



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MANUEL VALOIS CASTILLO QUISPE

**MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA UM
PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA E TRANSPORTE DE VALORES: o caso de um
banco peruano**

Recife
2023

MANUEL VALOIS CASTILLO QUISPE

**MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA UM
PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA E TRANSPORTE DE VALORES: o caso de um
banco peruano**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Área de concentração: Pesquisa Operacional.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer.

Recife

2023

Catálogo na fonte:
Bibliotecária Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

Q8m	Quispe, Manuel Valois Castillo. Modelo de programação linear inteira mista para um problema de transferência e transporte de valores: o caso de um banco peruano / Manuel Valois Castillo Quispe. – 2023. 64 f.: il., fig., tab., abrev. e siglas. Orientador: Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Produção. Recife, 2023. Inclui referências. 1. Engenharia de produção. 2. Abastecimento de dinheiro. 3. Gestão de caixa. 4. Peru. 5. Otimização. 6. Programação linear Inteira mista. I. Kramer, Raphael Harry Frederico Ribeiro (Orientador). II. Título. UFPE 658.5 CDD (22. ed.) BCTG/2023-212
-----	---

MANUEL VALOIS CASTILLO QUISPE

**MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA UM
PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA E TRANSPORTE DE VALORES: o caso de um
banco peruano**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Área de concentração: Pesquisa Operacional.

Aprovada em: 29 / 8 /23.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Maísa Mendonça Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Celso Satoshi Sakuraba (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus acima de tudo, por estar sempre presente em minha vida para me apoiar em todos os momentos e mesmo sem ser a pessoa mais devota, sinto que sempre me acompanhou no meu dia a dia para alcançar meus objetivos.

À minha família, minha mãe Elena Quispe, minha tia Justina Cortez, minha avó Manuela Quispe, que foram a base de quem sou hoje, que me ensinaram bons valores e ser uma pessoa melhor a cada dia e tudo baseado no amor. Agradeço aos meus primos Julián Castro e Efraín Castro, que desde muito pequenos foram como meus irmãos e me ensinaram a conciliar a vida entre o trabalho e a diversão, e, também, pelo carinho dispensado desde criança.

Ao meu orientador Raphael Kramer, meus mais sinceros agradecimentos pelo inestimável apoio durante todo este período de mestrado, talvez eu não tenha sido o aluno mais comunicativo, mas sempre tive seu apoio e consideração para seguir em frente. Sua paciência e sua ajuda é algo que sempre levarei. Ao meu amigo João Batista que me ajudou muito com o idioma e a formatação para o desenvolvimento do trabalho.

Também quero agradecer a um amigo que se tornou como um irmão para mim, Carwyn Morales, obrigado pelos conselhos e ensinamentos que me deu durante minha estada no Brasil. Sinto que aprendi mais coisas agora do que em vários anos no Peru.

A todos os meus amigos do mestrado, por todo o carinho dispensado ao longo deste processo e, também, a todos os professores do mestrado por me transmitirem seus conhecimentos.

RESUMO

A seguinte pesquisa tratou de um problema de otimização de gestão de caixa com base em dados de um banco peruano, propondo um modelo matemático que permite que o dinheiro seja distribuído de forma eficiente para abastecer seus diversos centros de distribuição (e.g., caixas eletrônicos, agências e *retailers*) de acordo com o tipo de moeda (nacionais ou estrangeiros), com o objetivo de satisfazer a demanda do cliente. O objetivo principal deste trabalho de pesquisa foi resolver um problema de transferência e transporte de valores, para determinar as quantidades de cédulas de dinheiro (por tipo de nota) que deveriam ser enviadas a cada cidade do Peru (seja por meio de transporte aéreo ou terrestre, vindo de outra cidade, ou por operações de saque ou depósito do dinheiro por meio do banco central de reservas), de forma que a demanda diária prevista para cada cidade fosse atendida e o custo total de operação e estocagem fosse minimizado. Este trabalho foi realizado por meio de uma proposta de modelo de programação linear inteira mista multi-período e *multi-commodity* que incorporara os diferentes custos envolvidos no processo, definindo os valores necessários para abastecer os diversos centros de distribuição que o banco possui. Observou-se, por meio de experimentos computacionais, que a resolução do modelo matemático proporciona uma redução considerável dos custos envolvidos no processo de transporte, abastecimento e armazenamento de dinheiro.

Palavras-chave: abastecimento de dinheiro; gestão de caixa; Peru; otimização; programação linear Inteira mista.

ABSTRACT

The following research dealt with a problem of optimizing cash management based on data from a Peruvian bank, proposing a mathematical model that allows money to be distributed efficiently to supply its various distribution centers (e.g., Automated Teller Machines, branches and retailers) according to the type of currency (domestic or foreign), with the aim of satisfying customer demand. The main objective of the following research paper was to solve a problem of transfer and transportation of value to determine the amount of banknotes (by type of note) that must be sent to each city of Peru (either by air or land transport, coming from another city, or by operations of withdrawal or deposit of the money through the central bank of reserves), so that the daily demand forecast for each city is met and the total cost of operation and storage is minimized. This work was carried out through a proposal for a multi-period and multi-commodity mixed integer linear programming model that incorporates the different costs involved in the process, defining the values necessary to supply the various distribution centers that the bank has. It was observed, by means of computational experiments, that the resolution of the mathematical model allows a significant cost reduction in the process of cash transportation, replenishment and storage.

Keywords: cash replenishment; cash management; Peru; optimization; mixed integer linear programming.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Metodologia de pesquisa	14
Figura 2 – Etapas para a formulação de um modelo matemático	19
Figura 3 – Fluxo do processo de <i>Cash Replenishment</i>	35
Figura 4 – Dimensões do carro forte	40
Figura 5 – Dimensionamento do espaço de carga do avião.....	41
Figura 6 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 10 Soles na cidade de Lima	51
Figura 7 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 20 Soles na cidade de Lima	52
Figura 8 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 50 Soles na cidade de Lima	53
Figura 9 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 100 Soles na cidade de Lima	54
Figura 10 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 200 Soles na cidade de Lima	55
Figura 11 – Resultado do Modelo Matemático vs Custos Reais	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Economia obtida pelas empresas que utilizam ferramentas de pesquisa operacional	18
Tabela 2 – Operações realizadas pelo banco para abastecer ou estocar dinheiro nos centros de distribuição.....	34
Tabela 3 – Cidades onde o banco tem cofre e filiais.....	34
Tabela 4 – Locais de distribuição do banco.....	34
Tabela 5 – Dados e variáveis do modelo	37
Tabela 6 – Dimensões do maço de notas.....	41
Tabela 7 – Dimensões da capacidade de carga do carro forte e do avião.....	41
Tabela 8 – Estoque inicial de quantidade de nota por cada cofre.....	43
Tabela 9 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 3 dias.....	44
Tabela 10 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 4 dias.....	45
Tabela 11 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 5 dias.....	46
Tabela 12 – Conjunto de valores para as instancias.....	47
Tabela 13 – Parâmetros dos modais de transporte.....	47
Tabela 14 – Parâmetros dos custos diários de estoque.....	48
Tabela 15 – Capacidade de transporte por faixa de valor.....	48
Tabela 16 – Valor mínimo para fazer saques ou depósitos no BCR.....	48
Tabela 17 – Limite superior para saques ou depósitos no BCR por faixa de valor.....	49
Tabela 18 – Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 10 Soles na cidade de Lima.....	56
Tabela 19 – Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 20 Soles na cidade de Lima.....	56
Tabela 20 – Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 50 Soles na cidade de Lima.....	56
Tabela 21 – Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 100 Soles na cidade de Lima.....	57
Tabela 22 – Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 200 Soles na cidade de Lima.....	57
Tabela 23 – Resultados das instâncias	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATM	<i>Automated Teller Machine (Caixa Eletrônico)</i>
CFM	<i>Cash Flow Management</i>
CM	<i>Cash Management</i>
CMO	<i>Cash Management Optimization</i>
CR	<i>Cash Replenishment</i>
CRO	<i>Cash Replenishment Optimization</i>
CSCM	<i>Cash Supply Chain Management</i>
ILP	<i>Integer Linear Programming</i>
IRP	<i>Inventory Routing Problem</i>
JuMP	<i>Julia for Mathematical Programming</i>
LP	<i>Linear Programming</i>
MIP	<i>Mixed Integer Programming</i>
MP	<i>Mathematical Programming</i>
MPLEM	<i>Mixed Integer Linear Programming</i>
OC	Otimização Combinatória
PO	Pesquisa Operacional
RM	<i>Risk Management</i>
VMIP	<i>Variable Mixed Integer Programming</i>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
1.1 Justificativa e Relevância	12
1.2 Objetivos	13
<i>1.2.1 Objetivo geral</i>	<i>13</i>
<i>1.2.2 Objetivos específicos</i>	<i>13</i>
1.3 Metodologia de pesquisa	13
1.4 Organização da Dissertação	15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA.....	16
2.1 Cash Management.....	16
2.2 Pesquisa Operacional	17
2.3 Modelagem Matemática	19
2.4 Evolução do tema	21
2.5 Revisão de literatura	23
3 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	30
3.1 Definições de termos financeiros usados na investigação	30
3.2 Gestão de dinheiro em uma instituição financeira com atuação no Peru	32
4 MODELO MATEMÁTICO	36
4.1 Modelo de programação linear inteira mista	38
5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	40
6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	60
REFERÊNCIAS.....	62

1 INTRODUÇÃO

A gestão da cadeia de suprimentos é um dos processos que é visto, na maioria das empresas ou organizações, como um dos procedimentos fundamentais para que as empresas melhorem seus sistemas de logística e possam garantir de modo estratégico a entrega do produto ou serviço ao usuário final (BOWERSOX et al., 2014).

Nos anos de 2020 a 2022, diversas empresas e organizações se encontraram em um estágio de alta instabilidade devido à pandemia gerada pela coronavírus. No Peru, esse cenário foi agravado pela incerteza política devido ao governo eleito no ano de 2021 que tomou medidas que mudaram completamente as flutuações de caixa dos clientes.

Para evitar uma maior propagação do vírus, o Estado tomou medidas de quarentena que obrigaram as empresas a encerrarem suas atividades mais cedo durante à noite, dificultando assim a previsão da demanda de caixa. Por outro lado, houve ações do governo (e.g., reduzir a importação, fechar negócios ou não firmar tratados com empresas estrangeiras, além do aumento de impostos e da alta rotatividade de ministros e parlamentares), promovendo um cenário crítico; impossibilitando investimentos de agentes externos e gerando situações com elevada variação da taxa de câmbio, levando as pessoas a retirarem ou depositarem mais dinheiro.

O setor bancário apresentou maiores dificuldades na logística de distribuição de seu caixa dada essas incertezas. Isso porque normalmente essas instituições têm que lidar com determinados custos que podem ser variáveis em função do valor de dinheiro a ser transportado entre os centros de distribuição. Desse modo, os bancos trabalharam com custos de operação para atender a demanda do cliente, como é o caso do custo de estocagem que corresponde ao custo de ter uma certa quantidade de dinheiro guardada em cofre, como também o custo operacional e de transporte relacionados com a movimentação do dinheiro de um centro de distribuição para outro. Trata-se, portanto, de uma tarefa considerada complexa, tendo em vista a necessidade de distribuir o dinheiro de forma eficiente, visando a minimização dos custos e o atendimento das demandas dos clientes.

Sendo assim, esta pesquisa propõe um modelo matemático para otimização da gestão de caixa, a fim de alocar melhor o dinheiro entre os centros de distribuição (i.e., caixas eletrônicos, agências, *retailers*) de um determinado banco peruano, com foco na minimização de custos de manutenção e logística. Para validar o modelo, serão utilizados dados reais fornecidos pela instituição bancária.

1.1 Justificativa e Relevância

O processo de abastecimento de dinheiro é muito complexo, pois os bancos têm que assegurar que todos os centros de serviço sejam abastecidos para a satisfação do cliente, que o dinheiro seja transportado com segurança e os custos reduzidos.

Em particular, o contexto que contempla o problema abordado nessa dissertação é o de um banco que busca movimentar dinheiro para diferentes centros de distribuição em cada província do Peru. Esses centros de distribuição podem ser divididos em agências, *retailers* e caixas eletrônicos (ATMs). Para cada um deles, o banco deve decidir a quantidade de dinheiro a ser fornecida para satisfazer a demanda do cliente e ao mesmo tempo buscar reduzir os custos operacionais com essa atividade.

Dentro dessa premissa, a área de *cash management* deverá garantir que a alocação de dinheiro aos centros de distribuição seja realizada de forma eficiente e ágil. Esse processo de gestão de caixa é uma tarefa complexa, devido à quantidade de atributos envolvidos, pois possuem o caixa dividido em moedas estrangeiras, como Euro (EUR), Dólar (USD), e a moeda local, que é o Sol (PEN). Além disso, outros atributos a serem considerados são as denominações de notas, que podem assumir diferentes valores dependendo da moeda considerada.

Outro desafio que a área responsável pela gestão de caixa enfrenta está relacionado à mudança periódica de sua distribuição, devido à demanda diária ser variável. Dessa forma, precisa-se saber a quantidade de dinheiro no final do dia e, com base na previsão de demanda, redistribuir o dinheiro do caixa entre os diversos centros de distribuição para os dias seguintes.

Como o problema enfrentado pela área de caixa financeiro é um problema de caráter combinatório, fica difícil resolvê-lo intuitivamente e obter um resultado de boa qualidade em um curto espaço de tempo (i.e., as poucas horas durante as quais o banco está fechado para o público). Assim, aponta-se a necessidade de uma ferramenta ou modelo que lhes permita encontrar rapidamente uma solução eficiente, que minimize os custos totais de distribuição de caixa.

Não resolver problemas como este de forma adequada pode gerar a falta de dinheiro nos centros de distribuição, o que implicaria também na escassez de dinheiro para os clientes, gerando insatisfação com a empresa, entre outros problemas. Além disso, uma má alocação pode acarretar custos extras por se movimentar o dinheiro mais vezes do que o necessário, o que inclui custos operacionais e de estocagem.

Desse modo, o papel da Pesquisa Operacional neste estudo de caso é ajudar os gestores a tomarem melhores decisões quanto ao fornecimento de dinheiro aos centros de distribuição, por meio da modelagem matemática. A pesquisa apresenta uma grande contribuição para a área científica, pois o modelo proposto poderá servir de referência ou apoiar as decisões de outros bancos que lidam com a distribuição de dinheiro aos seus diversos centros de distribuição.

1.2 Objetivos

A seguir são apresentados o objetivo geral e os objetivos específicos desta dissertação.

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho consiste em criar um modelo de programação linear inteira mista para um problema de transferência e transporte de valores para o caso de um banco peruano.

1.2.2 Objetivos específicos

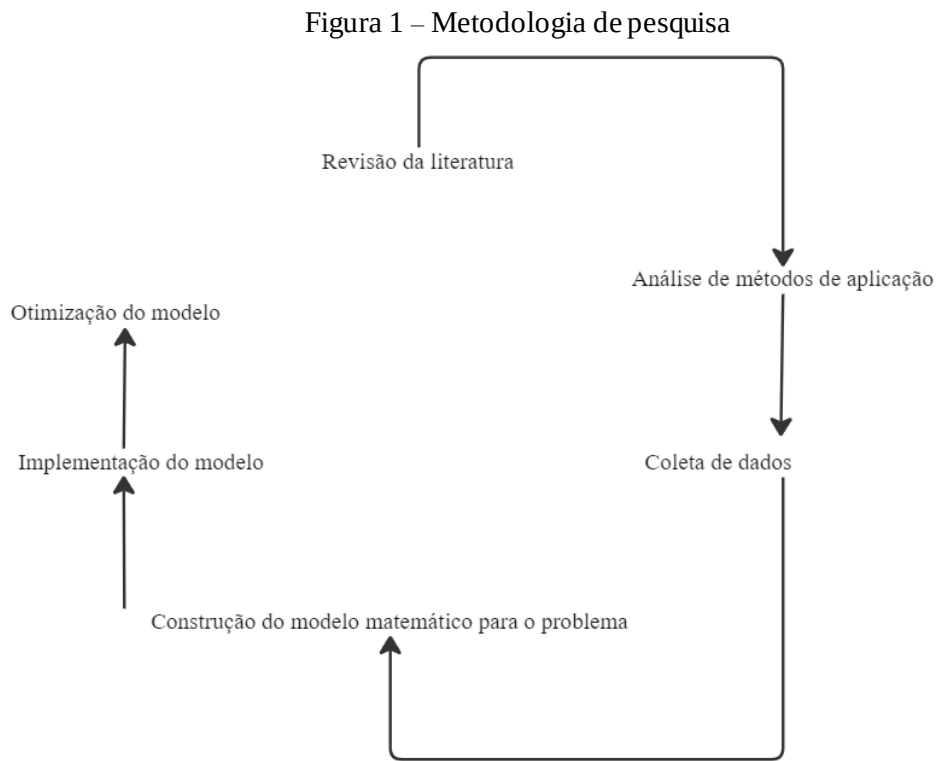
Os objetivos específicos são os seguintes:

- Fazer uma revisão aprofundada da literatura;
- Modelar o problema por meio de programação matemática;
- Estimar a demanda de cada tipo de cédula em cada centro de distribuição, que será a entrada do modelo matemático;
- Implementar o modelo matemático;
- Resolver o modelo e analisar os resultados.

