



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JEAN CARLOS CARDOSO

PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL EM ÁRVORES

Recife

2023

JEAN CARLOS CARDOSO

PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL EM ÁRVORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade.

Orientador: Dr. Pablo Martín Rodríguez

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C268p Cardoso, Jean Carlos
Percolação acessível em árvores / Jean Carlos Cardoso. – 2023.
47 f.: il., fig.

Orientador: Pablo Martín Rodríguez.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Estatística, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Percolação acessível. I. Martín Rodríguez, Pablo
(orientador) II. Título.

519.2 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-198

JEAN CARLOS CARDOSO

PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL EM ÁRVORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 17 de novembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Pablo Martín Rodríguez
Orientador/Presidente, UFPE

Prof. Dr. Élcio Lebensztayn
Examinador Externo à Instituição, UNICAMP

Prof^a Dr^a Nevena Maric
Examinadora Externa à Instituição, Union University (Sérvia)

Prof. Dr. Pablo Almeida Gomes
Examinador Externo à Instituição, USP

Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior
Examinador Externo à Instituição, UFG

Dedico a minha amada esposa Dra. Priscila Friedemann Cardoso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, desejo expressar minha profunda gratidão a Deus por Sua orientação e pela força que Ele me concedeu ao longo desta jornada acadêmica, que culminou nesta tese.

Quero evidenciar minha sincera gratidão ao meu orientador, o Prof. Dr. Pablo Martin Rodríguez, por sua orientação, paciência e apoio incansável durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho. Suas valiosas orientações desempenharam um papel fundamental no sucesso deste estudo.

Quero também estender meus agradecimentos ao Dr. Pablo Almeida Gomes, cuja contribuição significativa enriqueceu este trabalho de maneira inestimável, desempenhando um papel fundamental na realização deste projeto e destacando a importância das colaborações.

À minha família, especialmente meus pais, minha eterna gratidão pelo amor incondicional, incentivo e pelos sacrifícios que fizeram ao longo dos anos, proporcionando-me a oportunidade de perseguir este último nível da pós-graduação. Vocês foram a base sólida sobre a qual construí meus sonhos.

Gostaria de agradecer profundamente à minha esposa, Dra. Priscila Friedemann Cardoso. Ela não apenas ofereceu apoio emocional incansável, mas também compartilhou ativamente a carga de trabalho e a paixão pelo desenvolvimento desta tese. Nossa colaboração foi incrivelmente gratificante, e juntos enfrentamos desafios e celebramos conquistas, tornando esta caminhada verdadeiramente especial. Obrigado por estar ao meu lado e ser parte integrante deste sucesso.

Por fim, gostaria de destacar minha gratidão à FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco) por seu crucial apoio financeiro durante meu doutorado. Esse investimento permitiu que eu me dedicasse integralmente aos estudos, participar de eventos acadêmicos e contribuir significativamente para a pesquisa em minha área, fortalecendo a pesquisa científica no nosso país e, em especial, no estado de Pernambuco. Agradeço sinceramente por essa oportunidade de realizar meu sonho de alcançar esse último nível da vida acadêmica.

A todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho, meu sincero agradecimento.

“The credit belongs to the man who is actually in the arena, [...] who at the worst, if he fails, at least fails while daring greatly, so that his place shall never be with those cold and timid souls who neither know victory nor defeat.” (ROOSEVELT, 1910)

RESUMO

Embora a percolação acessível seja um conceito recente, muitos trabalhos foram desenvolvidos na última década abordando esse tema tão em voga. A possibilidade de modelar problemas reais usando a teoria de percolação sem dúvida é o que faz essa área ser tão interessante e aclamada. O objetivo principal do nosso trabalho é encontrar condições para percolação acessível em árvores esfericamente simétricas. Sendo assim, neste trabalho introduzimos uma nova forma de caracterizar árvores esfericamente simétricas, denotada por 2-power. Este novo conceito é baseado na velocidade do crescimento da árvore. Para provar a percolação acessível dessas novas árvores foi necessário a criação do que chamamos de percolação δ -acessível. Esta por sua vez é uma forma mais restrita da já conhecida percolação acessível. Vários resultados foram derivados da criação desses conceitos e exemplos selecionados foram utilizados para a compreensão dos principais resultados. Finalizamos nosso trabalho explicitando também condições para a extinção de árvores esfericamente simétricas.

Palavras-chave: árvores 2-power; percolação δ -acessível; percolação acessível; árvores esfericamente simétricas.

ABSTRACT

Although accessibility percolation is a recent concept, many works have been presented in the last decade addressing this topic that is so in vogue. The possibility of modeling real problems using percolation theory is undoubtedly what makes this area so interesting and acclaimed. The main objective of our work is to find accessibility percolation conditions in spherically symmetric trees. Therefore, in this work we present a new way to characterize spherically symmetric trees, denoted by 2-power. This new concept is based on the speed of tree growth. To prove the accessibility percolation of these new trees it was necessary to create the δ -accessibility percolation concept. It is a more restricted form of the already known accessibility percolation. Several results were derived from the creation of these concepts and selected examples were used to understand the main results. We finish our work and also explain conditions for the extinction of spherically symmetric tree.

Keywords: 2-power trees; δ -accessibility percolation; accessibility percolation; spherically symmetric tree.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de árvores esfericamente simétricas	15
Figura 2 – Possível realização do modelo de percolação em \mathbb{Z}^2	17
Figura 3 – Representação de árvores esfericamente simétricas definidas em Coletti <i>et al.</i> (2018).	18
Figura 4 – Uma realização do processo de Galton-Watson.	20
Figura 5 – Ilustração de um processo de ramificação em meio variável com e sem seleção.	21
Figura 6 – Uma realização de um processo de percolação acessível que não possui percolação δ -acessível.	29
Figura 7 – Exemplo de árvore 2-power com função de crescimento $f(i) = 2^i$	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	14
2.1	GRAFOS	14
2.2	ÁRVORES	14
2.3	PERCOLAÇÃO	16
2.4	PROCESSOS DE RAMIFICAÇÃO	19
2.5	MARTINGALE	26
3	PERCOLAÇÃO δ-ACESSÍVEL	28
4	NOVAS CONDIÇÕES PARA PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL .	36
4.1	ÁRVORES 2-POWER	37
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

É fascinante como algumas ideias nascem. Um mesmo problema pode ser visto por vários pontos de vista. Uma mudança de perspectiva do problema pode fazer surgir resultados e conceitos que complementam uma teoria já existente ou até mesmo criam novas teorias. Na teoria da percolação temos exemplos desse processo; este trabalho é um deles. A primeira formulação matemática de percolação foi feita por Broadbent e Hammersley (1957) e a ideia central é analisar a aleatoriedade do meio e não do fluido. Vários exemplos podem ser dados para a compreensão do que é o meio e o fluido. Difusão de soluto através de solvente, elétrons migrando sobre uma rede atômica, moléculas penetrando em um sólido poroso e doença infectando uma comunidade são alguns exemplos explorados pelos autores acima citados. O estudo da aleatoriedade do fluido já era bem conhecido na literatura, mas a perspectiva de se preocupar com a aleatoriedade do meio deu início a moderna teoria de percolação.

Nos últimos anos a teoria de percolação tem tido notoriedade sendo, atualmente, um dos principais eixos da teoria de probabilidade. Algumas referências que corroboram essa ideia podem ser consultadas, por exemplo, Broadbent e Hammersley (1957), Sahini (1994), Grimmett (1999), Kesten (2006), Nowak e Krug (2013), Duminil-Copin (2018) e Krug (2021). O conceito de percolação acessível foi introduzido à literatura por Nowak e Krug (2013) que se inspiraram no seguinte problema de biologia evolutiva:

Imagine uma população de alguma forma de vida dotada do mesmo tipo genético (genótipo). Se ocorrer uma mutação, é criado um novo genótipo que pode morrer ou substituir o antigo. Desde que a seleção natural seja suficientemente forte, esta última só acontece se o novo genótipo tiver maior aptidão. Como consequência, em escalas de tempo mais longas, o genótipo da população segue um caminho através do espaço de genótipos ao longo do qual o ajuste é monotonicamente crescente. (NOWAK; KRUG, 2013, p. 66004-p1, tradução nossa).¹

Esse caminho monotonicamente crescente que o genótipo da população segue é um exemplo do que definiremos como caminho acessível. A ideia então é estudar a probabilidade de existência de um caminho acessível. Os autores iniciam seus estudos em árvores finitas e localmente finitas, chamadas n -árias. Sejam N_h a quantidade de caminhos acessíveis

¹ Imagine a population of some life form endowed with the same genetic type (genotype). If a mutation occurs, a new genotype is created which can die out or replace the old one. Provided natural selection is sufficiently strong, the latter only happens if the new genotype has larger fitness. As a consequence, on longer timescales the genotype of the population takes a path through the space of genotypes along which the fitness is monotonically increasing.

conectando a raiz (denotada por $\mathbf{0}$) com o último nível, n o número de filhos de cada vértice e h a distância da raiz até o último nível da árvore. Então eles obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 1. Se $n = n(h) = \alpha h$, com $\alpha > 0$ uma constante, então

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) \begin{cases} = 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ > 0, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Note que há uma lacuna nesse resultado: o que acontece se $\alpha \in (e^{-1}, 1]$? A resposta veio no mesmo ano no artigo publicado por Roberts e Zhao (2013) e enunciamos a seguir.

Teorema 2. Se $n = n(h) = \alpha h$, com $\alpha > e^{-1}$ uma constante, então

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = 1.$$

Ou seja, unindo os resultados de Nowak e Krug (2013) e Roberts e Zhao (2013) temos

Teorema 3. Se $n = n(h) = \alpha h$, então

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ 1, & \text{se } \alpha > e^{-1}. \end{cases}$$

A partir do Teorema 3 dizemos que ocorre transição de fase no modelo de percolação acessível definido para as n -árias quando $\alpha = e^{-1}$. Para mais informações sobre a motivação biológica, recomendamos Roberts e Zhao (2013) e Berestycki *et al.* (2016). Os resultados acima citados são inspirações para novas ideias. Um exemplo é o artigo de Duque *et al.* (2019) que propõe um modelo de percolação k -acessível onde é possível ter “buracos” na monotonicidade do caminho tomado pela população de genótipos. Deixamos como recomendação o artigo escrito por Krug (2021) que traz um compilado de vários trabalhos desenvolvidos sobre o tema em questão.

Recentemente, Coletti *et al.* (2018) reformularam essa ideia agora para árvores infinitas e localmente finitas, obtendo o resultado a seguir.

Teorema 4. Considere o modelo de percolação em uma árvore esfericamente simétrica \mathcal{T}_α definida pela função $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil$ em que $\alpha > 0$ é uma constante. Então o parâmetro crítico é dado por $\alpha_c = 1$. Mais precisamente, se $\alpha \leq 1$ então não há percolação acessível em \mathcal{T}_α e se $\alpha > 1$ então há percolação acessível em \mathcal{T}_α .

Mas, foi a partir do trabalho de Bertacchi *et al.* (2020) que a seguinte conjectura para árvores esfericamente simétricas foi proposta.

Conjectura 1. Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica com função de crescimento f . \mathcal{T}_f tem percolação acessível se, e somente se, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$.

Esse é o ponto de partida do nosso trabalho. Nosso objetivo é buscar responder à validade ou não da conjectura e em um segundo momento responder perguntas que surgirão no decorrer de nossos estudos.

