



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARCOS PAULO DA ROCHA SILVA

Fluidos micropolares: soluções ultra fracas no caso estacionário e optimalidade dos dados
iniciais nas soluções fortes no caso não estacionário

Recife

2023

MARCOS PAULO DA ROCHA SILVA

Fluidos micropolares: soluções ultra fracas no caso estacionário e optimalidade dos dados iniciais nas soluções fortes no caso não estacionário

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586f Silva, Marcos Paulo da Rocha
Fluidos micropolares: soluções ultra fracas no caso estacionário e optimalidade dos dados iniciais nas soluções fortes no caso não estacionário / Marcos Paulo da Rocha Silva. – 2023.
75 f.: il., fig., tab.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Soluções fortes. I. Loayza Lozano, Miguel Fidencio (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-154

MARCOS PAULO DA ROCHA SILVA

Fluidos micropolares: soluções ultra fracas no caso estacionário e optimalidade dos dados iniciais nas soluções fortes no caso não estacionário

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 31/082023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark (Examinador Externo)
Universidade Federal do Delta do Parnaíba

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (Examinador Externo)
Universidad de Tarapacá - Chile

Dedico esta Tese a Deus, glorioso e eterno, que reina para sempre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus criador de todas as coisas, pela esperança em momentos difíceis, pela fé em momentos duvidosos, e pela manutenção diária da vida.

Agradeço amorosamente a minha esposa, Lívia Maria Rodrigues da Silva Rocha, por abdicar da minha presença, passando assim por momentos difíceis que foram superados com respeito e determinação, e a sua família pelas orações feitas e pela confiança em mim depositada.

Agradeço a minha mãe, Maria do Carmo Nunes da Rocha, pelo exemplo de vida transmitido a mim e pela educação que recebi ao longo da minha vida que formaram a base para meu desenvolvimento acadêmico e humano. Agradeço as minhas irmãs, Eline Maria Nunes da Rocha, Fernanda da Silva Rocha e Carmem Lúcia da Rocha Silva pela união e por sempre acreditarem nos avanços por mim conquistados. Agradeço a toda minha família pelo suporte na minha criação.

Agradeço ao Professor Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano que com paciência e dedicação repassou seus conhecimentos matemáticos e pela orientação sem a qual esta tese não seria possível. Agradeço também Professor Dr. Marko Antonio Rojas Medar fonte de inspirados questionamentos e exemplo de pesquisador.

Agradeço as amigas formadas em Recife de maneira especial a, Richel Patriota de Mesquita Rangel e Annielli Araújo Rangel Cunha Patriota, casal acolhedor e autêntico, e a João Pedro Malfado de Paula, jovem de grande futuro, pelas conversas descontraídas e pelas brincadeiras tão importantes para alívio nos dias estressantes. Agradeço aos meus amigos de longa data que me acompanharam na jornada do doutorado Hyon Cordeiro, Lucas Emanuel Mascarenhas e Alverlany da Costa Gomes.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, consideramos Ω um subconjunto limitado de espaço tridimensional euclidiando com fronteira suficientemente regular e, T , o intervalo de tempo, variando de zero a infinito. Analisamos o sistema de equações micropolares no caso estacionário e o sistema de equações micropolares no caso não estacionário, que são constituídos por uma equação de velocidade linear e uma equação de velocidade rotacional, cujo modelo matemático foi descrito por Eringen tendo como base o modelo das equações de Navier-Stokes. As equações de Navier-Stokes envolvem um dos problemas do milênio da matemática que permanece em aberto. Os sistemas de equações trabalhados ao longo da tese são determinados pelos sistemas de equações 3.1 e 4.1 os quais descrevem fluidos que em sua composição apresentam partículas com comportamentos de velocidade angular, como por exemplo, o sangue humano que possui as hemácias em sua constituição. Para o problema estacionário mostramos a existência e unicidade de soluções ultra fracas usando principalmente teoremas de ponto fixo e teoremas de compactidade da análise funcional em espaços funcionais menos regulares e com viscosidade do fluido suficientemente grande. No caso do problema não estacionário mostramos uma condição necessária e suficiente, limitando somente a integral temporal da norma do semigrupo da velocidade linear do fluido encontrando, assim temos o espaço ótimo através de uma aplicação contração e do número de Podri-Serrin, para existência de uma solução forte.

Palavras-chaves: soluções ultra fracas; soluções fortes; micropolar; Podri-Serrin.

ABSTRACT

In this work, we consider Ω a limited subset of three-dimensional Euclidean space with a sufficiently regular boundary and, T , the time interval ranging from zero to infinity. We analyze the system of micropolar equations in the stationary case and the system of micropolar equations in the non-stationary case, which are constituted by a linear velocity equation and a rotational velocity equation whose mathematical model was described by Eringen based on the model of the equations of Navier-Stokes. The Navier-Stokes equations involve one of the millennium problems in mathematics that remains open. The systems of equations worked on throughout the thesis are determined by the systems equations 3.1 and 4.1 describe fluids that in their composition present particles with angular velocity behaviors, such as human blood, which has red blood cells in its constitution. For the stationary problem, we show the existence and uniqueness of ultra-weak solutions using mainly fixed point theorems and compactness theorems from functional analysis in less regular functional spaces and with viscosity of sufficiently large fluid. In the case of the non-stationary problem, we show a necessary and sufficient condition, only under the temporal integral of the norm of the semigroup of the linear velocity of the fluid, thus finding the optimal space through of a contraction application and the Prodi-Serrin number, for the existence of a strong solution.

Keywords: very weak solution; strong solution; micropolar; Prodi-Serrin.

LISTA DE SÍMBOLOS

$$\Gamma = \partial\Omega \text{ fronteira de } \Omega$$

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \{\mathbf{f} : \Omega \rightarrow R^3; \mathbf{f} \text{ é mensurável, } |\mathbf{f}|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p} = \|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{f}|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega); D^{\alpha}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{m,p} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}\mathbf{u}\|_p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in C^k(\Omega), k = 1, 2, 3, \dots \text{e suporte de } \mathbf{u} \text{ é compacto}\}$$

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}},$$

$$L^q(0, T; X) = \{\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow X; \mathbf{f} \text{ é mensurável em } X\}$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L^s(0,T;X)} = \left(\int_0^t \|\mathbf{f}\|_X^s dt \right)^{1/s}, \text{ quando } X = \mathbf{L}^q(\Omega) \text{ usamos } \|\mathbf{f}\|_{L^s(0,T;X)} = \|\mathbf{f}\|_{q,s;T}$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \sum_{i=1} \partial_i u_i$$

$$\mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega); \text{div } \mathbf{u} = 0\}$$

$$D_\sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in D(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$$

$$\boldsymbol{X}_{r,p}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,r}(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)\}$$

$$(\boldsymbol{X}_{r,p}(\Omega))' \text{ espaço dual de } \boldsymbol{X}_{r,p}(\Omega)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times X'} \text{ dualidade em algum espaço } X$$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ESPAÇOS FUNCIONAIS E SEMIGRUPOS	15
2.1	ESPAÇOS DE SOBOLEV	15
2.2	SEMIGRUPOS DE STOKES E LAMÉ	19
2.3	MODELAGEM MATEMÁTICA	20
2.3.1	Modelagem matemática dos fluidos micropolares	22
3	SOLUÇÕES ULTRA FRACAS PARA O SISTEMA MICROPOLAR	26
3.1	INTRODUÇÃO	26
3.2	PRELIMINARES E PRINCIPAIS RESULTADOS	27
3.3	RESULTADOS AUXILIARES	30
3.3.1	Sobre as equações de Lamé and Stokes	31
3.4	EXISTÊNCIA PARA DADOS INICIAIS PEQUENOS	33
3.5	PROVA DO TEOREMA 2.2	36
3.6	PROVA DO TEOREMA 3.4	38
3.6.1	Teorema 2.4	43
3.7	PROVA DO TEOREMA 3.5	45
4	OPTIMALIDADE DO DADO INICIAL NA SOLUÇÃO FORTE DO SISTEMA MICROPOLAR	51
4.1	INTRODUÇÃO	51
4.2	PRELIMINARES	54
4.3	CONSTRUÇÃO DO PONTO FIXO	56
4.4	PROVA DO TEOREMA 3.3	63
4.5	PROVA DO TEOREMA 3.5	66
4.6	PROVA DO TEOREMA 3.7	67
5	PROJETOS FUTUROS	69
5.1	MHD-MICROPOLAR	69
5.2	PROBLEMA DA VORTICIDADE	70
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta tese é estudar o sistema estacionário e não estacionário das equações micropolares dos fluidos incompressíveis.

Primeiramente, consideramos o sistema estacionário dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ -\alpha \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Em 1988, em (LUKASZEWICZ, 1987), G. Lukaszewicz estudou o problema (1.1) com a condição de Dirichlet homogêneo, isto é $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0 = 0$, considerando as forças externas $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, provando a existência de soluções fracas. Usando uma versão do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder obteve também a unicidade da solução fraca, tomando a viscosidade do fluido μ suficientemente grande. No ano 2002, M. Rojas-Medar, G. Lukaszewicz et al., em (LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, 2002), considerando a fronteira Γ regular e dados $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ mostraram a existência e unicidade de uma solução ultra fraca. Eles usaram o método da transposição, veja (LINONS J.L.; MEGENES, 1968), juntamente com o argumento do ponto fixo dividindo a solução em uma parte regular e outra irregular.

Quando $\mathbf{w} = 0$ no problema (1.1) temos as clássicas equações de Navier-Stokes estacionárias. Soluções fracas para estas equações, isto é, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)$, com $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,q}(\Omega)$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$ para algum $q \in [2, \infty)$ podem ser encontradas em (LERAY, 1993), (GALDI, 1994), (GERHARDT, 1979), (LADYZHENSKAYA, 1969), (LADYZHENSKAYA, 1959a), (HOPF, 1941). Quando $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,r}(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = k \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ e $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$, Kim, em (KIM, 2009), estudou as soluções ultra fracas das equações de Navier-Stokes, dividindo o problema em duas partes: a primeira considerando os dados iniciais pequenos e aplicando o teorema do ponto fixo de Banach, com $\mathbf{f}, \mathbf{g}, k$ suficientemente pequenos, e a segunda para dados iniciais grandes usando argumentos de contração dados por Marusic-Paloka-(MARUSIC, 2000). C. Amrouche e M. Rodríguez-Bellido identificaram uma incongruência no trabalho Kim (KIM, 2009), quando é considerado o traço dos dados iniciais menos regulares, dando uma formulação mais rigorosa em (AMROUCHE, 2011).

Tendo em mente os resultados obtidos para as equações de Navier-Stokes, consideramos o problema (1.1), com dados iniciais $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-\frac{1}{r},r}(\Gamma)$, $1 < p, r < \infty$,

e forças externas $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ escolhidas adequadamente. Desta forma damos uma definição precisa para o traço considerando esses dados iniciais. Usando as ideias de Rojas-Medar e Lukaszewicz (LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, 2002) junto com as ideias de Acevedo, Amrouche e Conca (ACEVEDO P.; AMROUCHE, 2019), aplicamos o método da transposição, dividindo a solução em uma parte regular e outra parte irregular, e aplicamos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder ao sistema de equações. Para uma precisa definição do traço, utilizamos os argumentos de C. Amrouche e M.A Rodríguez-Bellido (AMROUCHE, 2011) obtendo a existência de uma solução ultra fraca nos termos do seguinte teorema.

Teorema. Suponha que $p \geq 3$, $r \geq 3p/(p+3)$, $p' < r \leq p$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ com $\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = 0$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$. Existem constantes $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que se

$$\frac{a^2}{\mu} + \mathcal{R} < \lambda_1,$$

onde

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} (\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)})$$

e

$$\frac{1+a}{\mu} \mathcal{R} + \frac{1}{\mu} (\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}) + a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \right) \leq \lambda_2,$$

então existe uma única solução ultra fraca $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ do problema (1.1).

Estudamos também o sistema não estacionário das equações micropolares as quais são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_t - \mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_t - \alpha \Delta w + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w - \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v} = 0, \mathbf{w} = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, T), \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Para $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, a existência global de soluções fracas do problema (4.1) foi obtida por Lukaszewicz em (LUKASZEWICZ, 1987), (LUKASZEWICZ, 1989), sob certas suposições, usando linearização e um teorema do quase ponto fixo, e por Boldrini e Rojas-Medar em (BOLDRINI, 1998) usando o método de Galerkin. Yamaguchi (YAMAGUCHI, 2005) provou a

existência de soluções fortes assumindo $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^3(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com $\|(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)\|_{\mathbf{L}^3 \times \mathbf{L}^3}$ suficientemente pequeno. M. Loayza e M. Rojas-Medar em 2012, veja (ROJAS-MEDAR M.A.; LOAYZA, 2016), estabeleceram um critério de regularidade de tipo Prodi-Serrin provando a existência de uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ num intervalo $(0, T)$, se $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^s(0, T, \mathbf{L}^{r, \infty}(\Omega))$ e $3/r + 2/s = 1$ com $r > 3$.

Para o sistema não estacionário de Navier-Stokes, com $f = \operatorname{div} F \in L^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^{\frac{s}{2}}(0, T; \mathbf{L}^{\frac{q}{2}}(\Omega))$ onde $2 < s < \infty$, $3 < q < \infty$, $\mathcal{S}(s, q) = 1$, Farwig, Sohr e Varnhorn em (FARWIG R.; SOHR, 2009b) estabeleceram uma condição necessária e suficiente para a existência de solução forte a qual exige apenas a limitação da integral do semigrupo aplicado ao dado inicial $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, ou seja, $\int_0^\infty \|e^{-tA} \mathbf{v}_0\|_q^s dt < \infty$, onde $1 < s, q < \infty$ satisfaz a condição de Serrin $\mathcal{S}(s, q) = 2/s + 3/q = 1$.

Seguindo os argumentos usados por Christian Komo para tratar o sistema de equações de Boussinesq em (KOMO, 2014), e as de Farwig, Sohr e Varnhorn (FARWIG R.; SOHR, 2009b) para Navier-Stokes, estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema. Seja s, q, s_1, q_1 como no teorema (4.3). Assuma $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. A condição

$$\int_0^\infty \|e^{-tA} \mathbf{v}_0\|_q^s dt < \infty,$$

com $2/s + 3/q = 1$ é necessária e suficiente para a existência de uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ do problema (1.2) num intervalo $(0, T')$ com $0 < T' \leq T$.

Esta tese está organizada da maneira seguinte. No Capítulo 1 são apresentados os principais resultados que serão usados ao longo da tese. O Capítulo 2 é dedicado ao problema estacionário (1.1) e o Capítulo 3 ao problema não estacionário (1.2). No capítulo 4 apresentamos trabalhos em andamentos sobre a vorticidade do sistema micropolar (1.2) e sobre a solução ultra fraca para o sistema magneto-micropolar

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(p_1 + \frac{s}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) &= a \operatorname{rot} \mathbf{w} + s(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ -\gamma \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \alpha \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \beta \mathbf{w} &= a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{u} + h) + \nabla p_2 &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \mathbf{b} = \mathbf{b}_0, \mathbf{w} &= \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma, \end{array} \right.$$

como dados iniciais em espaços análogos ao do sistema micropolar (1.1) e ao sistema MHD (magneto hidrodinâmico) analisado por Y. Zeng em (ZENG, 2020).

2 ESPAÇOS FUNCIONAIS E SEMIGRUPOS

2.1 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Ao longo da tese $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado do espaço tridimensional. Denotamos o espaço $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach das funções Lebesgue integráveis

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; f \text{ é mensurável, } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com norma $\|f\|_{\mathbf{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. Quando $p = 2$, tem-se um espaço de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega)$. O espaço $\mathbf{L}^p(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$, reflexivo se $1 < p < \infty$ e seu dual é o espaço $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ onde $1/p + 1/p' = 1$.

Sendo X um espaço de Banach e $0 < T \leq \infty$, o espaço $L^q(0, T; X)$, para $1 \leq q \leq \infty$, representa o espaço das funções com valores em X no intervalo $(0, T)$ que são integráveis no sentido de Bochner com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^q(0, T; X)} = \left(\int_0^t \|f\|_X^q dt \right)^{1/q}.$$

Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ definimos os espaços de Sobolev

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathbf{L}^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

com norma usual

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $\mathbf{W}^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{m,p} = \|\cdot\|_{H^m}$. Por definição

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}},$$

onde $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega), k = 1, 2, 3, \dots \text{ e suporte de } u \text{ é compacto}\}$.

Usaremos, ao longo do trabalho, a seguintes estimativa, veja (BREZIS, 2010, Remark 2).

Teorema 2.1 (*Desigualdade de Hölder generalizada*) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $p_i \geq 1$, $f_1, f_2, \dots, f_k$ funções tais que $f_i \in \mathbf{L}^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

Seja $B(\cdot, \cdot, \cdot)$ a forma trilinear dada por $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w})$ onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbf{H}^1(\Omega))$. Pela desigualdade de Hölder temos que

$$|B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{u}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{L^3(\Omega)}.$$

O seguinte resultado é consequência de (TEMAM, 1979, Lemma 1.3).

Lema 2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto com fronteira Lipschitz. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *A forma trilinear B é contínua em $(\mathbf{H}^1(\Omega))^3$.*
2. *$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ com $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em Ω , e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$ ou $\mathbf{w} = 0$ em Γ .*
3. *$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ com $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em Ω , e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$ em Γ .*

Lema 2.3 *(Desigualdade de Hardy-Littlewood) Sejam $0 < \alpha < 1$, $1 < r < q < \infty$ com*

$$\alpha + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

e $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^r(R)$. Então a integral

$$\mathbf{u}(t) := \int_R |t - \tau|^{\alpha-1} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

converge absolutamente para quase todo $t \in R$, e

$$\|\mathbf{u}\|_q \leq C \|\mathbf{f}\|_r$$

com $C = C(\alpha, q) > 0$.

Para a demonstração veja (SOHR, 2001a, Lemma 3.3.2).

Também precisaremos do seguinte lema de Gerhardt, veja (GERHARDT, 1979).

Lema 2.4 *Sejam $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Assuma $1 < p < n$, e também que $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^{p^*}(\Omega)$ está continuamente imerso com $p^* = np/(n-p)$. Então, para qualquer q , $1 \leq q < p^*$, qualquer $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$, $r' = p^*/(p^* - q)$, e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n, \partial\Omega, \varepsilon, p^*, q, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r'}})$, tal que*

$$\int_\Omega |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|^q dx \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}}^q + C_\varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^q}^q.$$

Em particular, para $n = 3$, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p < 3$,

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} + C_\varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \quad (2.1)$$

A seguir temos alguns teoremas de imersões e do traço nos espaços de Lebesgue e de Sobolev. Começamos pela seguinte estimativa de Gagliardo-Nirenberg.

Teorema 2.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^m , e seja $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,r}(\Omega) \cap \mathbf{L}^q(\Omega)$, $1 \leq r, q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j , $0 \leq j < m$, e para qualquer número θ com $\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1$, seja*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q}.$$

Se $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não negativo, então

$$\|D^j \mathbf{u}\|_p \leq C \|\mathbf{u}\|_{m,r}^\theta \|\mathbf{u}\|_q^{1-\theta}.$$

Se $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não negativo a desigualdade ocorre para $\theta = j/m$, onde $C = C(\Omega, r, q, m, j, \theta)$

Para a prova do resultado, veja (LUKASZEWICZ, 1998, Teorema 2.2.2).

As imersões dos espaços de Sobolev são dados no seguinte resultado, veja (LUKASZEWICZ, 1998, Teorema 2.2.1).

Teorema 2.6 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz, então*

1. *Se $kp < n$ então o espaço $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ está continuamente imerso no espaço $\mathbf{L}^{p^*}(\Omega)$, $p^* = \frac{np}{n - kp}$, e compactamente imerso em $\mathbf{L}^q(\Omega)$ para $q < p^*$.*
2. *Se $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m + 1$, então o espaço $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = k - \frac{n}{p} - m$, está compactamente imerso em $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$, para $\beta < \alpha$.*

O seguinte resultado estabelece algumas propriedades dos traços para as funções em $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)$.

Lema 2.7 *Seja Ω um conjunto aberto de classe $C^{1,1}$. Seja s um número real tal que $s \leq 2$, $s - 1/p = m + \sigma$, onde $m \geq 0$ é um número inteiro e $0 < \sigma < 1$.*

1. *A aplicação*

$$\gamma_0 : \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma)$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}|_\Gamma$$

é contínua e sobrejetiva. Quando $1/p < s < 1 + 1/p$, temos que $\text{Ker}(\gamma_0) = \mathbf{W}_0^{s,p}(\Omega)$.

2. Para $m \geq 1$, A seguinte aplicação

$$\begin{aligned} (\gamma_0, \gamma_1) : \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) &\rightarrow \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{s-1-1/p,p}(\Gamma) \\ \mathbf{u} &\mapsto \left(\mathbf{u}|_{\Gamma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} \right) \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetiva . Quando $1+1/p < s < 2+1/p$, temos $\text{Ker}(\gamma_0, \gamma_1) = \mathbf{W}_0^{s,p}(\Omega)$.

Os dois resultados a seguir mostram a existência de uma função lift do contorno Γ preservando algumas de suas propriedades, veja (GALDI, 2011, Lemma IX.4.2) e (ACEVEDO P.;AMROUCHE, 2019, Lemma 2.2) respectivamente.

Lema 2.8 *Seja $\Omega \subset R^3$ um domínio com fronteira de Lipschitz Γ e $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que $\int_{\Gamma} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{v}_0^\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\text{div } \mathbf{v}_0^\epsilon = 0$ em Ω , $\mathbf{v}_0^\epsilon = \mathbf{v}_0$ em Γ e satisfaz*

$$|B(\mathbf{w}, \mathbf{v}_0^\epsilon, \mathbf{w})| \leq \left(\epsilon + \sum_{i=0}^m K_i \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds \right| \right) \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$, onde $K_i = K_i(\Omega) > 0, i = 1, \dots, m$.