1.3 Metodologia de pesquisa

A abordagem da presente pesquisa é quantitativa, dado que apresenta uma recopilção de dados numéricos do banco e de outras fontes de investigação para o desenvolvimento do modelo matemático. Como abordagem quantitativa, a característica mais importante que deve possuir a pesquisa é que os valores devem ser mesuráveis (CAUCHICK et al.,2018).

Adicionalmente, a pesquisa tem uma classificação de natureza aplicada já que seu objetivo é resolver problemas práticos, obter resultados e avaliar a possibilidade de sua aplicação para o caso real. Isso quer dizer que os dados e modelo matemático desenvolvido para o seguinte problema são replicáveis em problemas reais de gestão de dinheiro em bancos que possuam as mesmas características.



Fonte: O Autor (2023)

Primeiramente foi feita uma revisão de literatura, a fim de conhecer mais sobre o problema de abastecimento de dinheiro na logística dos bancos, e dos modelos matemáticos que foram desenvolvidos relacionados ao tema. A revisão permitiu identificar diferentes modelos que foram usados desde modelos de programação lineares até heurísticas. Isso forneceu uma compreensão mais profunda de fatores que devem ser levados em consideração, como são os dados de *input* e as variáveis, e possíveis soluções que poderiam ser aplicáveis.

A revisão da literatura foi essencial para a seleção e adaptação do modelo de programação linear inteira mista no contexto da pesquisa. A seleção do modelo a ser utilizado foi feita considerando as características do problema, além da praticidade de adaptação de acordo com as restrições ou variáveis que chegassem a aparecer.

Alguns dados foram fornecidos pelo banco para a modelagem, e outros foram obtidos tomando como base algumas referências da literatura. A construção do modelo foi realizada por meio da inclusão das restrições e variáveis que o banco possuía com o objetivo de reduzir os custos do estoque e operação. Finalmente, o modelo foi implementado por meio da linguagem de programação Julia obtendo assim os resultados, os quais foram analisados e avaliados por meio de comparação com as práticas adotadas pela empresa.

1.4 Organização da Dissertação

Além desta seção introdutória, a dissertação possui mais 5 seções, cujos conteúdos são descritos abaixo:

- **Seção 2:** Fundamentação teórica e revisão da literatura, incluindo: definição, classificação e avanços na área de programação linear inteira mista, como também revisão de trabalhos com propostas de solução para problemas relacionados ao tema.
- **Seção 3:** Define as características do problema, desde as variáveis, restrições e função objetivo.
- **Seção 4:** Apresenta o modelo matemático proposto para a resolução do problema.
- **Seção 5:** Reporta os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos.
- **Seção 6:** Apresenta a conclusão do trabalho, comentando sobre as contribuições e limitações encontradas. Também são apresentados direcionamentos para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

Esta seção apresenta o referencial teórico acerca dos conceitos relacionados à programação linear (LP) e *cash management* (CM), desde sua definição até os termos comumente utilizados. Sucessivamente, são apresentados o referencial teórico e a revisão da literatura acerca do *cash replenishment optimization* (CRO), apresentando as problemáticas abordadas, os objetivos propostos e os resultados obtidos em pesquisas anteriores.

2.1 Cash Management

Van Anholt (2016) explica que o *Cash Management* (CM) é um componente crítico do setor bancário, pois envolve o transporte e a distribuição eficiente de dinheiro para os diversos caixas eletrônicos (*retailers* e agências bancárias), garantindo a segurança, o equilíbrio de custos e níveis de serviço e a manutenção dos níveis de estoque. O autor propõe uma estrutura para otimizar os processos de CM, que inclui quatro etapas principais: i) analisar padrões de demanda, ii) projetar a rede logística para a distribuição de dinheiro para os diferentes centros de distribuição, iii) gerenciar o estoque para cada centro e iv) monitorar e melhorar o desempenho.

De acordo com Kreitner (1995), “a gestão pode ser definida como um processo de trabalhar com comunicação assertiva com a área para alcançar os objetivos organizacionais em um ambiente em mudança”. Por outro lado, a gestão também é conhecida como a administração e uso adequado dos recursos da empresa. Estes servirão como um meio para manter o funcionamento de uma organização, fazendo o melhor uso dos recursos da organização (VAN HORNE, 2002).

Existem similares definições para o que é gestão, porém existem diferenças de acordo com a área que estiver enfocada. No presente trabalho de investigação o foco principal será a gestão de dinheiro e logística em um banco, isto devido a ser um dos processos mais fundamentais para a organização em estudo.

A gestão de caixa não é apenas um processo que controla algumas operações sobre dinheiro, eles podem trazer grandes benefícios para a organização. Uma boa gestão de dinheiro ajuda a garantir a disponibilidade de recursos financeiros para as atividades operacionais e a tomada de decisões estratégicas. Também é possível reduzir custos de transação, melhorar a satisfação do cliente e gerar melhores contratos que possam beneficiar a empresa (HAMZA; MUTALA; ANTWI, 2015).

2.2 Pesquisa Operacional

A pesquisa operacional (PO) é considerada uma área do conhecimento que ajuda a tomar melhores decisões, modelando requisitos, restrições e variáveis, levando em consideração o tomador de decisão (ARENALES et al., 2007).

Seguindo as definições de diferentes autores, a PO é considerada uma disciplina que lida com a aplicação de métodos analíticos avançados para ajudar a tomar melhores decisões. De acordo com Hillier e Lieberman (2010), a PO trata da “aplicação de métodos quantitativos para resolver problemas que surgem em uma ampla gama de áreas funcionais em negócios, indústria, governo e outras empresas”.

A PO busca a formulação de modelos matemáticos para sistemas complexos, usando técnicas quantitativas para gerar resultados e poder tomar decisões. Atualmente essa área é usada para resolver problemas em diversas áreas, incluindo manufatura, logística, transporte, saúde, finanças e *marketing*.

De acordo com os autores, a PO pode ajudar as organizações a otimizar suas operações, reduzir custos, melhorar a eficiência e tomar decisões mais racionais. Dentro das técnicas usadas na pesquisa operacional estão a modelagem matemática, programação linear, programação inteira, programação dinâmica, teoria das filas, simulação e análise estatística. Em conclusão, Hillier e Lieberman (2010), consideram a pesquisa operacional como uma ferramenta poderosa para as organizações que buscam tomar decisões baseadas em dados e melhorar seu desempenho.

De acordo com Taha (2012), “a pesquisa operacional é uma abordagem quantitativa”, que assim como mencionado pelo autor anterior, é usada para tomar decisões baseado em dados. O autor considera a PO como, “um método científico que fornece aos departamentos de uma empresa uma base quantitativa para a tomada de decisões relativas para as operações sob seu controle” (TAHA, 2012). Considera também que é um campo multidisciplinar que se baseia em técnicas de matemática, estatística, ciência da computação e engenharia. O autor vê a pesquisa operacional como uma ferramenta poderosa para todas as organizações que buscam melhorar suas operações com dados históricos e matemática.

De acordo com Bronson (1993), a PO enfatiza a importância do uso de modelagem matemática, análise estatística e técnicas de otimização para resolver problemas do mundo real. No geral, o autor a considera como uma ferramenta valiosa para melhorar a eficiência, reduzir custos e tomar decisões baseado em dados para ser utilizada em uma ampla gama de setores e aplicações.

Para Albright (2008), a PO usa modelos matemáticos, análise estatística, técnicas de otimização e simulações de computador para ajudar os tomadores de decisão a tomar decisões mais bem informadas. Albright (2008), assim como os autores previamente mencionados, concorda que a área de PO é um campo interdisciplinar e que é particularmente útil para analisar e otimizar sistemas de grande escala, como redes de transporte, processos de fabricação e cadeias de suprimentos. O autor considera a pesquisa operacional como uma ferramenta poderosa para melhorar a eficiência, reduzir custos e resolver problemas complexos em uma variedade de configurações.

O ponto de similaridade de cada autor é que a PO é uma disciplina que permite por meio de dados e matemática, formular um problema real num modelo matemático, para poder obter resultados por meio de dados, seja para prever, gerir eficientemente um processo, reduzir custos, melhorar a logística de uma companhia, entre muitos outros benefícios.

Historicamente a PO tem contribuído significativamente para aumentar a produtividade da economia de vários países (HILLIER; LIBERMAN, 2010). A Tabela 1 uma lista de aplicações de PO em diferentes empresas e as economias por elas obtidas. No presente trabalho, a PO será a fonte fundamental para o desenvolvimento de uma melhora na gestão do dinheiro de um banco peruano.

Tabela 1 – Economia obtida pelas empresas que utilizam ferramentas de pesquisa operacional

Organização	Natureza da aplicação	Seção	Economia anual (US\$)
Federal Express	Planejamento logístico de despachos	1.3	Não estimada
Continental Airlines	Otimizar a realocação de tripulações quando ocorrem desajustes nos horários de voo	2.2	40 milhões
Swift & Company	Aumentar as vendas e melhorar o desempenho na fabricação	3.1	12 milhões
Memorial Sloan-Kettering Cancer Center	Procedimentos de tratamentos radioterápicos	3.4	459 milhões
United Airlines	Programar turnos de trabalho nas centrais de reserva e nos balcões em aeroportos	3.4	6 milhões
Welch's	Otimizar o uso e a movimentação de matéria-prima	3.5	150 mil
Samsung Electronics	Desenvolver métodos de redução de tempo de fabricação e níveis de estoque	4.3	200 milhões mais receitas
Pacific Lumber Company	Gestão de ecossistemas florestais a longo prazo	6.7	398 milhões VPL*
Procter & Gamble	Redesenho do sistema de produção e distribuição	8.1	200 milhões
Canadian Pacific Railway	Planejamento de rotas para frete ferroviário	9.3	100 milhões
United Airlines	Realocação de aeronaves quando ocorrem problemas	9.6	Não estimada
U.S. Military	Planejamento logístico das Operações Tempestade no Deserto	10.3	Não estimada
Air New Zealand	Alocação de tripulação de voo	11.2	6,7 milhões
Taco Bell	Programar a escala de funcionários nas lojas da rede	11.5	13 milhões
Waste Management	Desenvolvimento de um sistema de gerenciamento de rotas para coleta e eliminação de lixo	11.7	100 milhões
Bank Hapoalim Group	Desenvolvimento de um sistema de apoio à tomada de decisão para analistas de investimentos	12.1	31 milhões mais receitas
Sears	Programação e rotas de veículos para as frotas de entrega e de atendimento domiciliar	13.2	42 milhões
Conoco-Phillips	Avaliação de projetos de exploração petrolífera	15.2	Não estimada
Workers' Compensation	Gestão de pedidos de benefícios por invalidez e reabilitação de alto risco	15.3	4 milhões
Westinghouse	Avaliar projetos de pesquisa e desenvolvimento	15.4	Não estimada
Merrill Lynch	Gestão de riscos de liquidez para linhas de crédito rotativo	16.2	4 bilhões mais liquidez
PSA Peugeot Citroën	Orientar o processo de projeto para plantas de montagem de veículos eficientes	16.8	130 milhões mais lucros
KeyCorp	Aumentar a eficiência do serviço dos caixas de banco	17.6	20 milhões
General Motors	Aumentar a eficiência das linhas de produção	17.9	90 milhões
Deere & Company	Controle de estoques por meio de uma cadeia de suprimentos	18.5	1 bilhão menos estoque
Time Inc.	Gerenciamento dos canais de distribuição para revistas	18.7	3,5 milhões mais lucros
Bank One Corporation	Gestão de linhas de crédito e taxas de juros para cartões de crédito	19.2	75 milhões mais lucros
Merrill Lynch	Análise para estabelecimento de preços para o fornecimento de serviços financeiros	20.2	50 milhões mais receitas
AT&T	Projeto e operação de call centers	20.5	750 milhões mais lucros

Fonte: Hillier e Liberman (2010)

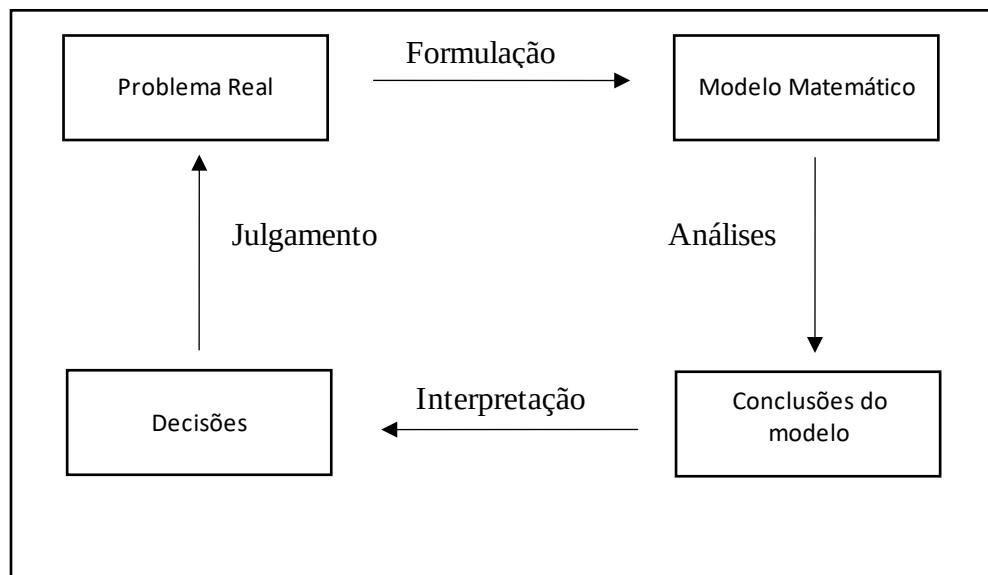
2.3 Modelagem Matemática

As etapas para a formulação de um modelo matemático são representadas na Figura 2. O processo parte de um problema real, então os dados mais relevantes são ingressados, o modelo matemático é criado identificando suas variáveis, restrições e função objetivo. Os resultados são obtidos, as conclusões da modelagem são feitas e as decisões são tomadas levando em consideração esses resultados.

Alguns dos benefícios de modelar um problema matemático é que ele descreve um problema de forma muito mais concisa, de modo que tende a tornar-se toda a estrutura do problema mais compreensível e ajuda a revelar importantes relações de causa e efeito. Também permite maior clareza sobre quais dados adicionais são importantes para a análise e, finalmente, permite criar uma conexão entre o uso de técnicas matemáticas e computacionais para analisar o problema da maneira mais criteriosa (HILLIER; LIBERMAN, 2010).

O modelo matemático, por sua vez, deve ser suficientemente detalhado para captar os elementos essenciais do problema, e ser capaz de descrever o comportamento relevante do sistema (ARENALES et al., 2007).

Figura 2 – Etapas para a formulação de um modelo matemático



Fonte: Arenales et al. (2007)

Há certos pontos a serem observados ao desenvolver modelos matemáticos. Como um modelo é uma idealização abstrata de um problema, aproximações simplificadas e suposições são necessárias para que o modelo possa ser tratável em muitos casos. Portanto, deve-se tomar

cuidado para que o modelo seja sempre uma representação válida do problema. O critério para julgar a validade de um modelo é verificar se ele atende aos requisitos do cliente (HILLIER; LIBERMAN, 2010).

A classificação dos modelos matemáticos pode depender de múltiplos fatores. De acordo com os dados, eles podem ser divididos em determinísticos, híbridos e estocásticos.

No caso de ser um problema determinístico, seus dados não dependem do acaso e com as informações existentes é possível determinar o valor em outro instante de tempo, enquanto com a estocástica suas variáveis dependem do acaso, e as informações existentes podem não ser suficientes para determinar seu comportamento em outro instante de tempo.

Problemas determinísticos podem ser diferenciados por variáveis, função objetivo e restrições, onde na função objetivo, pode haver programação linear e não linear. A programação linear é um procedimento matemático que resolve um problema formulado por meio de uma função objetivo linear em todas as suas variáveis. Por outro lado, a programação não linear é aquela em que a função objetivo ou as restrições são funções não lineares das variáveis de decisão.

Também existe a programação linear inteira que tem a mesma lógica da programação linear, com a diferença que suas variáveis pertencem ao domínio dos números inteiros. Seguindo, temos a programação linear inteira mista, que possui suas variáveis discretas e contínuas. Por fim, temos a programação inteira binária, neste caso as variáveis podem assumir 2 valores, que podem ser 0 ou 1 (HILLIER; LIBERMAN, 2010).

Esses modelos matemáticos geralmente são aplicados a problemas de alocação, rede, transporte e estoque. Problemas de alocação são aqueles que buscam alocar uma quantidade de recursos para realizar alguma atividade específica com menor custo. Alguns dos problemas de rede são mais vistos na determinação do cronograma de atividades para projetos como PERT e CPM (TAHA, 2012).

Problemas estocásticos podem ser diferenciados por processo de serviço ou chegada, que podem ser modelados por funções Poisson ou exponenciais. Isso se aplica a tipos de problemas como cadeias de Markov, teoria dos jogos, filas de espera e inventário de demanda probabilística.

As cadeias de Markov tornaram-se um conceito desenvolvido dentro da teoria da probabilidade e da estatística que estabelece uma forte dependência entre um evento e outro evento imediatamente anterior (TAHA, 2012). A teoria dos jogos, por outro lado, tem uma relação distante com a estatística, onde o objetivo não é apenas analisar elementos aleatórios, mas sim o comportamento estratégico dos jogadores. As filas de espera, por sua vez, podem

ser modeladas como um processo estocástico. Nesse tipo de problema, a variável aleatória é definida como o número de transações no sistema em um determinado momento. Cada valor que essa variável pode assumir tem uma probabilidade de ocorrência associada (TAHA, 2012).