Nosso texto está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2 estabelecemos as bases necessárias para o desenvolvimento de toda a teoria contida neste trabalho. Apresentamos alguns conceitos sobre grafos e árvores e falamos sobre suas relações. Definimos o que é percolação e percolação acessível. Introduzimos o conceito de processos de ramificações e enunciamos resultados importantes dessa teoria que serão usados e explorados ao longo do texto. Finalizamos apresentando uma breve seção sobre martingale a fim de que o leitor tenha todo o ferramental necessário para dar continuidade a leitura do texto. No Capítulo 3 definimos o conceito de percolação δ -acessível e, a partir do mesmo, desenvolvemos vários resultados importantes. Finalizamos o capítulo em questão dando uma resposta à Conjectura 1. O Capítulo 4 começa com alguns resultados obtidos através da manipulação das hipóteses contidas no Teorema 3.3 do artigo de Bertacchi *et al.* (2020) e, posteriormente, definimos o conceito de árvores 2-power. Com essa nova definição provamos os principais resultados obtidos em nossos estudos. Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões e propostas futuras por nós almejadas.

2 PRELIMINARES

Iniciamos nosso trabalho com uma pequena introdução sobre grafos e árvores. Abordamos algumas de suas definições e relações. Apresentamos o conceito de árvores esfericamente simétricas que será indispensável para a continuidade do trabalho. Alguns resultados importantes para este trabalho são enunciados e demonstrados nesta seção a fim de criarmos um trabalho autocontido que servirá como base introdutória a todo o texto aqui escrito. As principais referências usadas são enunciadas de acordo com sua necessidade no decorrer do texto.

2.1 GRAFOS

Muitas situações do cotidiano podem ser modeladas a partir de grafos. Um grafo pode ser representado por um conjunto de pontos ligados por linhas.

Um grafo \mathcal{G} é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde \mathcal{V} representa o conjunto dos vértices e \mathcal{E} o conjunto das arestas. Dizemos que os vértices u e v são vizinhos se $(u, v) \in \mathcal{E}$ e denotamos por $u \sim v$. Denotamos por $d(v)$ o grau de um vértice que representa o número de vizinhos do vértice v . Se para cada vértice v , $d(v)$ for finito, dizemos que o grafo \mathcal{G} é localmente finito.

Um caminho em \mathcal{G} é uma sequência finita de diferentes vértices v_0, v_1, \dots, v_n tal que $v_i \sim v_{i+1}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Vale ressaltar que, em teoria dos grafos, um caminho é necessariamente autoevitante, ou seja, cada vértice só pode ser “visitado” uma única vez. Dizemos que um grafo \mathcal{G} é conexo se para cada par de vértices, $u \neq v$, existir pelo menos um caminho que os conecta.

Para um maior aprofundamento em teoria dos grafos ver Bollbás (1998) e Bondy e Murty (1976).

2.2 ÁRVORES

Se $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ for um grafo conexo em que quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho, dizemos que \mathcal{T} é uma árvore. Usualmente trabalhamos com árvores que possuem raízes, isso significa que fixamos um vértice para ser a raiz da árvore e o

denotamos por $\mathbf{0}$. Para cada $v \in \mathcal{V}$ denotamos por $|v| := d(v, \mathbf{0})$ o número de arestas desse caminho.

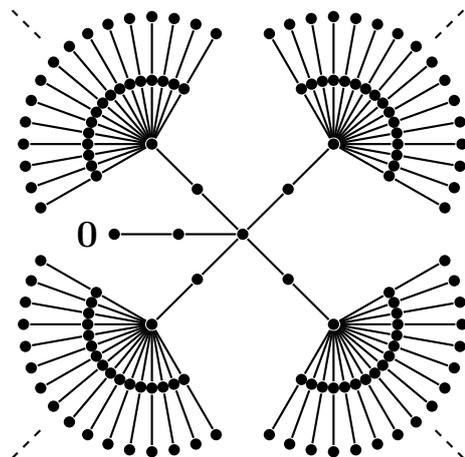
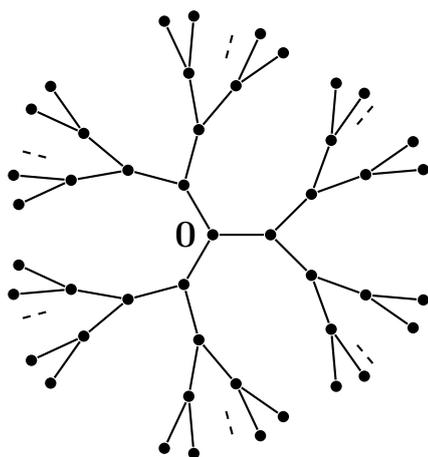
Sejam $u, v \in \mathcal{V}$. Se u é um dos vértices do caminho que conecta o vértice v à raiz da árvore $\mathbf{0}$, então escrevemos $u \leq v$. Se $u \leq v$ e $u \neq v$ então denotamos $u < v$. Dizemos que v é descendente de u se $u \leq v$. Por outro lado, se $u \leq v$ e $u \sim v$ dizemos que v é sucessor ou filho de u . Também, denotamos por $\partial\mathcal{T}_n := \{v \in \mathcal{V}; |v| = n\}$ o conjunto de vértices que estão à distância n da raiz e usualmente o chamamos nível n da árvore. Diremos que uma árvore cresce conforme os sucessores dos vértices se distanciam da raiz.

Neste trabalho, nossas árvores são tais que todo vértice tem sucessor. Focamos nossa atenção em um tipo de árvore especial, chamada de árvore esfericamente simétrica. Uma árvore é esfericamente simétrica se qualquer par de vértices que estão a mesma distância da raiz tem o mesmo grau. Dessa forma podemos definir uma função f que associa a distância da raiz até um vértice ao seu número de filhos. A função f definida dessa forma é chamada função de crescimento da árvore e denotamos a árvore por \mathcal{T}_f . Assim podemos dizer que se \mathcal{T}_f é esfericamente simétrica então $d(\mathbf{0}) = f(0)$ e para todo $v \in \mathcal{V}$, $d(v) = f(|v|) + 1$ onde $f = \{f(i)\}_{i \geq 0}$ é uma sequência dada de números naturais.

A Figura 1 ilustra dois exemplos de árvores esfericamente simétricas.

Figura 1 – Exemplos de árvores esfericamente simétricas

- (a) Árvore homogênea d -dimensional \mathcal{T}_d . Sua função de crescimento é $f(0) = d + 1$ e $f(i) = d$, $i \geq 1$. Aqui ilustramos para $d = 2$.
- (b) Árvore esfericamente simétricas com função de crescimento dada por $f(i) = 2^i$, se $i \equiv 0 \pmod{2}$ e $f(i) = 1$, se $i \not\equiv 0 \pmod{2}$.



Fonte: (a) Rodríguez (2019); (b) O autor (2023).

Para um estudo mais aprofundado sobre probabilidade e processos estocásticos em árvores recomendamos consultar Lyons e Peres (2017).

2.3 PERCOLAÇÃO

Assim como Sahini (1994) em seu livro usou uma história para introduzir o tema de Percolação, contarei um fato que me ocorreu.

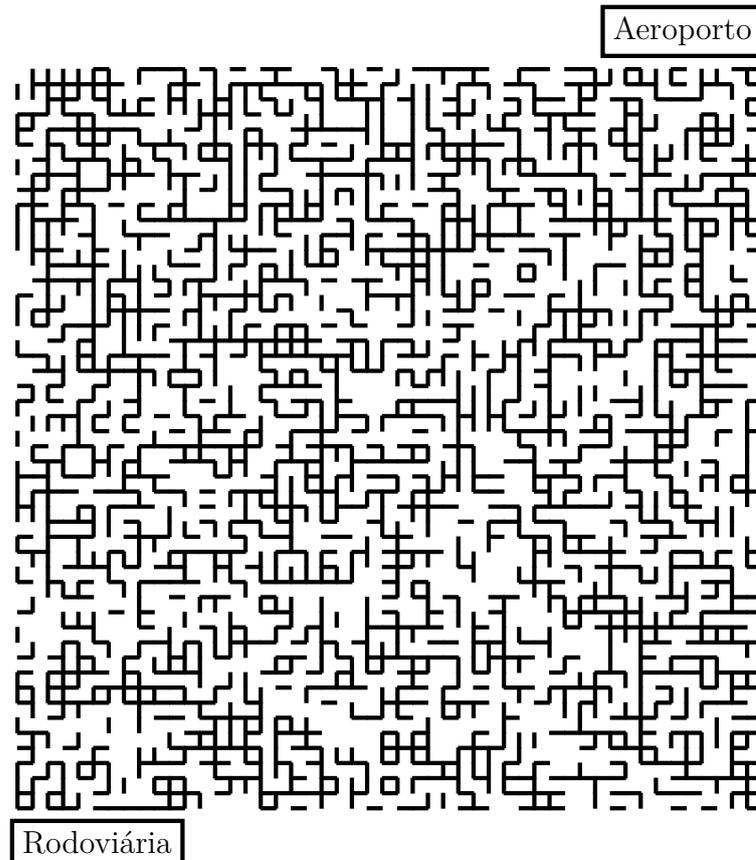
Recentemente precisei fazer uma viagem ao Recife. Para isso era necessário pegar um ônibus da minha cidade até a capital do estado para só então embarcar no avião a fim de chegar ao meu destino. Devido a atrasos, cheguei à capital próximo ao horário do meu voo. Ao entrar no primeiro táxi disponível avisei apressadamente o motorista que meu destino era o aeroporto. Era noite, algumas estradas estavam interditadas por reparos, outras por blitz policial, algumas por “manifestações” e tudo isso parecia estar ocorrendo ao acaso. A pergunta que nos fazíamos era: qual será o caminho disponível para ir até o aeroporto?

Usando essa história como pano de fundo, suponha que as ruas da capital sejam como os limites de uma rede quadrada muito grande e que algumas dessas ruas estejam bloqueadas por alguns dos acontecimentos mencionados (Figura 2). A pergunta que eu e o taxista nos fazíamos pode ser reformulada como: qual a fração de ruas da capital que teriam que estar abertas ao tráfego a fim de que eu conseguisse chegar ao aeroporto? Obviamente, se muitas ruas estivessem fechadas eu, provavelmente, não conseguiria chegar ao aeroporto e perderia meu voo. Por outro lado, se a maioria estivesse aberta provavelmente eu chegaria a tempo de pegar meu voo. Portanto, deve haver um valor crítico da fração de ruas livres que me impediria de chegar ao aeroporto, ao passo que, caso a fração esteja acima desse valor, eu chegaria sem problemas ao meu destino. A teoria da percolação busca, dentre um amplo leque de aplicações, responder questionamentos como esses.

Para cada vértice $v \in \mathcal{V}$ de uma árvore \mathcal{T}_f associamos uma variável aleatória contínua X_v de forma independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Isso gera um conjunto de variáveis aleatórias i.i.d. Sem perda de generalidade, vamos supor que X_v tem distribuição uniforme em $[0, 1]$. Dizemos que um caminho v_0, v_1, \dots, v_n em \mathcal{T}_f é acessível se $X_{v_0} < X_{v_1} < \dots < X_{v_n}$. Denotamos por $v_0 \xrightarrow{c.a.} v_n$ se os vértices v_0 e v_n são conectados por algum caminho acessível. O nível $\partial\mathcal{T}_n$ é acessível desde a raiz se existe um caminho acessível da raiz até algum vértice $v \in \partial\mathcal{T}_n$.

Podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, Λ_n como o evento que representa que $\partial\mathcal{T}_n$ é acessível desde a raiz. Podemos então definir que a percolação acessível em \mathcal{T}_f irá existir se o evento $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ ocorrer com probabilidade positiva. O objetivo do nosso trabalho é estudar

Figura 2 – Possível realização do modelo de percolação em \mathbb{Z}^2 .



Fonte: O autor (2023).

a percolação acessível em árvores esfericamente simétricas, ou seja, estudar o limite

$$\theta(\mathcal{T}_f) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n).$$

Se $\theta(\mathcal{T}_f) > 0$ dizemos simplesmente que \mathcal{T}_f possui percolação acessível. Se $\theta(\mathcal{T}_f) = 0$ então \mathcal{T}_f não possui percolação acessível. Vale ressaltar que as notações aqui usadas são as mesmas de Coletti *et al.* (2018).

Na Figura 3 estão ilustradas duas árvores esfericamente simétricas. A seguir incluímos o exemplo mostrando que a árvore fatorial representada na Figura 3a não tem percolação acessível e no decorrer do texto justificaremos que a Figura 3b possui percolação acessível.

O exemplo a seguir pode ser encontrado em Coletti *et al.* (2018).

Exemplo 1. A árvore fatorial \mathcal{T}_1 é definida pela função de crescimento $f(i) = i + 1$. Um caminho da raiz até uma de suas folhas (vértices) em $\partial\mathcal{T}_n$ tem distância $n + 1$. Logo, permutando os $n + 1$'s valores que encontramos neste caminho, temos $(n + 1)!$ possíveis ordens de valores. Um caminho acessível, necessita que esses valores estejam em ordem não decrescente. Logo, a probabilidade do caminho estar acessível é $\frac{1}{(n + 1)!}$. Ainda, temos $n!$

possíveis caminhos da raiz até $\partial\mathcal{T}_{1_n}$. Logo,

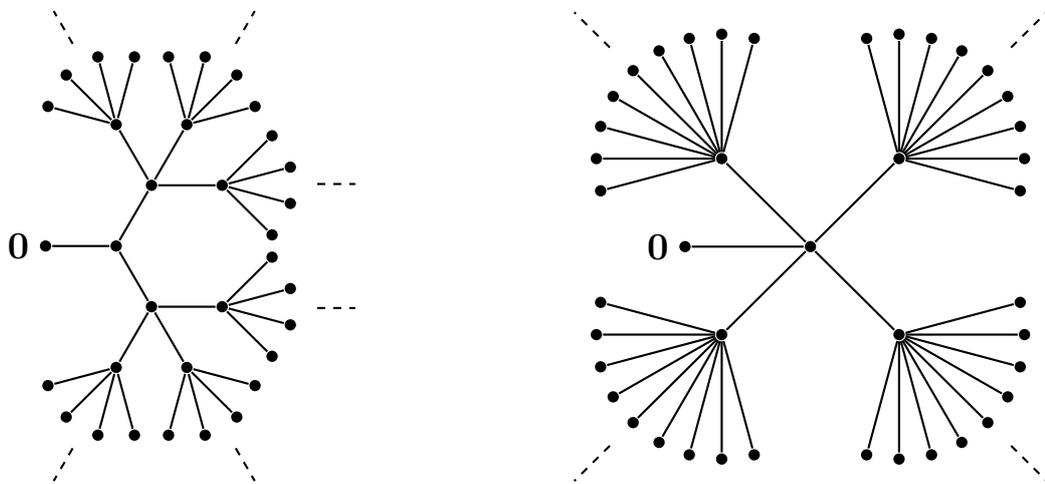
$$\mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\theta(\mathcal{T}_f) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Figura 3 – Representação de árvores esfericamente simétricas definidas em Coletti *et al.* (2018).

- (a) Árvore fatorial \mathcal{T}_1 com função de crescimento $f(0) = 1$ e $f(i) = i + 1$, $i \geq 1$. (b) Árvore \mathcal{T}_α com função de crescimento $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil$. Aqui ilustramos para $\alpha = 2$.



Fonte: O autor (2023).

Ao longo do nosso texto será necessário algumas vezes comparar árvores distintas. Suponha que $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ e $\mathcal{T}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ são árvores esfericamente simétricas que compartilham a mesma raiz. Se temos $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ e $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, dizemos que \mathcal{T}_1 é dominada por \mathcal{T}_2 e denotamos por $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$. Perceba que todo caminho acessível em \mathcal{T}_1 que conecta a raiz até $\partial\mathcal{T}_{1_n}$ também conectará a raiz a $\partial\mathcal{T}_{2_n}$ se $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$. Usando um simples argumento de acoplamento, Coletti *et al.* (2018) provam o Lema 1, o qual estabelece que a probabilidade de percolação acessível é monótona na árvore.

Lema 1. Se $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$, então $\theta(\mathcal{T}_1) \leq \theta(\mathcal{T}_2)$.

Com o Lema 1 e o Exemplo 1 podemos ver que nenhuma das árvores esfericamente simétricas com função de crescimento constante, por maior que seja a constante, possui percolação acessível. De fato qualquer árvore dessa forma pode ser vista como uma árvore dominada pela árvore fatorial. De forma mais geral, qualquer árvore que seja dominada pela árvore fatorial, não possui percolação acessível.

2.4 PROCESSOS DE RAMIFICAÇÃO

É inevitável, ao falar em processos de ramificação, não mencionarmos a clássica história de Galton-Watson.

Até décadas recentes acreditávamos que o estudo sobre os processos de ramificação foi iniciado a partir de um problema publicado em 1873 no *Educational Times* por Francis Galton. Galton, ao propor este problema, estava investigando a extinção de sobrenomes aristocráticos, o que era uma preocupação entre os vitorianos.

Uma grande nação, da qual nos preocupamos apenas com os homens adultos, em número N , e que cada um tem sobrenomes distintos, coloniza um distrito. Sua lei de população é tal que, em cada geração, a_0 por cento dos homens adultos não têm filhos homens que cheguem à vida adulta; a_1 tem um filho do sexo masculino; a_2 tem dois; e assim por diante até a_5 que tem cinco.

Encontre (1) a proporção dos sobrenomes que terá se extinguido após r gerações; e (2) quantos casos haverá do mesmo sobrenome sendo detido por m pessoas. (KENDALL, 1966, p. 386, tradução nossa).¹

Henry William Watson encontrou, incorretamente, uma solução. Apesar da solução encontrada por Watson ter um erro algébrico, isso não foi um grande problema, visto que o método utilizado por ele é até hoje a base para se encontrar a solução correta.

Em Grinstead e Snell (1997) foi relatado que Heyde e Seneta descobriram uma comunicação que antecipava em 28 anos as descobertas de Galton-Watson. Irénée-Jules Bienaymé mostrou estar ciente do problema e até mesmo chega a mencionar ter conhecimento de sua solução. Embora ele não tenha justificado seus resultados, o mesmo pretendia publicar um artigo sobre este problema. Porém, esse artigo não foi escrito ou ainda não foi encontrado.

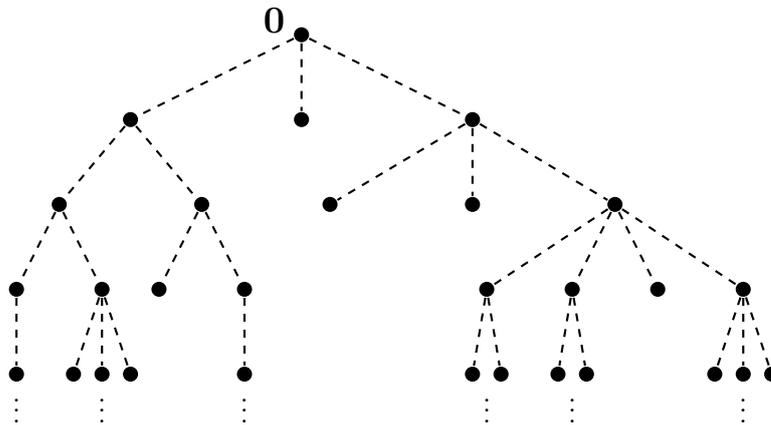
As nomenclaturas variam, alguns livros chamam esses modelos de processos de Galton-Watson, outros de processos de Bienaymé-Galton-Watson e alguns apenas de processos de ramificação. Por conveniência, neste texto, chamamos de processos de Galton-Watson.

Usando o contexto apresentado anteriormente, podemos imaginar o seguinte para o processo de Galton-Watson. Suponha que queremos estudar a extinção ou sobrevivência do sobrenome Cardoso. Inicialmente, no tempo $n = 0$, temos o ancestral Cardoso. Suponha

¹ Problem 4001: A large nation, of whom we will only concern ourselves with the adult males, N in number, and who each bear separate surnames, colonise a district. Their law of population is such that, in each generation, a_0 per cent of the adult males have no male children who reach adult life; a_1 have one such male child; a_2 have two; and so on up to a_5 who have five. Find (1) what proportion of the surnames will have become extinct after r generations; and (2) how many instances there will be of the same surname being held by m persons.

também que a geração de filhos é dada de acordo com uma variável aleatória discreta X que toma valores no conjunto dos números naturais e tem função de distribuição de probabilidade dada por $\mathbb{P}(X = k) = p_k$, para $k \in \mathbb{N}$. No tempo $n = 1$ temos a primeira geração de filhos Cardoso que são gerados segundo a variável aleatória X , ou seja, k descendentes são gerados com probabilidade p_k . Na n -ésima geração teremos um certo número de filhos e cada um deles poderá dar continuidade a sua linhagem gerando descendentes. Esses constituirão a $(n + 1)$ -ésima geração. Em cada caso, isso ocorrerá de acordo com uma variável aleatória i.i.d. à variável aleatória X . Cada elemento da $(n + 1)$ -ésima geração está associado a um vértice, que chamaremos pai, na n -ésima geração. Uma possível realização do processo de Galton-Watson é dada na Figura 4.

Figura 4 – Uma realização do processo de Galton-Watson.



Fonte: O autor (2023).

Ao longo dos anos, o processo de Galton-Watson foi usado para modelar vários tipos de fenômenos como, por exemplo, reações nucleares, crescimento populacional e raios cósmicos (HARRIS, 1963). Porém, alguns problemas biológicos e físicos necessitam de modelos mais elaborados e, com isso, surgiram várias generalizações do processo de Galton-Watson.

Um desses modelos é o processo de ramificação em meio variável ou processo de Galton-Watson não homogêneo. Este modelo é uma generalização do processo de Galton-Watson e ocorre quando a distribuição de descendentes varia de acordo com suas gerações.