Lema 2.9 *Seja $\Omega \subset R^3$ um aberto limitado com fronteira Lipschitz Γ e seja $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Então, para todo $\eta > 0$ existe $\mathbf{w}_0^\eta \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{w}_0^\eta = \mathbf{w}_0$ em Γ e satisfaz*

$$\|\mathbf{w}_0^\eta\|_{L^3(\Omega)} \leq \eta \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}.$$

O seguinte resultado define de forma clara a fórmula de Green para dados singulares na fronteira, veja (AMROUCHE, 2011, Lemma 2). Consideremos o conjunto

$$\mathbf{M}_r(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^r(\Omega); \Delta \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{-2+\frac{1}{r},r}(\Omega)\},$$

para $1 < r < \infty$.

Lema 2.10 *Seja Ω um conjunto aberto limitado de R^3 de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. A aplicação linear $\gamma_0 : \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}|_{\Gamma}$ definida em $D(\overline{\Omega})$ pode ser estendida para uma aplicação contínuo linear $\gamma_0 : \mathbf{M}_r(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$. Além disso, vale a fórmula de Green:*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \Delta \phi \, dx - \langle \Delta \mathbf{v}, \phi \rangle_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{2-1/r,r'}(\Omega)} = \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/r,r'}(\Gamma)},$$

para toda $\mathbf{v} \in \mathbf{M}_r(\Omega)$, $\phi \in \mathbf{W}^{2,r'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega)$.

Uma aplicação contínua entre dois espaços de Banach é dita compacta (ou completamente contínua) se a imagem de conjuntos limitados são precompactos, ou seja, se a imagem de conjuntos fechados são compactos. Segue abaixo o teorema do ponto fixo aplicado nos problema de Dirichlet, veja (GILBARG D.; TRUNDINGER, 1990, Teorema 11.3).

Teorema 2.11 (*Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder*) *Seja T uma aplicação compacta no espaço de Banach B , $T : B \rightarrow B$, e suponha que existe uma constante M tal que $\|x\|_B \leq M$ para todo $x \in B$ e $\sigma \in [0, 1]$ satisfazendo $x = \sigma Tx$. Então T possui um ponto fixo.*

2.2 SEMIGRUPOS DE STOKES E LAMÉ

A norma do espaço $L^p(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$ será denotada como $\|f\|_{q,p;T}$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\partial\Omega \in C^{2,1}$ e $1 < q < \infty$. O espaço $\mathbf{L}_\sigma^q(\Omega)$ representa o subespaço vetorial das funções em $\mathbf{L}^q(\Omega)$ com divergente nulo no sentido das distribuições. A aplicação $P_q : \mathbf{L}^q(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega)$ é a projeção de Helmholtz. Denotemos por $\mathcal{L}_q = -\alpha\Delta - \beta\nabla\text{div} + \gamma$ operador de Lamé com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{L}_q) = \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,q}(\Omega)$. Definimos o operador Stokes por

$$\mathcal{D}(A_q) = \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,q}(\Omega), \quad A_q \mathbf{v} = -P_q \Delta_q \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_q).$$

O operador Stokes é consistente no sentido de que para $1 < q, r < \infty$

$$A_q \mathbf{v} = A_r \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_q) \cap \mathcal{D}(A_r). \quad (2.2)$$

Considerando o operador Stokes e o operador Lamé com seus respectivos semigrupos temos as seguintes propriedades de decaimento.

$$\|A_q^\alpha e^{-tA_q}\|_q \leq ct^{-\alpha}, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$\|(-\mathcal{L}_q)^\alpha e^{t\mathcal{L}_q}\|_q \leq ct^{-\alpha}, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

onde $\alpha > 0$, $q > 1$ e $c = c(\Omega, q, \alpha) > 0$. Também

$$\|\phi\|_\gamma \leq c \|A_q^\alpha \phi\|_q \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(A_q^\alpha), \quad (2.5)$$

$$\|\psi\|_\gamma \leq c \|(-\mathcal{L}_q)^\alpha \psi\|_q \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((-\mathcal{L}_q)^\alpha), \quad (2.6)$$

com $c = c(\Omega, q, \alpha) > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 < q < \infty$ e $2\alpha + \frac{3}{\gamma} = \frac{3}{q}$. Ainda mais

$$\mathcal{D}(A_q^{\frac{1}{2}}) = \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) \cap \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega), \quad \|\nabla \phi\|_q \leq c \|A_q^{\frac{1}{2}} \phi\|_q, \quad \phi \in \mathcal{D}(A_q^{\frac{1}{2}}), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{D}((-\mathcal{L})_q^{\frac{1}{2}}) = \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega), \quad \|\nabla \phi\|_q \leq c \|(-\mathcal{L})_q^{\frac{1}{2}} \phi\|_q, \quad \phi \in \mathcal{D}((-\mathcal{L})_q^{\frac{1}{2}}).$$

Lema 2.12 *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2,1}$, $0 < T \leq \infty$, $s > 1$, $p > 3/2$ e $F \in L^s(0, T; \mathbf{L}^p(\Omega))$. Escolha $r, \sigma \geq 0$ com*

$$2\sigma + \frac{3}{r} = \frac{3}{p}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

e $\beta = 1/2 + \sigma$. Então

$$\Phi_r(t) := \int_0^t A_r^\beta e^{-(t-\tau)A_r} A_r^{-\beta} P_r \operatorname{div} F(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

é um elemento bem definido de $\mathbf{L}_\sigma^r(\Omega)$ para quase todo $t \in [0, T)$. Além disso, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Para t q.s. em $(0, T)$

$$\int_0^t A_r^\beta e^{-(t-\tau)A_r} A_r^{-\beta} P_r \operatorname{div} F(\tau) d\tau = A_r^\beta \int_0^t e^{-(t-\tau)A_r} A_r^{-\beta} P_r \operatorname{div} F(\tau) d\tau.$$

2. Para $i = 1, 2$ escolha $r_i, \sigma_i \geq 0$ satisfazendo (2.8) com r, σ substituído por r_i, σ_i . Então

$$\Phi_{r_1}(t) = \Phi_{r_2}(t), \quad \text{a.e. } t \in [0, T). \quad (2.10)$$

Portanto, denotamos o termo em (2.9), como sendo independente de $r, \sigma \geq 0$ satisfazendo (2.8), por Φ .

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A matemática tem sido pedra fundamental para o desenvolvimento tecnológico da humanidade por meio dos modelos matemáticos, que representam de forma abstrata fenômenos físicos, permitindo a compreensão e a transformação da realidade de forma mais previsível e controlada.

A mecânica dos fluidos com as equações de Navier-Stokes, formulada por Claude Louis Marie Heini Navier e George Gabriel Stkoes em 1822, oferecem o modelo matemático que

descreve o escoamento de fluidos utilizando as derivadas parciais para determinar campos de velocidade e pressão num escoamento, sendo $\Omega \subset R^3$ um domínio, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ o campo velocidade, e π a pressão.

O seguinte sistema de equações descreve o fluido estacionário,

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla\pi &= f, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

O sistema não estacionário é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla\pi &= f, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

As equações de Navier-Stokes têm sido amplamente estudadas, tanto o modelo estacionário quanto o modelo não estacionário, por matemáticos como Jean Leray, Eberhard Hopf, Olga Ladyzhenskaya, Robert Finn, Gadi e outros, veja (LADYZHENSKAYA, 1959b), (LADYZHENSKAYA, 1969), (FINN, 1959), (FINN R.;NOLL, 1957), (HOPF, 1952), (HOPF, 1957), (LIONS, 1969), (LERAY J.;SCHAUDER, 1934), (GALDI, 2011). Mesmo assim, problemas sobre essas equações ainda permanecem em aberto, como a questão da unicidade de soluções em um espaço tridimensional.

A teoria dos fluidos micropolares é uma generalização das equações de Navier-Stokes (2.11), a qual foi proposta por Eringen em 1966, veja ((ERINGEN, 1966)), para lidar com uma classe de fluidos que exhibe efeitos microscópicos na estrutura local e micromovimentos dos elementos do fluido. Uma subclasse desses fluidos são os fluidos micropolares, que exibem efeitos rotacionais e inércia microrotacional. Esse problema tem atraído a atenção dos matemáticos devido a sua simplicidade e elegância em sua formulação matemática. Fisicamente eles podem ser descritos adequadamente por elementos semelhantes a certos fluidos anisotrópicos, por exemplo, compostos de moléculas halteres, o sangue, fluidos poliméricos contendo certos aditivos, etc. Experimentos com fluidos contendo aditivos poliméricos extremamente pequenos indicam que o atrito da pele perto de um corpo rígido é consideravelmente menor do que os mesmos fluidos sem aditivos, veja (HOYT J.W.; FABULA, 1964), (VOGEL W.M.;PATTERSON, 1964). A teoria clássica de Navier-Stokes é incapaz de prever essas descobertas pois não contém nenhum mecanismo para explicar esses novos fenômenos. Na conferência Naval em Bergen, Eringen sugeriu a teoria micropolar que tinha o mecanismo necessário para controlar esses novos efeitos.

2.3.1 Modelagem matemática dos fluidos micropolares

Considere as leis de conservação hidrodinâmica para fluidos isotrópicos.

- Lei da Conservação da Massa: advém dos primeiros trabalhos do russo Mikhail Vasilyevich Lomonosov (1711 -1775) divulgados mais amplamente por Antoine Laurent de Lavoiser (1743 -1794), no quais observaram que em um sistema fechado a massa total não varia, quaisquer que sejam as transformações que venham ocorrer. Aqui surge a famosa expressão que, nada cria-se e nem perde-se tudo se transforma. Para os fluidos a Lei da Conservação da massa diz: a massa do fluido em um volume material Ω , não varia em Ω conforme o fluido movimenta-se. Seja $\rho(x, t)$ a função massa por unidade de volume (densidade) no ponto x e no tempo t então.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.12)$$

- Lei da Conservação do Momento Linear: É uma consequência das Leis de Newton, que em sua forma geral nos diz que em um sistema fechado o momento linear é constante. Para fluidos a lei da conservação do momento linear, estabelece que a variação do momento linear é igual as força resultante sobre o volume.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f},$$

onde $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$ é a matriz chamada tensor stress.

- Lei da conservação do momento angular: quando em um sistema fechado, o torque das forças resultantes externas sobre o sistema é nulo, o momento angular é nulo. Em fluidos micropolares temos uma força de torque ρg , além da força do próprio corpo, e uma tensão $\mathbf{C}$ além da tensão normal.

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{C} + \rho g + T_x. \quad (2.13)$$

- Lei de conservação da energia: O aumento da energia total em um sistema em um volume material é a soma do calor trocado e o trabalho realizado.

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{C} : (\nabla \omega) - T_x \cdot \omega. \quad (2.14)$$

Em hidrodinâmica clássica, $C = 0, g = \omega = 0$. Então por (2.13) o tensor stress é simétrico, as equações (2.12) - (2.14) são reduzidas para,

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \\ \rho \frac{DE}{Dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Portanto o modelo dos fluidos micropolares contém o modelo de Navier-Stokes como caso particular, fazendo em (2.12) - (2.14), $C = 0, g = \omega = 0$ e definindo $\mathbf{T}$ por,

$$T_{ij} = (-p + \lambda \mathbf{v}_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}). \quad (2.15)$$

A definição de (2.15) é consequência dos postulados de George Stokes sobre as propriedades fundamentais dos fluidos, os postulados seguem (SERRIN, 1959), (ARIS, 1962).

- (i) O tensor stress é a função contínua da deformação e do estado termodinâmico local, independente de outras grandezas cinemática.
- (ii) O fluido é homonegêno quando $\mathbf{T}$ não depende explicitamente de x .
- (iii) O fluido é isotrópico quando não há direção preferencial.
- (iv) Quando não existe deformação o stress é hidrostático ($\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ é matriz unitária).

Os fluidos que satisfazem esses postulados são chamados de Stokesian, foi provado em (SERRIN, 1959), (ARIS, 1962) que de forma mais geral o tensor stress é,

$$\mathbf{T} = (-p + \alpha)\mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2$$

onde p, α, β, γ são funções que dependem do estado termodinâmico, sendo α, β, γ dependente também dos invariantes do tensor deformação. Além disso quando a dependência dos componentes de $\mathbf{T}$ sobre os componentes da deformação é postulada como linear o tensor stress pode ser escrito como

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{div} \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$$

que coincide com (2.15).

Para obter o modelo do fluido micropolar temos que especificar o tensor stress $\mathbf{T}$ e o tensor acoplado no sistema de equações (2.12) - (2.14), ou seja, definir as equações constituintes bem como especificar as equações de estado.

Definimos fluidos micropolares, como um fluido isotrópico com tensor stress T e tensor acoplado C dados por (ERINGEN, 1966), (PETROSYAN, 1984).

$$T_{ij} = (-p + \lambda \mathbf{v}_{k,k})\delta_{ij} + \mu(\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}) + \mu_r(\mathbf{v}_{j,i} - \mathbf{v}_{i,j}) - 2\mu_r \epsilon_{mij}\omega_m \quad (2.16)$$

e

$$C_{ij} = c_0 \omega_{k,k} \delta_{ij} + c_d(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + c_a(\omega_{j,i} - \omega_{i,j}). \quad (2.17)$$

A parte simétrica do tensor stress T em (2.6) é

$$T_{ij}^{(s)} = (-p + \lambda \mathbf{v}_{k,k})\delta_{ij} + \mu(\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}),$$

que é o tensor da termodinâmica clássica onde λ, μ são coeficientes de viscosidade, c_0, c_a, c_d são constantes do coeficiente angular. Substituindo T e C de (2.16), (2.17) nas leis (2.12) - (2.14) obtemos as seguintes equações de campo.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + (\lambda + \mu - \mu_r) \nabla \text{div} \mathbf{v} + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \text{rot} \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{f} \\ \rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} &= 2\mu_r (\text{rot} \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \text{div} \boldsymbol{\omega} + (c_a + c_d) \Delta \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\rho \text{div} \mathbf{v} + \rho \Phi - \nabla q \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho \Phi &= \lambda (\text{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu D : D + 4\mu_r \left(\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right)^2 \\ &+ \omega (\text{div} \boldsymbol{\omega})^2 + (c_a + c_d) \nabla \boldsymbol{\omega} : \nabla \boldsymbol{\omega} \\ &+ (c_d - c_a) \nabla \boldsymbol{\omega} : (\nabla \boldsymbol{\omega})^T \end{aligned}$$

é a função dissipação de energia mecânica por unidade de massa. Denotamos o tensor deformação por

$$D = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}).$$

Os resultados nesta tese consideram um sistema obtido a partir das equações (2.19) - (2.20) com fluidos incompressível viscoso, ou seja, $\mu > 0$ e $\text{div} = 0$, e que a energia interna específica do fluido é proporcional à sua temperatura, pela lei de Fourier. Assim as equações (2.18) - (2.20) tornam-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \operatorname{rot} \omega + \rho \mathbf{f}$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega \right) = 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\omega) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + (c_a + c_d) \Delta \omega + \rho \mathbf{g}.$$

Reescrevendo as equações (4.11) e (4.12) obtemos o sistema que será estudo ao longo desta tese. Tanto a versão estacionária em um primeiro momento quanto a versão não-estacionária em um segundo momento.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \alpha \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

3 SOLUÇÕES ULTRA FRACAS PARA O SISTEMA MICROPOLAR

3.1 INTRODUÇÃO

Seja $\Omega \subset R^3$ um domínio limitado de classe $C^{2,1}$. Consideramos o sistema dos fluidos estacionários micropolares dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ -\alpha \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

com condições de contorno

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \quad \text{em } \partial\Omega = \Gamma.$$

Assumimos que a fronteira Γ , não é necessariamente conexa, ou seja, pode ser a união disjunta de seus componentes conexos $\Gamma_i, i = 0, 1, \dots, m$, onde Γ_0 representa a fronteira exterior que contém Γ e todas as fronteiras $\Gamma_i, i = 1, \dots, m$.

No problema (3.1), as incógnitas são o campo de velocidade $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, a pressão π e o campo de velocidade angular da rotação das partículas do fluido $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Os campos $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ representam forças externas de momento linear e angular. As constante $\mu = \nu + \nu_r$, $a = 2\nu_r$, $\alpha = c_a + c_d$, $\beta = c_0 + c_d - c_a$, $\gamma = 4\nu_r$, com $\nu, \nu_r, c_0, c_a, c_d > 0$ são valores positivos e representam propriedades isotrópicas do fluido (LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, 2002).

Para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ definimos a divergência de $\mathbf{u}$ como $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i$, o gradiente $\mathbf{u}$ com $\nabla \mathbf{u} = (\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3)$, o laplaciano de $\mathbf{u}$ como $\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$, o rotacional por $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$, onde $\partial_i u_j$ denota a i -ésima derivadas parcial de u_j , e a i -ésima componente do vetor $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}$ é dado por $\sum_{j=1}^3 u_j \partial_j w_i$.

O sistema (3.1) expressa o equilíbrio entre o momento, a massa e o momento do momento. Para a derivação e discussão física veja Petrosyan (PETROSYAN, 1984), Condiff-Dhaller (CONDIFF; DAHLER, 1964) Eringen (ERINGEN, 1966) and Lukaszewicz (LUKASZEWICZ, 1998). Observe que o problema (3.1) inclui como caso particular o sistema de Navier-Stokes da hidrodinâmica clássica $-\mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = \mathbf{f}$, que tem sido amplamente estudado, veja por exemplo os livros de Ladyzhenskaya (LADYZHENSKAYA, 1969) ou Temam (TEMAM, 1979), e as

referências nele contidas. Em particular, sabe-se que se $v_0 \in \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$, com $p > 3/2$, então existe pelo menos uma solução fraca $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, (LADYZHENSKAYA, 1969) e (TEMAM, 1979). Para a condição de contorno inicial $v_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ foi introduzida a noção de soluções ultra fracas para equações de Navier por Conca (CONCA, 1989), (CONCA, 1987). Este resultado foi estendido por Marusic-Paloka (MARUSIC, 2000) para a equação de Navier-Stokes. Para condição de fronteira $v_0 \in \mathbf{W}^{-1/3,3}(\Gamma)$ e $\mathbf{f} \in [\mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)]'$, Kim (KIM, 2009) mostrou a existência de uma solução ultra fraca $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$. Este resultado foi posteriormente melhorado por Amrouche e Rodríguez-Bellido (AMROUCHE, 2011) considerando uma estrutura funcional adequada e definindo apropriadamente os traços de campos vetoriais não regulares.

O problema (3.1), com $v_0 = w_0 = 0$ e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, foi estudado por Lukaszewicz (LUKASZEWICZ, 1987). Veja também (LUKASZEWICZ, 1998) para mais referências. O caso quando $v_0, w_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ foi estudado por Lukaszewicz, Rojas-Medar et. al (LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, 2002). Eles mostraram a existência de uma solução ultra fraca (veja a Definição 1) $(v, \pi, w) \in \mathbf{L}^3(\Omega) \times W^{-1,3}(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ para $a \leq c^* \mu$, onde c^* é uma constante específica. A unicidade também foi estabelecida para μ grande.

Estamos interessados na existência e unicidade de soluções ultra fracas para o problema (3.1) assumindo que $v_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ e $w_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, $1 < p, r < \infty$. Em nossa abordagem, usamos o contexto funcional estabelecido em (AMROUCHE, 2011).

3.2 PRELIMINARES E PRINCIPAIS RESULTADOS

Consideramos os espaços $\mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ e $D_\sigma(\Omega) = \{\mathbf{u} \in D(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$. Para $1 < r, p < \infty$ definimos

$$\mathbf{X}_{r,p}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)\},$$

e $\mathbf{X}_{p,p}(\Omega) = \mathbf{X}_p(\Omega)$ para $r = p$. O conjunto $D(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ e para todo $q \in W^{-1,p}(\Omega)$ e $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ temos que

$$\langle \nabla q, \boldsymbol{\phi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]' \times \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = -\langle q, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle_{W^{-1,p} \times W_0^{1,p'}},$$

veja (AMROUCHE, 2011, Lemma 8). O espaço dual de $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ é caracterizado da seguinte forma. Dado $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r,p}(\Omega))'$ existe $F_0 = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ tal que $F_0 \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$, $f_1 \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot F_0 + \nabla f_1. \quad (3.2)$$

Além disso,

$$\|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r,p}(\Omega))'} = \max\{\|f_{ij}\|_{L^r}, \|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{W}^{-1,p}}; 1 \leq i, j \leq 3\}.$$

Por outro lado, se $\mathbf{f}$ satisfaz (3.2), então $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r,p}(\Omega))'$, veja (AMROUCHE, 2011, Lemma 9).

Como consequência ocorre a seguinte imersão

$$\mathbf{W}^{-1,r}(\Omega) \hookrightarrow (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))' \hookrightarrow \mathbf{W}^{-2,p}(\Omega),$$

sempre que $1/r \leq 1/p + 1/3$.

Soluções ultra fracas para o problema (3.1) são entendidas no seguinte sentido.

Definição 1 *Seja $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$ tal que $p \geq 3$ e $r \geq 3p/(p+3)$. Dizemos que um tripla de funções*

$$(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$$

é uma solução ultra fraca do problema (3.1) se as seguintes identidades forem válidas

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu(\mathbf{v}, \Delta\phi) - B(\mathbf{v}, \phi, \mathbf{v}) = \langle \pi, \operatorname{div}\phi \rangle_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\Omega)} + a(\mathbf{w}, \operatorname{rot}\phi) \\ \quad + \langle \mathbf{f}, \phi \rangle_{(\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))' \times \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ \quad - \mu \left\langle \mathbf{v}_0, \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi dx = \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \\ (\mathbf{w}, \mathcal{L}\psi) - B(\mathbf{v}, \psi, \mathbf{w}) + \gamma(\mathbf{w}, \psi) = a(\mathbf{v}, \operatorname{rot}\psi) + \langle \mathbf{g}, \psi \rangle_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{2-1/r,r'}(\Omega)} \\ \quad - \alpha \left\langle \mathbf{w}_0, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/r,r'}(\Gamma)} \\ \quad - \beta \left\langle \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n}, \operatorname{div}\psi \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/r,r'}(\Gamma)}, \end{array} \right.$$

para toda $\phi \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$, $\phi|_{\Gamma} = \operatorname{div}\phi|_{\Gamma} = 0$, $\varphi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, e $\psi \in \mathbf{W}^{2,r'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega)$.

