma \in \Gamma$ ;
- $+\forall R\gamma$ ,  $+\exists R\gamma$ ,  $+\forall R\Gamma$  e  $+\exists R\Gamma$ : representa a adição de um rótulo  $\forall R$  ou  $\exists R$  de um determinado papel  $R$  na frente da lista de rótulos;
- $\exists L\alpha$  e  $\forall L\alpha$ : todos os rótulos de  $L$  são quantificados existenciais e quantificados universais, respectivamente;
- $\neg\exists L\alpha \equiv \forall L\neg\alpha$  e  $\neg\forall L\alpha \equiv \exists L\neg\alpha$ ;
- Assim como informado na subseção anterior, neste trabalho as subseções que não são as principais serão convertida para sua equivalência apresentada em 2.1.4.

Na figura 14 são apresentadas as regras  $DL\text{-}\mathcal{ALC}$  proposta por Rademaker (2010). Assim como no CS da lógica de primeira ordem, as regras estão segmentadas em **Axiomas de Terminação**, **Regras Lógicas** e **Regras Estruturais**.

Figura 14 – Regras para  $\mathcal{ALC}$  proposto por Rademaker  
**Axiomas de Terminação**

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} (=)$$

$$\frac{}{\perp \vdash \alpha} (=)$$

**Regras Estruturais**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \gamma \vdash \Delta} \text{ (weak-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \gamma, \Delta} \text{ (weak-r)}$$

$$\frac{\Gamma, \gamma, \gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \gamma \vdash \Delta} \text{ (contraction-l)}$$

$$\frac{\Gamma, \vdash \gamma, \gamma, \Delta}{\Gamma \vdash \gamma, \Delta} \text{ (contraction-r)}$$

$$\frac{\Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \gamma_2, \gamma_1 \vdash \Delta} \text{ (perm-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_2, \Delta}{\Gamma \vdash \gamma_2, \gamma_1, \Delta} \text{ (perm-r)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, {}^L\alpha \quad {}^L\alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (cut)}$$

**Regras Lógicas**

$$\frac{\Gamma, {}^{L, \forall R}\alpha \vdash \Delta}{\Gamma, {}^L(\forall R.\alpha) \vdash \Delta} \text{ (\forall-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^{L, \forall R}\alpha, \Delta}{\Gamma, \vdash {}^L(\forall R.\alpha), \Delta} \text{ (\forall-r)}$$

$$\frac{\Gamma, {}^{L, \exists R}\alpha \vdash \Delta}{\Gamma, {}^L(\exists R.\alpha) \vdash \Delta} \text{ (\exists-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^{L, \exists R}\alpha, \Delta}{\Gamma \vdash {}^L(\exists R.\alpha), \Delta} \text{ (\exists-r)}$$

$$\frac{\Gamma, {}^L\alpha, {}^L\beta \vdash \Delta}{\Gamma, {}^L(\alpha \sqcap \beta) \vdash \Delta} \text{ (\sqcap-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^L\alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash {}^L\beta, \Delta}{\Gamma \vdash {}^L(\alpha \sqcup \beta), \Delta} \text{ (\sqcap-r)}$$

$$\frac{\Gamma, {}^L\alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, {}^L\beta \vdash \Delta}{\Gamma, {}^L(\alpha \sqcup \beta) \vdash \Delta} \text{ (\sqcup-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^L\alpha, {}^L\beta, \Delta}{\Gamma \vdash {}^L(\alpha \sqcap \beta), \Delta} \text{ (\sqcup-r)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^{-L}\alpha, \Delta}{\Gamma, {}^L\neg\alpha \vdash \Delta} \text{ (\neg-l)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash {}^{-L}\alpha, \Delta}{\Gamma, {}^L\neg\alpha \vdash \Delta} \text{ (\neg-r)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{{}^{+\exists R}\Gamma \vdash {}^{+\exists R}\Delta} \text{ (prom-}\exists\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{{}^{+\forall R}\Gamma \vdash {}^{+\forall R}\Delta} \text{ (prom-}\forall\text{)}$$

**Fonte:** Rademaker (2010)

### 4.2.1 Exemplos

Abaixo seguem alguns exemplos de verificação da validade de fórmulas  $\mathcal{ALC}$  usando o cálculo de seqüentes apresentado por Rademaker (2010):

**Exemplo 7** —  $\exists child.\top \sqcap \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \sqsubseteq \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)$

Figura 15 – Exemplo 7 solucionada com CS proposto por Rademaker (2010)

$$\begin{array}{c}
\frac{}{Doctor \vdash Doctor} (=) \\
\frac{}{Doctor \vdash Rich, Doctor} (weak-r) \\
\frac{}{Doctor \vdash Rich \sqcup Doctor} (\sqcup-r) \\
\frac{}{\forall child Doctor \vdash \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (prom-\forall) \\
\frac{}{\forall child Doctor \vdash \exists child Lawyer, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (weak-r) \\
\frac{}{\vdash \exists child \neg Doctor, \exists child Lawyer, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (\neg-1) \\
\frac{}{\top \vdash \exists child \neg Doctor, \exists child Lawyer, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (weak-1) \\
\frac{}{\top \vdash \exists child \neg Doctor, \exists child.Lawyer, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (\exists-r) \\
\frac{}{\top \vdash \exists child \neg Doctor, \exists child.Lawyer, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (\exists-r) \\
\frac{}{\top \vdash (\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer), \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (\sqcup-r) \\
\frac{}{\exists child \top \vdash \exists child ((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)), \exists child, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (prom-\exists) \\
\frac{}{\exists child \top, \forall child \neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child, \forall child (Rich \sqcup Doctor)} (\neg-1) \\
\frac{}{\exists child \top, \forall child \neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child \forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (\forall-r) \\
\frac{}{\exists child \top, \forall child \neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (\exists-r) \\
\frac{}{\exists child \top, \forall child \neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (\forall-1) \\
\frac{}{\exists child.\top, \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (\exists-1) \\
\frac{}{\exists child.\top \sqcap \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \vdash \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)} (\top-1)
\end{array}$$

**Fonte:** Rademaker (2010)

**Exemplo 8** —  $\exists hasPat.Cat \sqsubseteq CatOwner, OldLady \sqsubseteq \exists hasPat.Animal \sqcap \forall hasPat.Cat \vdash OldLady \sqsubseteq CatOwner$

- Obs.: por questão de organização a árvores seguirá a seguinte representação:  $hasPat = h$ ;  $Cat = C$ ;  $CatOwner = CO$ ;  $OldLady = O$ ;  $Animal = A$ .

Figura 16 – Exemplo 8 solucionado com CS proposto por Rademaker (2010) usando a regra do corte

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{C \vdash C} (=) \\
 \frac{}{A, C \vdash C} (weak-l) \\
 \frac{}{\exists h A, \exists h C \vdash \exists h C} (prom-\exists) \\
 \frac{}{\exists h A, \exists h C \vdash \exists h.C} (\exists-r) \\
 \frac{}{\exists h A, \exists h.C \vdash \exists h.C} (\exists-l) \\
 \frac{}{\exists h.A, \exists h.C \vdash \exists h.C} (\exists-l) \\
 \frac{}{\exists h.A \sqcap \exists h.C \vdash \exists h.C} (\sqcap-l) \\
 \frac{OL \vdash \exists h.C \quad OL \vdash \exists h.A \sqcap \exists h.C}{OL \vdash \exists h.C} cut \quad \frac{\exists h.C \vdash CO}{\exists h.C \vdash CO} cut \\
 \frac{}{O \vdash CO}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)



#### 4.2.1.1 Corretude do cálculo de sequente de Rademaker

A corretude do cálculo de sequente de Rademaker (2010) foi provada levando em consideração o significado intuitivo de cada sequente, preservando o significado da verdade. A estrutura do sequente seguirá o formato estabelecido na definição 27. Um sequente é considerado válido ou uma tautologia se e somente se seu correspondente em  $\mathcal{ALC}$  for verdadeira.

As fórmulas de uma lógica de descrições, presentes na TBox ou uma ontologia, no formato  $C \sqsubseteq D$  devem ser entendidas como  $C \Rightarrow D$  ( $C$  implica  $D$ ). As fórmulas rotuladas são utilizadas apenas durante o procedimento de prova, pois são consideradas passos intermediários.

**Teorema 2 Corretude** (RADEMAKER, 2010): *Considerando  $\Omega$  como um conjunto de sequentes (uma teoria ou uma TBox) uma prova de  $\Omega$  em um formato de CS sequentes são interpretados como sequentes iniciais (além dos axiomas lógicos). A corretude do cálculo de sequente afirma que se um sequente  $\Delta \Rightarrow \Gamma$  tem uma prova de  $\Omega$ , então  $\Delta \Rightarrow \Gamma$  é satisfeito por toda interpretação que satisfaz  $\Omega$ . Estrito como:*

$$\text{se } \Omega \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma \text{ então } \Omega \models \prod_{i \in \Delta} \alpha_i \vdash \bigsqcup_{j \in \Gamma} \beta_j \quad (4.2)$$

No Teorema acima,  $\Delta^{\mathcal{I}}$  é uma abreviação para a interpretação de conjunto da conjunção de conceitos em pertencentes a  $\Delta$  ( $\bigcap_{i \in \Delta} \alpha_i^{\mathcal{I}}$ ), e  $\Gamma^{\mathcal{I}}$  como uma abreviação para a interpretação de conjunto da disjunção dos conceitos em  $\Gamma$ ,  $\bigcup_{j \in \Delta} \beta_j^{\mathcal{I}}$ .

**Definição 29 Axiomatização de  $\mathcal{ALC}$**  (RADEMAKER, 2010):

$$\text{se } C \sqsubseteq D \text{ então } \exists R.C \sqsubseteq \exists R.D \quad (4.3)$$

$$\text{se } C \sqsubseteq D \text{ então } \forall R.C \sqsubseteq \forall R.D \quad (4.4)$$

$$\forall R.(\alpha \sqcap \beta) \equiv \forall R.\alpha \sqcap \forall R.\beta \quad (4.5)$$

$$\forall R.\top \equiv \top \quad (4.6)$$

$$\exists R.\alpha \equiv \neg \forall R.\alpha \quad (4.7)$$

$$\forall R.\alpha \equiv \neg \exists R.\alpha \quad (4.8)$$

$$\exists R.(\alpha \sqcup \beta) \equiv \exists R.\alpha \sqcup \exists R.\beta \quad (4.9)$$

$$\exists R.\perp \equiv \perp \tag{4.10}$$

**Prova:** Rademaker (2010) demonstrou que o Teorema 2 por indução no comprimento das provas de  $\Omega$ . O comprimento de uma prova de  $\Omega$  é o número de aplicações de qualquer regra de derivação do cálculo em uma abordagem de "top-down".

**Caso base:** Provas com comprimento zero são provas  $\Omega \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma$  em que  $\Delta \Rightarrow \Gamma$  ocorre em  $\Omega$ . Nesse caso, é fácil ver que o teorema é válido. Para sequentes iniciais, como os axiomas lógicos  $C \Rightarrow C$ , é fácil ver que  $C^{\mathcal{I}} \subseteq C^{\mathcal{I}}$  para toda interpretação  $\mathcal{I}$ , uma vez que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.

**Hipótese indutiva:** Como hipótese indutiva, para provas de comprimento  $n$ , o teorema é válido. Agora é suficiente mostrar que cada uma das regras de derivação preserva a verdade. Isto é, se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também deve ser.

**Regra do Corte:** Dado os sequentes  $\Delta_1 \Rightarrow \Gamma_1, {}^L C$  e  ${}^L C, \Delta_2 \Rightarrow \Gamma_2$ , então, pela hipótese, eles são válidos e, portanto,

$$\bigcap_{i \in \Delta} \alpha_i^{\mathcal{I}} \subseteq \bigcup_{j \in \Gamma} \beta_j^{\mathcal{I}} \cup {}^L C^{\mathcal{I}}$$

e

$${}^L C^{\mathcal{I}} \cap \bigcap_{i \in \Delta} \alpha_i^{\mathcal{I}} \subseteq \bigcup_{j \in \Gamma} \beta_j^{\mathcal{I}}$$

Seja  $\Delta_1^{\mathcal{I}} = \bigcap_{i \in \Delta_1} \alpha_i^{\mathcal{I}}$ ,  $\Gamma_1^{\mathcal{I}} = \bigcup_{j \in \Gamma_1} \beta_j^{\mathcal{I}}$ ,  $\Delta_2^{\mathcal{I}} = \bigcap_{i \in \Delta_2} \alpha_i^{\mathcal{I}}$ ,  $\Gamma_2^{\mathcal{I}} = \bigcup_{j \in \Gamma_2} \beta_j^{\mathcal{I}}$  e  $X = {}^L C^{\mathcal{I}}$ . Agora se faz necessário mostrar que a aplicação da regra de corte preserva a inclusão de conjuntos. Em outras palavras, dado  $\Delta_1^{\mathcal{I}} \subseteq (\Gamma_1^{\mathcal{I}} \cup X)$  e  $(X \cap \Delta_2^{\mathcal{I}}) \subseteq \Gamma_2^{\mathcal{I}}$ , como resultado é deve-se ter  $(\Delta_1^{\mathcal{I}} \cap \Delta_2^{\mathcal{I}}) \subseteq (\Gamma_1^{\mathcal{I}} \cap \Gamma_2^{\mathcal{I}})$ . O que é fácil de mostrar usando a teoria de conjuntos padrão.

**Regras weak-l e weak-r:** Dado o sequente  $\Delta \Rightarrow \Gamma$ , pela hipótese indutiva obtém-se  $\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$ . Pela teoria dos conjuntos,  $\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq (\Gamma^{\mathcal{I}} \cup X)$  e  $(X \cap \Delta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  para qualquer interpretação de  $\alpha \in X$ . No primeiro caso, tem-se a interpretação de  $\Delta, \alpha \Rightarrow \Gamma$ . No segundo caso, tem-se a interpretação de  $\Delta \Rightarrow \Gamma, \alpha$ . Isso é suficiente para mostrar a corretude de ambas as regras.

**Regras perm-l e perm-r:** Para Rademaker (2010), pela definição do significado de um sequente e sua semântica, é fácil perceber que ambas as regras são corretas. A ordem das fórmulas em ambos os lados de um sequente não altera a semântica do sequente.

**Regras prom- $\forall$  e prom- $\exists$ :** A corretude da regra prom- $\exists$  é facilmente provada usando o axioma 4.3 e o axioma 4.9. A corretude da regra prom- $\forall$  é provada usando o axioma 4.4 e o axioma 4.5.

**Regras  $\forall$ -r,  $\forall$ -l,  $\exists$ -r e  $\exists$ -l:** A partir da definição 28, em todas essas quatro regras, tanto as premissas quanto as conclusões têm a mesma semântica (dada uma função  $\sigma$ ).

**Regras  $\sqcap$ -l e  $\sqcap$ -r:** Para provar a corretude dessas regras, será necessário usar o axioma 4.5 da *DL- $\mathcal{ALC}$*  referente à distributividade da restrição universal sobre a conjunção. Além disso, se faz necessário observar que ambas as regras possuem uma importante: a aplicação das regras  $\sqcap$ -l e  $\sqcap$ -r são restritas apenas à conceitos rotulados em que todos os rótulos são universalmente quantificados. Essa restrição nos permite aplicar o axioma 4.5 de forma indutiva.

Tomando a seqüência  $\Delta, {}^L\alpha, {}^L\beta, \Rightarrow \Gamma$  como hipótese válida, obtém-se:

$$(\Delta^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}}) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$$

Para mostrar que a regra ( $\sqcap$ -l) é correta, deve-se provar que  $\Delta, {}^L(\alpha \sqcap \beta) \Rightarrow \Gamma$  também é válida. Em outras palavras,  $\Delta^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L(\alpha \sqcap \beta))^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  é verdadeiro. É possível chegar a esse resultado através da definição de  $\sigma$ , o axioma 4.5 e a condição da regra que nos permite aplicar o axioma 4.5 sobre a lista de rótulos  $L$ .

Considerando a regra ( $\sqcap$ -r), pela hipótese de indução, as seqüências  $\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L\alpha$  e  $\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L\beta$  são válidas e, logo,

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \quad \text{e} \quad \Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}}$$

valem para todas as interpretações da função de interpretação ( $\cdot^{\mathcal{I}}$ ). Agora, supondo a aplicação da regra ( $\sqcap$ -r) sobre as duas seqüências acima, deve-se mostrar que  $\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L(\alpha \sqcap \beta)$  também é válida, ou seja,

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L(\alpha \sqcap \beta))^{\mathcal{I}}$$

é verdadeiro. Mas, pela teoria básica dos conjuntos, temos:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq ((\Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}}) \cap (\Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}}))$$

E pela lei distributiva:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cup (\sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}})$$

Por fim, pela definição de  $\sigma$ , o axioma 4.5 e a condição da regra, podemos concluir que a conclusão da regra é válida.

