UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
MATEMÁTICA - LICENCIATURA

ERICK GLAYDSON DA SILVA

ARITMÉTICA NO JOGO DE XADREZ:
Possibilidades de discussão em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental

Caruaru
2023

ERICK GLAYDSON DA SILVA

ARITMÉTICA NO JOGO DE XADREZ:
Possibilidades de discussão em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

Caruaru
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Erick Glaydson da.
Aritmética no Jogo de Xadrez: Possibilidades de discussão em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental / Erick Glaydson da Silva. - Caruaru, 2023.
57p : il., tab.

Orientador(a): Cristiane de Arimatéa Rocha
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2023.
Inclui referências, apêndices, anexos.

1. Ensino de matemática. 2. Jogo de xadrez. 3. Aritmética. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

ERICK GLAYDSON DA SILVA

ARITMÉTICA NO JOGO DE XADREZ:
Possibilidades de discussão em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 25/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Profª.. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª Ronald de Santana da Silva (Examinador Externo)
Instituto Federal de Pernambuco

Profº. Me. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

A pesquisa em questão teve por objetivo identificar e analisar possibilidades no jogo de xadrez para o mobilizar de conceitos e estratégias aritméticas voltadas às operações fundamentais, por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Caruaru. Dessa forma, escolheu-se quatro turmas para a aplicação de um questionário no intuito de observar a desenvoltura dos alunos no jogo de xadrez. Nesse sentido, o caráter metodológico aqui atribuído foi devidamente adotado por meio de uma pesquisa participante com abordagem qualitativa e o relatório de experiência. A referida pesquisa buscou significar o que são jogos matemáticos escolares, porque o xadrez se torna um aliado ao ensino da matemática e, por fim, como utilizar esse recurso para o estudo da aritmética simples, se apoiando nas contribuições no ramo dos Campos Conceituais das Estruturas Aditivas. Assim, foi possível especular, analisar e concluir contribuições imprescindíveis para o ensino da matemática através do jogo de xadrez, além de diversos aprendizados no ramo pedagógico e psicológico, se apoiando no argumento da ludicidade. Por fim, os resultados após o período de aplicabilidade foram satisfatórios no ponto de vista pedagógico, observou-se que as práticas enxadrísticas contribuíram axiomaticamente a plena desenvoltura nos exercícios práticos assimilados em sala, visto que os procedimentos lógicos e aritméticos utilizados pelos alunos foram bem empregados, comumente, sendo associados a diversão.

Palavras-chave: Ensino de matemática; Jogo de xadrez; Aritmética.

ABSTRACT

The aim of this research was to identify and analyze possibilities in the game of chess for the mobilization of arithmetic concepts and strategies related to fundamental operations by 6th grade students at a public school in the municipality of Caruaru. In this way, four classes were chosen to administer a questionnaire in order to observe the students' resourcefulness in the game of chess. In this sense, the methodological character assigned here was duly adopted by means of participant research with a qualitative approach and an experience report. This research sought to understand what school mathematical games are, why chess becomes an ally in the teaching of mathematics and, finally, how to use this resource to study simple arithmetic, based on contributions from the Additive Structures Conceptual Fields. Thus, it was possible to speculate, analyze and conclude essential contributions to the teaching of mathematics through the game of chess, in addition to various pedagogical and psychological learnings, based on the argument of playfulness. Finally, the results after the application period were satisfactory from a pedagogical point of view. It was observed that the chess practices axiomatically contributed to full resourcefulness in the practical exercises assimilated in class, since the logical and arithmetic procedures used by the students were well used, often being associated with fun.

Keywords: Teaching mathematics; Chess game; Arithmetic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática, tanto no meio acadêmico quanto em contexto social, sempre foi uma temática à qual se exigiu uma dedicação especial. É importante analisar as principais falhas que prejudicam sua construção, assim como buscar inovar seus métodos de ensino e aprendizagem.

É um processo delicado, que exige do observador um olhar clínico, não só com o ambiente escolar, mas também com a crise que reside e, consequentemente, afeta diretamente o modo de se apresentar as disciplinas, não se restringindo apenas a uma metodologia engessada ou um ensino tradicional ultrapassado, mas falando diretamente às restrições que o próprio governo implica. Pois, como Ribeiro (1979, p. 23) diz "a crise educacional no Brasil da qual tanto se fala, não é uma crise, é um programa". Dito isso, se estabelece um compromisso muito além que profissional, por parte do professor, de arraigar, ou, no mínimo, sugerir meios aos quais se possa desdobrar, em primeiro plano, o gosto do aluno pela matemática e em segundo, garantir o aprendizado pleno e seguro dos assuntos estudados em sala, ao passo que se tenta esquivar dos padrões estabelecidos anteriormente.

Nesse sentido, dentro deste cenário caótico ao qual educadores são formados e desenvolvem seu senso crítico, ainda é possível driblar os padrões, dedicando uma atenção intrínseca a fim de enfatizar uma educação inclusiva e de qualidade para os alunos, uma vez que, conforme D'Ambrósio (2008, p. 10), a educação "se resume em atingirmos melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo e isso se manifesta no encontro de cada indivíduo com outro".

Visto isso, ao especular-se um ensino com a intenção de atingir essa meta, é importante que o plano de aula seja mais diversificado, prezando a educação de cada indivíduo com o outro. Desse modo, não significa apenas dinamizar o conteúdo, mas sim atrair a atenção do discente. Neste sentido, introduzir o jogo como recurso didático em sala não parece ser nenhuma ideia inovadora, no entanto, é visto como um método atualizado, modesto e eficaz.

Smole, Diniz e Milani (2007, p. 9) afirmam que no ensino e aprendizagem de matemática

> [...] o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático.

Dentro desse pensamento, começa-se a compreender a importância deste mecanismo adaptável, como uma proposta para novas aprendizagens, sejam diferentes conceitos, seja no âmbito do interesse ou até mesmo em conhecimentos práticos, o jogo como ferramenta didática se prova eficaz quando aplicado de maneira adequada.

Por intermédio dos benefícios cognitivos atribuídos nas 64 casas do tabuleiro de Xadrez, o enfoque neste jogo a fim de melhorar o jeito que aplica um novo conteúdo e o desenvolve, mas não de maneira randômica, nos serve para apreciar suas qualidades. Segundo Santos Júnior (2016, p. 31):

> Os trabalhos que relacionam o Jogo de Xadrez ao ensino de matemática seguem tendências parecidas. De um lado, pesquisas que trabalham o xadrez para formação de aspectos mais gerais, associados a resolução de problemas. De outro, trabalhos que visam explorar o xadrez como um suporte didático para o ensino de conteúdos de matemática.

O caminho, então, a partir daqui, uma vez que o jogo de xadrez foi estabelecido como um propício recurso, será de apresentar o conteúdo aritmético estudado empiricamente pelos autores Vergnaud (1996, *apud* SANTANA, 2012), Santos Junior (2016) com a premissa de esclarecer ao leitor uma prática sistemática do objeto estudado como ferramenta para ensino buscando relacionar diferentes situações das estruturas aditivas por meio do jogo, utilizando o conhecimento prévio do somatório das peças, o valor de cada peça, a vantagem e a estratégia a ser tomada para um final vantajoso.

Partindo disso, conforme Vergnaud (1996), o campo conceitual das estruturas aditivas abrange um conjunto de situações que envolvem uma ou várias operações de adição e subtração. Esse campo inclui também os conceitos e teoremas que permitem a análise dessas situações como problemas matemáticos, e é representado pelos símbolos que conferem significado ao processamento dessas situações. O aluno deve construir uma relação de métodos numa base sólida para lidar com novos desafios a partir do conhecimento adquirido nas primeiras experiências, ou seja, ele desenvolve as relações necessárias para enfrentar exercícios mais complexos com base nas suas experiências iniciais.

Ainda nessa linha de raciocínio, Santos Junior (2016) com seu método etnográfico, experimenta adaptar diversas conjunturas nessa área, além de outros conteúdos, inserindo no processo de um ano letivo de uma turma de 6º ano do estado de São Paulo e submete a turma a experiências com o jogo, executando uma análise fundamentada e, posteriormente, um relatório de campo capaz de estabelecer um panorama a respeito dos conhecimentos que podem ser adquiridos com tal ferramenta. De antemão, os assuntos referidos ao 6º ano partiram da suposição que os alunos não sabiam jogar o referido passatempo, sendo assim, o autor adapto os conteúdos previstos no plano de aula à medida que ensinava sobre o tabuleiro, o movimento de peças, o valor destas, o objetivo do jogo, etc.

Os conteúdos aplicados nesse contexto do experimento de Santos Junior (2016) foram: Linguagem Matemática, Geometria, plano cartesiano, situações-problema, lateralidade, horizontal, vertical e diagonal, posição relativa entre retas, paralelas e perpendiculares, composição de figuras na malha quadriculada (tabuleiro). O valor vinculado às peças lhes serviu para revisar o conteúdo de aritmética simples, o que proporcionou uma divertida interação entre os alunos e o professor, retomando o pensamento de educação descrito por D'Ambrósio (2008, p. 10).

No entanto, foi apresentado um ensino introdutório ao xadrez, dedicando parte do estudo desenvolvido a assuntos introdutórios, o que levou a adotar como problema da presente pesquisa: *Como o xadrez pode ser utilizado enquanto ferramenta de ensino de aritmética, em especial, estruturas aditivas, para alunos de 6º ano que já estão familiarizados com o jogo?*

Em experiências como estagiário nas escolas públicas do município, incluindo vários momentos nos quais houve a oportunidade de atuar como professor substituto, observou-se que um dos temas que mais se repetia no ato da aula e nos diálogos dentro da sala dos professores eram a falta de atenção dos alunos para se concentrar no conteúdo de matemática em questão. A princípio, os alunos até se concentravam no primeiro momento da aula, onde era apresentado o novo, o que quebrava, de certa forma, o paradigma da aula de matemática ser "chata" ou "difícil", no entanto, no segundo momento a diante a atenção destes se dissipava no recinto, seja pela conversação vigente ou o enfado decorrente da repetição ou o aprofundamento nos conceitos do assunto. Por esse motivo, procurou-se fugas dessa dispersão, como diálogos, dicas dos outros professores, estratégias, enfim, algo que proporcionasse a melhor imersão no conteúdo, principalmente em conceitos mais profundos, não só no âmbito escolar, mas que fosse possível praticar fora desse contexto, no sentido utilitário.

Em 2019, ao ministrar uma aula de matemática em uma Escola de Referência do Ensino Médio do mesmo município, depois de algumas anotações, leituras e observações, foi notado que uma estratégia que se destacava, de maneira axiomática, era de apoiar a aula com algum jogo matemático, ou em forma de atividade escolar, ou um para casa, às vezes até desenvolvendo os conceitos estudados ao passo que o jogo se prolongava com sucesso. Outra vez já em 2022, em uma turma de 6º ano do ensino fundamental, na atuação como estagiário pela prefeitura de Caruaru, encarregado pela professora de explicar os conceitos de alguns jogos incrementando elementos matemáticos, sucedeu, de fato, com grande êxito a aula. Observa-se que quando é falado de 'jogos matemáticos', há muito mais que uma proposta divertida envolvendo o tema, além disso insinua-se o elemento da competitividade, do desafio, a busca pela resposta, trabalho em equipe, respeito de regras, compromisso e, acima de tudo, como elemento inerente ao qual se resumia a motivação à atenção dos jogadores. 'Bingo!'

O pesquisador começou a jogar Xadrez com 8 anos de idade, quando seu pai entrou em casa com o primeiro computador em mãos, então, ainda sem muita ideia do que fazer, foi aberto a aba "jogos" onde o jovem autor se deparou com o Chess Titãs. A experiência foi perfeita; ele se divertia enquanto aprendia novas estratégias, aberturas, golpes no meio jogo, valor das peças, regras, táticas e finais, guerra de peões e, etc. A relação que fez com a matemática, essa área que sempre simpatizou, foi instantânea, aplicou vários conceitos aritméticos e funcionou. Com o passar dos anos, participou de alguns campeonatos, se interessou pelo mundo enxadrista e teve a maravilhosa oportunidade de ensinar a alguns alunos o aprazível jogo das 64 casas. Sua primeira experiência no contexto escolar foi nas aulas de educação física, onde teve uma partida complexa com o professor, da qual suscitou-se diversas indagações a respeito do valor das pedras e a soma de seus pontos, como, por exemplo, '*Como se pode melhorar a compreensão do valor das peças para alunos iniciantes, com o auxílio de conceitos aritméticos?', 'Como se pode prever os próximos lances de cavalo se apoiando na ideia de paridade*?', entre outras.

Quando entrou na UFPE procurou se familiarizar com o tema de jogos educacionais, o qual sempre o interessou, principalmente no curso de matemática, foi quando conheceu o LEMAPE (Laboratório de Ensino de Matemática do Agreste Pernambucano – Professor Ricardo Oliveira) e os ótimos professores que se propunham a pensar sobre o mesmo assunto, ministrar aulas, minicursos e outros projetos dentro do tema. Pois então, conversou com quem é hoje sua orientadora sobre o interesse no universo enxadrista e o projeto culminou.

Este estudo também se beneficia do aporte teórico do Modelo de Análise Didática dos Erros (MADE), delineado por Torre (2007). O MADE tem como objetivo a identificação das principais dimensões e categorias relacionadas aos erros. O pesquisador teve a oportunidade de aprofundar esse processo durante sua participação como monitor na disciplina de Avaliação da Aprendizagem. A Profa. Dra. Kátia Cunha proporcionou um ambiente enriquecedor, fornecendo recursos e materiais abrangentes que permitiam compreender e adaptar, diante de diversas situações, os erros presentes em questões relacionadas ao ensino fundamental.

Em sua função como monitor, foi conduzido a examinar uma variedade de materiais relacionados ao estudo dos erros, que inclui desde a abordagem de Torre (2007) até as contribuições de Cunha (2021). Essa imersão no conteúdo lhe capacitou a analisar exercícios sob uma perspectiva menos convencional, porém bastante significativa, pois, como destacou Cunha (2021, p.1), "O erro é a realidade mais contundente e menos estudada nos eventos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem".

Com base nisso, dedica-se, aqui, uma vez entendido pelo leitor o Xadrez como mecanismo de conhecimentos múltiplos e recurso didático que auxilia o professor na sua prática docente, apresentar o porquê desse jogo ser um potencial aliado no aprendizado matemático, mais especificamente para alunos do 6º ano. Com o primordial intuito de servir ao leitor o condimento de satisfação na prática pedagógica, viabilizando uma irrefutável familiarização com o exercício de jogos intelectuais como auxílio do ensino da Matemática.

Para discutir a problemática delinearam-se os seguintes objetivos

1.1 OBJETIVO GERAL.

Analisar potencialidades no jogo de xadrez como recurso para discussão de aritmética, em especial, problemas de estruturas aditivas, para turmas do 6º ano do ensino fundamental.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar o desempenho de estudantes familiarizados com o jogo de xadrez em atividades que relacionem a aritmética do jogo com problemas de estruturas aditivas.
- Apresentar acertos e erros dos estudantes com relação ao cálculo numérico em atividades que relacionem a aritmética do jogo com problemas de estruturas aditivas.
- Apresentar acertos e erros dos estudantes com relação ao cálculo relacional em atividades que relacionem a aritmética do jogo com problemas de estruturas aditivas.
- Categorizar os erros observados segundo o Modelo de Analise Didática do Erro de Torre (2007)

A fim de auxiliar na discussão da temática a presente monografia está dividida em quatro momentos.

No capítulo 2, “O Jogo de Xadrez em Perspectiva Pedagógica”, foram feitas considerações sobre o jogo de xadrez como recurso didático e jogo escolar, em seguida adentrou-se no campo conceitual das estruturas aditivas, relacionando de forma direta com a prática enxadrista, desta forma, mostrando, por meio de referência teórica, a ligação entre o jogo de xadrez a aprendizagem matemática.

