



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

JOSINALDO JOSÉ DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma investigação de
produções científicas no Centro Acadêmico do
Agreste UFPE-CAA**

**CARUARU
2023**

JOSINALDO JOSÉ DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma investigação de
produções científicas no Centro Acadêmico do
Agreste UFPE-CAA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso de
Licenciatura em Matemática do Campus
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para a
obtenção do grau de Licenciado em
Matemática.

Área de concentração: Ensino
(Matemática)

Orientador: Prof. Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti

**CARUARU
2023**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Josinaldo José da.

Pensamento Algébrico: uma investigação de produções científicas no Centro Acadêmico do Agreste UFPE-CAA / Josinaldo José da Silva. - Caruaru, 2023.
53 p. : il.

Orientador(a): José Dilson Beserra Cavalcanti

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2023.

1. Álgebra. 2. Concepções de Álgebra. 3. Matemática. 4. Pensamento Algébrico. 5. Trabalho de Conclusão de Curso. I. Cavalcanti, José Dilson Beserra. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

JOSINALDO JOSÉ DA SILVA

**PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma investigação de
produções científicas no Centro Acadêmico do
Agreste UFPE-CAA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso de
Licenciatura em Matemática do Campus
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para a
obtenção do grau de licenciado em
Matemática.

Aprovada em: 06/10/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Ma. Maria do Rosário Paulino Fernandes
(Examinador Externo)

Este trabalho é dedicado especialmente aos meus pais, Maria e José Agnaldo (*in memoriam*), pilares da minha formação como ser humano.

AGRADECIMENTOS

Grato...

Em primeiro lugar a Deus, por poder concluir essa etapa, sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, por sempre me apoiarem e acreditarem em mim, e terem sido meus melhores exemplos.

A Érika, que apesar do tempo e distância, sempre me apoiou e me incentivou, acreditando na realização desse objetivo.

A Henrique, por ter me dado diversos conselhos durante os momentos em que me senti angustiado.

Ao professor Dr. José Dilson Cavalcanti, por ter aceitado me orientar neste projeto, por todas as ideias e reflexões e confiança em mim

A todos os professores que conheci durante a graduação, e todo auxílio por eles me dado.

Enfim, a todos que de alguma forma me ajudaram a caminhar nessa trajetória e chegar a esse momento.

“Saber Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (Freire, 1996, p. 25).

RESUMO

Essa pesquisa teve como objetivo investigar como a noção de pensamento algébrico tem sido abordada em Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, no Campus Agreste (UFPE-CAA). Abordamos aspectos históricos da álgebra, desde sua origem, concepções de álgebra, seu papel no ensino e o pensamento algébrico. Nosso estudo consistiu em uma pesquisa qualitativa, na qual realizamos um mapeamento dos TCCs do curso acerca do pensamento algébrico. Buscamos na plataforma digital da UFPE os trabalhos que apresentassem os termos “pensamento algébrico” e “raciocínio algébrico” no título, resumo ou palavras-chave, selecionando um total de sete pesquisas. A análise dos trabalhos nos mostrou que a transição de uma linguagem verbal para uma simbólica deu início ao desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo da história. Os trabalhos também destacaram que o raciocínio algébrico é uma habilidade que vai além de técnicas de resolução de equações, e que a utilização de abordagens contextualizadas e resolução de problemas desde as etapas iniciais do ensino, sem a separação da Aritmética e Álgebra, são muito importantes para esse processo de construção desse pensamento. Os trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995), e Lins e Gimenez (1997) assim como Almeida (2016) e Almeida e Santos (2017), desempenharam um papel significativo nas pesquisas analisadas. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apareceu como um elemento importante nas diretrizes curriculares para o ensino da Álgebra.

Palavras-chave: Álgebra. Concepções de Álgebra. Matemática. Pensamento algébrico. Trabalho de Conclusão de Curso

ABSTRACT

This research aimed to investigate how the notion of algebraic thinking has been addressed in undergraduate theses (TCC) in the Mathematics Education program at the Federal University of Pernambuco, Agreste Campus (UFPE-CAA). We explored historical aspects of algebra, from its origins to conceptions of algebra, its role in education, and algebraic thinking. Our study was conducted as a qualitative research, where we conducted a survey of theses related to algebraic thinking. We searched the UFPE digital platform for works containing the terms "algebraic thinking" and "algebraic reasoning" in the title, abstract, or keywords, selecting a total of seven studies. The analysis of these works revealed that the transition from verbal language to symbolic language marked the development of algebraic thinking throughout history. The studies also emphasized that algebraic reasoning goes beyond equation-solving techniques and that the use of contextualized approaches and problem-solving from the early stages of education, without separating Arithmetic and Algebra, is crucial for the development of this type of thinking. The works of Fiorentini, Miorim, and Miguel (1993), Usiskin (1995), Lins and Gimenez (1997), as well as Almeida (2016) and Almeida and Santos (2017), played a significant role in the analyzed research. Furthermore, the National Common Curriculum Base (BNCC) emerged as an important element in the curriculum guidelines for the teaching of algebra.

Keywords: Algebra. Algebraic Conceptions. Mathematics. Algebraic Thinking. Thesis (Final Course Project)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OBJETIVOS	13
2.1	OBJETIVO GERAL	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3	ÁLGEBRA	14
3.1	ÁLGEBRA E ASPECTO HISTÓRICO	14
3.2	CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA E ÁLGEBRA ESCOLAR	16
3.3	PENSAMENTO ALGÉBRICO	20
3.3.1	Pensamento Algébrico na perspectiva de Lins (1992)	21
3.3.2	Pensamento Algébrico na perspectiva de Kaput (2008)	23
3.3.3	Pensamento Algébrico na perspectiva de Radford (2009)	26
3.3.4	Caracterização do Pensamento Algébrico de Almeida (2016)	29
4	METODOLOGIA	33
5	ANÁLISE E DISCUSSÕES	36
5.1	MAPEAMENTO HORIZONTAL	36
5.2	MAPEAMENTO VERTICAL	37
5.2.1	Foco de análise das pesquisas	42
5.2.2	Abordagem do Pensamento Algébrico nos trabalhos	44
5.2.3	Principais referências teóricas	47
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina fundamental no currículo escolar brasileiro, desempenhando um papel significativo desde a educação infantil ao ensino médio. No entanto, mesmo sendo uma disciplina tão importante, ela é frequentemente vista como algo difícil e exclusivo para alguns. No caso específico da Álgebra, muitos alunos a encaram como algo dispensável e sem conexão com situações do mundo real. Sobre esse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018) apresenta a Álgebra como uma das unidades temáticas de ensino, cujo objetivo é o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

De acordo com Booth (1995, p. 23) a Álgebra, “é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos” e “uma das razões para esse estado de coisas é que os alunos parecem achar Álgebra difícil” (Ibid., p. 23). Nesse sentido, Lins e Gimenez (1997, p.10) acreditam que “é preciso começar mais cedo o trabalho com a Álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra”. Dessa maneira, fica a margem a ideia de que a Aritmética tem obrigatoriamente que preceder a Álgebra.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que a tendência que se tem é de que o Pensamento Algébrico só se manifesta através da manipulação sintática da linguagem específica da Álgebra, o que de acordo com eles é uma visão errônea, pois desconsidera o fato de que a linguagem tanto no plano histórico quanto no pedagógico sempre tem sido a manifestação de um pensamento, ou seja “a intenção de manipular uma equação algébrica deve necessariamente preceder a habilidade técnica para fazê-lo” (Lins, 1992, p. 11).

Apesar de haver um consenso entre os pesquisadores sobre a importância desse tipo de pensamento, não há uma definição precisa sobre ele. De acordo com Lins (1992), o Pensamento Algébrico é uma maneira de produzir significado para a Álgebra, onde esta é vista como um conteúdo a ser aprendido e o Pensamento Algébrico, considerado um tipo de raciocínio que pode ser aplicado em diferentes áreas da Matemática (Lins, 1992)

Blanton e Kaput (2005) a partir de estudo com a Álgebra aplicada aos anos iniciais, descrevem o Pensamento Algébrico como o

processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade” (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

Nessa perspectiva, Almeida e Santos (2017), caracterizam Pensamento Algébrico a partir da análise das perspectivas de Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2008). Eles apresentam Pensamento Algébrico como revelado por cinco características: “estabelecer relações, generalizar, modelar, operar com o desconhecido, e construir significado” (Almeida; Santos, 2017, p. 53). Sendo a capacidade de estabelecer relações a primeira etapa a ser alcançada no processo de construção desse modo de pensar.

Dessa forma, gostaríamos de salientar que, diante de experiências em disciplinas no decorrer da graduação que continham Álgebra, bem como dificuldades encontradas nessas, e a partir das reflexões ocorridas durante a disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática II, percebemos a importância de investigar o tema Pensamento Algébrico. Importante destacar que o contato com Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) sobre o assunto como os de Santos (2014), Vasconcelos (2017) que abordaram a Álgebra numa perspectiva escolar, bem como o de Couto (2021) que se dedicou a investigar o Pensamento Algébrico em trabalhos do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), despertaram nosso interesse em entender o que tem sido produzido sobre o tema no Centro Acadêmico do Agreste UFPE-CAA. Desse contexto surge nossa questão de pesquisa: como a noção de Pensamento Algébrico tem sido abordada em Trabalhos de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática no Centro Acadêmico do Agreste UFPE-CAA?

Assim, a partir dessa investigação, a reflexão sobre aprofundamentos do tema e futuras pesquisas relacionadas podem ser iniciadas, contribuindo para a melhoria do ensino da Álgebra e desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos, que é um fator indispensável para um aprendizado significativo da Álgebra. Acreditamos também ser possível despertar o interesse dos futuros professores em estudar esse campo tão importante e ao mesmo tempo considerado tão complexo no ensino de Matemática.

Este trabalho está dividido na descrição dos objetivos, gerais e específicos, onde discorreremos sobre o que pretendemos buscar com essa pesquisa, após, tecemos um capítulo que trata sobre a Álgebra, desde seu contexto histórico e concepções de educação algébrica, abordando concepções de teóricos como

Usiskin (1995) que relaciona a Álgebra as diferentes utilizações das variáveis, em seguida caracterizações do Pensamento Algébrico a partir das perspectivas de Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009) e Almeida (2016), na sequência apresentamos os aspectos metodológicos de nossa pesquisa, seguidos pela análise e discussões dos dados e por último, nossas considerações finais.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Analisar os Trabalhos de Conclusão de Curso que abordam o Pensamento Algébrico na Licenciatura em Matemática no Centro Acadêmico do Agreste UFPE-CAA

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mapear as construções científicas de Trabalho de Conclusão de Curso acerca do Pensamento Algébrico na UFPE-Centro Acadêmico do Agreste;
- Realizar um mapeamento sobre o Pensamento Algébrico, identificando as principais perspectivas teóricas;
- Identificar as principais abordagens, conceitos e como os trabalhos abordam o tema Pensamento Algébrico.