Finalmente, em problemas híbridos podemos ver algumas das aplicações mais conhecidas, como problemas de programação dinâmica e heurísticas. A programação dinâmica é uma técnica matemática usada para resolver problemas matemáticos selecionados, nos quais uma série de decisões são tomadas sequencialmente e os métodos heurísticos são procedimentos para resolver um problema de otimização complexo por meio de uma abordagem intuitiva com o objetivo de melhorar o valor do critério do modelo (TAHA, 2012).

2.4 Evolução do tema

A história da programação linear começa em 1947 com George B. Dantzig e o método simplex. Naquela época a programação linear era utilizada nas áreas militar, industrial e até governamental, entre muitos outros usos. A Programação Linear, devido a sua grande capacidade de modelar problemas complexos e grandes, proporcionou ao usuário a possibilidade de resolver um problema em um tempo razoável.

Os benefícios oferecidos pela Programação Linear tornaram-se mais visíveis após a Segunda Guerra Mundial, onde ficou evidente a importância do planejamento e da utilização dos recursos disponíveis entre diversos projetos. Isso despertou o interesse de diversos economistas, matemáticos e estatísticos, que contribuíram com pesquisas que enriqueceram a área.

Nas décadas de 1960 e 1970, a PO foi expandida para incluir outras técnicas de otimização, como programação inteira, programação dinâmica e programação não linear. Ao mesmo tempo, a PO começou a incorporar modelos probabilísticos e técnicas de simulação, o que fez que muitos outros analistas conseguissem estudar sistemas complexos que não poderiam ser facilmente modelados usando métodos determinísticos.

Já depois, nas décadas de 1980 e 1990 aconteceu o surgimento da análise de decisão, que é um método para tomar decisões sob incertezas. Nessa época teve o início do desenvolvimento de modelos que incorporam fatores incertos e a atribuição de probabilidades a vários resultados. Esse tipo de abordagem tornou-se mais importante na área da saúde especialmente, onde as decisões sobre o atendimento ao paciente geralmente tinham um alto grau de incerteza.

Nos últimos anos, a PO seguiu evoluindo, com foco em *big data*, *machine learning* e a famosa inteligência artificial. Essas técnicas possibilitam que os analistas analisem grandes conjuntos de dados e desenvolvam modelos preditivos que possam ser usados para tomar decisões mais informadas. No geral, a evolução foi impulsionada por avanços na matemática, computação e análise de dados, bem como por mudanças nos problemas que os profissionais foram tendo à medida que a tecnologia foi avançando. Atualmente, a PO mostra-se como uma ferramenta essencial para empresas, governos e outras organizações, pois buscam tomar melhores decisões em um mundo cada vez mais complexo e incerto.

Tal como a história da programação linear teve um grande impacto em diferentes áreas e mercados, a sua aplicação no setor bancário não tem sido exceção. Nesta área também foram desenvolvidos modelos de alocação de recursos e transportes. Ao longo do tempo, a cada nova investigação, foram acrescentadas mais variáveis ou restrições que permitiram ampliar a literatura na aplicação da pesquisa operacional.

Embora a literatura na atualidade nos apresenta vários artigos, investigações e estudos de caso em que incidem apenas sobre um ponto de distribuição que seriam os ATMs, todos convergem na busca pela minimização dos custos envolvidos na gestão do dinheiro. Alguns dos artigos que serão apresentados nesta pesquisa de dissertação tendem a apresentar combinações de previsão e programação linear para obter melhores resultados.

Dentre os principais autores e pioneiros da literatura de *cash management*, podemos encontrar a Miller e Orr (1966), com seu modelo matemático que busca otimizar os custos da gestão de dinheiro na organização, que envolvem custos de juros e outras operações. Por outro lado, também temos grandes contribuições, como Simutis et al. (2007), com o uso de redes neurais para otimização da gestão de dinheiro por meio de previsões da demanda. Finalmente, Cardona e Moreno (2012), usaram um método de rede neural para prever a demanda por ATMs e, finalmente, um modelo de programação linear para distribuição de dinheiro.

Na literatura há mais investigações relacionadas à gestão e distribuição de dinheiro centrado ao *Cash Replenishment Optimization*, e poucas buscam atender a todos os centros de distribuição que o banco possui. Por se tratar de um problema complexo, envolvendo um número grande de variáveis, seria viável se o escopo fosse trabalhado agrupando essas variáveis, buscando atender as cidades como um todo e não separando cada centro de distribuição de cada cidade em que o banco atua, mas sim o valor total que deveriam possuir por cada cidade para satisfazer a demanda a nível nacional.

Daí o impacto e a importância deste estudo, que visa gerenciar corretamente quanto dinheiro deve ter cada cidade para poder satisfazer a demanda de dinheiro por diferentes períodos de tempo, buscando assim propor um modelo que permita otimizar a gestão de caixa, tendo em mente o foco de atender um país inteiro e identificando de modo eficiente a demanda de cada centro de distribuição (caixas eletrônicos, agências, *retailers*).

2.5 Revisão de literatura

Esta seção apresenta uma série de trabalhos de pesquisa relacionados à otimização da gestão de caixa, com foco na apresentação do problema e nos métodos ou abordagens adotadas para resolvê-lo.

Na pesquisa de Özer (2019), o autor busca otimizar a reposição de dinheiro nos caixas eletrônicos, dividindo o problema em duas partes, que se baseiam em prever a demanda e depois encontrar um algoritmo que otimize o programa de reposição de caixa, pois o banco objeto de estudo não está fazendo uma boa gestão e logística do dinheiro, gerando custos adicionais relacionados a estocagem e a operação. No entanto, o foco do estudo está centrado na segunda parte, que seria a programação dinâmica para a reposição de dinheiro nos caixas eletrônicos, para que os caixas eletrônicos nunca fiquem sem dinheiro. Ao final da pesquisa, após a formulação e as análises, o autor constata que o modelo matemático formulado lhe permite obter bons resultados com a otimização da distribuição de dinheiro em pouco tempo.

Chotayakul et al. (2013) estudaram um problema cujo objetivo era minimizar os custos de operação para colocar dinheiro em caixas eletrônicos para cada período em um horizonte de tempo. Nesta investigação, o problema é formulado como um problema de programação inteira mista (MIP, *Mixed Integer Programming*). Por meio dessa nova formulação foi possível encontrar soluções muito boas para problemas de grandes tamanhos em um curto espaço de tempo.

Bati e Gozupek (2019), formularam um problema de distribuição de dinheiro por meio da programação linear inteira. O problema consiste em decidir quando visitar um caixa eletrônico, quanto dinheiro depositar e qual seria a melhor rota para distribuição de dinheiro nesses caixas eletrônicos. Com a pesquisa, foi possível observar como as heurísticas e a programação linear permitem ter uma ampla variedade de opções para solucionar problemas como o de *Cash Replenishment Optimization*, além da redução de estocagem e reciclagem de cédulas danificadas.

Diao, Sarkar e Jan (2016), obtiveram um bom resultado para distribuição de dinheiro para caixas eletrônicos usando um modelo de programação linear inteira. Os autores propõem uma estrutura de otimização com muitas interações e instâncias, a fim de tomar decisões em busca do valor ideal e do tempo de recarga de caixa. Em conclusão, a maioria das investigações alcançou ótimos resultados para o problema de *Cash Replenishment Optimization*, demonstrando que o desenvolvimento de um modelo matemático e o uso de ferramentas como programação linear e heurísticas podem fornecer bons resultados para diferentes problemas.

Por outro lado, Simutis et al. (2007), usaram o algoritmo *Levenberg-Marquardt* para prever a demanda e assim proceder para estimar quanto dinheiro cada caixa eletrônico precisará ter periodicamente. Os autores propõem um modelo matemático que leva em consideração vários fatores, como padrões de transações em caixas eletrônicos, uso de dinheiro e custos de reabastecimento de dinheiro, para otimizar o processo de gerenciamento de caixa. A abordagem proposta envolve a identificação do número mínimo de reposição de dinheiro necessário para manter um nível suficiente de dinheiro na rede ATM. Os autores usaram experimentos de simulação para demonstrar a eficácia da abordagem proposta na otimização do processo de gerenciamento de caixa em redes ATM.

Ghodrati, Abyak e Sharifhosseini (2013), utilizam um algoritmo genético para saber a melhor estratégia de abastecimento para cada caixa eletrônico. Os autores identificam quanto seria a quantidade de dinheiro ideal para abastecer cada um dos equipamentos e em uma segunda etapa buscam melhorar a estratégia classificando cada ATM com base no horário de trabalho, seja dia de semana, feriado ou final de semana, tudo de acordo com a demanda de cada um. A lógica do algoritmo proposto pelos autores é buscar mudar as etapas que costumam ser vistas em alguns artigos, propondo então alterar a ordem de previsão e otimização para uma de otimização e previsão. O estudo discute os desafios associados ao gerenciamento do suprimento de dinheiro dos caixas eletrônicos, como minimizar o risco de saque, minimizar o número de recargas de dinheiro necessárias e maximizar a disponibilidade de dinheiro para os clientes. Os autores enaltecem que a abordagem tradicional para o gerenciamento de dinheiro em caixas eletrônicos envolve a definição de um nível de limite estático para dinheiro na máquina, o que geralmente resulta em subutilização de dinheiro. A abordagem que é apresentada pelos autores é baseada em um algoritmo genético que oferece uma solução mais dinâmica e eficiente para o gerenciamento de dinheiro em caixas eletrônicos. Os resultados mostram que o algoritmo pode reduzir o número de recargas de dinheiro necessárias, mantendo um alto nível de satisfação do cliente. A pesquisa fornece uma

abordagem promissora para otimizar o processo de gerenciamento de dinheiro em caixas eletrônicos usando algoritmos genéticos, o que pode resultar em economia significativa de custos e melhor experiência do cliente.

Cardona e Moreno (2012) propõem um estudo para reduzir os custos de gestão de caixa combinando técnicas de Programação Linear com mineração de dados e para previsão de caixa sobre a demanda, com a finalidade de otimizar recursos de caixa em um ambiente bancário. O artigo começa discutindo os desafios associados ao gerenciamento de dinheiro, como o alto custo de transporte e a necessidade de manter um nível suficiente de dinheiro em cada caixa eletrônico. Os autores apresentam uma abordagem de dois estágios para enfrentar esses desafios. Na primeira parte do estudo, os autores usam técnicas de mineração de dados, como agrupamento e árvores de decisão, para prever a demanda de caixa com base nos dados históricos das transações. Na segunda parte, os autores usam a LP para otimizar os recursos de caixa determinando a distribuição ótima de caixa em diferentes locais com base na demanda de caixa prevista. O modelo de LP considera fatores como custos de transporte de caixa, custos de manutenção de caixa e requisitos de nível de serviço. Os resultados mostram que a abordagem proposta pode reduzir significativamente os custos de transporte e melhorar a eficiência das operações.

Ágoston et al. (2016) discutem os desafios associados ao gerenciamento de caixa para bancos e empresas de transporte de valores, como a necessidade de minimizar os custos de transporte de dinheiro e maximizar a eficiência de utilização de dinheiro. A abordagem proposta envolve o desenvolvimento de um modelo de previsão da demanda com o modelo de Baumol que por meio de variáveis como a demanda histórica, custos de retenção de caixa, custos de transporte, busca encontrar uma solução ótima que maximize o lucro. Os autores usam experimentos de simulação para demonstrar a eficácia da abordagem proposta na obtenção de uma melhoria de Pareto no processo de gerenciamento de caixa. Os resultados indicam que a abordagem adotada pode reduzir significativamente os custos de transporte de dinheiro e melhorar a eficiência de utilização de dinheiro para bancos e empresas de transporte de valores dado que os fluxos de efetivo sejam constantes no tempo e não tiverem restrições para manter ou solicitar efetivo.

Van Anholt et al. (2016) faz uso do algoritmo *Branch-and-Cut* para resolver um problema de abastecimento multi-período de ATMs. O autor começa modelando o problema atual como um modelo de programação não linear inteira e, depois de executar um processo de agrupamento, realiza uma linearização e adição de algumas políticas, com o efeito de simplificar o problema. O estudo começa discutindo os desafios associados ao

reabastecimento de caixas eletrônicos, como a necessidade de manter níveis de caixa suficientes e, ao mesmo tempo, minimizar os custos de transporte. O autor propõe um modelo de *Iventory Routing Problem* (IRP) que leva em conta tanto a gestão de estoque quanto as decisões de roteamento. O modelo busca minimizar o custo total do processo de reabastecimento, incluindo custos de transporte, custos de manutenção de estoque e custos de falta de caixa. Os resultados mostram que o modelo pode reduzir significativamente o custo total do processo de reabastecimento, mantendo um alto nível de atendimento ao cliente.

No trabalho de Ekinci, Lu e Duman (2015), os autores buscam otimizar a reposição de caixas em caixas eletrônicos por meio do uso de previsões de demanda por grupos. No artigo, eles propõem um modelo matemático que leva em consideração os dados históricos das transações dos caixas eletrônicos e a demanda de grupo prevista para cada caixa eletrônico para determinar o cronograma ideal de reposição de dinheiro. Para poder realizar as análises eles usam os dados que são *inputs* de um grande banco turco para demonstrar a eficácia do modelo proposto. Os resultados mostraram que o modelo foi capaz de reduzir o custo total de reabastecimento em até 17%, garantindo que os caixas eletrônicos nunca ficassem sem dinheiro. Por outro lado, os autores chegaram a descobrir que o modelo era robusto e poderia lidar com vários cenários, como picos inesperados na demanda ou mudanças nos locais dos caixas eletrônicos.

Castro (2009) apresenta um modelo de programação estocástica para otimizar o gerenciamento de caixa em bancos. O modelo leva em consideração a incerteza nos fluxos e saldos de caixa e busca minimizar o custo total da gestão de caixa, que inclui os custos operacionais e desabastecimento da caixa. O autor demonstra a eficácia do modelo por meio de um estudo de caso com dados de um banco espanhol. Os resultados mostram que o modelo foi capaz de reduzir significativamente o custo total, mantendo um nível adequado de disponibilidade de caixa.

Larrain, Coelho e Cataldo (2017) propõem um algoritmo *Variable Mixed Integer Programming* (VMIP) *Neighborhood Descent* para otimizar o estoque e a distribuição de dinheiro em caixas eletrônicos. Os autores explicam que os caixas eletrônicos são caros de operar, por isso a importância do gerenciamento destes, tendo em vista que a má gestão é um aspecto crucial que pode afetar a lucratividade. Desse modo, o algoritmo proposto é projetado para encontrar uma solução viável que minimize o custo total de gerenciamento de caixa em redes ATM. Os autores realizaram experimentos computacionais utilizando dados de um banco brasileiro, e os resultados mostraram que o algoritmo VMIP foi capaz de reduzir o

custo total de gerenciamento de caixa em até 20% quando comparado aos métodos existentes utilizados pelo banco.

Ekinci, Serban e Duman (2019) exploram o problema de otimizar as políticas de reposição de caixa em caixas eletrônicos sob incerteza de demanda. O estudo explica que a incerteza da demanda é um desafio comum no setor bancário, pois é difícil prever a quantidade exata de dinheiro que será necessária em cada caixa eletrônico. É apresentado um modelo matemático que leva em consideração a incerteza da demanda e os custos associados à reposição e escassez de caixa, e o risco de ficar desabastecido para os clientes. O modelo busca determinar a política ótima com quantidades de reposição de dinheiro para um determinado conjunto de caixas eletrônicos, levando em consideração vários fatores, como o custo do transporte do dinheiro, o custo de manter o excesso de dinheiro e o custo da falta de dinheiro. Neste trabalho, realizam-se experimentos computacionais usando como *input* dados de um banco turco para avaliar a eficácia do modelo proposto. Os resultados mostraram que o modelo foi capaz de reduzir o custo total de reposição de caixa em até 30%, mantendo os níveis de serviço exigidos.

Alsagoor, Alharbi e Abdel-Aal (2020) apresentam uma política de reabastecimento de inventário multi-período para várias redes de ATMs. No estudo, explica-se que a prática atual de reabastecimento de dinheiro em redes de caixas eletrônicos geralmente é baseada em intervalos de tempo fixos ou níveis de estoque fixos, que podem não ser ótimos e podem levar a falta de dinheiro ou excesso de caixa. Os autores apresentam um modelo matemático que leva em consideração a incerteza da demanda de caixa, o custo de retenção de caixa e o custo de reposição de caixa. O modelo no presente artigo busca determinar a política e quantidade de dinheiro ótima para reposição de estoque para um determinado conjunto de caixas eletrônicos em um horizonte multi-período, considerando o *trade-off* entre o custo de manter o excesso de caixa e o custo da falta de caixa. Os autores utilizam como base dados de um banco da Arábia Saudita para demonstrar a eficácia da política proposta. Os resultados mostraram que esta política foi capaz de reduzir o custo total de reposição de caixa em até 30% em relação à prática adotada pela empresa, além de sugerir que se pode ter economias significativas de custos e melhorar os níveis de serviço para os bancos, destacando a importância de considerar a incerteza e os horizontes multi-período nas políticas de reposição de caixa.

Solanki (2019) explora o problema de gerenciamento de estoque de caixa no setor de varejo. O artigo apresenta um modelo matemático que leva em consideração a demanda por caixa, o custo de retenção de caixa e o custo de falta de caixa para determinar o nível ótimo de

estoque de caixa. Os autores realizaram um estudo de caso usando dados de uma loja da Índia para demonstrar a eficácia do modelo proposto. Os resultados mostraram que o modelo foi capaz de reduzir o custo total da gestão de estoque em caixa em até 25%, garantindo que a loja nunca ficasse sem dinheiro.