Depois, no capítulo 3, “Organizando os procedimentos metodológicos”, está organizada a metodologia utilizada, apresentando os participantes da pesquisa, o ambiente onde foi desenvolvida e as situações pertinentes relatadas pelo pesquisador no ato da aplicação do questionário.

No capítulo 4, “Análise e Discussão dos Resultados”, foi classificado e analisado as respostas de cada aluno participante ativo na pesquisa, constatando seus acertos e erros e categorizando cada erro cometido por questão.

Por fim, será apresentada as considerações finais do trabalho de pesquisa, bem como as sugestões para o desenvolvimento de outras pesquisas para continuação da discussão.

2 O JOGO DE XADREZ EM PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

Busca-se, neste capítulo, apresentar o jogo de tabuleiro como um aliado recurso didático, apresentando um pouco de suas origens e reflexões a respeito do princípio investigativo e do saber matemático. Posteriormente, o xadrez será abordado como um mecanismo onde conceitos de raciocínio lógico e conhecimento específicos se evidenciam em seu fundamento, respondendo ao questionamento válido “porque o Xadrez”?

Por fim, na especificação do estudo, o modelo matemático será analisado no campo conceitual das estruturas aditivas, onde situações, recursos e possibilidades serão relacionadas, a fim de atribuir valor ao exercício da aritmética enquanto conhecimento específico para o ato enxadrístico.

2.1 O JOGO DE TABULEIRO COMO RECURSO DIDÁTICO

Os jogos de tabuleiro sempre andaram e, consequentemente, evoluíram juntos com a matemática auxiliando-a no contexto de demonstrar teoremas, equacionar situações específicas ou diversas, transformando teoria em prática de maneira mais lúdica e interativa visando também o sentido cognitivo, e, por esse último motivo, baseado nas afirmações de Smole, Diniz e Milani (2007, p. 9):

> O trabalho com jogos[...] quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado *raciocínio lógico*.

De fato, o ensino da matemática, desde seus primórdios, progrediu de mãos dadas com os jogos de tabuleiro com seus modelos distintos e táticas que se mobilizam e mudam conforme as variadas designações. Isso se evidencia quando voltamos a sete mil anos atrás quando o primeiro jogo de tabuleiro foi criado na África, no berço da matemática. O Mancala, segundo Pinheiro (2021, p.7)

> [...]é um nome amplo dado a muitos jogos matemáticos de raciocínio lógico cultivados no continente africano, que guardam entre si diversas semelhanças. Dependendo da região que o jogo é realizado ele recebe um nome diferente; são mais de 200 designações.

Criado em vertentes egípcias, traz consigo o exercício no campo da progressão aritmética, foi atribuído à ideia de colheita e hoje guia professores em projetos de extensão a fim de atribuir reflexão histórica e didática.

A partir daqui, cabe na aplicação dos jogos o compromisso do ensino da diversão, pois a premissa que induz o aluno ao tabuleiro é a diversão e o desafio que o proporcionará em coletivo. O senso investigativo aflora. Uma vez que o aluno é desafiado a um problema e não obrigado a resolvê-lo, o sentido muda, o interesse atua, o senso investigativo se aguça e então ele é levado para o desafio com a ideia de que aquilo será estimulante, o ato de investigar por investigar, seja tanto em sentido complexo como eventos simples. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.32):

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos *interessam*, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

Ainda neste sentido, a interação coletiva germina quando se intercala o ato da investigação recreativa com a prática no sentido da diversão, o professor, por sua vez, tem a oportunidade de se relacionar com o seu aluno não como autoridade, mas um desafiante, alguém que o aluno veja de igual para igual, onde ambos vão em busca da mesma resposta, no sentido holístico do jogo escolar (SMOLE, MILANI, DINIZ, 2007).

Além disso, se evidencia o sujeito mais inserido no estudo do erro, pelo que se anuncia, dando espaço aos relevantes estudos sobre O Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem. Com base nisso, vê-se no decorrer de um jogo de tabuleiro a busca pelo êxito da partida, na qual o jogador relaciona e deduz os melhores métodos a serem executados, dando espaço para o aprendizado, a prática de suas hipóteses dentro do erro. O que o autor afirma, e pode ser evidenciado durante o decorrer de uma partida, é que o erro é visto de maneira natural, sem receio, sem desvio, é encarado de frente, comumente. Aqui o erro faz parte do processo, como um conceito inerente do objeto estudado ligados a ideia do Construtivismo, “onde o erro não é tratado como uma questão reduzida ao resultado da operação (se acertou ou errou), mas sim de invenção e de descoberta”, conforme indicam Nogaro e Granella (2004, p. 5).

Nessa mesma perspectiva, percebemos que os jogos de tabuleiro podem ser uma ferramenta pedagógica valiosa para analisar as falhas dos alunos em situações específicas. Imagine que o professor, como parte de sua abordagem educacional, incorpora um exercício envolvendo um jogo de tabuleiro e, ao fazê-lo, busca entender como os alunos interpretam as instruções de cada questão e, nesse processo, é viável identificar o tipo de erro que os alunos cometem para identificar quando é preciso intervenção por parte do docente. Quando estamos falando de analisar o erro do aluno, Torre (2007, p. 109) especifica que:

> Estamos nos referindo aos erros que ocorrem em torno da aprendizagem intuitiva, isto é, nos “deveres” de casa ou nas tarefas de aula, nas perguntas que o professor faz como

> *feedback* para sua explicação, em provas, e onde ocorra uma situação de aprendizagem. O modelo pode ser utilizado pelo professor de educação infantil, no ensino da leitura-escrita ou das operações aritméticas[...].

Quando o autor sugere o modelo para se basear, se refere ao MADE (Modelo de Análise Didática do Erro), este modelo atua na correção de exercícios diversos, como já acentuado, permitindo melhor clareza do erro através de ideogramas ou a representação de suas relações. Com base nisso, pode-se categorizar três parâmetros ou momentos do processo: Entrada, Organização e Execução (TORRE, 2007).

Para refinar essa análise dentro destes três parâmetros, é apresentado três planos que estão contidos em cada um dos momentos categorizados pelo autor. No Quadro 1, está descrito como esses subconjuntos referentes aos tipos de erro podem ser classificados:

Quadro 1 - Dimensões e Categorias do MADE

	PARÂMETROS		
	I – ENTRADA	**II – ORGANIZAÇÃO**	**III - EXECUÇÃO**
Dimensões	Está ligado a interpretação na leitura inicial da questão, podendo existir um desequilíbrio entre a informação que dispõe e o problema que tem de resolver.	Refere-se ao desenvolvimento da questão. Ocorre quando o sujeito trata de mudar a informação de que dispõe para dar com a resposta que lhe é pedida.	Corresponde aos equívocos. Tem lugar quando o sujeito arrisca caminhos novos, procedimentos não familiares e age de maneira pouco reflexiva.
Categorias	**Intenção** – Quando existe confusão ou ambiguidade de metas sobre o que se pede, transformando-se, facilmente, em desequilíbrio e sendo levado ao erro. **Percepção** – Resulta da insuficiente percepção ou análise do problema. **Compreensão** – A incompreensão, o não domínio do objeto (linguagem) leva, antes ou depois, ao erro, causando repercussão no desenvolvimento dos processos cognitivos.	**Análise e Síntese** - Para organizar as informações é preciso ter claro algum critério. O erro acontece quando o sujeito não identifica as características relevantes e desconhece os passos a seguir para chegar à solução. **Ordenação** – Deriva da inadequada relação ou sequenciação da informação. Geralmente, associa-se a essa categoria um erro conceitual. Conexão – O erro provém de transferir as estratégias conhecidas para o problema atual.	**Mecânico** – Costuma-se tratar de pequenos detalhes. Tem lugar no processo de codificação. E apresenta menos relevância. **Operacional** – Ocorre ao se operar ou executar um procedimento. As distrações levam a confundir a ordem ou passos de um processo. **Estratégico** – O sujeito não segue o processo que lhe é pedido e equivoca-se na utilização da estratégia adequada para a resolução de um problema.

Fonte: Torre (2007, *apud*, Cunha, 2021)

O MADE soluciona a problemática de onde o aluno está estacionado, se ele entende o que o comanda da questão lhe pede, se tem a capacidade de relacionar e cuidar dos dados apresentados e se, a partir desse ponto, tem o domínio para executar as operações necessárias. Nessa ótica, Torre (2007) argumenta que ao lidar com o erro do discente, o professor corrige e indica a solução correta, porém se perguntar porque foi cometido determinado erro, ou o tipo de erro cometido lhe proporcionará muito mais informações do que uma simples correção. Pois, imagine que um(a) professor(a) explica à turma os mecanismos da adição e, logo em seguida, propõe um exercício de fixação. Após a aplicação decide corrigir as atividades e se depara com a seguinte resposta: 1 + 4 = 14. O que pensar? E se a resposta for: 1 + 4 = 4, o estudante pode ter multiplicado o quatro por um ou simplesmente ignorado o primeiro número e repetido o segundo.

Dessa forma, percebe-se com clareza que a análise do erro consiste em um diagnóstico completo, ou, pelo menos, mais eficiente que uma mera correção. Esse processo se torna mais eficiente quando é proposto através de exercícios contextualizados, há o exemplo no jogo de tabuleiro, os quais exigirão do aluno o domínio da argumentação, o que levará a respostas mais complexas, pondo na mão do docente um material mais amplo de análise no qual poderá se debruçar e averiguar metodicamente os processos de compreensão, organização da informação e sua execução. Constituirá, inclusive, nas análises realizadas nesta monografia, exercícios que se apoiarão no MADE como método de correção.

Outro ponto específico que se nota nos jogos de tabuleiro é que seu desempenho em mesas se torna mais satisfatório que jogos de movimento, não só por ser estimulado justo sua intenção investigativa, como já citado, mas também por ter uma melhor performance no ato de raciocinar. Os alunos dispõem de mais tempo e conforto para avaliar no intuito de executar o próximo movimento, isso se prova ao jogarmos uma partida do Mancala, por exemplo, onde quem conseguir montar a estratégia na modalidade Oware consegue notar que recolher as sementes da terceira cava é a melhor jogada no primeiro momento do jogo.

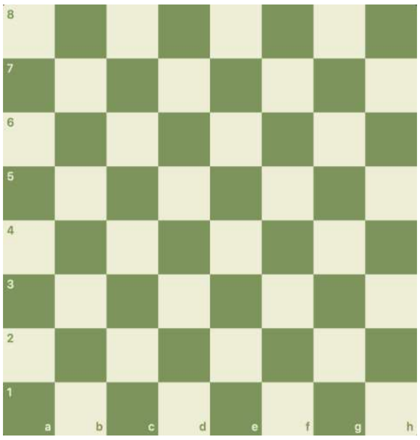
Assim é possível notar suas contribuições quando atribuímos este recurso como meio didático para ensinar conceitos e habilidades matemáticas, pois, seu tempo de raciocínio, sua abrangente causa de oportunidades que englobam assuntos diversos e em perfeita concordância uns com os outros torna o jogo de tabuleiro um meio prático imprescindível na demonstração, desenvolvimento e prática em variadas disciplinas, segundo Smole, Milani e Diniz (2007).

2.2 O JOGO DE XADREZ COMO JOGO ESCOLAR

O Xadrez surgiu no século VII, na Índia, conforme é descrito por Castro (1994), com a ascensão política de reinados vigentes da época, o nome, inicialmente, era Chaturanga, que tem como tradução literal “os quatro elementos de um exercício”, em sânscrito. O jogo se propagou por todo o mundo, indo desde a China, sofrendo alterações, até a Pérsia, onde, por sua vez, teve a primeira modificação no seu nome. Foi a palavra persa Shah(Rei), que deu origem ao nome Shahdrez (posteriormente sendo alterado novamente, para Xadrez). É fato sobre suas diversas mudanças ao longo da história, justo por ser um modelo matemático tão antigo, por exemplo, as peças dispostas na primeira e oitava fileira do xadrez são permutadas entre elas com quarenta mil trezentas e vinte configurações possíveis, classificando um novo modelo com uma nova estratégia, novas táticas, regras e combinações de jogadas em cada situação distinta. No entanto, o modelo mais usual atualmente (modo clássico) foi formulado no sudoeste da Europa, na segunda metade do século XV, chegando ao Brasil nas caravelas Portuguesas como passatempo dos tripulantes. Este, por consequência, será o foco do estudo elaborado, onde será dedicado às concepções posteriores.

O Jogo de Xadrez é constituído por um tabuleiro que se estende da coluna “a” até a “h”, observado que a representação das colunas é sempre por letras minúsculas e as peças são descritas por suas iniciais com letras maiúsculas. Além disso, se estende igualmente por linhas, cruzando desde a linha 1 até a 8, formando um adequado plano cartesiano de sessenta e quatro casas pretas e brancas, tornando, assim, uma malha quadriculada como pode-se observar na figura 1.

Figura 1 – Tabuleiro de Xadrez



Fonte: Chess.com.

São distribuídas trinta e duas peças para os jogadores (observado que o xadrez é um jogo apenas para dois participantes), as quais dezesseis são pretas e dezesseis brancas, atribuindo um número par e de peças equivalentes para cada participante, são elas: Duas torres, dois cavalos, dois bispos, oito peões, uma Dama e um Rei, para cada. Os jogadores organizam o tabuleiro de maneira que as brancas ocupem as linhas 1 e 2 e as pretas as linhas 7 e 8, mas não de maneira arbitrária. A sequência para a formação inicial do jogo está descrita abaixo de forma algébrica.

- Torres brancas em a1 e h1;
- Torres pretas em a8 e h8;
- Cavalos brancos em b1 e g1;
- Cavalos pretos em b8 e g8;
- Bispos brancos em c1 e f1;
- Bispos pretos em c8 e f8;
- Rainha branca em d1;
- Rainha preta em d8;
- Rei branco em e1;
- Rei preto em e8;
- Peões brancos completam a linha 2;
- Peões pretos completam a linha 7.

Na figura 2 está representada essas disposições no tabuleiro de xadrez, apresentando uma representação da forma algébrica.

Figura 2 – Tabuleiro com Formação Inicial das Peças

Fonte: Chess.com

Os professores podem utilizar esse recurso para discutir essas representações da forma algébrica, propondo a inserção no jogo de momentos que localizem determinadas posições, ou indiquem as jogadas que podem ser realizadas. Também é necessário propiciar ao estudante esse caráter crítico/investigativo de variadas formas. Conseguimos satisfazer essa procura ao nos depararmos com o jogo escolar, mais especificamente no ramo das 64 casas nas quais as batalhas são travadas. Então, eis que surge um questionamento válido, retirado das indagações a respeito da boa reputação de diversos outros como o Mancala, o Shisima, o próprio jogo de dominó, o Ludo, a famosa torre de Hanói, o Sudoku e o vasto leque de jogos africanos que 'põe em xeque' a necessidade de estratégias, raciocínio e conhecimentos característicos. A partir daqui cabe o justo questionamento "Por que o Xadrez?".

Conforme Costa (2018), o xadrez atribui significado ao exercício da matemática podendo ser relacionado pelos aspectos cognitivos que podem ser desenvolvidos por meio do hábito de se jogar o xadrez e por aspectos do jogo que podem ser utilizados para o ensino e aprendizagem de conteúdos específicos da matemática.

Com base nesta premissa, a desenvoltura cognitiva do jogador, como explicitado anteriormente, parte de sua prática, sua rotina em expandir situações, estratégias, jogadas ensaiadas e tática. No entanto, é coerente perguntar-se quais conhecimentos específicos pode-se atribuir ao conhecimento e exercício enxadrístico, uma vez que o tabuleiro soa limitado, as peças compõem movimentos padronizados e a criatividade se soma a este complô, voltando a maior parte da atenção do pesquisador para essa desenvoltura lógica e estimulante.