Aqui $\mathcal{L} = -\alpha\Delta - \beta\nabla\operatorname{div}$ é o operador de Lamé e B é a forma trilinear definida por $B(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{z}, \mathbf{w})$.

Observações 3.1 1. Note que $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega) \subset \mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)$ pela imersão de Sobolev se $1/r \leq 1/p + 1/3$. Assim, a condição $\phi|_{\Gamma} = \operatorname{div}\phi|_{\Gamma} = 0$ garante que $\phi \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ e o termo $\langle \mathbf{f}, \phi \rangle_{(\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))' \times \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}$ faz sentido.

2. O termo $B(\mathbf{v}, \phi, \mathbf{v})$ faz sentido se assumirmos $p \geq 3$. Isso é claro desde que $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\nabla\phi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega)$ com $1/q = 2/3 - 1/p$. Um argumento semelhante justifica que o termo $B(\mathbf{v}, \psi, \mathbf{w})$ faz sentido para $p \geq 3$.

3. Os termos $(\mathbf{w}, \mathcal{L}\psi)$, $(\mathbf{w}, \psi)$ e os termos do lado direito da terceira equação na Definição 1 também fazem sentido, veja os Lemas 2.7, 2.10 e 3.6.

Nosso primeiro resultado fornece a existência de uma solução ultra fraca do problema (3.1) assumindo a pequenez dos dados iniciais.

Teorema 3.2 *Suponha que $p \geq 3$, $r \geq 3p/(p+3)$ e $p' < r \leq p$. Seja $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ com $\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = 0$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$.*

Existe $\rho_1 = \rho_1(\Omega, p, r) > 0$ tal que se $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$ verificam

$$\frac{a^2}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right) \right) < \rho_1 \quad (3.3)$$

então existe pelo menos uma solução ultra fraca $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ do problema (3.1) tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} &\leq C \left[\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right) \right], \\ \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)} &\leq aC \left[\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right) \right] \\ &\quad + C \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right), \end{aligned}$$

onde $C = C(r, p, \Omega) > 0$.

Observações 3.3 1. As condições $p \geq 3$ e $r \geq 3p/(p+3)$ implicam que $p' \leq r$. Além disso, se $p = 3$, o resultado pode ser aplicado para $3/2 < r \leq 3$.

2. Quando $a = 0$, $\mathbf{w}_0 = 0$, $\mathbf{g} = 0$ a condição (3.3) se reduz a

$$\left(\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right) \leq \rho_1$$

que coincide com o resultado obtido em (AMROUCHE, 2011, Theorem 19).

Considerando a pequenez dos fluxos de $\mathbf{v}_0$ através de cada componente conexa da fronteira somos capazes de mostrar o seguinte resultado da existência.

Teorema 3.4 *Assuma que $3 \leq r \leq p$, $r > p'$, $r \geq 3p/(p+3)$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$, com $\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma} = 0$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1,pr/(r+p)}(\Omega)$. Suponha que*

$\rho_1 > \frac{a^2}{\mu}$, onde ρ_1 é dado no Teorema 3.2, e existe $\rho_3 > 0$ satisfazendo $\frac{a}{\alpha} + \frac{2}{\mu}\rho_3 < \rho_2$, onde ρ_2 é definido na Proposição 3.12, tal que

$$\sum_{i=0}^m \left| \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma_i) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma_i)} \right| < \rho_3. \quad (3.4)$$

Então existe uma solução ultra fraca $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ do problema (3.1).

A unicidade da solução do problema (3.1) é estabelecida no próximo resultado.

Teorema 3.5 *Assuma as hipóteses do Teorema 3.2 com $r, p \geq 3$. Suponha que*

$$\frac{a^2}{\mu} + \mathcal{R} < \rho_1,$$

onde ρ_1 é dado no Teorema 3.2 e

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right).$$

Existe uma constante $\rho_5 = \rho_5(\Omega) > 0$ tal que se

$$\frac{1+a}{\mu} \mathcal{R} + \frac{1}{\mu} \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}} \right) + a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \right) \leq \rho_5, \quad (3.5)$$

Então existe uma única solução ultra fraca $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ do problema (3.1).

3.3 RESULTADOS AUXILIARES

Como precisamos definir o operador *div* consideremos o espaço de Banach

$$\mathbf{E}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^r(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} \in W^{-1+1/r,r}(\Omega)\}$$

com a norma

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}(\Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{W^{-1+1/r,r}(\Omega)}.$$

Lema 3.6 *Seja Ω um conjunto aberto limitado de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Então $D(\overline{\Omega})$ é denso $\mathbf{E}(\Omega)$ e existe uma aplicação contínuo linear $\gamma_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}(\Omega); W^{-1/r,r}(\Gamma))$ tal que $\gamma_n \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, a restrição em Γ , tal que para todo $\mathbf{v} \in D(\overline{\Omega})$ a seguinte fórmula de Stokes generalizada vale*

$$(\mathbf{v}, \nabla \phi) + \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \phi \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)} = \langle \gamma_n \mathbf{v}, \gamma_0 \phi \rangle_{W^{-1/r,r}(\Gamma) \times W^{1/r,r'}(\Gamma)}, \quad (3.6)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{E}(\Omega)$ e $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$.

Observação 3.7 O termo $\langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \phi \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)}$ faz sentido para $\phi \in W^{1-1/r,r'}(\Omega)$ porque $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W^{1,r'}(\Omega)$, veja (GRISVARD, 1985).

Para mostrar que $D(\overline{\Omega})$ é denso, consideramos um funcional $l \in (\mathbf{E}(\Omega))'$. Logo, existe um par $(k, h) \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r}(\Omega)$ tal que

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{v} k dx + \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, h \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)},$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{E}(\Omega)$. Pelo teorema de Hahn-Banach é suficiente provar que se $l = 0$ em $D(\overline{\Omega})$ então $l = 0$ em $\mathbf{E}(\Omega)$. Portanto, assumamos que $l = 0$ em $D(\overline{\Omega})$. Logo $l = 0$ em $D(\Omega)$, ou seja,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} k dx + \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, h \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r}(\Omega)} = 0,$$

para todo $\mathbf{v} \in D(\Omega)$. Por outro lado, $k = \nabla h \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$ e $h \in W^{1,r'}(\Omega)$. Usando a densidade $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $W^{1,r'}(\Omega)$ existe uma sequência $(\phi_k)_k \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $\phi_k \rightarrow h$ in $W^{1,r'}(\Omega)$. Então, para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{E}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \langle l, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla h dx + \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, h \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla \phi_k dx + \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \phi_k \rangle_{W^{-1+1/r,r}(\Omega) \times W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $l = 0$ em $\mathbf{E}(\Omega)$.

A fórmula (3.6) claramente ocorre para $\mathbf{v} \in D(\Omega)$ e $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$. Seja $\mu \in W^{1/r,r'}(\Gamma)$ and $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$ tal que $\mu = \phi$ in Γ com $\|\phi\|_{W^{1,r'}(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{W^{1/r,r'}(\Gamma)}$ para alguma constante $C > 0$. Consequentemente, para $\mathbf{v} \in D(\overline{\Omega})$ e $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \langle \gamma_n \mathbf{v}, \mu \rangle_{W^{-1/r,r}(\Gamma) \times W^{1/r,r'}(\Gamma)} \right| &\leq \|\gamma_n \mathbf{v}\|_{W^{-1/r,r}(\Omega)} \|\mu\|_{W^{1/r,r'}(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^{r'}(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{W^{-1+1/r,r}(\Omega)} \|\phi\|_{W_0^{1-1/r,r'}(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \|\phi\|_{W^{1,r'}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \|\mu\|_{W^{1/r,r'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Portanto, γ_n é contínua na norma de $\mathbf{E}(\Omega)$. Pela densidade de $D(\overline{\Omega})$ em $\mathbf{E}(\Omega)$ concluímos que $\gamma_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}(\Omega); W^{-1/r,r}(\Gamma))$ e igualdade (3.6) ocorre para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{E}(\Omega)$, $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$.

3.3.1 Sobre as equações de Lamé and Stokes

Assuma que Ω é um conjunto aberto conexo limitado de classe $C^{1,1}$. A existência de uma solução fraca e de uma solução forte para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} \mathcal{L} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\mathcal{L} = -\alpha\Delta - \beta\nabla\text{div}$ é o operador de Lamé, pode ser obtido da mesma forma que para o operador laplaciano, veja (GRISVARD, 1985).

O conceito de solução ultra fraca para $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$ é dado da seguinte forma. Dizemos que $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ é uma solução ultra fraca do problema (3.7) se

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \mathbf{u}\mathcal{L}\psi dx + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{w}\psi &= \langle \mathbf{g}, \psi \rangle_{\mathbf{W}^{-2+1/r}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{2-1/r,r'}(\Omega)} - \alpha \left\langle \mathbf{w}_0, \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/r,r'}(\Gamma)} \\ &\quad - \beta \langle \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n}, \text{div } \psi \rangle_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/r,r'}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

para todo $\psi \in \mathbf{W}^{2,r'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega)$.

O seguinte resultado resume a existência de uma solução forte, fraca e ultra fraca para o problema (3.7). A existência de uma solução ultra fraca pode ser demonstrada seguindo os mesmos argumentos de (AMROUCHE, 2011, Teorema 7).

Teorema 3.8 *Seja Ω um conjunto aberto de classe $C^{1,1}$ e $1 < r < \infty$.*

1. *Se $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{m-2,r}(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{m-1/r,r}(\Omega)$ com $m = 1, 2$, então o problema (3.7) tem uma única solução $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,r}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, \Omega, r) > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,r}(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{m-2,r}(\Omega)} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{m-1/r,r}(\Gamma)} \right).$$

2. *Se $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, com $1 < r < \infty$, então o problema (3.7) admite uma única solução ultra fraca $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, \Omega, r) > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{w}\|_{\tilde{\mathbf{M}}_r(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right),$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}_r(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^r(\Omega); \mathcal{L}\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)\}$.

Agora, consideremos o problema de Stokes

$$\begin{cases} -\nu\Delta \mathbf{u} + \nabla \pi &= \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.8)$$

Um resultado básico sobre soluções fracas e fortes para o problema (3.8) é o seguinte, veja (CATTABRIGA, 1961).

Teorema 3.9 *Seja $\mathbf{f} \in W^{-1,p}(\Omega)$ e $\mathbf{u}_b \in \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)$ tal que $\langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{W^{1-1/p,p}(\Gamma) \times W^{1/p,p'}(\Gamma)} = 0$. O problema de Stokes (3.8) admite exatamente uma solução $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)/R$, e existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e Ω , tal que*

$$\nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\Omega)/R} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}_b\|_{\mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Além disso, se $\mathbf{f} \in L^p(\Omega)$ e $\mathbf{u}_b \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$, então $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)/R$ e existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e Ω , tal que

$$\nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,p}(\Omega)/R} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}_b\|_{W^{2-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Soluções ultra fracas para o problema (3.8) são definidos da seguinte forma. Dizemos que $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ é uma solução ultra fraca de (3.8) se as seguintes igualdades são válidas

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nu \mathbf{u} \Delta \psi dx - \langle \pi, \operatorname{div} \psi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p'}(\Omega)} &= \langle \mathbf{f}, \psi \rangle_{(X_{r',p'}(\Omega))' \times X_{r',p'}(\Omega)} \\ &\quad - \nu \left\langle \mathbf{u}_b, \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \varphi dx &= \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

para qualquer $\psi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega); \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ e $\varphi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$.

Para a existência de uma solução ultra fraca temos o seguinte resultado que foi estabelecido em (AMROUCHE, 2011, Theorem 11).

Teorema 3.10 *Seja $\mathbf{f} \in (X_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{u}_b \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ tal que $\langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = 0$, com $1/p \leq 1/r \leq 1/p + 1/3$. O problema de Stokes (3.8) tem uma única solução ultra fraca $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/R$ que verifica a seguinte estimativa*

$$\nu \|\mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{-1,p}(\Omega)/R} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{(X_{r',p'}(\Omega))'} + \nu \|\mathbf{u}_b\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right),$$

para alguma constante $C = C(p, r, \Omega) > 0$.

3.4 EXISTÊNCIA PARA DADOS INICIAIS PEQUENOS

Esta seção é dedicada à prova do Teorema 3.2. Precisamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 3.11 *Sejam $3 \leq p, p' < r$, $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$ e*

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Existe $\rho_0 = \rho_0(p, r, \Omega) > 0$ de modo que para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{E}; \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{L}^p} \leq \rho_0\}$, existe uma solução ultra fraca $\mathbf{w} = \mathcal{M}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ do seguinte problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathbf{w} + \gamma\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.9)$$

Aém disso, para $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{B}$ as seguintes estimativas ocorrem:

$$\|\mathcal{M}\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^r} \leq 2C_4 (a\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}), \quad (3.10)$$

$$\|\mathcal{M}\mathbf{v}_1 - \mathcal{M}\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{L}^r} \leq 2C_6 (a + \|\mathcal{M}\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{L}^r}) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{L}^p}, \quad (3.11)$$

onde as constantes C_4 e C_6 podem ser determinado explicitamente.

Pelo Teorema 3.8(ii), existe uma única solução ultra fraca $\widehat{\mathbf{w}}_1 \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ verificando

$$\begin{cases} \mathcal{L}\widehat{\mathbf{w}}_1 + \gamma\widehat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \widehat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

e a seguinte estimativa é válida

$$\|\widehat{\mathbf{w}}_1\|_{\mathbf{L}^r} \leq C_0 (\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)}) \quad (3.12)$$

para alguma constante $C_0 > 0$.

Como $r > p'$ segue que $pr/(r+p) > 1$. Portanto, para $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \in \mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)$. Além disso, como Ω é limitado concluímos que $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^{\frac{pr}{p+r}}(\Omega)$ e portanto $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)$. Por isso, $a \operatorname{rot} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} \in \mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)$.

Pelo Teorema 3.8(i), existe uma única solução fraca $\widehat{\mathbf{w}}_2 \in \mathbf{W}^{1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}\widehat{\mathbf{w}}_2 + \gamma\widehat{\mathbf{w}}_2 = a \operatorname{rot} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} & \text{em } \Omega, \\ \widehat{\mathbf{w}}_2 = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

e pela imersão de Sobolev $\mathbf{W}^{1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega) \subset \mathbf{L}^r(\Omega)$, que ocorre porque $p \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{w}}_2\|_{\mathbf{L}^r} &\leq C_1 \left(\|a \operatorname{rot} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)} \right) \\ &\leq C_1 a \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}} + C_1 \|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}} \\ &\leq C_1 a \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{\frac{pr}{p+r}}} + C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq aC_1 C_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq C_3 (a \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $C_2 = |\Omega|^{1/r}$ e $C_3 = \max\{C_1 C_2, C_1\}$. Fazendo $\widehat{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{w}}_1 + \widehat{\mathbf{w}}_2 \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ obtemos

$$\begin{cases} \mathcal{L}\widehat{\mathbf{w}} + \gamma\widehat{\mathbf{w}} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (3.14)$$

e das desigualdades (3.12) e (3.13) obtemos

$$\|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^r} \leq C_4 (a\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}), \quad (3.15)$$

onde $C_4 = \max\{C_0, C_3\}$.

Para $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, sejam $\widehat{\mathbf{w}}_1$ e $\widehat{\mathbf{w}}_2$ duas soluções ultra fracas do problema (3.14) obtidos pelo processo anterior. Desde que $\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2$ satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2) + \gamma(\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) & \text{em } \Omega, \\ (\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2) = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

e $(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \in \mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}(\Omega)$, usando novamente Teorema 3.8(i), obtemos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2\|_{\mathbf{L}^r} &\leq C_1 \|(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\|_{\mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}} \\ &= C_1 \|\operatorname{div}[(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \otimes \mathbf{v}]\|_{\mathbf{W}^{-1, \frac{pr}{p+r}}} \\ &\leq C_1 \|(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{\frac{pr}{p+r}}} \\ &\leq C_5 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{\mathbf{L}^r}, \end{aligned}$$

onde $C_5 = |\Omega|^{1/r} C_1$. Consequentemente, fazendo $0 < \rho_0 \leq 1/(2C_5)$ concluímos que a função $\mathbf{w} \mapsto \widehat{\mathbf{w}}$ é uma contração no espaço $\mathbf{L}^r(\Omega)$ e pelo teorema do ponto fixo de Banach existe um único $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ tal que $\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}}$ que é uma solução de problema (3.9). Além disso, de (3.15) com $\|\mathbf{v}\| \leq \rho_0$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} &\leq C_4 (a\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \rho_0 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}) \\ &\leq C_4 (a\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r}, \end{aligned}$$

para ρ_0 pequeno o suficiente para que $\rho_0 \leq 1/(2C_4)$. Portanto,

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^r} \leq 2C_4 (a\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}}), \quad (3.16)$$

e a estimativa (3.10) ocorre.

Agora, considere a função $\mathcal{M} : \mathbf{B} \subset \mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^r(\Omega)$ definida por $\mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{B}$ e $\mathbf{w}_1 = \mathcal{M}\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 = \mathcal{M}\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{w}_i$ verifica (3.14) para $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$, pelo Teorema

3.8 segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}v_1 - \mathcal{M}v_2\|_{L^r} &\leq C_1 \|a \operatorname{rot} (v_1 - v_2) + (v_1 \cdot \nabla)w_1 - (v_2 \cdot \nabla)w_2\|_{W^{-1, \frac{pr}{p+r}}} \\
&\leq C_1 a \|\operatorname{rot} (v_1 - v_2)\|_{W^{-1, \frac{pr}{p+r}}} + C_1 \|(v_1 \cdot \nabla)w_1 - (v_2 \cdot \nabla)w_2\|_{W^{-1, \frac{pr}{p+r}}} \\
&\leq C_1 a \|v_1 - v_2\|_{L^{\frac{pr}{p+r}}} + C_1 \|w_1\|_{L^r} \|v_1 - v_2\|_{L^p} + C_1 \|w_1 - w_2\|_{L^r} \|v_2\|_{L^p} \\
&\leq a C_1 C_2 \|v_1 - v_2\|_{L^p} + C_1 \|w_1\|_{L^r} \|v_1 - v_2\|_{L^p} + C_1 \rho_0 \|w_1 - w_2\|_{L^r} \\
&\leq C_6 (a + \|w_1\|_{L^r}) \|v_1 - v_2\|_{L^p} + C_1 \rho_0 \|w_1 - w_2\|_{L^r},
\end{aligned}$$

onde $C_6 = \max\{C_1 C_2, C_1\}$. Fazendo $\rho_0 > 0$ de modo que $\rho_0 \leq 1/(2C_1)$, pela estimativa (3.16) (para w_1) a estimativa (3.11) segue. Observe que $\rho_0 > 0$ deve verificar $2\rho_0 \leq \min\{1/C_1, 1/C_4, 1/C_5\}$.

3.5 PROVA DO TEOREMA 2.2

Considere ρ_0 , as constantes C_4, C_6 , B a bola fechada em E com raio ρ_0 centrado na origem e $\mathcal{M} : v \mapsto w$ a função definida no Lema 3.11. Afirmamos que para cada $v \in B$ existe uma solução fraca $\bar{v} = \mathcal{T}v \in L^p(\Omega)$ do seguinte problema

$$\begin{cases} -\mu \Delta \bar{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathcal{M}v + f - (v \cdot \nabla)v & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{v} = v_0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.17)$$

Para mostrar a afirmação, dividimos o problema linear (3.17) em duas partes :

$$(S_1) \quad \begin{cases} -\mu \Delta \bar{v}_1 + \nabla \pi_1 = a \operatorname{rot} \mathcal{M}v + f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{v}_1 = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{v}_1 = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

e

$$(S_2) \quad \begin{cases} -\mu \Delta \bar{v}_2 + \nabla \pi_2 = -(v \cdot \nabla)v & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{v}_2 = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{v}_2 = v_0 & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

(i) Existência de uma solução para o problema (S_1) . Como $w = \mathcal{M}v \in L^r(\Omega)$ temos que $\operatorname{rot} w \in W^{-1,r}(\Omega) \hookrightarrow (X_{r',p'}(\Omega))'$. Além disso, desde que $1/r \leq 1/p + 1/3$ e $r \leq p$, o

Teorema 3.10 implica que (S_1) tem uma única solução ultra fraca e

$$\mu \|\bar{v}_1\|_{L^p} + \|\pi_1\|_{W^{-1,p}/R} \leq C_7(\|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + a\|\operatorname{rot} \mathcal{M}\mathbf{v}\|_{W^{-1,r}}).$$

(ii) Existência de uma solução para o problema (S_2) . Note que $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{L}^{p/2}(\Omega)$. Como $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \in W^{-1,p/2}(\Omega) \hookrightarrow (\mathbf{X}_{\frac{p}{p-2},p'}(\Omega))'$. Como $2/p \leq 1/p + 1/3$ e $p/2 \leq p$, aplicando novamente Teorema 3.10 obtemos uma única solução ultra fraca para o problema (S_2) e

$$\begin{aligned} \mu \|\bar{v}_2\|_{L^p} + \|\pi_2\|_{W^{-1,p}/R} &\leq C_8(\|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\|_{W^{-1,p/2}} + \mu\|\mathbf{v}_0\|_{W^{-1/p,p}}) \\ &\leq C_8(\|\mathbf{v}\|_{L^p}^2 + \mu\|\mathbf{v}_0\|_{W^{-1/p,p}}). \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ é solução de (3.17) e somando as estimativas verificadas para as soluções de (S_1) e (S_2) obtemos:

$$\begin{aligned} \mu\|\mathcal{T}\mathbf{v}\|_{L^p} &\leq C_9\left(\|\mathbf{v}\|_{L^p}^2 + a\|\operatorname{rot} \mathcal{M}\mathbf{v}\|_{W^{-1,r}} + \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \mu\|\mathbf{v}_0\|_{W^{-1/p,p}}\right) \\ &\leq C_9\left(\|\mathbf{v}\|_{L^p}^2 + a\|\mathcal{M}\mathbf{v}\|_{L^r} + \|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \mu\|\mathbf{v}_0\|_{W^{-1/p,p}}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $C_9 = \max\{C_7, C_8\}$.