3 ÁLGEBRA

A Álgebra como campo de estudo da Matemática, desempenha um papel fundamental. Ela se divide em uma variedade de ramos, explorando as complexidades das funções, equações, variáveis, expressões e estruturas algébricas. No entanto, definir o que é Álgebra não é uma tarefa simples (Usiskin, 1995).

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 137) “a Álgebra é um conjunto de afirmações que podem ser interpretadas em termos de números e operações aritméticas, envolvendo igualdade ou desigualdade”. Conforme Usiskin (1995), o surgimento das variáveis marca o início do estudo da Álgebra.

A Álgebra exige um tipo específico de raciocínio, o Pensamento Algébrico, que vai além do simples raciocínio aritmético. Isso permite uma abordagem mais abstrata e generalizada na resolução de problemas. Compreender a importância da Álgebra envolve explorar seu contexto histórico, as contribuições de matemáticos notáveis e marcos históricos que demonstram como ela evoluiu ao longo do tempo.

Diante desse contexto, neste capítulo abordamos o aspecto histórico da Álgebra, bem como as principais considerações sobre esse ramo do conhecimento e sobre o Pensamento Algébrico.

3.1 ÁLGEBRA E ASPECTO HISTÓRICO

A Álgebra, como uma disciplina matemática voltada para solucionar problemas utilizando técnicas e fórmulas, tem origens antigas que remontam ao Egito, China, Babilônia e Índia. (Ponte, 2006). De acordo com Cavalcanti e Santos (2010), o termo “Álgebra” parece não ter uma tradução literal, diferente do termo “Aritmética”, que deriva do grego “arithmos”. No entanto, Baumgart (1992, apud Cavalcanti e Santos, 2010) sugere que o termo Álgebra seria uma variante latina de “al-jabr”, um tratado de Álgebra de al Khwarizmi, que teria sido traduzido para o latim com o título “Liber algebrae et almucabala”. Dessa forma, o termo “Álgebra” derivaria da tradução latina de “Al-Jabr”. Mesmo que a palavra não tenha uma

tradução literal que explique o seu significado, alguns autores a utilizam para se referir à "Ciência da Reunião ou da Restauração" (Cavalcanti; Santos, 2010).

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), em livros de história da Matemática é comum encontrar uma descrição de três fases evolutivas da Álgebra: a Álgebra retórica, Álgebra sincopada e Álgebra simbólica.

A Álgebra retórica refere-se a um período em que não havia o uso de símbolos ou abreviações para expressar o pensamento matemático. Em vez disso, todos os passos envolvidos nas operações com números e equações eram descritos em linguagem comum. Essa abordagem era comumente utilizada pelos egípcios, babilônios e gregos pré-diofantinos.

Antes da introdução de símbolos e abreviações por Diofanto no século III, a Álgebra era descrita em linguagem comum, sem o uso de símbolos ou abreviações. Diofanto foi o responsável por criar uma fase sincopada na expressão do Pensamento Algébrico, ao introduzir a letra sigma como símbolo para incógnita e utilizar uma forma mais concisa para expressar equações. Isso representou uma mudança significativa na forma de expressão da Álgebra (Ibid., 1993)

Após a fase sincopada da Álgebra, conforme Cavalcanti e Santos (2010) o progresso da Álgebra evoluiu lentamente até que os matemáticos começaram a substituir as palavras por letras e símbolos. Foi somente nos séculos XVI e XVII que os matemáticos Viète e Descartes desenvolveram a Álgebra simbólica. Viète usou letras para representar valores desconhecidos de forma sistemática, enquanto Descartes aperfeiçoou e efetivou a Álgebra simbólica, criando a notação que conhecemos atualmente. A característica distintiva dessa Álgebra é a representação totalmente simbólica das equações.

Ainda assim, a definição de Álgebra é um assunto que gera divergências entre os estudiosos, não havendo um significado específico (Cavalcanti; Santos, 2010). Usiskin (1995) argumenta que não é uma tarefa fácil definir o que é Álgebra, e que simplesmente reduzi-la ao estudo de variáveis não é suficiente para definir a Álgebra escolar.

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 89), o que há, é "um certo consenso a respeito do que são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções". Ponte (2006, p. 6) diz que "a visão mais habitual sobre a Álgebra é de que ela trata

simplesmente de regras de transformação de expressão”, o que segundo ele é uma visão redutora da Álgebra.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) dizem que a percepção mais clara do que é Álgebra aparece quando o objeto de investigação desse campo matemático ultrapassa o domínio de estudo exclusivo de equações e operações sobre quantidades generalizadas para centrar-se nos estudos de operações com objetos abstratos, como grupo, anéis e corpos.

3.2 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA E ÁLGEBRA ESCOLAR

No ambiente escolar, é frequentemente ensinado que a aritmética lida com valores numéricos, enquanto a álgebra se concentra no uso de símbolos ou letras para representar quantidades. Sendo geralmente trabalhada de forma isolada nas salas de aula, pois “ela possui conceitos muito abrangentes e necessita de uma articulação entre os demais saberes matemáticos principalmente o numérico e deve ser entendida como uma expressão do pensamento matemático” (Leal, 2013, p. 6)

A Álgebra e a educação algébrica são temas complexos e relevantes na área da educação. A fim de aprofundar o conhecimento nessas áreas, vários pesquisadores têm se dedicado a explorar concepções e abordagens. Entre esses pesquisadores, destacam-se Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997), cujos estudos aparecem frequentemente nas pesquisas sobre o tema. A seguir, apresentaremos as concepções desses pesquisadores acerca da Álgebra escolar.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) descrevem, a partir de diferentes leituras e do desenvolvimento histórico da Álgebra, podem apresentar algumas concepções de educação algébrica que são a *linguístico- pragmática*, *fundamentalista-estrutural* e *fundamentalista-analógica*.

- **Linguístico-pragmática** - nessa abordagem acredita-se que a aquisição das técnicas necessárias para o “transformismo algébrico”, mesmo que de forma mecânica, é suficiente para que o aluno desenvolva a capacidade de resolver problemas.

- **Fundamentalista-estrutural** - nessa concepção, é necessário ir além das meras técnicas do transformismo algébrico. O aluno precisa compreender tanto o funcionamento quanto às propriedades estruturais das operações envolvidas, além de compreender detalhadamente cada passo utilizado na resolução do problema e ser capaz de justificar adequadamente os processos de resolução empregados.
- **Fundamentalista-analógica** - Volta a vincular a Álgebra como instrumento de resolução de problemas. Conforme os autores, essa concepção tenta efetuar uma síntese entre as duas concepções anteriores, recuperando o valor instrumental e mantendo um valor fundamentalista, mas sem a necessidade do transformismo algébrico. Essa forma de justificar baseia-se em recursos geométricos-visuais.

De acordo com os autores, entre as concepções existe uma tendência da redução do Pensamento Algébrico à linguagem algébrica, em ambos os casos o ensino e a aprendizagem de Álgebra se reduzem ao que eles chamam de transformismo algébrico.

As concepções sobre a Álgebra apresentadas por Lins e Gimenez (1997) são desenvolvidas com base em diferentes abordagens das atividades algébricas e, no total, eles propuseram quatro perspectivas distintas: a Concepção Letrista, a Concepção Conteudista, a Concepção de Ação e a Concepção de Tendência Conceitual. A seguir, detalharemos cada uma dessas abordagens.

- **Concepção Letrista:** A concepção letrista da Álgebra limita sua definição ao cálculo e à representação Matemática por meio de letras. Essa visão é historicamente baseada no desenvolvimento das notações algébricas, mas é considerada restrita pelos autores Lins e Gimenez (1997), pois não abrange os trabalhos de Al-Khwarizmi e da Matemática chinesa clássica como parte da Álgebra.
- **Concepção Conteudista:** A concepção conteudista busca definir a Álgebra a partir dos seus conteúdos específicos. No entanto, essa abordagem apresenta algumas limitações, como demonstrado por Lins e Gimenez (1997) através do exemplo $\frac{5+5+5}{3} = 5$, que é claramente um problema aritmético e

não algébrico. No entanto, os autores questionam se considerarmos quatro parcelas iguais a cinco e as dividirmos por quatro, ou mil parcelas iguais a cinco divididas por mil, o que mudaria? Nesse caso, estaríamos diante de um exemplo de generalização, como na expressão $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = n$. De acordo com Lins e Gimenez (1997), essa ideia de generalização pode estar implícita no processo de resolução do problema aritmético anterior.

- **Concepção de ação:** nessa concepção, a atividade algébrica, segundo Lins e Gimenez (1997), resulta do pensamento formal, ideia de pensamento defendida por Piaget que consiste em reflexões a partir das operações realizadas, como na resolução de um exercício algébrico. Segundo essa concepção, alguém que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica. Contudo, os autores citam limitações nessa concepção, onde, por exemplo, questionam “se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o status de atividade algébrica?” (Lins; Gimenez, 1997, p. 100).
- **Concepção Conceitual:** de acordo com Lins e Gimenez (1997) essa concepção apresenta uma visão proposta por G. Vergnaud, um psicólogo francês, que substitui a noção de conceito isolado pela de campo conceitual. Um campo conceitual é constituído por esquemas operacionais, formas notacionais e problemas que são resolvidos pelos esquemas e dão sentido a eles. Essa noção desenvolveu-se como uma extensão das abordagens piagetianas e é utilizada para investigar atividades algébricas. Não se trata de uma caracterização por conteúdo ou notação, embora faça referência a eles.

Usiskin (1995) relaciona a Álgebra escolar aos diferentes usos das variáveis, e por sua vez, propõe quatro concepções para o ensino de Álgebra: a Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como estudo para resolver certos tipos de problemas, Álgebra como estudo das relações entre grandezas e Álgebra como estudo das estruturas.

- **Álgebra como aritmética generalizada:** nessa concepção, a Álgebra é vista como uma generalização das propriedades aritméticas, utilizando a

linguagem algébrica para demonstrar essas propriedades, como por exemplo $a+b = b+a$. Dentro desta concepção a instrução chave é *traduzir e generalizar*.

- **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas:** essa concepção destaca a resolução de problemas. De acordo com Usiskin (1995) as variáveis representam incógnitas ou constantes e o objetivo é encontrar o valor desconhecido. Como exemplo, solicitar que o aluno resolva a expressão $|x - 2| = 5$, para obter como resposta $x = 7$ ou $x = -3$. A instrução chave é *simplificar e resolver*.
- **Álgebra como estudo das relações entre grandezas:** conforme Usiskin (1995), essa concepção está associada a utilização de fórmulas, em que o objetivo não é a generalização de propriedades aritméticas ou a resolução de equações para encontrar valores desconhecidos, uma vez que as *variáveis variam*. Nessa perspectiva, a variável pode ser vista como argumento, ou seja, representar valores do domínio de uma função, ou como parâmetro, isto é, representar um número que depende de outros números. É também nessa concepção que surge a noção de variável dependente e independente. A instrução chave nessa concepção é *relacionar*.
- **Álgebra como estudo das estruturas:** é comumente utilizada nos cursos superiores, envolvendo estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Nessa concepção, as variáveis são consideradas "um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades" (Usiskin, 1995, p.18). A instrução chave nessa concepção é *manipular e justificar*.