Conseguimos resposta quando entramos em estudos diversos que relacionam o mecanismo enxadrístico extenso, dando margem a o paradigma de que a matemática está em todo lugar e serve ao benefício da multifuncionalidade utilizando várias áreas promissoras e de maneira intuitiva juntas, conectas, estruturadas no mesmo campo de guerras onde o intelecto e a base de dados adquiridas corresponde à uma perfeição de sequência de lances que justifica a maestria desde Kasparov à Carlsen, os dois ultimos campeões mundiais, respectivamente.

Os assuntos ligados à área da matemática são descritos no quadro 2, justificando nossas indagações iniciais (podendo haver ainda mais conhecimentos incumbidos à prática, não sendo o foco deste trabalho):

A capacidade de um desafiante para dominar detalhes exorbitantes de conceitos específicos de matemática, dominar e aplicar o conhecimento no ato de uma partida diante de seu oponente configura uma ação de alta performance, dando origens a competições em clubes e torneios internacionais, conquistando o primeiro campeão mundial Wilhelm Steinitz, por volta do século XIX. Apesar da Federação Internacional de Xadrez (FIDE) e a Federação Internacional de Xadrez Postal já reunir os melhores enxadristas do mundo em eventos por todo o mundo desde o século XX, o Xadrez só foi reconhecido como esporte intelectual pelo Comitê Olímpico Internacional em 2001.

Quadro 2– Utilização do xadrez em conteúdos relacionados a área de exatas

Autor/A	Conteúdos	Como foi trabalhado
Alves (2018)	Lateralidade; Adição; Subtração; Divisão; Multiplicação; Figuras geométricas do quadrado e do retângulo; Fração e simplificação de fração; Geometria analítica.	A autora desenvolveu um livro-jogo para trabalhar conteúdos matemáticos utilizando como recurso o xadrez e seus elementos (peças, tabuleiro e história).
Bueno Junior (2017)	Noção de fração; Equação; Noção de função e par ordenado; Princípio fundamental da contagem.	Desenvolveu planos de aulas para trabalhar conceitos matemáticos utilizando o xadrez (tabuleiro, movimento e projeções dos movimentos das peças, valores das peças, jogadas), para o desenvolvimento das atividades propostas o autor utilizou atividades presentes em uma apostila que havia sido elaborada anteriormente pelo autor.
Costa (2018)	Coordenadas cartesianas; Figuras geométricas; Noção de diagonal e reta; Área.	O autor demonstrou conteúdos matemáticos que podem ser abordados utilizando o tabuleiro de xadrez e o movimento de suas peças, demonstrando como estes conteúdos podem ser trabalhados em questões de provas.
Matos (2017)	Conservação de energia; Entropia; Gravidade.	Utilizou três variantes do jogo de xadrez que faziam analogias relacionadas aos conceitos trabalhados, cada variante trabalhava um determinado conceito.
Nascimento (2011)	Gráfico; Plano Cartesiano.	Utilizou o xadrez de forma a articular o sistema de anotação de uma partida de xadrez (Sistema algébrico) com os conteúdos trabalhados. Assim, houve a utilização do tabuleiro de xadrez para simular um eixo de coordenadas para auxiliar na compreensão do plano cartesiano e relacionar informações contidas no plano.
Santos Junior (2016)	Geometria; Plano cartesiano, conceito de par ordenado e localização de ponto; Situações-problema; Lateralidade, horizontal, vertical e diagonal; Posição relativa entre retas, paralelas e perpendiculares; Composição de figuras na malha quadriculada (tabuleiro).	O autor articulou os movimentos das peças e as projeções destes movimentos, valores das peças, localização das peças no tabuleiro com os conteúdos trabalhados.
Silva (2016)	Função Exponencial.	Utilizou a lenda do Rei Ladava para introduzir o conceito relacionado à função exponencial.

Soares (2016)	Área; Vetores.	Utilizou o tabuleiro de xadrez para desenvolver trabalhos relacionados à área e trabalhou com conceitos de vetores por meio da visualização gráfica de movimentos de peças de xadrez.

Fonte: Silva e Corrêa (2021. p.29)

Já no ramo educacional, o esporte como bem situado em diversas atividades em aulas de educação física tem o potencial cabal também como recurso didático nas aulas de matemática, defronte, contra o paradigma da aula conteudista e generalizada, somando ao técnico, enquanto desvaloriza o sentido crítico e analítico do estudante, seguindo o pensamento de Santos Junior (2016, p. 20):

> [...] no contexto da sala de aula, muitos desafios ainda precisam ser superados no ensino de matemática, principalmente aqueles ligados ao chamado "ensino tradicional", no qual o papel do professor é transmitir os conhecimentos e, dos alunos, memorizá-los e aplicá-los, ou seja, atribui um papel passivo aos sujeitos.

O comprometimento do professor deve ser de repassar o saber de maneira que suscite ao aluno a curiosidade de adquiri-lo, novamente se apoiando à matemática em seu caráter investigativo e especulativo como exemplo, sendo compreendida, segundo D'Ambrósio (1990), "como a arte ou técnica de explicar e conhecer". Com base nessa retórica, dar-se o embasamento para o Jogo de xadrez como jogo escolar, corroborando com o argumento didático do recurso, de forma a precipitar barreiras que não faça do xadrez apenas um mecanismo para defender assuntos introdutórios, tanto nos termos do jogo quanto em conceitos específicos, mas sim comportando-se efetivamente como meio prático de *exercitar* procedimentos restritos e avançados em assuntos de natureza acadêmica no ramo das exatas.

2.3 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO JOGO DE XADREZ

Retomando o pensamento de D'Ambrósio (2008) sobre a conjectura da educação como fonte de conhecimento enriquecida na interação de um com o outro, é possível satisfazer esta colocação ao se voltar para as pesquisas remanescentes de Linhares e Queiroz (2017, p.14), quando compreendem os jogos matemáticos como "ferramentas relevantes no processo de aprendizagem em matemática. Principalmente nas operações aritméticas, pois além de despertar o interesse pelos conhecimentos matemáticos, promove a interação entre o aluno e o professor, como também entre os próprios alunos". Seguindo tal compreensão, a relação da competitividade se intenciona ao colocar este princípio em estudo, principalmente ao decidir aplicar os argumentos subsequentes sob esta ideia.

A aritmética acontece quando se inicia assuntos primários, com o objetivo de relacionar componentes a outros de maneira intuitiva. Segundo Vergnaud (1996, *apud* SANTANA, 2012), o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas concerne, de maneira simultânea, o grupo no qual compreende situações de adição e/ou subtração ou até uma combinação dessas operações, com significados variados, e a sistematização composta por conceitos e teoremas, permitindo uma análise qualitativa. Baseado em relações ternárias, o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas se distribui em três elementos fundamentais: estados, transformações e relações, sendo especificados como: composição, transformação e comparação. Dentre estes últimos há a composição de duas transformações, a transformação de uma relação e composição de duas relações (SANTANA, 2012).

No intuito de perceber essas atividades práticas como ferramenta inerente quando se é posto aprendizagem e ensino como estudo de interesse ao interpretar conceitos sem reduzi-lo a uma definição, Vergnaud (1990, p. 1) afirma que:

> É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Esse processo de elaboração pragmática é essencial para a psicologia e para a didática, como também, aliás, para a história das ciências.

Através dessa ideia a qual o conceito da matéria adquire sentido ao receptor, consegue-se perceber algo semelhante quando o aluno se depara com uma questão corriqueira e faz a seguinte pergunta ao professor: Professor, é de menos, ou demais?

Essa relação e entendimento se constrói ao longo da vida, em diversas experiências que lhes põe a necessidade de refletir, isso se evidencia ao se consultar Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001, p. 22) que afirmam "[...] As crianças normalmente constroem um campo conceitual pela experiência na vida diária e na escola". Dessa forma, é necessária uma análise mais específica de seus entendimentos perante problemas aritméticos elementares. Aqui será levado em consideração recursos de correção para a análise desta pesquisa, se apoiando na afirmativa acerca do cálculo relacional e numérico, conforme o esclarecimento de Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001, p. 24):

> O cálculo numérico refere-se às operações usuais de adição, subtração, multiplicação, divisão, etc. O cálculo relacional refere-se às operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações.

Ou seja, quando se fala sobre cálculo numérico, refere-se a todas as operações necessárias para a obtenção da resposta final, seria o processo de execução da questão, onde será medida a capacidade do aluno em operar os números e suas respectivas manobras aritméticas. Já, se tratando do cálculo relacional, se estabelece uma associação, por meio do estudante, de valores e tomada de decisão nos procedimentos necessários para manejar os devidos dados, com base na sua interpretação e noção de mundo adquiridas ao longo das etapas educacionais, as quais lhes auxiliarão nesse processo.

Supondo uma situação em que o professor encarrega o aluno de responder a seguinte questão:

João tinha em seu estojo algumas bolas de gude, ao sair da escola decidiu comprar outras 6, ficando com 14 bolas de gude no estojo. Quantas bolas de gude João tinha antes da compra?

Para essa questão espera-se do aluno a seguinte dedução (cálculo relacional):

Algumas bolas de gude mais as 6 bolas de gude compradas correspondem a 14, no total. Se isso é verdade, é possível encontrar quantas bolas haviam inicialmente se for tirada do total no estojo a quantidade que João comprou (6 bolas). Dessa forma restará apenas a quantidade que ele tinha guardado inicialmente. Ou seja, basta realizar uma conta de subtração do total pela quantidade comprada.

Já quando se é executado o procedimento aritmético (cálculo numérico), espera-se do aluno tal procedimento:

$$\mathbf{14 - 6 = 8}$$

Com isso, conclui-se que o aluno dominou a questão nas duas situações. Cabe, inclusive, um adendo a respeito do cálculo relacional. Não é esperado que o aluno argumente de maneira tão lúcida seus argumentos para evidenciar seu entendimento, a simples organização das informações, ou até mesmo anotações e grifos ao longo do texto podem indicar esse cálculo que o aluno realiza, isso se dar pois essas conexões atuam no seu raciocínio e nem sempre será externo, tudo que se pode esperar são esses indícios esclarecidos anteriormente.

Ainda no sentindo das Estruturas Aditivas, é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma classificação semelhante envolvendo o campo aditivo com uma premissa mais aplicável, trabalhados no 1º e 2º ciclos no Ensino Fundamental, como mostrado no quadro 3:

Quadro 3 - Utilização das estruturas aditivas conforme Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997)

Grupo	**Nomenclatura**	**Significação**	**Exemplo**
1º grupo	Combinação	Combinam dois estados para se obter um terceiro. Ação de juntar.	Em uma classe há 15 meninos e 13 meninas. Quantas crianças há nessa classe? Em uma classe há alguns meninos e 13 meninas, no total são 28 alunos. Quantos meninos há nessa classe?
2º grupo	Transformação	Transformação de um estado, podendo ser negativa ou positiva.	Emanoel tinha 22 figurinhas. Ele ganhou 14 figurinhas num jogo. Quantas figurinhas ele tem agora? (transformação positiva). Mariana tinha 35 figurinhas. Ela perdeu 16 em um jogo. Quantas figurinhas ela tem agora? (transformação negativa). Joaquim tinha algumas figurinhas, ganhou 18 no jogo e ficou com 26. Quantas figurinhas ele possuía? (transformação positiva). No início de um jogo, Taís tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ela perdeu 15 e terminou o jogo com 7 figurinhas. Quantas figurinhas ela possuía no início do jogo? (transformação negativa).
3º grupo	Comparação	As quantidades são comparadas para obter um resultado.	No final de um jogo, Pedro e João conferiram suas figurinhas. Pedro tinha 40 e João tinha 8 a mais que Pedro. Quantas eram as figurinhas de João?
4º grupo	Combinação de Transformações (positiva ou negativa).	Ocorre mais uma transformação sucessiva, resultando uma combinação de transformações.	No início de uma partida, Roberto tinha um determinado número de pontos. No decorrer do jogo ele ganhou 5 pontos e, em seguida, ganhou 20 pontos. O que aconteceu com seus pontos no final do jogo?

Fonte: Adaptado pelas autoras segundo os PCN de matemática (BRASIL, 1997).

Esse projeto dedicado ao ramo aditivo se materializa no Xadrez ao se decifrar situações variadas onde a competência descrita anteriormente é exigida, transpassando o caráter numérico das peças. No primeiro ponto, aborda-se-á o valor numérico das peças compactuando com a comparação de peões, já em segundo momento será apresentado exemplos que justifique a utilização da comparação, a transformação e a combinação nos termos das Estruturas Aditivas, cabendo assim deduzir qual dos oponentes está em vantagem numérica.

Cabe por agora o intuito de inspirar o jogador(aluno) a não somente desenvolver a prática enxadrísticas utilizando conceitos matemáticos inerentes, mas também apresentar o segundo ponto de vista que é ramificado e desenvolvido nesses dois pontos anteriores: o argumento de que é possível exercitar práticas aritméticas ao passo que situações são apresentadas, utilizando-se deste recurso didático para apoiar o professor em sala ou até mesmo desempenhar a função de exercício prático sem intermediários, uma vez que o princípio aditivo é conjugado e detalhado a esses alunos. Uma vez que o leitor já se encontra sanado a respeito da formatação do tabuleiro e a distribuição das peças sobre ele, cabe agora uma didática a respeito do valor destas, salientando que as informações a seguir são de extrema importância para o desenvolver do trabalho e a aplicação das atividades em campo.

Segundo o site Chess.com, o maior site em referência em Xadrez do mundo, os valores das peças estão relacionados diretamente com a força de cada uma delas, assim, sucede a informação:

- Cada peão vale um ponto;
- O cavalo ou o bispo valem três pontos, cada;
- A torre vale cinco pontos;
- A dama vale nove pontos;
- O rei é a única peça que não tem valor estimado em pontos, uma vez que não é possível capturá-lo.

Apresentada as informações, são necessárias algumas observações para o decorrer do argumento:

I. Como o peão corresponde a um ponto, vamos trocar a ideia de pontos por peão, ou seja, o cavalo e o bispo valem três peões, a torre vale cinco peões e assim sucessivamente. Dessa forma, trocamos a retórica de <u>Vantagem Numérica</u> por <u>Vantagem material</u>.

II. A partir daqui, quando for citado a ideia de <u>troca de material</u>, isso significa que alguma peça branca foi capturada por qualquer outra peça preta e alguma peça preta, em sequência, foi captura por qualquer outra peça branca, assim, deduz-se que uma peça branca e uma peça preta saíram do tabuleiro uma depois da outra, isso quer dizer que, a peça branca que foi captura inicialmente foi <u>trocada</u> por uma peça preta, esta última que saiu do jogo logo em seguida (como uma espécie de acordo indireto entre os jogadores).

Agora, com as especificidades passadas, propõe-se alguns exemplos:

A. Imagine que uma torre preta foi trocada por um bispo branco.

Neste caso, a vantagem material será do adversário que perdeu menos peões nessa troca. Ora, se a torre vale cinco peões e o bispo corresponde a três peões, fazemos a seguinte soma:

Para o adversário de brancas: (-3) + 5 = 2; Para o adversário de pretas: (-5) + 3 = (-2).

Por essa operação de transformação, conclui-se que as pretas perderam dois peões enquanto as brancas ganharam esses mesmos dois peões, ficando assim, a vantagem material a favor das brancas.

B. Imagine que em uma determinada partida, a quantidade de peças no tabuleiro se configura da seguinte forma:

- Um peão preto e seis peões brancos;
- Uma torre preta e duas torres brancas;
- Dois bispos pretos e nenhum bispo branco;
- Nenhum cavalo preto e dois cavalos brancos;
- Uma dama preta e nenhuma branca;
- Um rei para cada jogador. Quem tem a vantagem material?

Bem, podemos fazer nessa situação uma operação combinatória de maneira a somar todos os peões e verificar qual oponente fica com mais:

Pretas:

- (peões + torre + bispo + cavalo + dama + rei = valor material)

  1 + 5 + 6 + 9 + 0 = 21.

Brancas:

- 6 + 10 + 6 + 0 = 22.

Então, completado o cálculo, conclui-se que as brancas têm um peão de vantagem, dando-lhe a vantagem material.