**Regras  $\sqcup$ -l e  $\sqcup$ -r:** A validade das regras  $\sqcup$ -l e  $\sqcup$ -r é comprovada com o suporte do axioma 4.9 e das regras anteriores já apresentada, aplicado de forma indutiva sobre as listas de rótulos. Como hipótese indutiva, os sequentes  $\Delta, {}^L\alpha \Rightarrow \Gamma$  e  $\Delta, {}^L\beta \Rightarrow \Gamma$  são válidos. Ou seja, dado  $\Delta^{\mathcal{I}} = \bigcap_{i \in \Delta} \sigma(\alpha_i)^{\mathcal{I}}$  e  $\Delta^{\mathcal{I}} = \bigcap_{i \in \Gamma} \sigma(\beta_i)^{\mathcal{I}}$ , obtém-se como verdade:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \quad \text{e} \quad \Delta^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$$

Considerando a aplicação da regra ( $\sqcup$ -l) nos sequentes  $\Delta, {}^L\alpha \Rightarrow \Gamma$  e  $\Delta, {}^L\beta \Rightarrow \Gamma$ , deve-se provar que o sequente resultante  $\Delta, {}^L(\alpha \sqcup \beta) \Rightarrow \Gamma$  também é válido:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \cap \sigma({}^L(\alpha \sqcup \beta))^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$$

Seguindo a hipótese e a teoria básica de conjuntos  $\Delta^{\mathcal{I}} \cap X_1 \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  e  $\Delta^{\mathcal{I}} \cap X_2 \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$ , então  $(\Delta^{\mathcal{I}} \cap X_1) \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \cap X_2) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$ . Aplicando nos dois sequentes:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \cap (\sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}}) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$$

e pelo axioma 4.9 aplicado indutivamente sobre a lista  $L$  conclui-se a semântica desejada do sequente resultante:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \cap (\sigma({}^L(\alpha \sqcup \beta))^{\mathcal{I}}) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$$

Para a regra ( $\sqcup$ -r), a hipótese indutiva é que  $\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L\alpha, {}^L\beta$  é válida. E assim, a seguinte afirmação deve ser verdadeira:

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}} \cup \sigma({}^L\beta)^{\mathcal{I}}$$

Pelo axioma 4.9, podemos reescrever como

$$\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \sqcup \sigma({}^L(\alpha \sqcup \beta))^{\mathcal{I}}$$

o que é a semântica desejada do sequente resultante para a regra  $\sqcup$ -r.

**Regras  $\neg$ -l e  $\neg$ -r:** Dado um conceito  ${}^L\alpha$  e uma interpretação  $\cdot^{\mathcal{I}}$ , define-se o conjunto  $X = \sigma({}^L\alpha)^{\mathcal{I}}$  e a interpretação de sua negação,  $\sigma({}^L\neg\alpha)^{\mathcal{I}}$ , será o conjunto  $\overline{X} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus X$ .

Para a regra  $\neg$ -l, a hipótese indutiva é que a premissa  $\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L\alpha$  é válida. O que significa que  $\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq (\Gamma^{\mathcal{I}} \cup X)$ . Pela teoria básica de conjuntos, isso implica que  $(\Delta^{\mathcal{I}} \cap \overline{X}) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$ , que é a interpretação da conclusão.

Para a regra  $\neg$ -r, a hipótese indutiva é que a premissa  $\Delta, {}^L\alpha \Rightarrow \Gamma$  é válida. O que significa que  $(\Delta^{\mathcal{I}} \cap X) \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$ . Pela teoria básica de conjuntos, isso implica que  $\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq (\Gamma^{\mathcal{I}} \cup \overline{X})$ , que é a interpretação da conclusão conforme desejado.

## 5 PROPOSTAS DE CÁLCULO DE SEQUENTES PARA *DL-ALCH*

### 5.1 PROPOSTA

Como visto na seção 4, já existem cálculos de sequentes com foco na *DL*, porém nesses CS existem pontos que não tangenciam certos elementos da lógica de descrições, como: a *Abox*<sup>1</sup>, subsunções, equivalência e algumas regras lógicas presentes no cálculo original apresentado por Gentzen (1935). Tendo essas informações como ponto de partida, o capítulo corrente tem como objetivo apresentar um cálculo de sequentes composto por um conjunto de regras capaz de trabalhar com todos os elementos da *DL-ALCH* e da *DL-ALC*.

O cálculo proposto é apresentado na figura 18 e fundamenta-se no fato da *DL* ser um fragmento da lógica de primeira ordem (como visto na seção 2.1), com isso, o conjunto de regras apresentado neste estudo foi derivado diretamente do cálculo de sequentes apresentado por Gentzen (1935) e adaptado para o contexto da lógica de descrições. Algumas notações que serão usadas para a compreensão do cálculo:

- $\alpha$  e  $\beta$ : Um conceito arbitrário, uma instancia de conceito arbitrário, uma relação arbitrária, ou uma instancia de relação arbitrária;
- $x$  e  $y$ : Variáveis arbitrárias;
- $c, d, j$  e  $k$ : Constantes arbitrárias<sup>2</sup>;
- $r(x, y)$ : Representa uma relação binária em *DL*;
- $\Gamma, \Delta, \Sigma$  e  $\Pi$ : Representam listas arbitrárias de elementos  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- O sequente em *DL* segue a seguinte estrutura:

$$\prod_{i=0}^m \alpha_i \vdash \prod_{j=0}^n \beta_j \quad (5.1)$$

onde  $m$  e  $n \in \mathbb{N}$ ;

- A semântica e sintaxe seguirá o que foi definido em 2.1.2 e 2.1.1, respectivamente.

Abaixo encontra-se o conjunto de regras da proposta para cálculo de sequentes<sup>3,4</sup> e esse cálculo está segmentado em **Axioma de Terminação**, **Regras lógicas** e **Regras Estruturais**. Logo em seguida, estão alguns exemplos de expressões em *DL* validadas

<sup>1</sup> Também a *Rbox*, porém vai depender de qual formalismo está sendo investigado.

<sup>2</sup>  $j$  e  $k$  serão usadas, preferencialmente, para representar as constantes oriundas da restrição de auto-variável.

<sup>3</sup> As regras com restrição de autovariável serão discutidas na seção 5.2.4

<sup>4</sup> As regras *l-A* e *r-A* serão discutidas na seção 5.2.2

usando o cálculo de seqüentes proposto neste capítulo (os mesmos exemplos usados em 4.1.1 e 4.2.1):

Figura 18 – Regras para  $\mathcal{ALCH}$

**Axiomas de Terminação**

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta} (=) \qquad \frac{}{\Gamma, \alpha(t) \vdash \alpha(t), \Delta} (=)$$

**Regras Lógicas**

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \Delta} (l\neg)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \alpha, \Delta} (r\neg)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \sqcap \beta \vdash \Delta} (l_1 \sqcap)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \sqcup \beta, \Delta} (r_1 \sqcup)$$

$$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \sqcap \beta \vdash \Delta} (l_2 \sqcap)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \sqcup \beta, \Delta} (r_2 \sqcup)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Sigma, \beta \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma, \alpha \sqcup \beta \vdash \Delta, \Pi} (l\sqcup)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Sigma \vdash \beta, \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \alpha \sqcap \beta, \Delta, \Pi} (r\sqcap)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Sigma, \beta \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma, \alpha \sqsubseteq \beta \vdash \Delta, \Pi} (l\sqsubseteq)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \sqsubseteq \beta, \Delta} (r\sqsubseteq)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \sqsubseteq \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \equiv \beta \vdash \Delta} (l_1 \equiv)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \sqsubseteq \beta, \Delta \quad \Sigma \vdash \beta \sqsubseteq \alpha, \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \alpha \equiv \beta, \Delta, \Pi} (r\equiv)$$

$$\frac{\Gamma, \beta \sqsubseteq \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \equiv \beta \vdash \Delta} (l_2 \equiv)$$

$$\frac{\Gamma \vdash r(x, y), \Delta \quad \Sigma, \alpha(y) \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma, \forall r. \alpha \vdash \Delta, \Pi} (l\forall)$$

$$\frac{\Gamma, r(j, k) \vdash \alpha(k), \Delta}{\Gamma \vdash \forall r. \alpha, \Delta} (r\forall^*)$$

$$\frac{\Gamma, r(x, j), \alpha(j) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists r. \alpha \vdash \Delta} (l\exists^*)$$

$$\frac{\Gamma \vdash r(j, y), \Delta \quad \Sigma \vdash \alpha(y), \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \exists r. \alpha, \Delta, \Pi} (r\exists^*)$$

**Regras Estruturais**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} (l-w)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} (r-w)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} (l-c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} (r-c)$$

$$\frac{\Gamma, \beta, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta} (l-p)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta} (r-p)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} (lA)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha(x), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} (r-A)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha(j) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha(x) \vdash \Delta} (l-u[x/j])$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha(j), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha(x), \Delta} (r-u[x/j])$$

### 5.1.1 Exemplos

Abaixo seguem alguns exemplos de expressões em *DL* validadas usando a proposta de CS apresenta neste capítulo:

**Exemplo 9** —  $\exists hasPat.Cat \sqsubseteq CatOwner, OldLady \sqsubseteq \exists hasPat.Animal \sqcap \forall hasPat.Cat \vdash OldLady \sqsubseteq CatOwner$

- *Obs.:* por questão de organização a árvores seguirá a seguinte representação:  $hasPat = h$ ;  $Cat = C$ ;  $CatOwner = CO$ ;  $OldLady = O$ ;  $Animal = A$ .

Figura 19 – Exemplo 9 solucionado com CS proposto neste capítulo

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{C(j) \vdash C(j)} (=) \quad \frac{}{h(x, j) \vdash h(x, j)} (=) \\
 \frac{}{h(x, j) \vdash h(x, j)} (=) \quad \frac{h(x, j), \forall h.C \vdash C(j)}{\forall h.C, h(x, j) \vdash C(j)} (l-p) \\
 \frac{}{h(x, j) \vdash h(x, j)} (=) \quad \frac{h(x, j), \forall h.C \vdash C(j)}{\forall h.C, h(x, j) \vdash C(j)} (l-p) \\
 \frac{\forall h.C, h(x, j), h(x, j) \vdash \exists h.C}{\forall h.C, h(x, j) \vdash \exists h.C} (l-c) \\
 \frac{\forall h.C, h(x, j) \vdash \exists h.C}{\forall h.C, h(x, j), A(j) \vdash \exists h.C} (l-w) \\
 \frac{\forall h.C, h(x, j), A(j) \vdash \exists h.C}{\forall h.C, \exists h.A \vdash \exists h.C} (l\exists) \\
 \frac{}{CO \vdash CO} (=) \\
 \frac{\forall h.C, \exists h.A, \exists h.C \sqsubseteq CO \vdash CO}{\exists h.C \sqsubseteq CO, \exists h.C, \forall h.A \vdash CO} (l-p) \\
 \frac{\exists h.C \sqsubseteq CO, \exists h.A, \exists h.A \sqcap \forall h.C \vdash CO}{\exists h.C \sqsubseteq CO, \exists h.A \sqcap \forall h.C, \exists h.C \vdash CO} (l\sqcap) \\
 \frac{\exists h.C \sqsubseteq CO, \exists h.A \sqcap \forall h.C, \exists h.C \vdash CO}{\exists h.C \sqsubseteq CO, \exists h.A \sqcap \forall h.C \vdash CO} (l-c) \\
 \frac{}{O \vdash O} (=) \\
 \frac{\exists h.C \sqsubseteq CO, O, O \sqsubseteq \exists h.A \sqcap \forall h.C \vdash CO}{\exists h.C \sqsubseteq CO, O \sqsubseteq \exists h.A \sqcap \forall h.C, O \vdash CO} (r-p) \\
 \frac{\exists h.C \sqsubseteq CO, O \sqsubseteq \exists h.A \sqcap \forall h.C, O \vdash CO}{\exists h.C \sqsubseteq CO, O \sqsubseteq \exists h.A \sqcap \forall h.C \vdash O \sqsubseteq CO} (r\sqsubseteq)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

**Exemplo 10** —  $Professor \sqsubseteq (Person \sqcap UniversityEmployee) \sqcup (Person \sqcap \neg Student) \vdash Professor \sqsubseteq Person$

- *Obs.:* por questão de organização a árvores seguirá a seguinte representação:  $Professor = Pr$ ;  $Person = P$ ;  $UniversityEmployee = U$ ;  $Student = S$ .

**Exemplo 11** —  $\exists child.\top \sqcap \forall child.\neg((\exists child.\neg Doctor) \sqcup (\exists child.Lawyer)) \sqsubseteq \exists child.\forall child.(Rich \sqcup Doctor)$

Figura 20 – Exemplo 10 solucionado com CS proposto neste capítulo

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{P \vdash P}}{P \sqcap \neg S \vdash P} \text{ (}\neg\text{)} \quad \frac{\overline{P \vdash P}}{P \sqcap U \vdash P} \text{ (}\neg\text{)} \\
 \frac{(P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S) \vdash P, P}{(P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S) \vdash P} \text{ (}\sqcup\text{)} \quad \frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P} \text{ (=)} \\
 \frac{Pr, Pr \sqsubseteq (P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S) \vdash P}{Pr \sqsubseteq (P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S), Pr \vdash P} \text{ (}\neg\text{)} \quad \frac{\overline{Pr \vdash Pr}}{Pr \vdash Pr} \text{ (=)} \\
 \frac{Pr \sqsubseteq (P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S), Pr \vdash P}{Pr \sqsubseteq (P \sqcap U) \sqcup (P \sqcap \neg S) \vdash Pr \sqsubseteq P} \text{ (}\neg\text{)} \quad \frac{\overline{Pr \vdash Pr}}{Pr \vdash Pr} \text{ (}\neg\text{)}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)



## 5.2 DIFERENÇAS ENTRE O CS PROPOSTO E OS CÁLCULOS APRESENTADOS NO CAPÍTULO ANTERIOR

O CS proposto neste capítulo está segmentado em três partes, herança do CS da LPO: **Axioma de Terminação**, as **Regras Lógicas** e **Regras Estruturais**, como citado anteriormente. Para além do que foi descrito na seção 3.2, os conjuntos de regras têm como destaque:

- (*Axioma de Terminação*): A proposta de CS apresenta apenas uma regra de Axioma de Terminação. Essa regra está presente nos cálculos apresentados na seção 4 e no cálculo inicial apresentado por Gentzen (1935), porém nos cálculos apresentados por Rademaker (2010) e Borgida et al. (2000) existem mais Axiomas de Terminação (dois e seis, respectivamente). Aumentando a complexidade da explicação;
- (*Regras Lógicas*): As regras  $\sqcap, \sqcup$  e  $\neg$  da proposta são iguais ao dos cálculos apresentados na seção 4, com o diferencial das regras  $l\sqcap$  e  $r\sqcup$  passarem para o próximo nó apenas um dos elementos da expressão (em decorrência disso, existem as regras  $l_1\sqcap, l_2\sqcap, r_1\sqcup$  e  $r_2\sqcup$ ). Já as regras de *restrição por valor* ( $l\forall$  e  $r\forall$ ) e a *restrição existencial* ( $l\exists$  e  $r\exists$ ) têm o diferencial de, além de passar o conceito para o próximo nó, passar/expor a relação binária presente em expressões com os quantificadores  $\forall$  e  $\exists$  – uma solução diferente quando comparado com os cálculos apresentado por Borgida et al. (2000) e por Rademaker (2010). Outro ponto sobre as regras de restrições é que devido à inspiração ser o CS para LPO, as regras  $r\forall, l\exists$  e  $r\exists$  contêm a restrição de autovariável nas variáveis relacionada do conceito. Essas especificidades são discutidas na seção 5.2.4. Por fim, na proposta foram adicionadas regras para validar expressões com  $\sqsubseteq$  e  $\equiv$  que permitem o cálculo proposto investigar expressões além das subsunções, exemplificado na seção 5.2.2.
- (*Regras Estruturais*): O cálculo proposto nesta seção herdou as regras estruturais do CS da LPO: as regras de *Permutação* ( $l-p, r-p$ ), as regras de *Contração* ( $l-c, r-c$ ) e as regras de *Enfraquecimento* ( $l-w, r-w$ )<sup>5</sup> – Essas regras também estão presentes no CS de Rademaker (2010). Porém, durante o desenvolvimento da proposta foi observado que seria necessário criar regras para manipular diretamente à Abox, sendo essas as regras  $l-\mathcal{A}, r-\mathcal{A}, l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$  que serão discutidas na seção 5.2.2.

A seguir destacar-se-á de forma mais esmiuçada as principais diferenças entre os cálculos apresentados por Borgida et al. (2000) e Rademaker (2010), do capítulo anterior, e a proposta de CS apresentada na figura 18:

<sup>5</sup> a letra  $w$  foi escolhida por ser a abreviação da palavra *weak* do inglês

### 5.2.1 Regras Diretas

O desenvolvimento desta proposta teve ponto de partida a necessidade de validar expressões em  $DL$  usando os CS apresentados na seção 4, mas foi observado que não seria possível realizar algumas verificações de expressões com múltiplas subsunções, equivalências e instâncias de indivíduos sem realizar uma modificação nas expressões pelo uso de sentenças equivalentes ou remover/ignorar partes das expressões - isso pode ser visto nos exemplos: 13, 15, 17. Dessa forma, é possível atribuir como a principal contribuição do CS proposto neste trabalho a adição de regras diretas para validar sentenças em  $DL$  que estão além do contexto da subsunção, e ainda, preservando a expressão na forma original, diminuindo a complexidade e facilitando a explicabilidade.

### 5.2.2 Base de conhecimento

Em  $DL$  a base de conhecimento é composta pela Tbox e Abox (e Rbox na  $DL-ALCH$ , conforme a definição 3), porém os CS apontados na seção 4 possuem apenas regras para manipular a Tbox, ignorando totalmente a Abox (por serem focados na  $DL-ALLC$ , não existe a necessidade de regras para a Rbox).