Someya (2014) propõe um método para reduzir o custo operacional de ATMs otimizando o planejamento de reposição de dinheiro. No artigo, o autor sugere um modelo matemático que incorpora a previsão da demanda dos caixas eletrônicos, como também o custo de reposição de dinheiro e o custo de saque. O modelo é testado usando dados reais de caixas eletrônicos do Japão, e os resultados mostram que o método proposto pode alcançar economia de custos de até 12% em comparação com o método atual. O modelo pode lidar com diferentes cenários, como mudanças na demanda de caixa, eventos de saque e número de veículos disponíveis para reposição de caixa.

Balakrishnan (2021) apresenta um estudo sobre gerenciar com eficiência as redes de caixas eletrônicos, mostrando que é importante prever com precisão a demanda de dinheiro, garantindo que os caixas eletrônicos sejam reabastecidos com fundos suficientes. Dentro dos métodos que o autor usa no artigo foram analisados a demanda de caixas eletrônicos, incluindo modelos de séries temporais, modelos de regressão e algoritmos de aprendizado de máquina. Modelos de séries temporais como *média móvel integrada autorregressiva sem e com sazonalidade* (ARIMA e SARIMA, respectivamente) foram considerados eficazes para a previsão de demanda de caixa de curto prazo, enquanto os modelos de regressão e algoritmos de aprendizado de máquina foram considerados mais adequados para previsões de longo prazo.

Sarveswararao, Ravi e Vivek (2020) exploram o uso de um modelo híbrido que combina teoria do caos e *deep learning* para previsão de demanda de caixa em caixas eletrônicos de um banco indiano. O artigo busca abordar os desafios enfrentados pelo banco na gestão de estocagem de dinheiro em seus caixas eletrônicos devido à natureza imprevisível da demanda. O modelo proposto usa um gerador de séries temporais caóticas para gerar dados de entrada para um modelo de aprendizado profundo. O modelo de aprendizado profundo consiste em uma rede neural de memória de longo prazo para sua previsão. Os resultados mostram que o modelo híbrido supera os modelos estatísticos tradicionais e modelos de aprendizagem profunda na previsão da demanda de caixa nos caixas eletrônicos do banco.

Fallahtafti et al. (2022) investigaram o impacto da pandemia de COVID-19 na previsão de demanda de dinheiro em caixas eletrônicos usando estatística e *machine learning*. O estudo usa dados de um banco canadense e compara o desempenho de diferentes modelos

na previsão de demanda de caixa antes e durante a pandemia. Os modelos avaliados incluem modelos estatísticos tradicionais, como o ARIMA e a decomposição sazonal de séries temporais (STL). Os resultados mostram que a pandemia teve um impacto significativo na demanda por caixa, com uma queda na demanda durante o período de bloqueio seguida de uma recuperação após o levantamento das restrições. O estudo conclui que os modelos de *machine learning* superam os modelos estatísticos tradicionais na previsão da demanda de caixa, principalmente durante o período de pandemia. Outro achado é que a previsão precisa da demanda de caixa é crucial para que as instituições financeiras otimizem seu estoque de caixa e garantam uma operação eficiente de caixas eletrônicos. O artigo mostra a importância e a relevância do uso de modelos de alternativas para a previsão da demanda, já que problemas externos como o COVID19 podem criar variabilidade nas demandas, provocando certa instabilidade com a gestão de distribuição de dinheiro como também com os custos operacionais do banco.

Venkatesh et al. (2014) discutem a importância de uma previsão precisa de demanda de caixa para bancos e instituições financeiras que operam com caixas eletrônicos. O artigo explora vários métodos e técnicas usadas para previsão de demanda de caixa, incluindo análise tradicional de séries temporais, análise de regressão, *machine learning*, redes neurais e árvores de decisão. Os autores também discutem o impacto de fatores como sazonalidade, efeitos do dia da semana e indicadores econômicos sobre a demanda de caixa e como esses fatores devem ser incorporados aos modelos de previsão.

Diante disto, é possível notar que dentro da revisão da literatura apresentada existem diferentes revisões relacionadas ao “*Cash Replenishment*” e em muitos casos referentes ao “*Cash Supply Chain Management*”. Os artigos analisados, mencionam alternativas da pesquisa operacional para a previsão da demanda e distribuição/alocação de dinheiro em diferentes centros de distribuição dos bancos. Observou-se que por meio da pesquisa operacional é possível obter excelentes resultados, minimizando os custos da empresa e aumentando a lucratividade e satisfação dos clientes. A partir da revisão da literatura realizada, não foram encontrados nenhum estudo de caso propondo alternativas de alocação e transporte de valores (dinheiro) no contexto peruano, nem modelos que consideram custos dependentes dos valores movimentados. Portanto, o presente trabalho visa de certa forma preencher essa lacuna na literatura.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção apresenta uma contextualização do problema estudado, assim como algumas definições dos termos financeiros que serão utilizados ao longo deste trabalho. Posteriormente, será apresentado o modelo matemático proposto para o problema em questão.

3.1 Definições de termos financeiros usados na investigação

Para simplificar a descrição do problema (Seção 3.2), apresenta-se a seguir a definição de uma série de termos que serão utilizados ao longo deste trabalho:

- Seguradora/Portavalor: Refere-se a uma empresa terceirizada que é responsável por armazenar e transportar o dinheiro para os centros de distribuição (ATMs, agências, *retailers*);
- Cofre: Espaço seguro onde o dinheiro e outros objetos de valor são armazenados, por exemplo, pelas empresas de transporte(seguradoras), para suprirem os diferentes centros de distribuição. A instituição financeira objeto deste estudo dispõe de 24 cofres, distribuídos por várias cidades/estados do país;
- BCR: Refere-se ao Banco Central de Reserva do Peru. É uma instituição peruana autônoma encarregada de preservar a estabilidade monetária no país;
- Cofre de Trânsito: Cofre gerenciado por uma empresa seguradora e utilizado pelo banco para suas operações. A quantidade de dinheiro mantida no cofre de trânsito é o saldo movimentado por aquele cofre naquela respectiva cidade. Ele pode ser usado pelo banco sem autorização do BCR;
- Cofre BCR: Cofre administrado por uma empresa seguradora e utilizado pelo banco para suas operações. A quantidade de dinheiro mantida no cofre de trânsito é o saldo movimentado por aquele cofre naquela cidade. A principal diferença do cofre de trânsito para o cofre BCR reside nos custos para realizar saques e depósitos e para armazenamento (nulo). Além disso, para realizar saques ou depósitos do cofre BCR, o banco deve fazer uma solicitação para o BCR;
- Moeda: É uma peça simbólica que atua como um meio de troca geralmente aceito em uma sociedade ou civilização para facilitar o comércio e as transações econômicas. (BRAUDEL, 1998). Por exemplo, Dólar (USD), Euro (EUR) e Sol (PEN);

- Denominação: Valor nominal de uma nota (papel). Por exemplo, as denominações das notas de Sol são S/200, S/100 S/50, S/20, S/10 e em relação às moedas (físicas) são S/5, S/2, S/1, S/0,5, S/0,2, S/0,1, S/0,05, S/0,01. No presente estudo, as moedas serão desconsideradas;
- ATMs: Refere-se aos caixas eletrônicos (automáticos) encarregados de receber e fornecer dinheiro, a pedido do cliente;
- Escritórios/Agências/Sucursais: Local físico onde as instituições bancárias oferecem produtos e serviços aos seus clientes;
- *Retailers*: São os grandes clientes que o banco possui que costumam movimentar grandes quantidades de dinheiro (e.g. supermercados, centros comerciais, redes de *fast food*, entre outros);
- Gestão de movimentação interna: É a gestão das operações realizadas pela instituição financeira para distribuir dinheiro para ATMs e Agências, interagindo com a empresa terceirizada, mas sem que essa mesma, realize a gestão com outra entidade como o BCR;
- Gestão de movimentação externa: É a gestão das operações realizadas pela instituição financeira, a fim de distribuir o dinheiro para ATM e Agências, interagindo com a empresa terceirizada e contando com que ela faça a gestão para as operações com o BCR;
- Saque BCR: É poder fazer saques BCR com o intuito de abastecer uma agência devido à alta demanda que pode ter;
- Depósito BCR: É poder fazer depósitos no cofre do BCR para conseguir reduzir o dinheiro que se tem em uma agência, ou deixar notas deterioradas;
- Transferência aérea: Transferência de dinheiro de um cofre de uma cidade para um cofre de outra cidade fazendo uso de modal de transporte aéreo;
- Transferência terrestre: Transferência de dinheiro de um cofre de uma cidade para um cofre de outra cidade fazendo uso de modal de transporte terrestre;
- Carro-forte: Exemplo de modal de transporte terrestre utilizado para o transporte de valores;
- Avião: Exemplo de modal de transporte aéreo utilizado para o transporte de valores;
- Faixas de valor: intervalo de valores, definido por um limite inferior e um limite superior.

3.2 Gestão de dinheiro em uma instituição financeira com atuação no Peru

A reposição de dinheiro nos centros de distribuição dos bancos na atualidade foi influenciada por diversos fatores, entre eles a recente pandemia de COVID-19 e o aumento da adoção de meios de pagamento digitais. A pandemia de COVID-19 teve um impacto significativo na reposição de dinheiro nos bancos onde muitas destas instituições experimentaram uma diminuição na demanda por dinheiro devido à redução dos gastos dos consumidores.

De acordo com Mantovani (2022), o surto do coronavírus mudou a forma de se gerenciar o dinheiro, com a demanda por notas subindo em alguns lugares e caindo em outros. Junto a isso, o aumento da adoção de métodos de pagamento digitais, como pagamentos móveis e serviços bancários online, também afetou a reposição de dinheiro nos bancos. De acordo com outro relatório, "a adoção de métodos de pagamento digital reduziu a demanda por dinheiro físico, o que, por sua vez, reduziu a necessidade de reposição de dinheiro físico nos bancos" (FEDERAL RESERVE BANK OF ATLANTA, 2021). Nesse contexto, para gerenciar a reposição de dinheiro nos centros de distribuição com mais eficiência, muitos bancos recorreram a empresas terceirizadas.

A maioria dos bancos devem administrar cuidadosamente seus suprimentos de caixa para garantir que tenham dinheiro suficiente para atender às demandas dos clientes sem reter excesso de dinheiro nos cofres. Isso requer uma previsão precisa da demanda, bem como a capacidade de mover dinheiro rapidamente entre as agências. Além disso, por ser uma atividade de alto risco, vulnerável a furtos e roubos, os bancos devem tomar medidas para garantir que o dinheiro seja transportado com segurança, como o uso de veículos blindados e pessoal de segurança treinado.

Em relação com a previsão da demanda, o banco tem que ter a informação mais precisa possível para poder realizar uma ótima distribuição de dinheiro para seus centros de distribuição. No entanto, a previsão pode ser desafiadora, especialmente se os bancos não tiverem acesso a dados confiáveis sobre o comportamento do cliente ou padrões de transação.

O banco possui muitos desafios que podem ser classificados como internos e externos. No caso do banco em estudo, os pedidos internos vêm da alta administração exigindo maior lucratividade por meio de uma minimização de custos relacionados a estocagem, logística e despesas operacionais. Por outro lado, as solicitações externas estão relacionadas com as demandas dos clientes.

Para abastecer os centros de distribuição, o banco pode realizar diferentes tipos de operações, conforme apresentado na Tabela 2. Essas são as gestões de movimentações internas e externas que são realizadas por meio dos porta valores.

No caso das gestões de movimentações externas estão as operações de saque ou depósito com o BCR. Tais tipos de operações são realizadas por meio do uso de dinheiro dos cofres do BCR, que funcionam como um “cofre auxiliar” para que quando o banco precise de dinheiro tenha capacidade de abastecer algum ATM, agência ou *retailer*. Porém, deve-se levar em consideração que esse cofre auxiliar tem um custo e tem limites para o abastecimento (depósito) como também para saques de dinheiro, pois não é um recurso ilimitado.

Por outro lado, temos a gestão de movimentação interna que dentro de suas operações internas estão os traslados aéreos e terrestres. Esses traslados de dinheiro são movimentações entre os diferentes cofres que o banco possui. Em caso de necessidade, pode-se armazenar o dinheiro numa localidade ou retirar para outra.

Em suma, o banco deve garantir que o dinheiro esteja disponível ao longo do dia, para satisfazer as demandas dos clientes por moedas e denominações (notas). Por outro lado, a demanda diária varia tanto em relação ao valor quanto a quantidade de notas, tipo de moeda, denominação e qualidade do dinheiro depositado, tornando o problema mais complexo.

As atividades da área de *cash management* são responsáveis por planejar a melhor forma de distribuição do dinheiro. A área de *cash management* toma decisões que envolvem a realização de operações que podem ter custos muito elevados, por isso é importante fazer uma distribuição correta de caixa.

Para o presente estudo utilizaram-se análises baseadas na moeda nacional (Sol Peruano). A lista de cidades onde os clientes possuem demandas é apresentada na Tabela 3. As denominações (notas), por sua vez, são apresentadas na Tabela 4. Neste estudo, questões relacionadas a qualidade das notas foram desconsideradas.

O fluxo do processo de *Cash Replenishment* começa com o recebimento da demanda dos diversos centros de distribuição juntamente com o dinheiro que se tem estocado em cada cofre. Então, de acordo com as demandas históricas, define-se quanto dinheiro cada cofre (de cada cidade) deve possuir para satisfazer a demanda do dia posterior. De acordo ao valor final que se deve ter como estoque, se toma a decisão se é necessário fazer alguma gestão de movimentação interna ou externa. O processo é resumido esquematicamente pelo fluxograma apresentado na Figura 3.

Tabela 2 – Operações realizadas pelo banco para abastecer ou estocar dinheiro nos centros de distribuição

Tipos de Gestão	Operações
Gestão de movimentação externa	Deposito BCR
	Saque BCR
Gestão de movimentação interna	Transferência aérea
	Transferência terrestre

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 3 – Cidades onde o banco tem cofre e filiais

CIDADES		
ANDAHUAYLAS	AYACUCHO	IQUITOS
CAJAMARCA	CHICLAYO	JAEN
CHIMBOTE	CHIMBOTE	JULIACA
HUACHO	CHINCHA	PIURA
HUARAZ	CUSCO	PUCALLPA
LIMA	HUANCAYO	TARAPOTO
PUERTO MALDONADO	HUANUCO	TRUJILLO
TACNA	ICA	TUMBES

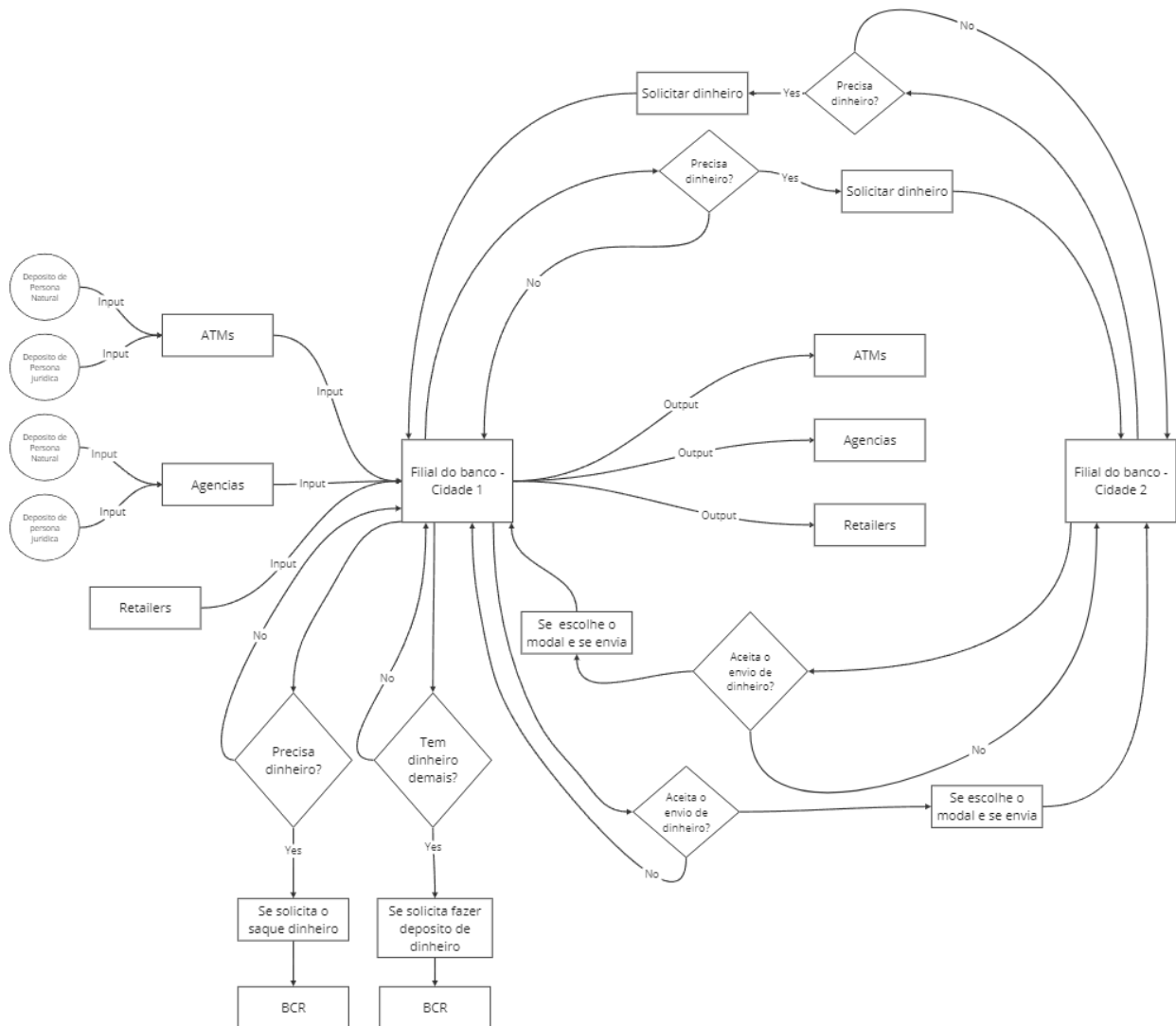
Fonte: O Autor (2023)

Tabela 4 – Locais de distribuição do banco

Centros de distribuição	Tipo de Operação	Moeda	Notas
ATMs	Depósitos	PEN	200, 100, 50, 20, 10
	Saques		
Retailers	Depósitos		
	Saques		
Agencias	Depósitos		
	Saques		

Fonte: O Autor (2023)

Figura 3 – Fluxo do processo de *Cash Replenishment*



Fonte: O Autor (2023)

4 MODELO MATEMÁTICO

Por ser um problema de distribuição e transporte de dinheiro no contexto bancário, propõe-se um modelo de programação linear inteira (MPLI) multi-período e *multi-commodity* que incorpora os diferentes custos envolvidos no processo de *cash management*. Um modelo de programação linear inteira (ILP) é um modelo de otimização matemática que é usado para resolver problemas que envolvem variáveis de decisão discretas, comumente utilizados no campo da pesquisa operacional. O modelo é considerado multi-período pois considera múltiplos períodos ou diferentes momentos em que ocorrerá a distribuição de caixa. Em vez de tomar decisões apenas para um período específico, a distribuição de caixa é planejada e otimizada ao longo de vários períodos futuros. Isso permite uma melhor gestão do fluxo de caixa e a capacidade de antecipar mudanças nas demandas em diferentes momentos, e *multi-commodity* devido ao fato de estarmos lidando com vários tipos de mercadorias ou commodities (neste caso, diferentes denominações de notas), e cada uma delas podem ter diferentes restrições e custos associados.