C. No final de uma partida disputada, os jogadores acordaram empate, no entanto, os jogadores resolveram contar suas peças e ver quem ficou com a vantagem material, dando o seguinte resultado: vinte peões para as pretas e cinco peões a menos para as brancas. Neste caso, qual peça as pretas tinham a mais no tabuleiro?

Para resolver essa questão, utilizaremos uma operação comparativa, relacionando a diferença de valores e relacionando com determinada peça. Ora, se as brancas têm cinco pontos a menos, quando olhamos a tabela dos valores, percebemos que a torre corresponde especificamente a esse valor, logo, deduz-se que as pretas tinham uma torre de vantagem.

D. No meio jogo de uma partida amistosa, o jogador de pretas tinha cinco peões de vantagem, no final, este mesmo jogador perdeu a partida com uma diferença de três peões do seu oponente. O que pode ter acontecido nessa partida?

Para esse impasse, há várias possibilidades que podem ter acontecido nesse meio jogo. Primeiro deve-se analisar quantos peões foram perdidos pelas pretas: se ele tinha cinco peões de vantagem e acabou o jogo com três peões a menos, significa dizer que ele perdeu oito peões de vantagem. Dado esse fato, vamos descrever as possibilidades de perda de material que correspondam a esse número:

- Perdeu oito peões inteiros; ou
- Perdeu três peões e uma torre; ou
- Perdeu cinco peões e um bispo/cavalo; ou
- Perdeu dois bispos/cavalos e dois peões; ou
- Perdeu uma torre e um bispo/cavalo.

Como conclusão, o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas pode ser relacionado aos conceitos enxadrísticos, como contexto, contribuindo para um exercício cognitivo por meio do jogador ao compelir ao seu jogo estratégias e situações que viabilize sua vantagem material, seja na abertura, no meio jogo e no final de uma partida indiscutivelmente pensada. Dado o argumento, começa-se a por em prática a ideia formada nessa parte através de sua aplicação em uma turma de 6º ano do ensino fundamental.

3 ORGANIZANDO OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho tem como base a realização do jogo de xadrez e conceitos no campo aritmético traçado a partir deste mecanismo adaptável com o primordial objetivo de diagnosticar, assim como investigar, as possibilidades de seu exercício enquanto ferramenta para ensaiar situações que envolvam o campo conceitual das estruturas aditivas. Tendo como foco, explicitar métodos e exemplos que facilitem o entendimento do aluno, se apoiando em vertentes como a resolução de problemas e a investigação matemática, as quais estão relacionadas entre si.

A abordagem adotada está atrelada a uma pesquisa participante de caráter qualitativo. Conforme Gil (1991), a pesquisa participante se caracteriza por trazer o pesquisador e os participantes para uma interação entre si, dessa forma, a relação dos atores envolvidos evidenciam tal conceito.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola municipal localizada na cidade de Caruaru do agreste de Pernambuco. Participaram alunos do 6º ano do ensino fundamental, totalizando 8 participantes da pesquisa no período da tarde. A amostra foi selecionada por adesão entre aqueles estudantes, que já estavam familiarizados com o xadrez, ou seja, tinham domínio sobre a movimentação das peças e noção sobre o valor destas. Estes serão identificados na amostra, respectivamente, como: aluno A, aluno B, aluno C, aluno D, aluno E, aluno F, aluno G e aluno H.

Foram utilizados 5 tabuleiros de xadrez fornecidos pela própria escola e um espaço agendado no laboratório de ciências da instituição, o que gerou um desenvolvimento mais aprazível por parte dos participantes e do pesquisador. Além disso, foram utilizados recursos digitais, como o aplicativo Chess.com, Power Point e fotos, para reproduzir as posições nas quais os alunos teriam que resolver as situações-problema envolvidas. Também, a pesquisa serviu-se de recursos práticos para redigir informações, como papel e caneta.

Inicialmente, para que os objetivos fossem alcançados, foram seguidos determinados passos para fundamentar a análise:

- *Jogo diagnóstico*: a fim de conferir os conhecimentos enxadrísticos atribuídos a cada participante;
- *Exercício diagnóstico*: no intuito de conferir os conhecimentos aritméticos atribuídos a cada participante, este se deu por meio verbal pelo pesquisador, dado duas peças aleatórias no tabuleiro, foi pedido para que os alunos expressassem o resultado da soma das peças;

- *Apresentação da pesquisa*: para familiarizar os alunos com o foco do trabalho, assim, compelindo uma melhor qualidade no desempenho das atividades desenvolvidas, uma vez que estes sabem a finalidade do exercício;
- Aplicação de situações-problema.

Os exercícios diagnósticos, desenvolvidos no início da pesquisa foram apresentados aos alunos de maneira contextualizada, utilizando as questões estabelecidas descritas no quadro 4. Quanto à aplicação das situações-problema, por meio de questionamentos pertinentes ao decorrer das atividades, de maneira a não prejudicar seu raciocínio, analisou-se as competências dos alunos: como eles pensavam sobre a questão, como desenvolveram e chegaram a solução. Ainda sobre esse momento anotações foram redigidas na conclusão de cada situação, visto que era pedido para que o aluno explicasse sua conclusão, no entanto, se perderam muitas destas neste instrumento mais rígido de coleta de dados.

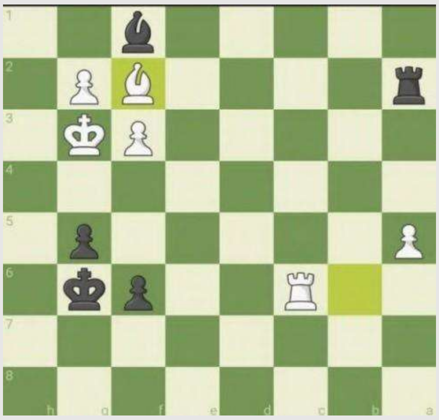
Ao final das situações-problema, foi passado uma folha para cada com o intuito de que o aluno descrevesse suas concepções sobre as atividades passadas, se desenvolveu algum conceito, seja no ramo do xadrez, seja no ramo das estruturas aditivas, que precisasse de uma atenção a mais.

As situações-problema desempenhadas ao decorrer do tempo que foi passado com os alunos estão representadas no Quadro 4 numeradas em forma de questões com seus respectivos objetivos:

Quadro 4 – Objetivos das questões

Questões	**Objetivos**
1) Em meados de 2004 o jovem prodígio do Xadrez Mundial, de apenas 13 anos de idade, Magnus Carlsen, enfrentou em uma partida fechada, o até então Campeão Mundial de Xadrez Garry Kasparov. O que muitos não sabiam era que esse garoto, futuramente, conquistaria o título de melhor do mundo. A partida foi um grande evento que contou com uma plateia de intelectuais da época e a mídia internacional. O jogo foi disputado, começando a abertura de modo posicional, o meio jogo rodeado de estratégias a fim de ganho material e muita tática. Apesar disso, a partida terminou com um empate acordado entre os jogadores, no entanto, algo interessante ocorreu.	Visava discutir se os alunos conseguiam utilizar a aritmética das peças para realizar uma composição, dessa forma, somando o valor numérico das peças pretas e em seguida das brancas, não necessariamente nessa ordem, a fim de chegar a um valor absoluto para cada jogador.

<table>
<tr>
<td>Observe a posição final, representada abaixo, do confronto e indique o valor material de cada jogador.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2) Imagine que em uma determinada partida, a quantidade de peças no tabuleiro se configura da seguinte forma, em determinado momento:
● Três peões preto e seis peões brancos;
● Uma torre preta e nenhuma torre branca;
● Dois bispos pretos e um bispo branco;
● Nenhum cavalo preto e dois cavalos brancos;
● Uma dama para cada jogador;
● Um rei para cada jogador.

Quem tem a vantagem material?</td>
<td>Foi proposto um problema de comparação no contexto do xadrez, no qual espera-se do aluno que haja inicialmente uma soma das peças de cada jogador e depois uma comparação entre esses resultados para saber quem teve a vantagem material. Mais especificamente, uma conta de subtração entre o maior valor numérico de um jogador pelo valor numérico do outro jogador.</td>
</tr>
<tr>
<td>3) No final de uma partida disputada, os jogadores acordaram empate, no entanto, os jogadores resolveram contar suas peças e ver quem ficou com a vantagem material, dando o seguinte resultado: dezoito peões para as pretas e nove peões a menos para as brancas. Neste caso, qual a possibilidade de peças que as pretas tinham a mais no tabuleiro?</td>
<td>Foi proposto um problema de comparação no contexto do xadrez, dando enfoque as possibilidades das peças brancas que resultem na diferença (relação) de 9 peões em comparação aos 18 peões das pretas (referente). Aqui não se espera que o aluno mostre todas as possibilidades, mas que ele mostre pelo menos uma, provando que realizou a relação certa para executar a comparação de peões.</td>
</tr>
</table>

4) No meio jogo de uma partida amistosa, o jogador de pretas tinha três peões de vantagem, no final da mesma, este mesmo jogador perdeu a partida com uma desvantagem de sete peões em relação ao seu oponente. O que pode ter acontecido nessa partida?	Sugere a discussão sobre as possibilidades de transformação que pode ter ocorrido no jogo. Espera-se que o aluno realize a transformação: (-3) + (-7) = (-10). Em seguida mostre uma ou mais possibilidades para as peças que o jogador de pretas possa ter perdido, resultando em 10 peões de diferença.
5) Em uma partida amistosa, os jogadores estão jogando com as seguintes peças: ● Brancas: ○ 2 torres; ○ 2 bispos; ○ 6 peões; ○ Rei. ● Pretas: ○ 1 cavalo; ○ 1 bispo; ○ 8 peões; ○ Dama; ○ Rei. Qual o total de peões que há nesse tabuleiro?	Aqui foi proposto um problema de composição com os valores das peças do jogo de xadrez. Espera-se do aluno que ele realize a soma das peças brancas: 10 (2 torres) + 6 (2 bispos) + 6 (peões) + 0 (rei) = 22 peões. Em seguida o somatório das peças pretas: 3 (cavalo) + 3 (bispo) + 8 (peões) + 9 (dama) + 0 (rei) = 23 peões. E, por fim, combine o valor total das peças brancas com o das peças pretas e resulte no resultado final: 22 (total de peões das brancas) + 23 (total de peões das pretas) = 45 peões.
6) Em uma determinada partida de xadrez amistosa, o jogador de brancas tinha a seguinte configuração de peças: ● 2 torres; ● 1 cavalo; ● 1 bispo; ● Dama; ● Rei. Ao decorrer desta partida esse jogador perdeu 3 peões em uma jogada errada, em seguida ganhou 5 peões e por fim perdeu 9 peões. Depois disso, o jogador de brancas encerrou a partida com quantos peões ao total?	Nessa situação em uma partida aleatória no jogo de xadrez foi proposto um exercício de composição de transformações, na qual o aluno terá que somar as peças das brancas (composição): *10 (2 torres) + 3 (cavalo) + 3 (bispo) + 9 (dama) + 0 (rei) = 25 peões.* Em seguida, serão realizadas as transformações que o jogador de brancas sofreu ao decorrer do jogo: Perdeu 3 peões: 25 + (-3) = 22 peões Ganhou 5 peões: 22 + 5 = 27 peões 27 + (-9) = 18 peões.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

O questionário foi aplicado em uma escola pública do município de Caruaru visando os alunos do 6º ano do ensino fundamental com o intuito de verificar a tese de que se é possível desenvolver o aprendizado em aritmética utilizando-se dos valores das peças de xadrez como recurso didático e é viável na aplicação de atividades em laboratório. A referida pesquisa foi aplicada em dois dias do mês de agosto, com o objetivo de realizar de maneira mais detalhada em um espaço maior de tempo, dando aos alunos tempo e calma para pensarem nas soluções, visto que só foi possível recolhê-los de sala uma aula no por dia, com duração de 50 minutos. Por esse motivo, foi decidido por parte do pesquisador completar a pesquisa em dois dias. Esta foi desenvolvida nos dias 17 e 23 de agosto de 2023, dando enfoque aos conteúdos de aritmética aprendidos em sala.

O próximo capítulo foi dedicado aos procedimentos de coleta de dados e à análise da pesquisa, assim como aos resultados obtidos através dos procedimentos metodológicos e do questionário aplicado na referida escola municipal de Caruaru.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para começo, uma apresentação dos passos tomados pelo pesquisador para a coleta dos dados. Suas tomadas de decisões a partir das situações ocorridas no ambiente escolar serão descritos de forma detalhada para que se entenda como se deu a aplicação do questionário.

Depois, será analisado as respostas dos alunos por questões, utilizando como método de correção as percepções de Vergnaud (1990, *apud*, MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2001, p. 24) quando se refere ao cálculo numérico e o relacional proveniente das estruturas básicas de soma no campo das estruturas aditivas por meio da composição, transformação, comparação e composição de transformações, conforme argumentam Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001).

Em seguida, aberto o espaço para o estudo do erro, o pesquisador analisará os equívocos do aluno como fonte de compreensão para definir sua dificuldade e dedicar atenção a este ponto, seguindo a linha de raciocínio de Torre (2007).

De início, foi abordado um resumo dos acertos dos estudantes nas questões, em seguida será analisado os tipos de erros dos alunos em cada questão se baseando na tabela de Dimensões e Categorias do MADE, descrita por Cunha (2021).

4.1 PROCEDIMENTO DE COLETA DOS DADOS

4.1.1 Jogo de Xadrez diagnóstico

No dia 17 de agosto de 2023 o pesquisador apresentou-se à escola no início das aulas da tarde, por volta das 13h, apresentando a carta de apresentação à gestora da escola municipal de Caruaru. Depois de uma conversa amigável a qual foi apresentada a proposta do projeto de pesquisa à gestora da escola, a coordenação consentiu a aplicação do questionário para com os alunos dos 6º anos.

Na segunda aula, foi recolhido de sala vários alunos que afirmavam conhecer o jogo de xadrez e dominavam os movimentos e o valor de cada peça. Para não tumultuar o laboratório de ciências da escola, foram selecionados cinco alunos de cada turma; 6º ano A, B, C e D, uma vez que a escola possuía apenas cinco tabuleiros de xadrez.

Partindo desse ponto, foram realizadas dez partidas de xadrez com todos os participantes da pesquisa, a fim de filtrar os que de fato sabiam ao menos os valores e o nome de cada peça no tabuleiro. Foram realizadas intervenções ao decorrer das partidas, questionando cada aluno qual o nome de cada peça, em seguida, para os que conseguiam responder corretamente, foram questionados sobre os valores das peças. É importante ressaltar que nem todos que sabiam o nome das peças, haviam decorado o valor delas, no entanto, esses tinham noção que as peças valiam pontos e conheciam o valor de algumas, por exemplo, o peão que vale um ponto, a dama que vale nove pontos.

De acordo com tais questionamentos, uma quantidade específica foi sendo eliminada por não saber, de fato, o nome das peças, ou o movimento delas, ou o valor de cada uma, ou pelo menos a noção que existia valor para elas. Dos vinte participantes iniciais, restaram apenas oito para o próximo refinamento.

4.1.2 Exercício de Aritmética Diagnóstico

Foi pedido para que os oito alunos restantes realizassem uma partida amistosa entre eles e ao desenrolar do jogo estes alunos foram questionados a respeito da soma de algumas peças que havia no tabuleiro. No tabuleiro 1 estava o aluno A e B, para o aluno A foi perguntado qual a soma de duas torres que valiam cinco peões cada uma delas, depois, para o aluno B, foi pedido que somasse o valor de dois bispos, valendo três peões cada um. As respostas foram satisfatórias. Houve certo receio por parte dos participantes, alguns respondiam quase que instantaneamente, outros demoravam um pouco mais. Contudo, todos se mostraram aptos a participarem do questionário.