Começamos definindo um processo de ramificação em meio variável da maneira como segue. Seja $\mathbf{0}$ sua raiz e X_1 o número de descendentes da raiz. Vale ressaltar que esse número é aleatório. No passo seguinte, cada um dos filhos (se houver) pode gerar (ou não) um número i.i.d. de filhos conforme a variável X_2 . De forma geral, definimos uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada indivíduo da geração $n - 1$ tem descendentes independentemente, de

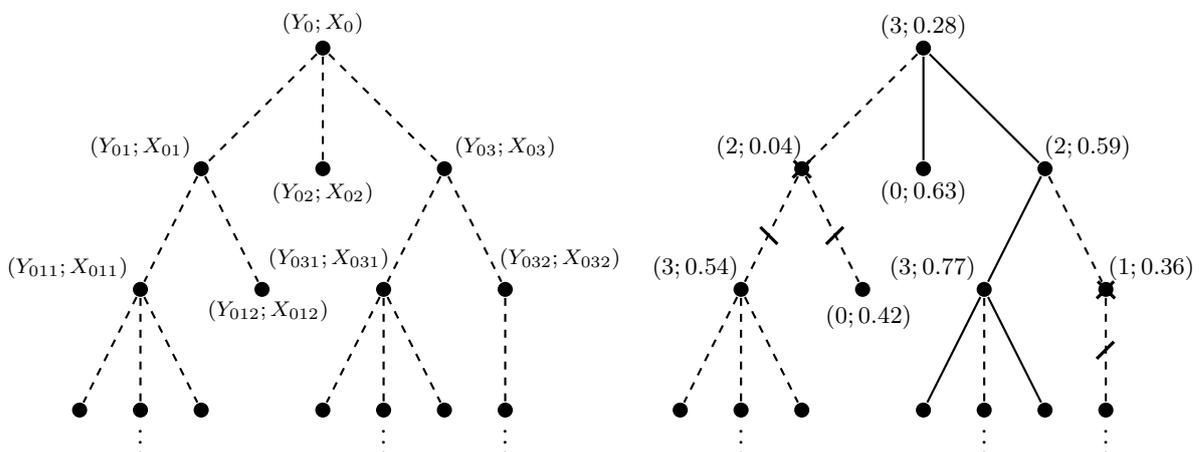
acordo com a lei dada por X_n . Observe que obtemos um processo de Galton-Watson caso as distribuições $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forem todas iguais. Se para cada n e alguma sequência de números $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{P}(X_n = x_n) = 1$, obtemos uma árvore esfericamente simétrica com função de crescimento dada por $f(i) = x_{i+1}$. Resultados referentes à extinção e sobrevivência para esse tipo de modelo são encontrados em Broman e Meester (2008) e Bertacchi *et al.* (2020).

Dado um processo de ramificação em meio variável, associamos a cada vértice uma variável aleatória i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Vale ressaltar que essa associação pode ser feita de forma mais geral usando, por exemplo, uma medida de probabilidade assumindo quaisquer valores reais. Nossa escolha foi meramente para facilitar as representações gráficas no texto. Definimos o seguinte processo: todos os filhos que tiverem um valor associado a si menor que um valor associado ao pai morrem. Com isso, obtemos um novo modelo que é o processo de ramificação em meio variável com seleção.

A Figura 5a apresenta um processo de ramificação em meio variável. Cada vértice da árvore está identificado por um par (Y_v, X_v) em que Y_v representa o número de filhos desse vértice e X_v é uma variável aleatória que pertence a uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. associada aos vértices. Quando um vértice v possui valor X_v menor do que o valor do vértice que lhe deu a origem então ele não sobrevive, em outras palavras, matamos esse vértice. A Figura 5b apresenta uma realização desse processo. Os vértices marcados por \times foram extintos, bem como sua descendência.

Figura 5 – Ilustração de um processo de ramificação em meio variável com e sem seleção.

- (a) Uma realização do processo de ramificação em meio variável. (b) Uma realização do processo de ramificação em meio variável com seleção.



Fonte: Rodríguez (2019, p. 24, adaptação nossa).

Em Bertacchi *et al.* (2020), esse processo foi proposto como uma generalização do modelo de percolação acessível em árvores infinitas. Ou seja, se supormos que cada vértice da n -ésima geração tenha um número constante de filhos $f(n)$, antes da seleção, podemos ver o conjunto de filhos como um conjunto de vértices de uma árvore esfericamente simétrica com função de crescimento f . Assim, a sobrevivência de um processo de ramificação em meio variável com seleção implica a percolação acessível numa árvore esfericamente simétrica. A partir dessa conclusão, adaptamos alguns resultados contidos em Bertacchi *et al.* (2020) para o contexto de árvores esfericamente simétricas.

Proposição 1 (Adaptação da Proposição 3.2). Dada uma árvore esfericamente simétrica com f sendo a função de crescimento da árvore, se existe $n_0 \geq 0$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n + n_0 + 1)!} = 0$$

então \mathcal{T}_f não tem percolação acessível.

Demonstração. Suponha inicialmente que $n_0 = 0$. Se a árvore for finita, segue que não temos percolação acessível. Suponha então que a árvore é infinita. Então o número de folhas a distância n da raiz é $\prod_{i=0}^{n-1} f(i)$. Para cada folha do nível n existe um único caminho da raiz até ela. A probabilidade desse caminho ser acessível é $\frac{1}{(n+1)!}$. Lembre que denotamos por Λ_n o evento “ter caminho acessível até o nível n ”. A probabilidade deste evento acontecer é dada por $\mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+1)!}$. Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+1)!}.$$

Por hipótese temos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+1)!} = 0$, então segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) = 0$. Neste caso, não temos percolação acessível.

Suponha agora que $n_0 > 0$ e tomemos uma função \tilde{f} como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(i) &= 1 & \forall i = 0, \dots, n_0 - 1; \\ \tilde{f}(n_0) &= f(0); \\ \tilde{f}(n_0 + 1) &= f(1); \\ &\vdots \\ \tilde{f}(n_0 + j) &= f(j). \end{aligned}$$

Observe que a árvore dada por \tilde{f} tem percolação acessível se, e somente se, a árvore dada por f tem percolação acessível.

O número de folhas à distância $n + n_0$ da raiz é

$$\prod_{i=0}^{n+n_0-1} \tilde{f}(i) = \prod_{i=n_0}^{n+n_0-1} \tilde{f}(i) = \prod_{i=0}^{n-1} f(i).$$

Para cada folha do nível $n + n_0$ existe um único caminho acessível da raiz até ela. A probabilidade do caminho ser acessível é $\frac{1}{(n + n_0 + 1)!}$. Novamente, seja Λ_{n+n_0} o evento “ter caminho acessível até o nível $n + n_0$ ”. A probabilidade deste evento acontecer é dada por $\mathbb{P}(\Lambda_{n+n_0}) \leq \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n + n_0 + 1)!}$. Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_{n+n_0}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_{n+n_0}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n + n_0 + 1)!} = 0.$$

□

Dado um processo de ramificação em meio variável, sejam m_n e $m_n^{(2)}$ o primeiro e o segundo momentos, respectivamente, da variável aleatória X_n . A seguir enunciamos o Teorema 2.5 de Bertacchi *et al.* (2020), pois, o mesmo será usado para demonstrar a adaptação que segue.

Teorema 5. Considere um processo de ramificação em meio variável tal que $m_n^{(2)} < \infty$ para todo n suficientemente grande. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ as seguintes condições são equivalentes:

(i)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{m_j^{(2)} - m_j}{m_j} \left(\prod_{i=n}^j m_i \right)^{-1} < \infty; \\ \inf_{j \in \mathbb{N}} \prod_{i=0}^j m_i > 0. \end{array} \right.$$

(ii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\prod_{i=n}^{n+k} m_i \right)^{-1} + \sum_{j=n}^{n+k} \frac{m_j^{(2)} - m_j}{m_j} \left(\prod_{i=n}^j m_i \right)^{-1} \right] < \infty.$$

Além disso, se uma dessas condições vale para algum n , então o processo de ramificação em meio variável sobrevive.

Teorema 6 (Adaptação do Teorema 3.3). Suponha que exista uma sequência $\{c_i\}_{i \geq 0}$ de números reais positivos tal que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{f(i)} < \infty$ e

$$\begin{cases} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{f(j) - 1}{f(j)} \left(C^j \prod_{i=n}^{j-1} c_i \right)^{-1} < \infty \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} C^n \prod_{j=0}^n c_j > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$. Então a árvore \mathcal{T}_f tem percolação acessível.

Demonstração. Tomando uma nova sequência $c'_i = Cc_i$ no lugar de c_i podemos supor, sem perda de generalidade, que $C = 1$. Seja \bar{x} o valor de um vértice qualquer da árvore \mathcal{T}_f , ou seja, o valor da variável aleatória associada a ele e seja $\delta \in (0, 1 - \bar{x})$. Tome y tal que $\bar{x} + y = \delta$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq n_0} \frac{c_n}{f(n)} < \frac{\delta}{2}$. Seja $p_n = \frac{\delta}{2n_0}$ para todo $n < n_0$ e $p_n = \frac{c_n}{f(n)}$ para todo $n \geq n_0$. Construa recursivamente uma sequência estritamente crescente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como segue

$$\begin{cases} x_0 = \bar{x}; \\ x_1 = x_0 + p_0; \\ \vdots \\ x_{n+1} = x_n + p_n. \end{cases}$$

Claramente, $\sum_{n \geq n_0} p_n < \frac{\delta}{2}$. Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < y$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\bar{x} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\bar{x} + \frac{\delta}{2n_0} (n_0 - 1) + \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i \right] \\ &= \bar{x} + \frac{\delta}{2n_0} (n_0 - 1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i \\ &= \bar{x} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2n_0} + \frac{\delta}{2} = \bar{x} + \delta - \frac{\delta}{2n_0} \\ &= y - \frac{\delta}{2n_0} \\ &< y. \end{aligned}$$

Assim, se há percolação acessível em $\left[\bar{x}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)$ então teremos percolação acessível em $[\bar{x}, y)$.

Construiremos um processo de ramificação em meio variável dominado pela nossa árvore esfericamente simétrica da seguinte forma: a cada geração $n \geq 1$ obtemos um processo de ramificação em meio variável removendo todos os vértices da árvore esfericamente simétrica fora do intervalo $[x_{n-1}, x_n)$. Mais precisamente, o processo de ramificação em meio variável inicia com uma partícula em \bar{x} e mata as partículas fora do intervalo $[x_0, x_1)$: isso é equivalente a remover cada filho independentemente com probabilidade $1 - p_0$. Dada a n -ésima geração, construímos a próxima mantendo todos os filhos das partículas com valores no intervalo $[x_n, x_{n+1})$ e, novamente, isto é o mesmo que remover cada filho independentemente com probabilidade $1 - p_n$. Assim, a sobrevivência local do processo de ramificação em meio variável implica a percolação acessível da árvore esfericamente simétrica em $[\bar{x}, y)$.

Denotamos por \widetilde{m}_n e $\widetilde{m}_n^{(2)}$ o primeiro e segundo momento, respectivamente, do processo de ramificação em meio variável. Temos que $\widetilde{m}_n = p_n f(n)$, pois é a média da distribuição Bernoulli com probabilidade p_n . Já o segundo momento é dado por $\widetilde{m}_n^{(2)} = p_n f(n) [1 - p_n + p_n f(n)]$. Assim, $\widetilde{m}_n^{(2)} - \widetilde{m}_n = p_n^2 [f^2(n) - f(n)]$. Note que $\widetilde{m}_n = c_n$ e

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{m}_n^{(2)} - \widetilde{m}_n}{\widetilde{m}_n} \left(\prod_{i=n_0}^n \widetilde{m}_i \right)^{-1} &= \frac{p_n^2 [f^2(n) - f(n)]}{p_n f(n)} \left(\prod_{i=n_0}^n p_i f(i) \right)^{-1} \\ &= \frac{p_n^2 [f^2(n) - f(n)]}{p_n^2 f^2(n)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_i f(i) \right)^{-1} \\ &= \frac{f^2(n) - f(n)}{f^2(n)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{\widetilde{m}_i}{f(i)} f(i) \right)^{-1} \\ &= \frac{f(n) [f(n) - 1]}{f^2(n)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} \widetilde{m}_i \right)^{-1} \\ &= \frac{f(n) - 1}{f(n)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} c_i \right)^{-1}, \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 5, segue o resultado. \square

Corolário 1. Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Se $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$ então \mathcal{T}_f tem percolação acessível.

Demonstração. Basta tomar $c_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $C = 2$ no Teorema 6. \square

Munidos do Corolário 1, Coletti *et al.* (2018) provaram que a árvore exemplificada na Figura 3b tem percolação acessível. Enunciamos esse resultado a seguir.