O MPLI, assim como outros modelos de programação matemática são formulados a partir da definição de variáveis, da função objetivo e das restrições do problema. A função objetivo é a função a ser otimizada, como minimizar custos ou maximizar lucros, e as restrições são as limitações ou restrições nas variáveis de decisão, como recursos limitados ou capacidade de produção. O modelo pode ser resolvido com auxílio de um *software* de otimização que usa algoritmos para encontrar uma solução que atenda às restrições e otimize a função objetivo.

No presente estudo de caso, pretende-se adaptar às variáveis, parâmetros e restrições que o banco possui, para poder realizar a modelagem matemática do problema de CRO. O modelo é utilizado com informação de todo um país, devido à necessidade de obter uma referência ou base para poder realizar as melhores operações diárias de transferência, saque ou depósito de dinheiro. Se apenas uma cidade fosse considerada não seria possível avaliar quanto seria o ganho ou perda no total, senão só de maneira parcial, além de outros *insights* que podem ser coletados por meio das análises dos resultados. Na Tabela 5 são apresentados os dados e as variáveis do MPLI.

Tabela 5 – Dados e variáveis do modelo

Termos	Definição
C	Conjunto de cidades.
N	Conjunto de nós nas cidades $c \in C$; $N_c \subset C$.
N_c	conjunto de nós associados à cidade $c \in C$.
D	Conjunto de notas (denominações).
M	Conjunto de modais de transporte.
T	Conjunto de períodos (dias).
F^S	Conjunto de faixas (ou intervalos) de valores para saques do BCR.
F^D	Conjunto de faixas (ou intervalos) de valores para depósito do BCR.
F_m	Conjunto de faixas (ou intervalos) de valores que podem ser transportadas pelo modal $m \in M$.
V_k	Valor da nota $k \in D$.
C_{ijm}	Custo de transporte de i para j no modal m , por unidade de veículo.
Q_m	Quantidade máxima de notas que um veículo do tipo $m \in M$ pode transportar.
h_{ik}	Custo de estocar 1 unidade de nota $k \in D$ em $i \in N$.
q_{kct}	Quantidade de demanda por notas $k \in D$ na cidade $c \in C$ no dia $t \in T$.
UB_f^S	Limite superior para saque do BCR na faixa $f \in F^S$.
UB_f^D	Limite superior para depósito do BCR na faixa $f \in F^D$.
LB^S	Valor mínimo para saque do BCR na faixa $f \in F^S$, com $LB_f^S = UB_{f-1}^S + 1 > LB_{f-1}^S$.
LB^D	Valor mínimo para depósito do BCR na faixa $f \in F^D$, com $LB_f^D = UB_{f-1}^D + 1 > LB_{f-1}^D$.
UB_{mf}	Valor máximo que pode ser transportado pelo modal $m \in M$ na faixa $f \in F_m$.
LB_{mf}	Valor mínimo que pode ser transportado pelo modal $m \in M$ na faixa $f \in F_m$, com $LB_{mf} = UB_{mf-1} + 1 > LB_{mf-1}$.
C_f^S	Custo de fazer saque do BCR na faixa $f \in F^S$.
C_f^D	Custo de fazer depósito no BCR na faixa $f \in F^D$.
C_{mf}	Custo de transportar notas no modal $m \in M$ na faixa $f \in F_m$.
I_{jk}^0	Estoque inicial de notas $k \in D$ em $j \in N$.
x_{ijkmt}	Quantidade de notas $k \in D$ transportadas de $i \in N$ para $j \in N$ no modal $m \in M$ no período $t \in T$.
I_{ikt}	Quantidade de notas $k \in D$ estocadas em $i \in N$ no período $t \in T$.
y_{ctf}^S	1, se a faixa de valor $f \in F^S$ é utilizada para saque do BCR na cidade $c \in C$ no período $t \in T$; 0, caso contrário.
y_{ctf}^D	1, se a faixa de valor $f \in F^D$ é utilizada para depósito do BCR na cidade $c \in C$ no período $t \in T$; 0, caso contrário.
y_{ijmtf}	1, se a faixa de valor $f \in F_m$ é utilizada para transportar valores de $i \in N$ para $j \in N$ com o modal $m \in M$ no período $t \in T$; 0, caso contrário.
s_{ckt}	Quantidade de notas $k \in D$ transferidas (por saque) do BCR para a cidade $c \in C$ no tempo $t \in T$.
d_{ckt}	Quantidade de notas $k \in D$ transferidas (por depósito) da cidade $c \in C$ para o BCR no tempo $t \in T$.
w_{ijmt}	Quantidade de veículos do modal $m \in M$ utilizados de $i \in N$ para $j \in N$ no período $t \in T$.

Fonte: O Autor (2023)

4.1 Modelo de programação linear inteira mista

O MPLI foi realizado usando os termos previamente mencionados na Tabela 5. Os custos, conjunto de nós, limites, entre outros *inputs* foram fornecidos pelo banco. O MPLI proposto é apresentado em (1) – (17). Tal modelo é uma extensão ao apresentado por Quispe et al. (2022), considerando, dentre outras características, a quantidade de veículos necessários para realizar o transporte de valores entre cidades.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} C_{ijm} * w_{ijmt} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in D} \sum_{t \in T} h_{ik} * l_{ikt} \\
 & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \sum_{f \in F_m} C_{mf} * y_{ijmtf} \\
 & + \sum_{c \in C} \sum_{t \in T} \sum_{f \in F^S} C_f^S * y_{ctf}^S \\
 & + \sum_{c \in C} \sum_{t \in T} \sum_{f \in F^D} C_f^D * y_{ctf}^D
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in N_c} I_{jkt-1} + \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N_c} \sum_{m \in M} x_{ijkmt} - \right. \\
 & \quad \left. \sum_{j \in N_c} \sum_{i \in N} \sum_{m \in M} x_{jikmt} \right) + \\
 & \quad s_{ckt} - d_{ckt} - \sum_{j \in N_c} I_{jkt} = q_{kct}
 \end{aligned} \quad c \in C, k \in D, t \in T \setminus \{0\}, \quad (2)$$

$$\sum_{f \in F^S} LB_f^S * y_{ctf}^S \leq \sum_{k \in D} v_k * s_{ckt} \leq \sum_{f \in F^S} UB_f^S * y_{ctf}^S \quad c \in C, t \in T, \quad (3)$$

$$\sum_{f \in F^S} y_{ctf}^S \leq 1 \quad c \in C, t \in T, \quad (4)$$

$$\sum_{f \in F^D} LB_f^D * y_{ctf}^D \leq \sum_{k \in D} v_k * d_{ckt} \leq \sum_{f \in F^D} UB_f^D * y_{ctf}^D \quad c \in C, t \in T, \quad (5)$$

$$\sum_{f \in F^D} y_{ctf}^D \leq 1 \quad c \in C, t \in T, \quad (6)$$

$$\sum_{f \in F_m} LB_{mf} * y_{ijmtf} \leq \sum_{k \in D} v_k * x_{ijmt} \leq \sum_{f \in F_m} UB_{mf} * y_{ijmtf} \quad i, j \in N, m \in M, t \in T, \quad (7)$$

$$\sum_{f \in F_m} y_{ijmtf} \leq 1 \quad i, j \in N, m \in M, t \in T, \quad (8)$$

$$w_{ijmt} \geq \sum_{k \in D} x_{ijkmt} / Q_m \quad i, j \in N, m \in M, t \in T, \quad (9)$$

$$I_{jk0} = I_{jk}^0 \quad j \in N, k \in D, \quad (10)$$

$$x_{ijkmt} \in \{0,1\} \quad i, j \in N, k \in D, m \in M, t \in T, (11)$$

$$I_{kt} \in \{0,1\} \quad i \in N, k \in D, t \in T, (12)$$

$$y_{ctf}^S \in \{0,1\} \quad c \in C, t \in T, f \in F^S, (13)$$

$$y_{ctf}^D \in \{0,1\} \quad c \in C, t \in T, f \in F^D, (14)$$

$$y_{ijkmt} \in \{0,1\} \quad i, j \in N, m \in M, t \in T, f \in F_m, (15)$$

$$s_{ckt}, d_{ckt} \in \{0,1\} \quad c \in C, k \in D, t \in T, (16)$$

$$w_{ijmt} \in Z_{\geq 0} \quad i, j \in N, m \in M, t \in T. (17)$$

A Função Objetivo (1) visa a minimização dos custos operacionais, que estão associados ao transporte de dinheiro com modais aéreo ou terrestre, as operações de saque ou depósito do BCR e as quantidades de notas estocadas em cada cofre.

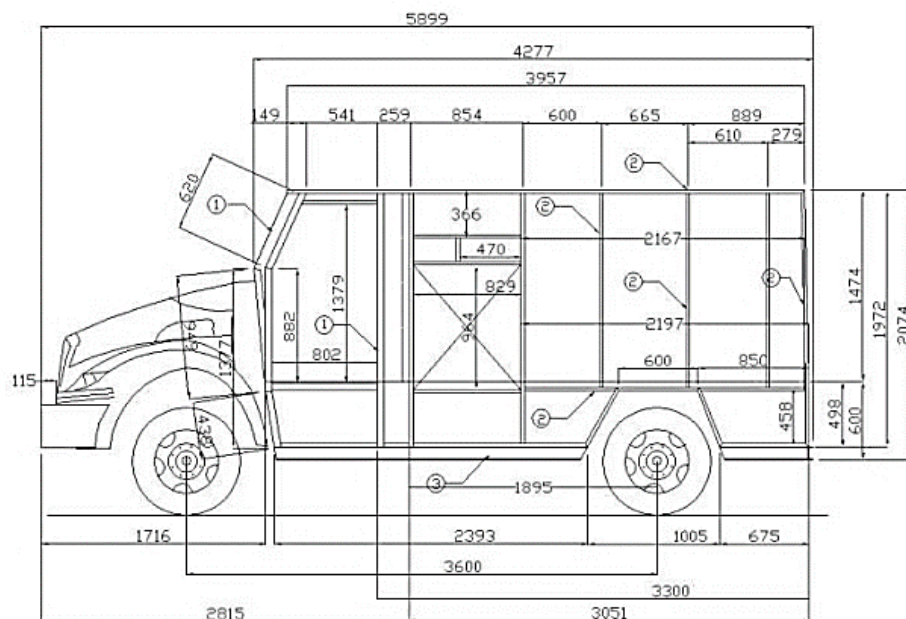
Nesta parte das restrições, o conjunto de Equações (2) busca equilibrar a quantidade de estoque, somando o estoque do dia anterior mais os saques, subtraindo os depósitos e o estoque inicial do dia atual para obter a quantidade de notas da demanda. As Restrições (3) e (5) buscam colocar limites inferiores e superiores do dinheiro, para que o banco possa fazer saques e depósitos do BCR. As Inequações (4) e (6), são restrições que buscam definir em qual faixa de valor a operação de saque ou depósito se enquadra. Nas Inequações (7), a restrição funciona colocando faixas de valor para poder avaliar quanto dinheiro pode ser transportado por cada modal de transporte, assim não acontece de os valores excederem os limites em cada faixa. A Inequação (8), temos outra restrição que busca identificar em qual faixa de valor o transporte entre pares de cofres se enquadra. As Restrições (9) definem o número mínimo de veículos necessários para efetuar o transporte de dinheiro entre cada par de nós. Por fim, as Restrições (10) indicam que o estoque inicial do primeiro dia será igual ao estoque do final do dia anterior. Os domínios das variáveis de decisão são definidos em (11)-(17).

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os dados necessários para implementação e resolução do modelo proposto foram obtidos junto ao banco objeto de estudo e, no caso de informações não disponibilizadas (e.g., por questões de privacidade ou desconhecimento), por meio de estimativas com base em outros estudos e informações de algumas empresas.

Iniciando com os dados faltantes, estão as dimensões e capacidades dos modais transportes que foram estimadas por meio de outras investigações para o desenvolvimento do modelo matemático. Para o caso do carro forte, as dimensões utilizadas para o transporte de valores foram estimadas com base no trabalho de Jimenez Villa (2010), conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Dimensões do carro forte

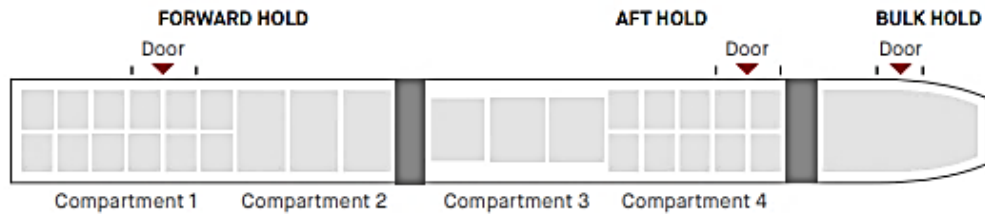


Fonte: Jimenez Villa (2010)

Em relação às dimensões do avião, utilizou-se então medidas referenciais da aeronave Emirates, modelo de avião Airbus 380-800 (Figura 5). Esse avião foi definido devido a menor capacidade de carga que poderia suportar sendo ela a base referencial para fazer transportes.

Ao observar as especificações técnicas do espaço de carga, foi visualizado que a área cúbica era muito maior que a do carro forte. Então, foi definido tomar como base o tamanho do carro, acrescentando um 20% no comprimento e 60% na largura, respetivamente, para fazer a simulação de um transporte de valor por via aérea.

Figura 5 – Dimensionamento do espaço de carga do avião



Fonte: Emirates (2021)

Após obter as dimensões dos modais de transporte, foi definido o espaço que iria ser ocupado por cada maço de notas que corresponde a uma quantidade de 1000 notas. Esta informação é apresentada na Tabela 6. Da mesma forma, na Tabela 7 são apresentadas as dimensões dos dois modais de transporte de valores com suas respectivas capacidades.

Tabela 6 – Dimensões do maço de notas

1 Maço / 1000 Notas	Medida
Comprimento	14cm
Largura	6.5cm
Altura	10cm
Volume	$910cm^3 = 0.000910m^3$

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 7 – Dimensões da capacidade de carga do carro forte e do avião

Dimensões	Modal 1 (Terrestre)	Modal 2 (Aéreo)
Comprimento	160cm	180cm
Largura	90cm	150cm
Altura	100cm	100cm
Volume	$1440000cm^3 = 1.44m^3$	$2700000cm^3 = 2.7m^3$
Capacidade	55000 notas	110000 notas

Fonte: O Autor (2023)

Entre as informações que foram obtidas junto ao banco estão, as demandas, histórico da quantidade de estoque em cada cidade e os cofres selecionados para cada uma delas, também a informação dos custos que estão relacionados com as variações de parâmetros.

O histórico das quantidades de notas estocadas não só será utilizado como dado de *input* do modelo matemático (e.g., para a definição do estoque inicial e das demandas diárias), mas servirá para comparar os resultados (com os adotados pela empresa), pois busca-se também reduzir o custo de estoque com o atual modelo, o que significa que o estoque diário por denominações deve diminuir levando em consideração a demanda diária.