4.1.3 Aplicação do Questionário

No dia 17 de agosto de 2023 foram aplicadas apenas duas questões do questionário devido ao escasso tempo que o autor da pesquisa teve com os alunos para filtrar os participantes e aplicar os exercícios. Nesse processo, foi reforçado com os alunos o valor das peças no tabuleiro e, partindo de iniciativa própria, os participantes resolveram anotar essas informações na folha de resposta para usar como consulta. Tanto a primeira, quanto a segunda questão foi resolvida de forma rápida por parte de cada um deles, dando espaços para comentários pertinentes. O aluno C, por exemplo, questionou por que o rei corresponde a zero peões, foi esclarecido que o rei é uma peça fundamental no jogo, a qual não pode ser capturada, por esse motivo não é necessário mensurar valor para ela.

Ao final do momento de pesquisa, as amostras foram devolvidas e organizadas. Os discentes se mostraram bastante animados pela atividade realizada fora de sala e perguntaram quando seria o próximo dia para conclusão do questionário, o aluno H disse que iria treinar em casa para se preparar para o dia 23 de agosto, o que fez levantar os ânimos dos outros alunos.

No dia 23 de agosto a escola estava lotada, devido a um evento vigente e os alunos se encontravam dispersos para iniciarem o segundo momento da aplicação. Por esse motivo, foi proposto um jogo de xadrez amistoso entre eles para que retomassem o foco, o que fez retomar sua atenção.

Ao decorrer das questões, a questão três e quatro proporcionou discussões entre os alunos, dando espaço para um cálculo mais profundo sobre as possibilidades. Um dos alunos, por exemplo, conseguiu encontrar apenas uma possibilidade para a questão três, a possibilidade mais óbvia, a dama. Por outro lado, depois de conversar entre os colegas, percebeu que havia várias outras e, sem ter uma noção ampla delas, disse a seguinte frase: professor, as possibilidades são infinitas. Não há como chegar no final!

O momento de discussão se mostrou produtivo, onde o conhecimento lógico dedutível, aritmético e enxadrístico proporcionou um momento satisfatório de acordo com o que foi proposto. Os alunos, além de entrarem em diálogos a respeito das situações problema, trabalharem em equipe e exercitarem a aritmética das estruturas aditivas, conseguiram terminar o questionário de maneira tão natural a ponto de não perceberem que estavam realizando exercícios de classe comuns.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DE ERROS COM ENFÂSE NOS CALCULOS RELACIONAIS E NUMÉRICOS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Nessa sessão, discute-se os acertos e erros dos estudantes por questão. Escolheu-se a distinção de cálculos relacionais e cálculos numéricos por entender tal como Vergnaud (1996) as diferenças entre essa compressão na resolução de situações problemas. A questão 1 propôs um somatório do valor numérico das peças de um tabuleiro de xadrez para cada jogador. No quadro 5 foram exibidos os acertos e erros.

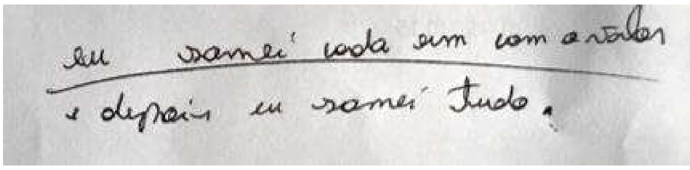
Quadro 5 - Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 1

Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Certo	Certo
B	Certo	Certo
C	Certo	Certo
D	Certo	Certo
E	Certo	Certo
F	Errado	Certo
G	Certo	Certo
H	Certo	Certo

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observou-se que essa atividade não apresentou muitas dificuldades para os estudantes. Os alunos solicitaram os valores das peças ao pesquisador quando tinham dúvidas. Verificamos que as adições foram realizadas de forma correta, alguns inclusive comentaram sobre o procedimento como podemos observar na figura 3, o protocolo do Aluno D.

Figura 3. Resposta apresentada pelo Aluno D para questão 1

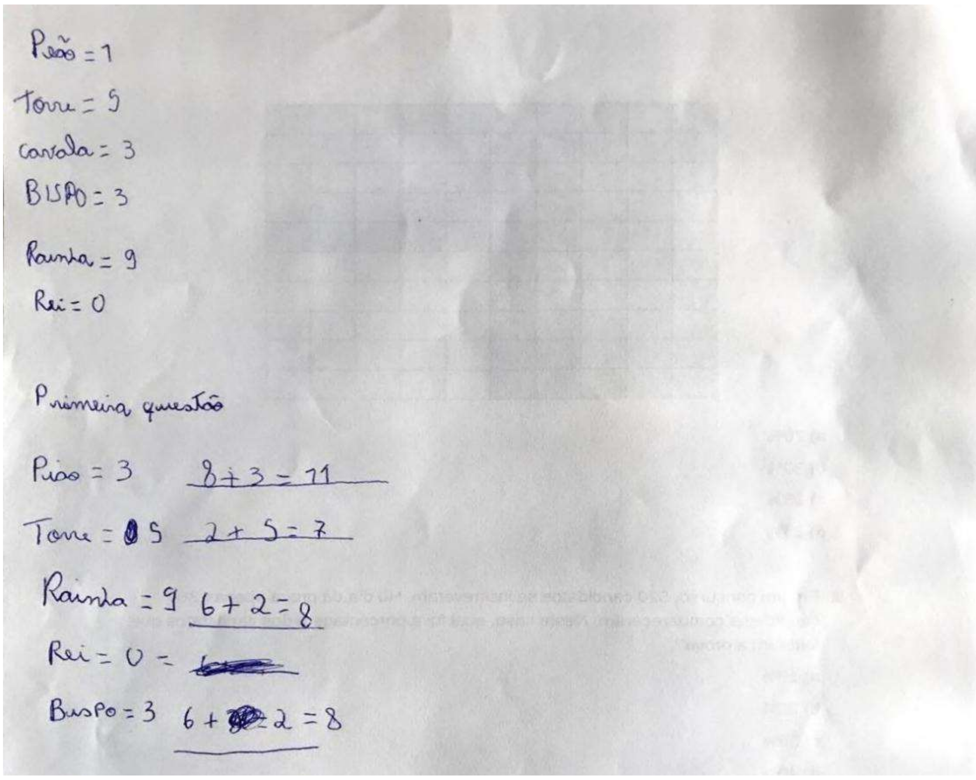


Fonte: Autor (2023).

Dessa forma, a utilização do contexto da soma dos valores das peças de xadrez para adições parece não ser problemas para o grupo de estudantes participantes da pesquisa.

Observamos ainda que apenas um estudante não conseguiu entender o que a questão solicitava, se equivocando no cálculo relacional, conforme apresenta-se na figura 4.

Figura 4. Resposta apresentada pelo Aluno F para questão 1



Fonte: Autor (2023).

Nota-se que aluno F apesar de anotar corretamente a relação dos valores de cada peça do Xadrez, errou na interpretação do que foi solicitado na atividade, caracterizando um erro de entrada. Na Figura 2, verificou-se que o aluno F somou corretamente as operações que decidiu montar, no entanto não era o solicitado nessa questão.

Utilizando como referência a discussão do MADE (TORRE, 2007; CUNHA, 2021;) o cálculo relacional do aluno é caracterizado por um erro de entrada, mais especificamente um erro de compreensão: A incompreensão, o não domínio do objeto (linguagem) leva, antes ou depois, ao erro, causando repercussão no desenvolvimento dos processos cognitivos.

A questão 2 vai tratar da composição do valor das peças de cada jogador, em seguida deverá ser realizada uma operação de subtração entre o jogador com maior valor material e seu oponente, mostrando qual destes jogadores tem a vantagem no tabuleiro. No Quadro 6 apresentamos os acertos e erros na questão 2.

Quadro 6 - Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 2

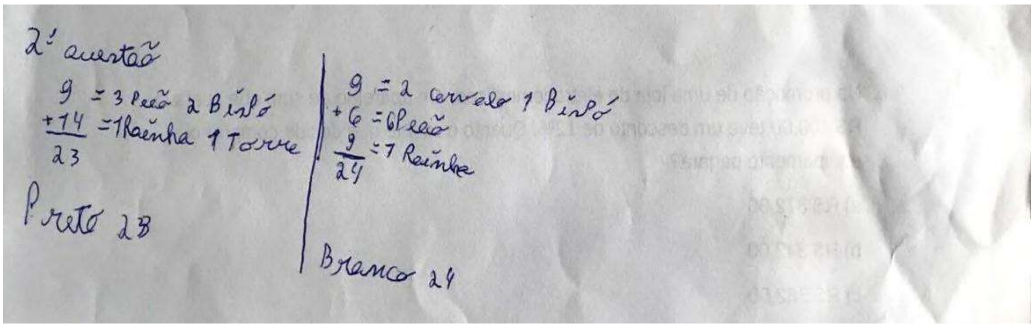
Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Errado	Certo
B	Errado	Errado
C	Errado	Certo
D	Errado	Errado
E	Errado	Certo
F	Errado	Certo
G	Certo	Errado
H	Errado	Errado

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao se analisar os acertos e erros na questão 2, pode-se questionar o que acarretou os erros relacionados ao cálculo relacional. Observa-se que metade dos alunos realizaram seus cálculos numéricos de maneira adequada. Dessa forma, o pesquisador compreende que esse impasse pode ter sido causado por falta de atenção por parte dos alunos ao não observarem o questionamento do quesito após a apresentação do tabuleiro.

Isso se evidencia quando notamos um padrão dos planos nos parâmetros de seus respectivos erros. Há, também, uma sutil diferença referente ao comando deste exercício e o primeiro. Enquanto na primeira questão se pede o quantitativo de material de cada jogador, neste segundo é pedido quem tem a vantagem material, algo sutil, que acabou confundindo a grande maioria dos estudantes como pode ser observado nos protocolos apresentados nas figuras 5 e 6.

Figura 5. Resposta apresentada pelo Aluno A para questão 2



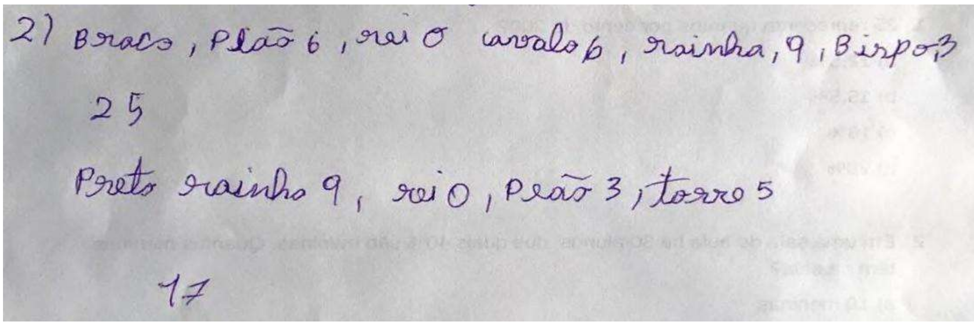
Fonte: Autor (2023).

O aluno A foi coerente com seus cálculos, segundo o gabarito, somou os peões dos respectivos jogadores corretamente. No entanto, no específico cálculo relacional, não especificou quem ficou com a vantagem material, sendo necessário unicamente uma operação de subtração para definir o comando da questão.

De maneira mais significativa, o erro cometido pelo aluno A (Figura 3) foi no parâmetro organizacional. Segundo Torre (2007, *apud*, CUNHA, 2021), um erro no plano de análise e síntese: O erro acontece quando o sujeito não identifica as características relevantes e desconhece os passos a seguir para chegar à solução.

Para o aluno B o caso é mais específico (Figura 6), uma vez que este erra o cálculo relacional, e se precipita em suas anotações para com a quantidade de material do jogador de pretas e a somatória das peças do jogador de brancas.

Figura 6. Resposta apresentada pelo Aluno B para questão 2



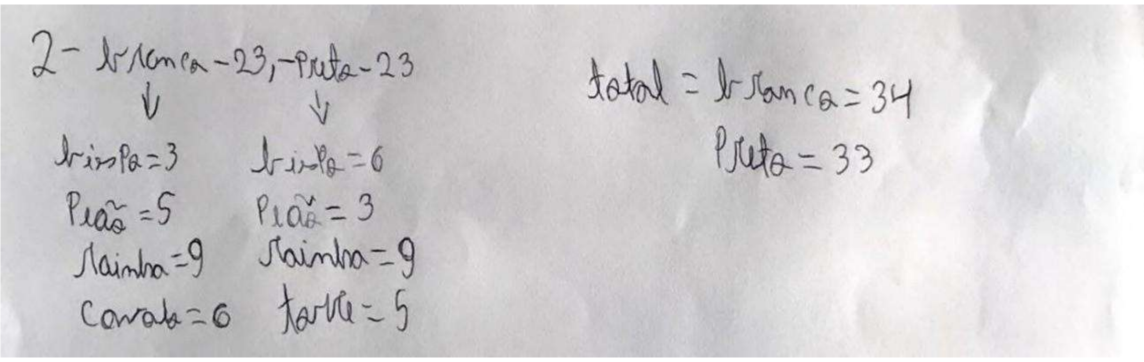
Fonte: Autor (2023).

Ou seja, quando o aluno anotou a quantidade material de cada jogador, ele esqueceu de registrar os dois bispos que as pretas tinham no tabuleiro, resultando em uma soma equivocada de 17 peões. E, quando se trata das peças brancas, o aluno não consegue realizar a seguinte soma: 6 peões + 0 peões (Rei) + 6 peões (2 cavalos) + 9 peões (rainha) + 3 peões (bispo) = 25 peões. Sendo que o resultado dessa soma é, invariavelmente, 24 peões.

Sendo assim, pode-se concluir que o erro do aluno B foi não só erro organizacional, do tipo análise e síntese, como também erro de execução, do tipo operacional: Ocorre ao se operar ou executar um procedimento. As distrações levam a confundir a ordem ou passos de um processo.

O aluno C cometeu um erro de contagem ao colocar 5 peões ao invés de 6 peões para as brancas (Figura 7), resultando em tal soma: 3 peões (bispo) + 5 peões (o correto seriam 6 peões) + 9 peões (rainha) + 6 peões (2 cavalos) = 23 peões.

Figura 7. Resposta apresentada pelo Aluno C para questão 2



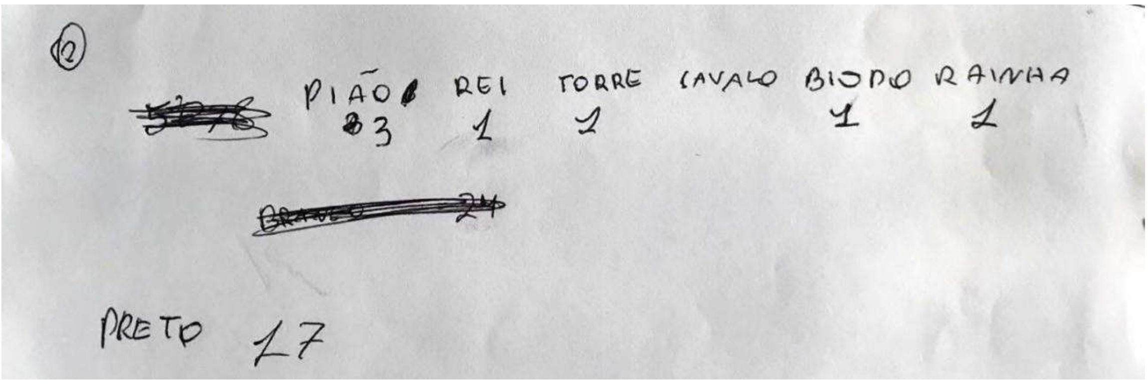
Fonte: Autor (2023).

O outro erro cometido pelo aluno C foi referente a um erro de execução do tipo operacional, ao confundir os resultados das somas anotados do lado esquerdo da folha e transferir esses resultados para o lado direito com valores completamente diferentes, como exibido na Figura 5. Conclui-se, por parte do pesquisador, que o aluno C prejudicou-se nesta questão por falta de atenção, dado que seus erros foram referentes a seus equívocos de percepção, além de não ter especificado quem ficou com a vantagem material, se classificando como mais um erro organizacional do tipo análise e síntese.