O cálculo proposto foi criado tendo com um dos seus objetivos possuir regras capazes de abarcar todos os elementos da  $DL-ALLC$ . Levando em consideração isso, foram criadas as regras  $l-A$  e  $r-A$  para deixar explícito sintaticamente a variável de um conceito, essas regras então embasadas na definição 1. Já as regras  $l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$  têm a finalidade de aplicar a unificação de termos - O exemplo 12 mostra a aplicação dessas regras.

A unificação pode ser entendida como um processo de determinar se dois termos podem ou não ser tornados idênticos por um método de substituições (ROBINSON, 1965). A unificação é um dos principais recursos para o raciocínio e a dedução (SPRINZ, 2021). A base tórica da unificação foi dada por Herbrand (1930), porém foi Robinson (1965) que desenvolveu o primeiro algoritmo de unificação orientado para máquina. Abaixo seguem algumas definições importantes para a definição do conceito de unificação (KNIGHT, 1989):

**Definição 30** (*Termo*): Um termo é um símbolo que pode representar uma variável, uma constante ou uma função seguido por uma série de termos, separados por vírgulas, entre parênteses.

$$Ex: a, x, f(x, z), g(f(x, t), r(a, b)).$$

A definição do que é um termo é importante para a unificação, pois unificação atua sobre os termos. Antes de apresentar a definição formal da unificação é necessário apresentar a definição de substituição.

**Definição 31** (*Substituição*): A substituição é uma função que transforma variáveis em termos ou termos para termos. Uma substituição  $\sigma$  na qual  $\sigma(x) = g(h(a), a)$  e  $\sigma(y) = a$  pode ser escrita como um conjunto finito de termos ligados por chave:

- Ex:  $\sigma' = \{x/g(h(a), a), y/a\}$

Apresentadas as definições 30 e 31 é possível definir a unificação:

**Definição 32** (*Unificação*): Dois termos  $s$  e  $t$  são unificáveis, se existe uma substituição  $\sigma$  tal que  $\sigma(s) = \sigma(t)$ . Nesse caso,  $\sigma$  é chamado de unificador de  $s$  e  $t$ , e  $\sigma(s)$  é chamado de unificação de  $s$  e  $t$ .

Com a definição de unificação, fica claro que entender que o objetivo das regras  $l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$  é buscar um termo que é capaz de igualar os conceitos e/ou relações que estão dos dois lados do *turnstile* com variáveis diferentes. Uma característica importante da unificação é que uma mesma expressão pode ter diversas formas de unificar. Dessa forma, é importante buscar o unificador mais geral quanto possível:

**Definição 33** (*Unificador mais geral*): Um unificador  $\sigma$  dos termos  $s$  e  $t$  é chamado de **unificador mais geral** (MGU)<sup>6</sup> de  $s$  e  $t$  se, para qualquer outro unificador  $\theta$ , há uma substituição  $\tau$  tal que  $\tau\sigma = \theta$ . É possível existir mais de um unificador, porém o MGU é o mais simples de todos os seus unificadores.

- Ex: Dadas duas fórmulas  $f(x)$  e  $f(g(y))$  seria possível unificar essas funções com:
  - $\sigma_1 = \{x/g(y)\}$ , ou
  - $\sigma_2 = \{x/g(a), y/a\}$

por convenção  $\sigma_1$  é escolhido como MGU.

Nesse trabalho, ao usar as regras  $l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$  deve-se buscar o MGU.

Abaixo segue um exemplo que mostra como a inclusão da regras citadas acima para trabalhar com a Abox aumenta o poder do raciocínio da lógica de descrições.

### Exemplo 12

$$\mathcal{T} = \{(Filosofo \sqsubseteq Humano) \sqcap (Humano \sqsubseteq Mortal)\}$$

$$\mathcal{A} = \{Filosofo(socrates)\}$$

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{A} \models Mortal(socrates)$$

- Obs.: para manter a organização, os conceitos seguirão a seguinte representação:  
 $Filosofo = F$ ,  $Humano = H$ ,  $Mortal = M$  e  $socrates = s$

<sup>6</sup> Acrônimo do termo em ingles: *most general unifier*

Figura 22 – Exemplo 12 solucionado com CS apresentado nesse capítulo

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{M(s) \vdash M(s)} (=)}{\overline{M(x) \vdash M(s)} (l-u[x/s])} \\
\frac{\overline{M(x) \vdash M(s)} (l-u[x/s])}{\overline{M \vdash M(s)} (l-\mathcal{A})} \quad \frac{\overline{H \vdash H} (=)}{\overline{H, H \sqsubseteq M \vdash M(s)} (l \sqsubseteq)} \\
\frac{\overline{F(s) \vdash F(s)} (=)}{\overline{F(s) \vdash F(x)} (r-u[x/s])} \quad \frac{\overline{H, H \sqsubseteq M \vdash M(s)} (l \sqsubseteq)}{\overline{H, (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l \sqcap)} \\
\frac{\overline{F(s) \vdash F(x)} (r-u[x/s])}{\overline{F(s) \vdash F} (r-\mathcal{A})} \quad \frac{\overline{H, (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l \sqcap)}{\overline{(F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), H \vdash M(s)} (l-p)} \\
\frac{\overline{F(s) \vdash F} (r-\mathcal{A})}{\overline{F(s), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), F \sqsubseteq H \vdash M(s)} (l \sqsubseteq)} \quad \frac{\overline{(F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), H \vdash M(s)} (l-p)}{\overline{F(s), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l \sqcap)} \\
\frac{\overline{F(s), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l \sqcap)}{\overline{F(s), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l-c)} \\
\frac{\overline{F(s), (F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M) \vdash M(s)} (l-c)}{\overline{(F \sqsubseteq H) \sqcap (H \sqsubseteq M), F(s) \vdash M(s)} (l-p)}
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Como é possível observar na árvore acima, o cálculo apresentado na figura 18 tem a capacidade de responder que o indivíduo *socrates* está dentro do conjunto dos *Mortais*. Vale também enfatizar que no nó  $H \vdash H$  optou-se por usar o axioma de terminação para simplificar o cálculo, já que o objetivo era validar se  $Mortal(socrates)$  era válido. Todavia, com esta mesma árvore é possível inferir que *socrates* pertence ao conjunto dos *Humanos*. Para chegar na dedução  $\mathcal{T} \cup \mathcal{A} \vdash Humano(socrates)$  é necessário expor a variável  $x$  do conceito *Humano* do lado esquerdo e direito da folha  $H \vdash H$  com as regras  $l-\mathcal{A}$  e  $r-\mathcal{A}$ , respectivamente. Posteriormente, é necessário aplicar a unificação da variável com o indivíduo *socrates* através das regras  $l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$ . A figura 23 ilustra essa sequencia de passos:

Figura 23 – Passos adicionais na árvore da figura 22 para verificar se  $\mathcal{T} \cup \mathcal{A} \vdash Humano(socrates)$ 

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{H(s) \vdash H(s)} (=)}{\overline{H(s) \vdash H(x)} (r-u[x/s])} \\
\frac{\overline{H(s) \vdash H(x)} (r-u[x/s])}{\overline{H(x) \vdash H(x)} (l-u[x/s])} \\
\frac{\overline{H(x) \vdash H(x)} (l-u[x/s])}{\overline{H(x) \vdash H} (r-\mathcal{A})} \\
\frac{\overline{H(x) \vdash H} (r-\mathcal{A})}{\overline{H \vdash H} (l-\mathcal{A})} \\
\vdots
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Outro ponto que vale ser destacado é a possibilidade de incrementar à base de conhecimento através dos resultados obtidos durante a validação da base. No exemplo , a Abox poderia ser acrescida com as informações que: "Além de *Mortal* (informação diretamente validada), *socrates* também é *Humano*".

$$\mathcal{A} = \{Filosofo(socrates), Mortal(socrates), Humano(socrates)\}$$

Os cálculos propostos por Borgida et al. (2000) e o cálculos propostos por Rademaker (2010) não contém em seus conjuntos de regras os recursos necessários para atestar a validade da base do exemplo 5.2.2. Para tal propósito, se faz necessário converter os elementos pertencentes a Abox em novos elementos da Tbox:

**Exemplo 13**

$$\mathcal{T} = \{(Filosofo \sqsubseteq Humano) \sqcap (Humano \sqsubseteq Mortal), Socrates \sqsubseteq Filosofo\}$$

$$\mathcal{T} \models Socrates \sqsubseteq Mortal$$

Como isto é possível verificar que *Socrates é Mortal*, porém essas alterações realizadas trazem dois problemas: (1) Para fazer a validação se algum outro indivíduo  $\in Mortal$  é preciso criar um conceito dentro a Tbox exclusivamente para representa-lo, assim indo de contra a uma das pedras angulares da *DL* (a validação da expressão original); e (2) além da necessidade de converter a Abox em para Tbox, existe a necessidade de converter as subsunções na equivalência  $C \sqsubseteq D \equiv \neg C \sqcup D$  (esse ponto será explanado na seção 5.2.3). Nas figuras 24 e 25 é possível ver a aplicação do CS de Borgida et al. (2000) e do CS de Rademaker (2010) para solucionar a base do exemplo 13.



### 5.2.3 Equivalência e Subsunção

Os cálculos propostos por Borgida et al. (2000) e Rademaker (2010) foram desenvolvidos para inferências de subsunções, essa decisão acaba esbarando em algumas limitações ao tentar validar expressões mais complexas. A verificação de uma expressão ou uma base de conhecimento que contenha várias subsunções se torna menos intuitiva, devido ao fato de não ter uma regra para manipular diretamente a  $\sqsubseteq$ . Quando existe apenas uma subsunção, a mesma é tratada como uma equivalência do *turnstile*, porém para validar uma expressão em *DL* com várias subsunções não é permitido interpretar todas  $\sqsubseteq$  como *turnstile*. Neste caso, se faz necessário realizar algumas adaptações para validar usando as regras existentes:

1. Identificar qual subsunção deve ser entendida como *turnstile*.
  - Qual  $\sqsubseteq$  será usada como  $\vdash$ ?  
 $\exists hasPat.Cat \sqsubseteq CatOwner \sqcup OldLady \sqsubseteq \exists hasPat.Animal \sqcap \forall hasPat.Cat \sqsubseteq OldLady \sqsubseteq CatOwner$
2. Um vez identificado qual subsunção tornar-se-á o *turnstile*, é necessário decidir o que fazer com as demais subsunção:
  - Converter as  $\sqsubseteq$  em uma equivalência (como visto nas figuras 11 e 17); ou
  - Usar a regra do corte (como visto nas figuras 9 e 16).

Da mesma maneira que não existem regras para subsunção, também não existem regras para manipular expressões com equivalências em *DL*. Dessa forma, se faz necessário converter as expressões que contêm este símbolo lógico ( $\equiv$ ). O axioma da equivalência gera uma expressão com dois novos símbolos de subsunção, como visto na definição 4 e na seção 2.1.4, e essas  $\sqsubseteq$  também necessitam da conversão para uma equivalência no formato  $\neg C \sqcup D$ .

$$\text{Ex.: } C \equiv D \Leftrightarrow (C \sqsubseteq D) \sqcap (D \sqsubseteq C) \Leftrightarrow (\neg C \sqcup D) \sqcap (\neg D \sqcup C)$$

A partir destas constatações, um dos objetivos durante o desenvolvimento do CS apresentado neste trabalho era criar regras para validar expressões que contêm subsunções e equivalências sem a necessidade realizar qualquer conversão – as regras  $l_1 \equiv$ ,  $l_2 \equiv$ ,  $r \equiv$ ,  $l \sqsubseteq$  e  $r \sqsubseteq$ . A Figura 26 apresenta como é a validação do exemplo 14 usando o CS apresentado nesta seção.

**Exemplo 14** –  $Mulher \equiv (Pessoa \sqcap Feminino)$ ,  $Homem \equiv (Pessoa \sqcap \neg Mulher)$ ,  
 $Masculino \equiv (Pessoa \sqcap \neg Feminino) \vdash Homem \sqsubseteq Masculino$

- *Obs.: por questão de organização a árvores seguirá a seguinte representação: Mulher = M; Pessoa = P; Feminino = F; Homem = H; Masculino = MS.*

Figura 26 – Exemplo 14 solucionado com CS proposta apresentada neste capítulo

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{F \vdash F}{\vdash \neg F, F} \text{ (}\neg\text{)}}{P \vdash P \neg \neg F, F} \text{ (}\neg\text{)} \quad \frac{P \vdash P}{P \vdash P} \text{ (=)} \\
 \frac{\frac{P \vdash P \neg \neg F, F}{P \vdash F, P \neg \neg F} \text{ (}l\text{-}\neg\text{)}}{P, P \vdash P \neg \neg F, P \neg \neg F} \text{ (}\neg\text{)} \quad \frac{P \vdash P}{P \vdash P} \text{ (=)} \\
 \frac{\frac{P \vdash P \neg \neg F, P \neg \neg F}{P \vdash P \neg \neg F, P \neg \neg F} \text{ (}l\text{-}c\text{)}}{\neg M, P, (P \neg \neg F) \sqsubseteq M \vdash P \neg \neg F} \text{ (}\sqsubseteq\text{)} \\
 \frac{\neg M, P, M \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash P \neg \neg F}{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), \neg M, P \vdash P \neg \neg F} \text{ (}l\text{-}p\text{)} \\
 \frac{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), \neg M, P \neg \neg M \vdash P \neg \neg F}{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), P \neg \neg M, \neg M \vdash P \neg \neg F} \text{ (}l\text{-}\neg\text{)} \\
 \frac{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), P \neg \neg M, P \neg \neg M \vdash P \neg \neg F}{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), P \neg \neg M \vdash P \neg \neg F} \text{ (}l\text{-}c\text{)} \\
 \frac{H \vdash H}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M) \vdash P \neg \neg F} \text{ (}\sqsubseteq\text{)} \\
 \frac{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M) \vdash P \neg \neg F}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M) \vdash P \neg \neg F} \text{ (}\sqsubseteq\text{)} \\
 \frac{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M) \vdash MS, P \neg \neg F}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F), P \neg \neg F} \text{ (}r\text{-}c\text{)} \\
 \frac{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash P \neg \neg F}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash P \neg \neg F} \text{ (}\sqsubseteq\text{)} \\
 \frac{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F), (P \neg \neg F) \sqsubseteq MS \vdash MS}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash MS} \text{ (}l\text{-}\sqsubseteq\text{)} \\
 \frac{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash MS}{H, M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash MS} \text{ (}l\text{-}c\text{)} \\
 \frac{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \vdash MS}{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash H \sqsubseteq MS} \text{ (}l\text{-}p\text{)} \\
 \frac{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash H \sqsubseteq MS}{M \sqsubseteq (P \neg \neg F), H \sqsubseteq (P \neg \neg M), MS \sqsubseteq (P \neg \neg F) \vdash H \sqsubseteq MS} \text{ (}r\text{-}\sqsubseteq\text{)}
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

A nível de comparação, a falta de regras diretas para trabalhar com  $\equiv$  e  $\sqsubseteq$  nos cálculos de sequentes apresentados no capítulo 4 gera a necessidade de converter a expressão do exemplo 14 para:

**Exemplo 15** –  $(\neg M \sqcup (P \sqcap F)) \sqcap (\neg(P \sqcap F) \sqcup M), (\neg H \sqcup (P \sqcap \neg M)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg M) \sqcup H), (\neg MS \sqcup (P \sqcap \neg F)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS) \vdash \neg H \sqcup MS$

Os resultados podem ser vistos nos apêndices A e B. Como pode ser observado, a conversão do exemplo 15 desencadeou um aumento considerável no número de passos necessário para chegar no final da prova, aumentando a complexidade da explicabilidade.

#### 5.2.4 Regras para validar restrição de valor e restrição existencial

Uma característica distinta na *DL* é como os quantificadores  $\exists$  e  $\forall$  são interpretados. Esses quantificadores são chamados de restrição existencial e restrição de valor. Diferentemente da Conjunção ( $\sqcap$ ) e da Disjunção ( $\sqcup$ ), onde é possível fazer uma analogia direta a seus homólogos na lógica de primeira ordem, os conceitos quantificados da lógica de descrições representam expressões mais complexas, como visto na tabela 1:

$$\exists r.C \Leftrightarrow \forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y)) \quad (5.2)$$

$$\forall r.C \Leftrightarrow \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow C(y)) \quad (5.3)$$

Considerando essa particularidade, os dois CS criados por Borgida et al. (2000) e Rademaker (2010) definiram regras para investigar a validade das restrições com comportamentos bem distintos entre os cálculos (e ambas utilizam de mecanismos com baixa intuitividade, o que aumenta a complexidade para explicar/entender). Como é possível observar nas regras do CS proposto neste capítulo (figura 18), a regras para averiguar a validade dos conceitos quantificados também seguem um caminho distinto dos CS apresentado no capítulo anterior. Os motivos são: (1) a inspiração direta no cálculo de Gentzen (1935) e (2) o significado das restrições quando convertidas para a LPO.

As regras  $r\forall$ ,  $l\exists$ ,  $r\exists$  e  $l\forall$  da proposta chamam atenção por, logo após a aplicação de uma dessas regras:

1. A relação e o conceito que compõem a expressão são separadas;
2. Os termos desses elementos são expostos, e a relação e o conceito passam a representar instâncias de elementos da ABox;
3. Os termos expostos têm que representar uma constante (nova ou não), ou uma variável (nova ou não) - dependendo da regra aplicada.