Por outro lado, se $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{B}$ então

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}),$$

e argumentando como na dedução de (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} \mu\|\mathcal{T}\mathbf{v} - \mathcal{T}\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p} &\leq aC_9\|\operatorname{rot} \mathcal{M}\mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathcal{M}\tilde{\mathbf{v}}\|_{W^{-1,r}} + C_9\|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p} \\ &\leq aC_9\|\mathcal{M}\mathbf{v} - \mathcal{M}\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^r} + C_9\|\operatorname{div}[(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \otimes \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}} \otimes (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})]\|_{L^p} \\ &\leq aC_9\|\mathcal{M}\mathbf{v} - \mathcal{M}\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^r} + C_9(\|\mathbf{v}\|_{L^p} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p})\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p} \\ &\leq C_9[2aC_6(a + \|\mathcal{M}\mathbf{v}\|_{L^r}) + (\|\mathbf{v}\|_{L^p} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p})]\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^p}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seja

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\|\mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\mathbf{v}_0\|_{W^{-1/p,p}} + \frac{a}{\mu}(\|\mathbf{g}\|_{W^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{W^{-1/r,r}}),$$

e considere $\mathbf{B}_1 = \{\mathbf{z} \in \mathbf{E}; \|\mathbf{z}\|_{L^p} \leq C_{10}\mathcal{R}\}$ com $C_{10} = 3C_9(2C_4 + 1)/2$ e $C_{10}\mathcal{R} \leq \rho_1 \leq \rho_0$.

Então para $\mathbf{v} \in \mathbf{B}_1$, de (3.10), (3.18) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mu}\|\mathcal{M}\mathbf{v}\|_{L^r} &\leq 2C_4\frac{a^2}{\mu}\|\mathbf{v}\|_{L^p} + 2C_4\frac{a}{\mu}(\|\mathbf{g}\|_{W^{-2+1/r,r}} + \|\mathbf{w}_0\|_{W^{-1/r,r}}) \\ &\leq 2C_4C_{10}\frac{a^2}{\mu}\mathcal{R} + 2C_4\mathcal{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}v\|_{L^p} &\leq \frac{C_9}{\mu} C_{10}^2 \mathcal{R}^2 + C_9 \frac{a}{\mu} \|\mathcal{M}v\|_{L^r} + C_9 \mathcal{R} \\
&\leq C_9 C_{10} \rho_1 \mathcal{R} + 2C_4 C_9 \frac{a^2}{\mu} \mathcal{R} + 2C_4 C_9 \mathcal{R} + C_9 \mathcal{R} \\
&\leq C_9 C_{10} \rho_1 \mathcal{R} + 2C_4 C_9 \rho_1 \mathcal{R} + 2C_4 C_9 \mathcal{R} + C_9 \mathcal{R} \\
&\leq C_{10} \mathcal{R},
\end{aligned}$$

para $\rho_1 \leq (2C_4 + 1)/2(C_{10} + 2C_4)$. Similarmente,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}v - \mathcal{T}\tilde{v}\|_{L^p} &\leq (2C_6 C_9 \frac{a^2}{\mu} + 4C_4 C_6 C_9 C_{10} \frac{a^2}{\mu} \mathcal{R} + 4C_4 C_6 C_9 \mathcal{R} + 2C_9 C_{10} \mathcal{R}) \|v - \tilde{v}\|_{L^p} \\
&\leq (2C_6 C_9 \rho_1 + 4C_4 C_6 C_9 C_{10} \rho_1^2 + 4C_4 C_6 C_9 \rho_1 + 2C_9 \rho_1) \|v - \tilde{v}\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Daí, temos que $T(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{B}_1$ e $\|\mathcal{T}v - \mathcal{T}\tilde{v}\|_{L^p} \leq \theta \|v - \tilde{v}\|_{L^p}$ para algum $\theta \in (0, 1)$, fazendo ρ_1 suficientemente pequeno. Pelo teorema do ponto fixo de Banach existe $v \in L^p(\Omega)$ tal que $\mathcal{T}v = v$ o que completa a prova.

3.6 PROVA DO TEOREMA 3.4

Precisamos do seguinte resultado adicional.

Proposition 3.12 *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira de Lipschitz Γ . Sejam $f, g \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $v_a \in \mathbf{L}^3(\Omega)$, $w_a \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com $\operatorname{div} v_a = 0$ e $v_0, w_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que $\int_{\Gamma} v_0 \cdot n ds = 0$. Existe uma constante $\rho_2 = \rho_2(\Omega)$ tal que se $a/\mu < \rho_2$ e*

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \|v_a\|_{L^3} + \frac{1}{\alpha} \|w_a\|_{L^3} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=0}^m \left| \int_{\Gamma_i} v_0 \cdot n ds \right| \right) < \rho_2$$

então existe uma solução fraca $(v, \pi, w) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ do seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + (v_a \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)v_a + \nabla \pi = a \operatorname{rot} w + f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}w + (v \cdot \nabla)w + (v \cdot \nabla)w_a + (v_a \cdot \nabla)w + \gamma w = a \operatorname{rot} v + g & \text{em } \Omega, \\ v = v_0, \quad w = w_0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Adaptamos os argumentos usados em (KIM, 2012, Proposition 4.1). Seja $\mathcal{H} = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ com sua norma usual, e seja $(v, w) \in \mathcal{H}$. Como $v_a, w_a \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ segue do Lema 2.4 que

$$(v \cdot \nabla)v + (v_a \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)v_a = \operatorname{div} (v \otimes v + v_a \otimes v + v \otimes v_a) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$$

e

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}_a + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \mathbf{w} = \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_a + \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{w}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega).$$

Pelos Teoremas 3.8 e 3.9 existe uma única solução fraca $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\pi}) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega)/R$ do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \hat{\mathbf{v}} + \nabla \hat{\pi} = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} - [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_a] & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \hat{\mathbf{w}} + \gamma \hat{\mathbf{w}} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} - [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}_a + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \mathbf{w}] & \text{em } \Omega, \\ \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0, \quad \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Seja $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$, onde $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$ é a solução fraca do problema (3.21). Estamos interessados em encontrar um ponto fixo do operador S usando o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder.

(i) S é um operador compacto. Suponha que $(\mathbf{v}, \mathbf{w}), (\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) \in \mathcal{H}$, $n \in N$, e $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) \rightharpoonup (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (fracamente convergente) em $\mathcal{H}$ quando $n \rightarrow \infty$. Definimos $(\hat{\mathbf{v}}_n, \hat{\mathbf{w}}_n) = S(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n)$, $n \in N$ and $S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema 2.4 temos que

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{w}}_n - \hat{\mathbf{w}}\|_{H^1} &\leq C \|\operatorname{rot} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) + \operatorname{div} (\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{w}_n - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}_a + \mathbf{v}_a \otimes (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}))\|_{H^{-1}} \\ &\leq C \|\operatorname{rot} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v})\|_{H^{-1}} + C \|\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{w}_n - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\|_{L^2} + C \|(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}_a\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\mathbf{v}_a \otimes (\mathbf{w}_n - \mathbf{w})\|_{L^2} \\ &\leq C \|\operatorname{rot} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v})\|_{H^{-1}} + C \|\mathbf{v}_n\|_{L^6} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{L^3} + C \|\mathbf{w}\|_{L^6} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^3} \\ &\quad + C \epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{H^1} + C C_\epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^2} + C \epsilon \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{H^1} + C C_\epsilon \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{L^2} \\ &\leq \|(\mathbf{v}_n - \mathbf{v})\|_{L^2} + C \|\mathbf{v}_n\|_{L^6} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{L^3} + C \|\mathbf{w}\|_{L^6} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^3} \\ &\quad + C \epsilon (\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{H^1} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{H^1}) + C_\epsilon (\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^2} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{L^2}), \end{aligned}$$

onde $C_\epsilon = C_\epsilon(\epsilon, \Omega, \|\mathbf{w}_a\|_{L^3}, \|\mathbf{v}_a\|_{L^3}) > 0$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \mu \|\hat{\mathbf{v}}_n - \hat{\mathbf{v}}\|_{H^1} &\leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{w}_n - \operatorname{rot} \mathbf{w} + \operatorname{div} (\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \otimes (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}))\|_{H^{-1}} \\ &\leq C \|\operatorname{rot} (\mathbf{w}_n - \mathbf{w})\|_{H^{-1}} + C \|\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\|_{L^2} \\ &\quad + C \|(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}_a\|_{L^2} + C \|\mathbf{v}_a \otimes (\mathbf{v}_n - \mathbf{v})\|_{L^2} \\ &\leq C \|\operatorname{rot} (\mathbf{w}_n - \mathbf{w})\|_{H^{-1}} + C \|\mathbf{v}_n\|_{L^6} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^3} + C \|\mathbf{v}\|_{L^6} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^3} \\ &\quad + 2C \epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{H^1} + 2C C_\epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^2} \\ &\leq C \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{L^2} + C (\|\mathbf{v}_n\|_{L^6} + \|\mathbf{v}\|_{L^6}) \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^3} \\ &\quad + C \epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{H^1} + C_\epsilon \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Da convergência fraca de $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n)$ a $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ em $\mathcal{H}$ temos a convergência forte, ou seja, $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}$ in $\mathbf{L}^{t_1}(\Omega)$, para $1 \leq t_1 < 6$, e $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1}$ é limitado. A partir das estimativas acima, é possível concluir que $(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ in $\mathcal{H}$, e segue o resultado.

(ii) Os pontos fixos do operador $\alpha_1 S, \alpha_1 \in [0, 1]$ são limitados por uma constante. Seja $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha_1 S(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ com $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{H}$, $\alpha_1 \in [0, 1]$. Então $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ satisfaz o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \hat{\mathbf{v}} + \nabla \hat{\pi} = a \operatorname{rot} \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{f} - \alpha_1 [\alpha_1 (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_a] & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \hat{\mathbf{w}} + \gamma \hat{\mathbf{w}} = a \operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{g} - \alpha_1 [\alpha_1 (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{w}_a + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}}] & \text{em } \Omega, \\ \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0, \quad \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Consideramos dois casos:

Case a. Assuma que $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 = 0$. Quando $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ e $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Usando $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ na formulação fraca do problema (3.22) temos

$$\mu \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 = a(\hat{\mathbf{w}}, \operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}}) + \alpha_1 B(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_a) + \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{H}_0^1},$$

$$\alpha \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \gamma \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq a(\hat{\mathbf{v}}, \operatorname{rot} \hat{\mathbf{w}}) + \alpha_1 B(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_a) + \langle \mathbf{g}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{H}_0^1}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq a \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} + \alpha_1 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^6} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{v}_a\|_{\mathbf{L}^3} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\leq a C_{11} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} + C_{12} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\mathbf{v}_a\|_{\mathbf{L}^3} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

onde $C_{11} = 1/\lambda_1(\Omega)$, $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do operador Laplaciano em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $C_{12} > 0$ é a constante de imersão $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$.

Por isso, temos

$$\|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{a C_{11}}{\mu} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} + \frac{C_{12}}{\mu} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{v}_a\|_{\mathbf{L}^3} + \frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}}. \quad (3.23)$$

Por outro lado, argumentando da mesma forma

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \gamma \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq a \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\operatorname{rot} \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} + \alpha_1 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^6} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{w}_a\|_{\mathbf{L}^3} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\leq a C_{11} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} + C_{12} \|\nabla \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{w}_a\|_{\mathbf{L}^3} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2} \leq \frac{aC_{11}}{\alpha} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \frac{C_{12}}{\alpha} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} \|\mathbf{w}_a\|_{L^3} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}}. \quad (3.24)$$

Somando as estimativas (3.23) e (3.24)

$$\begin{aligned} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2} &\leq \frac{aC_{11}}{\mu} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2} + \left(\frac{aC_{11}}{\alpha} + \frac{C_{12}}{\mu} \|\mathbf{v}_a\|_{L^3} + \frac{C_{12}}{\alpha} \|\mathbf{w}_a\|_{L^3} \right) \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

Assim, por nossas hipóteses concluímos que

$$\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}}),$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto,

$$\|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_H = \alpha_1 \|(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}})\|_H \leq C(\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2}) \leq C.$$

Caso b. No caso geral, definimos $\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon = \widehat{\mathbf{v}} - \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon$, $\widehat{\mathbf{w}}_\eta = \widehat{\mathbf{w}} - \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta$, onde $\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon, \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta$ são as funções lift dados pelos Lemas 2.8 and 2.9. Os valores de $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$ serão definidos mais na frente. Argumentamos como no caso anterior. Note que

$$\left\{ \begin{aligned} &-\mu \Delta \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \\ &\quad + \alpha_1 (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon + \alpha_1 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}_a + \nabla \widehat{\pi} = a \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{w}}_\eta + \mathbf{F} + \mathbf{f}, \\ &\mathcal{L} \widehat{\mathbf{w}}_\eta + \gamma \widehat{\mathbf{w}}_\eta + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_\eta + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_\eta + \alpha_1 (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_\eta \\ &\quad + \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta + \alpha_1 (\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{w}_a = a \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon + \mathbf{G} + \mathbf{g}, \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

onde

$$\mathbf{F} = -\mu \Delta \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon + a \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta - \alpha_1^2 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon - \alpha_1 (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon - \alpha_1 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}_a \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \quad (3.26)$$

e

$$\mathbf{G} = -\mathcal{L} \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta - \gamma \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta + a \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon - \alpha_1 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta - \alpha_1 (\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{w}_a - \alpha_1 (\mathbf{v}_a \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.27)$$

Usando $\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$, $\widehat{\mathbf{w}}_\eta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ como funções teste na formulação fraca do problema (3.25) e as hipóteses $\operatorname{div} \mathbf{v}_a = 0$ em Ω temos

$$\mu \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2}^2 = a (\widehat{\mathbf{w}}_\eta, \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon) - \alpha_1^2 B(\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon) - \alpha_1 B(\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \mathbf{v}_a, \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon) + \langle \mathbf{F} + \mathbf{f}, \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon \rangle_{H^{-1} \times H_0^1},$$

$$\alpha \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2}^2 + \gamma \|\widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2}^2 \leq a \langle \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \text{rot } \widehat{\mathbf{w}}_\eta \rangle + \langle \mathbf{G} + \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{w}}_\eta \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + \alpha_1 B(\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \widehat{\mathbf{w}}_\eta, \alpha_1 \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta + \mathbf{w}_a).$$

Da desigualdade Poincaré's e da estimativa do Lema 2.9

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2}^2 + \gamma \|\widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2}^2 &\leq a \|\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \|\text{rot } \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} + \|\mathbf{G}\|_{H^{-1}} \|\widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{H_0^1} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|\widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{H_0^1} \\ &\quad + \alpha_1 \|\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^6} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} (\alpha_1 \|\widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{L^3} + \|\mathbf{w}_a\|_{L^3}) \\ &\leq a C_{11} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} + (\|\mathbf{G}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}}) \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \\ &\quad + C_{12} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} (\eta \|\mathbf{w}_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{w}_a\|_{L^3}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \leq \frac{a C_{11}}{\alpha} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + \frac{1}{\alpha} (\|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{G}\|_{H^{-1}}) + \frac{C_{12}}{\alpha} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} (\eta \|\mathbf{w}_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{w}_a\|_{L^3}). \quad (3.28)$$

Argumentando de forma semelhante e usando a estimativa do Lema 2.8 temos

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2}^2 &= a \|\widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \|\text{rot } \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + \|\mathbf{F}\|_{H^{-1}} \|\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{H_0^1} + \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} \|\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{H_0^1} \\ &\quad - \alpha_1^2 B(\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon) + \alpha_1 B(\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon, \mathbf{v}_a) \\ &\leq a C_{11} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{F}\|_{H^{-1}}) \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \\ &\quad + \left(\epsilon + K \sum_{i=0}^m \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} ds \right| \right) \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \|\widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^6} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \|\mathbf{v}_a\|_{L^3}, \end{aligned}$$

onde $K = \max\{K_i; i = 1, \dots, m\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} &\leq \frac{a C_{11}}{\mu} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} + \frac{1}{\mu} (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{F}\|_{H^{-1}}) \\ &\quad + \frac{\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2}}{\mu} \left(\epsilon + K \sum_{i=0}^m \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} ds \right| + C_{12} \|\mathbf{v}_a\|_{L^3} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por outro lado, de (3.26) e (3.27) é possível mostrar que $\|\mathbf{F}\|_{H^{-1}} \leq D_1(\epsilon, \eta)$ e $\|\mathbf{G}\|_{H^{-1}} \leq D_2(\epsilon, \eta)$, onde

$$D_1(\epsilon, \eta) = C(\mu \|\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{H^1} + \|\widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{H^1} + \|\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{H^1} + \|\mathbf{v}_a\|_{L^3} \|\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{H^1}),$$

$$D_2(\epsilon, \eta) = C(\alpha \|\widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{H^1} + \|\widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{H^1} \|\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{H^1} + \|\mathbf{w}_a\|_{L^3} \|\widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{H^1} + \|\widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{H^1} \|\mathbf{w}_a\|_{L^3}).$$

Somando as estimativas (3.28) e (3.29) obtemos

$$\begin{aligned} &\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\mu} (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{F}\|_{H^{-1}}) + \frac{1}{\alpha} (\|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{G}\|_{H^{-1}}) + \frac{a C_{11}}{\mu} \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} \\ &\quad + \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} \left[\frac{a C_{11}}{\alpha} + \frac{C_{12}}{\mu} \|\mathbf{v}_a\|_{L^3} + \frac{C_{12}}{\alpha} \|\mathbf{w}_a\|_{L^3} + \frac{C_{12}}{\alpha} \eta \|\mathbf{w}_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \frac{1}{\mu} \left(\epsilon + \sum_{i=0}^m K_i \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} ds \right| \right) \right]. \end{aligned}$$

Por hipótese, fazendo ϵ, η suficientemente pequeno, concluímos que $\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\| \leq C$ para alguma constante $C > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_{\mathcal{H}} &= \alpha_1 \|(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}})\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C(\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2}) \\ &\leq C(\|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_\epsilon\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_\eta\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_0^\epsilon\|_{L^2} + \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}_0^\eta\|_{L^2}), \end{aligned}$$

onde C é independente de $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e α_1 .

Então, pelo teorema do ponto fixo de Leray-Schauder junto com o teorema de De Rham existe pelo menos uma solução fraca $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ do problema (3.20).

3.6.1 Teorema 2.4

Como $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ e $\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Gamma = 0$, por (AMROUCHE, 2011, Lemma 15), para cada $\delta > 0$ existe $\mathbf{v}_0^\delta \in C^\infty(\Gamma)$ tal que $\int_\Gamma \mathbf{v}_0^\delta \cdot \mathbf{n} ds = 0$, $\|\mathbf{v}_0^\delta - \mathbf{v}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} < \delta$ e

$$\sum_{i=0}^m \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0^\delta \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq 2 \sum_{i=0}^m \left| \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma_i) \times \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma_i)} \right|. \quad (3.30)$$

Por outro lado, como $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$ existe $\mathbf{g}^\delta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{f}^\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0^\delta \in C^\infty(\Gamma)$ tal que

$$\|\mathbf{g}^\delta - \mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega)} \leq \delta, \quad \|\mathbf{w}_0^\delta - \mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \leq \delta, \quad \|\mathbf{f}^\delta - \mathbf{f}\|_{(\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))'} \leq \delta. \quad (3.31)$$

Defina agora

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}}_0^\delta &= \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^\delta \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \\ \overline{\mathbf{g}}^\delta &= \mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta \in \mathbf{W}^{-2+1/r,r}(\Omega), \\ \overline{\mathbf{f}}^\delta &= \mathbf{f} - \mathbf{f}^\delta \in (\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega))', \\ \overline{\mathbf{w}}_0^\delta &= \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^\delta \in \mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma). \end{aligned}$$

A existência de soluções ultra fracas para o problema (3.1) é obtido dividindo o problema em duas partes, ou seja, consideramos $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}_1^\delta + \mathbf{v}_2^\delta, \pi_1^\delta + \pi_2^\delta, \mathbf{w}_1^\delta + \mathbf{w}_2^\delta)$, onde $(\mathbf{v}_i^\delta, \pi_i^\delta, \mathbf{w}_i^\delta)$,

$i = 1, 2$, são as soluções ultra fracas dos seguintes problemas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi_1 &= a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \bar{\mathbf{f}}^\delta \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} &= a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \bar{\mathbf{g}}^\delta \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_0^\delta \quad \mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}_0^\delta &\quad \text{em } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.32)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}_1^\delta \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1^\delta + \nabla \pi_2 &= a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}^\delta \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^\delta + (\mathbf{v}_1^\delta \cdot \nabla) \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} &= a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} - \bar{\mathbf{g}}^\delta \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}_0^\delta = \mathbf{v}_0^\delta, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}_0^\delta = \mathbf{w}_0^\delta &\quad \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

(i) Existência do problema (3.32). A existência é obtida do Teorema 3.2. A partir das estimativas dadas por (3.31) temos que

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{\mu} + \frac{1}{\mu} \|\bar{\mathbf{f}}^\delta\|_{(\mathbf{X}_{r',p'})'} + \|\bar{\mathbf{v}}_0^\delta\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \frac{a}{\mu} \left(\|\bar{\mathbf{g}}^\delta\|_{\mathbf{W}^{-2+1/r,r}} + \|\bar{\mathbf{w}}_0^\delta\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right) \\ & \leq \frac{a^2}{\mu} + \frac{\delta}{\mu} + \delta + 2\frac{a}{\mu}\delta < \rho_1, \end{aligned}$$

se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Dessa forma, a condição (3.3) é satisfeita e pelo Teorema 3.2 existe $(\mathbf{v}_1^\delta, \pi_1^\delta, \mathbf{w}_1^\delta) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/R \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ uma solução ultra fraca do problema (3.32). Além disso, as seguintes estimativas são válidas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1^\delta\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C\delta \left(\frac{1+2a}{\mu} + 1 \right) \\ \|\mathbf{w}_1^\delta\|_{\mathbf{L}^r} &\leq C\delta \left[a \left(\frac{1+2a}{\mu} \right) + 3 \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

para alguma constante $C = C(r, p, \Omega) > 0$.