De acordo com Santos (2014), às concepções de Usiskin (1995) estão bem próximas do ensino de Álgebra brasileiro, pois se assemelham ao próprio PCN (BRASIL, 1998), como podemos observar no trecho do documento:

Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos de álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis,

incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 1998, p. 50 - 51).

Nesse mesmo sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (Brasil, 2018), trata a Álgebra como finalidade do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, e trata da importância de que a algumas dimensões do trabalho com a Álgebra sejam abordadas desde os anos iniciais do ensino fundamental. De acordo com a BNCC:

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (Brasil, 2018, p.270)

É possível perceber que os documentos curriculares indicam que o objetivo do ensino da Álgebra seja de construção do Pensamento Algébrico, assim como afirma Ponte (2006) “a melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer então que se visa desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos” (Ponte, 2006, p.7).

A seguir iremos tratar de forma mais específica de definições sobre o pensar algebricamente a partir das perspectivas de estudiosos do tema.

3.3 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Squalli (2000, p. 277) defende a Álgebra como um “tipo de atividade Matemática e Pensamento Algébrico como um conjunto de habilidades intelectuais envolvidas nessas atividades”. Outros pesquisadores, como Lins (1992, 1994), Kieran (2007), Kaput (2008), Radford (2006, 2009), apresentam, também, uma visão mais ampla do que se entende por Álgebra, ao entendê-la não apenas como um conjunto de regras e procedimentos matemáticos, mas também como forma de pensar. Kieran (2007), por exemplo, destaca que:

Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007, p.5)

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), o objetivo principal do estudo da Álgebra é desenvolver o Pensamento Algébrico nos alunos, indo além da simples manipulação de símbolos, envolvendo a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, funções e a interpretação criativa de símbolos matemáticos, destacando-se pela capacidade de encontrar e provar propriedades que se aplicam a uma classe inteira de objetos, de representar informações matematicamente, raciocinar dedutiva e indutivamente, e resolver problemas, incluindo a modelagem de situações reais.

Conforme Lins (1992) o Pensamento Algébrico deve ser encarado como “uma forma de produzir significado, enquanto a Álgebra pode ser entendida como um conteúdo a ser compreendido” (Lins, 1992, p. 10). Apesar de haver uma concordância entre os estudiosos sobre a importância de o estudante desenvolver o Pensamento Algébrico, não existe um consenso sobre esse tipo de raciocínio (Almeida; Santos, 2017). Essa imprecisão sobre a definição do que seja pensar algebricamente deve-se ao vasto escopo de objetos algébricos, tais como funções, equações, relações, padrões (Radford, 2006).

Como definir o Pensamento Algébrico não é uma tarefa simples, acreditamos ser importante aprofundar nosso conhecimento sobre o assunto. Faremos isso abordando as perspectivas de Pensamento Algébrico de Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2009), e as características de Pensamento Algébrico definidas por Almeida (2016) que consideramos ter significativa importância para o campo da educação Matemática, em especial no que se refere à Álgebra e o Pensamento Algébrico.

3.3.1 Pensamento Algébrico na perspectiva de Lins (1992)

Lins (1992) aponta que pensar algebricamente é uma maneira, entre outras, de produzir significado para Álgebra e aponta três vertentes de pensamento: pensar aritmeticamente, pensar internamente e pensar analiticamente.

a) **Pensar aritmeticamente (aritmeticismo):** Na primeira vertente, o foco do trabalho está restrito apenas a números, operações aritméticas e a utilização da igualdade para estabelecer relações entre esses elementos. O Pensamento Algébrico e a Aritmética têm em comum o uso de números e operações aritméticas como material básico. A aritmeticidade do Pensamento Algébrico consiste em modelar em números, utilizando as operações aritméticas para produzir as relações que constituem o modelo. (Lins, 1992).

A ideia de aritmeticidade implica que problemas que envolvam medidas como velocidade, distância, peso ou tamanho podem ser transformados em problemas aritméticos, ou seja, na busca por um número que satisfaça certas relações Matemáticas. Nesse sentido, fatores externos como o fabricante do carro, unidade de medida ou a cor da luz solar não importam desde que as relações aritméticas necessárias sejam estabelecidas. (Lins, 1992).

b) **Pensar Internamente (Internalismo):** nessa forma de pensar, considera-se os números e as operações segundo suas propriedades, os números são tratados como objeto de estudo e não apenas como ferramentas na resolução ou modelação de problemas. Conforme Lins, a abordagem do internalismo em relação ao Pensamento Algébrico tem como objetivo distinguir as soluções que são baseadas exclusivamente em números e operações aritméticas - ou seja, dentro dos limites do Campo Semântico - das soluções que envolvem a manipulação de modelos não aritméticos.

Em nosso sentido, um Campo Semântico denota um conjunto de significados gerados por uma determinada "forma de conhecimento". Expressões matemáticas, como uma equação, por exemplo, têm significados diferentes dentro do Campo Semântico de números e operações aritméticas e dentro do Campo Semântico de relações todo-parte, assim como têm as operações aritméticas. (Lins, 1992, p. 14, tradução nossa)

No Pensamento Algébrico, as operações aritméticas são tratadas como objetos, além de serem utilizadas como ferramentas. Essa abordagem é uma consequência dos requisitos combinados da aritmeticidade e do internalismo (Lins, 1992). Em outras palavras, a manipulação dos números e operações aritméticas como objetos é uma característica importante da forma como o Pensamento Algébrico lida com os problemas matemáticos.

c) **Pensar Analiticamente (Analiticidade):** nessa vertente, os números genéricos são tidos como se fossem valores específicos e as incógnitas como se fossem dados, ou seja, o elemento desconhecido é tratado como se fosse já conhecido.

Na abordagem de análise do Pensamento Algébrico, o objetivo é encontrar valores desconhecidos que satisfaçam determinadas condições ou equações. Porém, como esses valores são desconhecidos, não podemos manipulá-los diretamente. Em vez disso, devemos considerar esses valores desconhecidos como se fossem conhecidos e trabalhar com eles usando propriedades gerais da classe de objetos a que pertencem.

Por exemplo, nessa vertente do pensamento algébrico as expressões algébricas que formam uma equação são manipuladas segundo as leis da aritmética, isto é, os elementos desconhecidos, como o “X”, são tratados como valores conhecidos, para que possam ser geradas equações equivalentes até encontrar o desconhecido, ou seja, o “X”. (Almeida; Santos, 2017, p. 39)

Com base nas ideias de Lins (1992), pensar algebricamente é o mesmo que “produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com o aritmetismo, internalismo e analiticidade” (Lins; Gimenez, 1997, p. 151)

3.3.2 Pensamento Algébrico na perspectiva de Kaput (2008)

Kaput (2008) utiliza o termo raciocínio algébrico para se referir ao tipo de pensamento utilizado na Álgebra. O autor faz uma distinção entre Álgebra e raciocínio algébrico ao responder às perguntas “O que é Álgebra?” e “O que é o raciocínio algébrico?”. O primeiro questionamento “destaca a álgebra como um corpo autônomo de conhecimento, um artefato cultural” (Kaput, 2008, p. 8). Já o segundo questionamento “destaca a álgebra como uma atividade humana” (Ibid., p. 9). De acordo com Kaput, existem diversas formas pelas quais essas divergências de maneiras de pensar a Álgebra podem se manifestar em nossos pensamentos

Aqueles que consideram a álgebra como um raciocínio são inclinados a considerar as maneiras como os alunos fazem, pensam e falam sobre a matemática como fundamentais. Para eles, a álgebra surge da atividade

humana; depende de seres humanos para sua existência, não apenas historicamente, mas também no presente. Aqueles que consideram a álgebra como um assunto herdado se sentem à vontade para falar sobre ela sem pensar nas pessoas. Eles podem se referir à lei comutativa da adição, por exemplo, sem precisar estabelecer como a lei surgiu ou como os alunos aprendem (ou não). (Kaput, 2008, p. 9)

Kaput (2008) apresenta dois aspectos fundamentais a partir da visão mais ampla de simbolização da Álgebra, que vai além dos usos das letras e inclui a crescente variedade de sistemas de símbolos, como os gráficos

Consideramos que um aspecto fundamental do raciocínio algébrico é a generalização e a expressão de generalizações em sistemas simbólicos cada vez mais sistemáticos e convencionais (Aspecto Central A). O segundo aspecto fundamental do raciocínio algébrico é a ação sintaticamente guiada sobre símbolos dentro de sistemas organizados de símbolos (Aspecto Central B). (Kaput, 2008, p.9, tradução nossa)

Esses dois aspectos centrais do Pensamento Algébrico dão origem a três vertentes de forma de pensar:

1. Álgebra como o estudo das estruturas e sistemas surpreendidos pelos cálculos e relações, incluindo os que surgem na Aritmética (Álgebra como aritmética generalizada) e no raciocínio quantitativo.
2. Álgebra como o estudo das funções, relações, e variação conjunta.
3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação tanto dentro como fora da Matemática.

a) **Aritmética generalizada:** Essa vertente da Álgebra tem como foco a construção de generalizações a partir da aritmética e do raciocínio quantitativo. Os educadores e pesquisadores que apoiam essa perspectiva acreditam que a construção dessas generalizações é a principal via de acesso à Álgebra.

Essa construção de generalizações “inclui a generalização das operações aritméticas e suas propriedades, bem como o raciocínio sobre relações mais gerais e suas formas, (como propriedades do zero, comutatividade, relações inversas, etc.).” (Kaput, 2008, p. 12). Isso envolve “olhar para as expressões aritméticas de uma maneira nova, em termos de sua forma em vez de seu valor quando calculadas” (Ibid., p. 12).

Outra abordagem consiste na criação de generalizações a partir de propriedades ou relações numéricas específicas, tais como a soma de dois números

ímpares resultando em um número par ou as regularidades observadas nas multiplicações por 10 ou 100, onde o resultado é obtido pela adição de zeros ao número multiplicado. É comum que essas atividades utilizem as generalizações da aritmética generalizada, embora nem sempre de forma explícita (Kaput, 2008)

Essa vertente também inclui a expressão explícita de estratégias de cálculo convencionais e inventadas pelo estudante, como estratégias de compensação. É importante notar que aqui a Álgebra é considerada como tal quando as propriedades e generalizações são explicitadas e examinadas em sua generalidade, não quando são usadas de forma implícita. (Ibid., 2008)

b) **Pensamento Funcional:** De acordo com Kaput, essa vertente da Álgebra envolve a generalização de um tipo específico de relação entre variáveis, como é o caso das funções matemáticas. A Álgebra é usada para expressar regularidades matemáticas em termos de equações e expressões algébricas.

A sintaxe da Álgebra é usada para transformar e simplificar expressões, comparar diferentes expressões para determinar se são equivalentes e resolver equações. Atividades relacionadas ao pensamento funcional geralmente começam com a identificação de padrões e regularidades matemáticas em dados numéricos ou geométricos.