Esses comportamentos oriundos das regras quantificadas espelham diretamente o que acontece caso o CS da LPO fosse aplicado na fórmula 5.2 e 5.3. Essas regras foram pensadas para contribuir com o objetivo de manipular diretamente a Abox (junto as regras discutidas na seção 5.2.2).

Em virtude do significado das expressões quantificadas, as regras  $r\forall$ ,  $l\exists$  e  $r\exists$  estão sobre a condição da restrição de autovariável apresenta na seção 3.2. Isso implica que os termos que aparecem no resultado da aplicação de uma dessas regras não deve ser uma escolha arbitrária. Abaixo segue uma tabela que mostra como deve ser feita a escolha dos termos em cada regra:

Tabela 2 – Tabela ilustrando o comportamentos das regras  $r\forall$ ,  $l\exists$ ,  $r\exists$  e  $l\forall$

Regras	Primeiro termo da expressão (x)	Segundo termo da expressão (y)	Ordem de uso*
$r\forall^*$	constante nova	constante nova	1
$l\exists^*$	variável livro	constante nova	2
$r\exists^*$	constante nova	variável livro	3
$l\forall$	termo livro	termo livro	4

Fonte: O autor (2023)

Na tabela acima, as colunas **Primeiro termo da expressão** e **Segundo termo da expressão** referenciam os termos  $x$  e  $y$  das formulas 5.2 e 5.3. Dessa forma, garantindo-se que não serão deduzidos falacias durante a prova (na seção 5.2.5 está um discussão dessa propriedade). A coluna **Ordem** se trata de uma indicação na prioridade do uso das regras na tabela 2, onde a ordem foi definida pela quantidade de constantes que devem ser nova e o número de expressões afetadas. É importante deixar claro que essa ordem não é obrigatória, a sequência das regras deve levar em consideração o contexto. Um ultimo comentário sobre a tabela 2 é que na regra  $l\forall$  os termos podem ser escolhidos livremente podendo ser um termo já usando anteriormente, ou totalmente novo (vai depender do contexto). Isso ocorre porque essa é a única regra que, quando convertida para a LPO não contem a restrição de autovariável em nenhum de seus quantificadores.

Abaixo, segue um exemplo que mostra como a inclusão da regras citadas acima para trabalhar com a restrição existencial e a restrição de valor aumenta o poder do raciocínio da lógica de descrições, sem a necessidade mudar a expressão para se encaixar nas regras.



Assim como feito nas subseções anteriores, será analisado o comportamento dos cálculos de Borgida et al. (2000) e Rademaker (2010) aplicado no exemplo 16. Com os conjuntos de regras existente nesses trabalhos não é possível checar a validade de  $\mathcal{T} \cup \mathcal{A} \vdash Professor(John)$ , pois não existem regras trabalhar com instâncias de indivíduos e instâncias de relacionamentos (em outras palavras não existe a possibilidade de trabalhar com a  $\mathcal{A}$ ). Outro ponto que impede a averiguação direta do exemplo 16 é a subsunção. Para resolver tais pontos, é necessário realizar os seguintes passos:

1. Mudar a expressão  $\exists teaches.Course \sqsubseteq \neg Undergrad \sqcup Professor$  para sua sentença equivalente;
2. As instâncias presentes na  $\mathcal{A}$  precisam ser convertidos para a  $\mathcal{T}$ , ignorando os termos e a relação  $teaches(w, cs415)$ .

Abaixo está o resultado transformação das expressões do exemplo 16 com as alterações acima:

### Exemplo 17

$$\mathcal{T} = \{\neg \exists teaches.Course \sqcup (\neg Undergrad \sqcup Professor), Course, Undergrad\}$$

$$\mathcal{T} \vdash Professor$$

Até esse ponto, os problemas encontrados já forem descritos nas seções 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3. Porém, a decisão Rademaker (2010) em usar rótulos e Borgida et al. (2000) com a decisão de só poder usar as regras em determinadas situações e apenas uma única vez, faz que seja impossível verificar a validade dessa base.

Figura 28 – Exemplo 17 solucionado com CS de Borgida et al. (2000)

$$\frac{\text{Não existe regra a partir desse ponto}}{\neg \exists t.C, C, U \vdash P} \quad \frac{\frac{P, C, U \vdash P \quad (=)}{\neg UC, U \vdash P} \quad (\uparrow)}{\neg U \sqcup P, C, U \vdash P} \quad (\sqcup)$$

$$\frac{\neg \exists t.C \sqcup (\neg U \sqcup P), C, U \vdash P}{\neg \exists t.C, C, U \vdash P} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 29 – Exemplo 17 solucionado com CS de Rademaker (2010)

$$\frac{\text{Não existe regra a partir desse ponto}}{\frac{C, U \vdash P, \forall t \neg C}{\neg \exists t C, C, U \vdash P} \quad (\neg-1)}{\neg \exists t.C, C, U \vdash P} \quad (\exists-1) \quad \frac{\frac{P, C, U \vdash P \quad (=)}{C, U \vdash U, P} \quad (\neg-1)}{\neg UC, U \vdash P} \quad (\sqcup-1)}{\neg U \sqcup P, C, U \vdash P} \quad (\sqcup-1)$$

$$\frac{\neg \exists t.C \sqcup (\neg U \sqcup P), C, U \vdash P}{\neg \exists t.C, C, U \vdash P} \quad (\sqcup-1)$$

**Fonte:** O autor (2023)

### 5.2.5 Aplicação das Regras Quantificadas em uma Expressão Não Válida

Como apontado acima, um dos grandes diferenças do CS proposto nesse trabalho, quando comparado aos cálculos apresentados na seção 4, é a forma que os quantificadores são tratados. Nas regras quantificadas do CS proposto na seção 5.1 optou-se por preservar e deixar de forma explícita a restrição de autovariável. A figura 30 apresenta a aplicação do CS na expressão  $\exists h.P \vdash \forall h.P$  e mostra, de forma correta, que não é válida:

Figura 30 – Árvore da expressão  $\exists h.P \vdash \forall h.P$  usando o cálculo proposto nesse trabalho

$$\frac{\frac{\frac{\frac{h(j, k), h(x, w), P(w) \vdash P(k)}{h(j, k), \exists h.P \vdash P(k)}{\exists h.P, h(j, k) \vdash P(k)} (l-p)}{\exists h.P \vdash \forall h.P} (r\forall)}{h(j, k), h(x, w), P(w) \vdash P(k)} (\neq)}{h(j, k), \exists h.P \vdash P(k)} (l\exists)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Para realçar a importância das restrições, pode-se observar as árvores de validação das figuras 31 e 32. Na primeira figura a derivação está correta, isso ocorre devido a concepção das regras com retraições. Já a figura 32 mostra que o cálculo sem as restrições permitiria a derivação de forma falaciosa a expressão  $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$ . Deixando claro  $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$  não é uma falácia(a figura 32 prova a expressão), porém a árvore da figura 32 foi construída de forma que permite a derivação de falácias - isso pode ser melhor constatado convertendo a expressão para sua equivalência em LPO e construindo uma prova usando CS de forma análoga.

Figura 31 – Árvore da expressão  $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$  usando o cálculo proposto neste trabalho

$$\frac{\frac{\frac{\frac{h(k, j) \vdash h(k, y)}{h(x, j) \vdash h(k, y)} (l-u[x/k])}{h(x, j) \vdash h(k, y)} (r-u[y/y])}{h(x, j), h(x, j), \forall h.C \vdash \exists h.C} (\neq)}{\forall h.C, h(x, j), h(x, j) \vdash \exists h.C} (l-p)}{\forall h.C, h(x, j) \vdash \exists h.C} (l-c)}{\forall h.C, h(x, j), A(j) \vdash \exists h.C} (l-w)}{\forall h.C, \exists h.A \vdash \exists h.C} (l\exists)}{\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C} (l\sqcap)}{\frac{\frac{\frac{h(x, j) \vdash h(x, j)}{h(x, j), \forall h.C \vdash C(y)} (l\forall)}{h(x, j), \forall h.C \vdash C(y)} (r\exists)}{h(x, j), h(x, j), \forall h.C \vdash \exists h.C} (\neq)}{h(x, j) \vdash h(x, j)} (\neq)}{C(y) \vdash C(y)} (\neq)}{h(x, j), \forall h.C \vdash C(y)} (l\forall)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 32 – Árvore da expressão  $\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C$  caso as regras quantificadas não tivessem as restrições

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{h(j,k) \vdash h(j,k)}{=} \quad \frac{\frac{}{C(k) \vdash C(k)}{=}}{(l\forall)} \quad \frac{\frac{}{h(j,k) \vdash h(j,k)}{=} \quad \frac{}{h(j,k) \vdash h(j,k)}{(l\forall)}}{h(j,k), C(k) \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{h(j,k), h(j,k), \forall h.C \vdash \exists h.C}}{h(j,k), h(j,k), \forall h.C \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{\forall h.C, h(j,k), h(j,k) \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{\forall h.C, h(j,k) \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{\forall h.C, h(j,k), A(k) \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{\forall h.C, \exists h.A \vdash \exists h.C} \quad \frac{}{\forall h.C \sqcap \exists h.A \vdash \exists h.C} \\
 \text{(l-p)} \quad \text{(l-c)} \quad \text{(l-w)} \quad \text{(l}\exists\text{)} \quad \text{(l}\sqcap\text{)}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

## 6 CORRETEDE DO CÁLCULO DE SEQUENTES PARA DL-ALCH PROPOSTO

O capítulo anterior propôs um cálculo de sequentes para lógica de descrições, mostrou exemplos de uso e comparou com os cálculos do capítulo 4 (mostra as vantagens da proposta perante os demais). Todavia, um sistema de prova, por mais simples que seja, deve apresentar derivações corretas. O presente capítulo mostram que o cálculo apresentando no capítulo anterior é correto.

- Obs.: A demonstração da corretude das regras da proposta será feita usando a teoria dos conjuntos (com exceção as regras  $r\forall$ ,  $l\exists$ ,  $r\exists$  e  $l\forall$ ). Essa escolha foi feita para facilitar a compreensão, pois o teoria dos conjuntos é bem conhecido e de fácil compreensão.

### 6.1 PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS

Essa seção apresentará as definições das propriedades do teorema dos conjuntos que serão usadas durante a prova da corretude.

**Definição 34** *O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto*

$$\emptyset \subseteq \Delta \quad (6.1)$$

**Definição 35** *(Igualdade de Conjuntos) Dois conjuntos  $\alpha$  e  $\Gamma$  são iguais, se possuem os mesmos elementos.*

**Definição 36** *(Subconjunto) Um conjunto  $\alpha$  é subconjunto de um conjunto  $\Gamma$  se todos os elementos de  $\alpha$  também pertencem a  $\Gamma$ .*

$$\alpha \subseteq \Gamma \quad (6.2)$$

**Definição 37** *(Intersecção) A intersecção de dois conjuntos  $\alpha$  e  $\Gamma$  é um subconjunto que contém apenas os elementos comuns à  $\alpha$  e  $\Gamma$ .*

$$\alpha \cap \Gamma \quad (6.3)$$

**Definição 38** *(Subconjunto de uma intersecção) Os elementos pertencentes à uma intersecção (não vazia) de dois ou mais conjuntos formam um subconjunto com cada elemento que compõem essa intersecção:*

$$\Gamma \cap \alpha \subseteq \Gamma \text{ e } \Gamma \cap \alpha \subseteq \alpha \quad (6.4)$$

**Definição 39** (*Propriedade da união*) Dado um elemento  $x \in \Gamma$  e  $x \notin \alpha$ , então, pela propriedade da união,  $x$  pertence à união dos conjuntos  $\Gamma$  e  $\alpha$ .

**Definição 40** (*Comutatividade*) A ordem em que os conjuntos são unidos não afeta o resultado. Em outras palavras,

$$\Gamma \cup \alpha = \alpha \cup \Gamma \quad (6.5)$$

$$\Gamma \cap \alpha = \alpha \cap \Gamma \quad (6.6)$$

**Definição 41** (*Distributividade*): Essa definição afirma que a interseção distribui sobre a união e vice-versa.

$$\alpha \cap (\Gamma \cup \Delta) = (\alpha \cap \Gamma) \cup (\alpha \cap \Delta) \quad (6.7)$$

$$\alpha \cup (\Gamma \cap \Delta) = (\alpha \cup \Gamma) \cap (\alpha \cup \Delta) \quad (6.8)$$

**Definição 42** (*Associatividade*): A associação de conjuntos pode ser feita de forma sequencial, sem importar qual par de conjuntos você une primeiro. Por exemplo:

$$\alpha \cap (\Gamma \cap \Delta) = (\alpha \cap \Gamma) \cap \Delta \quad (6.9)$$

$$\alpha \cup (\Gamma \cup \Delta) = (\alpha \cup \Gamma) \cup \Delta \quad (6.10)$$

## 6.2 CORRETUDE

Abaixo estão as demonstrações da corretude das regras apresentadas no capítulo anterior. E nelas fica claro que cada regra da proposta não deriva falácias. As demonstrações serão feitas usando o método da prova por indução matemática e as regras recebem a seguinte configuração:

- As folhas das regras são as hipóteses indutivas; e
- A raiz é aquilo que precisa ser provado.

### Caso Base

Na teoria da prova, um caso base refere-se à situação em que o comprimento de uma prova é zero, o que significa que consiste em um único sequente. Em outras palavras, se houver um único sequente e esse sequente corresponder à forma  $\Gamma \vdash \Delta$ , esse teorema é válido quando ocorrer em um contexto  $\Omega$  (conforme o teorema da dedução [18]).

Essa propriedade fica fácil de observar como o axioma de terminação  $C \vdash C$ , pois é evidente que a interpretação  $\mathcal{I}$  de  $C$  esta contida dentro do próprio  $C$  (uma vez que todo conjunto é um subconjunto de mesmo). Dito de outro modo:

$$C^{\mathcal{I}} \subseteq C^{\mathcal{I}} \quad (6.11)$$

### 6.2.1 Regras

Abaixo estão as provas por indução matemática que cada regra é correta. Para facilitar a compreensão, as provas estão em um formato de lista ordenada, facilitando citar quais passos foram usados para intuir um novo passo indutivo. Outro ponto que vale ser citado é que, todos os elementos posteriores a(s) hipótese(s) indutiva (HI) representam os passos/casos indutivos.

**Regras  $l-w$  e  $r-w$ :**

- A regra  $l-w$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
  2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$ ;
  3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  4.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$  (2 e 3);
  5.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4);
  6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 5).
- A regra  $r-w$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 2);
4.  $\Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 40);
5.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (3 e 4);
6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$

**Regras  $l-p$  e  $r-p$ :**

Para provar a corretude das regras  $l-c$  e  $r-c$  é necessário usar a definição da comutatividade (def 40), onde demonstra que a ordem das expressões em ambos os lados do *turnstile*

não altera a semântica do sequente. Desta forma, fica evidente que ambas as regras são corretas.

### Regras $l-c$ e $r-c$ :

- A regra  $l-c$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
  2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$ ;
  3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} = \Gamma \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (def 35);
  4.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (2 e 3);
  5.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4);
  6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ ;
- A regra  $r-c$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 2);
4.  $\alpha^{\mathcal{I}} \cup \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} = \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 35);
5.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (3 e 4);
6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ ;

### Regras $l-\mathcal{A}$ e $r-\mathcal{A}$

Essas regras estruturais apenas expõem as variáveis pertencente à sintaxe dos conceitos, dessa forma, preservando a semântica apresentada na seção 2.1.2.

$$C \Leftrightarrow C(x)$$

Logo, fica fácil de ver que as  $l-\mathcal{A}$  e  $r-\mathcal{A}$  são corretas.

### Regras $l-u[x/j]$ e $r-u[x/j]$

A corretude das regras  $l-u[x/j]$  e  $r-u[x/j]$  pode ser provada com base na definição da *unificação* (Definição 32). É possível entender essas regras como o processo de vinculação de uma variável a um indivíduo/constante pertencente a um conceito. Em outras palavras:

- Dado um a representação de um conceito no formato  $C(x)$  e existe um indivíduo  $j \in C$ , logo  $C(j)$  é verdade pela unificação  $[x/j]$ .

**Regras**  $l_{\neg}$  e  $r_{\neg}$ :

- A regra  $l_{\neg}$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  (2 e def 38);
4. caso  $x \in \bar{\alpha}^{\mathcal{I}}$ 
  - 4.1  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$  (3 e 4);
  - 4.2  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4.1);
5. caso  $x \notin \bar{\alpha}^{\mathcal{I}}$ 
  - 5.1  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} = \emptyset$  (2 e 4);
  - 5.2  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 34);
  - 5.3  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 5.2);
6. logo é possível provar que  $\Gamma \cap \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta$ ;

Obs.: A Explicação da linha 4.2 é dada por: na linha 2 mostra que  $x \in \Gamma \cap \bar{\alpha}$  e a linha 1  $\Gamma \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ , logo  $x \notin \alpha$ , e como não é possível  $x \in \bar{\alpha}$  e  $x \in \alpha$  ao mesmo tempo,  $x \in \Delta$ .