(ii) Existência do problema (3.33). Já que estamos assumindo $r, p \geq 3$, de (3.34), (3.30) e a condição (3.4) temos

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \|\mathbf{v}_1^\delta\|_{\mathbf{L}^3} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{w}_1^\delta\|_{\mathbf{L}^3} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=0}^m \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_0^\delta \cdot \mathbf{n} ds \right| \right) \\ & \leq \frac{a}{\alpha} + C\delta \left(\frac{1+2a}{\mu} + 1 \right) + C\delta \left[a \left(\frac{1+2a}{\mu} \right) + 3 \right] + \frac{2}{\mu} \rho_3 < \rho_2, \end{aligned}$$

fazendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Observe que $\mathbf{v}_0^\delta = \mathbf{v}_0 - \overline{\mathbf{v}}_0^\delta \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{w}_0^\delta = \mathbf{w}_0 - \overline{\mathbf{w}}_0^\delta \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, e pela Proposição 3.12 existe $(\mathbf{v}_2^\delta, \pi_2^\delta, \mathbf{w}_2^\delta) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ solução fraca do problema (3.33).

Fica claro pela imersão de Sobolev que se $p \in [3, 6]$, então

$$(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}_1^\delta + \mathbf{v}_2^\delta, \pi_1^\delta + \pi_2^\delta, \mathbf{w}_1^\delta + \mathbf{w}_2^\delta) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$$

é solução ultra fraca de (3.1). Quando $p > 6$, observamos que $-\mathbf{v}_2^\delta \cdot \nabla \mathbf{v}_2^\delta - (\mathbf{v}_1^\delta \cdot) \mathbf{v}_2^\delta - (\mathbf{v}_2^\delta \cdot \nabla) \mathbf{v}_1^\delta + a \operatorname{rot} \mathbf{w}$ pertence to $\mathbf{W}^{-1,3}(\Omega)$ e $\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}^\delta = \mathbf{f}^\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pela regularidade das equações de Stokes obtemos que $\mathbf{v}_2^\delta \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^t(\Omega)$ com $1 \leq t < \infty$. Logo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^\delta + \mathbf{v}_2^\delta \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. Para mostrar que $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ argumentamos de forma semelhante usando regularidade elíptica.

3.7 PROVA DO TEOREMA 3.5

O seguinte resultado é útil para mostrar a unicidade.

Proposition 3.13 *Sejam $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$. Existe $\rho_4 = \rho_4(\Omega) > 0$ tal que se*

$$\frac{1}{\mu}(\|\mathbf{v}_2\|_{L^3} + \|\mathbf{w}_2\|_{L^3}) + a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \right) \leq \rho_4, \quad (3.35)$$

então existe uma única solução forte

$$(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{z}) \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \times W^{1,3/2}(\Omega)/R \times \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)$$

do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{y} - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{y} - (\nabla \mathbf{y})^T \mathbf{v}_2 + \nabla \pi - (\nabla \mathbf{z})^T \mathbf{w}_2 = a \operatorname{rot} \mathbf{z} + \mathbf{f}_1 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \mathbf{z} + \gamma \mathbf{z} - \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{z} = a \operatorname{rot} \mathbf{y} + \mathbf{f}_2 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y} = 0, \mathbf{z} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Seja $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \times \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)$ e $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{W}$. Como $\mathbf{W}^{1,3/2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^3(\Omega)$ temos $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{y}$, $(\nabla \mathbf{y})^T \mathbf{v}_2$, $\operatorname{rot} \mathbf{z}$, $\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{z}$, $\operatorname{rot} \mathbf{y} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$. Dos Teoremas 3.8 e 3.9 existe uma

única solução forte $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\pi}, \bar{\mathbf{z}}) \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \times W^{1,3/2}(\Omega)/R \times \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)$ do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \bar{\mathbf{y}} + \nabla \bar{\pi} = \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{y} + (\nabla \mathbf{y})^T \mathbf{v}_2 + (\nabla \mathbf{z})^T \mathbf{w}_2 + a \operatorname{rot} \mathbf{z} & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \bar{\mathbf{z}} + \gamma \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{z} + a \operatorname{rot} \mathbf{y} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{y}} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{\mathbf{y}} = 0, \bar{\mathbf{z}} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Seja $S : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ o operador dado por $S(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$, onde $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ é solução forte do problema (3.37).

(i) S é um operador compacto. Assumindo que $(\mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) \in \mathbf{W}, n \in N$, tal que $(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) \rightharpoonup (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ em $\mathbf{W}$ com $n \rightarrow \infty$. Definindo $(\bar{\mathbf{y}}_n, \bar{\mathbf{z}}_n) = S(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$ para cada $n \in N$ e $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Quando $(\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}_n - \bar{\mathbf{z}})$ verifica o seguinte

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta (\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}) + \nabla (\bar{\pi}_n - \bar{\pi}) = (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}) + (\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}))^T \mathbf{v}_2 \\ \quad + (\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}))^T \mathbf{w}_2 + a \operatorname{rot}(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}(\bar{\mathbf{z}}_n - \bar{\mathbf{z}}) + \gamma(\bar{\mathbf{z}}_n - \bar{\mathbf{z}}) = \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}) + a \operatorname{rot}(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}) & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}} = 0, \bar{\mathbf{z}}_n - \bar{\mathbf{z}} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Pelas estimativas usuais para as soluções fortes das equações de Stokes e a estimativa (2.1) temos para $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mu \|\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} \\ & \leq C \|(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}) + (\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}))^T \mathbf{v}_2 + (\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}))^T \mathbf{w}_2 + a \operatorname{rot}(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{L^{3/2}} \\ & \leq C \epsilon \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} + C_\epsilon \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{L^{3/2}} + C \epsilon \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} \\ & \quad + C_\epsilon \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{L^{3/2}} + C \epsilon \|\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} + C_\epsilon \|\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{L^{3/2}} + C a \|\operatorname{rot}(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{L^{3/2}} \cdot \\ & \leq 2\epsilon C \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} + 2C_\epsilon \|\nabla(\mathbf{y}_n - \mathbf{y})\|_{L^{3/2}} + 2\epsilon C \|\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} \\ & \quad + 2C_\epsilon \|\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{L^{3/2}} + C a \|\nabla(\mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{L^{3/2}} \\ & \leq 2\epsilon C \|(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}} + 2C_\epsilon \|(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}^{1,3/2} \times \mathbf{W}^{1,3/2}} + C a \|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)$ é compactamente imerso em $\mathbf{W}^{1,3/2}(\Omega)$ and $\{ \|(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}} \}_{n \geq 1}$ é limitado concluímos que $\bar{\mathbf{y}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{y}}$ em $\mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Argumentando de forma semelhante com a segunda equação de (3.38) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\bar{z}_n - \bar{z}\|_{W^{2,3/2}} &\leq C\|v_1 \cdot \nabla(z_n - z) + a \operatorname{rot}(y_n - y)\|_{L^{3/2}} \\
&\leq C_\epsilon \|\nabla(z_n - z)\|_{W^{1,3/2}} + C_\epsilon \|\nabla(z_n - z)\|_{L^{3/2}} + Ca \|\operatorname{rot}(y_n - y)\|_{L^{3/2}} \\
&\leq C_\epsilon \|z_n - z\|_{W^{2,3/2}} + C_\epsilon \|z_n - z\|_{W^{1,3/2}} + Ca \|y_n - y\|_{W^{1,3/2}}.
\end{aligned}$$

Logo $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$ em $W^{2,3/2}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, $S(y_n, z_n) \rightarrow S(y, z)$ em W , e a compacidade do operador S é mostrada.

(ii) Estimativas para um ponto fixo do operador κS , $\kappa \in [0, 1]$. Seja $(y, z) = \kappa S(y, z)$ com $(y, z) \in W$ e $\kappa \in [0, 1]$. Quando $(\bar{y}, \bar{z}) = S(y, z)$ satisfaz o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \bar{y} + \nabla \bar{\pi} = \kappa a \operatorname{rot} \bar{z} + f_1 + \kappa(v_1 \cdot \nabla) \bar{y} + \kappa(\nabla \bar{y})^T v_2 + \kappa(\nabla \bar{z})^T w_2 & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L} \bar{z} + \gamma \bar{z} = \kappa a \operatorname{rot} \bar{y} + f_2 + \kappa v_1 \cdot \nabla \bar{z} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{y} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{y} = 0, \bar{z} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Das estimativas usuais para soluções fortes e a estimativa (2.1), para $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mu \|\bar{y}\|_{W^{2,3/2}} &\leq C_{13}(\|f_1\|_{L^{3/2}} + \kappa \|(v_1 \cdot \nabla) \bar{y}\|_{L^{3/2}} + \kappa \|(\nabla \bar{y})^T v_2\|_{L^{3/2}} + \kappa \|(\nabla \bar{z})^T w_2\|_{L^{3/2}} \\
&\quad + \kappa a \|\operatorname{rot} \bar{z}\|_{L^{3/2}}) \\
&\leq C_{13}(\|f_1\|_{L^{3/2}} + 2\kappa \epsilon_1 \|\nabla \bar{y}\|_{W^{1,3/2}} + 2\kappa C_{\epsilon_1} \|\nabla \bar{y}\|_{L^{3/2}} + \kappa \epsilon_2 \|\nabla \bar{z}\|_{W^{1,3/2}} \\
&\quad + \kappa(C_{\epsilon_2} + a) \|\nabla \bar{z}\|_{L^{3/2}}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mu \|\bar{y}\|_{W^{2,3/2}} \leq C_{13}(\|f_1\|_{L^{3/2}} + 2\kappa \epsilon_1 \|\bar{y}\|_{W^{2,3/2}} + 2\kappa C_{\epsilon_1} \|\bar{y}\|_{W^{1,3/2}} + \kappa \epsilon_2 \|\bar{z}\|_{W^{2,3/2}} + \kappa(C_{\epsilon_2} + a) \|\bar{z}\|_{W^{1,3/2}}). \quad (3.40)$$

Por outro lado, usando estimativas para o operador elíptico (GILBARG D.; TRUNDINGER, 1990, Theorem 9.11) obtemos

$$\|\bar{z}\|_{W^{2,3/2}} \leq C_{14}(\|f_2\|_{L^{3/2}} + \kappa \epsilon_2 \|\bar{z}\|_{W^{2,3/2}} + \kappa C_{\epsilon_2} \|\bar{z}\|_{W^{1,3/2}} + a \kappa \|\bar{y}\|_{W^{1,3/2}}) \quad (3.41)$$

onde $C_{\epsilon_2} = C_{\epsilon_2}(\Omega, \epsilon_2, \|v_1\|_{L^3(\Omega)})$ e $C_{\epsilon_1} = C_{\epsilon_1}(\Omega, \epsilon_1, \epsilon_2, \|v_1\|_{L^3(\Omega)}, \|v_2\|_{L^3(\Omega)})$.

Pelo Lema de compacidade, veja (LIONS, 1969, Lemma 5.1), para qualquer $\eta > 0$, existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que $\|v\|_{W^{1,3/2}} \leq \eta \|v\|_{W^{2,3/2}} + C_\eta \|v\|_{L^{\frac{3}{2}}}$. Dessa forma, para η_1 e

$$\eta_2 > 0$$

$$\|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} \leq \eta_1 \|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} + C_{\eta_1} \|\bar{\mathbf{y}}\|_{L^2},$$

$$\|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{1,3/2}} \leq \eta_2 \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} + C_{\eta_2} \|\bar{\mathbf{z}}\|_{L^2}.$$

Inserindo essas desigualdades em (3.40) e (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} \mu \|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} &\leq C_{13} [\|\mathbf{f}_1\|_{L^{3/2}} + 2\kappa(\epsilon_1 + C_{\epsilon_1}\eta_1) \|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} + \kappa(\epsilon_2 + (C_{\epsilon_2} + a)\eta_2) \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} \\ &\quad + 2\kappa C_{\epsilon_1} C_{\eta_1} \|\bar{\mathbf{y}}\|_{L^2} + \kappa(C_{\epsilon_2} + a) C_{\eta_2} \|\bar{\mathbf{z}}\|_{L^2}], \\ \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} &\leq C_{14} (\|\mathbf{f}_2\|_{L^{3/2}} + a\kappa\eta_1 \|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} + \kappa(\epsilon_2 + C_{\epsilon_2}\eta_2) \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} \\ &\quad + a\kappa C_{\eta_1} \|\bar{\mathbf{y}}\|_{L^2} + \kappa C_{\epsilon_2} C_{\eta_2} \|\bar{\mathbf{z}}\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $\epsilon_i, \eta_i, (i = 1, 2)$ de modo que

$$2\kappa(\epsilon_1 + C_{\epsilon_1}\eta_1) \leq \mu/4, \quad a\kappa\eta_1 \leq \mu/4, \quad \kappa[\epsilon_2 + (C_{\epsilon_2} + a)\eta_2] \leq 1/4, \quad \text{and} \quad \kappa(\epsilon_2 + C_{\epsilon_2}\eta_2) \leq 1/4$$

temos

$$\frac{\mu}{2} \|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} + \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{W}^{2,3/2}} \leq C_{15} (\|\mathbf{f}_1\|_{L^{3/2}} + \|\mathbf{f}_2\|_{L^{3/2}} + \|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1} + \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1}) \quad (3.42)$$

para alguma constante $C_{15} > 0$.

Agora nos concentramos em obter estimativas de $\|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1}$ e $\|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1}$ que estão no lado direito de (3.42). Como $\mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,3/2}(\Omega)$ está imerso $\mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ e $\mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$ está imerso $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ podemos usar $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ como uma função teste na formulação fraca de (3.39), e como $\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla \bar{\mathbf{y}}\|_{L^2} &= (\mathbf{f}_1, \bar{\mathbf{y}}) + \kappa(\nabla \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{v}_2, \bar{\mathbf{y}}) + \kappa(\nabla \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{w}_2, \bar{\mathbf{y}}) + \kappa a(\text{rot } \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}), \\ (\mathcal{L}\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) + \gamma \|\bar{\mathbf{z}}\|^2 &= (\mathbf{f}_2, \bar{\mathbf{z}}) + \kappa a(\text{rot } \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu \|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1} &\leq C(\|\mathbf{f}_1\|_{L^{3/2}} + \kappa \|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1} \|\mathbf{v}_2\|_{L^3} + \kappa \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1} \|\mathbf{w}_2\|_{L^3} + \kappa a \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1}), \\ \alpha \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1} &\leq C(\|\mathbf{f}_2\|_{L^{3/2}} + \kappa a \|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1}), \end{aligned}$$

para algum $C = C(\Omega) > 0$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} &\|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1} + \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1} \\ &\leq C \left[\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}_1\|_{L^{3/2}} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}_2\|_{L^{3/2}} + \kappa \left(\frac{\|\mathbf{v}_2\|_{L^3}}{\mu} + \frac{a}{\alpha} \right) \|\bar{\mathbf{y}}\|_{H^1} + \kappa \left(\frac{\|\mathbf{w}_2\|_{L^3}}{\mu} + \frac{a}{\mu} \right) \|\bar{\mathbf{z}}\|_{H^1} \right], \end{aligned}$$

e das condições (3.35) concluímos

$$\|\bar{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \left(\frac{1}{\mu} \|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{L}^{3/2}} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}_2\|_{\mathbf{L}^{3/2}} \right).$$

Inserindo esta estimativa em (3.42) obtemos

$$\|(\mathbf{y}, \mathbf{z})\|_{\mathbf{W}} = \kappa \|(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})\|_{\mathbf{W}} \leq C(\|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{L}^{3/2}} + \|\mathbf{f}_2\|_{\mathbf{L}^{3/2}}).$$

Portanto, dos itens (i) and (ii), aplicando o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e o teorema De Rham , obtemos solução forte do problema (3.36).

Demonstração do Teorema 3.5. Seja $(\mathbf{v}_1, \pi_1, \mathbf{w}_1) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ uma solução ultra fraca do problema (3.1). Como a condição (3.3) é satisfeita existe $(\mathbf{v}_2, \pi_2, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega)$ uma solução ultra fraca do problema (3.1). Além disso, usando as estimativas do Teorema 3.2, o fato de que $p, r \geq 3$ e a condição (3.5) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (\|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{L}^3} + \|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{L}^3}) + a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \right) &\leq \frac{1}{\mu} (\|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{L}^r}) + a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} \right) \\ &\leq C\rho_5 \leq \rho_4, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde ρ_4 é dado na Proposição 3.13. Logo, a condição (3.35) ocorre para $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2$.

Vamos considerar $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ e $\pi = \pi_1 - \pi_2$. Então $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^r(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^3(\Omega) \times W^{-1,3}(\Omega) \times \mathbf{L}^3(\Omega)$ é solução ultra fraca de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_2 + \nabla\pi &= a \operatorname{rot}\mathbf{w} \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}\mathbf{w} + \gamma\mathbf{w} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}_2 &= a \operatorname{rot}\mathbf{v} \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{v} = 0, \mathbf{w} = 0 &\text{em } \partial\Gamma, \end{array} \right.$$

isto é, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{L}^3(\Omega) \times \mathbf{L}^3(\Omega)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}(-\mu\Delta\boldsymbol{\chi} - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{\chi} - (\nabla\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{v}_2 + \nabla\phi - (\nabla\boldsymbol{\psi})^T \mathbf{w}_2 - \operatorname{rot}\boldsymbol{\chi})dx \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathcal{L}\boldsymbol{\psi} - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi} - \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi})dx = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

para todo $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{W}^{2,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, $\phi \in \mathbf{W}^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, e $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}^{2,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, onde usamos a identidade $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{u} \cdot [(\nabla\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{v}_2]$.

Da desigualdade (3.43) e da Proposição 3.13, temos que para $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$ existe uma única solução forte

$$(\mathbf{y}, \pi, \mathbf{z}) \in \mathbf{W}^{2,\frac{3}{2}}(\Omega) \times W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega) \times \mathbf{W}^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)$$

de (3.36). Portanto, fazendo $(\chi, \phi, \psi) = (\mathbf{y}, \pi, \mathbf{z})$ segue de (3.44) que

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{w} dx = 0$$

para $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$. Logo, $\mathbf{v} = \mathbf{w} = 0$ e a unicidade ocorre.

4 OPTIMALIDADE DO DADO INICIAL NA SOLUÇÃO FORTE DO SISTEMA MICROPOLAR

4.1 INTRODUÇÃO

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado de classe $C^{2,1}$, $\partial\Omega = \Gamma$ e $0 < T \leq \infty$. Considere o seguinte sistema micropolar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_t - \mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \pi = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_t - \alpha \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v} = 0, \mathbf{w} = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, T), \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Uma solução fraca do sistema (4.1) é entendida no sentido seguinte.

Definição 4.1 *Sejam $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}_0^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V^*)$ e $\mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$.*

Um par $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in L^\infty(0, T; H) \cap L_{loc}^2(0, T; V) \\ \mathbf{w} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

é chamada solução fraca do sistema micropolar (4.1) se as seguintes identidades forem satisfeitas

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{v}, \phi_t \rangle + \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \phi \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \phi \rangle &= \langle a \mathbf{w}, \operatorname{rot} \phi \rangle + \langle \mathbf{f}, \phi \rangle \\ -\langle \mathbf{w}, \psi_t \rangle + \alpha \langle \nabla \mathbf{w}, \nabla \psi \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}, \psi \rangle + \beta \langle \operatorname{div} \mathbf{w}, \operatorname{div} \psi \rangle + \gamma \langle \mathbf{w}, \psi \rangle &= \langle a \mathbf{v}, \operatorname{rot} \psi \rangle + \langle \mathbf{g}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty([0, T[; \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ e $\psi \in C_0^\infty([0, T[\times \Omega)$.

Usamos aqui o seguinte espaço das funções testes

$$C_0^\infty([0, T]; \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega)) = \{\phi|_{[0,T] \times \Omega}; \phi \in C_0^\infty((-1, T) \times \Omega) \text{ and } \operatorname{div} \phi = 0\}.$$

Dada uma solução fraca $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ do problema (4.1), podemos supor, após uma possível redefinição sobre um conjunto de medida nula de Lebesgue, que $\mathbf{v} : [0, T[\rightarrow \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $\mathbf{w} : [0, T[\rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ são ambas fracamente contínuas e as condições iniciais são verificadas no seguinte sentido:

$$\lim_{t \searrow 0} \langle \mathbf{v}(t), \phi \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \phi \rangle, \quad \lim_{t \searrow 0} \langle \mathbf{w}(t), \psi \rangle = \langle \mathbf{w}_0, \psi \rangle,$$

para todo $\phi \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $\psi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

A existência global de soluções fracas do problema (4.1) foi em $H = \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $V = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$ obtida por Lukaszewicz em (LUKASZEWICZ, 1987), (LUKASZEWICZ, 1989), sob certas suposições, usando linearização e um teorema do quase ponto fixo, e por Boldrini e Rojas-Medar em (BOLDRINI, 1998) usando o método de Galerkin.