Proposição 2. Seja \mathcal{T}_α tal que

$$f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, \quad i \geq 0$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante. Se $\alpha > 1$, então $\theta(\mathcal{T}_\alpha) > 0$.

2.5 MARTINGALE

O termo “martingale” deriva de uma expressão francesa que se refere à estratégia de dobrar as apostas até que uma vitória seja garantida. O interesse em estudar esse tema veio de jogadores que queriam encontrar uma estratégia para aumentar suas chances de vitória nos jogos de azar. Apesar dos estudos mostrarem que isto é matematicamente impossível, até hoje alguns jogadores e investidores fazem uso dessa estratégia (MANSUY; SVERDLOVE, 2009).

O submartingale e o supermartingale são duas generalizações extremamente populares. Podemos pensar que o submartingale é quando o resultado da aposta é favorável, enquanto o supermartingale é quando o resultado é desfavorável. Um resultado assintótico muito importante é o teorema da convergência martingale que diz que qualquer submartingale que satisfaça $\sup_n \mathbb{E}[X_n] < \infty$ deve convergir. Também há um resultado simétrico para supermartingale. Podemos pensar o submartingale como um análogo às sequências não decrescentes. A partir dessa perspectiva, o teorema da convergência martingale é um análogo ao teorema da convergência monótona para variáveis aleatórias. Para mais informações sobre esse tema deixamos a recomendação dos seguintes livros: Durrett (1996), Gallager (2013), Hoel *et al.* (1971) e Taylor e Karlin (1998).

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em Kimmel e Axelrod (2015) e o mesmo fica como recomendação para um maior entendimento sobre esse tema.

Definição 1. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é chamada martingale se $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$ e

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, X_0] = X_n.$$

Teorema 7. Se $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é um martingale não-negativo, tal que $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ para todo n , então existe uma variável aleatória X com esperança finita tal que o seguinte vale:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X, \text{ com probabilidade } 1,$$

(ii) Se o martingale é limitado em L^2 (isto é, se $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$), então a convergência ocorre também no sentido de L^2 . Então, $\text{var}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(X_n)$.

3 PERCOLAÇÃO δ -ACESSÍVEL

Neste capítulo desenvolvemos nossos primeiros resultados e a ideia central do mesmo é o conceito de percolação δ -acessível.

Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica com raiz v_0 e função de crescimento $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Consideramos $\{U_v\}_{v \in \mathcal{T}_f}$, uma família i.i.d. de variáveis aleatórias onde U_v tem distribuição uniforme assumindo valores no intervalo $[0, 1]$.

Dada uma sequência de números positivos $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$, tais que $\sum_{n \geq 0} \delta_n = 1$, considere os intervalos $L_0 = [0, \delta_0)$ e $L_n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i, \sum_{i=0}^n \delta_i \right)$, para $n > 0$. Em alguns momentos denotaremos essa sequência de números positivos simplesmente por δ .

Definição 3.0.1. Dizemos que um caminho v_0, v_1, \dots, v_n em \mathcal{T}_f é δ -acessível se

- (i) $v_k \in \partial \mathcal{T}_k, \forall 1 \leq k \leq n$;
- (ii) $v_k \sim v_{k-1}, \forall 1 \leq k \leq n$;
- (iii) $U_{v_k} \in L_k, \forall 0 \leq k \leq n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja Γ_n o evento “a raiz está conectada ao n -ésimo nível por um caminho δ -acessível”. Dizemos que \mathcal{T}_f tem percolação δ -acessível se $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ocorre com probabilidade positiva. Seja $\theta_\delta(\mathcal{T}_f) := \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \right)$. Veja que $\theta_\delta(\mathcal{T}_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_n)$.

Proposição 3.0.2. *Se, para alguma sequência $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ há percolação δ -acessível então há percolação acessível.*

Demonstração. De fato, veja que $\Gamma_n \subset \Lambda_n$, ou seja, $\mathbb{P}(\Gamma_n) \leq \mathbb{P}(\Lambda_n)$. Por hipótese $\theta_\delta(\mathcal{T}_f) > 0$. Logo,

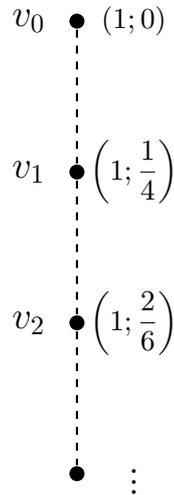
$$\theta(\mathcal{T}_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_n) = \theta_\delta(\mathcal{T}_f) > 0.$$

□

Exemplo 3.0.3. Considere a seguinte realização na árvore \mathcal{T}_f , com $f(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ dada pela Figura 6. Isto é, $U_{v_n} = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$. Temos que \mathcal{T}_f possui percolação acessível. Veja que qualquer sequência $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ tal que $U_{v_n} \in L_n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i, \sum_{i=0}^n \delta_i \right)$ satisfaz

$$0 < \delta_0 < \frac{1}{4};$$

Figura 6 – Uma realização de um processo de percolação acessível que não possui percolação δ -acessível.



Fonte: O autor (2023).

$$\frac{1}{4} \leq \delta_0 + \delta_1 < \frac{2}{6};$$

⋮

$$\frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \leq \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n < \frac{1}{2} \frac{n+1}{n+2}.$$

Dessa forma $\sum_{n \geq 0} \delta_n < 1$, ou seja, \mathcal{T}_f não possui percolação δ -acessível.

A partir deste momento vamos obter resultados que nos permitam encontrar uma condição suficiente para a existência de percolação δ -acessível para uma árvore esfericamente simétrica. Para tanto, vamos definir uma sequência de variáveis aleatórias a partir das notações que seguem.

Para fins de abreviação de notação, para cada $n \geq 0$ vamos denotar $f_n := f(n)$. Considere, a partir de agora, δ uma sequência fixada e, para cada $n \geq 0$ sejam:

- $a_n := f_n |L_{n+1}| = f_n \delta_{n+1}$;
- $\varsigma_0 := \{v_0\}$;
- $\varsigma_n := \left\{ \begin{array}{l} v \in \partial \mathcal{T}_n; \quad (i) \ v \sim u \text{ para algum } u \in \varsigma_{n-1} \\ (ii) \ U_v \in L_n \end{array} \right\}, \quad n \geq 1.$

Para cada $n \geq 0$, considere a variável aleatória

$$X_n := |\varsigma_n|,$$

e seja

$$\mu_n := \mathbb{E}[X_n].$$

Lema 3.0.4. *Para cada $n \geq 1$, temos que $\mu_n = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$.*

Demonstração. De fato, provemos por indução finita.

$$\mu_1 = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{f_0} \mathbb{I}_{\{U_{v_i} \in L_1\}}\right] = \sum_{i=1}^{f_0} \mathbb{P}(U_{v_i} \in L_1) = f_0 \delta_1 = a_0.$$

Suponha que $\mu_{n-1} = a_0 \cdots a_{n-2}$ é verdadeiro. Então, por independência,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mathbb{E}[X_n] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{f_{n-1}} \mathbb{I}_{\{U_{v_{ij}} \in L_n\}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[X_{n-1}] \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{f_{n-1}} \mathbb{I}_{\{U_{v_{ij}} \in L_n\}}\right] \\ &= a_0 \cdots a_{n-2} (f_{n-1} \delta_n) \\ &= a_0 \cdots a_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Ainda com o propósito de encontrar uma condição suficiente para a percolação δ -acessível vamos precisar definir uma nova sequência de variáveis aleatórias baseada na sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 0}$ definida anteriormente.

Considere então a sequência $\{W_n\}_{n \geq 1}$ de variáveis aleatórias definidas por $W_n = \frac{X_n}{\mu_n}$.

Lema 3.0.5. *A sequência $\{W_n\}_{n \geq 1}$ é martingale.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1} \mid W_1, \dots, W_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_{n+1}}{\mu_{n+1}} \mid W_1, \dots, W_n\right] \\ &= \frac{1}{\mu_n a_n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n} \left(\sum_{j=1}^{f_n} \mathbb{I}_{\{U_{v_{ij}} \in L_{n+1}\}}\right) \mid W_1, \dots, W_n\right] \\ &= \frac{1}{\mu_n a_n} \mathbb{E}[X_n \mid W_1, \dots, W_n] \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{f_n} \mathbb{I}_{\{U_{v_{ij}} \in L_{n+1}\}}\right] \\ &= \frac{1}{\mu_n a_n} X_n a_n \\ &= \frac{X_n}{\mu_n} \end{aligned}$$

$$= W_n$$

e

$$\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{\mu_n}\right] = \frac{1}{\mu_n} \mathbb{E}[X_n] = \frac{\mu_n}{\mu_n} = 1.$$

□

Essa nova sequência de variáveis aleatórias $\{W_n\}_{n \geq 1}$ já nos dá uma condição suficiente para a existência de percolação δ -acessível, como pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema 3.0.6. *Se $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[W_n^2] < \infty$ então há percolação δ -acessível em \mathcal{T}_f .*

Demonstração. Pelo Teorema 7, como $W_n \geq 0$ e $\mathbb{E}[W_n] = 1, \forall n \geq 1$, então, W_n converge quase certamente para alguma variável aleatória $W \geq 0$. Temos ainda que se

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[W_n^2] < \infty$$

então

$$W_n \xrightarrow{L^1} W.$$

Em particular, $\mathbb{E}[W] = 1$. Assim,

$$0 < \mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} W_n > 0\right) \leq \mathbb{P}(W_n > 0, \forall n) \leq \mathbb{P}(X_n > 0, \forall n).$$

Logo, há percolação δ -acessível. □

Apesar de o Teorema 3.0.6 já nos dar uma condição suficiente para a percolação δ -acessível, estamos em busca de uma condição em termos da função f e da sequência δ . Por isso, vamos inicialmente definir o que segue.

Fixado $n \geq 1$, para cada $x \in \partial\mathcal{T}_n$, sejam

- $N_x := \mathbb{I}_{\{x \in \mathcal{S}_n\}}$;
- $\mathcal{S}_x := \left\{ \begin{array}{l} y \in \partial\mathcal{T}_{n+1}; \quad (i) \ x \sim y \\ (ii) \ U_y \in L_{n+1} \end{array} \right\}$;
- $Y_x := |\mathcal{S}_x|$.

Observação 1. Note que

- (i) $\mathbb{E}[Y_x] = f_n |L_{n+1}| = f_n \delta_{n+1} = a_n$;
- (ii) $\text{var}[Y_x] = f(n) \delta_{n+1} (1 - \delta_{n+1}) = f(n) (\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^2) < f(n) \delta_{n+1} = a_n$. De fato, note que $Y_x = \sum_{\substack{y \in \partial \mathcal{T}_{n+1} \\ x \sim y}} \mathbb{I}_{\{U_y \in L_{n+1}\}}$, ou seja, Y_x segue uma binomial de parâmetros $f(n)$ e δ_{n+1} ;
- (iii) N_x, Y_y são independentes $\forall (x, y) \in \partial \mathcal{T}_n^2$. De fato, observe que N_x está relacionado com o conjunto de vértices anteriores a x enquanto que Y_y está relacionado com o conjunto de vértices sucessores a y ;
- (iv) Y_x, Y_y são independentes se $x \neq y$. De fato, como x e y são distintos Y_x e Y_y estão relacionados com os sucessores de seus respectivos vértices.

Agora, estudando o segundo momento da sequência $\{W_n\}_{n \geq 1}$ obtemos a desigualdade que consta no Lema 3.0.7.