O aluno D não conseguiu desenvolver a questão (Figura 8), dá-se a conferir que seja um erro de entrada, do tipo compreensão: A incompreensão, o não domínio do objeto (linguagem) leva, antes ou depois, ao erro, causando repercussão no desenvolvimento dos processos cognitivos.

Dado o erro relacional da falta de compreensão da questão, partimos para o cálculo numérico, que, da forma, houve um equívoco. o aluno D acabou misturando as peças dos adversários o que resultou em uma soma diferente a qual se pretendia na questão.

Figura 8. Resposta apresentada pelo Aluno D para questão 2



Fonte: Autor (2023)

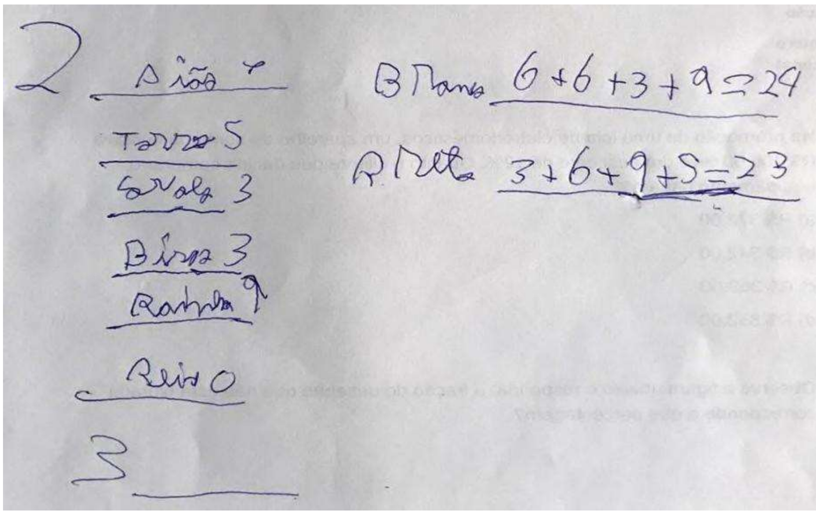
Enquanto as pretas possuíam 3 peões, rei, 1 dama e uma torre, o aluno D adicionou a sua soma um cavalo e apenas um bispo para as pretas. O que resultaria em uma operação aditiva completamente diferente. Além disso, a soma realizada pelas anotações do aluno D mostra que não seria possível se obter o resultado encontrado por ele, como mostrado a seguir:

3 peões + 0 (rei) + 5 peões (1 torre) + 3 peões (1 cavalo) + 3 peões (1 bispo) + 9 peões (rainha) = 23 peões.

O aluno D especificou que o adversário de pretas tinha 17 peões, o que indica um claro erro de execução do tipo estratégico no cálculo numérico.

O aluno E tomou as decisões corretas para encontrar o valor material correspondente a cada jogador, acertando os cálculos numéricos realizados (Figura 9).

Figura 9. Resposta apresentada pelo Aluno E para questão 2

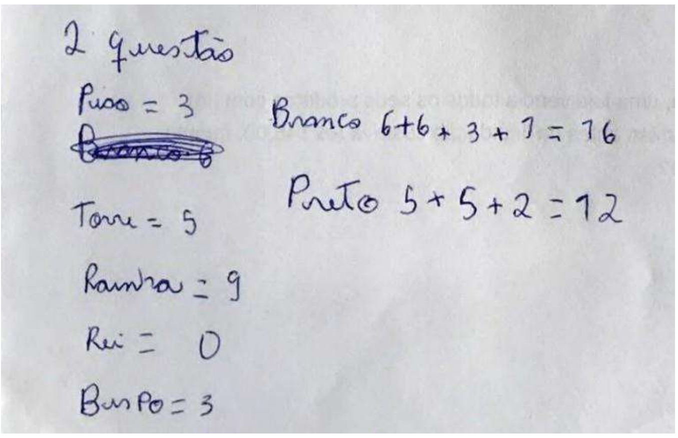


Fonte: Autor (2023).

Já sua interpretação do comando da questão não foi coerente com o gabarito, visto que, ao realizar as operações necessárias para encontrar o material de cada adversário, o estudante demonstrou domínio das relações, no entanto, não concluiu a questão quando lhe foi pedido quem tinha a vantagem material, sendo necessário apenas uma operação de subtração. Caracteriza-se, por tanto, erro de organização do tipo análise e síntese.

Para o aluno F houve um erro de organização, do tipo análise e síntese pois não conseguiu organizar as informações dada na questão para chegar a resposta correta (Figura 10). Apesar da intenção do aluno mostrar que ele queria separar a quantidade de material das pretas e brancas, sua desorganização culminou no cálculo numérico que não condiz com a pretendida na questão, prejudicando a resposta final.

Figura 10. Resposta apresentada pelo Aluno F para questão 2



Fonte: Autor (2023).

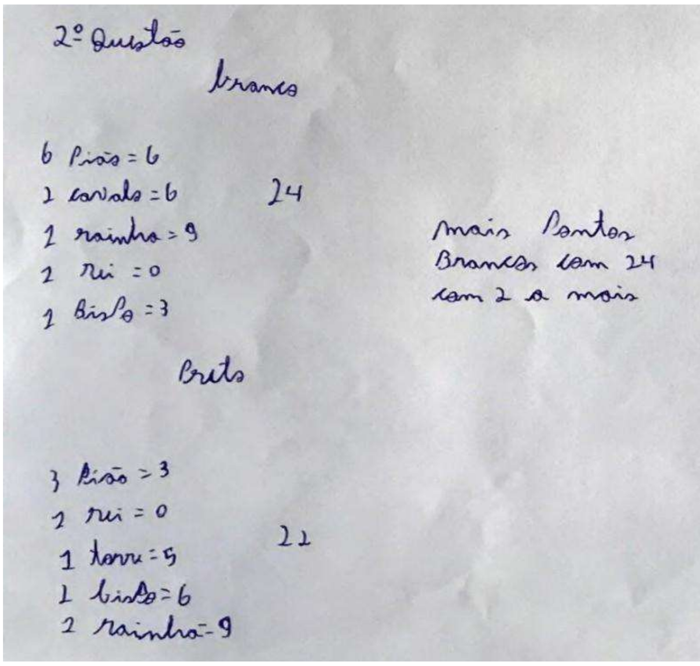
O cálculo numérico realizado pelo estudante mostra que ele domina o as operações aritméticas aditivas, pois as somas realizadas deram um resultado coerente, no entanto, sua intenção não vingou com o comando da questão, prejudicando seu cálculo relacional.

Na Figura 11 vemos um de execução, no qual o aluno G dominou o cálculo relacional, sendo o único participante a entender e esclarecer quem tinha a vantagem material. Mas na execução das somas, houve um equívoco no cálculo numérico:

A soma realizada corretamente do material do adversário de pretas seria: 3 peões + 5 peões (1 torre) + 9 peões (rainha) + 0 peões (rei) + 6 peões (2 bispo) = 23 peões

Esse erro foi classificado por execução do tipo mecânico: Costuma-se tratar de pequenos detalhes. Tem lugar no processo de codificação. Isso ocorreu devido ao cálculo ter sido realizado mentalmente e não de forma operacional, prejudicando assim o resultado.

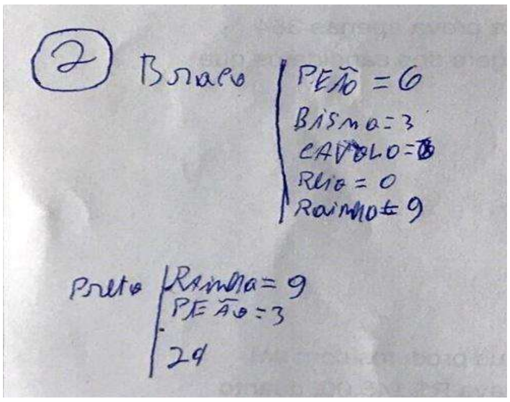
Figura 11. Resposta apresentada pelo Aluno G para questão 2



Fonte: Autor (2023).

O aluno H claramente não conseguiu desenvolver a questão (Figura 12), por meio de análise observa-se que o aluno de fato anotou as informações passadas na questão, no entanto não soube lidar com elas, prejudicando seu cálculo relacional, por meio de um erro de entrada do tipo percepção: Resulta da insuficiente percepção ou análise do problema.

Figura 12. Resposta apresentada pelo Aluno H para questão 2



Fonte: Autor (2023).

Sobre o cálculo numérico, o aluno H não realizou nenhuma operação aparente, houve apenas um valor expresso ao canto inferior esquerdo (24) ao qual, provavelmente, seria a somatória dos valores materiais das pretas, o que não é certo com o gabarito, assim, errando o cálculo numérico.

Os erros e acertos relativos à questão 3 foram apresentados no Quadro7. Essa questão teve como finalidade do cálculo uma comparação entre a pontuação dos jogadores. É esperado do participante que seja realizada uma operação de subtração e o resultado desta, será demonstrado possibilidades de peças que condizem com o valor material dessa diferença.

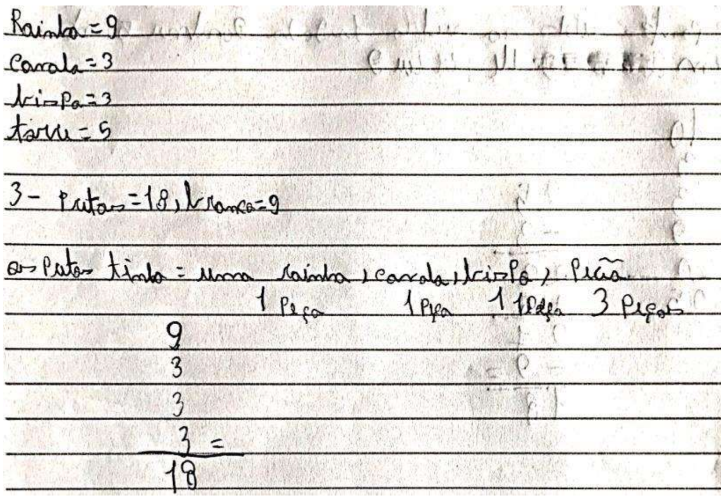
Quadro 7- Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 3

Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Certo	Certo
B	Certo	Certo
C	Errado	Certo
D	Certo	Certo
E	Certo	Certo
F	Errado	Errado
G	Certo	Certo
H	Certo	Certo

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para a questão 3 é observado um domínio razoável dos processos de comparação, os alunos demonstram compreender a questão, apontam as possibilidades de maneira coerente com o esperado. É observado, inclusive, que os erros cometidos pelos alunos C e F se categorizam como erro de entrada da informação como especificado nas figuras 13 e 14:

Figura 13. Resposta apresentada pelo Aluno C para questão 3



Fonte: Autor (2023).

Para o aluno C temos uma situação a se analisar com mais atenção. Percebe-se de início que o aluno conclui algumas possibilidades para a diferença de 9 peões no tabuleiro para as brancas:

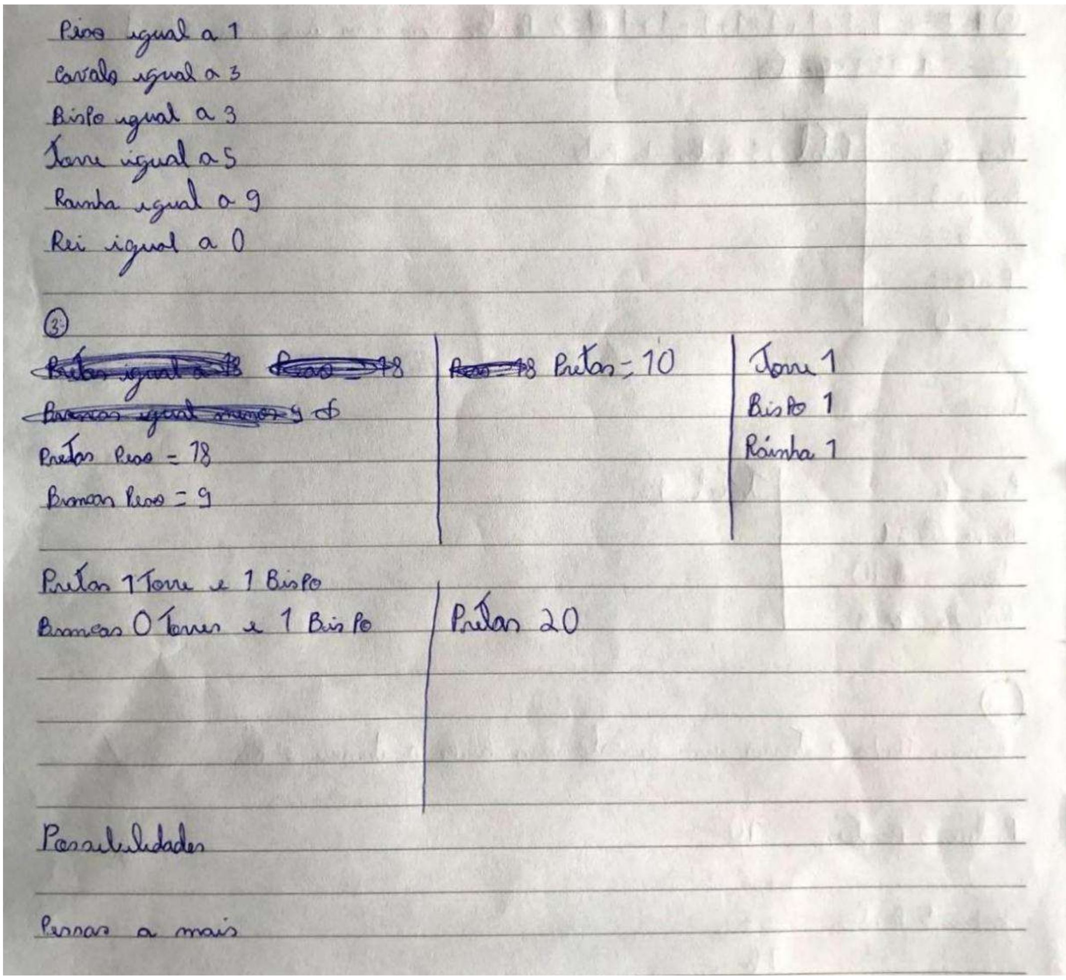
1 rainha = 9 peões

3 peões (1 cavalo) + 3 peões (1 bispo) + 3 peões = 9 peões

Porém, há uma confusão no momento de justificar essa diferença. o Aluno C decide somar todas as duas possibilidades que indicou, resultando em 18 peões, o que indica que o aluno estava calculando numericamente a quantidade material das peças pretas, e não a diferença entre os jogadores. Dessa forma, o pesquisador interpreta um equívoco relacional de entrada, do tipo Intenção: Quando existe confusão ou ambiguidade de metas sobre o que se pede, transformando-se, facilmente, em desequilíbrio e sendo levado ao erro.

O aluno F não teve sucesso na questão 3, observa-se na Figura 14 algumas possibilidades incoerentes e valores que não se sabe como foram obtidos.

Figura 14. Resposta apresentada pelo Aluno F para questão 3



Fonte: Autor (2023).

O aluno F não compreendeu as relações e o comando da questão para executá-la, tão pouco coordenou seus cálculos numéricos conforme a quantidade de peões informados na mesma. O pesquisador identifica um erro de entrada, ao perceber a questão, mais especificamente do tipo intenção.

Ao se referir a questão 4, espera-se uma relação de transformação por parte do aluno, a qual terá de ser feita através de uma operação aditiva referente aos valores que foram perdidos ao decorrer da partida, ou seja: (-3) + (-7) = (-10). Em seguida é solicitado que o aluno especifique ao menos uma possibilidade que justifique os pontos perdidos por partes desse jogador. Os erros e acertos dessa atividade são classificados no Quadro 8.