Observe que se $w = 0$ em (4.1) temos as equações clássicas de Navier-Stokes. Para este problema, com $v_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $f \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$, sabe-se que existe pelo menos uma solução fraca $v \in L^\infty((0, T), \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2((0, T), V)$. Atualmente esta solução fraca é chamada solução de Leray-Hopf. Ao mesmo tempo, para $v_0 \in V$ existe $T_* \in (0, \infty]$ tal que as equações de Navier-Stokes admitem uma única solução forte $v \in L^\infty((0, T), V) \cap L^2((0, T), H^2(\Omega))$, sempre que $T < T_*$. Portanto, o principal problema é estabelecer quando a solução é forte para quaisquer dados iniciais em V até o tempo arbitrário T . De acordo com o resultado de Prodi (PRODY, 1959) e Serrin (SERRIN, 1961), a existência de uma solução forte para as equações de Navier-Stokes em todo o intervalo é garantido se $v \in L^s((0, T), \mathbf{L}^q(\Omega))$, onde (s, q) é um par de Prodi-Serrin, isto é, $q \in (3, \infty]$, $s \in [2, \infty)$ e $\mathcal{S}(s, q) = 2/s + 3/q = 1$. Esses resultados foram estendidos para o contexto de espaços fracos de Lebesgue $L^s((0, T), \mathbf{L}^{r,\infty}(\Omega))$ ou $L^{s,\infty}((0, T), \mathbf{L}^{r,\infty}(\Omega))$, veja (BERJORLAND C.; VASSEUR, 2011), (BOSIA S.;PATA, 2014), (SOHR, 2001b) para mais detalhes.

No problema (4.1), se considerarmos mais regularidade nas condições iniciais, por exemplo, $v_0 \in V$, $w_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $f, g \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, então existe uma solução (v, w) definida em um intervalo de tempo $(0, T')$, com $T' \leq T$, tal que $v \in L^2(0, T'; V) \cap L^2(0, T'; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V)$, $w \in L^\infty(0, T'; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T'; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, veja (ROJAS-MEDAR, 1997). Além disso, como nas equações de Navier-Stokes, a solução (v, w) será forte em todo o intervalo $(0, T)$ se assumirmos que $v \in L^s(0, T; \mathbf{L}^{q,\infty}(\Omega))$ or $v \in L^{s,\infty}(0, T; \mathbf{L}^{q,\infty}(\Omega))$, com a norma de v suficientemente pequena, e (s, q) é um par de Prodi-Serrin, isto é, $2/s + 3/q = 1$, veja (ROJAS-MEDAR M.A.;LOAYZA, 2016). Por esta razão, damos a seguinte definição.

Definição 4.2 *Assuma que $v_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $w_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $f, g \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Dizemos que o par (v, w) é uma solução forte de (4.1) se (v, w) é uma solução fraca (4.1) e se houver expoentes $1 < s, q < \infty$ com $\mathcal{S}(s, q) = 1$ tal que $v \in L^s(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$.*

Estamos interessados em determinar uma condição ótima para que existam soluções fortes do problema (4.1) e que seja similar à obtida para as equações de Navier-Stokes em (FARWIG, 2013),(FARWIG R.;SOHR, 2009b). Vale a pena mencionar que tal resultado foi obtido por Komo

em (KOMO, 2014) para o sistema de equações de Boussinesq e não depende da convecção do calor.

Denotamos por P a projeção ortogonal em $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $A = -P\Delta$ o operador usual de Stokes com domínio $D(A) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V$ e

$$\mathcal{L}\mathbf{w} = -\alpha\Delta\mathbf{w} - \beta\nabla\operatorname{div}\mathbf{w} + \gamma\mathbf{w}$$

o operador de Lamé para $\mathbf{w} \in D(\mathcal{L}) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Em nosso primeiro resultado estabelecemos a existência de uma solução forte de (4.1)

Teorema 4.3 *Assuma $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Considere $1 < s, q < \infty$ com $\mathcal{S}(s, q) = 1$, $1 < s_1, q_1 < \infty$ tal que $\mathcal{S}(s_1, q_1) = 2$ e*

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{q_1} < \min \left\{ \frac{1}{q} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right\}.$$

Existem constantes $M > 0$, $c^ = c(\Omega, q)$ com a seguinte propriedade: se $ac^* < 1$ e*

$$\left(\int_0^T \|e^{-\tau A} \mathbf{v}_0\|_q^s d\tau \right)^{1/s} + \left(\int_0^T \|e^{\tau \mathcal{L}} \mathbf{w}_0\|_{q_1}^{s_1} d\tau \right)^{1/s_1} + c^* \int_0^T (\|\mathbf{f}(\tau)\|_2^2 + \|\mathbf{g}(\tau)\|_2^2) d\tau \leq M$$

é satisfeita então existe uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ do problema (4.1).

Observação 4.4 *Um resultado similar para as equações de Navier-Stokes foi obtido por Farwig e Sohr (FARWIG R.;SOHR, 2009a, Teorema 1.2(ii)) com força externa $\mathbf{f} = 0$ e por Farwig, Sohr e Varnhorn em (FARWIG R.;SOHR, 2009b, Teorema 1.1) com força $\mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^{s/2}(0, T; \mathbf{L}^{q/2}(\Omega))$ com $2/s + 3/q = 1$. Neste último caso foi requerido que*

$$\left(\int_0^T \|e^{-\tau A} \mathbf{v}_0\|_q^s d\tau \right)^{1/s} + \left(\int_0^T \|\mathbf{F}(\tau)\|_{q/2}^{s/2} d\tau \right)^{2/s} \leq M.$$

O seguinte teorema é o principal resultado.

Teorema 4.5 *Sejam s, q, s_1, q_1 como no Teorema (4.3). Assuma $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. A condição*

$$\int_0^\infty \|e^{-tA} \mathbf{v}_0\|_q^s dt < \infty. \quad (4.3)$$

é necessária e suficiente para a existência de uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ do problema (4.1) num intervalo $(0, T')$ com $0 < T' \leq T$.

Observações 4.6 1. *A condição (4.3) é a mesma obtida para os sistemas de Navier-Stokes e Boussinesq; veja (FARWIG R.;SOHR, 2009a), (FARWIG R.;SOHR, 2009b) e (KOMO, 2014).*

2. Seja $B_{q,s}^{-2/s}(\Omega)$ o espaço de Besov das funções vetoriais solenoidais dadas em (AMANN, 2002), isto é, o espaço dual de

$$\begin{aligned} B_{q',s'}^{2/s}(\Omega) &= B_{q',s'}^{2/s}(\Omega) \cap \mathbf{L}_{\sigma}^{q'}(\Omega) \\ &= \left(\mathbf{L}_{\sigma}^{q'}(\Omega), D(A_{q'}) \right)_{1/s, s'} \\ &= \{ \mathbf{v} \in B_{q',s'}^{2/s}(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \}, \end{aligned}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o espaço de interpolação real. Por (TRIEBEL, 1978, Teorema 1.14.5) as seguintes normas são equivalentes

$$\left(\int_0^{\infty} \|e^{-\tau A} \mathbf{v}_0\|_q^s d\tau \right)^{1/s} + \|\mathbf{v}_0\|_2 \sim \|\mathbf{v}_0\|_{B_{q,s}^{-2/s}} + \|\mathbf{v}_0\|_2.$$

Portanto, a condição (4.3) é equivalente a $\mathbf{v}_0 \in B_{q,s}^{-2/s}(\Omega) \cap \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega)$.

A unicidade é estabelecida no seguinte resultado.

Teorema 4.7 *Sejam $0 < T \leq \infty$ e $\mathcal{S}(s, q) = 1$. Assuma que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1)$ e $(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)$ são soluções fracas de (4.1) tais que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L_{loc}^s([0, T]; \mathbf{L}^q(\Omega))$. Então $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t)$ e $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{w}_2(t)$ para quase todo $t \in (0, T)$.*

4.2 PRELIMINARES

O lema abaixo mostra a formulação, em termos do semigrupo, das soluções do sistema (4.1) e foi proposta por Sohr em (SOHR, 2001a).

Lema 4.8 *Sejam $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ funções mensuráveis. Assuma que $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. O par $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ satisfazendo (4.2) é solução fraca de (4.1) se, e somente se, as equações integrais*

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-tA} \mathbf{u}_0 + aA^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Prot} \mathbf{w}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &\quad - A^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Div} (\mathbf{v}(\tau) \otimes \mathbf{v}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= e^{t\mathcal{L}} \mathbf{w}_0 + a(-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} (-\mathcal{L})^{-\frac{1}{2}} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \mathbf{g}(\tau) d\tau \\ &\quad - (-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} (-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} (\mathbf{w}(\tau) \otimes \mathbf{v}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

são satisfeitas para quase todo $t \in (0, T)$.

A representação da solução fraca em termos do semigrupo, envolvendo equações integrais para as equações de Navier-Stokes, foi estabelecida por Shor em (SOHR, 2001a, Chapter IV, Section 2.4). Assim, as representações dos termos que envolvem $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{f}, \mathbf{g}$, $\operatorname{div}(\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{w}(\tau))$ e $\operatorname{div}(\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{v}(\tau))$ de (4.4) e (4.5) das soluções fracas seguem o mesmo argumento.

Demonstraremos agora que a representação continua válida para os termos que envolvem o rotacional, $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{w}$. Estes termos não são tratados por Sohr. De fato, com dados $\mathbf{w}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$ e denotando:

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}})(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Prot} \mathbf{w} d\tau, \text{ tal que } \tilde{\mathbf{f}} = A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Prot} \mathbf{w}$$

temos para toda $\psi \in \mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_0^t \langle \mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}}, A^{\frac{1}{2}}\psi \rangle \phi' dt + \int_0^t \langle \mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}}, A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}\psi \rangle \phi dt = \int_0^t \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} A^{\frac{1}{2}}\psi \rangle \phi dt.$$

Desta forma mostramos que $\tilde{\mathbf{v}}(t) = A^{\frac{1}{2}} \mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}}$ é solução fraca .

Como

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}})(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Prot} \mathbf{w} d\tau \in D(A),$$

então

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = A^{\frac{1}{2}} \mathcal{J}\tilde{\mathbf{f}} \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

para quase todo $t \in (0, T)$, e de (4.7) temos

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{2,s;T} \leq c \|\mathbf{w}\|_{2,s;T}.$$

Para cada T' , $0 < T' < T$, vemos

$$\tilde{\mathbf{v}} \in L^s(0, T'; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)), \nabla \tilde{\mathbf{v}} \in L^s(0, T'; \mathbf{L}^2(\Omega)^{n+1}),$$

o que mostra $\tilde{\mathbf{v}} \in L_{loc}^1([0, T]; \mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega))$. Usando que

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}, A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \bar{\phi} \rangle_\Omega = \langle A^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}}, A^{\frac{1}{2}} \bar{\phi} \rangle_\Omega = \mu \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}, \nabla \bar{\phi} \rangle_\Omega,$$

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}, A^{\frac{1}{2}} \bar{\phi} \rangle_\Omega = \langle A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Prot} \mathbf{w}, A^{\frac{1}{2}} \bar{\phi} \rangle_\Omega = \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} \bar{\phi} \rangle_\Omega.$$

Temos a formulação

$$-\int_0^t \langle \tilde{\mathbf{v}}, \bar{\phi} \rangle \phi' dt + \int_0^t \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}, \nabla \bar{\phi} \rangle \phi dt = \int_0^t \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} \bar{\phi} \rangle \phi dt,$$

mostrando que é uma solução fraca. Um procedimento semelhante é usado para mostrar que $(-\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} (-\mathcal{L})^{-\frac{1}{2}} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\tau) d\tau$ satisfaz a representação da solução fraca.

4.3 CONSTRUÇÃO DO PONTO FIXO

Lema 4.9 *Suponha que $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ com $p > 1$ e $r, \sigma \geq 0$ tais que*

$$2\sigma + \frac{3}{r} = \frac{3}{p}, 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Existe um único elemento em $\mathbf{L}_\sigma^r(\Omega)$ denotado por $A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{div} \mathbf{F} \in \mathbf{L}_\sigma^r$ com

$$\langle A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{div} \mathbf{F}, A_{r'}^{\frac{1}{2}+\sigma} P_r \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{F}, \nabla \mathbf{w} \rangle,$$

para todo $\mathbf{w} \in D(A_{r'}^{\frac{1}{2}+\sigma})$. Mais ainda,

$$\|A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{div} \mathbf{F}\|_r \leq c \|\mathbf{F}\|_p, \quad (4.6)$$

para alguma constante $c = c(\Omega, p, r) > 0$.

Para a demonstração veja (KOMO, 2014, Lemma 3.1).

O próximo lema decorre de uma modificação necessária para a formulação da solução fraca, pois diferente do sistema de Boussinesq e Navier-Stokes, no sistema de equações (4.1) temos o operador rotacional perturbando o sistema micropolar (3.1). A ideia da prova decorre dos conceitos estabelecidos em (SOHR, 2001a).

Lema 4.10 *Assuma que $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ com $p > 1$ e $r, \sigma \geq 0$ com*

$$2\sigma + \frac{3}{r} = \frac{3}{p}, 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Existe um único elemento em $\mathbf{L}_\sigma^r(\Omega)$ denotado por $A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{rot} \mathbf{F} \in \mathbf{L}_\sigma^r$ com

$$\langle A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{rot} \mathbf{F}, A_{r'}^{\frac{1}{2}+\sigma} \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{F}, \nabla \mathbf{w} \rangle$$

para todo $\mathbf{w} \in D(A_{r'}^{\frac{1}{2}+\sigma})$. Ocorre

$$\|A_r^{-\frac{1}{2}-\sigma} P_r \operatorname{rot} \mathbf{F}\|_r \leq c \|\mathbf{F}\|_p, \quad (4.7)$$

para alguma constante $c = c(\Omega, p, r) > 0$.

Dado $d \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))'$ uma distribuição definida em $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_{q'}^\alpha)$, onde $1 < q < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ com:

$$|[d, \mathbf{v}]|_\Omega \leq c \|A_{q'}^\alpha \mathbf{v}\|_{q', \Omega}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_{q'}^\alpha),$$

onde $c > 0$ não depende da escolha de $\mathbf{v}$. Então existe $A_q^{-\alpha} P_q d$, veja Sohr (SOHR, 2001a, III, Lemma 2.6.1) e Farwig (FARWIG, 2013, Lemma 2.1), com as seguintes propriedades:

$$\langle A_q^{-\alpha} P_q d, A_{q'}^{\alpha} \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = [d, \mathbf{v}], \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_{q'}^{\alpha})$$

e

$$\|A_q^{-\alpha} P_q d\|_q \leq c.$$

Fazendo $d = \text{rot } \mathbf{F}$ e fixe $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A_{r'})$. Observe que para $r' \geq 3$, pelo teorema de imersão (2.6) $\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ continuamente, isto é $\|\mathbf{w}\|_{p'} \leq c \|\nabla \mathbf{w}\|_{r'}, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)$. Usando (2.7) temos que $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A_{p'}^{\frac{1}{2}})$, da consistência do operador Stokes (2.2) com $2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{p'} \geq \frac{3}{r'}$ segue $A_{p'}^{\frac{1}{2}} \mathbf{w} = A_{r'}^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}$. Logo:

$$\begin{aligned} |[\text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{w}]| &= |\langle \mathbf{F}, \text{rot } \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{F}\|_p \|\text{rot } \mathbf{w}\|_{p'} \\ &\leq c \|\mathbf{F}\|_p \|\nabla, \mathbf{w}\|_{p'} \leq c \|\mathbf{F}\|_p \|A_{p'}^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}\|_{p'} \\ &c \|\mathbf{F}\|_p \|A_{r'}^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}\|_{p'} \leq c \|\mathbf{F}\|_p \|A_{r'}^{\frac{1}{2}+\sigma} \mathbf{w}\|_{r'} \end{aligned}$$

Então segue o resultado.

Lema 4.11 *Assuma que $1 < s, q < \infty$ tal que $\mathcal{S}(s, q) = 2/s + 3/q = 1$. Então existe $1 < s_1, q_1 < \infty$ tal que $\mathcal{S}(s_1, q_1) = 2$ e*

1. $\sigma_1 = 3(1/q_1 - 1/q)/2 \in [0, 1/2)$ e $1 - 2\sigma_1 + 2/s = 2/s_1$.
2. $\sigma_2 \in [0, 1/2)$, $1/q \leq 2\sigma_2/3 + 1/q_1 < 1$ e $-1/2 + 1/s_1 < \sigma_2 \leq 1/2 + 1/s_1 - 1/s$.
3. $1/q + 1/q_1 < 1$ e $1/s + 1/s_1 < 1$.
4. $1/q_1 < 1/2 - 1/q$.

(i) A igualdade $\mathcal{S}(s_1, q_1) = 2$ é facilmente verificada. A condição $\sigma_1 \in [0, 1/2)$ é verificada se

$$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} + \frac{1}{3}. \quad (4.8)$$

(ii) $1/q < 2\sigma_2/3 + 1/q_1 < 1$ é equivalente para

$$\frac{1}{q} - \frac{2\sigma_2}{3} \leq \frac{1}{q_1} < 1 - \frac{2\sigma_2}{3} \quad (4.9)$$

e $-1/2 + 1/s_1 < \sigma_2 \leq 1/2 + 1/s_1 - 1/s$ é equivalente

$$\frac{1}{3} - \frac{2\sigma_2}{3} < \frac{1}{q_1} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{q} - \frac{2\sigma_2}{3}. \quad (4.10)$$

(iii) $1/q + 1/q_1 < 1$ e $1/s + 1/s_1 < 1$ é equivalente

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{q} < \frac{1}{q_1} < 1 - \frac{1}{q}.$$

(iv) A Condição $1/q - 1/q_1 \leq 1/2$ é verificada se

$$\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{q}.$$

Fazendo $\sigma_2 = 0$, de (4.8), (4.9) e (4.10) podemos escolher $q_1 > 1$ tal que

$$1/3 < 1/q_1 < \min \left\{ \frac{1}{q} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right\}.$$

Lema 4.12 *Assuma $1 < s, q < \infty$ com $\mathcal{S}(s, q) = 1$. Sejam $1 < s_1, q_1 < \infty$ dados no Lema (4.11). Defina $X := \mathbf{L}^s(0, T; \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega))$, $Y := \mathbf{L}^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$,*

$$\alpha := \frac{1}{2} + \frac{3}{2q}, \alpha_1 = \frac{1}{2} + \sigma_1, \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

1. *Defina a forma bilinear $\mathcal{F}_1 : X \times X \rightarrow X$ por*

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)(t) := -A_q^\alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\tau) \times \mathbf{v}_2(\tau)) d\tau,$$

para t q.s. em $(0, T)$. Então,

$$\|\mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_X \leq c \|\mathbf{v}_1(\tau) \times \mathbf{v}_2(\tau)\|_{\frac{q}{2}, \frac{q}{2}; T} \leq c \|\mathbf{v}_1\|_X \|\mathbf{v}_2\|_X, \quad (4.11)$$

para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in X$ e $c = c(\Omega, q) > 0$ alguma constante.

2. *Defina a forma bilinear $\mathcal{F}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ por*

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})(t) := -(\mathcal{L})_{q_1}^\alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)\mathcal{L}_{q_1}} (\mathcal{L})_{q_1}^{-\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{w}(\tau)) d\tau,$$

para t q.s. em $(0, T)$. Então,

$$\|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_X \leq c \|\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{w}(\tau)\|_{2,2; T} \leq c \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{w}\|_Y, \quad (4.12)$$

para todo $\mathbf{v} \in X$, $\mathbf{w} \in Y$ e alguma constante $c = c(\Omega, q) > 0$.

3. *Defina a aplicação linear $\mathcal{T}_1 : Y \rightarrow X$ por*

$$(\mathcal{T}_1 \mathbf{w})(t) := A_q^{\alpha_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A_q^{-\alpha_1} P(\operatorname{arot} \mathbf{w}) d\tau,$$

para t q.s. em $(0, T)$. Então,

$$\|\mathcal{T}_1(\mathbf{w})\|_X \leq c \|\mathbf{w}\|_Y,$$

para todo $\mathbf{w} \in Y$ e alguma constante $c = c(\Omega, q) > 0$.

4. Defina a aplicação linear $\mathcal{T}_2 : X \rightarrow Y$ por

$$(\mathcal{T}_2 \mathbf{v})(t) := (\mathcal{L})_{q_1}^{\alpha_2} \int_0^t e^{-(t-\tau)\mathcal{L}} (\mathcal{L})_{q_1}^{-\alpha_2} (\operatorname{arot} \mathbf{v}) d\tau,$$

para t q.s. em $(0, T)$. Então,

$$\|\mathcal{T}_2(\mathbf{v})\|_Y \leq cT^{1/2+1/s_1-1/s} \|\mathbf{v}\|_X,$$

para todo $\mathbf{v} \in X$ e alguma constante $c = c(\Omega, q)$.

5. Para $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Defina

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 \mathbf{f}(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ \mathcal{T}_4 \mathbf{g}(t) &= \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \mathbf{g}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

para t q.s. em $(0, T)$. Então,

$$\|\mathcal{T}_3 \mathbf{f}\|_{q,s;T} \leq c \|\mathbf{f}\|_{2,2;T}. \quad (4.13)$$

e

$$\|\mathcal{T}_4 \mathbf{g}\|_{q_1, s_1; T} \leq cT^{1/6} \|\mathbf{g}\|_{2,2;T}.$$

(i) Usando as estimativas (2.3) e (4.6) temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_q &= \left\| -A_q^\alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\tau) \otimes \mathbf{v}_2(\tau)) d\tau \right\|_q \\ &= \left\| \int_0^t -A_q^\alpha e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\tau) \otimes \mathbf{v}_2(\tau)) d\tau \right\|_q \\ &= \int_0^t \left\| -A_q^\alpha e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\tau) \otimes \mathbf{v}_2(\tau)) \right\|_q d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t-\tau|^{-\alpha} \left\| A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\tau) \otimes \mathbf{v}_2(\tau)) \right\|_q d\tau \\ &= c \int_0^t |t-\tau|^{-\alpha} \|\mathbf{v}_1(\tau) \otimes \mathbf{v}_2(\tau)\|_{\frac{q}{2}} d\tau \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, T]$ com $c = c(\Omega, q) > 0$. Aplicando a desigualdade Hardy-Littlewood para $(1-\alpha) + 1/s = 1/s/2$ obtemos,

$$\|\mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{q,s;T} \leq c \|\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2\|_{\frac{q}{2}, \frac{s}{2}; T} \leq c \|\mathbf{v}_1\|_{q,s;T} \|\mathbf{v}_2\|_{q,s;T} \quad (4.14)$$

com $c = c(\Omega, q) > 0$.