Lema 3.0.7. $\mathbb{E}[W_{n+1}^2] < \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{\mu_{n+1}}, \forall n \geq 1$.

Demonstração. Por definição

$$W_n = \frac{X_n}{\mu_n} = \frac{|\zeta_n|}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_n} \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \mathbb{I}_{\{x \in \zeta_n\}} = \frac{1}{\mu_n} \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} N_x = \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{N_x}{\mu_n}$$

e

$$W_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{\mu_{n+1}} = \frac{|\zeta_{n+1}|}{\mu_{n+1}} = \frac{1}{\mu_{n+1}} \sum_{x \in \zeta_n} |\zeta_x| = \frac{1}{\mu_{n+1}} \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \mathbb{I}_{\{x \in \zeta_n\}} |\zeta_x| = \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{N_x Y_x}{\mu_n a_n}$$

E com isso,

$$W_{n+1}^2 = \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{N_x Y_x}{\mu_n a_n} \sum_{y \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{N_y Y_y}{\mu_n a_n} = \sum_{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2} \frac{N_x N_y Y_x Y_y}{\mu_n^2 a_n^2}$$

Então, aplicando o valor esperado em W_{n+1}^2 e utilizando a Observação 1 temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1}^2] &= \mathbb{E} \left[\sum_{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2} \frac{N_x N_y Y_x Y_y}{\mu_n^2 a_n^2} \right] \\ &= \sum_{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y Y_x Y_y]}{\mu_n^2 a_n^2} \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y Y_x Y_y]}{\mu_n^2 a_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x^2] \mathbb{E}[Y_x^2]}{\mu_n^2 a_n^2} \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y] a_n^2}{\mu_n^2 a_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x] (\mathbb{E}^2[Y_x] + \text{var}[Y_x])}{\mu_n^2 a_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y]}{\mu_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x] (a_n^2 + \text{var}[Y_x])}{\mu_n^2 a_n^2} \\
&= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y]}{\mu_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n^2} + \frac{\mathbb{E}[N_x] \text{var}[Y_x]}{\mu_n^2 a_n^2} \\
&= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y]}{\mu_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n^2} \left(1 + \frac{\text{var}[Y_x]}{a_n^2}\right) \\
&< \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y]}{\mu_n^2} + \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n^2} \left(1 + \frac{a_n}{a_n^2}\right) \\
&= \sum_{\substack{(x,y) \in \partial \mathcal{T}_n^2 \\ x \neq y}} \frac{\mathbb{E}[N_x N_y]}{\mu_n^2} + \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n^2} \\
&= \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{a_n} \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n^2} \\
&= \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{\mu_{n+1}} \sum_{x \in \partial \mathcal{T}_n} \frac{\mathbb{E}[N_x]}{\mu_n} \\
&= \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{\mathbb{E}[W_n]}{\mu_{n+1}} \\
&= \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{\mu_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{E}[W_{n+1}^2] < \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

□

Finalmente, obtemos uma condição de nosso interesse, enunciada no teorema a seguir.

Teorema 3.0.8. *Uma condição suficiente para a existência de percolação δ -acessível em \mathcal{T}_f , é dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^n f(i) \delta_{i+1}} < \infty.$$

Demonstração. Veja que, utilizando o Lema 3.0.7 sucessivas vezes, temos

$$\mathbb{E}[W_{n+1}^2] < \mathbb{E}[W_n^2] + \frac{1}{\mu_{n+1}} < \mathbb{E}[W_{n-1}^2] + \frac{1}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_{n+1}} < \dots < \mathbb{E}[W_1^2] + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\mu_i}.$$

Lembre que $a_n = f(n) \delta_{n+1}$. Pelo Lema 3.0.4 podemos reescrever a hipótese como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n+1}} < \infty$. Consequentemente se $n \rightarrow \infty$ temos que $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\mu_i} < \infty$. Ou seja, a sequência $\{\mathbb{E}[W_n^2]\}_{n \geq 1}$ é limitada superiormente. Assim $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[W_n^2] < \infty$. Como vimos no Teorema 3.0.6, há percolação δ -acessível em \mathcal{T}_f . □

Uma outra forma de demonstrar o Corolário 1 pode ser agora obtida pelos resultados desta seção. Enunciamos novamente o Corolário 1 como o seguinte teorema.

Teorema 3.0.9. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Se $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$ então \mathcal{T}_f tem percolação acessível.*

Demonstração. A condição suficiente estabelecida no Teorema 3.0.8 já nos fornece uma prova para o Teorema 3.0.9. De fato, suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f(n)} < \infty$. Dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ existe n_0 tal que

$$k = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2k = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{f(n)} < 1 \Rightarrow 1 - 2k > 0.$$

Podemos escolher a sequência $\delta = \{\delta_n\}_{n \geq 0}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1 - 2k}{n_0 + 1}; \\ \delta_1 &= \frac{1 - 2k}{n_0 + 1}; \\ &\vdots \\ \delta_{n_0} &= \frac{1 - 2k}{n_0 + 1}; \\ \delta_{n+1} &= \frac{2}{f(n)} \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=0}^{n_0} \delta_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \delta_n = \left(\frac{1 - 2k}{n_0 + 1} \right) (n_0 + 1) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{f(n)} = 1 - 2k + 2k = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^n f(i) \delta_{i+1}} &= \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{\prod_{i=0}^n f(i) \delta_{i+1}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^{n_0} f(i) \delta_{i+1} \prod_{i=n_0+1}^n f(i) \delta_{i+1}} \\ &= M + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{M_0 \prod_{i=n_0+1}^n f(i) \frac{2}{f(i)}} \\ &= M + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{M_0 2^{n-(n_0+1)}} \\ &= M + \frac{1}{M_0} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-n_0-1}} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

onde M e M_0 são constantes positivas. □

Também é possível ver a partir dos resultados desta seção que a condição enunciada no Teorema 3.0.9 não é necessária para a existência de percolação acessível. O exemplo a seguir é um contra-exemplo para a Conjectura 1.

Exemplo 3.0.10. Considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 2^{2n+6}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & , \text{ se } n \not\equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Considere $\delta = \{\delta_n\}_{n \geq 0} = \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} \right\}_{n \geq 0}$ e note que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\prod_{i=0}^n f(i) \delta_{i+1}} &= \frac{1}{f(0) \delta_1 f(1) \delta_2} + \frac{1}{f(0) \delta_1 f(1) \delta_2 f(2) \delta_3} + \dots \\ &= \sum_{k \geq 1} \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{2k-1} f(i) \delta_{i+1}} + \frac{1}{\left(\prod_{i=0}^{2k-1} f(i) \delta_{i+1} \right) f(2k) \delta_{2k+1}} \right] \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\prod_{i=0}^{2k-1} f(i) \delta_{i+1}} \left(1 + \frac{1}{f(2k) \delta_{2k+1}} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Veja que, para i par

$$f(i) \delta_{i+1} f(i+1) \delta_{i+2} = 2^{2i+6} \frac{1}{2^{i+1+1}} 1 \frac{1}{2^{i+2+1}} = 2.$$

Então,

$$\prod_{i=0}^{2k-1} f(i) \delta_{i+1} = 2^k.$$

Retomando a equação (3.1) temos que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{2^{2(2k)+6} \frac{1}{2^{2k+1+1}}} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{2^{2k+4}} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{3k+4}} < \infty.$$

Segue o resultado pelo Teorema 3.0.8.

Do Exemplo 3.0.10, a Conjectura 1 dada na introdução é falsa. A questão, então, para uma condição necessária e suficiente de existência de percolação acessível em árvores esfericamente simétricas segue em aberto. No capítulo seguinte exploramos novas possibilidades para uma solução desse problema.

4 NOVAS CONDIÇÕES PARA PERCOLAÇÃO ACESSÍVEL

Neste capítulo estão compilados alguns resultados obtidos na tentativa de obter uma condição necessária e suficiente para a percolação acessível. O primeiro resultado é relativamente simples e é consequência do Lema 1.

Lema 4.0.1. *Se \mathcal{T}_f tem percolação acessível e $\mathcal{J} := \{f(i); i \in \mathbb{N}\}$, então $|\mathcal{J}| = \infty$.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{T}_f tenha percolação acessível e que \mathcal{J} seja finito. Seja k o maior elemento de \mathcal{J} . Então

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+n_0+1)!} \leq \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k}{(n+n_0+1)!} = \frac{k^n}{(n+n_0+1)!}.$$

Assim,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+n_0+1)!} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{(n+n_0+1)!} = 0.$$

Então, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{(n+n_0+1)!} = 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo pois, pela Proposição 1, \mathcal{T}_f não tem percolação acessível. Portanto, temos que, se \mathcal{T}_f tem percolação acessível, então \mathcal{J} é infinito. \square

Nosso próximo resultado deriva da manipulação das hipóteses do Teorema 6 e faz uso do Lema 4.0.1. Com isso, obtemos uma condição necessária para a existência de percolação acessível em uma árvore esfericamente simétrica.

Teorema 4.0.2. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Se \mathcal{T}_f tem percolação acessível então, existe uma sequência $\{c_i\}_{i \geq 0}$ de números reais positivos tal que*

$$\begin{cases} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{f(j)-1}{f(j)} \left(C^j \prod_{i=n}^{j-1} c_i \right)^{-1} < \infty \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} C^n \prod_{j=0}^n c_i > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{T}_f é uma árvore esfericamente simétrica com percolação acessível. Então $f(i) \geq 1$, $\forall i$. Sabemos, pelo Lema 4.0.1, que \mathcal{J} é infinito. Logo, $\exists n_0 > 1$ tal que $f(n_0) \neq 1$. Vamos provar as condições da equação (4.1). Tome $c_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e $C = n_0 > 1$.

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{f(j)-1}{f(j)} \left(C^j \prod_{i=n_0}^{j-1} c_i \right)^{-1} = \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{f(j)-1}{f(j)} \left(n_0^j \prod_{i=n_0}^{j-1} 1 \right)^{-1} < \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{1}{n_0^j} < \infty.$$

Falta mostrarmos que $\inf_{n \in \mathbb{N}} C^n \prod_{j=0}^n c_j > 0$. De fato, veja que $n_0^n \prod_{j=0}^n 1 \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\inf_{n \in \mathbb{N}} n_0^n \prod_{j=0}^n 1 > 0$. \square

4.1 ÁRVORES 2-POWER

Nesta seção definimos uma nova classe de árvores esfericamente simétricas. A ideia é observar como se dá seu crescimento ao longo dos níveis. Usando esse novo conceito conseguimos provar que essa nova classe possui percolação acessível. Tais árvores incluem, por exemplo, a árvore construída no Exemplo 3.0.10.

Definição 4.1.1. Seja f uma função que define uma árvore esfericamente simétrica. Seja i_0 o menor nível tal que $f(i_0) \geq 2$. Defina $I_0 = \{0, \dots, i_0\}$. Definidos I_0, \dots, I_{k-1} defina $I_k = \{i_{k-1} + 1, \dots, i_k\}$ em que i_k é o menor nível maior que i_{k-1} tal que $f(i_k) \geq 2^{k+1}$. Se existir k tal que $f(i) < 2^{k+1}$ para todo $i > i_{k-1}$, então $I_k = \emptyset$. Dizemos que uma árvore esfericamente simétrica \mathcal{T}_f é 2-power, ou cresce em potências de 2, se

$$\max \{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Ou seja, se seu crescimento pode ser mensurado por potências de 2.