- A regra  $r_{\neg}$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  (2 e def 38);
4. caso  $x \in \alpha^{\mathcal{I}}$ :
  - 4.1  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (3);

- 4.2  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4.1);
5. caso  $x \notin \alpha^{\mathcal{I}}$ :
  - 5.1  $x \in \bar{\alpha}^{\mathcal{I}}$  (5);
6.  $x \in \bar{\alpha}^{\mathcal{I}}$  ou  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (4.2 e 5.1);
7.  $x \in \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (6);
8. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \bar{\alpha}^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 7);

**Regras**  $l\sqcap_1$ ,  $l\sqcap_2$  e  $r\sqcap$ :

- A regra  $l\sqcap_1$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
  2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$ ;
  3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  4.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (2 e 3);
  5.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4);
  6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ ;
- A regra  $l\sqcap_2$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>);
  2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$ ;
  3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  4.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (2 e 3);
  5.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (1 e 4);
  6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ ;
- A regra  $r\sqcap$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>) e  $\Sigma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>) é possível chegar em  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}) \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \quad \Sigma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}}{\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\alpha^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}) \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}} \Leftrightarrow \frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \quad \Sigma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}}{\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}) \cap (\beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}})}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>);
2.  $\Sigma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>);
3. supondo que  $x \in \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
4.  $x \in \Sigma^{\mathcal{I}}$  e  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$  (def 37);
5.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub> e 4);
6.  $x \in \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub> e 4);
7.  $\alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (def 40);
8.  $\beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 40);
9.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (5 e 7);
10.  $x \in \beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (6 e 8);
11.  $x \in (\alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}) \cap (\beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}})$  (9 e 10);
12. logo é possível provar que  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}) \cap (\beta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}})$ ;

### Regras $l\sqcup$ , $r\sqcup_1$ e $r\sqcup_2$

- A regra  $l\sqcup$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>) e  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>) é possível chegar em  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \cap (\alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \quad \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}}{\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \cap (\alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}} \Leftrightarrow \frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \quad \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}}{(\alpha^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}) \cup (\beta^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>);
2.  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>);
3. suponto que  $x \in (\alpha^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}) \cup (\beta^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}})$ ;
4.  $x \in (\alpha^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}})$  ou  $x \in (\beta^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}})$  (3);
  - 4.1.  $\alpha^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (def 38);
    - 4.1.1.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (4 e 4.1);
    - 4.1.2.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub> e 4.1.1);
  - 4.2.  $\beta^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (def 38);
    - 4.2.1.  $x \in \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (4 e 4.2);
    - 4.2.2.  $x \in \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub> e 4.2.1);
5.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (4.1.2 e 4.2.2);
6. logo é possível provar que  $(\alpha^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}) \cup (\beta^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (3 e 5);

- A regra  $r_{\sqcup_1}$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
  2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
  3.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI e 2);
  4.  $\alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 40);
  5.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (3 e 4);
  6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 5);
- A regra  $r_{\sqcup_2}$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $x \in \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI e 2);
4.  $\beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 40);
5.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (3 e 4);
6. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 5);

**Regras  $l \sqsubseteq$  e  $r \sqsubseteq$ :**

- A regra  $l \sqsubseteq$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>) e  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}} \quad \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub>);
2.  $\Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub>);
3. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}})$  (def 41);
4.  $x \in (\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \overline{\alpha^{\mathcal{I}}}) \cup (\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}})$  (3);
5.  $x \in (\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \overline{\alpha^{\mathcal{I}}})$  ou  $x \in (\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}})$  (4);

- 5.1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  - 5.1.1.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$  (5 e 5.1);
  - 5.1.2.  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>1</sub> e 5.1.1);
  - 5.1.3.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  (5 e 5.1.2);
- 5.2.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  - 5.2.1.  $x \in \Sigma^{\mathcal{I}} \cap \beta^{\mathcal{I}}$  (5 e 5.2);
  - 5.2.2.  $x \in \Pi^{\mathcal{I}}$  (HI<sub>2</sub> e 5.2.1);
6.  $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$  ou  $x \in \Pi^{\mathcal{I}}$  (5, 5.1.3 e 5.2.2);
7. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \Sigma^{\mathcal{I}} \cap (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \cup \Pi^{\mathcal{I}}$  (3 e 6);

Obs.: A Explicação da linha 5.1.3 é dada por: na linha 5 mostra que  $x \in \Gamma \cap \Sigma \cap \overline{\alpha}$  e a linha 5.1.2  $x \in \alpha^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ , logo  $x \notin \alpha$ , e como não é possível  $x \in \overline{\alpha}$  e  $x \in \alpha$  ao mesmo tempo,  $x \in \Delta$ .

- A regra  $r \sqsubseteq$  é correta se, a partir de  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI) é possível chegar em  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq \alpha^{\mathcal{I}} \cup \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$ . Interpretando a regra pode ser entendida como:

$$\frac{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}}{\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \cup \Delta^{\mathcal{I}}}$$

1.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI);
2. supondo que  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}}$ ;
3.  $\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}} \subseteq \Gamma^{\mathcal{I}}$  (def 38);
  - 3.1. caso  $x \in \alpha^{\mathcal{I}}$ :
    - 3.1.1.  $x \in \Gamma^{\mathcal{I}} \cap \alpha^{\mathcal{I}}$  (3);
    - 3.1.2.  $x \in \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (HI e 3.1.1);
  - 3.2. caso  $x \notin \alpha^{\mathcal{I}}$ :
    - 3.2.1.  $x \in \overline{\alpha^{\mathcal{I}}}$  (3.2);
4.  $x \in \overline{\alpha^{\mathcal{I}}}$  ou  $x \in \beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (3.1.2 e 3.2.1);
5.  $x \in \overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup (\beta^{\mathcal{I}} \cup \Delta^{\mathcal{I}})$  (4);
6.  $x \in (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (def 42);
7. logo é possível provar que  $\Gamma^{\mathcal{I}} \subseteq (\overline{\alpha^{\mathcal{I}}} \cup \beta^{\mathcal{I}}) \cup \Delta^{\mathcal{I}}$  (2 e 6);

**Regras**  $l \equiv_1, l \equiv_2$  e  $r \equiv$ :

Para provar a corretude das regras  $l \equiv$  e  $r \equiv$  será usada a equivalência da equivalência apresentada definição da 4:

$$C \equiv D \quad \Leftrightarrow \quad (C \sqsubseteq D) \cap (D \sqsubseteq C) \tag{6.12}$$

Onde a interpretação pode ser escrita como:

$$(\overline{C}^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}) \cap (\overline{D} \cup C^{\mathcal{I}}) \quad (6.13)$$

Contudo, interpretando  $(C \sqsubseteq D)$  como  $\Gamma$  e  $(D \sqsubseteq C)$  como  $\Delta$ , obtêm-se:  $\Gamma \sqcap \Delta$ . Dessa forma, fica fácil mostrar a corretude das regras da equivalência usando as provas das regras da conjunção ( $l\sqcap_1$ ,  $l\sqcap_2$  e  $r\sqcap$ ).

**Regras  $r\forall, l\exists, r\exists$  e  $l\forall$ :**

As provas da corretude das regras  $r\forall$ ,  $l\exists$ ,  $r\exists$  e  $l\forall$  serão feitas usando o método de sequentização no lugar do teorema dos conjuntos, usando até então. Para realizar a sequentização, as expressões em  $DL$  deverão ser convertidas para suas equivalências na LPO. Dessa forma, será possível provar que as regras quantificadas são corretas usando o CS de Gentzen (1935). Pois, se a expressão equivalente em LPO é correta, então a expressão em  $DL$  também será.

- A regra  $r\forall$  é escrita como:

$$\frac{\Gamma, r(j, k) \vdash C(k), \Delta}{\Gamma \vdash \forall r.C, \Delta}$$

Como  $\forall r.C$  corresponde em LPO à  $\forall x\forall y(r(x, y) \rightarrow C(y))$ , a prova no CS será construída respeitando todas as restrições. Ou seja, as variáveis  $x$  e  $y$  serão substituídas por dois novos termos que não aparecem em  $\Gamma$  e  $\Delta$ .

A HI construiu a prova  $\sigma$  de  $\Gamma, r(j, k) \vdash C(k), \Delta$ . A partir dela, construiremos a prova de  $\Gamma \vdash \forall x\forall y(r(x, r) \rightarrow C(y)), \Delta$ :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, r(j, k) \vdash C(k), \Delta}{\Gamma \vdash r(j, k) \rightarrow C(k), \Delta} (r\sqsubseteq)}{\Gamma \vdash \forall y(r(j, r) \rightarrow C(y)), \Delta} (r\forall)}{\Gamma \vdash \forall x\forall y(r(x, r) \rightarrow C(y)), \Delta} (r\forall)$$

- A regra  $l\exists$  é escrita como:

$$\frac{\Gamma, r(x, k), C(k) \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \exists r.C, \Delta}$$

Como  $\exists r.C$  corresponde em LPO à  $\forall x\exists y(r(x, y) \wedge C(y))$ , a prova no CS será construída respeitando todas as restrições. Ou seja, a variável  $y$  será substituída por um

termo novo que não aparecem em  $\Gamma$  e  $\Delta$ , e a variável  $x$  poderá assumir o valor de qualquer termo livremente.

A HI construiu a prova  $\sigma$  de  $\Gamma, r(x, k), C(k) \vdash \Delta$ . A partir dela, construiremos a prova de  $\Gamma, \forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y)) \vdash \Delta$ :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, r(x, k), C(k) \vdash \Delta}{\Gamma, r(x, k), r(x, k) \wedge C(k) \vdash \Delta} (1\wedge)}{\Gamma, r(x, k) \wedge C(k), r(x, k) \vdash \Delta} (1-p)}{\Gamma, r(x, k) \wedge C(k), r(x, k) \wedge C(k) \vdash \Delta} (1-c)}{\Gamma, r(x, k) \wedge C(k) \vdash \Delta} (1\exists)}{\Gamma, \exists y (r(x, y) \wedge C(y)) \vdash \Delta} (1\forall)}{\Gamma, \forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y)) \vdash \Delta} (1\forall)$$

- A regra  $r\exists$  é escrita como:

$$\frac{\Gamma \vdash r(j, y), \Delta \quad \Sigma \vdash C(y), \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash \exists r.C, \Delta, \Pi}$$

Como  $\exists r.C$  corresponde em LPO à  $\forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y))$ , a prova no CS será construída respeitando todas as restrições. Ou seja, a variável  $x$  será substituída por um termo novo que não aparecem em  $\Gamma$  e  $\Delta$ , e a variável  $y$  poderá assumir o valor de qualquer termo livremente.

A HI construiu a prova  $\sigma$  e  $\sigma'$  de  $\Gamma \vdash r(j, y), \Delta$  e  $\Sigma \vdash C(y), \Pi$ . A partir  $\sigma$  e  $\sigma'$ , construiremos a prova de  $\Sigma, \Gamma \vdash \forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y)), \Delta, \Pi$ :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, r(j, k) \vdash \Delta \quad \Sigma \vdash C(k), \Pi}{\Sigma, \Gamma \vdash r(j, y) \wedge C(y), \Delta, \Pi} (r\wedge)}{\Sigma, \Gamma \vdash \exists y (r(j, y) \wedge C(y)), \Delta, \Pi} (r\exists)}{\Sigma, \Gamma \vdash \forall x \exists y (r(x, y) \wedge C(y)), \Delta, \Pi} (r\forall)}$$

- A regra  $l\forall$  é escrita como:

$$\frac{\Gamma \vdash r(x, y), \Delta \quad \Sigma, C(y) \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma, \forall r.C \vdash \Delta, \Pi}$$

Como  $\forall r.C$  corresponde em LPO à  $\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow C(y))$ , a prova em CS não tem restrição de autovariável. Ou seja, as variáveis  $x$  e  $y$  poderão assumir o valor de qualquer de termo livremente.

A HI construiu a prova  $\sigma$  e  $\sigma'$  de  $\Gamma \vdash r(x, y), \Delta$  e  $\Sigma C(y) \vdash \Pi$ . A partir  $\sigma$  e  $\sigma'$ , construiremos a prova de  $\Sigma, \Gamma, \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow C(y)) \vdash \Delta, \Pi$ :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash r(x, k), \Delta \quad \Sigma C(k) \vdash \Pi}{\Sigma, \Gamma, r(x, y) \rightarrow C(y) \vdash \Delta, \Pi} (\text{r} \rightarrow)}{\Sigma, \Gamma, \forall y (r(x, y) \rightarrow C(y)) \vdash \Delta, \Pi} (\text{I}\forall)}{\Sigma, \Gamma, \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow C(y)) \vdash \Delta, \Pi} (\text{I}\forall)$$

## 7 CONCLUSÃO

A Lógica de Descrição é uma família de lógicas bastante usada para representar bases de conhecimento, a *DL* possui diversos métodos para provar a validade e consistência de uma expressão/base de conhecimento. Boa parte desses sistemas são inspirados em métodos existentes em outras lógicas (ex: Cálculo de Conexões, Resolução, Dedução Natural, Cálculo de sequentes, entre outros). Porém, compreender o formato das provas obtido através desses sistemas de prova e apresentar de forma amigável a humanos pode não ser uma tarefa elementar.

O cálculo de sequentes é um sistema de dedução com regras bem definidas e com a capacidade de construir provas em um formato mais acessível ao entendimento humano (além de permitir o estudo das metapropriedades dos sistemas lógicos). Já existem na literatura CS para a lógica de descrições, todavia, o foco desses cálculos está na validação da subsunção. Essa decisão gera limitações como: Não conseguir provar expressões com múltiplas  $\sqsubseteq$  e qualquer expressão com  $\sqsupseteq$ ; e, não ter regras para analisar a Abox, se limitando apenas a Tbox. Para contornar tais problemas, é necessário realizar uma série de adaptações que prejudicam a explicabilidade.

A presente dissertação teve seu ponto de partida a ideia de integrar expressividade da lógica de descrições com a inteligibilidade das provas do cálculo de sequentes sem a necessidade de realizar qualquer alteração na expressão/base de conhecimento.

Baseado nisso, a principal contribuição deste trabalho é a formulação de um conjunto de regras capaz de realizar provas de teoremas e inferências sobre todos os elementos da DL *ALC* e *ALCH*. A fim de alcançar tal objetivo, primeiramente foi necessário analisar minuciosamente o significado de cada elemento da DL (capítulo 2), estudar o cálculo de sequentes para a LPO (capítulo 3) e os CS para a DL presente na literatura (capítulo 4). A partir desses passos:

1. Foi desenvolvido um conjunto de regras para DL (visto no capítulo 5);
2. Realizou-se a validação de alguns exemplos em *DL* com a proposta e foi feita uma comparação do cálculo proposto neste trabalho com os outros CS para a DL (capítulo 5);
3. Por fim, a corretude do CS proposto foi provada (capítulo 6).

### 7.1 TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho pode, futuramente, seguir algumas direções, como:

- Provar a completude e a terminologia do CS elaborado neste trabalho;

- Adicionar a *regra do corte* no cálculo elaborado neste trabalho;
- Aumentar o conjunto de regras para provar teoremas em outros tipos de lógica de descrições;
- Um implementação de um raciocinador capaz de gerar provas;
- Levantar uma discussão sobre lógicas estruturados e sub-estruturados no contexto do cálculo de seqüentes em *DL*;
- Aplicações práticas em áreas que utilizam raciocínio em Lógica de Descrições, Como um gerador de descrições sobre as inferências de forma compreensível para usuários leigos.

## REFERÊNCIAS

- AUTEXIER, S.; HUTTER, D. Constructive dl update and reasoning for modeling and executing the orchestration of heterogeneous processes. In: *Description Logics*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 501–512.
- BAADER, F.; CALVANESE, D.; MCGUINNESS, D.; PATEL-SCHNEIDER, P.; NARDI, D. *The description logic handbook: Theory, implementation and applications*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- BAADER, F.; CALVANESE, D.; MCGUINNESS, D. L.; NARDI, D.; PATEL-SCHNEIDER, P. F. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications*. 2nd. ed. USA: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521150116.
- BAADER, F.; HORROCKS, I.; LUTZ, C.; SATTTLER, U. *An Introduction to Description Logic*. 1st. ed. USA: Cambridge University Press, 2017. ISBN 0521695422.
- BORGIDA, A.; FRANCONI, E.; HORROCKS, I.; MCGUINNESS, D. L.; PATEL-SCHNEIDER, P. F. Explaining alc subsumption. p. 209–213, 2000.
- BORGIDA, A.; SERAFINI, L. Distributed description logics: Assimilating information from peer sources. In: *Journal on data semantics I*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 153–184.
- BRACHMAN, R.; LEVESQUE, H. *Knowledge Representation and Reasoning*. Amsterdam: Morgan Kaufmann, 2004. (The Morgan Kaufmann Series in Artificial Intelligence). ISBN 978-1-55860-932-7. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/book/9781558609327>>.
- DALEN, D. v. In: *Logic and Structure*. [S.l.]: Springer, 1994.
- DALEN, D. V.; DALEN, D. van. *Logic and structure*. [S.l.]: Springer, 1994. v. 3.
- DENG, X.; HAARSLEV, V.; SHIRI, N. Using patterns to explain inferences in. *Computational Intelligence*, Wiley Online Library, v. 23, n. 3, p. 373–392, 2007.
- ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. [S.l.]: Elsevier, 2001.
- FREITAS, F.; CANDEIAS, Z.; STUCKENSCHMIDT, H. Towards checking laws' consistency through ontology design: The case of brazilian vehicles' laws. *Journal of theoretical and applied electronic commerce research*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 1, p. 112–116, 2011.
- GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische schließen. ii. *Mathematische zeitschrift*, v. 39, 1935.
- GENTZEN, G. Investigations into logical deduction. *American philosophical quarterly*, JSTOR, v. 1, n. 4, p. 288–306, 1964.
- GIRARD, J.-Y.; TAYLOR, P.; LAFONT, Y. *Proofs and types*. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1989. v. 7.