(ii) Seja $\sigma = 3/2q$ e $1/q_2 = 1/q + 1/q_1$, como $2\sigma + 3/q_1 = 3/q_2$ e $q_2 > 1$, pelo Lema (4.11)(ii), usando uma versão análoga à estimativa (4.7) para o operador $-\mathcal{L}_{q_1}$,

$$\|(-\mathcal{L}_{q_1})^{-\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})\|_{q_1} \leq c(\Omega, q) \|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\|_2,$$

para t q.s. em $(0, T)$. Segue da estimativa (2.4), como no item (i), que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})(t)\|_{q_1} &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha} \|(-\mathcal{L}_{q_1})^{-\alpha} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})\|_{q_1} d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha} \|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\|_{q_2} d\tau,\end{aligned}$$

para t q.s. em $(0, T)$ com $c = c(\Omega, q) > 0$. Da desigualdade de Hardy-Littlewood com $(1 - \alpha) + 1/s_1 = 1/s_2$, juntamente com a desigualdade de Hölder, ocorre

$$\|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_{q_1, s_1, T} \leq c \|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\|_{q_2, s_2, T} \leq c(\Omega, q) \|\mathbf{v}\|_{q, s, T} \|\mathbf{w}\|_{q_1, s_1, T}. \quad (4.15)$$

(iii) Do Lema (4.11), com $2\sigma_1 + 3/q = 3/q_1$ e $\sigma_1 \in [0, 1/2]$, usando (2.3), (2.5) e (4.7) (com $\alpha_1 = 1/2 + \sigma_1$) ocorre

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{T}_1 \mathbf{w})(t)\|_q &= \left\| A_q^{\alpha_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_{q_1}} A_q^{-\alpha_1} P(\operatorname{rot} \mathbf{w}) d\tau \right\|_q \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_1} \left\| A_q^{-\alpha_1} P(\operatorname{rot} \mathbf{w}) \right\|_q d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_1} \|\mathbf{w}\|_{q_1} d\tau,\end{aligned}$$

onde $c = c(\Omega, q) > 0$. Consequentemente da desigualdade Hardy-Littlewood para $(1 - \sigma_1) + 1/s = 1/s_1$, obtemos

$$\|(\mathcal{T}_1 \mathbf{w})\|_{q, s, T} \leq c \|\mathbf{w}\|_{q_1, s_1, T}. \quad (4.16)$$

(iv) De (2.3), (2.5) e (4.7) temos

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{T}_2 v)(t)\|_{q_1} &= \left\| (\mathcal{L})_{q_1}^{1/2} \int_0^t e^{-(t-\tau)(\mathcal{L})_{q_1}} (\mathcal{L})_{q_1}^{-1/2} P(\operatorname{rot} v) d\tau \right\|_{q_1} \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-1/2} \left\| (\mathcal{L})_{q_1}^{-\alpha_2} P(\operatorname{rot} v) \right\|_{q_1} d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-1/2} \|v\|_{p^*} d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-1/2} \|v\|_q d\tau\end{aligned}$$

como $q > q_1$, onde $c = c(\Omega, q) > 0$. Além disso, como $1/2 + 1/s_1 = 1/s_2$ com $1 < s_2 < s$ pela desigualdade de Hardy-Littlewood obtemos

$$\|\mathcal{T}_2 \mathbf{v}\|_{q_1, s_1, T} \leq c T^{1/s_2 - 1/s} \|\mathbf{v}\|_{q, s, T}.$$

(v) Observe que de (2.5), com $\alpha_3 = 1/2 + 1/s \in (0, 1)$, temos $2\alpha_3 + 3/q = 3/(3/2)$ e

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_3 \mathbf{f}(t)\|_q &\leq \|A_q^{\alpha_3} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P \mathbf{f}(\tau) d\tau\|_{3/2} \\ &\leq \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_3} \|\mathbf{f}(\tau)\|_{3/2} d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_3} \|\mathbf{f}(\tau)\|_2 d\tau,\end{aligned}$$

onde $c = c(\Omega) > 0$. Como $1 - \alpha_3 + 1/s = 1/2$, pela desigualdade de Hardy-Littlewod segue a estimativa (4.13).

Agora, seja $\alpha_4 = 1/3 + 1/s_1$. Então pelo Lema 4.11, $\alpha_4 \in (0, 1)$ e $2\alpha_4 + 3/q_1 = 3/(9/8)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_4 \mathbf{g}(t)\|_{q_1} &\leq \|\mathcal{L}_{q_1}^{\alpha_4} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \mathbf{g}(\tau) \|_{9/8} d\tau \\ &\leq \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_4} \|\mathbf{g}(\tau)\|_{9/8} d\tau \\ &\leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\alpha_3} \|\mathbf{g}(\tau)\|_2 d\tau, \end{aligned}$$

onde $c = c(\Omega) > 0$. Como $1 - \alpha_4 + 1/s_1 = 2/3$, pela desigualdade de Hardy-Littlewod, temos

$$\|\mathcal{T}_4 \mathbf{g}\|_{q_1, s_1; T} \leq \|\mathbf{g}\|_{3/2, 2; T} \leq T^{1/6} \|\mathbf{g}\|_{2, 2; T}.$$

No seguinte resultado estabelecemos um resultado de existência para o problema (4.1) com $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Definimos

$$E_1(t) = e^{-tA} \mathbf{v}_0 \quad E_2(t) = e^{-t\mathcal{L}} \mathbf{w}_0 \quad \text{para } t > 0. \quad (4.17)$$

Teorema 4.13 *Considere $1 < s, q < \infty$, $\mathcal{S}(s, q) = 1$ e sejam $1 < s_1, q_1 < \infty$ como definido no Lema (4.11). Assuma também $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Suponha adicionalmente $E_1 \in \mathbf{L}^s(0, T; \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega))$ e $E_2 \in \mathbf{L}^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$ e*

$$ac^* < 1, \quad (4.18)$$

onde $c^* = c(\Omega, q) > 0$ é a maior constante dado pelo Lema (4.12). Existe uma constate $M = M(\Omega, q) > 0, K > 0$ e $0 < T' \leq 1$ tal que se

$$\|E_1\|_{q, s; T'} + \|E_2\|_{q_1, s_1; T'} + c^*(\|\mathbf{f}\|_{2, 2; T'} + \|\mathbf{g}\|_{2, 2; T'}) \leq M. \quad (4.19)$$

Então existe $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^s(0, T; \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega))$, $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$ que verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= E_1 + \mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + a\mathcal{T}_1 \mathbf{w} + \mathcal{T}_3 \mathbf{f} \\ \mathbf{w} &= E_2 + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a\mathcal{T}_2 \mathbf{v} + \mathcal{T}_4 \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.20)$$

e

$$\|\mathbf{v}\|_{q, s; T'} + \|\mathbf{w}\|_{q_1, s_1; T'} \leq K[\|E_1\|_{q, s; T'} + \|E_2\|_{q_1, s_1; T'} + c^*(\|\mathbf{f}\|_{2, 2; T'} + \|\mathbf{g}\|_{2, 2; T'})]. \quad (4.21)$$

onde as aplicações $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{T}_i$, ($i = 1, \dots, 4$) são definidas no Lema (4.12).

Sejam $T' = \min\{T, 1\}$, $X = L^s(0, T'; \mathbf{L}^q(\Omega))$ e $Y = L^{s_1}(0, T'; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$, com s_1, q_1 definido no Lema 4.11. Considere no produto cartesiano $X \times Y$ a norma $\|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_{X \times Y} = \|\mathbf{v}\|_X + \|\mathbf{w}\|_Y$.

Seja $\Phi : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ a aplicação não linear definida por

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (E_1 + \mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + a\mathcal{T}_1\mathbf{w} + \mathcal{T}_3\mathbf{f}, E_2 + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a\mathcal{T}_2\mathbf{v} + \mathcal{T}_4\mathbf{g}). \quad (4.22)$$

Mostraremos que Φ admite um ponto fixo. Seja

$$B_R = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in X \times Y; \|(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_{X \times Y} \leq R\}$$

a bola fechada com raio $R > 0$. Das estimativas do Lema 4.12 e (4.19), para $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in B_R$, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_{X \times Y} &\leq \|E_1\|_X + \|E_2\|_Y + c^*\|\mathbf{v}\|_X(\|\mathbf{v}\|_X + \|\mathbf{w}\|_Y) + ac^*(\|\mathbf{v}\|_X + \|\mathbf{w}\|_Y) \\ &\quad + c^*(\|\mathbf{f}\|_X + \|\mathbf{g}\|_Y) \\ &\leq c^*R^2 + ac^*R + M. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da condição (4.18), escolhendo $M < (1 - ac^*)^2/4c^*$, concluímos que a equação quadrática

$$c^*x^2 + (ac^* - 1)x + M = 0$$

possui uma raiz positiva $R_0 < (1 - ac^*)/2c^*$. Portanto $T(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$.

Por outro lado, para $(\mathbf{v}, \mathbf{w}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in B_{R_0}$ temos

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \Phi(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})\|_{X \times Y} \\ &= \|(\mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{F}_1(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}) + a\mathcal{T}_1\mathbf{w} - a\mathcal{T}_1\tilde{\mathbf{w}}\|_X \\ &\quad + \|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) + a\mathcal{T}_2\mathbf{v} - a\mathcal{T}_2\tilde{\mathbf{v}}\|_Y \\ &= \|\mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + \mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + a\mathcal{T}_1(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}})\|_X \\ &\quad + \|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{w}}) + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{w}}) - \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) + a\mathcal{T}_2(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_Y \\ &\leq \|\mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_X + \|\mathcal{F}_1(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_X + a\|\mathcal{T}_1(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}})\|_X + \|\mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}})\|_Y \\ &\quad + \|\mathcal{F}_2(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})\|_Y + a\|\mathcal{T}_2(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_Y \\ &\leq c^*\left(\|\mathbf{v}\|_X + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_X + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_Y\right)\|(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_X + c^*\|\mathbf{v}\|_X\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_Y + c^*a\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_Y + c^*a\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_X \\ &\leq 2c^*R_0\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_X + c^*R_0\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_Y + c^*a\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_Y + c^*a\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_X \\ &\leq (2R_0c^* + ac^*)\|(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})\|_{X \times Y}. \end{aligned}$$

Como $2c^*R_0 + c^*a < 1$ a aplicação $\Phi : B_{R_0} \rightarrow B_{R_0}$ é uma contração estrita. Pelo teorema do ponto fixo de Banach existe $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in B_{R_0}$ tal que $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$. De (4.22) vemos que (4.20) é satisfeita.

Por outro lado, devido a (4.23) teremos

$$\|\mathbf{v}\|_X + \|\mathbf{w}\|_Y \leq M + (c^*R_0 + ac^*)(\|\mathbf{v}\|_X + \|\mathbf{w}\|_Y).$$

Como $R_0 < (1 - ac^*)/2c^* < (1 - ac^*)/c^*$ a estimativa (4.21) com $K = M(1 - c^*R_0 - ac^*)^{-1}$.

4.4 PROVA DO TEOREMA 3.3

Consideramos as seguintes etapas.

Etapas 1. Do (SOHR, 2001a, Teorema 2.3.1, IV), $E_1 \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; \mathbf{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega))$ é solução fraca do problema linear de Stokes com valor inicial $\mathbf{v}_0$ e força externa nula. Analogamente, $E_2 \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ e E_2 é solução fraca de $\mathbf{w}_t + \mathcal{L}\mathbf{w} = 0$ $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$, veja (YAMAGUCHI, 2005).

Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{T}_i (i = 1, \dots, 4)$ os operadores definidos no Lema 4.12 e seja $M = M(\Omega, q) > 0$ a constante obtida no Teorema 4.13, isto é, se

$$\|E_1\|_{q,s;T} + \|E_2\|_{q_1,s_1;T} + c^*(\|\mathbf{f}\|_{2,s;T} + \|\mathbf{g}\|_{2,s_1;T}) \leq M,$$

então existe $\mathbf{v} \in L^s(0, T; \mathbf{L}_\sigma^q(\Omega))$ e $\mathbf{w} \in L^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$ satisfazendo

$$\mathbf{v} = E_1 + \mathcal{F}_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + a\mathcal{T}_1\mathbf{w} + \mathcal{T}_3\mathbf{f},$$

$$\mathbf{w} = E_2 + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a\mathcal{T}_2\mathbf{v} + \mathcal{T}_5\mathbf{g},$$

e

$$\|\mathbf{v}\|_{q,s;T} + \|\mathbf{w}\|_{q_1,s_1;T} \leq K(\|E_1\|_{q,s;T} + \|E_2\|_{q_1,s_1;T} + \|\mathbf{f}\|_{2,2;T} + \|\mathbf{g}\|_{2,2;T}), \quad (4.24)$$

para alguma constante $K > 0$.

Etapas 02. De (4.15)

$$\|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\|_{q_2,s_2;T} \leq c(\Omega, q)\|\mathbf{v}\|_{q,s;T}\|\mathbf{w}\|_{q_1,s_1;T}$$

Do Lema 4.11(iv) temos que $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in \mathbf{L}^{s_2}(0, T; \mathbf{L}^{q_2}(\Omega)) \hookrightarrow \mathbf{L}^{s_2}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Pelo Lema 2.12 (para o operador $\mathcal{L}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) = & e^{t\mathcal{L}}\mathbf{w}_0 + (-\mathcal{L})^{1/2} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}}(-\mathcal{L})^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \mathbf{g}(\tau) d\tau \\ & - (-\mathcal{L})^{1/2} \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}}(-\mathcal{L})^{1/2} \text{div } (\mathbf{w}(\tau) \otimes \mathbf{v}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

para a.a. $t \in [0, T]$. Portanto, from (SOHR, 2001a, Lemma 2.4.2) (com $\mathcal{L}$ no lugar de A) segue que $\mathbf{w}$ verifica (4.2).

Etapa 03. Defina

$$\begin{aligned} E(t) &:= E_1(t) + \mathcal{T}_1(\mathbf{w})(t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &= e^{-tA} u_0 + A^{1/2} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-1/2} P(\text{rot } \mathbf{w}(\tau)) d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbf{f}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

e

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) := - \int_0^t A_q^\alpha e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \text{div} \left((\tilde{\mathbf{v}} + E) \otimes (\tilde{\mathbf{v}} + E) \right) (\tau) d\tau. \quad (4.25)$$

para a.a $t \in (0, T)$. Portanto $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + E$.

Pelo Lema 4.11, $\mathcal{S}(s_1, q_1) = 2$ e fazendo a escolha de s_1, q_1 temos que $s_1, q_1 > 2$. Portanto, $\mathbf{w} \in L^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Com essa condição e com $f \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ implica que $\nabla E \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$; veja(SOHR, 2001a, IV, (2.3.2)).

Seja $1 < \gamma < \infty$ definido por $1/\gamma = 1/2 + 1/q$. Seguindo da consistência do operador de Stokes e dos argumentos de dualidade que podemos reescrever a equação(4.25). Usando o Lema 4.9, e a equação (2.10), para $r_1 = q/2, \sigma_1 = 0, r_2 = q, \sigma_2 = 3/2q$ e $\mathbf{F} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in L^{s/2}(0, T; \mathbf{L}^{q/2}(\Omega))$ em (4.25) obtemos

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = - \int_0^t A_{q/2}^{1/2} e^{-(t-\tau)A_{q/2}} A_{q/2}^{-1/2} P_{q/2} \text{div} \left((\tilde{\mathbf{v}} + E) \otimes (\tilde{\mathbf{v}} + E) \right) (\tau) d\tau.$$

Como $\mathbf{F} \in L^{s/2}(0, T; \mathbf{L}^\gamma(\Omega))$ Concluimos que

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = - \int_0^t A_\gamma^{1/2} e^{-(t-\tau)A_\gamma} A_\gamma^{-1/2} P_\gamma \text{div} \left((\tilde{\mathbf{v}} + E) \otimes (\tilde{\mathbf{v}} + E) \right) (\tau) d\tau.$$

Seja $J_n = (I + \frac{1}{n} A_\gamma^{1/2})^{-1}, n \in \mathbb{N}$, A aproximação de Yosida da identidade I em $\mathbf{L}_\sigma^\gamma(\Omega)$ e $\tilde{\mathbf{v}}_n = J_n \tilde{\mathbf{v}}$. Assim $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_n + \frac{1}{n} A_\gamma^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_n$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} J_n P \text{div} \left((\tilde{\mathbf{v}} + E) \otimes (\tilde{\mathbf{v}} + E) \right) &= J_n P \text{div} \left(\mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \otimes E \right) \\ &= J_n P(\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_n) + \frac{1}{n} A_\gamma^{1/2} J_n A_\gamma^{-1/2} P \text{div}(\mathbf{v} A_\gamma^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_n) + J_n P(\mathbf{v} \cdot \nabla E). \end{aligned}$$

Portanto, como J_n e $A_\gamma^{1/2} J_n$ são operadores uniforme limitados em $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ temos

$$\|J_n P \text{div}(\mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \otimes E)\|_\gamma \leq c \|\mathbf{v}\|_q (\|A_\gamma^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_n\|_2 + \|\nabla E\|_2)$$

Para $\alpha > 0$ verificando $2\alpha + 3/2 = 3/\gamma$ e (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \|A_\gamma^{1/2} J_n \tilde{\mathbf{v}}(t)\|_2 &\leq c \int_0^t \|A_\gamma^\alpha A_\gamma^{1/2} e^{-(t-\tau)A} J_n P \text{div}(\mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \otimes E)\|_\gamma d\tau \\ &\leq c \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1/2} \|\mathbf{v}\|_q (\|A_\gamma^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_n\|_2 + \|\nabla E\|_2) d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood $1 - (\alpha + 1/2) + 1/2 = 1/2 + 1/s$ obtemos

$$\|A_\gamma^{1/2} J_n \tilde{\mathbf{v}}\|_{2,2;T} \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_{q,s;T} (\|A_\gamma^{1/2} J_n \tilde{\mathbf{v}}\|_{2,2;T} + \|\nabla E\|_{2,2;T}) \quad (4.26)$$

para todo $n \in N$ e $c_1 = c_1(\Omega, q) > 0$ uma constante. Substituindo M por $\min\{M, 1/8c_1\}$ segue de (4.24) que

$$c_1 \|\mathbf{v}\|_{q,s;T} \leq 4c_1 (\|E_1\|_{q,s;T} + \|E_2\|_{q_1,s_1;T} + \|\mathbf{f}\|_{2,s;T} + \|\mathbf{g}\|_{2,s_1;T}) \leq \frac{1}{2}.$$

Por construção $M = M(\Omega, q) > 0$, Podemos aplicar o princípio de absorção (4.26) e dessa forma

$$\|A_\gamma^{\frac{1}{2}} J_n \tilde{\mathbf{v}}\|_{2,2;T} \leq c \|\mathbf{v}\|_{q,s;T} \|\nabla E\|_{2,2;T},$$

com $c = c(\Omega, q) > 0$ independentemente de $n \in N$. Como J_n são operadores uniformemente limitados $\mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ usando (2.2) com $2\alpha + 3/2 = 3/\gamma$, segue que $\tilde{\mathbf{v}}(t) \in \mathcal{D}(A_\gamma^{\frac{1}{2}})$ a.a $t \in [0, T]$ e $A_\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ consequentemente $\nabla \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Etapa 04. Como $\nabla \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ podemos escrever

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)A_\gamma} P_\gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})(\tau) d\tau$$

Escolhendo $\alpha = 3/q$, $q_3 = (1/2 - 1/q)^{-1}$ usando (2.5) e (2.3) com $2\alpha + 3/q_3 = 3/\gamma$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|_{q_3} &\leq c \|A_\gamma^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(t)\|_\gamma \leq c \|A_\gamma^\alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)A_\gamma} P_\gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})(\tau) d\tau\|_\gamma \\ &\leq c \int_0^t \|A_\gamma^\alpha e^{-(t-\tau)A_\gamma} P_\gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})(\tau)\|_\gamma d\tau \\ &\leq c \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})(\tau)\|_\gamma d\tau \end{aligned}$$

para q.s $t \in (0, T)$. Tomando $s_3 = (1/2 - 1/s)^{-1}$, $s_4 = (1/2 + 1/s)^{-1}$ temos $\alpha = 1 - 2/s = 3/q$ como $\mathcal{S}(s, q) = 1$. Portanto, $1 - \alpha + 1/s_3 = 1/s_4$ e aplicando a desigualdade Hardy-Littlewood temos

$$\|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|_{q_3, s_3; T} \leq c \|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})(\tau)\|_{\gamma, s_4; T} \leq c \|\mathbf{v}\|_{q, s; T} \|\nabla \mathbf{v}\|_{2, 2; T}.$$

Por outro lado, pela interpolação

$$\|E\|_{q_3} \leq c \|\nabla E\|_2^\beta \|E\|_2^{1-\beta},$$

para alguma constante $c = c(\Omega, q)$ e $\beta(1/2 - 1/3) + (1 - \beta)1/2 = 1/q_3$, isto é, $\beta = 3(1/2 - 1/q_3) = 3/q$. Isso implica que

$$\|E\|_{q_3}^{s_3} \leq c \|\nabla E\|_2^2 \|E\|_2^{s_3-2}$$

como $s_3\beta = 2$, $2/s_3 + 3/q_3 = 3/2$. Logo, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + E \in L^{s_3}(0, T; \mathbf{L}^{q_3}(\Omega))$ e da desigualdade H'older

$$\|\mathbf{v}\mathbf{v}\|_{2,2;T} \leq c\|\mathbf{v}\|_{q,s,T}\|\mathbf{v}\|_{q_3,s_3;T},$$

isto é, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Portanto,

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = - \int_0^t A^{\frac{1}{2}} e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(\tau) d\tau$$

para q.s $t \in [0, T)$. Assim, podemos considerar $\tilde{\mathbf{v}}$ como solução fraca do sistema linear de Stokes com força externa nula e com força externa $f = -\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ com $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Então da teoria linear (veja (SOHR, 2001a)) concluímos que $\tilde{\mathbf{v}}$ satisfaz (4.2).