Embora os padrões não sejam o foco principal desta vertente, eles ainda são uma ferramenta útil para identificar relações matemáticas entre variáveis. Esta também inclui a ideia de funções matemáticas e suas propriedades, como linearidade e taxa de variação, e utiliza uma ampla gama de sistemas simbólicos, como tabelas, gráficos, para representar e analisar essas relações matemáticas.

c) **Modelação:** Kaput (2008) fala sobre três tipos básicos de modelagem algébrica, que são definidos pela forma como a Álgebra é utilizada. “Um primeiro tipo é específico em número ou quantidade” (Ibid., p. 14), e requer o uso do aspecto sintático da Álgebra para resolver um problema aritmético. Normalmente, assume a forma de uma restrição, geralmente sob a forma de uma equação.

O segundo tipo de modelagem utiliza a generalização e expressão de padrões e regularidades em situações ou fenômenos, que podem surgir tanto dentro quanto fora da Matemática. “Aqui, o domínio da generalização é a situação a ser modelada,

e muitas vezes a expressão da generalização assume a forma de uma ou mais variáveis que podem expressar uma função ou classe de funções” (Ibid., p. 14).

O terceiro tipo de modelagem envolve a generalização de situações de solução única. A Álgebra pode ser utilizada para ampliar a compreensão de um problema, ao permitir que suas restrições sejam flexibilizadas e sua forma mais geral e complexa seja explorada. Dessa maneira, é possível estabelecer relações mais profundas e abrangentes entre os elementos envolvidos na situação em questão. “Neste tipo de modelagem, a introdução de variáveis que expressam a generalidade da situação assume frequentemente a forma de parâmetros.” (Ibid., p. 14)

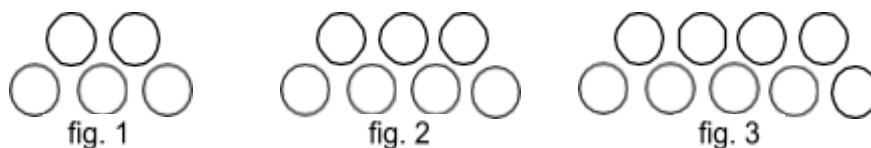
Em síntese, Kaput apresenta três vertentes da Álgebra. A primeira, aritmética generalizada, foca na construção de generalizações a partir da aritmética e do raciocínio quantitativo. A segunda, pensamento funcional, envolve a generalização de um tipo específico de relação entre variáveis, como é o caso das funções matemáticas. A terceira, a modelagem, utiliza a Álgebra como uma linguagem de modelação tanto dentro quanto fora da Matemática, com três tipos básicos de modelagem algébrica. A Álgebra é usada para expressar regularidades matemáticas em termos de equações e expressões algébricas, com foco na generalização e expressão de padrões e regularidades em situações ou fenômenos.

3.3.3 Pensamento Algébrico na perspectiva de Radford (2009)

Radford (2009), bem como Lins (1992) e Kaput (2008), caracteriza o Pensamento Algébrico em três correntes de pensamento: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão. Essa caracterização foi estabelecida através de um projeto de pesquisa que analisou as ações de alunos em uma atividade de generalização de padrões.

Durante a atividade, os alunos se dividiram em grupos de três e tiveram que desenhar quais as figuras 4 e 5 da sequência apresentada na figura 1, além de descobrir quantos círculos haviam nas figuras 10 e 100. Na segunda parte da atividade, os alunos tinham que escrever uma mensagem para um aluno de outra turma, explicando como calcular o número de círculos em qualquer figura, e depois escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na Figura n .

Figura 1: A sequência da atividade de generalização



Fonte: Radford (2009)

A seguir, iremos explorar cada vertente proposta por Radford para o Pensamento Algébrico.

a) Pensamento Algébrico Factual: Radford (2009), em alguns momentos, se referiu a essa forma de pensar como Pensamento Algébrico concreto. Ele está associado a situações mais particulares, onde a indeterminação e o fator desconhecido permanecem implícitos e ocultos. Nessa forma de pensar, gestos, palavras, ritmo, formas e esquemas são essenciais para a compreensão e resolução de problemas.

De acordo com Radford, o aluno que utiliza essa forma de pensamento, consegue resolver a primeira parte da atividade, ou seja, desenhar as figuras 4 e 5, por perceber que o número de círculos aumenta de dois em dois de uma figura à outra. O aluno também consegue identificar uma regularidade, “a relação entre o número da figura e o número de círculos de suas linhas” (Radford, 2009, p.39). No entanto, essa regularidade é notada pelos alunos como uma forma não prática para calcular o número de círculos em figuras grandes, como 1000 e 10.000, por exemplo.

Essa regularidade deve ser pensada por meio de uma “fórmula” com que possa ser generalizada para qualquer figura. Contudo essa fórmula não é composta por símbolos alfanuméricos, ou seja, números e letras (Almeida; Santos, 2017).

No entanto, a fórmula criada pelo aluno seguindo esse modo de pensar não se baseia principalmente em símbolos algébricos, como números e letras. Em vez disso, o aluno consegue enxergar que para determinar o número total de círculos na Figura 15, por exemplo, é preciso somar 1 ao número da figura para encontrar a quantidade de círculos na linha superior ($15+1$), totalizando 16. Em seguida, para a linha inferior, soma-se 2 ao número da figura ($15+2$), chegando a 17. Assim, quando adicionamos os círculos da linha superior aos da linha inferior na Figura 15, obtemos

o total de círculos, que é 33 ao somar 16 com 17. Continuando a mesma ideia, o aluno pode usar essa abordagem para calcular os círculos na Figura 100, somando 101 e 102, o que nos dá um total de 203 círculos.

b) Pensamento Algébrico Contextual: No Pensamento Algébrico Contextual, o aluno precisa ir além dos números particulares e lidar com um novo objeto, a figura geral. Nesse contexto, os alunos enfrentam o desafio de criar uma expressão (ou fórmula) que funcione para descobrir o número de círculos em qualquer figura.

Os alunos precisam ser capazes de construir uma fórmula que descreva o objeto geral de forma explícita e contextualizada. Para descrever esse tipo de pensamento em questão Radford traz o exemplo de resposta de um aluno: "Você tem que adicionar um círculo a mais do que o número da figura na fileira superior e adicionar um círculo a mais do que a fileira superior para o que está na parte inferior". (Ibid., p. 41)

De acordo com o autor, essa sentença pode ser vista como uma fórmula, contudo, diferente da discutida na abordagem anterior. Nessa vertente os gestos e ritmo foram substituídos por termos-chave, como "fileira superior" ou "parte inferior". A variável é explicitamente apontada pelo termo "número da figura". Nesse contexto, "a fórmula algébrica é, de fato, uma descrição do termo geral, conforme deveria ser desenhado ou imaginado" (Radford, 2009, p. 41).

c) Pensamento Algébrico Padrão: é também chamado por Radford de Pensamento Algébrico simbólico. É nessa perspectiva que o aluno utiliza de uma linguagem simbólica por meio de fórmulas alfanuméricas para expressar o pensamento. No processo de Pensamento Algébrico, as fórmulas alfanuméricas não são apenas uma ferramenta de cálculo abstrato, mas sim uma representação dinâmica dos conceitos estudados.

No início dessa forma de pensar algebricamente, as fórmulas alfanuméricas são narrativas vivas dos fenômenos estudados, ou seja, são ícones em que os alunos oferecem uma espécie de descrição espacial da figura e as ações a serem realizadas. Em um nível mais consolidado, as fórmulas deixam de ser ícones, deixam de ter uma natureza "perspectiva", e passam a significar coisas de uma forma totalmente abstrata (Almeida; Santos, 2017)

Segundo Radford, a transição de um sistema semiótico rico em recursos, como ritmos, gestos icônicos, dêiticos e advérbios, utilizados nas formas de pensamento factual e contextual, para um sistema baseado em fórmulas alfanuméricas, resulta em dificuldades significativas para os alunos. O autor afirma que essa mudança é drástica, pois a forma como os objetos são designados é completamente diferente.

Por exemplo, Radford aponta que, ao pedir para o aluno elaborar uma fórmula para representar o número de círculos da figura n da atividade da figura 1, apresentada no início desse tópico, lhe é apresentada a seguinte expressão: $(n+1) + (n+2)$. Onde é possível perceber que

Os sinais nessas fórmulas ainda mantêm a experiência corporificada e perspectiva do processo de objetificação. Reconhecemos facilmente no termo " $n+1$ " a referência à linha superior, assim como reconhecemos no termo " $n+2$ " a referência à linha inferior. (Radford, 2009, p. 44)

Ainda assim, é possível observar que a fórmula apresentada é mais avançada do que aquela usada pelo aluno no Pensamento Algébrico contextual, pois agora ele emprega uma linguagem simbólica algébrica, que permite uma síntese muito mais poderosa, baseada em sinais alfanuméricos.

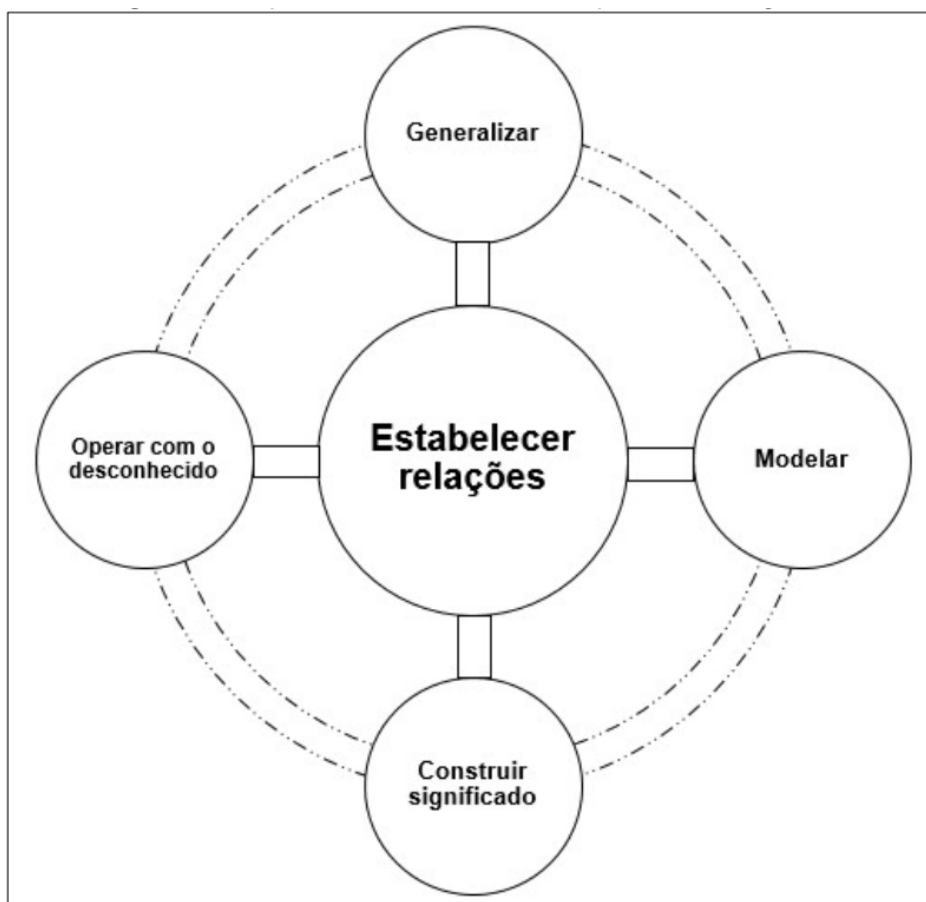
Conforme Radford (2009), o Pensamento Algébrico simbólico revela o significado que os estudantes atribuem às suas primeiras fórmulas alfanuméricas. Em vez de meros instrumentos de cálculo abstratos, as fórmulas frequentemente são vistas como narrativas vívidas. Elas funcionam como ícones, pois oferecem uma representação espacial da figura e das ações a serem realizadas.