- HAN, S.; HUTTER, A.; STECHELE, W. A reasoning approach to enable abductive semantic explanation upon collected observations for forensic visual surveillance. In: IEEE. *2011 IEEE International Conference on Multimedia and Expo*. [S.l.], 2011. p. 1–7.
- HERBRAND, J. *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Tese (Doutorado) — J. Dziejulski, 1930.
- KFOURY, A. J.; MOLL, R. N.; ARBIB, M. A. *A programming approach to computability*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- KNIGHT, K. Unification: A multidisciplinary survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, ACM New York, NY, USA, v. 21, n. 1, p. 93–124, 1989.
- LYON, T. Refining labelled systems for modal and constructive logics with applications. *arXiv preprint arXiv:2107.14487*, 2021.
- MARTINS, A.; OLIVEIRA, A.; QUEIROZ, R. Uma introdução à teoria da prova. In: *Jornada de Atualização em Inteligência Artificial, JAIA, paralelo ao XXI congresso da SBC*. [S.l.: s.n.], 2001.
- NOY, N. F.; CORONADO, S. D.; SOLBRIG, H.; FRAGOSO, G.; HARTEL, F. W.; MUSEN, M. A. Representing the nci thesaurus in owl dl: Modeling tools help modeling languages. *Applied ontology*, IOS Press, v. 3, n. 3, p. 173–190, 2008.
- PALMEIRA, E.; FREITAS, F.; OTTEN, J. Converting alc connection proofs into alc sequents. *arXiv preprint arXiv:1908.09477*, 2019.
- RADEMAKER, A. *A Proof Theory for Description Logics*. Tese (Doutorado) — Ph. D. thesis, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brazil, 2010.
- RADEMAKER, A.; HAEUSLER, E. H.; CHALUB, F. Investigations on the axiomatic presentation of alc description logic and its formalization in lean. In: *Handbook of the 6th World Congress and School on Universal Logic*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 458.
- ROBINSON, J. A. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM New York, NY, USA, v. 12, n. 1, p. 23–41, 1965.
- SAHOO, S. S.; THIRUNARAYAN, K. Tableau algorithm for concept satisfiability in description logic alch. 2009.
- SATTLER, U.; CALVANESE, D.; MOLITOR, R. Relationships with other formalisms. In: *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 137–177.
- SCHMIDT-SCHAUSS, M.; SMOLKA, G. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial intelligence*, Elsevier, v. 48, n. 1, p. 1–26, 1991.
- SILVA, A. M. E. d. *Implementação de conversão de provas ALC para o cálculo de sequentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- SILVA, E. P. d. *Conversão de provas em lógica de descrições alc geradas pelo método de conexões para sequentes*. Universidade Federal de Pernambuco, 2017.
- SILVESTRINI, L. H. da C. Um sistema de tableaux analíticos para a lógica do plausível. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, v. 6, n. 2, 2007.

SPRINZ, J. A brief introduction to first-order logic unification at the example of corbin and bidoit's variation of robinson's unification algorithm. 2021.

TROELSTRA, A. S.; SCHWICHTENBERG, H. Gentzen systems. In: \_\_\_\_\_. *Basic Proof Theory*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science), p. 60–91.

VIEIRA, N. J. *Lógica aplicada à computação*. 2007.

**APÊNDICE A – EXEMPLO 15 SOLUCIONADO COM O CS APRESENTADO  
POR BORGIDA ET AL. (2000)**

Abaixo está segue a árvore do CS de Borgida et al. (2000) para a expressão:  

$$- (\neg M \sqcup (P \sqcap F)) \sqcap (\neg(P \sqcap F) \sqcup M), (\neg H \sqcup (P \sqcap \neg M)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg M) \sqcup H),$$

$$(\neg MS \sqcup (P \sqcap \neg F)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS) \vdash \neg H \sqcup MS$$

Figura 33 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{-M \cup (P \cap F), \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}{\alpha}}{\neg M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{\neg M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg H \cup (P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad \beta}}{\frac{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS}{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad (\text{in})}}{\frac{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M) \cup H), \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS}{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M) \cup H), \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad (\text{in})}}{\frac{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M) \cup H), \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS}{(-M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M) \cup H), \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad (\text{r}\cup)}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 34 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{\gamma}}{\frac{-M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad \delta}}{\frac{-M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg H \cup (P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad \alpha}}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad (\text{in})}}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad (\text{r}\cup)}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 35 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta$

$$\begin{array}{c}
 \epsilon \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M \cup (P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \beta \\
 \hline
 \zeta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P \cap F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\cap) \\
 (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 36 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma$

$$\begin{array}{c}
 \eta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \\
 \hline
 \gamma \\
 \hline
 \theta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\cap) \\
 (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 37 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta$

$$\begin{array}{c}
 \iota \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \delta \\
 \hline
 \kappa \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\cap) \\
 (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 38 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\epsilon$

$$\frac{\frac{\lambda}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H \sqcup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{\mu}{\epsilon}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 39 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\zeta$

$$\frac{\frac{\nu}{\frac{\xi}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H \sqcup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{\zeta}}{\xi}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 40 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\eta$

$$\frac{\frac{\pi}{\frac{\rho}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P \cap \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS \sqcup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\eta}}{\rho}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 41 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\theta$

$$\frac{\frac{\sigma}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\tau}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\theta}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad \begin{array}{l} (\text{In}) \\ (\text{Iu}) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 42 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\iota$

$$\frac{\frac{\nu}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\phi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\iota}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad \begin{array}{l} (\text{In}) \\ (\text{Iu}) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 43 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\kappa$

$$\frac{\frac{\chi}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\psi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\kappa}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS} \quad \begin{array}{l} (\text{In}) \\ (\text{Iu}) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 44 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\lambda$

$$\frac{\frac{\omega}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\alpha}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\lambda}}}{\text{Fonte: O autor (2023)}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 45 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\mu$

$$\frac{\frac{\alpha\beta}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\gamma}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\mu}}}{\text{Fonte: O autor (2023)}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 46 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\nu$

$$\frac{\frac{\alpha\delta}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\epsilon}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\nu}}}{\text{Fonte: O autor (2023)}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 47 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\xi$

$$\frac{\frac{\alpha\zeta}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S \vdash \neg H, M S}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, M S} \quad \frac{\alpha\eta}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, M S \vdash \neg H, M S}{P, F, \neg(P \cap F) \cup H, \neg M S \cup (P \cap \neg F), M S \vdash \neg H, M S} \quad (in)}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S \cup (P \cap \neg F), M S \vdash \neg H, M S} \quad (\cup)}{\xi}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 48 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\pi$

$$\frac{\frac{\alpha\theta}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S, \neg P \vdash \neg H, M S}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S, \neg P \vdash \neg H, M S} \quad \frac{\alpha\iota}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S, F \vdash \neg H, M S}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S, \neg F \vdash \neg H, M S} \quad (I-\neg)}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg M S, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, M S}{\pi}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 49 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\rho$

$$\frac{\frac{\alpha\kappa}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, M S}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, M S} \quad \frac{\alpha\lambda}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, M S}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, M S} \quad (I-\neg)}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, M S}{\rho}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 50 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\sigma$

$$\frac{\frac{\alpha\mu}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\nu}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\sigma}} \quad \begin{array}{l} (I \rightarrow) \\ (I \neg) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 51 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\tau$

$$\frac{\frac{\alpha\xi}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\pi}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\tau}} \quad \begin{array}{l} (I \rightarrow) \\ (I \neg) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 52 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\nu$

$$\frac{\frac{\alpha\rho}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\sigma}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\nu}} \quad \begin{array}{l} (I \rightarrow) \\ (I \neg) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 53 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\phi$

$$\frac{\frac{\frac{\alpha\tau}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\nu}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}}{\frac{\phi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, MS}} \quad \begin{array}{l} (I-\neg) \\ (I-\cap) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 54 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\chi$

$$\frac{\frac{\frac{\alpha\phi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\chi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg F \vdash \neg H, MS}}}{\frac{\chi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg F \vdash \neg H, MS}} \quad \begin{array}{l} (I-\neg) \\ (I-\cap) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 55 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\psi$

$$\frac{\frac{\frac{\alpha\psi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, MS}}{\frac{\alpha\omega}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}}{\frac{\psi}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg F \vdash \neg H, MS}} \quad \begin{array}{l} (I\cap) \\ (I-\cap) \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 56 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\omega$

$$\frac{\frac{\alpha\Omega}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\beta\alpha}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\beta\beta}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}} \omega}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (\perp)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 57 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\alpha$

$$\frac{\frac{\beta\gamma}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\beta\delta}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\beta\epsilon}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}} \alpha\alpha}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (\perp)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 58 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\beta$

$$\frac{\frac{\beta\zeta}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg M, \neg P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg M, \neg P, \neg M, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}{\frac{\beta\eta}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg M, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}{\frac{\beta\theta}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}{\frac{\alpha\beta}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 59 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\gamma$

$$\frac{\frac{\beta\iota}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M), P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}{\frac{\beta\lambda}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M), P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}{\frac{\beta\kappa}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, \neg M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}{\frac{\alpha\gamma}{\frac{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg)}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 60 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\delta$

$$\frac{\frac{\frac{\beta\mu}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\frac{\beta\nu}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\beta\xi}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}}{\frac{\alpha\delta}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 61 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\epsilon$

$$\frac{\frac{\frac{\beta\pi}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M), P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\beta\rho}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\frac{\beta\sigma}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}}{\frac{\alpha\epsilon}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 62 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\zeta$

$$\frac{\beta\tau}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, P, \neg M, \neg M, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg \neg)}{\frac{\beta\nu}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg \neg)}{\frac{\beta\phi}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \sqcup)} \quad \alpha\zeta$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 63 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\eta$

$$\frac{\beta\chi}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, P, \neg M, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg \neg)}{\frac{\beta\psi}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, P, \neg M, \neg M, \neg M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \neg \neg)}{\frac{\beta\omega}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (I \sqcup)} \quad \alpha\eta$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 64 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\theta$

$$\begin{array}{c}
 \gamma\alpha \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \gamma\beta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \gamma\gamma \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \alpha\theta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \alpha\theta
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 65 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\iota$

$$\begin{array}{c}
 \gamma\delta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \gamma\epsilon \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \gamma\zeta \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \alpha\iota \\
 \hline
 \neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \alpha\iota
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 66 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\kappa$

$$\frac{\frac{\gamma\theta}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (I \rightarrow)}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (I \rightarrow)} \quad \gamma\theta}{\frac{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\alpha\kappa}}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(I)} \quad \gamma\theta}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 67 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\lambda$

$$\frac{\frac{\gamma\iota}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (I \rightarrow)}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (I \rightarrow)} \quad \gamma\iota}{\frac{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\alpha\lambda}}{\frac{-M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(I)} \quad \gamma\lambda}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 68 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\mu$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\gamma\mu}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg H, MS}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\nu}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \sqcap M) \sqcup H, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\xi}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \sqcap M) \sqcup H, \neg MS, \neg P, \neg H, MS}}}{\alpha\mu}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 69 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\nu$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\gamma\varpi}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\pi}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \sqcap M) \sqcup H, \neg MS, F, \neg H, MS}}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\rho}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, F, \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \sqcap M) \sqcup H, \neg MS, F, \neg H, MS}}}{\alpha\nu}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 70 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\xi$

$$\frac{\frac{\frac{\gamma\sigma}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\tau}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}}{\alpha\xi}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 71 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\pi$

$$\frac{\frac{\frac{\gamma\Omega}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\phi}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\frac{\frac{\frac{\gamma\chi}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap M) \sqcup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}}{\alpha\pi}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 72 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\rho$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\cup)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\cup)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)} \quad (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 73 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\sigma$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\cup)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)} \quad (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 74 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\tau$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\cup)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)} \quad (\cup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 75 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\nu$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\delta\alpha}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\alpha\nu}}{\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{(l\sqcup)}}{P, F, M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{(=)} \\
 \text{(l}\sqcup\text{)}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 76 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\phi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\delta\alpha}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\alpha\phi}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\alpha\phi}}{\frac{\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg M, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)}}{P, F, \neg F, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(l\sqcup)}}{P, F, M, P, \neg M, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(=)} \\
 \text{(l}\sqcup\text{)}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 77 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\chi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{\delta\beta}}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(l\cap)}}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(=)} \\
 \text{(l}\sqcup\text{)}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 78 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\psi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\delta\gamma} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(I \cap)} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(L \sqcup)} \\
 \frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\alpha\psi}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 79 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\omega$

$$\begin{array}{c}
 \frac{P, F, \neg P, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\delta\delta} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(I \cap)} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(L \sqcup)} \\
 \frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\alpha\omega}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 80 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\alpha\Omega$

$$\begin{array}{c}
 \frac{-M, \neg P, \neg H, \neg P, \neg M, MS \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{-M, \neg F, \neg H, \neg P, \neg M, MS \vdash \neg H, MS}{(I \cap)} \quad \frac{-M, M, \neg H, \neg P, \neg M, MS \vdash \neg H, MS}{(L \sqcup)} \\
 \frac{-M, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg M, MS \vdash \neg H, MS}{\alpha\Omega}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)





Figura 85 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\epsilon$ 

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg(P \cap F)}, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg F, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{\beta\epsilon}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{=}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 86 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\zeta$ 

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg(P \cap F)}, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg F, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{\beta\zeta}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg P, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 87 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\eta$ 

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg(P \cap F)}, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{\frac{}{\neg M, \neg F, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{\beta\eta}}{=} \quad \frac{}{\neg M, \neg P, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}}{=}$$

**Fonte:** O autor (2023)



Figura 91 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\lambda$

$$\frac{\frac{\frac{-M, \neg P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{-M, \neg F, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{-M, M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{(L\cup)} \quad \frac{-M, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{(L\neg)} \quad \frac{-M, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\lambda}}{(=)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 92 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\mu$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(L\neg)} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\mu}}{(=)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 93 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\nu$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, M, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(L\cup)} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{(L\neg)} \quad \frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\nu}}{(=)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 94 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\xi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap M) \sqcup H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\xi} \quad (l-\cap)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 95 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\pi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\pi} \quad (l-\cap)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 96 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\rho$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, M, P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\rho} \quad (l-\cap)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 97 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\sigma$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\sigma}} \frac{P, F, \neg F, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (\text{lu})$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 98 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\tau$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\tau}} \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (\text{lu})$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 99 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\nu$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{\beta\nu}} \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, M, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (\text{lu})$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 100 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\phi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (\text{I-}\cap) \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, H, \neg MS, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\beta\phi} (\text{I-}\neg)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 101 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\chi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg M, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (\text{I-}\cap) \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\beta\chi} (\text{I-}\neg)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 102 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\psi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, M, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (\text{I-}\cap) \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} (=)}{\beta\psi} (\text{I-}\neg)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 103 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\beta\omega$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F)}, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS}}{P, F, \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, MS \vdash \neg H, MS} \frac{(\neg)}{(I \neg)} \frac{(\neg)}{(II)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 104 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\alpha$

$$\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F)}, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, M, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(\neg)} \frac{(\neg)}{(I \neg)} \frac{(\neg)}{(II)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 105 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\beta$

$$\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg F, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F)}, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, M, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(\neg)} \frac{(\neg)}{(I \neg)} \frac{(\neg)}{(II)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 106 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\gamma$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg M, \neg P, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\neg M, \neg F, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{\frac{}{\neg M, M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\gamma\gamma} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 107 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\delta$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg M, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\neg \cap)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\frac{}{\neg M, \neg F, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{}{\neg M, M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\gamma\delta} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 108 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\epsilon$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg M, \neg P, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\neg \cap)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\frac{}{\neg M, \neg F, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{}{\neg M, \sqcup M, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad (\sqcup)}{\gamma\epsilon} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 109 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\zeta$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} (l-\neg)}{\neg M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} (r)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 110 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\theta$

$$\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg H, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)}{\frac{\neg M, \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 111 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\eta$

$$\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)}{\frac{\neg M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P, \neg F, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 112 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\theta$

$$\frac{\frac{\frac{\neg M, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)}{\frac{\neg M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P, \neg F, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, H, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)} \quad (=)} \quad (\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 113 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\iota$

$$\frac{\frac{\frac{-M, \neg P, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\frac{\frac{\frac{-M, \neg F, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\gamma\iota} \quad (\cup)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 114 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\kappa$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{-M, \neg P, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\frac{\frac{\frac{-M, \neg F, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\gamma\kappa} \quad (\cup)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 115 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\lambda$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{-M, \neg P, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, \neg(P \cap F), \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\frac{\frac{\frac{-M, \neg F, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\neg M, M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\neg M, \neg(P \cap F) \sqcup M, \neg H, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (\perp \neg)}{\gamma\lambda} \quad (\cup)}$$