Exemplo 4.1.2. A árvore esfericamente simétrica \mathcal{T}_f cuja função de crescimento é $f(i) = 2^i$ é uma árvore 2-power (Figura 7).

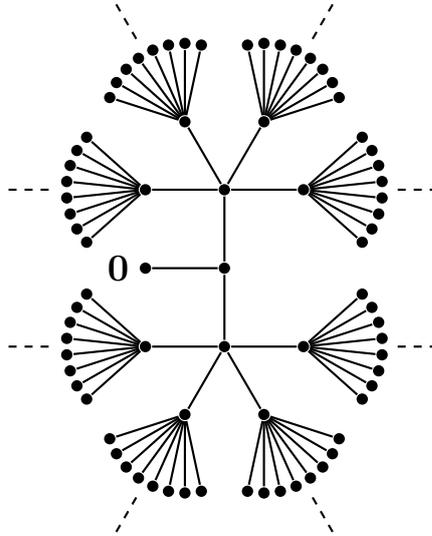
Exemplo 4.1.3. Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica com função de crescimento f dada por

$$f(i) = \begin{cases} 2^i, & \text{se } i \leq 2 \\ 1, & \text{se } i > 2. \end{cases}$$

Então $I_0 = \{1\}$, $I_1 = \{2\}$ e $I_k = \emptyset$ para todo $k \geq 2$. Então \mathcal{T}_f é uma árvore 2-power. Observe que \mathcal{J} é um conjunto finito neste caso.

Observe agora que, se \mathcal{J} é infinito, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f(j) \geq n$. Do contrário, teríamos \mathcal{J} finito. Dessa forma, se \mathcal{J} é infinito, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f(j) \geq 2^k$. Ou seja, sempre é possível obter um nível cujo número

Figura 7 – Exemplo de árvore 2-power com função de crescimento $f(i) = 2^i$.



Fonte: O autor (2023).

de filhos seja maior que uma potência de 2, mas a questão é: o quão rápido se dá esse crescimento? O máximo utilizado na Definição 4.1.1 pode ser visto como a rapidez com que a árvore cresce, quanto menor seu valor mais rapidamente o tamanho da árvore aumenta.

Vamos provar que toda árvore 2-power tal que \mathcal{J} é infinito possui percolação acessível. Para isso, começamos com um resultado um pouco mais restrito, adicionando a hipótese de que f é não decrescente.

Teorema 4.1.4. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore 2-power tal que $|\mathcal{J}| = \infty$ e f é não decrescente, então \mathcal{T}_f tem percolação acessível.*

Demonstração. Seja $M = \max \{|I_k|; k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $i \in I_t$. Defina $c_i = \frac{M}{|I_t|}$ se $i \in I_t$. Como f é não decrescente, se $j \in I_0$, $f(j) \geq 1$. Se $j \in I_1$, $f(j) \geq 2$ e assim sucessivamente. Em geral, se $j \in I_k$, $f(j) \geq 2^k$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{f(i)} &= \sum_{i \in I_0} \frac{M}{|I_0|} \frac{1}{f(i)} + \sum_{i \in I_1} \frac{M}{|I_1|} \frac{1}{f(i)} + \dots \\
 &\leq \sum_{i \in I_0} \frac{M}{|I_0|} \frac{1}{1} + \sum_{i \in I_1} \frac{M}{|I_1|} \frac{1}{2} + \dots \\
 &= |I_0| \frac{M}{|I_0|} + |I_1| \frac{M}{|I_1|} \frac{1}{2} + \dots \\
 &= M + \frac{M}{2} + \frac{M}{2^2} + \dots \\
 &= M \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{\infty} \frac{f(j) - 1}{f(j)} \left(C^j \prod_{i=n}^{j-1} c_i \right)^{-1} &\leq \sum_{j=n}^{\infty} 1 \left(2^j \prod_{i=n}^{j-1} c_i \right)^{-1} \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \left(2^j \prod_{i=n}^{j-1} \frac{M}{|I_t|} \right)^{-1} \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \prod_{i=n}^{j-1} \frac{|I_t|}{M} \\
&\leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \prod_{i=n}^{j-1} 1 \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

e

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n \prod_{i=0}^{n-1} c_i = \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{M}{|I_t|} \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{|I_t|}{|I_t|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n \prod_{i=0}^{n-1} 1 = \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n = 1 > 0.$$

O resultado segue, portanto, pelo Teorema 6. \square

Com o Teorema 4.1.4 já é possível concluir que a árvore dada no Exemplo 4.1.2 tem percolação acessível.

O próximo resultado, esse sim mais geral, utiliza em sua demonstração o Teorema 4.1.4, o Teorema 3.0.8, a Proposição 3.0.2 e o Lema 1, percorrendo todos os conceitos presentes neste texto. Podemos dizer, portanto, que este é o clímax deste trabalho.

Teorema 4.1.5. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore 2-power tal que $|\mathcal{J}| = \infty$. Então \mathcal{T}_f tem percolação acessível.*

Demonstração. Por hipótese, \mathcal{T}_f é uma árvore 2-power tal que \mathcal{J} é infinito. Então, seja $M = \max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\}$ e $m_k = |I_k|$. Se $M = 1$ então \mathcal{T}_f é uma árvore com função de crescimento f não decrescente e, pelo Teorema 4.1.4, segue que \mathcal{T}_f tem percolação acessível.

Suponha então que $M \geq 2$. Defina

$$\delta_n = \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^{n+1}}.$$

Então, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n = 1$. De fato,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n = \frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}} + \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^2} + \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^3} + \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^4} + \dots$$

$$= \frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}} \left(1 + \frac{1}{2^{1/M^3}} + \frac{1}{(2^{1/M^3})^2} + \frac{1}{(2^{1/M^3})^3} + \dots \right).$$

Veja que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ é uma série geométrica cujo primeiro termo é $\frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}}$ e a razão é $\frac{1}{2^{1/M^3}}$.

Assim,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n = \frac{\frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}}}{1 - \frac{1}{2^{1/M^3}}} = \frac{\frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}}}{\frac{2^{1/M^3} - 1}{2^{1/M^3}}} = 1.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe i_j tal que $f(i_j) \geq 2^{j+1}$. Seja $N = \{i_j; j \geq 0\}$. Defina a árvore T_g dada pela função

$$g(i) = \begin{cases} f(i_j), & \text{se } i \in N; \\ 1, & \text{se } i \notin N. \end{cases}$$

Veja que $\overline{\mathcal{T}}_g \prec \mathcal{T}_f$. Então pelo Lema 1 se \mathcal{T}_g tem percolação acessível, podemos concluir que \mathcal{T}_f tem percolação acessível. Vamos provar que \mathcal{T}_g admite percolação δ -acessível.

Para $n \in \mathbb{N}$, existe k tal que $n \in I_k$. Então

$$\begin{aligned} n &\leq m_0 + m_1 + \dots + m_k \\ &\leq M + M + \dots + M \\ &= (k + 1) M \end{aligned}$$

ou seja,

$$n \leq (k + 1) M \Leftrightarrow k + 1 \geq \frac{n}{M} \Leftrightarrow k \geq \frac{n}{M} - 1.$$

Primeiramente vamos estimar o valor de $\prod_{i=0}^n g(i) \delta_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n g(i) \delta_{i+1} &= \prod_{i=0}^n g(i) \times \prod_{i=0}^n \delta_{i+1} \\ &= g(i_0) g(i_1) \dots g(i_{k-1}) \times \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^2} \dots \frac{2^{1/M^3} - 1}{(2^{1/M^3})^{n+2}} \\ &\geq 2 \cdot 2^2 \dots 2^{k-1} \times \frac{(2^{1/M^3} - 1)^n}{(2^{1/M^3})^{2+3+\dots+(n+2)}} \\ &= 2^{1+2+\dots+(k-1)} \times \frac{(2^{1/M^3} - 1)^n}{(2^{1/M^3})^{2+3+\dots+(n+2)}} \\ &= 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \times \frac{(2^{1/M^3} - 1)^n}{(2^{1/M^3})^{\frac{n(n+4)}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2^{\frac{\binom{n}{M}-1}{2}\binom{n}{M}-2} \times \frac{\left(2^{1/M^3} - 1\right)^n}{\left(2^{1/M^3}\right)^{\frac{n(n+4)}{2}}} \\
&= \frac{2^{\frac{\binom{n}{M}-1}{2}\binom{n}{M}-2}}{2^{\frac{n(n+4)}{2M^3}}} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n \\
&= \frac{2^{\left(\frac{n}{M}\right)^2 - \frac{3n}{M} + 2}}{2^{\frac{n^2}{2M^3} + \frac{4n}{2M^3}}} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n \\
&= 2^{\left(\frac{n}{M}\right)^2 - \frac{3n}{M} + 2 - \frac{n^2}{2M^3} - \frac{2n}{M^3}} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n \\
&= 2^{\left(\frac{n}{M}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \frac{n}{M} \left(-3 - \frac{2}{M^2}\right) + 2} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n \\
&\geq 2^{\left(\frac{n}{M}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{M} \left(-\frac{7}{2}\right) + 2} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n \\
&= 2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n.
\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^n g(i) \delta_{i+1}}$ é finito. Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^n g(i) \delta_{i+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2}} \times \frac{1}{\left(2^{1/M^3} - 1\right)^n}.$$

Vamos aplicar o Teste de d'Alembert à sequência $\left(\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2}} \times \frac{1}{\left(2^{1/M^3} - 1\right)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^n}{2^{\frac{(n+1)^2}{2M^2} - \frac{7(n+1)}{2M} + 2} \times \left(2^{1/M^3} - 1\right)^{n+1}} \\
&= \frac{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2 - \frac{(n+1)^2}{2M^2} + \frac{7(n+1)}{2M} - 2}}{2^{\frac{1}{M^3} - 1}} \\
&= \frac{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} + 2 - \frac{(n+1)^2}{2M^2} + \frac{7(n+1)}{2M} - 2}}{2^{\frac{1}{M^3} - 1}} \\
&= \frac{2^{\frac{n^2}{2M^2} - \frac{7n}{2M} - \frac{n^2}{2M^2} - \frac{2n}{2M^2} - \frac{1}{2M^2} + \frac{7n}{2M} + \frac{7}{2M}}}{2^{\frac{1}{M^3} - 1}} \\
&= \frac{2^{-\frac{2n}{2M^2} - \frac{1}{2M^2} + \frac{7}{2M}}}{2^{\frac{1}{M^3} - 1}} \\
&= \frac{2^{\frac{7}{2M}}}{2^{\frac{2n+1}{2M^2}}} \times \frac{1}{2^{\frac{1}{M^3} - 1}}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
2^{\frac{2n+1}{2M^2}} > 2^{\frac{7}{2M}} \left(2^{\frac{1}{M^3}} - 1\right)^{-1} &\Leftrightarrow \log_2 2^{\frac{2n+1}{2M^2}} > \log_2 2^{\frac{7}{2M}} \left(2^{\frac{1}{M^3}} - 1\right)^{-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{2n+1}{2M^2} > \log_2 2^{\frac{7}{2M}} \left(2^{\frac{1}{M^3}} - 1\right)^{-1} \\
&\Leftrightarrow n > \frac{2M^2 \left[\log_2 2^{\frac{7}{2M}} \left(2^{\frac{1}{M^3}} - 1\right)^{-1} \right] - 1}{2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n > M^2 \left[\log_2 2^{\frac{7}{2M}} \left(2^{\frac{1}{M^3}} - 1 \right)^{-1} \right] - \frac{1}{2}.$$

Portanto, para n suficientemente grande $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^n g(i) \delta_{i+1}} < \infty$. Pelo Teorema 3.0.8, \mathcal{T}_g tem percolação δ -acessível, ou seja, tem percolação acessível pela Proposição 3.0.2. Portanto \mathcal{T}_f tem percolação acessível. \square

O Teorema 4.1.5 garante que a árvore representada na Figura 1b tem percolação acessível. Como mencionado na introdução desta seção, a árvore definida no Exemplo 3.0.10 se enquadra na Definição 4.1.1 e, como visto anteriormente, tem percolação acessível.