3.3.4 Caracterização do Pensamento Algébrico de Almeida (2016)

A partir da análise das perspectivas de Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009), Almeida (2016) defende o argumento de que uma caracterização do Pensamento Algébrico, como citado por nós algumas vezes, não é uma tarefa simples, mas que seria necessária uma caracterização dessa forma de pensar. Dessa forma, Almeida (2016) cria uma caracterização do que vem a ser o Pensamento Algébrico.

Para esse tipo de raciocínio, ele acredita que esse modo de pensar é composto por cinco características, que vem a ser: estabelecer relações; generalizar; modelar; construir significado; e operar com o desconhecido. Sendo a capacidade de estabelecer relações como a capacidade central, a primeira capacidade desenvolvida, seguida pelas demais (Ibid.), como apresentado no esquema elaborado por ele.

Figura 2 - Esquema das características do Pensamento Algébrico



Fonte: Almeida (2016)

Para demonstrar como esses elementos aparecem na prática, Almeida (2016) utiliza um exemplo de resposta de um aluno sobre um problema de partilha de quantidades, utilizado para sua pesquisa de tese de doutorado.

A questão era a seguinte: *Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?*

Figura 3 - Resposta de um aluno sobre o problema de partilha

Handwritten student work showing the solution to a word problem. The work is divided into three stages:

- 1ª etapa** (1st stage): The problem is translated into an equation. The initial equation is $J + P + R = 37$. A bracket indicates that $P = J + 5$ and $R = J + 2$. The equation is then rewritten as $x + x + 5 + x + 2 = 37$, simplified to $3x + 7 = 37$, and solved to find $x = 10$.
- 2ª etapa** (2nd stage): The equation is solved for x . The steps shown are $3x + 7 = 37$, $3x = 30$, and $x = 10$.
- 3ª etapa** (3rd stage): The final values for each person are listed: $J\text{oana} = 10$, $P\text{aulo} = 15$, and $R\text{oberto} = 12$.

Fonte: Almeida (2016)

De acordo com Almeida (ibid.), o aluno inicia a resolução, mobilizando a capacidade de *estabelecer relações*, na medida em que, na primeira parte, são estabelecidas relações entre a quantidade de balas e quanto cada um iria receber. O aluno inicia resolvendo o problema por meio de um modelo usando as iniciais dos nomes das personagens, representando a soma das balas recebidas por cada uma como $J + P + R = 37$. No entanto, ele percebe que as quantidades de balas não são iguais, e que para chegar na resposta seria necessário levar em consideração o enunciado.

Nesse momento, ele estabelece relações usando setas, sinais de adição e valores como 5 e 2. Por exemplo, ao ir de P para J, indica que Paulo receberá 5 balas a mais que Joana, e o mesmo acontece ao ir de R para J, indicando que Roberto receberá 2 balas a mais que Joana. Isso direciona a outra característica do Pensamento Algébrico, que é a *capacidade de modelar*, onde cria-se um modelo matemático para representar o problema inicialmente apresentado em linguagem natural.

Na segunda etapa da resolução, o aluno transforma o problema em uma equação, incluindo todas as relações iniciais do modelo. Isso é feito ao usar "X" para representar a quantidade de balas de Joana, " $X + 5$ " para representar a quantidade de Paulo e " $X + 2$ " para indicar a quantidade de Roberto, estabelecendo que a soma dessas três quantidades é igual a 37, expressa na equação " $X + X + 5 + X + 2 = 37$ ".

Durante o processo de modelagem, o aluno demonstra outra característica importante do Pensamento Algébrico: a *capacidade de generalizar*. Após converter o problema em uma forma algébrica, o aluno representa as quantidades de balas que cada personagem receberá de forma genérica. Ele sintetiza as relações entre essas

quantidades e as descreve usando uma linguagem algébrica, onde "X" pode representar um valor qualquer.

Conforme Almeida (2016), ainda na segunda etapa, é revelada mais uma característica do Pensamento Algébrico: *a capacidade de operar com o desconhecido*. Isso envolve manipular o "X" como se fosse conhecido, aplicando as leis da aritmética à igualdade. No exemplo, o aluno demonstra essa característica ao realizar operações na equação inicial para gerar equações equivalentes e encontrar o valor de "X". Essa capacidade se evidencia quando o aluno subtrai 7 de 37, mostrando compreensão de que, ao subtrair o mesmo valor de ambos os lados de uma igualdade, a igualdade não é afetada.

Ao mobilizar essas características, o aluno lida com uma última característica, *a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos*, conforme o aluno compreende o problema como uma equação, identificando uma relação de igualdade entre as quantidades, como no exemplo da figura 3, em que a soma das balas que cada personagem receberá é igual ao total de balas. Isso é evidenciado na terceira etapa da resolução, quando ele associa "X" à quantidade de balas que Joana receberá, "Joana = 10", mesma forma, "X + 5" como a quantidade de balas de Paulo, resultando em "Paulo = 15" ($10 + 5$), e "X + 2" como a quantidade de balas de Roberto, levando a "Roberto = 12" ($10 + 2$) (Almeida, 2016).

De acordo com Almeida e Santos (2017), pensar algebricamente envolve cinco características: a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar, a capacidade de generalizar, a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido e a capacidade de construir significado para os objetos e linguagem simbólica algébrica. Sendo a capacidade de estabelecer relações a característica central e necessária para considerar que um indivíduo esteja pensando algebricamente. Isso significa que um sujeito só pode estar pensando algebricamente se for capaz de estabelecer relações, enquanto as outras habilidades se desenvolvem progressivamente ao longo do tempo.

4 METODOLOGIA

A nossa pesquisa é de carácter qualitativo e documental, que é uma abordagem de pesquisa que estuda os aspectos de fenómenos sociais e do comportamento humano, que de acordo com Fontelles et. al (2009, p. 6) “busca o entendimento de fenómenos complexos específicos, em profundidade de natureza social e cultural, mediante descrições, interpretações e comparações”. Trata de uma “técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema” (Ludke; André, 1986, p.38), do qual em geral tem baixo custo, exigindo investimento de tempo e atenção do pesquisador.

De acordo com Phillips (1974 apud Ludke; André, 1986, p. 38) são considerados documentos “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano”. Nessa perspectiva, conforme Caulley (1981 apud Ludke; André, 1986, p. 38) “a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões e ou hipóteses de interesse”.

Nesse trabalho realizamos um mapeamento das produções científicas de TCCs da Licenciatura em Matemática na UFPE-CAA, buscando identificar como a noção de Pensamento Algébrico tem sido abordada nos mesmos, adotando a perspectiva do mapeamento da pesquisa educacional desenvolvida por Biembengut (2008) em que “apresenta o que já existe sobre o tema, quantos, quem e onde já fizeram algo a respeito, que avanços foram conseguidos e quais problemas estão em aberto para serem levados adiante” (Biembengut, *ibid.*, p. 73). Conforme Biembengut

Mapear é um processo de revelar conhecimento, ao fazer o mapeamento, precisamos efetuar um cuidadoso estudo dos entes envolvidos e dos procedimentos e técnicas a serem utilizadas para minimizar possíveis distorções e, desta forma, a representação dos resultados- o mapa - disponha de artefatos visíveis dotados de autonomia e com propriedades especiais para servir como guia, como meio de comunicação de conhecimento. Importa compreender a questão de tal forma a organizar os dados e traçar, em um mapa esquemático, a variação destes em um contexto (Biembengut, 2008, p. 63).

Cavalcanti (2015) em sua tese de doutorado cria uma adaptação para esse tipo de mapeamento, onde os questionamentos "quantos, quem e onde já realizaram pesquisas nesse sentido?" direcionam-se a uma investigação exploratória horizontal, já os questionamentos "quais avanços foram obtidos e quais desafios permanecem para futuras pesquisas?" indicam uma abordagem vertical, no qual

Os termos e os respectivos questionamentos que a autora destaca na citação, em nossa compreensão, permite-nos fazer uma distinção sobre o direcionamento do mapeamento. Os questionamentos '**quantos, quem e onde** já fizeram algo a respeito?' apontaria para um estudo exploratório horizontal se concentrando mais no relevo observável das produções científicas, isto é, na topologia do território. Já os questionamentos '**que** avanços foram conseguidos e **quais** problemas estão em aberto para serem levados adiante' indicaria um estudo vertical que poderia ter como orientação o que está sob (isto é, os trabalhos já desenvolvidos – indicariam tendências) e o que está sobre (isto é, os trabalhos que podem ser desenvolvidos – indicariam perspectivas) a superfície da literatura científica. (Cavalcanti, *ibid.*p. 219, negritos do autor)

Dessa forma, realizamos uma classificação dos trabalhos por ano, título e autor, em seguida construímos uma síntese de cada trabalho, mostrando de maneira mais analítica os objetivos, caminhos, procedimentos metodológicos, discussões, resultados dos Trabalhos de Conclusão de Curso analisados e focos de análises das pesquisas. Por fim, não menos importante, fizemos uma análise dos TCCs, investigando a noção de Pensamento Algébrico abordada nos TCCs e cada contexto da pesquisa, verificando os principais referenciais teóricos presentes nos trabalhos.

A partir do que foi destacado, essa pesquisa irá investigar os Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) da Licenciatura em Matemática no Centro Acadêmico do Agreste, curso que teve início em 2009, e teve sua primeira defesa de TCC em fevereiro de 2014. Para fazer a seleção dos trabalhos que tratassem da temática Pensamento Algébrico, utilizamos o repositório digital da UFPE, o ATTENA, que de acordo com a própria plataforma, visa armazenar e divulgar a produção científica da Universidade em um ambiente digital.

Para fazer a seleção das produções que atendessem os objetivos da nossa pesquisa, fomos ao ambiente virtual do repositório, na opção 'busca avançada' e pesquisamos pelos termos "Pensamento Algébrico" e "raciocínio algébrico" e utilizamos, nessa sequência, os seguintes filtros para busca: Trabalho de Conclusão de Curso> Centro Acadêmico do Agreste> Núcleo de Formação Docente> TCC-

Matemática Licenciatura, respectivamente. A partir de então observamos as pesquisas que tratavam do Pensamento Algébrico ou que o tinham esse tema como objeto de estudo do trabalho, selecionando as pesquisas em que fossem encontradas o termo “pensamento algébrico” / “raciocínio algébrico” no título, resumo ou palavras-chave.