Para esta pesquisa foram utilizadas instâncias correspondentes a 3, 4, 5, 10 e 20 dias respectivamente (excluindo-se o dia inicial cujas quantidades de notas estocadas em cada cidade são dados de entrada). O custo real de estocagem de cada instância será comparado com os resultados do modelo matemático com a intenção de visualizar quanto a gestão do banco poderia melhorar, caso tivesse uma previsão da demanda perfeita para todos os dias.

Na Tabela 8, será apresentado o estoque inicial de cada cofre para o desenvolvimento do modelo. As Tabelas 9, 10 e 11 mostram as quantidades de notas demandadas por cada cidade e tipo de nota, para as instâncias de 3, 4 e 5 dias, respectivamente. Os períodos referentes a 10 e 20 dias são instâncias muito grandes e só poderão ser visualizados como resultados.

Tabela 8 – Estoque inicial de quantidade de nota por cada cofre

Cofres	10 Soles	20 Soles	50 Soles	100 Soles	200 Soles
1	4682	57057	11899	30079	12215
2	27874	54677	42076	52109	7078
3	882	36478	12691	9149	2692
4	38443	70474	16237	49584	2465
5	39700	4800	50000	0	0
6	66129	57128	95205	78764	4329
7	4200	1600	500	200	500
8	218760	108060	111057	168225	18070
9	21242	136722	70945	149223	9014
10	0	197700	139000	39000	0
11	158501	38827	2527	23533	11154
12	7793	8059	7956	11690	842
13	110640	86596	140592	151374	8050
14	129854	51924	18788	38373	3298
15	21507	57729	55428	33713	1842
16	17498	51711	25956	34241	1411
17	8851	38296	20116	30810	1065
18	48222	66570	43265	28898	3546
19	38304	49330	3514	91686	2305
20	7182	44571	166134	31226	3152
21	143707	404016	398226	376248	19394
22	538152	426391	1103060	455223	34349
23	31168	67519	99298	186186	11196
24	39657	81622	63506	65957	8136
25	25817	7815	82319	282470	40307
26	23281	58450	55491	61164	6635
27	41753	57485	128427	55849	1001
28	16000	4000	110000	22000	0
29	10494	66333	71514	57843	2886
30	33937	37668	45702	48395	290

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 9 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 3 dias

Cidade	Prossegur	Hermes	10 Soles			20 Soles			50 Soles			100 Soles			200 Soles		
			Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 1	Dia 2	Dia 3
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	460	265	409	14363	8284	25197	782	451	4609	29905	12922	49634	2051	1183	1596
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	12000	0	0	9500	0	0	2500	0
4	0	4	0	200	1657	2200	2400	4395	0	2200	0	4000	2200	4000	0	0	0
5	5	6	413	275	229	11836	14076	7543	256	8329	274	35710	34331	11909	3058	747	621
6	7	8	108	210	216	3582	6339	12194	804	1421	1615	4626	8176	9292	0	0	0
7	9	0	273	279	430	11549	12004	18210	2536	2693	3999	12219	12640	19268	219	223	344
8	10	11	1840	1830	552	4091	2084	782	3507	1358	670	6901	2672	1486	7120	2757	1361
9	12	13	0	0	0	10876	13513	1000	890	1436	0	14435	17642	500	443	715	0
10	14	0	0	0	10	14822	13794	23504	2039	1072	3233	21035	25009	33200	796	419	1262
11	15	0	0	0	0	0	13703	0	0	0	0	0	17585	0	0	198	0
12	0	16	97	400	97	42	8500	42	0	0	0	500	8000	0	0	0	0
13	17	0	199	771	0	2252	8726	0	409	1583	0	4471	17327	0	0	0	0
14	18	0	597	3815	159	7487	10221	1993	3749	5118	998	16603	22666	4520	77	105	21
15	19	0	0	0	0	91250	1000	154	0	0	1064	16000	400	30535	0	0	2
16	20	0	0	0	0	0	2000	6529	0	0	1850	0	18000	8790	0	0	0
17	21	22	42473	69433	95387	328356	428039	322985	51599	94243	68884	438668	628175	444459	9284	9177	13632
18	23	0	183	11390	170	11879	32267	38120	262	30559	10843	16776	175024	84633	957	8045	890
19	24	0	347	1248	426	7363	8458	11741	577	663	1109	8524	9792	11966	1154	1326	1417
20	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	26	0	500	0	8700	200	9200	0	0	0	8600	0	9200	0	0	0
22	27	28	0	313	0	0	7190	0	0	1200	0	0	9008	22000	0	0	0
23	29	0	409	0	0	24193	25470	11059	3581	2474	1074	34786	33694	14630	2087	1869	812
24	30	0	200	0	0	100	6518	0	0	4000	14000	0	19869	8000	0	219	0

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 10 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 4 dias

			10 Soles				20 Soles				50 Soles				100 Soles				200 Soles				
Cidade	Prosegur	Hermes	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	2	0	460	265	409	408	14363	8284	25197	12736	782	451	4609	694	29905	12922	49634	19867	2051	1183	1596	1818	
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12000	0	4800	0	9500	0	13000	0	2500	0	0	
4	0	4	0	200	1657	1000	2200	2400	4395	4200	0	2200	0	0	4000	2200	4000	8500	0	0	0	0	
5	5	6	413	275	229	738	11836	14076	7543	24356	256	8329	274	872	35710	34331	11909	37974	3058	747	621	1978	
6	7	8	108	210	216	108	3582	6339	12194	3582	804	1421	1615	804	4626	8176	9292	4626	0	0	0	0	
7	9	0	273	279	430	750	11549	12004	18210	19341	2536	2693	3999	4582	12219	12640	19268	20347	219	223	344	360	
8	10	11	1840	1830	552	3330	4091	2084	782	3725	3507	1358	670	3065	6901	2672	1486	6031	7120	2757	1361	6222	
9	12	13	0	0	0	0	10876	13513	1000	13433	890	1436	0	3025	14435	17642	500	16994	443	715	0	316	
10	14	0	0	0	10	6	14822	13794	23504	23752	2039	1072	3233	3267	21035	25009	33200	33547	796	419	1262	1276	
11	15	0	0	0	0	0	0	13703	0	3168	0	0	0	0	0	17585	0	4066	0	198	0	46	
12	0	16	97	400	97	0	42	8500	42	0	0	0	0	0	500	8000	0	20000	0	0	0	0	
13	17	0	199	771	0	369	2252	8726	0	4171	409	1583	0	757	4471	17327	0	8282	0	0	0	0	
14	18	0	597	3815	159	797	7487	10221	1993	9991	3749	5118	998	5003	16603	22666	4520	22156	77	105	21	103	
15	19	0	0	0	0	0	0	91250	1000	154	0	0	0	1064	0	16000	400	30535	0	0	0	2	0
16	20	0	0	0	0	1001	0	2000	6529	16607	0	0	1850	4739	0	18000	8790	31511	0	0	0	1	
17	21	22	42473	69433	95387	36760	328356	428039	322985	571331	51599	94243	68884	115753	438668	628175	444459	832974	9284	9177	13632	7430	
18	23	0	183	11390	170	282	11879	32267	38120	16809	262	30559	10843	404	16776	175024	84633	25303	957	8045	890	1478	
19	24	0	347	1248	426	319	7363	8458	11741	6781	577	663	1109	532	8524	9792	11966	7850	1154	1326	1417	1063	
20	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	0	26	0	500	0	830	8700	200	9200	2550	0	0	0	2300	8600	0	9200	2300	0	0	0	0	
22	27	28	0	313	0	156	0	7190	0	8576	0	1200	0	10597	0	9008	22000	38480	0	0	0	0	
23	29	0	409	0	0	0	24193	25470	11059	15576	3581	2474	1074	1513	34786	33694	14630	20604	2087	1869	812	1143	
24	30	0	200	0	0	0	100	6518	0	0	0	4000	14000	0	0	19869	8000	17000	0	219	0	0	

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 11 – Demanda por quantidade de nota por cidade para a instância de 5 dias

Cidade	Prosegur	Hermes	10 Soles					20 Soles					50 Soles					100 Soles					200 Soles				
			Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	460	265	409	408	250	14363	8284	25197	12736	7793	782	451	4609	694	425	29905	12922	49634	19867	12156	2051	1183	1596	1818	1113
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12000	0	4800	0	0	9500	0	13000	0	0	2500	0	0	0
4	0	4	0	200	1657	1000	118	2200	2400	4395	4200	132	0	2200	0	0	0	4000	2200	4000	8500	0	0	0	0	0	0
5	5	6	413	275	229	738	279	11836	14076	7543	24356	14199	256	8329	274	872	18445	35710	34331	11909	37974	44746	3058	747	621	1978	760
6	7	8	108	210	216	108	3	3582	6339	12194	3582	75	804	1421	1615	804	17	4626	8176	9292	4626	97	0	0	0	0	0
7	9	0	273	279	430	750	67	11549	12004	18210	19341	2813	2536	2693	3999	4582	618	12219	12640	19268	20347	2976	219	223	344	360	54
8	10	11	1840	1830	552	3330	0	4091	2084	782	3725	1458	3507	1358	670	3065	1250	6901	2672	1486	6031	2460	7120	2757	1361	6222	2538
9	12	13	0	0	0	0	0	10876	13513	1000	13433	0	890	1436	0	3025	0	14435	17642	500	16994	0	443	715	0	316	0
10	14	0	0	0	10	6	0	14822	13794	23504	23752	5340	2039	1072	3233	3267	735	21035	25009	33200	33547	7542	796	419	1262	1276	287
11	15	0	0	0	0	0	0	0	13703	0	3168	4239	0	0	0	0	0	0	17585	0	4066	5440	0	198	0	46	62
12	0	16	97	400	97	0	97	42	8500	42	0	42	0	0	0	0	0	500	8000	0	20000	0	0	0	0	0	0
13	17	0	199	771	0	369	330	2252	8726	0	4171	3734	409	1583	0	757	678	4471	17327	0	8282	7414	0	0	0	0	0
14	18	0	597	3815	159	797	286	7487	10221	1993	9991	3583	3749	5118	998	5003	1794	16603	22666	4520	22156	7944	77	105	21	103	37
15	19	0	0	0	0	0	0	91250	1000	154	0	0	0	0	1064	0	0	16000	400	30535	0	0	0	0	2	0	0
16	20	0	0	0	0	1001	0	0	2000	6529	16607	0	0	0	0	1850	4739	0	18000	8790	31511	0	0	0	0	1	0
17	21	22	42473	69433	95387	36760	30553	328356	428039	322985	571331	150681	51599	94243	68884	115753	25676	438668	628175	444459	832974	217891	9284	9177	13632	7430	7550
18	23	0	183	11390	170	282	217	11879	32267	38120	16809	12905	262	30559	10843	404	310	16776	175024	84633	25303	19426	957	8045	890	1478	1135
19	24	0	347	1248	426	319	4	7363	8458	11741	6781	70	577	663	1109	532	6	8524	9792	11966	7850	81	1154	1326	1417	1063	11
20	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	26	0	500	0	830	0	8700	200	9200	2550	0	0	0	0	2300	0	8600	0	9200	2300	0	0	0	0	0	0
22	27	28	0	313	0	156	235	0	7190	0	8576	3790	0	1200	0	10597	516	0	9008	22000	38480	3871	0	0	0	0	0
23	29	0	409	0	0	0	0	24193	25470	11059	15576	16478	3581	2474	1074	1513	1601	34786	33694	14630	20604	21798	2087	1869	812	1143	1209
24	30	0	200	0	0	0	0	100	6518	0	0	5006	0	4000	14000	0	0	0	19869	8000	17000	6043	0	219	0	0	169

Fonte: O Autor (2023)

Outros dados que foram fornecidos pelo banco que permitiram a implementação do modelo matemático foram a quantidade de cidades para as quais o banco tem que distribuir o dinheiro, quantos cofres possui cada uma das cidades, quantas transportadoras a organização conta para realizar a transferência de dinheiro, quantos são os tipos de notas que são movimentadas no país, e os custos para realizar as operações de transporte terrestre (Modal 1), aéreo (Modal 2), saques ou depósitos do banco central de reservas (BCR).

Nas tabelas a seguir é possível ver os conjuntos de dados usados para as instâncias, bem como os custos mencionados acima. A Tabela 12 mostra os conjuntos de dados utilizados, os valores e sua descrição.

Tabela 12 – Conjunto de valores para as instâncias

Conjuntos	Quantidade de elementos	Descrição
C	24	Cidades
N	30	Cofres (Boveda)
N_c	2	Portavalores / Transportadoras
D	5	Denominações / Tipos de notas
M	2	Modais de transporte (Aéreo, terrestre)
T	3, 4, 5, 10, 20	Quantidade de períodos (dias)
F_S	4	Faixas de valores para saque do BCR
F_D	4	Faixas de valores para depósito do BCR
F_m	6	Faixas de valores para transporte

Fonte: O Autor (2023)

A Tabela 13 mostra a quantidade mínima para poder realizar um transporte com cada meio de transporte, sendo esses os modais de transportes 1 e 2 (terrestre e aéreo, respectivamente).

Tabela 13 – Parâmetros dos modais de transporte

Parâmetros	Modal 1	Modal 2	Descrição
LB_{mf}	1000	2000	Valor mínimo para realizar o transporte
Q_m	55000	110000	Capacidade (em quantidade de notas)

Fonte: O Autor (2023)

Na Tabela 14 são apresentados os custos unitários de estoque por tipo de nota. Na Tabela 15, são apresentadas as faixas de valor e seus custos em relação ao transporte de notas, seja por via terrestre (Modal 1) ou aérea (Modal 2). Esses custos, são somados finalmente ao custo de viagem, que são valores que variam de acordo com o trecho (par de cidades).

A Tabela 16 mostra o valor mínimo para fazer um saque ou depósito no banco central de reservas (BCR).

Tabela 14 – Parâmetros dos custos diários de estoque (em Sol)

Tipo de nota	Portavvalor / Transportadora 1	Portavvalor / Transportadora 2
10 Soles	0.000118	0.000127
20 Soles	0.000236	0.000254
50 Soles	0.00059	0.000635
100 Soles	0.00118	0.00127
200 Soles	0.00236	0.00254

Fonte: O autor(2023)

Tabela 15 – Capacidade de transporte por faixa de valor

Faixa de valor	Intervalo de valores		Custo	
	Modal 1	Modal 2	Modal 1	Modal 2
1	[1000, 119000]	[2000, 119000]	120	390
2	[118999, 215000]	[118999, 215000]	200	550
3	[214999, 550000]	[214999, 250000]	500	1150
4	-	[249999, 550000]	-	1350
5	-	[549999, 563000]	-	1750
6	-	[562999, 1100000]	-	2650

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 16 – Valor mínimo para fazer saque ou depósito no BCR

Operação	Valor Mínimo
Saque BCR	1000
Deposito BCR	500

Fonte: O Autor (2023)

Na Tabela 17, é possível visualizar os limites máximos por faixas de valor para poder fazer depósitos ou saques de dinheiro junto ao BCR (esta mesma tarifa serve para os dois tipos de transações).

Tabela 17 – Limite superior para saques ou depósitos no BCR por faixa de valor

Faixa de valor	Capacidade (limite superior)	Custo
1	2000	120
2	50000	250
3	802000	400
4	4010000	866

Fonte: O Autor (2023)

Finalmente, levando em consideração todos os parâmetros, variáveis e os dados estimados, além dos fornecidos pelo banco como também os estimados com base em outras pesquisas, foi possível assim obter soluções para os problemas.

O modelo matemático foi implementado em linguagem de programação Julia fazendo uso do pacote de modelagem *JuMP*, utilizou-se o *solver* Gurobi para resolução dos modelos matemáticos, considerando um tempo limite de 1 hora. Nos casos em que a solução ótima não é encontrada dentro do limite de tempo, o solver retorna a melhor solução encontrada.

O Apêndice A, apresenta a solução obtida pelo modelo matemático para a instância de 4 dias. O motivo de ter sido escolhido a instância de 4 dias, foi para que se possa analisar todas as transações realizadas para poder obter o menor custo operacional e de estocagem, separados por cidade e por cofre, com as suas respectivas operações logísticas dos traslados com as outras cidades, considerando as demandas, os períodos, os tipos de notas e os custos envolvidos.

Como é possível visualizar no Apêndice A, o resultado mostra todas as movimentações que se fizerem de uma cidade para outra, conseguindo visualizar quando e quanto seria o valor para fazer saques ou depósitos do banco central de reservas, bem como quando e quanto seria ideal transferir em cada cofre, levando em consideração não esgotar o estoque, de acordo com a demanda.