**Fonte:** O autor (2023)







Figura 125 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\Omega$

$$\frac{\frac{-M, \neg P, P, \neg M, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{-M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\gamma\Omega} \quad (=)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 126 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\phi$

$$\frac{\frac{-M, \neg P, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{-M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\gamma\phi} \quad (=)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 127 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\chi$

$$\frac{\frac{-M, \neg P, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{-M, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \quad (=)}{\frac{-M, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, H, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\gamma\chi} \quad (=)} \quad (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 128 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\Phi$

$$\frac{\frac{\frac{\delta\Omega}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\delta\epsilon}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(I \neg)}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(I \neg)}{P, F, M, \neg H, \neg M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 129 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\psi$

$$\frac{\frac{\frac{\delta\eta}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{\delta\zeta}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(I \neg)}{P, F, \neg(P \cap F), \neg H, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, \neg(P \cap M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{(I \neg)}{P, F, M, \neg H, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)} \quad \frac{(=)}{P, F, M, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{(I \neg)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 130 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\gamma\omega$

$$\begin{array}{c}
 \delta\theta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \gamma\omega \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \delta\iota \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\sqcup) \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\neg\neg) \\
 \hline
 P, F, M, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\neg\sqcup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 131 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\alpha$

$$\begin{array}{c}
 \delta\epsilon \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \delta\lambda \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \delta\alpha \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, \neg H, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 \delta\alpha \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\sqcup) \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (=) \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\neg\neg) \\
 \hline
 P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS \\
 \hline
 (\neg\sqcup)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 132 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\beta$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\delta\mu}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \\
 \frac{\delta\nu}{\frac{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{\delta\beta} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{=}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 133 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\gamma$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\delta\xi}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \\
 \frac{\delta\pi}{\frac{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), \neg MS, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, \neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M), P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\delta\gamma} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{=} \quad \frac{P, F, M, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}}{=}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 134 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\delta$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{\delta\sigma}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg(P \sqcap \neg M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, \neg(P \sqcap F) \sqcup M, P, \neg M, \neg(P \sqcap \neg M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\delta\delta} \frac{\frac{\frac{P, F, M, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{P, F, M, P, \neg M, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{P, F, M, P, \neg M, \neg(P \sqcap \neg M), P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{(l\cup)} \frac{\frac{P, F, M, P, \neg M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(l\rightarrow)}}{(=)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 135 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\sigma$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}}{\delta\sigma} \frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{(l\cup)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 136 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\Omega$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}}{\delta\Omega} \frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{(l\rightarrow)}}{(=)}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 137 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\epsilon$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)}}{\frac{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, \neg MS, \neg P \vdash \neg H, MS}{\delta\epsilon}} \quad (l\neg\sqcap)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 138 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\zeta$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{\frac{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{\delta\zeta}} \quad (l\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 139 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\eta$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(=)}}{\frac{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{\delta\eta}} \quad (l\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 140 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\theta$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(=)}}{\frac{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{\delta\theta}} \quad (l\sqcup)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 141 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\iota$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(l\perp)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \delta\iota$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 142 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\lambda$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(l\perp)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, M, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \delta\lambda$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 143 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\kappa$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, \neg H, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, \neg H, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(l\perp)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), \neg H, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \delta\kappa$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 144 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\mu$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(l\perp)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg P, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \delta\mu$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 145 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\nu$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, M, \neg MS, F \vdash \neg H, MS} \delta\nu$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 146 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\xi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg P, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \delta\xi$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 147 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\pi$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, M, P, \neg F, \neg P \vdash \neg H, MS} \delta\pi$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 148 – Exemplo validado usando as regras propostas Borgida et al. (2000): Continuação ramo  $\delta\rho$

$$\frac{\frac{P, F, \neg P, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{=} \quad \frac{P, F, \neg F, P, \neg M, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS}{(l\sqcup)}}{P, F, \neg(P \sqcap F), P, \neg M, \neg P, P, \neg F, F \vdash \neg H, MS} \delta\rho$$

**Fonte:** O autor (2023)

**APÊNDICE B – EXEMPLO 15 SOLUCIONADO COM O CS APRESENTADO  
POR RADEMAKER (2010)**

Abaixo está segue a árvore do CS de Rademaker (2010) para a expressão:  

$$- (\neg M \sqcup (P \sqcap F)) \sqcap (\neg(P \sqcap F) \sqcup M), (\neg H \sqcup (P \sqcap \neg M)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg M) \sqcup H),$$

$$(\neg MS \sqcup (P \sqcap \neg F)) \sqcap (\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS) \vdash \neg H \sqcup MS$$

Figura 149 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010)

$$\begin{array}{c}
 \alpha \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(MS \cup (P \cap \neg F)) \cup MS, H \vdash M, MS}{\neg M, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \frac{\neg M \cup (P \cap F), \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS}{\neg M \cup (P \cap F), \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \frac{(\neg M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS}{(\neg M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M)), \neg(P \cap \neg F) \cup MS \vdash \neg H, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \frac{(\neg M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M)) \cup H, (\neg MS \cup (P \cap \neg F)) \cup MS \vdash \neg H, MS}{(\neg M \cup (P \cap F)) \cap (\neg(P \cap F) \cup M), (\neg H \cup (P \cap \neg M)) \cap (\neg(P \cap \neg M)) \cup H, (\neg MS \cup (P \cap \neg F)) \cup MS \vdash \neg H \cup MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \beta \\
 \hline
 \frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS}{P \cap F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \quad (\neg I)
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 150 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha$

$$\begin{array}{c}
 \gamma \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS}{\neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(M \cup (P \cap \neg F)), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(M \cup (P \cap \neg F)), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS}{\neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS}{\neg(P \cap F) \cup M, \neg H \cup (P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \alpha \\
 \hline
 \delta \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS}{\neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(M \cup (P \cap \neg F)), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, M, MS} \quad (\neg I) \\
 \hline
 \quad (\neg I)
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 151 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta$

$$\begin{array}{c}
 \epsilon \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 \beta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 \zeta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P \cap \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 \beta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS \\
 \hline
 \beta
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 152 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma$

$$\begin{array}{c}
 \eta \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, \neg H, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS \\
 \hline
 \gamma \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg MS \cup (P \cap \neg F), \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS \\
 \hline
 \theta \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash F, M, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg F, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P \cap \neg F, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS \\
 \hline
 \theta
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)



Figura 155 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\zeta$

$$\begin{array}{c}
 \nu \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 \zeta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 \xi \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash F, M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash M, MS \\
 \hline
 \zeta
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 156 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\eta$

$$\begin{array}{c}
 \pi \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P \cap F, MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \rho \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash F, MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P \cap F, MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \sigma \\
 \hline
 M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \eta \\
 \hline
 \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H \vdash MS, H, M, MS \\
 \hline
 \eta
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 157 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\theta$

$$\frac{\frac{\frac{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS}{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, F, M, M, MS} \quad (\supset\vdash)}{\frac{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash P \supset F, F, M, M, MS}{\neg(P \supset F), P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS} \quad (\neg\vdash)} \quad \psi}{\frac{\neg(P \supset F) \sqcup M, P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS}{\neg(P \supset F) \sqcup M, P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS} \quad \theta} \quad \phi}{\neg(P \supset F), P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS} \quad (\supset\vdash)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 158 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\iota$

$$\frac{\frac{\frac{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, M, MS}{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash P \supset F, H, M, M, MS} \quad (\supset\vdash)}{\frac{P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash H, M, M, MS}{\neg(P \supset F), P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash H, M, M, MS} \quad (\neg\vdash)} \quad \psi}{\frac{\neg(P \supset F) \sqcup M, P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash H, M, M, MS}{\neg(P \supset F) \sqcup M, P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash H, M, M, MS} \quad \iota} \quad \omega}{\neg(P \supset F), P, \neg(P \supset \neg M) \sqcup H, \neg(P \supset \neg F) \sqcup MS, H \vdash H, M, M, MS} \quad (\supset\vdash)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 159 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\kappa$

$$\begin{array}{c}
 \alpha\alpha \\
 \hline
 P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS \\
 \hline
 \alpha\beta \\
 \hline
 P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, F, M, M, MS \\
 \hline
 \alpha\gamma \\
 \hline
 \frac{M, P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS}{\neg(P \cap F), P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \hline
 \kappa \\
 \hline
 \frac{\neg(P \cap F), P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS}{\neg(P \cap F) \sqcup M, P, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash F, M, M, MS} \quad (\cup\vdash)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 160 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\lambda$

$$\begin{array}{c}
 \alpha\delta \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, MS, H, MS \\
 \hline
 \alpha\epsilon \\
 \hline
 P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, MS, H, MS \\
 \hline
 \alpha\zeta \\
 \hline
 \frac{P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, MS, H, MS}{P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash MS, H, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \hline
 \lambda \\
 \hline
 \frac{P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash MS, H, MS}{P, F, \neg(P \cap \neg M) \sqcup H, \neg(P \cap \neg F) \sqcup MS, H \vdash MS, H, MS} \quad (\cup\vdash)
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 161 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\mu$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash P, H, MS}{\alpha\theta}}{P, F, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash F, MS, H \vdash F, H, MS}{(\cap\text{-I})}}{\frac{P, F, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash P \cap F, H, MS}{(\cap\text{-I})}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F), \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash H, MS}{(\neg\text{-I})}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, \neg(P \cap \neg M) \cup H, P, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash H, MS}{\mu}}{\frac{P, F, M, \neg(P \cap \neg F) \cup F, MS, H \vdash H, MS}{\alpha\iota}}{\perp\text{-I}}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 162 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\nu$

$$\frac{\frac{\frac{P, F, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, H, M, MS}{\alpha\kappa}}{P, F, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P \cap F, H, M, MS}{(\cap\text{-I})}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F), P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS}{(\neg\text{-I})}}{\frac{P, F, \neg(P \cap F) \cup M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS}{\nu}}{\frac{P, F, M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash H, M, MS}{\alpha\mu}}{\perp\text{-I}}$$

**Fonte:** O autor (2023)









Figura 171 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\psi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{P \vdash F} \text{ (}=) \\
 \frac{}{P \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{P \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{P, H, \neg(P \cap \neg F), H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{P, H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \psi \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \beta\theta \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash \neg M, F, H, M, M, MS} \text{ (}\cap\text{-r)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash P \cap \neg M, F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg M), \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{P, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (}\cap\text{-r)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{P, H, H \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (}\cap\text{-r)} \\
 \frac{}{P, H, M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{P, H, M, S, H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)}
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 172 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\omega$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{H \vdash H} \text{ (}=) \\
 \frac{}{H \vdash H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{P \vdash P} \text{ (}=) \\
 \frac{}{P \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash P \cap \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F), H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{H \vdash H} \text{ (}=) \\
 \frac{}{H \vdash H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H, F \vdash H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash P \cap \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F), H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{P \vdash P} \text{ (}=) \\
 \frac{}{P \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, H \vdash P \cap \neg F, H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-r)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F), H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)} \\
 \frac{}{M, P, H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)} \\
 \frac{}{M, P, \neg(P \cap \neg M) \cup H, \neg(P \cap \neg F) \cup M, S, H \vdash H, M, M, MS} \text{ (}\cup\text{-l)}
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)





Figura 177 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\epsilon$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\beta\nu}{P, F, \neg(P \supset \neg F) \cup P, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \\
 \frac{\beta\phi}{P, F, \neg(P \supset \neg F) \cup P \supset \neg M, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \\
 \frac{\beta\psi}{P, F, \neg(P \supset \neg F) \cup M, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \\
 \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{P \vdash P, F, MS, H, MS} (=)}{P, F, H, H \vdash P, F, MS, H, MS} (\text{weak-}\tau)}{P, F, H, H \vdash P, F, MS, H, MS} (\text{weak-}\tau)}{P, F, H, \neg(P \supset \neg F), H \vdash F, MS, H, MS} (\neg\tau)}{P, F, H, \neg(P \supset \neg F), H \vdash F, MS, H, MS} (\neg\tau)}{P, F, H, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash F, MS, H, MS} (\cup\tau)}{P, F, \neg(P \supset \neg M) \cup H, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash F, MS, H, MS} (\cup\tau)}{\alpha\epsilon}
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 178 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\zeta$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\beta\chi}{P, F, M, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash P, MS, H, MS} \\
 \frac{\beta\psi}{P, F, M, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash P \supset \neg M, MS, H, MS} \\
 \frac{\frac{\frac{P, F, M, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H, M \vdash MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash \neg M, MS, H, MS} (\neg\tau)}{P, F, M, H, H \vdash P, MS, H, MS} (\text{weak-}\tau)}{P, F, M, H, H \vdash P \supset \neg F, MS, H, MS} (\text{weak-}\tau)}{P, F, M, H, \neg(P \supset \neg F), H \vdash MS, H, MS} (\neg\tau)}{P, F, M, H, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H, MS} (\cup\tau)}{P, F, M, H, \neg(P \supset \neg F) \cup H, \neg(P \supset \neg F) \cup MS, H \vdash MS, H, MS} (\cup\tau)}{\alpha\zeta}
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)