Quadro 8. Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 4

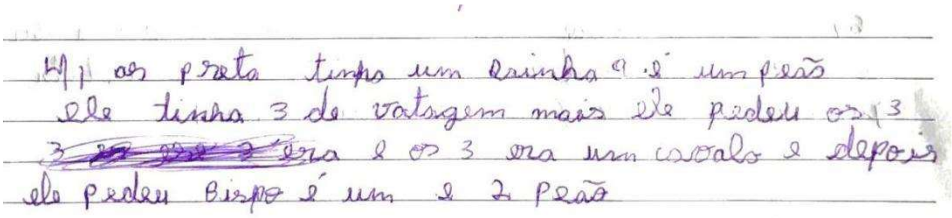
Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Certo	Certo
B	Certo	Errado
C	Certo	Errado
D	Certo	Certo
E	Certo	Certo
F	Certo	Certo
G	Certo	Certo
H	Errado	Certo

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao observar o quadro 8, se nota um domínio por parte da maioria dos alunos em interpretar essa questão de transformação. Os erros cometidos pelos alunos B, C e H estão relacionados aos parâmetros de organização e execução, sendo observado pelo pesquisador desta pesquisa que todos os participantes compreenderam o comando da questão corretamente. Para os alunos B, C e H, seus erros serão especificados nas figuras subsequentes:

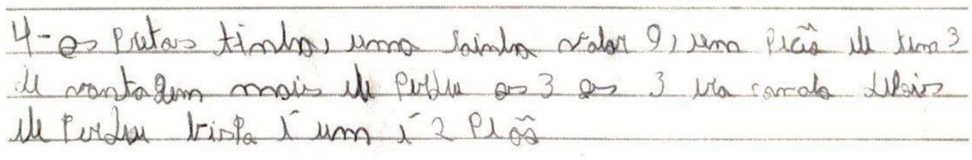
Tanto o aluno B (Figura 15) como o aluno C (Figura 16) interpretaram de forma correta a questão, mostrando duas possibilidades possíveis para a situação, no entanto interpretaram a segunda possibilidade de forma equivocada: -3 peões (cavalo) - 3 peões (bispo) - 2 peões = -8 peões.

Figura 15. Resposta apresentada pelo Aluno B para questão 4


4) os preta tinha um rainha e é um peão
ele tinha 3 de vatagem mais ele pedeu os 3
era e os 3 era um cavalo e depois
ele pedeu Bispo é um e 2 peão

Fonte: Autor (2023).

Figura 16. Resposta apresentada pelo Aluno C para questão 4

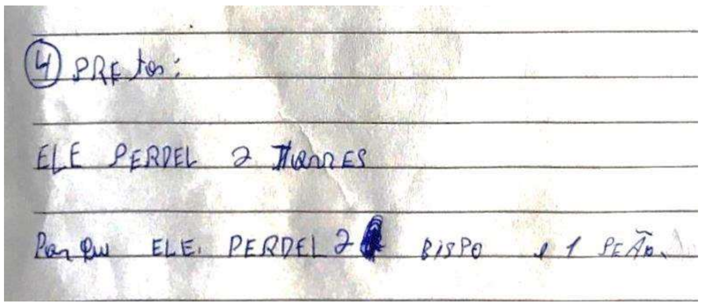


Fonte: Autor (2023).

No entanto, a operação correta a se fazer seria: -3 peões (cavalo) - 3 peões (bispo) - 4 peões = - 10 peões. Dessa forma, conclui-se que os alunos B e C entenderam o raciocínio da questão, mas erraram ao operar com as peças, caracterizando um erro de execução do tipo operacional.

O aluno H, inicialmente, justificou que o adversário de pretas perdeu 2 torres, resultando em 10 peões, o que satisfaz o gabarito. No entanto, conforme observa-se na Figura 17, o aluno H, em seguida, especificou que o jogador de pretas perdeu 2 bispos e 1 peão, que resulta em 7 pontos

Figura 17. Resposta apresentada pelo Aluno H para questão 4



Fonte: Autor (2023).

De forma análoga, ele interpretou que o jogador perdeu apenas os peões, sendo que ele perdeu mais 3, o que, juntando com os peões anteriores, resulta em um prejuízo de 10 peões. Dessa forma, o pesquisador entende como um erro relacional, mais especificamente um erro organizacional do tipo análise e síntese. Sobre o cálculo numérico, as operações realizadas pelo estudante se mostraram corretas.

Para a questão 5 é apresentada uma situação a qual será necessária utilizar uma composição de somas. Espera do aluno que seja feita a somatória individual de ambos os jogadores e por fim uma combinação entre esses valores para, por fim, resultar em um resultado absoluto. No quadro 9 estão exibidos os acertos e erros de cada aluno na situação.

Quadro 9- Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 5

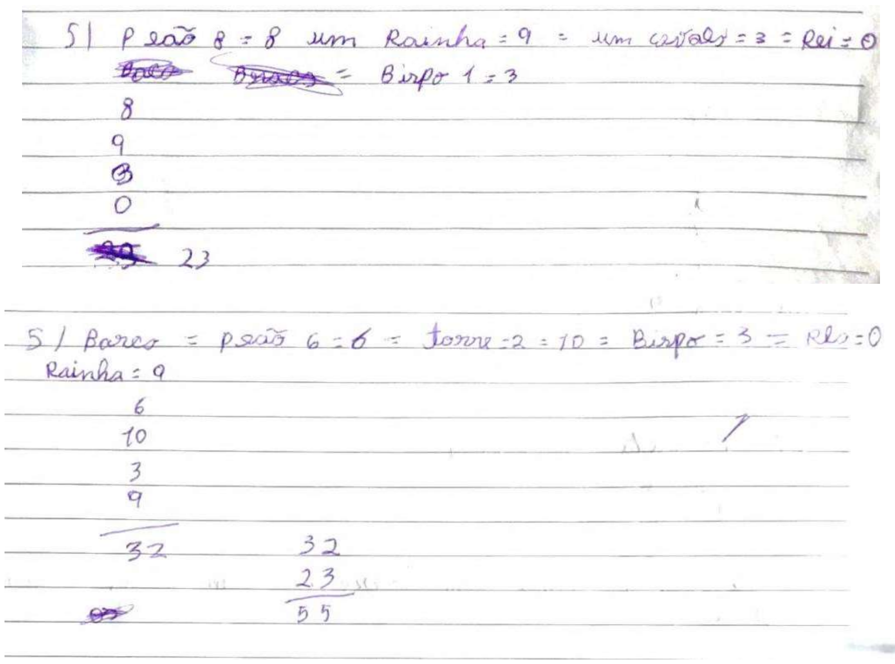
Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Certo	Certo
B	Certo	Errado
C	Certo	Errado
D	Errado	Errado
E	Certo	Certo
F	Errado	Errado
G	Certo	Certo
H	Certo	Certo

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os participantes responderam essa questão mostrando um certo domínio no cálculo relacional, tendo em vista erros mais significativos nas operações numéricas, sendo observado pelo pesquisador um problema não da questão em si, mas sim, possivelmente, na organização das informações e execução delas. Para elucidar tais dificuldades, apresentamos os protocolos de estudantes com os respectivos parâmetros e planos.

O aluno B, na Figura 18, entendeu o comando da questão corretamente, entendo que deveria somar as partes e em seguida juntar os valores das partes em um único resultado.

Figura 18. Resposta apresentada pelo Aluno B para questão 5

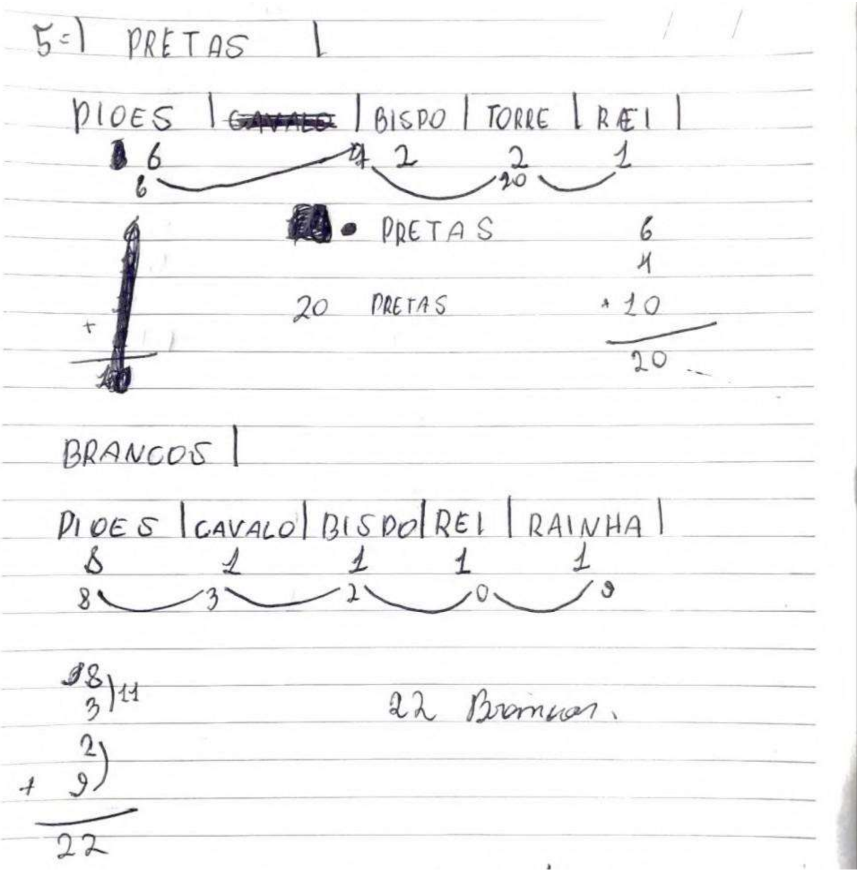


Fonte: Autor (2023).

Porém, no processo de soma das peças brancas, houve um erro de execução, do tipo operacional, o que acarretou o resultado incorreto na somatória das partes. De modo semelhante ao aluno B, o aluno C cometeu o mesmo equívoco. Ele tinha o domínio da questão, interpretou os comandos de forma satisfatória, mas na execução dos cálculos, mais especificamente na soma das peças pretas, cometeu um erro de execução do tipo operacional, o que afetou o resultado.

O aluno D interpretou de maneira equivocada a questão, decidiu somar as partes de cada um apenas, como pode ser observado na Figura 19. Além disso, efetuou os respectivos cálculos numéricos de maneira equivocada, prejudicando o resultado da soma das partes.

Figura 19. Resposta apresentada pelo Aluno D para questão 5

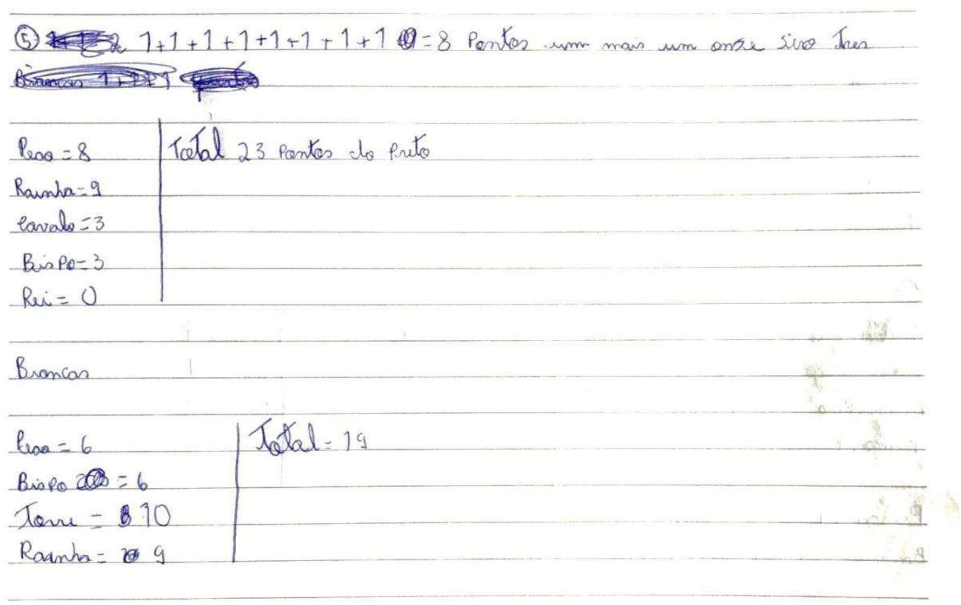


Fonte: Autor (2023).

O erro relacional se dar por um erro de entrada do tipo percepção. Já o erro no cálculo numérico é denominado erro de execução do tipo operacional.

O aluno F não conseguiu relacionar as situações necessárias para executar o comando da questão, como pode ser observado na Figura 20. Foi possível perceber que para a somatória das peças pretas o aluno desempenhou um papel coerente ao gabarito, mas quando se trata das peças brancas o aluno adiciona uma rainha, a qual não aparece na questão, e em seguida realiza uma somatória que resulta em 19 peões.

Figura 20. Resposta apresentada pelo Aluno F para questão 5



Fonte: Autor (2023).

Essa somatória não seria possível, visto que: 6 peões + 6 peões (2 bispos) + 10 peões (2 torres) + 9 peões (rainha) = 31 peões

Portanto, para o cálculo relacional, caracteriza-se um erro de organização do tipo análise e síntese. Em relação ao cálculo numérico, caracteriza-se um erro de execução, do tipo estratégico: O sujeito não segue o processo que lhe é pedido e equivoca-se na utilização da estratégia adequada para a resolução de um problema.

A questão 6 pede uma composição de transformações por parte do aluno. Aqui é esperado que ele some o valor numérico das peças do jogador em questão e, a partir disso, realize as transformações que esse valor sofreu ao decorrer da partida, ou seja, realize operações de adição e subtração quando for oportuno. No quadro 10 estão os resultados obtidos.

Quadro 10 -Análise dos Cálculos Relacionais e Numéricos da Questão 6

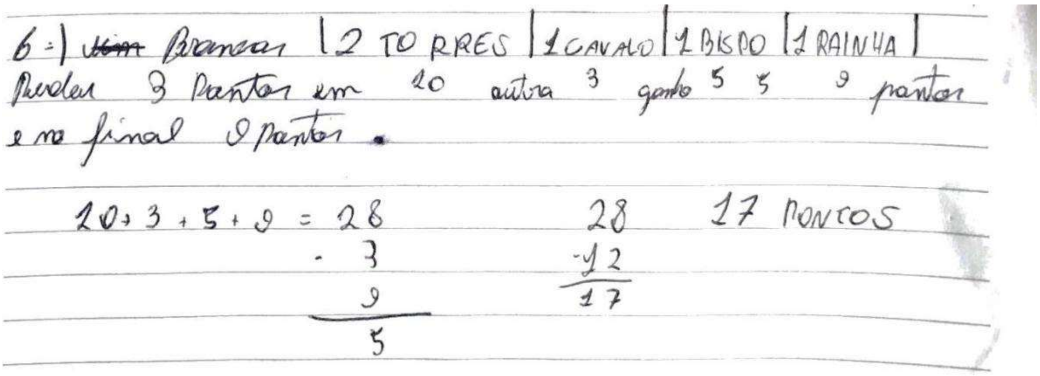
Aluno	Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
A	Certo	Certo
B	Certo	Certo
C	Certo	Certo
D	Certo	Errado
E	Certo	Errado
F	Certo	Errado
G	Certo	Certo
H	Errado	Errado

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Assim como na questão anterior, a resolução da questão 6 demonstra um domínio quando se trata do cálculo relacional, o que significa que a interpretação foi bem aceita. Para auxiliar na análise foram descritas a relação por parte dos erros referentes aos parâmetros e planos de entrada, organização e execução.

Na figura 21 O aluno D compreendeu o comando da questão, de forma que efetuou as operações necessárias de perda e ganho ao desenvolver da questão. Porém ao somar o material das brancas no início da partida, cometeu um erro de execução do tipo operacional, resultando em 28 peões ao invés de 25, esse foi o único erro cometido na questão.