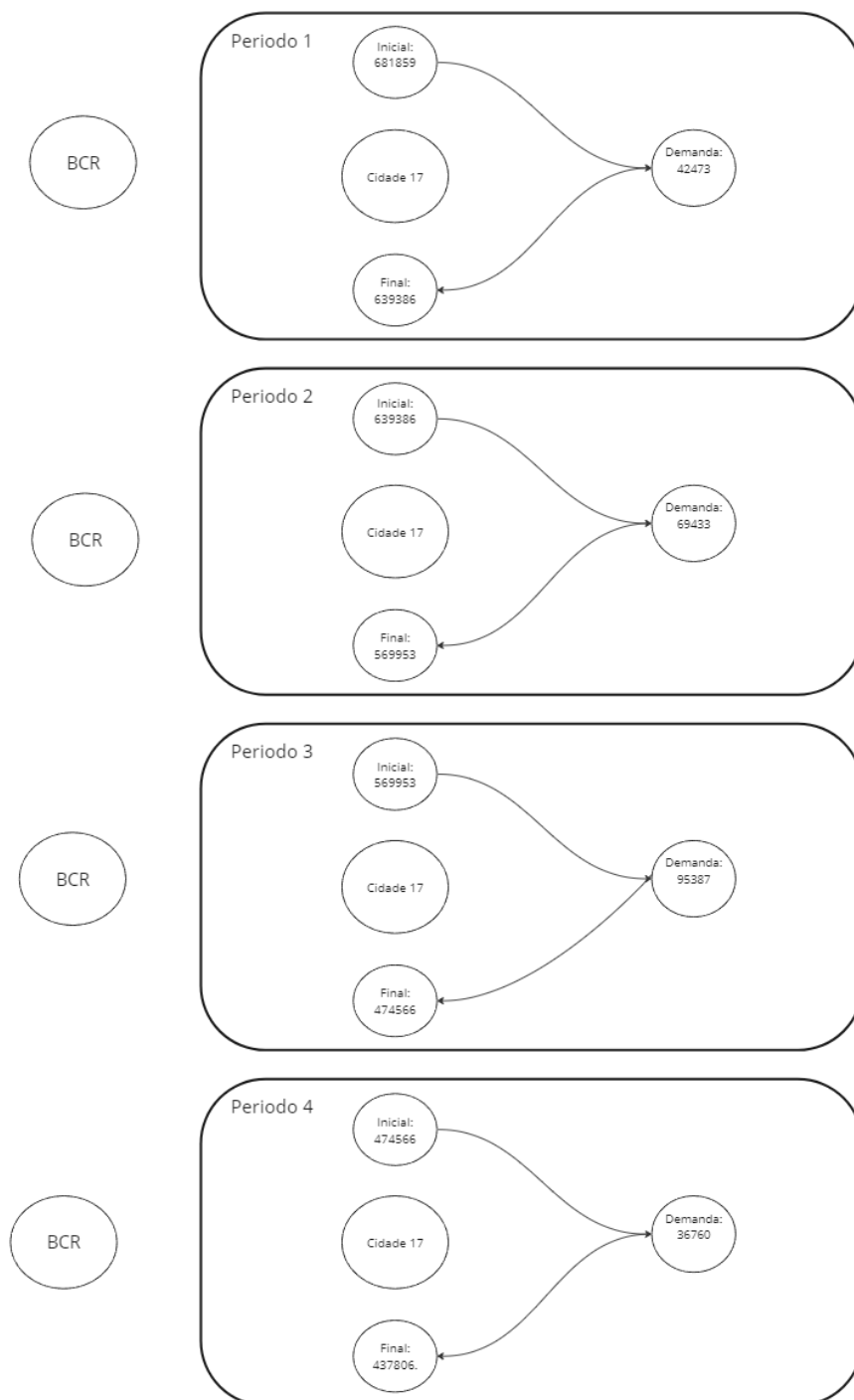
Dentro das análises e conclusões que podem ser obtidas do caso apresentado, é que uma grande quantidade de movimentações ocorre para a cidade 17 (Lima), isso devido ao grande número de habitantes que existem nesta cidade. Essa cidade concentra o maior número

de pessoas em todo o país, então a demanda também está relacionada a ela. Também é possível observar que a maioria das notas que os habitantes dessa cidade demandam são notas de 100, como também é possível notar que a nota que tem menor demanda e em consequência menor quantidade de movimentações é a nota de 200.

Ao mesmo tempo, o modelo mostra que é possível transferir dinheiro para essa cidade a partir de outras cidades em pequenas quantidades, de tal forma que possa ser abastecida sem precisar esvaziar outras cidades. Também é possível visualizar como os dois tipos de transporte de valores são levados em consideração para realizar a logística do dinheiro.

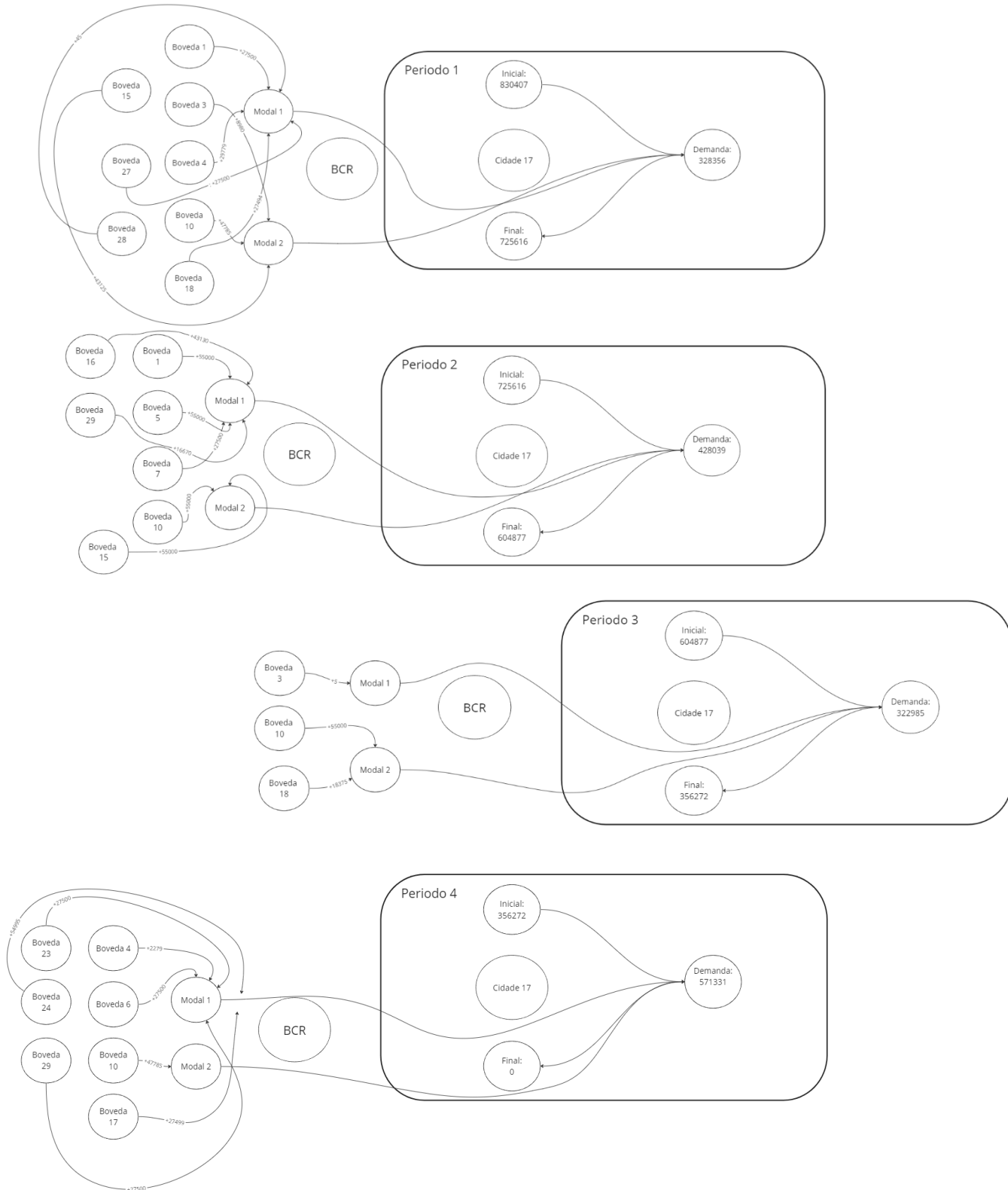
Nas Figuras 6-10 são apresentadas possíveis soluções para as instancias de 4 dias, referentes às movimentações envolvendo as denominações (notas) de 10, 20, 50, 100 e 200 Soles na cidade 17 (Lima), onde é possível visualizar o estoque inicial de cada período, seu estoque final e as operações realizadas de um cofre a outro, tanto dos ingressos como saídas de dinheiro.

Figura 6 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 10 Soles na cidade de Lima



Fonte: O Autor (2023)

Figura 7 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 20 Soles na cidade de Lima



Fonte: O Autor (2023)

Figura 8 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 50 Soles na cidade de Lima

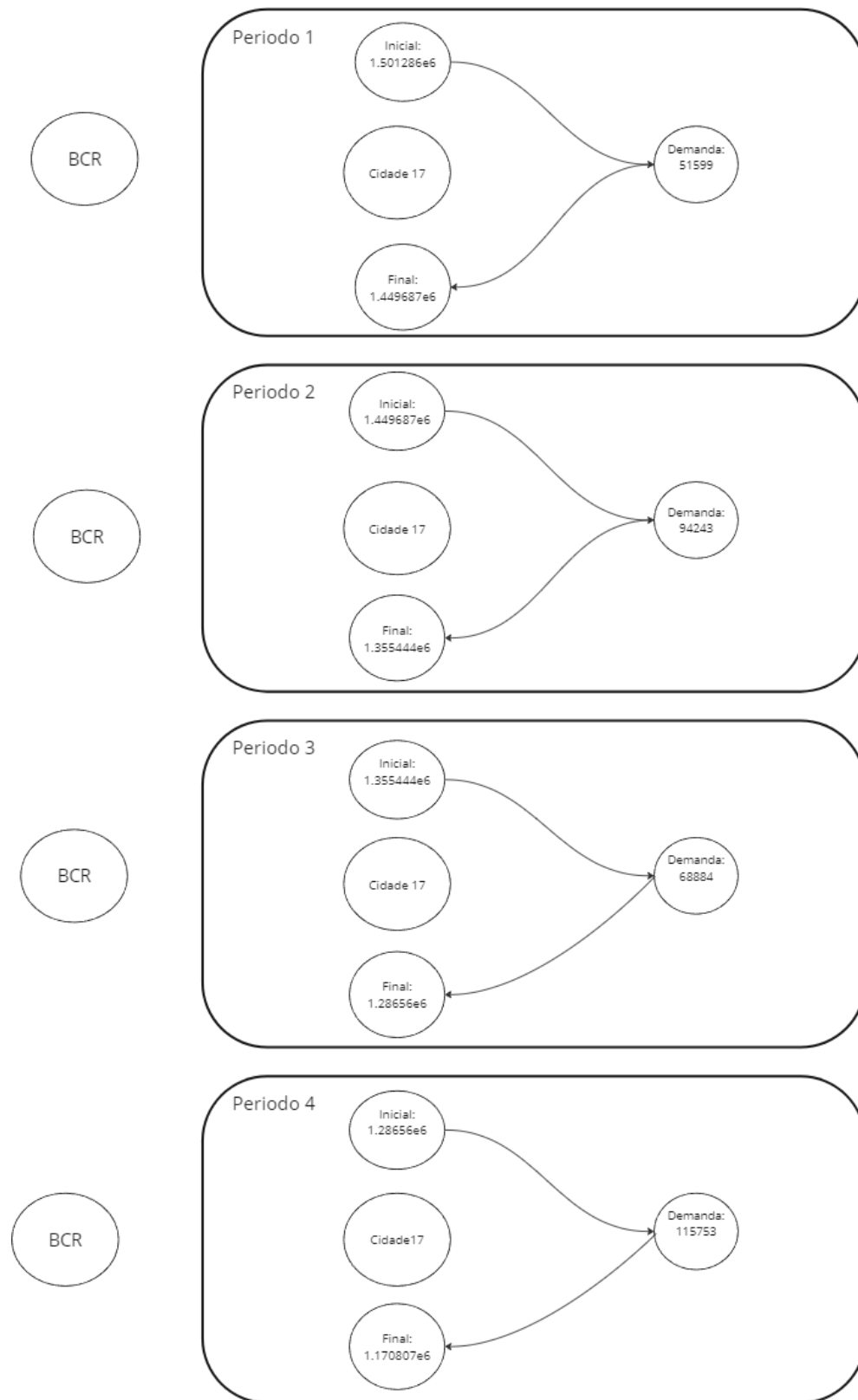
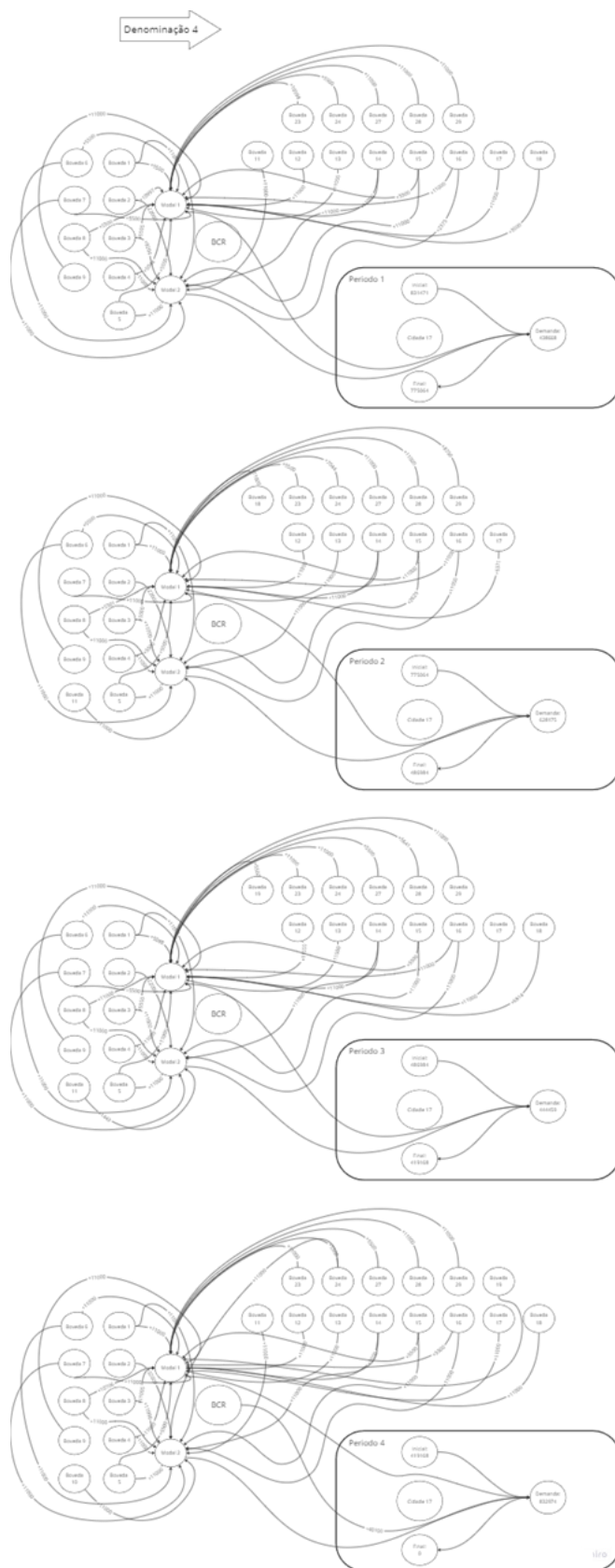
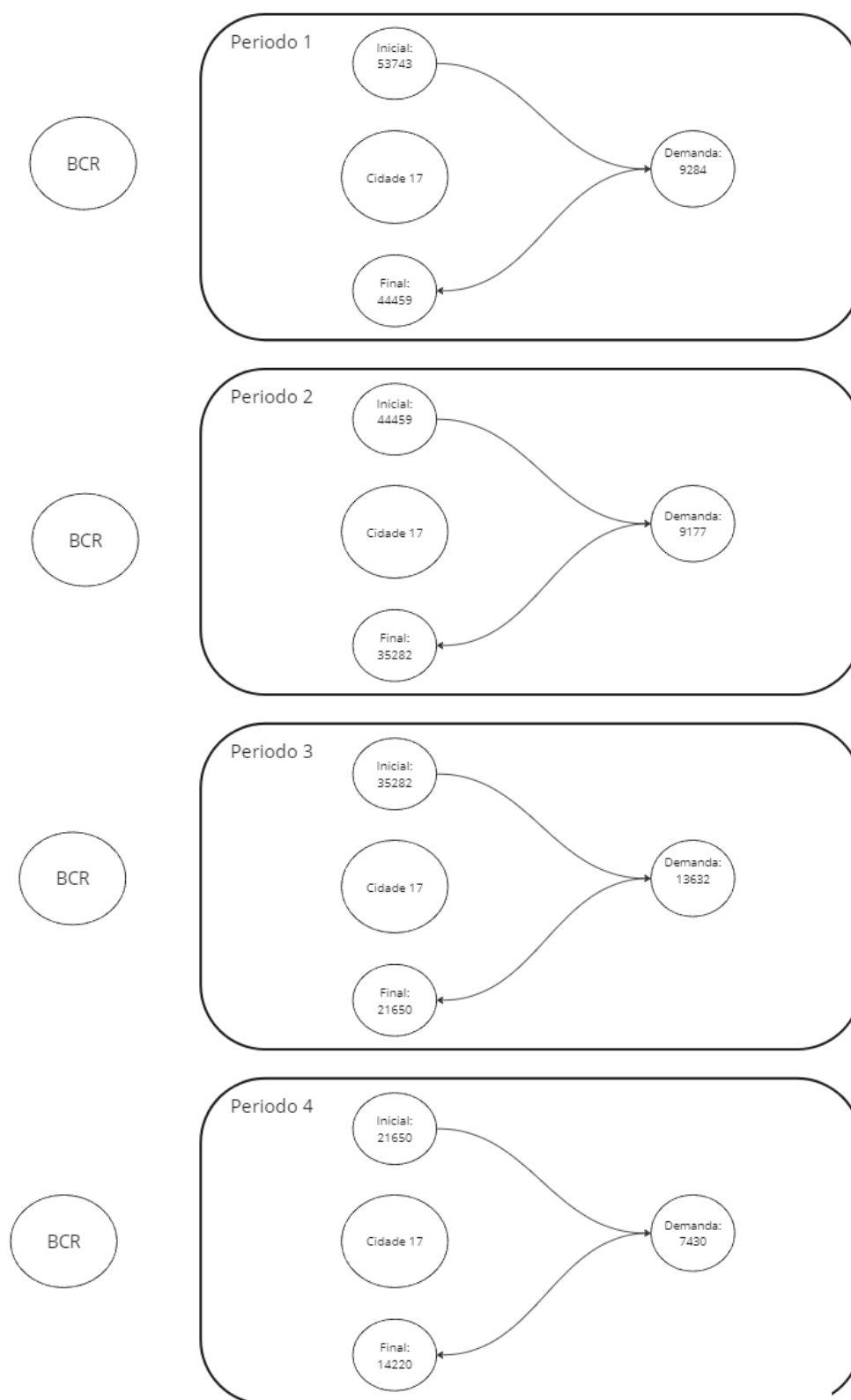


Figura 9 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 100 Soles na cidade de Lima



Fonte: O Autor (2023)

Figura 10 – Solução para a instância de 4 dias: fluxo de transações envolvendo notas de 200 Soles na cidade de Lima



Fonte: O Autor (2023)

Os valores dos fluxos exibidos nas Figuras 6, 7, 8, 9 e 10 podem ser visualizados também nas Tabelas 18, 19, 20, 21, 22 e 23, respectivamente.