Etapa 05. Provamos que $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ satisfaz (4.2). O lema 4.8 implica que $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ é solução forte de (3.1). Do (SOHR, 2001a, Theorem 2.3.1), depois de uma possível redefinição em conjunto de medida nula, temos que $\mathbf{v} : [0, T) \rightarrow \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ e $\mathbf{w} : [0, T) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ são fortemente contínuas. A unicidade de solução forte segue do Teorema 4.7

4.5 PROVA DO TEOREMA 3.5

Sejam E_1 e E_2 definidos em (4.17). Como $E_2 \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\nabla E_2 \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $2 < q_1 < 3$ (do Lema 4.11), por interpolação e imersão contínua $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^6(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|E_2(\tau)\|_{q_1}^{s_1} d\tau &\leq \|E_2\|_{2,\infty;T}^{\theta s_1} \int_0^T \|E_2(\tau)\|_{L^3}^{(1-\theta)s_1} d\tau \\ &\leq C \|E_2\|_{2,\infty;T}^{\theta s_1} \int_0^T \|E_2(\tau)\|_{L^6}^{(1-\theta)s_1} d\tau \\ &\leq C \|E_2\|_{2,\infty;T}^{\theta s_1} \int_0^T \|\nabla E_2(\tau)\|_{L^2}^{(1-\theta)s_1} d\tau, \end{aligned}$$

onde $1/q_1 = \theta/2 + (1-\theta)/3$. Como $\mathcal{S}(s_1, q_1) = 2$ segue que $s_1(1-\theta) \leq 2$, e consequentemente, $E_2 \in L^{s_1}(0, T; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$.

Primeiro assuma que a condição (4.3) é satisfeita. Devido a $\|E_2\|_{q_1,s_1;T} < \infty$ podemos escolher $0 < T' < \min\{T, 1\}$ tal que

$$\|E_1\|_{q,s;T'} + \|E_2\|_{q_1,s_1;T'} + \|\mathbf{f}\|_{2,2;T'} + \|\mathbf{g}\|_{2,2;T'} \leq M.$$

Consequentemente, pelo Teorema 4.3 existe uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ de (3.1) em um intervalo $[0, T')$.

Para mostra a direção inversa, considere $0 < T' < T$ e uma solução forte $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, com $\mathbf{v} \in L^s(0, T'; \mathbf{L}^q(\Omega))$, do problema (4.1). Pela condição (4.2) da definição 4.1 segue por

interpolação que $\mathbf{w} \in L^{s_1}(0, T'; \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$. Por (4.16) temos $\mathcal{T}_1 \mathbf{w} \in L^s(0, T'; \mathbf{L}^q(\Omega))$. Usando (4.5) obtemos

$$e^{-tA} \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t) - a\mathcal{T}_1 \mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{v}}(t) - \mathcal{T}_3 \mathbf{f}(t) \quad (4.27)$$

Para q.s $t \in (0, T')$, onde

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = - \int_0^t A^{1/2} e^{-(t-\tau)A} A^{-1/2} P \operatorname{div}(\mathbf{v}(\tau) \otimes \mathbf{v}(\tau)) d\tau$$

para q.s $t \in (0, T')$. Do Lema 2.12, segue que

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) := - \int_0^t A_q^\alpha e^{-(t-\tau)A_q} A_q^{-\alpha} P_q \operatorname{div}(\mathbf{v}(\tau) \otimes \mathbf{v}(\tau)) d\tau$$

para q.s $t \in [0, T')$, onde $\alpha = 1/2 + 3/(2q)$. Consequentemente, das estimativas (4.14), (4.16) e (4.13) ocorre $\tilde{\mathbf{v}} \in L^s(0, T'; \mathbf{L}^q(\Omega))$. Portanto, de (4.27) temos $e^{-tA} \mathbf{v}_0 \in L^s(0, T'; \mathbf{L}^q(\Omega))$.

Mais ainda, de (2.3), (2.5) e $\mathcal{S}(s, q) = 1$ temos

$$\int_{T'}^\infty \|e^{-tA} \mathbf{v}_0\|_q^s dt \leq c \int_{T'}^\infty t^{-\frac{3}{2}s(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|\mathbf{v}_0\|_2^s dt < \infty.$$

Logo, a condição (4.3) ocorre.

4.6 PROVA DO TEOREMA 3.7

Defina

$$T_{\max} = \sup \{T' \in [0, T); \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t), \mathbf{w}_1(t) = \mathbf{w}_2(t) \text{ for a.e. } t \in [0, T')\}$$

e assuma por contradição que $T_{\max} < T$. Considere qualquer $T' \in [T_{\max}, T)$ com $T' \leq 1$.

Pelo Lema 4.8 ocorre

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathcal{F}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) + \mathcal{T}_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \\ \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 &= \mathcal{F}_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) + \mathcal{F}_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + \mathcal{T}_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{q,s;T'} &\leq c(\|\mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\|_{q/2,s/2;T'} + \|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v}_2\|_{q/s,s/2;T'} + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{q_1,s_1;T'}) \\ &\leq c(\|\mathbf{v}_1\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|\mathbf{v}_2\|_{q,s;T_{\max},T'}) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'}, \\ \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{q_1,s_1;T'} &\leq c(\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{q,s;T_{\max},T'} \|\mathbf{w}_1\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'} + \|\mathbf{v}_2\|_{q,s;T_{\max},T'} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'}) \\ &\quad + c\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{q,s;T_{\max},T'}. \end{aligned}$$

Adicionando as desigualdades temos

$$\begin{aligned}
& \|v_1 - v_2\|_{q,s;T'} + \|w_1 - w_2\|_{q_1,s_1;T'} \\
& \leq c_1(1 + \|v_1\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|v_2\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|w_1\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'}) \|v_1 - v_2\|_{q,s;T_{\max},T'} \quad (4.28) \\
& + c_1(1 + \|v_2\|_{q,s;T_{\max},T'}) \|w_1 - w_2\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'},
\end{aligned}$$

onde $c_1 = c_1(\Omega, p, q) > 0$. Escolhendo $T' > T_{\max}$ tal que

$$c_1(1 + \|v_1\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|v_2\|_{q,s;T_{\max},T'} + \|w_1\|_{q_1,s_1;T_{\max},T'}) \leq \frac{1}{2}, \quad (4.29)$$

vemos, de (4.28) e (4.29), que

$$\|v_1 - v_2\|_{q,s;T'} + \|w_1 - w_2\|_{q_1,s_1;T'} = 0.$$

Como $T' > T_{\max}$ temos uma contradição, e portanto $T_{\max} = T$.

5 PROJETOS FUTUROS

5.1 MHD-MICROPOLAR

Seja $\Omega \subset R^3$ um domínio limitado. Consideramos o seguinte sistema de fluido magneto-micropolar, que estabelece o movimento de fluido micropolar na presença de um campo magnético.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(p_1 + \frac{s}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = a \operatorname{rot} \mathbf{w} + s(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ -\gamma \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \alpha \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \beta \mathbf{w} = a \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{u} + \mathbf{h}) + \nabla p_2 = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{b} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \mathbf{b} = \mathbf{b}_0, \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Aqui $\mathbf{u}(x), \mathbf{w}(x) \in R^3$ denotam a velocidade do fluido e a velocidade angular de microrotação respectivamente, $\mathbf{b}(x) \in R^3$ denota o campo magnético, p_1 denota a pressão hidrostática, p_2 é uma função relacionada ao movimento de íons pesados, $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ são forças externas, $\{\mu, s, \gamma, \alpha, \beta, a\}$ são constantes associadas às propriedades do material.

De maneira semelhante ao que foi feito no Capítulo 2, onde mostramos a existência de uma solução ultra fraca para o sistema micropolar, estamos interessados em estudar a existência de uma solução ultra fraca para o sistema (5.1).

O estudo da solução ultra fraca para fluidos microrotacionais foi mostrado por Rojas-Medar, M.M Santos, G.Lukaszewicz em (LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, 2002) considerando forças externas $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e dados iniciais na fronteira $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ através do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Um estudo semelhante usando a teoria $\mathbf{L}^p$ das equações de Navier-Stokes, veja (AMROUCHE, 2011) para o sistema de equações de Boussinesq, foi feito por Acevedo, Amrouche e Conca (ACEVEDO P.;AMROUCHE, 2019), considerando forças externas mais gerais e dados iniciais $\mathbf{v}_0 \in W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}^{-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$. Existem outros trabalhos usando as equações de Navier-Stokes e sistemas que são deduzidos apartir das equações de Navier-Stokes que mostram existência, unicidade, estabilidade e controle de soluções fracas ((AMANN, 2000), (AMROUCHE, 2010), (AGRACHEV A.;KUKISIN, 2007), (MARUSIC, 2000),(LADYZHENS-KAYA, 1959b), (LADYZHENS-KAYA, 1969)). Em (BOLDRINI, 1998) Rojas-Medar,Boldrini provam

a existência de solução fraca para o sistema magneto-micropolar não estacionário pelo método de Galerkin com dados iniciais em $L^2(\Omega)$. Recentemente Zeng em (ZENG, 2020) mostrou a existência e unicidade de solução ultra fraca para o sistema magneto-hidrodinâmico estacionário com dados iniciais em espaços semelhantes aos usados por Amrouche em (ACEVEDO P.;AMROUCHE, 2019). Neste trabalho iremos demonstrar a existência de solução ultra fraca do problema estacionário considerando espaços menos regulares, aplicando tanto o método de Galerkin como o teorema do ponto fixo de Banach e Leray-Schauder.

5.2 PROBLEMA DA VORTICIDADE

Na teoria das equações clássicas de Navier-Stokes o problema da unicidade de soluções fracas para o caso tridimensional é difícil, veja por exemplo(Ladyzhenskaya (LADYZHENSKAYA, 1969), (LADYZHENSKAYA, 2003), Lions (LIONS, 1969) p. 84, Temam (TEMAM, 1979), p. 297). Para soluções suaves, a unicidade é provada com bastante facilidade, enquanto na classe de soluções fracas ela permanece em aberto. No caso bidimensional, a unicidade é válida.

Existem muitos trabalhos dedicados a essas questões. Um trabalho pioneiro neste sentido foi dado por Serrin (SERRIN, 1961) que impôs condições sobre a velocidade (observamos que o trabalho de Serrin é para a condição inicial $\mathbf{u}_0 \in H$, onde $H = L^2_\sigma(\Omega)$). Depois disso, muitos autores ampliaram esse resultado, veja por exemplo (VEIGA, 1997), (BERJORLAND C.; VASSEUR, 2011), (BOSIA S.;PATA, 2014), (PATA, 2012) e (VON, 1980). O objetivo será é estender essas ideias para as equações micropolares (5.2).

Para descrever a equação de fluido micropolar ou assimétrico, seja $\Omega \subset R^3$ um domínio limitado com limite suave $\partial\Omega$ e seja $T > 0$. Consideramos as equações para o movimento de um fluido assimétrico incompressível viscoso em $\Omega \times (0, T)$, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mu + \mu_1)\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_1 \text{rot } \mathbf{w} + f \\ \mathbf{w}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (c_a + c_d)\Delta\mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \text{div } \mathbf{w} + 4\mu_1\mathbf{w} = 2\mu_1 \text{rot } \mathbf{u} + g \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Juntamente com as equações de (5.2), prescrevemos a seguinte condição inicial

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \text{ em } \Omega,$$

a chamada condição de contorno, livre de tensão em $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T),$$

e a condição de Dirichlet

$$\mathbf{w} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T),$$

aqui $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot}\mathbf{u}$ é o campo de vorticidade e $\mathbf{n}$ denota o vetor normal unitário exterior. A formulação e motivação do problema (5.2) podem ser encontradas em Petrosyan (PETROSYAN, 1984), Condiff e Dalher (CONDIFF; DAHLER, 1964), Eringen (ERINGEN, 1966) e Luckaszewicz (LUKASZEWICZ, 1998)

REFERÊNCIAS

- ACEVEDO P.;AMROUCHE, C. Lp theory for boussinesq system with dirichlet boundary conditions. *Applicable Analysis*, n. 98, p. 272 – 294, 2019.
- AGRACHEV A.;KUKISIN, A. On finite-dimensional projections of distributions for solutions of randomly forced 2d navier-stokes equations. *Ann Inst H Poincare, Probab Statist*, n. 43, p. 399–415, 2007.
- AMANN, H. On the strong solvability of the navier-stokes equations. *J. Math. Fluid Mech*, n. 2, p. 16–98, 2000.
- AMANN, H. Nonhomogeneous navier-stokes equations with integrable low-regularity data. *Int. Math. Ser. Kluwer Academic/Plenum Publishing Mech*, p. 1–26, 2002.
- AMROUCHE, C.-B. Very weak solutions for the stationary osean and navier-stokes equations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, n. 348, p. 335–339, 2010.
- AMROUCHE, C.-B. Stationary stokes, osean and navier-stokes equations with singular data. *Arch. Ration. Mech*, n. 2, p. 597–651, 2011.
- ARIS, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of fluid Mechanics*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1962.
- BERJORLAND C.; VASSEUR, A. A weak in space, log in me improvement of the ladyzenkaja-prodi-serrin criteria. *J. Math. Fluid Mech*, n. 13, p. 259 –269, 2011.
- BOLDRINI, J. R.-M. Magneto-micropolar fluid motion: existence of weak solutions. *J. Math. Fluid Mech*, n. 2, 1998.
- BOSIA S.;PATA, V.-J. A weak- L^p prodi-serrin type regularity criterion for the navier-stokes equations. *J. Math. Fluid Mech*, n. 16, p. 721 – 725, 2014.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2010.
- CATTABRIGA, L. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di stokes. *Rend. Sem. Univ. Padova*, n. 31, p. 308 – 340, 1961.
- CONCA, C. étude d'un fluide traversant une paroi perforée. ii. comportement limite loin de la paroi. *J. Math. Pures Appl.*, n. 1, p. 45 – 70, 1987.
- CONCA, C. Stokes equations with non-smooth data. *Rev. Mat. Apl*, n. 10, p. 115 – 122, 1989.
- CONDIFF, D.; DAHLER, J. Fluid mechanics aspects of antisymmetric stress. *Phys. Fluids*, n. 7, p. 842 – 854, 1964.
- ERINGEN, A. *Theory of micropolar fluids*. [S.l.]: J. Math. Mech, 1966.
- FARWIG, R. Optimal initial value conditions for local strong solutions of the navier-stokes equations in exterior domains. *Analysis*, n. 33, p. 101 – 119, 2013.

- FARWIG R.;SOHR, H. Optimal initial value conditions for the existence of local strong solutions of the navier-stokes equations. *Mathematische Annalen*, n. 3, p. 631 – 642, 2009.
- FARWIG R.;SOHR, H. V. W. On optimal initial value conditions for local strong solutions of the navier-stokes equations. *Ann. Univ. Ferrara*, n. 55, p. 89 – 110, 2009.
- FINN, R. On steady-state solution of the navier-stokes partial differential equations. *Arc. Rational Mech*, n. 3, p. 381–396, 1959.
- FINN R.;NOLL, W. On the uniqueness and non-existence of stokes flows. *Arc. Rational Mech*, n. 1, p. 97 – 106, 1957.
- GALDI, G. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol 2: Nonlinear Steady Problems*. [S.I.]: Springer Tracts in Natural Philosophy, 1994.
- GALDI, G. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: steady-state problems*. [S.I.]: Springer, 2011.
- GERHARDT, C. Stationary solutions to the navier-stokes equations in dimension four. *Math. Z*, n. 165, p. 193 – 197, 1979.
- GILBARG D.;TRUNDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*. [S.I.]: Springer, 1990.
- GRISVARD, P. *Elliptic problems in Non smooth domains*. [S.I.]: Pitman, 1985.
- HOPF, E. Ein allgemeiner endlichkeitsatz der hydrodynamik. *Math. Ann*, n. 117, p. 764–775, 1941.
- HOPF, E. A remark on linear elliptic differential equations second order. *Proc. Amer. Math. Soc*, n. 3, p. 791 – 793, 1952.
- HOPF, E. *On Non-linear Partial Differential Equations Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations*. [S.I.]: University of California at Berkley, 1957.
- HOYT J.W.; FABULA, A. *The Effect of Additives on Fluid Friction*. [S.I.]: U. S. Naval nance Test Station Report, 1964.
- KIM, H. Existence and regularity of very weak solutions of the stationary navier-stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal*, n. 193, p. 117 – 152, 2009.
- KIM, H. The existence and uniqueness of very weak solutions of the stationary boussinesq system. *Nonlinear Anal*, n. 75, p. 317 – 330, 2012.
- KOMO, C. Optimal initial value conditions for the existence of strong solutions of the boussinesq equations. *Ann Univ Ferrara*, n. 60, p. 377 – 396, 2014.
- LADYZHENSKAYA, O. Investigation of the navier-stokes equation for a stationary flow of an incompressible fluid. *Uspehi Mat. Nauk*, n. 14, p. 75–97, 1959.
- LADYZHENSKAYA, O. Stationary motion of a viscous incompressible fluid in a pipe. *Dokl. Akad. Nauk SSR*, n. 124, p. 551–553, 1959.
- LADYZHENSKAYA, O. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. [S.I.]: Gordon and Breach, 1969.

- LADYZHENSKAYA, O. The sixth millennium problem: Navier-stokes equations, existence and smoothness. *Uspekhi Mat. Nauk*, n. 2, p. 45–78, 2003.
- LERAY, J. *Etude de Diverses equations integrales non lineaires et de quelques problèmes que pose hydrodynamique*. [S.I.]: J. Math. Pures Appl, 1993.
- LERAY J.;SCHAUDER, J. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sc. École Norm. sup*, n. 51, p. 45–78, 1934.
- LINONS J.L.; MEGENES, E. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*. [S.I.]: Dunod, 1968.
- LIONS, J. *Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limite non Linéaires*. [S.I.]: Dunod, 1969.
- LUKASZEWICZ, G. *On stationary flows of asymmetric fluids*. [S.I.]: Uniwersytet Warszawski, 1987.
- LUKASZEWICZ, G. On the existence, uniqueness and asymptotic properties for solutions of flows of asymmetric fluids. *Rend. Accad. Nac. Sci. Memorie di Matematica*, n. 13, p. 105 – 120, 1989.
- LUKASZEWICZ, G. *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. [S.I.]: Birkhäuser, 1998.
- LUKASZEWICZ G.; ROJAS-MEDAR, M. S. M. Stationary micropolar fluid with boundary data in l^2 . *J. Math. Anal. Appl*, n. 1, p. 91 –107, 2002.
- MARUSIC, E. Solvability of the navier-stokes system with l^2 boundary data. *Appl. Math. Optim*, n. 41, p. 365–375, 2000.
- PATA, V. On the regularity of solutions to the navier-stokes equations. *Commun. Pure Appl. Anal*, n. 11, p. 747 – 761, 2012.
- PETROSYAN, L. *Some problems of mechanics of fluids with antisymmetric stress tensor*. [S.I.]: Erevan, 1984.
- PRODY, G. Un teorema di unicITÀ per le equazioni di navier-stokes. *Ann. Mat. Pura Appl*, n. 48, p. 173–182, 1959.
- ROJAS-MEDAR, M. Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution. *Math. Nachr*, n. 188, p. 301 –319, 1997.
- ROJAS-MEDAR M.A.; LOAYZA, M. A weak- l_p prodi-serrin type regularity criterion for the micropolar fluid equations. *Journal of Mathematical Physics*, n. 57, p. 21–51, 2016.
- SERRIN, J. *Mathematical Principles of classical Fluid Mechanics, Encyclopedia of Physics*. [S.I.]: Springer-Verlag, 1959.
- SERRIN, J. On the interior regularity of weak solutions of the navier-stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal*, n. 9, p. 187 –195, 1961.
- SOHR, H. *The Navier - Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*. [S.I.]: Birkhauser, 2001.

-
- SOHR, H. A regularity class for the navier stokes equations in lorentz spaces. *J. Evol. Eq.*, n. 1, p. 441–467, 2001.
- TEMAM, R. *Navier-Stokes equations. Theory and Numerical Analysis*. [S.l.]: North-Holland, 1979.
- TRIEBEL, H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. [S.l.]: North-Holland, 1978.
- VEIGA, H. B. D. Concerning the regularity of the solutions to the navier-stokes equations via the truncation method. *Differential and integral Equations*, n. 10, p. 1149 – 1156, 1997.
- VOGEL W.M.;PATTERSON, A. An experimental investigation of the effect of additives injected into the boundary layer of an underwater body. *Pacific Naval Lab. of Defense Res. Board of Canada*, p. 64–201, 1964.
- VON, W. Regularity questions for the navier-stokes equations, in approximation methods for the navier-stokes problems. *Springer-Verlag*, p. 538–542, 1980.
- YAMAGUCHI, N. Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain. *Math. Meth. Appl. Sci*, 2005.
- ZENG, Y. Existence and uniqueness of very weak solution of the mhd type system. *D.C Dynamical Systems*, n. 10, 2020.