Agora, a árvore definida na Proposição 2 não é 2-power e mesmo assim possui percolação acessível. Observe que para essa árvore temos $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$. Por outro lado, para a árvore fatorial dada na Figura 3a temos também que $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$, porém ela não tem percolação acessível.

Motivados por esses exemplos, continuamos a investigação estudando agora o caso em que $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$. Com relação a essa discussão, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 4.1.6. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Se $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = C \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ então $\theta(\mathcal{T}_f) = 0$.*

Demonstração. Para simplificar a notação, primeiramente, denote por $S_k = \sum_{l=0}^k i_l$. Estimando $\mathbb{P}(\Lambda_{S_k})$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_{S_k}) &\leq \frac{\prod_{i=0}^{S_k-1} f(i)}{(S_k + 1)!} \\ &= \frac{\left[\prod_{i=0}^{i_0-1} f(i) \right] \left[\prod_{i=i_0}^{i_0+i_1-1} f(i) \right] \cdots \left[\prod_{i=S_{k-1}}^{S_k-1} f(i) \right]}{(S_k + 1)!} \\ &\leq \frac{2^{i_0} 2^{2i_1} \cdots 2^{(k+1)i_k}}{(S_k + 1)!} \\ &= \frac{2^{(k+1)i_k}}{(S_k + 1)(S_k + 1 - 1) \cdots (S_k + 1 - i_{k-1})} \times \cdots \times \\ &\quad \times \cdots \times \frac{2^{2i_1}}{(S_1 + 1)(S_1 + 1 - 1) \cdots (S_1 + 1 - i_0 - 1)} \times \frac{2^{i_0}}{(i_0 + 1)!} \\ &\leq \frac{2^{(k+1)i_k}}{(i_{k-1})^{i_k}} \times \frac{2^{(k)i_{k-1}}}{(i_{k-2})^{i_{k-1}}} \times \cdots \times \frac{2^{2i_1}}{(i_0)^{i_1}} \times \frac{2^{i_0}}{(i_0 + 1)!}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por hipótese, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} < \frac{1}{4}$. Daí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{(k+1)}}{i_{k-1}} \right)^{i_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2 2^{(k-1)}}{i_{k-1}} \right)^{i_k} = 0.$$

Aplicando o limite em ambos os lados da desigualdade (4.2) obtemos

$$\theta(\mathcal{T}_f) = \theta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) \leq \theta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_{S_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_{S_k}) = 0.$$

Portanto, \mathcal{T}_f não possui percolação acessível. \square

Lema 4.1.7. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Suponha que \mathcal{J} é infinito e $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$. Então I_k é finito para todo k .*

Demonstração. De fato, se $|I_k| = \infty$ para algum k , então $f(i) < 2^{k+1}$ para todo $i > i_{k-1}$, ou seja, a partir de i_{k-1} as imagens de f se repetem e temos apenas um conjunto finito de imagens até $f(i_{k-1})$.

Isso também mostra que $I_k \neq \emptyset$ para todo k . \square

Note que, se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1}}{i_k} = \infty$. De fato, dado $M \in \mathbb{R}$, existe k_0 tal que se $k > k_0$ então $\frac{2^k}{i_k} > 2M$. Então

$$\frac{2^{k-1}}{i_k} = \frac{2^k}{2i_k} > \frac{2M}{2} = M \quad \forall k > k_0.$$

Teorema 4.1.8. *Seja \mathcal{T}_f uma árvore esfericamente simétrica. Se \mathcal{J} é infinito, $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$ e f é não decrescente, então \mathcal{T}_f possui percolação acessível.*

Demonstração. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$, dada $M \in \mathbb{R}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$, então

$$\frac{2^{k-1}}{i_k} > M.$$

Tomando $M = 2$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, então $\frac{2^{k-1}}{i_k} > 2^{0+1}$, ou seja, $\frac{i_k}{2^{k-1}} < \frac{1}{2}$.

Definidos k_0, k_1, \dots, k_n , seja $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $k_{n+1} > k_n$ e $\frac{2^{k-1}}{i_k} > 2^{n+2}$ para todo $k > k_{n+1}$.

Defina $H_0 = \{0, \dots, i_{k_0}\}$, e definido H_1, H_2, \dots, H_n defina $H_{n+1} = \{i_{k_n} + 1, \dots, i_{k_{n+1}}\}$. Como f é não decrescente e i_k é o primeiro número maior que i_{k-1} tal que $f(i_k) \geq 2^{k+1}$, então $2^{k_n} \leq f(j)$ sempre que $j \in H_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ natural, ou seja,

$$f(j) \leq \frac{1}{2^{k_n}} \quad \forall j \in H_{n+1}.$$

Agora, como $|H_n| < i_{k_n} \quad \forall n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} = \sum_{i \in H_0} \frac{1}{f(i)} + \sum_{i \in H_1} \frac{1}{f(i)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i \in H_0} \frac{1}{f(i)} + \sum_{i \in H_1} \frac{1}{2^{k_0}} + \dots \\
&= \frac{|H_0|}{1} + \frac{|H_1|}{2^{k_0}} + \dots \\
&\leq i_{k_0} + \frac{i_{k_0}}{2^{k_0}} + \dots \\
&< i_{k_0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\
&= i_{k_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.0.9, \mathcal{T}_f tem percolação acessível. □

Em resumo, se $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty$ então \mathcal{T}_f tem percolação acessível. Se $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = C < \frac{1}{4}$ então \mathcal{T}_f não tem percolação acessível. Se $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$ e f é não decrescente então \mathcal{T}_f tem percolação acessível. Há assim uma lacuna, pois não sabemos o que ocorre quando o $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = C \geq \frac{1}{4}$ ou quando o $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$ e f é decrescente. A questão se torna ainda mais interessante uma vez que, por um lado para a árvore fatorial ilustrada na Figura 3a temos que $C > \frac{1}{4}$ e já sabemos que a mesma não tem percolação acessível. Nossos esforços então, a partir de agora, se concentrarão em determinar, caso exista, um valor crítico C para o qual ocorre a transição de fase.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nosso trabalho teve início com o estudo dos artigos de Nowak e Krug (2013) e Roberts e Zhao (2013) a fim de compreendermos suas técnicas e utilizá-las na tentativa de provar a Conjectura 1. Foi necessário o desenvolvimento do conceito de percolação δ -acessível para que pudéssemos mostrar a falsidade dessa conjectura. O próximo passo foi explorar as hipóteses do Teorema 6. A partir desse estudo foi criado o conceito de árvores 2-power. Com isso conseguimos uma condição para a existência de percolação acessível. Por fim, criamos um teorema que trata da extinção dessas árvores bem como uma nova condição para a existência de percolação acessível quando temos $\max\{|I_k|; k \in \mathbb{N}\} = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{i_k} = \infty$ e f é não decrescente.

Assim como Nowak e Krug (2013) deixaram uma lacuna em seus resultados, isso também nos aconteceu.

Temos dois caminhos a seguir. O primeiro é tentar completar essa lacuna, encontrando a transição de fase para essas árvores. O segundo é estender nossos resultados para a teoria de processos de ramificação.

REFERÊNCIAS

- BERESTYCKI, J.; BRUNET, E.; SHI, Z. The number of accessible paths in the hypercube. **Bernoulli**, v. 22, p. 653–680, 2016.
- BERTACCHI, D.; RODRIGUEZ, P. M.; ZUCCA, F. Galton–watson processes in varying environment and accessibility percolation. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, v. 34, n. 3, p. 613–628, 2020.
- BOLLBÁS, B. **Modern Graph Theory**. New York: Springer-Verlag, 1998.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. New York: Elsevier, 1976.
- BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes: I. crystals and mazes. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 53, n. 3, p. 629–641, 1957.
- BROMAN, E.; MEESTER, R. Survival of inhomogeneous galton-watson processes. **Advances in Applied Probability**, v. 40, n. 3, p. 798–814, 2008.
- COLETTI, C. F.; GAVA, R. J.; RODRÍGUEZ, P. M. On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 492, p. 382–388, 2018.
- DUMINIL-COPIN, H. Sixty years of percolation. In: WORLD SCIENTIFIC. **Proceedings of the International Congress of Mathematicians**. Rio de Janeiro, Brazil, 2018. p. 2829–2856.
- DUQUE, F.; ROLDÁN-CORREA, A.; VALENCIA, L. Accessibility percolation with crossing valleys on n-ary trees. **Journal of Statistical Physics**, v. 174, p. 1027–1037, 2019.
- DURRETT, R. **Probability: theory and examples**. 2. ed. Belmont, CA: Duxbury Press, 1996.
- GALLAGER, R. **Stochastic Processes: Theory for Applications**. New York: Cambridge University Press, 2013.
- GRIMMETT, G. **Percolation**. 2. ed. Berlin: Springer, 1999. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften N°321).
- GRINSTEAD, C.; SNELL, J. **Introduction to Probability**. 2. ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 1997.
- HARRIS, T. **The Theory of Branching Processes**. Germany: Springer-Verlag, 1963. (Dover Phoenix Editions).
- HOEL, P.; PORT, S.; STONE, C. **Introduction to Probability Theory**. Boston: Houghton Mifflin Company, 1971.
- KENDALL, D. G. Branching processes since 1873. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 41, p. 385–406, 1966.

-
- KESTEN, H. What is ... percolation? **Notices of the American Mathematical Society**, v. 53, p. 572–573, 2006.
- KIMMEL, M.; AXELROD, D. E. Branching processes in biology. **Interdisciplinary Applied Mathematics 19**, Springer-Verlag, New York, 2015.
- KRUG, J. Accessibility percolation in random fitness landscapes. **arXiv preprint arXiv:1903.11913v2**, 2021.
- LYONS, R.; PERES, Y. **Probability on Trees and Networks**. New York: Cambridge University Press, 2017.
- MANSUY, R.; SVERDLOVE, R. The origins of the word “martingale”. **Electronic Journal for History of Probability and Statistics**, v. 5, n. 1, p. 1–10, 2009.
- NOWAK, S.; KRUG, J. Accessibility percolation on n-trees. **Europhysics Letters**, v. 101, n. 6, p. 66004–, 2013.
- ROBERTS, M. I.; ZHAO, L. Z. Increasing paths in regular trees. **Electronic Communications in Probability**, v. 18, n. 87, p. 1–10, 2013.
- RODRÍGUEZ, P. M. Modelos probabilísticos. In: INMABB, UNS–CONICET. **Actas del XV Congreso “Dr. Antonio A. R. Monteiro”**. Bahía Blanca, Argentina, 2019. p. 1–25.
- ROOSEVELT, T. Address at the sorbonne, paris, france, “citizenship in a republic”. **The American Presidency Project**, 1910. Disponível em: <<https://www.presidency.ucsb.edu/documents/address-the-sorbonne-paris-france-citizenship-republic>>. Acesso em: 06 dez 2023.
- SAHINI, M. **Applications of Percolation Theory**. London: Taylor & Francis, 1994.
- TAYLOR, H.; KARLIN, S. **An Introduction to Stochastic Modeling**. 3. ed. San Diego: Academic Press, 1998.