Figura 21. Resposta apresentada pelo Aluno D para questão 6

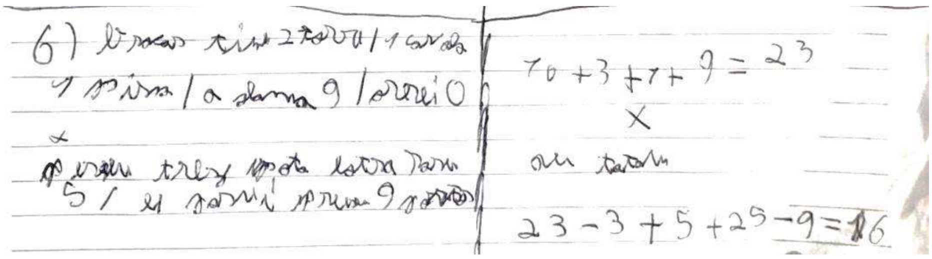


Fonte: Autor (2023).

Algo curioso que o pesquisador observou foi o método do aluno para registrar as perdas do adversário de brancas. Ele decidiu somar os 3 pontos perdidos inicialmente e os 9 pontos perdidos no final: (-3) peões + (-9) peões = (-12) peões. Para, por fim, subtrair dos peões das brancas.

Ao se observar o canto superior direito da Figura 22, o aluno E somou incorretamente, tendo colocado 1 ao invés de 3 para o valor do bispo, resultando em 23 ao invés de 25 peões.

Figura 22. Resposta apresentada pelo Aluno E para questão 6

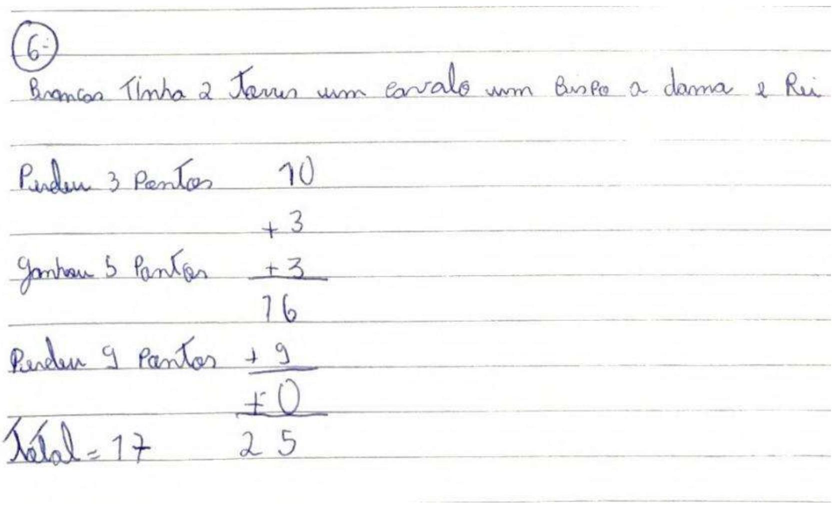


Fonte: Autor (2023).

No segundo cálculo, canto inferior direito da Figura 20, o aluno E realiza as operações de perda e ganho contínua e corretamente, mas pelo fato de ter alterado o valor do bispo, o resultado teve uma diferença de dois peões justificada pela troca de 1 peão por 3 peões (valor do bispo) no início da questão. O pesquisador identifica um erro de execução do tipo operacional.

O aluno F compreendeu o comando da questão, somou todas as peças para chegar a 25 peões, em seguida ele anotou que o jogador perdeu 3, ganhou 5 e perdeu 9, realizando os cálculos mentais, para chegar a um total de 17 pontos, como pode ser observado na Figura 23. Foi observado um erro de execução do tipo operacional no cálculo numérico.

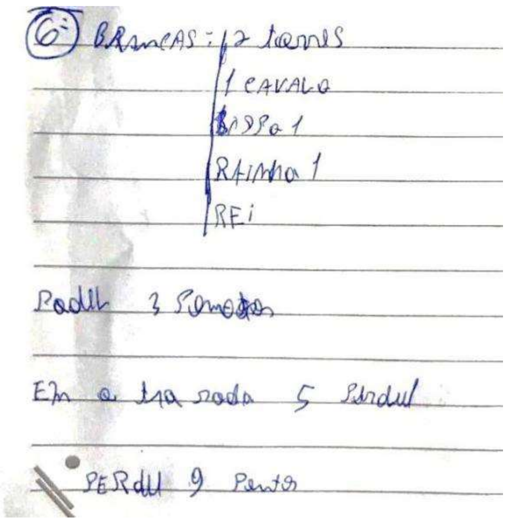
Figura 23. Resposta apresentada pelo Aluno F para questão 6



Fonte: Autor (2023).

Observa-se na Figura 24 que o aluno H anotou as informações do comando da questão, mas não desenvolveu nada após isso, o que indica, conforme a percepção do observador, um erro de entrada da informação, do tipo percepção.

Figura 24. Resposta apresentada pelo Aluno H para questão 6



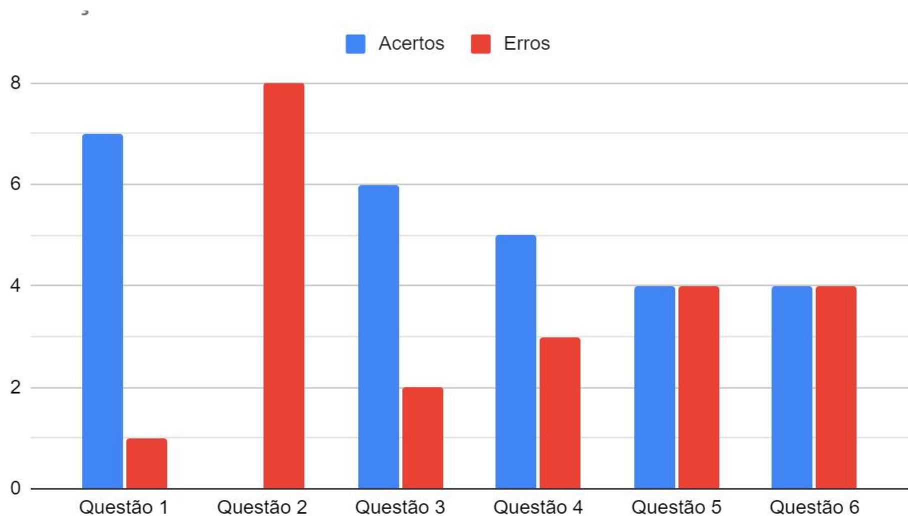
Fonte: Autor (2023).

Esse fato pode significar que o aluno ou não tinha as relações necessárias para executar a questão ou não conseguiu compreender o que a questão queria.

4.3 VISÃO GERAL E RESULTADO INDIVIDUAL DAS AMOSTRAS ATRAVÉS DE GRÁFICOS E RESUMO

Essa sessão apresenta um panorama geral das respostas dos estudantes para avaliar a prática desenvolvida. Para isso, as informações de acertos e erros por questão foram sistematizadas na Figura 25.

Figura 25. Gráfico que representa Acertos e Erros produzidos por questão.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao se observar um panorama geral das questões, é perceptível, primeiramente, os erros referentes a questão 2, o que poderia indicar pouco domínio de cálculo relacional a respeito de situações de comparação. Mas essa situação aconteceu justamente por falta de atenção dos alunos a respeito do comando da questão, essa que pedia para deixar claro quem dos dois jogadores tinha a vantagem material. A grande maioria cometeu esse equívoco classificado, pelos parâmetros da MADE, como erro de entrada no plano da atenção. O aluno G, por outro lado, foi o único que especificou quem tinha a vantagem material, mas acabou cometendo um erro no cálculo numérico, errando, consequentemente, a questão de comparação.

Destaca-se que os erros na questão 2 foram cometidos mais por atenção ao enunciado, do quê por cálculo relacional incorreto. Isso fica perceptível ao se observar a Questão 3, que apenas solicitava a comparação, a qual houve um acerto significativo por parte dos alunos.

Já quando se olha para a primeira questão, é possível perceber que os alunos desta amostra têm uma percepção mediana para questões relacionadas à composição de fatores. O que é perceptível ao se observar a questão 5, também de composição, a qual houve 50% de acertos.

Ainda nesse sentido, sobre a questão 4, que envolve transformações, nota-se um domínio semelhante às situações de composição. Isso se evidencia ao analisar a questão 6, composição de transformações, o que pode significar uma compreensão razoável para esse tipo de exercício.

O percentual de acertos dos estudantes no questionário diagnóstico foi organizado no Quadro 11, apresentando a relação individual dos estudantes na prática proposta.

Quadro 11 -Acertos totais no cálculo relacional e numérico obtidos por cada Aluno

Alunos	Acertos no Cálculo Relacional	Acertos no Cálculo Numérico
A	83,3%	100%
B	83,3%	50 %
C	66,7%	66,7%
D	66,7%	50%
E	83,3%	83,3%
F	33,3%	50%
G	100%	83,3%
H	50%	66,7%
Total	**91,7%**	**68,8%**

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao verificar a desenvoltura dos alunos com relação ao cálculo relacional, foi demonstrado um certo domínio por parte destes, dando espaço para algumas inferências a respeito da questão 2, essa pode ter prejudicado o rendimento dos alunos devido ao fato da pergunta da questão está após a tabela, o que pode ter levado o aluno a não percebe-la. No conjunto geral das remanescentes pesquisas realizadas, o jogo de xadrez possibilitou averiguar como está a percepção dos alunos quando se deparam com questões de aritmética, no campo das estruturas aditivas, contextualizadas através de situações diferentes no tabuleiro, as quais permitem contemplar as estruturas de composição, transformação, comparação e composição de transformações. Neste sentido, as relações de conhecimentos detidas pelos participantes atendem às perspectivas do autor, os contextos compreendidos no tabuleiro possibilitaram relações de possibilidades de peças, somatório e transformações ao decorrer de uma partida.

Quando se refere ao cálculo numérico, os dados representam uma maior dificuldade por parte dos alunos neste quesito. Notou-se que, embora a questão 2 diga o contrário sendo justificado o motivo, a maioria dos erros dos discentes foram cometidos nos parâmetros da organização das informações e na execução dos cálculos numéricos, pelo MADE, compreendendo um impasse na execução das operações principais. Isto é, os alunos compreendem a questão, pois o erro é cometido no cálculo operatório.

Contudo, a pesquisa mostrou-se uma prática com um certo número de acertos, alguns alunos tiveram mais dificuldades do que outros, mas a grande dificuldade foi no cálculo numérico e não no cálculo relacional. Nessa óptica, o trabalho com o jogo de xadrez colaborou na contextualização das atividades, pondo o discente em situações lúdicas as quais favoreceram seu raciocínio relacional, além de justificar o campo aditivo que se dispôs a analisar.

Dessa forma, o ambiente enxadrístico pode se apresentar interessante para o trabalho com aritmética no 6º ano do ensino fundamental.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se propôs a analisar o uso do jogo de xadrez como recurso para a discussão de aritmética em turmas do 6º ano do ensino fundamental, com o objetivo de buscar no jogo de xadrez uma ferramenta manipulável para melhorar a afinidade do aluno pela aprendizagem da matemática e apresentar a possibilidade do jogo de xadrez como auxílio no ensino da aritmética em turmas de 6º ano.

Ao longo desta pesquisa, foi possível observar que o jogo de xadrez oferece um ambiente propício para o desenvolvimento de habilidades aritméticas em estudantes do 6º ano, proporcionando um espaço interativo e desafiador que motiva os alunos a aplicar conceitos matemáticos de forma prática. Através do jogo, os estudantes puderam melhorar sua compreensão de conceitos como cálculos e relações lógicas, contagem de peças e estratégias de planejamento, todos fundamentais para a aprendizagem da aritmética.

Além disso, os estudantes se mostraram mais engajados e entusiasmados em aprender matemática quando essa disciplina era abordada por meio do jogo de xadrez, o que sugere que a abordagem lúdica e prática pode desempenhar um papel importante na construção de uma relação positiva entre os alunos e a matemática.

Em suma, os resultados deste estudo indicam que o jogo de xadrez pode ser uma valiosa adição ao ensino da aritmética em turmas de 6º ano do ensino fundamental. Sua capacidade de envolver os alunos, promover o aprendizado prático de conceitos matemáticos e fortalecer o interesse pela matemática, além de oferecer ao professor um recurso prático e categórico de aplicação lúdica de exercícios aritméticos, devolvendo-lhe um material rico para analisar a eficiência do aluno e desenvoltura, demonstra o potencial do xadrez como uma ferramenta educacional eficaz. Portanto, recomenda-se que educadores considerem a inclusão do xadrez em suas práticas pedagógicas como uma estratégia para aprimorar a educação matemática nessa faixa etária, estimulando, assim, o desenvolvimento cognitivo e o entusiasmo dos alunos pelo mundo da matemática.

Este estudo abre portas para pesquisas futuras que possam explorar mais as diversas maneiras pelas quais o xadrez pode ser integrado ao currículo escolar, adaptado a diferentes contextos educacionais e aprofundar as implicações pedagógicas desse enriquecedor recurso.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental; Brasília: MEC/SEF, 1997.

CASTRO, C. **Uma história cultural do xadrez**. Cadernos de Teoria da Comunicação, Rio de Janeiro, v.1, nº2,1994.

CHESS.COM. **Termos de Xadrez:** Valor das Peças. Disponível em: https://www.chess.com/pt-BR/terms/valor-pecas-xadrez#:~:text=Um%20pe%C3%A3o%20vale%20um%20ponto,tem%20valor%20estimado% 20em%20pontos.

COSTA, A. V. P. **Estudo da Aplicação do Jogo de Xadrez como Ferramenta de Ensino de Matemática**. 120f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Piauí, 2018.

CUNHA, K. S. **O Erro Como Instrumento de Aprendizagem**. Texto desenvolvido para disciplina Avaliação da Aprendizagem. UFPE CAA, 2021, p. 1.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. São Paulo: Papirus Editora, 16ª edição, 2008. p. 10.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer. São Paulo: Ática, 1990.

DANTAS, P. L. **XADREZ**. Disponível no site: https://mundoeducacao.uol.com.br/educacao-fisica/xadrez.htm#:~:text=O%20surgimento%20do%20xadrez%20se,que%20prov%C3%AAm%20o%20nome%20xadrez.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3. Ed. São Paulo: Atlas,1991.

LINHARES, A. C. S.; QUEIROZ, A. C. G. **Jogos de Matemática no Ensino do Campo Aditivo**: Diversão e Aprendizagem. Paraíba: UFPB. 2017, p. 14.

MAGINA, S; CAMPOS, T; NUNES, T; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001, p. 22 e 24.

NOGARO, A; GRANELLA, E. **O erro no processo de ensino e aprendizagem**. Revista de Ciências Humanas, v. 5, n. 5, p. 5, 2004.

PINHEIRO, Bárbara Carine Soares. História preta das coisas: 50 invenções científico-tecnológicas de pessoas negras. Livraria da Física, 2021, p. 7.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** – 1ª ed., 2ª reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 9, 23 e 32.

RIBEIRO, D. Sobre o óbvio. In: __. **Ensaios Insólitos**. Porto Alegre: L & PM Editores, 1979, p. 23.

SANTANA, E R. S. **Adição e Subtração**: O Suporte Didático Influencia a Aprendizagem do Estudante? – Ilhéus, BA: Editus, 2012, p. 235.

SANTOS JUNIOR, A. **O Jogo de Xadrez como um Recurso para Ensinar e Aprender Matemática**: Relato de Experiência em Turmas do 6º Ano do Ensino Médio. São Paulo: USP – São Carlos, 2016, p. 20 e 31.

SILVA, G. E. B.; CORRÊA, A. M. **O Jogo de Xadrez**: Possibilidades Pedagógicas para Práticas Interdisciplinares. Paraná: Editora Atena, 2021, p. 29.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Jogos de Matemática de 6º a 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 9.

TORRE, S. D. L. **Aprender com os erros:** O Erro Como Estratégia de Mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 109.

VERGNAUD, G. **Teoria dos Campos Conceituais**. UFRJ, Rio de Janeiro, 1990, p. 1.