Num total de 336 Trabalhos de Conclusão de Curso da Licenciatura em Matemática, apresentados pelo ATTENA com defesas até meados do período 2022.2, a partir da busca pelo termo “pensamento algébrico” a plataforma nos apresentou 40 resultados, quando pesquisamos por “raciocínio algébrico” o retorno foi de oito, contudo, haviam trabalhos comuns aos dois resultados. A partir do critério estabelecido anteriormente, pudemos selecionar um total de sete pesquisas de TCC.

A partir da seleção dos trabalhos, os ordenamos, distinguindo como (modalidade/número/ano), onde TCC é o mesmo que Trabalho de Conclusão de Curso (TCC.1/2017, TCC.2/ 2017, ...). No capítulo seguinte, apresentaremos nossa análise sobre a investigação dessas pesquisas.

5 ANÁLISE E DISCUSSÕES

A seguir, apresentaremos as pesquisas selecionadas que abordaram o Pensamento Algébrico ao longo de sua construção. Selecionamos um total de sete pesquisas em um total de 336 até meados do período 2022.2. Fizemos uma descrição dos trabalhos, classificando por ano, título e autor, explorando o que tem sido construído, sendo essa uma visão horizontal da produção. Em seguida, fizemos uma exploração na perspectiva vertical, fazendo uma análise mais aprofundada de cada trabalho.

5.1 MAPEAMENTO HORIZONTAL

A seguir, apresentaremos os trabalhos selecionados, que na perspectiva do mapeamento horizontal aponta quantos e quais, ano e autor dos trabalhos que abordam a temática Pensamento Algébrico.

Quadro 1 - Trabalhos de Conclusão de Curso sobre Pensamento Algébrico

Código	Ano	Título	Autor
TCC.1	2017	Investigando a noção de equação no livro didático de matemática	José Edmilson Melo da Silva
TCC.2	2017	Mapeamento de trabalhos apresentados nos encontros nacionais de educação matemática sobre Álgebra escolar: analisando a influência dos documentos curriculares nacionais.	Emanuel Clebson de Vasconcelos
TCC.3	2019	Os níveis de pensamento algébrico em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.	Ranyelle de Jesus Silva
TCC.4	2020	Álgebra no 7º ano: Investigando as concepções de estudantes de uma escola pública.	Ithalo Rosenberg Praxedes de Ponte dos Santos
TCC.5	2021	Pensamento algébrico: análise das comunicações científicas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática.	Bruno da Silva Couto

TCC.6	2021	Análise das questões de álgebra no Exame Nacional do Ensino Médio.	Maria Rayssa da Silva
TCC.7	2022	O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da resolução de problemas relacionados a equações com balanças.	Maria Luana Sabino de Melo

Fonte: os autores

Em seguida, iremos descrever o estudo vertical dos trabalhos acima referidos, o qual aponta para uma estratégia de análise em profundidade, que engloba a avaliação dos estudos já realizados e a detecção de áreas potenciais para investigações futuras. É uma análise mais detalhada sobre cada trabalho. Apresentaremos uma síntese dos trabalhos, bem como foco de análise das pesquisas, como abordam o Pensamento Algébrico e referências bibliográficas que mais aparecem

5.2 MAPEAMENTO VERTICAL

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.1/2017 de título: “*Investigando a Noção de Equação no Livro Didático de Matemática*” faz uma investigação acerca da noção de equação em uma coleção de livros do ensino fundamental II. Segundo o autor, a pesquisa foi motivada a partir da observação de dificuldades encontradas por seus alunos, o que lhe levou a questão de pesquisa: “Em quais contextos as equações encontram-se presentes e como esses contextos são tratados no livro didático de educação básica, especialmente no ensino fundamental II?”. A partir desse questionamento foi definido como objetivo identificar como a noção de equação é concebida no livro didático com relação ao contexto e a forma com que é tratada. A partir desse contexto o foi utilizada a coleção de livro “Praticando Matemática” aprovada no PNLD 2017, e utilizou definições conceituais de equação para investigar as atividades que exploram equações ao longo de cada volume da coleção. O trabalho traz a discussão pontos que marcaram o estudo das equações no decorrer da história da Matemática, trata também do Pensamento Algébrico e o ensino de equações.

O estudo analisou a abordagem da noção de equação ao longo dos quatro anos do Ensino Fundamental II no livro didático de Matemática. Foram identificados

quatro contextos distintos para o tratamento das equações: geométrico, prático, processual e estrutural. Cada contexto apresenta abordagens diferentes para as equações. A abordagem geométrica envolveu a exploração de equações por meio de deduções geométricas, estando mais presente nos anos finais do ensino fundamental II. O contexto prático trabalhou com situações cotidianas, sendo mais comuns nos anos iniciais do ensino fundamental II, ajudando na introdução da Álgebra e ao conteúdo de equação. O contexto processual teve o foco nos procedimentos de resolução das equações, sendo constante em todos os volumes. O contexto estrutural tratou das equações de forma abstrata e generalista, sendo menos evidenciado em todos os volumes. O autor conclui que as equações geométricas foram a forma mais trabalhada ao longo da coleção, enquanto as equações tratadas de forma estrutural foram as menos abordadas. As situações aplicacionais surgiram especialmente no último volume e as situações pragmáticas foram mais presentes nos anos iniciais e reduzidas nos volumes seguintes.

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.2/2017 de título: *Mapeamento de trabalhos apresentados nos encontros nacionais de educação matemática sobre álgebra escolar: analisando a influência dos documentos curriculares nacionais*, tem problemática de pesquisa investigar de que modo os documentos curriculares nacionais são utilizados como fontes de referências em estudos científicos que abordam o tema da Álgebra escolar. A pesquisa buscou identificar os estudos relacionados a Álgebra escolar presentes nas publicações do ENEM, verificando os principais conceitos teóricos abordados e se existia alguma relação entre o surgimento de novos padrões curriculares e a produção científica de que trata a Álgebra escolar. Foi adotada uma abordagem qualitativa, sendo analisadas sete edições do ENEM, ocorridas entre 1998 e 2016. Essas edições foram escolhidas por abrangerem o período posterior à publicação dos primeiros documentos curriculares nacionais de 1997. A pesquisa concentrou-se na modalidade comunicação científica. Foram selecionados 32 trabalhos que tratavam da Álgebra escolar e que faziam referências aos documentos curriculares. O autor conclui que esses trabalhos refletem direções das pesquisas na área, incluindo o estudo das concepções e funções diversas da Álgebra, desenvolvimento do Pensamento Algébrico e Pré-Álgebra, além da ênfase na resolução de problemas como método para compreender os conceitos algébricos, verifica uma relação entre o surgimento de

novos documentos curriculares e o aumento de trabalhos científicos na área, e sugere que novas pesquisas podem ser feitas explorando a influência dos documentos curriculares, tanto na prática docente, quanto na formação dos futuros professores.

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.3/2019 de título: *Os níveis de pensamento algébrico em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental*, teve como objetivo geral de pesquisa analisar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico a partir de atividades resolvidas em livros didáticos de matemática dos 6º e 9º ano. A pesquisa busca identificar o nível de Pensamento Algébrico e verificar as características dos conteúdos presentes nesses livros, sendo utilizada uma metodologia qualitativa onde foram examinadas três coleções destinadas aos anos finais, adotadas nas escolas municipais de Caruaru-PE. A seleção das coleções levou em conta a questão das dificuldades dos alunos em Álgebra e a eficácia dos livros didáticos. A análise revelou que o livro "Praticando Matemática" (2012) cobria todos os níveis do Pensamento Algébrico, enquanto outros tinham de dois a cinco níveis. Notou-se que os livros do 6º ano têm menos abordagem algébrica, o que pode impactar o aprendizado posterior, enquanto nos livros do 9º ano foram identificados de cinco a seis níveis. Foram comparados os aspectos algébricos entre o 6º e o 9º ano, concluindo que os livros propõem expectativas de aprendizado em atividades com Pensamento Algébrico, embora os alunos possam ter dificuldade em identificá-lo. O estudo sugere que "Praticando Matemática" é promissor, mas enfatiza a adaptação das atividades conforme o nível de compreensão dos estudantes, visando uma melhor compreensão da Álgebra desde o Ensino Fundamental.

O trabalho de Conclusão de Curso TCC.4 de título *Álgebra no 7º ano: Investigando as concepções de estudantes de uma escola pública* é uma pesquisa que teve como objetivo analisar as dificuldades em Álgebra de alunos do 7º ano do ensino fundamental em uma escola localizada no município de Caruaru- PE. Pesquisa, segundo o autor, motivada por reflexões a partir de sua prática docente, que levou à questão de pesquisa: "Quais principais causas e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem matemática que dificultam o desenvolvimento de estudantes em situações algébricas?". Durante o processo de construção foram abordados aspectos sobre origem e evolução da Álgebra, concepções de Álgebra e

uso de variáveis a partir das perspectivas de Usiskin (1995), bem como também abordou Pensamento Algébrico e suas características. A pesquisa foi realizada a partir de um questionário com dez perguntas abertas com situações algébricas, explorando as respostas corretas, erros, ausências de respostas e estratégias utilizadas pelos alunos. A pesquisa buscou entender o domínio dos estudantes em relação a conteúdos algébricos e descrever suas dificuldades e equívocos. Foram escolhidas três turmas para a pesquisa, as quais foram nomeadas por turma A, B e C com diferentes contextos de ensino. O autor conclui que um número significativo de estudantes estava preso a procedimentos mecânicos, essencialmente aritméticos, com um pequeno quantitativo conseguindo relacionar Aritmética e Álgebra, culminando na dificuldade de uma representação simbólica e com elementos algébricos. Foi evidenciada a necessidade de se trabalhar o Pensamento Algébrico mais cedo, desde as séries que antecedem o sétimo ano do ensino fundamental.

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.5/2021 intitulado *Pensamento algébrico: análise das comunicações científicas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática* teve como objetivo investigar a produção científica sobre pensamento algébrico a partir das comunicações científicas nos anais do ENEM. O estudo utilizou uma abordagem qualitativa, focando no mapeamento das produções científicas sobre Pensamento Algébrico. A técnica de mapeamento em pesquisa educacional foi adotada, destacando as perspectivas horizontal e vertical. A perspectiva horizontal aborda a quantidade de estudos, autores e locais, enquanto a vertical explora avanços e desafios. Todas as treze edições do ENEM foram analisadas, buscando uma compreensão abrangente. Foram encontrados 172 trabalhos e, após refinamento, 34 foram selecionados para análise. O foco principal foi nas comunicações científicas, onde foram selecionados 22 trabalhos. A pesquisa incluiu uma revisão teórica abrangendo conceitos de Álgebra, sua evolução histórica, abordagem escolar e definições de Pensamento Algébrico por diferentes autores. O mapeamento da pesquisa foi feito em duas perspectivas: horizontal e vertical. No mapeamento horizontal, foram identificadas 22 comunicações científicas sobre Pensamento Algébrico, sendo que a maioria surgiu nas edições mais recentes do ENEM. No mapeamento vertical, os 22 trabalhos mapeados foram analisados com base nas vertentes de Pensamento Algébrico de Radford (2009), destacando

as categorias de Pensamento Algébrico Factual, Contextual e Padrão. A pesquisa permitiu entender a diversidade de abordagens do Pensamento Algébrico, além de identificar tendências na produção acadêmica sobre o tema.