Figura 185 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\nu$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{\gamma\mu}}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{\gamma\nu}}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{\alpha\nu} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{\alpha\nu} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-r)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash)
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 186 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\xi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{\gamma\xi}}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash)}{\frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{\gamma\pi}} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{\gamma\xi}}{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \quad (\text{weak-r})}{P \vdash P, F, M, MS}}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\text{weak-r})}{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{\alpha\xi} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{\alpha\xi} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-r)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-r)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, H, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{P, F, P, P, \neg(P \cap \neg F) \cup MS, H \vdash P, P, F, M, MS}{(weak-l)} \quad (\neg\vdash)
 \end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 187 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\pi$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\gamma\rho}{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup M S, H \vdash P, F, M, M S} \\
 \frac{\gamma\sigma}{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup M S, H, M \vdash F, M, M S} \\
 \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{P \vdash P, F, M, M S} \quad (=)}{P, F, M, P, H, P, H \vdash P, F, M, M S} \quad (\text{weak-}\vdash)}{P, F, M, P, H, P, H \vdash P, F, M, M S} \quad (\neg\vdash) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{M \vdash F, M, M S} \quad (=)}{P, F, M, P, H, P, H, F \vdash F, M, M S} \quad (\text{weak-}\vdash)}{P, F, M, P, H, P, H \vdash \neg F, F, M, M S} \quad (\neg\vdash)}{P, F, M, P, H, P, H \vdash P \sqcap \neg F, F, M, M S} \quad (\sqcup\vdash)}{P, F, M, P, H, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash F, M, M S} \quad (\neg\vdash)}{P, F, M, P, H, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup M S, H \vdash F, M, M S} \quad (\sqcup\vdash)}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg M) \sqcup H, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup M S, H \vdash F, M, M S} \quad \alpha\pi}
 \end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 188 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\rho$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{H \vdash H} (=) \\
\frac{\frac{}{H \vdash H} (=) \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)} \quad \frac{\frac{\frac{}{H \vdash H} (=)}{H \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{H, F \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H \vdash \neg F, P, P, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-r)} \quad \frac{\frac{}{MS \vdash MS} (=)}{MS \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{MS, H \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, MS, H, M, MS}{\neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{}{MS, H \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\frac{\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, MS, H, M, MS}{\alpha\rho}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 189 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\sigma$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{M \vdash M} (=) \\
\frac{\frac{}{M \vdash M} (=) \text{ (weak-l)}}{H, M \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)} \quad \frac{\frac{\frac{}{M \vdash M} (=)}{M \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{H, M, F \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H, M \vdash \neg F, P, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-r)} \quad \frac{\frac{}{H \vdash H} (=)}{H \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{MS, H, M \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, M, MS}{\neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{}{MS, H, M \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\frac{\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, MS, H, M, MS}{\alpha\sigma}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 190 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\tau$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{H \vdash H} (=) \\
\frac{\frac{}{H \vdash H} (=) \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)} \quad \frac{\frac{\frac{}{H \vdash H} (=)}{H \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{H, F \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H \vdash \neg F, P, F, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{}{MS \vdash MS} (=)}{MS \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{MS, H \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, MS, H, M, MS}{\neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{}{MS, H \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\frac{\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, MS, H, M, MS}{\alpha\tau}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 191 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\nu$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H, M \vdash P, F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash F, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{H, M, F \vdash F, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{H, M \vdash \neg F, F, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcap\text{-r)}} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, MS, H, M, MS}{\neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}{\alpha\nu} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 192 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\phi$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-l)}}{M, H \vdash M} \text{ (weak-r)}}{M, H \vdash P, P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{M, H \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, H, F \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{M, H \vdash \neg F, P, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcap\text{-r)}} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{M, H \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, M, MS}{M, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{M, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}{\alpha\phi} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 193 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\chi$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-l)}}{H \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{M, H, M \vdash P, MS, H, M, MS} \text{ (weak-r)}}{M, H, M \vdash P \sqcap \neg F, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash MS, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, H, M, F \vdash MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{M, H, M \vdash \neg F, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcap\text{-r)}} \text{ (}\neg\text{-l)}}{\frac{\frac{M, H, M \vdash P \sqcap \neg F, MS, H, M, MS}{M, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash, MS, H, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{M, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash, MS, H, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}{\alpha\chi} \text{ (}\sqcup\text{-1)}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 194 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\psi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash P, P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H, F \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, F, M, M, MS}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)} \\
\alpha\psi
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 195 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\alpha\omega$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H, M \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H, M, F \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, M, MS}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)} \\
\alpha\omega
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 196 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\alpha$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash P, P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash F, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H, F \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, F, M, M, MS}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)} \\
\beta\alpha
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 197 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\beta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{M \vdash \neg M}{=} \text{(weak-r)}}{M \vdash \neg F, F, F, M, M, MS} \text{(weak-r)}}{P, P, H, M \vdash \neg F, F, F, M, M, MS} \text{(weak-r)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{(weak-r)}}{F \vdash F, F, M, M, MS} \text{(weak-l)}}{P, P, H, M, F \vdash F, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{(weak-r)}}{M \vdash F, F, M, M, MS} \text{(weak-r)}}{P, P, MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, F, M, M, MS}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, F, M, M, MS} \text{(}\neg\text{-l)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS} \text{(}\sqcup\text{-l)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS} \text{(}\beta\beta\text{)}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 198 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\gamma$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{(weak-r)}}{M \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)}}{M, P, P, H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{(weak-r)}}{F \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)}}{M, P, P, H, F \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{(weak-r)}}{M \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-r)}}{M, P, P, MS, H \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{M, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, M, MS}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, M, M, MS} \text{(}\neg\text{-l)}}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS} \text{(}\sqcup\text{-l)}}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS} \text{(}\beta\gamma\text{)}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 199 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\delta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{(weak-r)}}{P \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)}}{M, P, P, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{(weak-r)}}{F \vdash F, M, M, MS} \text{(weak-l)}}{M, P, P, H, M, F \vdash F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{(weak-r)}}{M \vdash F, M, M, MS} \text{(weak-r)}}{M, P, P, MS, H, M \vdash F, M, M, MS} \text{(weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{M, P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, M, M, MS}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, M, M, MS} \text{(}\neg\text{-l)}}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, M, M, MS} \text{(}\sqcup\text{-l)}}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, M, M, MS} \text{(}\beta\delta\text{)}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 200 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\epsilon$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, H \vdash P, P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H, F \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, MS, H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, H, M, M, MS}{P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\epsilon
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 201 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\zeta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H, M \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, H, M, F \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, MS, H, M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, H, M, M, MS}{P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\zeta
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 202 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\eta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H \vdash P, P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H, F \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, MS, H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, H, M, M, MS}{P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\eta
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 203 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\theta$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H, M \vdash P, F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, H, M, M, MS}{P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{\frac{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, M, MS}{\beta\theta} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, H, M, F \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, H, M \vdash \neg F, F, H, M, M, MS} \text{ (\sqcap-r)}}{\frac{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, M, MS}{\beta\theta} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M}}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, MS, H, M \vdash F, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\frac{P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, M, MS}{\beta\theta} \text{ (\sqcup-1)}}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 204 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\iota$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M}}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, H \vdash P, P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{M, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, H, M, M, MS}{M, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, M, MS}{\beta\iota} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, H, F \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{M, P, H \vdash \neg F, P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcap-r)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, M, MS}{\beta\iota} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS}}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, MS, H \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, M, MS}{\beta\iota} \text{ (\sqcup-1)}}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 205 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\kappa$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M}}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, H, M \vdash P, H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{M, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, H, M, M, MS}{M, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, M, MS}{\beta\kappa} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, H, M, F \vdash H, M, M, MS} \text{ (\neg-1)}}{M, P, H, M \vdash \neg F, H, M, M, MS} \text{ (\sqcap-r)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, M, MS}{\beta\kappa} \text{ (\sqcup-1)}}}
 \frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS}}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash H, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{M, P, MS, H, M \vdash H, M, M, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\frac{M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, M, MS}{\beta\kappa} \text{ (\sqcup-1)}}}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 206 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\lambda$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash \neg(P \sqcap \neg F), P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\overline{F \vdash F}}{F \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H, F \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash \neg F, P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS}{\beta\lambda}}
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 207 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\mu$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H, M \vdash P, P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M}}{M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H, M, F \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H, M \vdash \neg F, P, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS}}{MS \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, M, MS}{\beta\mu}}
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 208 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\nu$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H \vdash P, P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\frac{\overline{F \vdash F}}{F \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, H, F \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, H \vdash \neg F, P, F, F, M, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS}}{MS \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, P, MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, F, M, M, MS}{\beta\nu}}
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 209 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\xi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M} (=)}{\overline{M \vdash PF, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{P, P, H, M \vdash PF, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, F, M, M, MS}{P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, F, M, M, MS} (\neg-l)}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS}{\beta\xi}} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P} (=)}{\overline{P \vdash F, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{P, P, H, M, F \vdash F, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\overline{P, P, H, M \vdash \neg F, F, F, M, M, MS}} (\neg-l)}{\overline{P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, F, M, M, MS}} (\sqcap-r)}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS}{\beta\xi}} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS} (=)}{\overline{MS \vdash F, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{P, P, MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, F, M, M, MS}{\beta\xi}} (\sqcup-l)
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 210 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\pi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M} (=)}{\overline{M \vdash P, P, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, H \vdash P, P, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{M, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, M, MS}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, M, M, MS} (\neg-l)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS}{\beta\pi}} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{F \vdash F} (=)}{\overline{F \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, H, F \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\overline{M, P, P, H \vdash \neg F, P, F, M, M, MS}} (\neg-l)}{\overline{M, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, M, MS}} (\sqcap-r)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS}{\beta\pi}} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M} (=)}{\overline{M \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, MS, H \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, M, MS}{\beta\pi}} (\sqcup-l)
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 211 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\rho$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{M \vdash M} (=)}{\overline{M \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, H, F \vdash P, F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{M, P, P, H, F \vdash P \sqcap \neg F, F, M, M, MS}{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, F \vdash F, M, M, MS} (\neg-l)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, F \vdash F, M, M, MS}{\beta\rho}} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{F \vdash F} (=)}{\overline{F \vdash F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, H, F, F \vdash F, M, M, MS}} (weak-l)}{\overline{M, P, P, H, F \vdash \neg F, F, M, M, MS}} (\neg-l)}{\overline{M, P, P, H, F \vdash P \sqcap \neg F, F, M, M, MS}} (\sqcap-r)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, F \vdash F, M, M, MS}{\beta\rho}} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS} (=)}{\overline{MS \vdash F, M, M, MS}} (weak-r)}{\overline{M, P, P, MS, H, F \vdash F, M, M, MS}} (weak-l)}{\frac{M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, F \vdash F, M, M, MS}{\beta\rho}} (\sqcup-l)
\end{array}$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 212 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\sigma$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H \vdash P, P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H, F \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H \vdash \neg F, P, P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \\
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, MS, H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, MS, H, MS}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, F, \text{zneg}(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\sigma
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 213 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\tau$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H, M \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H, M, F \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, H, M \vdash \neg F, P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \\
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, MS, H, M \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, MS}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\tau
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 214 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\nu$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, MS, H \vdash P, F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, MS, H, F \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, MS, H \vdash \neg F, F, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \\
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, F, MS, H, MS}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup P, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup P, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\nu
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 215 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\phi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, MS, H \vdash P, F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, MS, H \vdash F \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, F, MS, H, MS}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H \vdash \neg F, F, MS, H, MS}{P, F, M, H \vdash \neg F, P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup M, MS, H \vdash F, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\phi
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 216 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\chi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, H \vdash P, P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, MS, H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, M, H \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H \vdash \neg F, P, MS, H, MS}{P, F, M, H \vdash \neg F, P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H \vdash P \sqcap \neg F, P, MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\chi
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 217 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\psi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, H, M \vdash P, MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, H, M \vdash MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash MS, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, MS, H, M \vdash MS, H, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, M, H, M \vdash P \sqcap \neg F, MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H, M \vdash \neg F, MS, H, MS}{P, F, M, H, M \vdash \neg F, MS, H, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, H, M \vdash P \sqcap \neg F, MS, H, MS}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash MS, H, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, M, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash MS, H, MS} \text{ (\sqcup-l)} \\
\beta\psi
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 218 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\beta\omega$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, P, P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H \vdash P, P, P, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H, F \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash P, P, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H \vdash P, P, H, MS} \text{ (\sqcup-1)} \quad \frac{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash P, P, H, MS}{P, F, P, MS, H, M \vdash \neg F, P, P, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash P, P, H, MS} \text{ (\neg-1)} \quad \frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash P, P, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H, M \vdash P, P, H, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\beta\omega}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 219 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\alpha$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H, M, F \vdash P, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash P, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H, M \vdash P, H, MS} \text{ (\sqcup-1)} \quad \frac{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash P, H, MS}{P, F, P, MS, H, M \vdash \neg F, P, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash P, H, MS} \text{ (\neg-1)} \quad \frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash P, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H, M \vdash P, H, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\gamma\alpha}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 220 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\beta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, P, F, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H, F \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, MS, H \vdash P, P, F, H, MS}{P, F, P, MS, H \vdash \neg F, P, F, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, H, MS} \text{ (\neg-1)} \quad \frac{\frac{P, F, P, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash P, F, H, MS} \text{ (\neg-1)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H \vdash P, F, H, MS} \text{ (\sqcup-1)} \quad \frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-r)} \\
\frac{\frac{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash P, F, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H \vdash P, F, H, MS} \text{ (\sqcup-1)}}{\gamma\beta}
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 221 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\gamma$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P} (=)}{P \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, MS, H, M \vdash P, F, H, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, H, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash F, H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{\frac{\frac{\overline{F \vdash F} (=)}{F \vdash F, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, MS, H, M, F \vdash F, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H, M \vdash \neg F, F, H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H, M \vdash F, H, MS}{\gamma\gamma} \text{ } (\sqcup\text{-l})} \text{ } (\neg\text{-r})} \text{ } (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 222 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\delta$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS} (=)}{MS \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, M, P, MS, H \vdash P, P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{P, F, M, P, MS, H \vdash P \sqcap \neg F, P, H, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H \vdash P, H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H} (=)}{H \vdash P, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, M, P, MS, H, F \vdash P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, MS, H \vdash \neg F, P, H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H \vdash P, H, MS}{\gamma\delta} \text{ } (\sqcup\text{-l})} \text{ } (\neg\text{-r})} \text{ } (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 223 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\epsilon$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P} (=)}{P \vdash P, H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, M, P, MS, H, M \vdash P, H, MS} \text{ (weak-l)}}{\frac{P, F, M, P, MS, H, M \vdash P \sqcap \neg F, H, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F), MS, H, M \vdash H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{\frac{\frac{\overline{MS \vdash MS} (=)}{MS \vdash H, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, M, P, MS, H, M, F \vdash H, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, MS, H, M \vdash \neg F, H, MS} \text{ } (\neg\text{-l})}}{\frac{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup F, MS, H, M \vdash H, MS}{\gamma\epsilon} \text{ } (\sqcup\text{-l})} \text{ } (\neg\text{-r})} \text{ } (=)$$

**Fonte:** O autor (2023)

Figura 224 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\zeta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, P, H, M, MS} (=)}{P \vdash P, P, P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{P, F, P, H \vdash P, P, P, H, M, MS} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{H \vdash P, P, H, M, MS} (=)}{H \vdash P, P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{H \vdash P, P, H, M, MS} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, H \vdash \neg F, P, P, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, H, M, MS} (=)}{P, F, P, MS, H \vdash P, P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{\frac{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, H, M, MS} (\sqcup\text{-l})} \\
\gamma\zeta
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 225 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\eta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, P, H, M, MS} (=)}{P \vdash P, P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{P, F, P, H, M \vdash P, P, H, M, MS} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{H \vdash P, H, M, MS} (=)}{H \vdash P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{P, F, P, H, M, F \vdash P, H, M, MS} (\text{weak-l})}{P, F, P, H, M \vdash \neg F, P, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\overline{M \vdash M}}{M \vdash P, H, M, MS} (=)}{M \vdash P, H, M, MS} (\text{weak-r})}{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash P, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, H, M, MS} (\sqcup\text{-l})} \\
\gamma\eta
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 226 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\theta$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{H \vdash H}}{H \vdash P, P, F, H, M, MS} (=)}{H \vdash P, P, F, H, M, MS} (\text{weak-r})}{P, F, P, H \vdash P, P, F, H, M, MS} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{F \vdash F}}{F \vdash P, F, H, M, MS} (=)}{F \vdash P, F, H, M, MS} (\text{weak-r})}{P, F, P, H, F \vdash P, F, H, M, MS} (\text{weak-l})}{P, F, P, H \vdash \neg F, P, F, H, M, MS} (\neg\text{-l})} (\sqcap\text{-r})} \\
\frac{\frac{\overline{P \vdash P}}{P \vdash P, F, H, M, MS} (=)}{P \vdash P, F, H, M, MS} (\text{weak-r})}{\frac{P, F, P, MS, H \vdash P, F, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, H, M, MS} (\sqcup\text{-l})} \\
\gamma\theta
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 227 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\iota$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash F, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, H, M \vdash P, F, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash F, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, H, M, F \vdash F, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash F, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, MS, H, M \vdash F, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, P, H, M, F \vdash F, H, M, MS}{P, F, P, H, M \vdash \neg F, F, H, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, MS} \text{ (\sqcup-r)} \quad \frac{\frac{P, F, P, MS, H, M \vdash F, H, M, MS}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, MS} \text{ (l)}}{P, F, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, H, M, MS} \text{ (l)} \\
\gamma\iota
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 228 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\kappa$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, H \vdash P, P, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, H, F \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, MS, H \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, M, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, H, M, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, P, H, F \vdash P, H, M, MS}{P, F, M, P, H \vdash \neg F, P, H, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, MS} \text{ (\sqcup-r)} \quad \frac{\frac{P, F, M, P, MS, H \vdash P, H, M, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, MS} \text{ (l)}}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, H, M, MS} \text{ (l)} \\
\gamma\kappa
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 229 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\lambda$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, H, M \vdash P, H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{H \vdash H}{=} \text{ (weak-r)}}{H \vdash H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, H, M, F \vdash H, M, MS} \text{ (weak-l)} \quad \frac{\frac{\frac{M \vdash M}{=} \text{ (weak-r)}}{M \vdash H, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, M, P, MS, H, M \vdash H, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{P, F, M, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, H, M, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash H, M, MS} \text{ (\neg-l)} \quad \frac{\frac{P, F, M, P, H, M, F \vdash H, M, MS}{P, F, M, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, H, M, MS} \text{ (\neg-l)}}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, MS} \text{ (\sqcup-r)} \quad \frac{\frac{P, F, M, P, MS, H, M \vdash H, M, MS}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, MS} \text{ (l)}}{P, F, M, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash H, M, MS} \text{ (l)} \\
\gamma\lambda
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 230 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\mu$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H \vdash P, P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H, F \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, P, MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, F, M, MS}{P, F, P, P, H \vdash \neg F, P, P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-l)} \\
\gamma\mu
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 231 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\nu$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H, M \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H, M, F \vdash P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{MS \vdash MS}{=} \text{ (weak-r)}}{MS \vdash P, F, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, P, MS, H, M \vdash P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, MS}{P, F, P, P, H, M \vdash \neg F, P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-l)} \\
\gamma\nu
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 232 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\xi$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{=} \text{ (weak-r)}}{F \vdash P, P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H \vdash P, P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)}}{P, F, P, P, H, F \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{=} \text{ (weak-r)}}{P \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-r)}}{P, F, P, P, MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (weak-l)} \\
\frac{\frac{\frac{P, F, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, P, F, M, MS}{P, F, P, P, H \vdash \neg F, P, P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (}\neg\text{-l)}}{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, P, F, M, MS} \text{ (}\sqcup\text{-l)} \\
\gamma\xi
\end{array}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 233 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\pi$

$$\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{\vdash} (=)}{\frac{F \vdash P, P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, P, H, M \vdash P, P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{\vdash} (=)}{\frac{P \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, P, P, H, M, F \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{F \vdash F}{\vdash} (=)}{\frac{F \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}
{\frac{\frac{P, F, P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})}{\frac{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})} (\neg\text{-r})} (\sqcap\text{-r})} \quad \frac{\frac{F \vdash F}{\vdash} (=)}{\frac{F \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}
{\frac{P, F, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\sqcup\text{-l})} (\gamma\pi)}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 234 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\rho$

$$\frac{\frac{\frac{F \vdash F}{\vdash} (=)}{\frac{F \vdash P, P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, M, P, P, H \vdash P, P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{\frac{P \vdash P}{\vdash} (=)}{\frac{P \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, M, P, P, H, F \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{MS \vdash MS}{\vdash} (=)}{\frac{MS \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-r})}
{\frac{\frac{P, F, M, P, P, H \vdash P \sqcap \neg F, P, F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})}{\frac{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})} (\neg\text{-r})} (\sqcap\text{-r})} \quad \frac{\frac{MS \vdash MS}{\vdash} (=)}{\frac{MS \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}
{\frac{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\sqcup\text{-l})} (\gamma\rho)}$$

Fonte: O autor (2023)

Figura 235 – Exemplo validado usando as regras propostas Rademaker (2010): Continuação ramo  $\gamma\sigma$

$$\frac{\frac{\frac{P \vdash P}{\vdash} (=)}{\frac{P \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, M, P, P, H, M \vdash P, F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{\frac{F \vdash F}{\vdash} (=)}{\frac{F \vdash F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}{\frac{P, F, M, P, P, H, M, F \vdash F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-l})} (\text{weak-l})} \quad \frac{\frac{M \vdash M}{\vdash} (=)}{\frac{M \vdash F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-r})}
{\frac{\frac{P, F, M, P, P, H, M \vdash P \sqcap \neg F, F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})}{\frac{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F), H, M \vdash F, M, MS}{\vdash} (\neg\text{-l})} (\neg\text{-r})} (\sqcap\text{-r})} \quad \frac{\frac{M \vdash M}{\vdash} (=)}{\frac{M \vdash F, M, MS}{\vdash} (\text{weak-r})} (\text{weak-l})}
{\frac{P, F, M, P, P, \neg(P \sqcap \neg F) \sqcup MS, H, M \vdash F, M, MS}{\vdash} (\sqcup\text{-l})} (\gamma\sigma)}$$

Fonte: O autor (2023)