Tabela 18 - Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 10 Soles na cidade de Lima

	Notas de 10			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
Começo do dia	681859	639386	569953	474566
Demanda	42473	69433	95387	36760
Arriving Modal 1+				
Arriving Modal 2+				
Depósito BCR				
Saque BCR				
Transporte Aéreo				
Transporte Terrestre				
Fim do dia	639386	569953	474566	437806

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 19 - Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 20 Soles na cidade de Lima

	Notas de 20			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
Começo do dia	830407	725616	604877	356272
Demanda	328356	428039	322985	571331
Arriving Modal 1+	58564	44170	19375	167274
Arriving Modal 2+	165001	263130	55005	47785
Depósito BCR				
Saque BCR				
Transporte Aéreo				
Transporte Terrestre				
Fim do dia	725616	604877	356272	0

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 20 - Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 50 Soles na cidade de Lima

	Notas de 50			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
Começo do dia	1501286	1449687	1355444	1286560
Demanda	51599	94243	68884	115753
Arriving Modal 1+				
Arriving Modal 2+				
Depósito BCR				
Saque BCR				
Transporte Aéreo				
Transporte Terrestre				
Fim do dia	1449687	1355444	1286560	1170807

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 21 - Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 100 Soles na cidade de Lima

	Notas de 100			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
Começo do dia	831471	761722	480687	445386
Demanda	438668	628175	444459	832974
Arriving Modal 1+	208287	205666	226127	203045
Arriving Modal 2+	120532	101374	142931	144443
Depósito BCR				
Saque BCR	40100	40100	40100	40100
Transporte Aéreo				
Transporte Terrestre				
Fim do dia	761722	480687	445386	0

Fonte: O Autor (2023)

Tabela 22 - Solução para a instância de 4 dias envolvendo notas de 200 Soles na cidade de Lima

	Notas de 200			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
Começo do dia	53743	44459	35282	21650
Demanda	9284	9177	13632	7430
Arriving Modal 1+				
Arriving Modal 2+				
Depósito BCR				
Saque BCR				
Transporte Aéreo				
Transporte Terrestre				
Fim do dia	44459	35282	21650	14220

Fonte: O Autor (2023)

Comparando os resultados que foram obtidos através do modelo matemático com os custos atuais de estoque, observou-se que seria possível reduzir, em média, 40% do custo atual (assumindo que tivéssemos uma previsão de demanda perfeita), levando em consideração as instâncias utilizadas (Figura10). É importante ressaltar que, para o modelo proposto, além dos custos de estoque estão sendo considerados os custos das operações de transporte terrestre e aéreo, como também os de saque e depósito no banco central de reservas, enquanto na comparação realizada está sendo considerado apenas o custo de estoque diário.

A Tabela 18 mostra os valores das soluções obtidas considerando um tempo limite de resolução de uma hora, para cada instância.

Tabela 23 – Resultados das instâncias

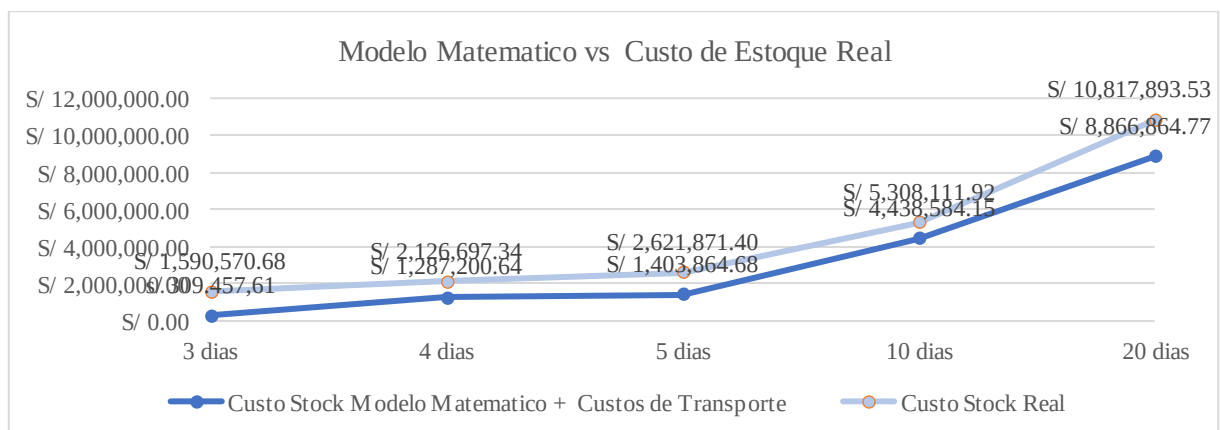
Instâncias	Valor da solução	GAP
3 dias	309.457,61 Soles	2,19%
4 dias	1.287.200,64 Soles	12,26%
5 dias	1.403.864,68 Soles	12,72%
10 dias	4.438.584,15 Soles	17,71%
20 dias	8.866.864,77 Soles	24,85%

Fonte: O Autor (2023)

Por fim, na Figura 11 é possível verificar a tendência dos resultados do modelo matemático e os custos reais. Percebe-se que quanto maior é a quantidade de períodos considerados, menor é o percentual de economia obtido. Portanto, conclui-se que desde que haja uma previsão de demanda perfeita, juntamente do modelo matemático proposto nessa pesquisa, é possível chegar a obter uma economia de custos de 40%. Vale ressaltar que a redução percentual da economia obtida pode ser uma consequência do aumento da dificuldade de resolução de problemas, por se tratar de instâncias maiores.

Por outro lado, observou-se também por meio dos resultados do modelo que os estoques diminuíram numa média de 30% a 45% por cidade, sendo Lima a cidade que obteve o melhor impacto na redução de custos, porém também foi a cidade com maior movimentação de dinheiro.

Figura 11 – Resultado do Modelo Matemático vs. Custos Reais



Fonte: O Autor (2023)

Os resultados detalhados, incluindo o fluxo de valores entre cidades para cada uma das instâncias, podem ser visualizados no seguinte link: <https://github.com/ManuelValCasQ/ResultadoModeloMatematicoPLM>.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo principal desta pesquisa foi propor um modelo matemático capaz de auxiliar e apoiar o tomador de decisão, com recomendações para que se saiba onde realizar depósitos e saques para cada centro de distribuição que uma determinada instituição bancária possui. Tal objetivo foi atingido, uma vez que os testes computacionais e as comparações dos custos históricos que o banco tinha antes do estudo, determinaram que o modelo matemático apresenta bons resultados.

Após a realização de testes com instâncias baseadas em dados reais fornecidos por uma instituição bancária, foi possível concluir que a pesquisa apresenta aspectos positivos. Portanto é um trabalho com potencial para ser replicado e utilizado em pesquisas futuras, pois apresentou bons resultados para estudos envolvendo problemas de “*Cash Management*” e “*Cash Replenishment*”.

Através dos cálculos foi possível determinar que, com as instâncias utilizadas, o modelo matemático proposto chega a economizar uma média de 40% dos gastos. Além disso, é importante mencionar que o tempo de resposta é curto pelo que se considera um modelo eficiente e ágil. Tomando como base o período analisado, os tempos de execução podem ser de até 165 segundos para a resolução de uma instância de 3 dias e até 3600 segundos para uma instância de 20 dias, restando tempo suficiente para que o tomador de decisão avalie cada alternativa de forma diária antes de realizar as operações.

O modelo matemático apresentado, além de contemplar novas funcionalidades e características, pode ser aplicado em outras empresas que lidam com gestão e distribuição de dinheiro, levando em consideração custos logísticos, estoques, tipos de notas, períodos, entre outros. Entre as características que diferenciam esta pesquisa daquelas relacionadas à gestão de transporte de dinheiro do banco para seus centros de distribuição, é que essa parte de uma visão macro para uma visão micro, onde pode-se visualizar como são os gastos totais de um país para posteriormente conhecer quanto dinheiro deveria ser transportado para cada cidade, considerando suas variáveis de distribuição e suas demandas, e com base nisso poder chegar a uma visão mais micro, podendo identificar com eficiência quanto dinheiro de cada cidade deverá ser transportado para cada centro de distribuição como é o caso dos ATMs, agências e *retailers*.

Portanto, para investigações posteriores, se buscará incluir no modelo matemático as variáveis por cada cidade como também um modelo de caráter híbrido com a previsão de demanda, a fim de criar um modelo mais estruturado que permita que todos os bancos

cheguem a ter uma previsão correta e estratégica de quanto dinheiro irão ter ao final do dia. Assim como, a possibilidade de considerar um estoque de segurança em cada cidade para que sempre possa existir dinheiro para os períodos posteriores

Por fim, é importante mencionar as contribuições sociais, econômicas e ambientais que o projeto traz consigo. No âmbito social, destaca-se a melhoria na eficiência das operações bancárias. Isso se traduz em um excelente atendimento aos clientes, reduzindo os tempos de espera e proporcionando uma experiência mais tranquila e satisfatória ao realizar saques em um centro de distribuição de propriedade do banco. Além disso, também se minimizaria o uso desnecessário de recursos, como combustível e pessoal, contribuindo para uma gestão mais sustentável e responsável.

No que se refere às contribuições econômicas, destaca-se a redução significativa dos custos operacionais tanto para o banco quanto para todos os clientes. Ao garantir que um banco, agência ou varejista esteja devidamente abastecido, a preocupação logística em torno da gestão de caixa é mitigada, assegurando que sempre haja fundos disponíveis para saques.

Quanto às contribuições ambientais, a otimização de rotas e a alocação eficiente de veículos podem resultar em emissões menores de gases poluentes e na redução do impacto ambiental. Além disso, a adoção dessas práticas eficientes e sustentáveis na gestão de recursos e operações bancárias podem melhorar a imagem do banco em termos de responsabilidade ambiental e sustentabilidade. Esse enfoque também pode inspirar outros bancos a seguir uma estratégia semelhante para gerenciar seus processos, gerando um impacto mais amplo no setor.

Em resumo, o projeto não apenas beneficia o banco, mas também traz vantagens tangíveis para a sociedade ao melhorar a eficiência, reduzir custos e promover a sustentabilidade ambiental no âmbito bancário.

REFERÊNCIAS

- ÁGOSTON, C. S. Kolos et al. *Pareto improvement and joint cash management optimization for banks and cash-in-transit firms*. European Journal of Operational Research, Budapest, v. 254, n. 3, p. 1074-1082, 2016.
- ALBRIGHT, W. E.; WINSTON, W. L.; ZAPPE, C. J. *Practical management science*. Mason, Ohio: Thomson/South-Western, 2008.
- ALSAGOOR, A.; ALHARBI, A.; ABDEL-AAL, M. A. M. *A Multi-Period Inventory Replenishment Policy for ATM Network*. In: Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management. Riyadh, Saudi Arabia: IEOM Society International, 2019.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa Operacional para cursos de engenharia*. São Paulo: Elsevier, 2007.
- BALAKRISHNAN, T. V. *A Literature Survey on Automated Teller Machine Cash Demand Analysis and Prediction in Financial Sector*. Ilkogretim Online - Elementary Education Online, v. 20, n. 6, p. 2146-2161, 2021.
- BATI, S.; GOZUPEK, D. *Joint optimization of cash management and routing for new-generation automated teller machine networks*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, v. 49, n. 12, p. 2724-2738. 2019.
- BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J.; COOPER, M. B.; BOWERSOX, J. C.; FARIA, L. C. Q. *Gestão logística da cadeia de suprimentos*. 4. Ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.
- BRAUDEL, F. *Civilização material, economia e capitalismo: séculos XV-XVIII*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.
- BRONSON, R. *Pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: Campus, 1993.
- CARDONA, L.; MORENO, L. *Cash management cost reduction using data mining to forecast cash demand and LP to optimize resources*. Memetic Computing, v. 4, p. 127-134, 2012.
- CASTRO, J. *A stochastic programming approach to cash management in banking*. European Journal of Operational Research, v. 192, n. 3, p. 963-974, 2009.
- CAUCHICK, M. et al. *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*. Rio de Janeiro: Elsevier.
- CHOTAYAKUL, S. et al. *An optimization-based heuristic for a capacitated lot-sizing model in an automated teller machines network*. Journal of Mathematics and Statistics, v. 9, n. 4, p. 283-288, 2013.
- DIAO, Y.; SARKAR, R.; JAN, E.-E. *Optimizing ATM cash flow network management*. In: NOMS 2016 - 2016 IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium. Istanbul, Turkey, 2016.

EKINCI Y., LU, J.-C., DUMAN, E. *Optimization of ATM cash replenishment with group-demand forecasts*. Expert Systems with Applications, [S.l.], v. 42, n. 8, p. 4052-4062, 2015.

EKINCI, Y.; SERBAN, N.; DUMAN, E. *Optimal ATM replenishment policies under demand uncertainty*. Journal of the Operational Research Society, v. 70, n. 5, p. 745-761, 2019. Emirates. "Fleet Especifications". 2021. Dubai: Emirates.

FEDERAL RESERVE BANK OF ATLANTA. *Cash Replenishment*. 2021.

GHODRATI, A.; ABYAK, H.; SHARIFIHOSSEINI, A. *ATM cash management using genetic algorithm*. Management Science Letters, Iran, p. 2007-2041, 2013.

HAMZA, K.; MUTALA, Z.; ANTWI, S. K. *Cash management practices and financial performance of small and medium enterprises (SMEs) in the Northern region of Ghana*. International Journal of Economics, Commerce and Management, 3(7), 456-469, 2015.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introduction to operations research*. 9^a ed. México: McGraw Hill, 2010.

JIMENEZ VILLA, I. *Diseño de una camioneta blindada México 2010*. Tesis - Instituto Politécnico Nacional, Unidad Azcapotzalco, México. 2010.

KREITNER R. J. *Management*. 6th Edition, Houghton Mifflin Company, USA, 1995.

LARRAIN, H.; COELHO, L. C.; CATALDO, A. *A Variable MIP Neighborhood Descent algorithm for managing inventory and distribution of cash in automated teller machines*. Computers & Operations Research, v. 85, 2017.

MANTOVANI, C. "Crises keep cash demand high, says banknote machine company." Reuters, 2022.

MILLER, M.; ORR, D. *A Model of the Demand for Money by Firms*. Quarterly Journal of Economics, v. 80, n. 3, p. 413-435, 1966.

ÖZER, Ö. *Solving a bank ATM location problem by linear programming*. Master of Science in Computer Engineering, 2019.

QUISPE, M. V. C.; KRAMER, R.; COSTA, L.; COUTINHO, W.P. Um modelo de programação linear inteira mista para um problema de transferência e transporte de valores: o caso de um banco peruano. In: Innovation for Systems Information and Decision – 4th International Meeting. Recife, 2022.

SIMUTIS, R. et al. *Optimization of cash management for ATM network*. Information Technology and Control, Lithuania, v. 36, 2007.

SOLANKI, R. *Optimization of cash inventory management in the retail sector*. International Journal of Retail & Distribution Management, [S.l.], v. 47, n. 1, p. 78-93, 2019.

SOMEYA, A. *Reduction of ATM operational cost by planning cash replenishment*. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, v. 18, n. 3, p. 445-452, 2014.

TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. 9. ed. México: Pearson, 2012.

VAN ANHOLT, R. G. *Optimizing Logistics Processes in Cash Supply Chains*. PhD Thesis - Research and graduation internal, Vrije Universiteit Amsterdam. Amsterdam Business Research Institute, 2014.

VAN ANHOLT, R. G.; COELHO, L. C.; LAPORTE, G.; VIS, I. F. A. *An Inventory-Routing Problem with Pickups and Deliveries Arising in the Replenishment of Automated Teller Machines*. Transportation Science, v. 50, 2016.

VAN HORNE, J. C. *Financial management and policy*. Financial Management Services, 2002.

VENKATESH, K.; RAVI, V.; PRINZIE, A. VAN DEN POEL, D. *Cash Demand Forecasting in ATMs by Clustering and Neural Networks*. European Journal of Operational Research, v. 232, p. 383-392, 2014.