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.6/2021 intitulado *Análise das questões de Álgebra no Exame Nacional do Ensino Médio* tem como objetivo de pesquisa analisar as questões de Álgebra da prova de matemática e suas tecnologias no período de 2016 a 2019. O primeiro passo da pesquisa foi selecionar as questões que eram de Álgebra, em seguida classificar cada questão de cada edição a partir das concepções de Usiskin (1995) e na sequência fazer uma análise dessas classificações. Para fundamentar seu trabalho a autora aborda considerações sobre Álgebra e seu ensino, desde aspectos históricos aos elementos em sala de aula, a abordagem nos documentos curriculares e concepções teóricas. A pesquisa adota uma abordagem quantitativa e qualitativa, analisando as questões de Álgebra das provas de Matemática do ENEM de 2016 a 2019, com base na teoria de Usiskin (1995). As análises foram apresentadas através de tabelas e análises das questões selecionadas. Inicialmente, foi realizada uma análise total das provas para identificar questões relacionadas à Álgebra. Uma questão de Álgebra seria aquela em que fosse preciso o estudante utilizar conhecimentos algébricos para resolvê-la. Caso uma questão pudesse ser abordada por diferentes caminhos, mas um deles envolvesse consideravelmente conhecimentos algébricos em uma das quatro concepções definidas por Usiskin, tal questão seria classificada como algébrica. Das 179 questões analisadas, 84 foram relacionadas à Álgebra, aproximadamente metade do total. Isso apontou para a relevância da Álgebra na estrutura das provas do ENEM. Foram identificadas questões relacionadas às quatro concepções de Usiskin. No entanto, a classificação revelou uma concentração significativa, com 64 das 84 questões na concepção "Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas". As demais questões foram categorizadas da seguinte forma: 11 questões da concepção "Álgebra como estudo de relações entre grandezas", seis questões da concepção "Álgebra como aritmética generalizada" e três questões da concepção "Álgebra como estudo das estruturas", levando a autora questionar se essa diferença entre a quantidade de concepções com ênfase na resolução de problemas não poderia pautar o ensino para um tipo limitante de

raciocínio algébrico com foco apenas na resolução mecânica de questões para exames externos visando o vestibular/ENEM.

O Trabalho de Conclusão de Curso TCC.7/2022 intitulado *O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da resolução de problemas relacionados a equações com balanças*, teve como objetivo de pesquisa analisar os sinais de desenvolvimento do Pensamento Algébrico entre um conjunto de estudantes no 7º ano do ensino fundamental, a partir da resolução de problemas associados a equações com balanças. Os dados foram obtidos por meio de um questionário com tarefas relacionadas a equações com balanças, seguindo uma abordagem de resolução de problemas, onde é proposto uma dinâmica de três fases, dispostas em antes, durante e depois com objetivos a serem alcançados pelos alunos e ações realizadas pelo professor. A pesquisa foi realizada em uma escola privada do município de Lajedo-PE, com um total de 10 participantes, organizados em duplas. Os alunos ainda não tinham tido contato com os procedimentos formais da Álgebra. A análise das resoluções revelou processos de suposições e desenvolvimento do Pensamento Algébrico. As duplas fizeram manipulações aritméticas e algébricas semelhantes aos métodos de resolução de equações, porém apresentando diferentes abordagens. De acordo com a autora, a representação gráfica das balanças pode ter reduzido a aversão que geralmente os alunos têm a letras em equações, e que essa abordagem ajudou os alunos a anteciparem habilidades referentes ao Pensamento Algébrico. A pesquisadora enfatiza que diferentes abordagens podem ser usadas para promover uma aprendizagem ativa dos alunos e que espera que o trabalho desperte reflexões que visem a melhoria da educação matemática para um ensino mais significativo.

5.2.1 Foco de análise das pesquisas

A partir da análise feita dos TCCs acreditamos ser interessante demonstrar os focos de análises das pesquisas, no sentido de quais objetos foram utilizados para a construção da pesquisa. A partir do estudo por nós realizado, encontramos cinco categorias para classificação dos focos de análise dos respectivos trabalhos.

Quadro 2- Foco de análise das pesquisas

FOCO DE ANÁLISE	TCC
Livro didático	TCC.1, TCC.3
Resolução de problemas	TCC.4, TCC.7
Documentos Curriculares	TCC.2
Artigos Científicos	TCC.5, TCC.2
Análise de Questões de Provas	TCC.6

Fonte: os autores

Dos trabalhos analisados, dois TCCs, TCC.1 e TCC.3 utilizaram o livro didático como foco de análise para estruturação da pesquisa, concentrando-se de que maneira esses livros abordam o ensino de Álgebra. Exploraram o modo como a noção de equação é apresentada no livro didático de ensino fundamental e identificaram diferentes conceitos em que as equações são tratadas.

Outros dois deles utilizaram pesquisa de trabalhos científicos o TCC.2 e TCC.5, analisando as produções de artigos científicos acerca da Álgebra escolar e Pensamento Algébrico, sendo que um deles, o TCC.2 utilizou também documentos curriculares como meio de análise, buscando analisar a influência destes em estudo científicos relacionados a Álgebra.

Temos os trabalhos TCC.4 e TCC.7 que se inserem na resolução de questões, onde os TCCs exploram o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em estudantes, investigando como os alunos desenvolvem habilidades algébricas e de que forma a resolução de problemas pode contribuir para esse desenvolvimento.

Por fim, o trabalho TCC.6 foca na análise de questões relacionadas à Álgebra na prova de avaliação do ENEM, examinando como os conceitos de Álgebra são abordados nas questões de matemática e de que maneira as diferentes abordagens podem influenciar o ensino e desempenho dos alunos.

5.2.2 Abordagem do Pensamento Algébrico nos trabalhos

No trabalho TCC.1, a noção de Pensamento Algébrico é abordada de forma a destacar a importância da Álgebra no desenvolvimento do raciocínio crítico e na capacidade de resolver problemas de forma abstrata e generalizada, onde a Álgebra é mais do que simples manipulações e técnicas mecânicas de resolução, e sim uma área de conhecimento que permite analisar, generalizar e aplicar conceitos em diferentes contextos. O Pensamento Algébrico é visto como a capacidade de interpretar a Álgebra dentro de situações reais, lidar com a resolução e reconhecer as diferentes funções das variáveis. De acordo com o TCC.1, a abordagem para o ensino da Álgebra visando o desenvolvimento do Pensamento Algébrico deve envolver a contextualização e a compreensão de diferentes significados das equações, permitindo que os alunos vejam além das técnicas de resolução e compreendam a estrutura e as propriedades desses conceitos matemáticos, proporcionando aos alunos a capacidade de refletir, questionar e resolver problemas de forma mais consistente.

O trabalho TCC.2 explora a noção de Pensamento Algébrico ao analisar a transição da linguagem verbal para a linguagem interpretada como expressão desse pensamento, envolvendo o uso de símbolos para representar elementos matemáticos, gerados em uma forma mais abstrata e concisa de expressão, com uma introdução de símbolos e notações específicas permitindo uma representação compacta de relações matemáticas, indo além da memorização de procedimentos. O autor enfatiza a importância de uma perspectiva que vá além de processos lógicos e etapas de resolução, destacando a Pré-Álgebra e sua aplicação precoce, justificada com diretrizes curriculares. Apesar disso, os resultados encontrados, mostram que as pesquisas indicam a persistência de abordagens mecânicas que necessitam de significado, prejudicando a compreensão e aplicação criativa do Pensamento Algébrico. O trabalho destaca a importância de pesquisas que promovam o Pensamento Algébrico desde cedo, preparando os alunos para desafios matemáticos complexos e uma perspectiva abrangente. Em resumo, o TCC.2 analisa a noção de Pensamento Algébrico, enfatizando a transição para a linguagem interpretada, buscando desafios nas práticas educacionais e defendendo

uma abordagem mais profunda e significativa desde as etapas iniciais da educação e a importância das orientações curriculares para a inserção de métodos que auxiliem nesse processo.

No trabalho TCC.3 pode-se inferir que o Pensamento Algébrico envolve a manipulação de símbolos, letras, incógnitas e variáveis para resolver problemas matemáticos e que os desafios enfrentados pelos professores na instrução da Álgebra estão relacionados à dificuldade dos estudantes em lidar com esses elementos abstratos. O uso de exemplos claros nos livros didáticos é enfatizado como uma ferramenta crucial para facilitar a compreensão da Álgebra. Na pesquisa em questão, a noção de Pensamento Algébrico é citada como uma junção de habilidades como a capacidade de estabelecer relações, identificar regularidades e generalizar situações e padrões. No trabalho é abordado a importância da utilização de atividades de resolução de problemas como objeto de apoio no desenvolvimento dessas habilidades. Também é destacada a necessidade de que se insira a Álgebra desde os primeiros anos da educação básica para que assim seja construído esse tipo de raciocínio de forma gradual.

No TCC.4, o trabalho explora o Pensamento Algébrico como uma habilidade intelectual essencial na compreensão da Álgebra, diferenciando-o desse conteúdo. O desenvolvimento dessa habilidade é considerado crucial para aplicar procedimentos algébricos, relacionando-os a padrões conhecidos da aritmética. A importância de estimular o Pensamento Algébrico desde cedo, conforme a Base Nacional Comum Curricular, é destacada. O autor observa que o Pensamento Algébrico envolve simbolização, representação e análise de situações matemáticas usando símbolos algébricos, relacionando-se a relações, funções e modelagem. No trabalho também se explora a ideia de que a Álgebra é uma linguagem, enquanto o Pensamento Algébrico é uma coleção de habilidades intelectuais necessárias para a Álgebra. É destacada a importância de não separar rigidamente a aritmética e a Álgebra, sugerindo que elas possam ser abordadas juntas. Além disso, a pesquisa enfatiza que o Pensamento Algébrico pode se desenvolver antes ou junto com o pensamento aritmético, e que o Pensamento Algébrico vai além da resolução mecânica de equações, permitindo uma compreensão profunda dos procedimentos algébricos.

No trabalho TCC.5, a noção do Pensamento Algébrico é abordada ao discutir diferentes perspectivas sobre a Álgebra como uma forma de pensar. Ele menciona pesquisadores que destacam que a Álgebra não é apenas uma linguagem, mas também uma forma de raciocinar e generalizar relações matemáticas. A pesquisa aborda várias visões de Pensamento Algébrico, passando desde o que se trata de um processo de generalização de ideias matemáticas, que são formalizadas conforme a idade dos alunos, a algumas vertentes de Pensamento Algébrico que são discutidas no decorrer do trabalho e vão desde a identificação de regularidades em padrões, generalização de forma mais abstrata com utilização de termos descritivos, a generalização de ideias de função até a utilização de símbolos alfanuméricos para expressar relações abstratas. Também é enfatizada a importância da construção desse tipo de raciocínio no decorrer da educação básica, com intuito de que o aprendizado da Álgebra aconteça de forma significativa.

O trabalho TCC.6 apesar de não fazer uma análise tão profunda com direcionamento ao raciocínio algébrico, aborda essa noção de pensamento ao mencionar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e sua abordagem em relação ao Ensino Fundamental, apontando que a BNCC (2018) destaca a Álgebra como um dos campos principais da Matemática, juntamente com Aritmética, Geometria, Estatística e Probabilidade. A BNCC ressalta que a Álgebra tem o objetivo de desenvolver um tipo especial de pensamento - o Pensamento Algébrico - que é essencial para compreender, representar e analisar relações quantitativas de grandezas e situações matemáticas. O trabalho também aborda cada concepção de Usiskin como possíveis classificações para um efetivo Pensamento Algébrico, que seria o uso de todas as concepções no ensino. Portanto, o trabalho contextualiza a importância do Pensamento Algébrico na educação, especialmente no contexto das diretrizes curriculares do Brasil.

No TCC.7 o Pensamento Algébrico é abordado mostrando de que modo ele pode ser desenvolvido durante as várias etapas do ensino. Na pesquisa é enfatizada a importância de desenvolver habilidades como identificar regularidades, padrões, criar expressões matemáticas e fazer generalizações a partir da linguagem algébrica. A autora aborda a utilização de atividades lúdicas e exemplos tendo como fator importante a mediação do professor de forma que auxiliem os estudantes de

maneira a lidar com situações que envolvam padrões, sequências e equações, visando um ensino que supere o processo de manipulações mecânicas e estimule o desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde os anos iniciais do ensino fundamental, conduzindo o aluno a um raciocínio que o leve a compreender e aplicar conceitos matemáticos em diversas situações, estimulando a aprendizagem e reflexão.

5.2.3 Principais referências teóricas

A partir dos resultados da nossa pesquisa, conseguimos identificar os teóricos mais recorrentes entre os trabalhos analisados, apresentados no quadro a seguir.

Quadro 3 - Principais referências teóricas

Referenciais Teóricos	Quantitativo de trabalhos
Almeida (2016), Almeida e Santos (2017)	TCC.3, TCC.4 e TCC.5
Base Nacional Comum Curricular	TCC.3, TCC.4, TCC.5, TCC.6, TCC.7
Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)	TCC.1, TCC.2, TCC.3, TCC.4, TCC.5
Lins e Gimenez (1997)	TCC.1, TCC.2, TCC.4, TCC.5
Ponte, Branco e Matos (2009)	TCC.1, TCC.2, TCC.4
Usiskin (1995)	TCC.1, TCC.2, TCC.3, TCC.4, TCC.5, TCC.6, TCC.7

Fonte: os autores

Notamos que entre os trabalhos, a pesquisa de Ponte, Branco e Matos (2009) intitulada *A Álgebra no ensino básico* foi relatada em três dos TCCs, seguido pelo livro *Perspectivas sobre Aritmética e Álgebra no século XXI* de Lins e Gimenez (1997), que está presente em quatro das sete pesquisas analisadas.

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) estiveram presentes em cinco trabalhos. Um destaque relevante é a presença do documento da Base Nacional

Comum Curricular (2018), que aparece em cinco pesquisas, indicando que os pesquisadores estão atentos às diretrizes curriculares.

Além disso, foi notável o artigo de Usiskin (1995), intitulado *Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilização das variáveis*, que foi abordado em todos os Trabalhos de Conclusão de Curso, demonstrando uma tendência consistente ao longo das análises realizadas.

Apesar de não ser com um único trabalho em específico, consideramos importante destacar a utilização de trabalhos de Almeida (2016) e Almeida e Santos (2017), sendo trabalhos que têm tratado do Pensamento Algébrico, uma tese de doutorado, de título *Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade*, do ano de 2016 e um artigo desenvolvido a partir dessa tese, intitulado *Pensamento algébrico: em busca de uma definição*, do ano de 2017.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho teve o intuito de investigar como a noção de Pensamento Algébrico tem sido abordada em Trabalhos de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática na UFPE, Campus do Agreste. A partir de então, abordamos aspectos históricos da Álgebra, desde suas possíveis origens até a evolução para o processo de ensino, bem como a construção do raciocínio algébrico.

Ao analisar os trabalhos selecionados, considerando desde o contexto histórico, entendemos que a transição da linguagem verbal para simbólica tenha sido o marco inicial para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, também de acordo com essas pesquisas, o Pensamento Algébrico não se limita a técnicas mecânicas de resolução de expressões e equações, mas envolve uma capacidade intelectual mais aprofundada, sendo essencial para o melhor aprendizado da Álgebra. A inserção do Pensamento Algébrico desde cedo, conforme é sugerido pelas diretrizes curriculares, é um ponto de consenso entre os trabalhos.

A contextualização e a resolução de problemas foram apontadas como abordagens eficazes para desenvolver esse tipo de pensamento desde as etapas iniciais da educação. Outro aspecto ressaltado nos trabalhos é a importância de não se separar rigidamente a Aritmética da Álgebra, onde essas duas vertentes podem ser ensinadas de maneira integrada, permitindo que os alunos desenvolvam uma visão mais ampla da Matemática. Os trabalhos apresentam que o Pensamento Algébrico é mais do que um conjunto de técnicas, sendo uma habilidade intelectual que permite interpretar, relacionar e generalizar conceitos matemáticos.

Consideramos ser relevante a presença de referenciais teóricos como os trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997), pois são pesquisadores que com frequência estão presentes em trabalhos que estudamos no campo de estudo da Álgebra, o que reforça a consolidação desses pesquisadores como fontes importantes da área. No entanto, destacamos que esses pesquisadores atuam mais na perspectiva que trabalham abordagens de concepções de Álgebra e Álgebra escolar, não explorando profundamente o Pensamento Algébrico.

De forma distinta, outros trabalhos que aparecem são os de Almeida (2016) e Almeida e Santos (2017), que abordam com profundidade o tema Pensamento Algébrico, buscando apresentar detalhes e as principais características e elementos presentes nesse tipo de raciocínio. Entendemos também, que alguns dos TCCs não tinham como objeto direto de estudo o Pensamento Algébrico, mas reforçaram a importância do desenvolvimento dele para um aprendizado efetivo da Álgebra.

Chamamos a atenção para a presença da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em cinco das sete pesquisas, sendo que os dois que não a abordaram no decorrer da pesquisa, foram construídos antes da efetivação e publicação do documento final, o que indica um interesse dos pesquisadores nas diretrizes curriculares para o ensino.

É importante ressaltar que a presente análise se deu sobre um pequeno número de trabalhos, apenas sete em um universo de 336 (momento da coleta) o que nos indica que ainda há um caminho a ser traçado com pesquisas relacionadas ao tema. No entanto, mesmo com o número de sete pesquisas, conseguimos visualizar que os trabalhos convergem para certas ideias, dentre elas, a importância do Pensamento Algébrico como uma habilidade fundamental para um bom desempenho matemático, a transição de uma linguagem verbal e numérica para a linguagem simbólica como fator inicial para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, a necessidade de abordagens contextuais e resolução de problemas como método facilitador do aprendizado e a indicação de que Álgebra diz respeito a uma linguagem, e Pensamento Algébrico uma forma de interpretação e utilização dessa linguagem.

Tendo em vista a convergência dessas ideias, consideramos que nossa análise foi significativa ao apontar padrões e tendências. Esperamos que este trabalho venha a estimular futuras pesquisas, como um estudo comparativo entre diferentes abordagens de ensino que visam promover o pensamento algébrico desde as etapas iniciais da educação, analisando a eficácia de cada abordagem na compreensão e aplicação dos conceitos algébricos, com o propósito de enriquecer a discussão sobre esse tema tão importante na educação básica.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. Tese de doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife, 2016.
- _____.; SANTOS, M. C. dos. **Pensamento algébrico: em busca de uma definição**. Revista Paranaense de Educação Matemática. Campo Mourão. Pr, v.6, n.10, p. 34-60, janeiro/junho de 2017.
- BIEMBENGUT, M. S. **Mapeamento na Pesquisa Educacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. 2008.
- BOOTH, L. **Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da Álgebra. São Paulo, Atual Editora, 1995.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. In: Journal for Research in Mathematics Education. v. 36, n. 5. 2005
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CAVALCANTI, J. D. B. **A noção de relação ao saber: história e epistemologia, panorama do cenário francófono e mapeamento de sua utilização na literatura científica brasileira**. 2015. 427 fls. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Área de concentração: Educação Matemática. Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Recife, 2015.
- CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. **Al-jabr: duas ou três palavras sobre o nascimento de uma nova matemática**. Revista Educação e Matemática, Portugal, nº 107, p. 40-41, março – abril. 2010.
- COUTO, B. S. **Pensamento algébrico: análise das comunicações científicas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática**. 2021. 52 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2021.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A.; MIGUEL, A.. **Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar**. Pro-Posições (Unicamp), v. 4, n.1(10), p. 78-91, 1993.
- FONTELLES, M. J. et al. **Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa**. Revista Paraense de Medicina, v. 23, n. 3, p. 1-8, 2009.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning?: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008

KIERAN, C. **Developing algebraic reasoning**: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. Quadrante. Portugal, v. 16, n. 1, 2007.

LEAL, J. M.S. **O “X” da questão no ensino da álgebra**. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2013. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>>. Acesso em 14/09/2022. ISBN 978-85-8015-076-6.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nottingham, Nottingham, UK: 1992.

_____. **O modelo teórico dos campos semânticos**: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. In: Dynamis. nº 1, v. 7, Blumenau, 1994b.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J.. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 4ª ed. 1997.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

PONTE, J. P. **Números e Álgebra no currículo escolar**. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores. Porto: SEM/SPCE, p. 5-27, 2006.

RADFORD, L. **Algebraic thinking and the generalization of patterns**: a semiotic perspective. In: North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME. Bergen University College. v. 1, 2006

_____. **Signs, gestures, meanings**: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon – França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6> Acesso em: 12/03/2023

SANTOS, J.B. **Concepções de Álgebra escolar no livro escolar**: uma análise do livro “Praticando Matemática”. 2014. 70 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) –Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, PE. 2014

SQUALLI, H. **Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base**. Québec: Faculté des Sciences de l'Éducation. Université Laval, 2000.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações de variáveis**. IN: **As idéias da álgebra**. Organizadores: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

VASCONCELOS, E.C. **Mapeamentos de trabalho apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática sobre Álgebra escolar**: Analisando a influências dos documentos curriculares nacionais. 2017. 64 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.