UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO- UFPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

GABRYELLA VASCONCELOS DA SILVA

NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

RECIFE- PE

2023

GABRYELLA VASCONCELOS DA SILVA

NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica-PPGEdumatec, da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Didática da Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles

RECIFE- PE

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

S586n Silva, Gabryella Vasconcelos da
Noções iniciais de equações do 1º grau em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental / Gabryella Vasconcelos da Silva. –2023.
176 f.

Orientação de: Rosinalda Aurora de Melo Teles.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica-PPGEdumatec, 2023.
Inclui Referências.

1. Álgebra. 2. Livros didáticos. 3. Educação. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Orientação). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2024-009)

GABRYELLA VASCONCELOS DA SILVA

NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica-PPGEdumatec, da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 25/05/2023.

BANCA EXAMINADORA

_____

Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles
(Orientadora e Presidenta)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida
(Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Prof. Drª. Elisângela Bastos de Melo Espídola
(Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

AGRADECIMENTOS

À Deus, que sempre me guiou e me permitiu realizar grandes sonhos.

À minha família, meu pai, Jorge, meu irmão, Gabryel e meu sobrinho, Gael, que são minha base e me proporcionam ser ainda mais feliz.

Aos meus queridos amigos e colegas de trabalho, Arnaldo, Franciely, Magda, Ligivânia, Marcella, Lincoln e Noel que sempre me deram força nessa caminhada e estiveram ao meu lado tornando meus dias mais alegres.

A professora Wilza Viturino, que sempre me ajudou e acreditou em mim enquanto pessoa e profissional, me dando oportunidades que me proporcionaram aprender e me tornar uma profissional melhor.

Ao meu coordenador, Carlos Barros, que sempre me incentivou e compreendeu os momentos em que precisei estar ausente do trabalho.

A todos os meus colegas do mestrado da turma 2021, em especial, Dianna, Jhonatan e Anderson. Pessoas que me conectei de uma forma singular e que me inspiram diariamente.

A todos os professores do EDUMATEC que me possibilitaram crescer enquanto profissional.

Ao meu atual especialista, colega de profissão e colega do programa de pós-graduação do Edumatec, Suedy Azevedo. Obrigada por todo o ensinamento e contribuição para minha formação enquanto professora.

Ao professor Dr. Jadilson Ramos de Almeida que desde o início colaborou com a minha pesquisa e trouxe contribuições valiosas, e a professora Elisângela Bastos que também contribuiu com sugestões significativas na banca de qualificação e defesa.

E, por fim, a minha querida orientadora, professora Dr. Rosinalda Aurora de Melo Teles, que sempre esteve por perto com muito carinho e cuidado me ensinando e guiando com muito zelo e empatia. Obrigada por tudo, professora!

RESUMO

É consensual entre Educadores Matemáticos a importância de construir desde os primeiros anos de escolaridade, noções conceituais de objetos de conhecimento mais complexos a serem sistematizados ao longo da Educação Básica. Dentre elas, as equações do 1º grau. A partir dessa premissa, nessa pesquisa de mestrado se propôs a analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), tipos de situações relacionadas às estruturas aditivas e multiplicativas propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos (LD) de matemática do 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental. Para alcançar esse objetivo, realizou-se uma análise documental das orientações curriculares nacional e estadual, BNCC e Currículo de Pernambuco, respectivamente, com a finalidade de mapear os objetos de conhecimento e habilidades relacionados à construção de noções iniciais de equações do 1º grau nos anos iniciais (3º, 4º e 5º anos) e no 6º ano dos anos finais do ensino fundamental. Tendo como base as habilidades relacionadas a esses objetos de conhecimentos construiu-se as categorias, que serviram para selecionar as situações nos LD. As 33 situações selecionadas nos LD foram classificadas como problemas de estrutura aditiva, problemas de estrutura multiplicativa e problemas mistos, e, 10 atividades que não puderam ser classificadas segundo a TCC. Os dados apontam que problemas pertencentes ao campo das estruturas aditivas e os classificados como de composição prevalecem nos livros analisados, dos 18 problemas identificados, 16, ou seja, 89%, pertencem a classe das composições. O mesmo aconteceu para as atividades, a maioria abarcou as relações aditivas - dentre as 10 mapeadas nos LD, metade corresponde a essa relação. Para algumas categorias e anos analisados não se percebeu um crescente nível de complexidade a partir da ordem em que se apresentaram as situações nos livros didáticos. O número de situações encontradas para cada categoria não se mostrou em quantidade significativa, nem de forma diversificada, compreendendo abarcando campos e classificações variados. Quanto aos recursos, o 4º ano, mesmo não sendo o ano que mais contempla categorias, caracterizou-se como o que apresentou uma maior variedade se considerar-se apenas as situações. O recurso mais proeminente refere-se à representação da balança de dois pratos, que esteve presente em 7 situações dentre as 15 que apresentavam algum tipo de recurso.

Palavras-chave: álgebra; equações do 1º grau; livros didáticos; Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

There is a consensus among Math Educators on the importance of teaching conceptual notions of more complex objects of knowledge from the earliest years of schooling, to be systematized throughout Basic Education. Among them, are the 1st degree equations. Based on this premise, this master's research proposed to analyze, from the perspective of Conceptual Field Theory (TCC), types of situations related to additive and multiplicative structures proposed to develop the first notions related to 1st-degree equations in mathematics textbooks (LD) for the 4th, 5th, and 6th years of elementary school. To achieve this goal, an analysis of documents relating to the national and state curriculum guidelines, BNCC and Currículo de Pernambuco, respectively, was carried out to map the objects of knowledge and skills related to the construction of initial notions of 1st degree equations in the initial years (3rd, 4th and 5th years) and the 6th year of the final years of elementary school. Based on the skills related to these objects of knowledge, the categories were constructed, which served to select the situations in the LD. The 33 situations selected in the LD were classified as additive structure problems, multiplicative structure problems and mixed problems, and 10 activities that could not be classified according to CBT. The data indicates that problems belonging to the field of additive structures and those classified as composition prevails in the books analyzed, of the 18 problems identified, 16, that is, 89%, belong to the class of compositions. The same happened for the activities: the majority covered additive relationships - among the 10 mapped in the LD, half correspond to this relationship. For some categories and years analyzed, an increasing level of complexity was not perceived based on the order in which the situations were presented in the textbooks. The number of instances found for each category did not appear to be significant, nor diverse, encompassing different fields and classifications. As for resources, the 4th year, despite not being the year that includes the most categories, was characterized as the one that presented the greatest variety, considering only situations presented. The most prominent resource refers to the two-pan scale, which was present in 7 out of the 15 scenarios that used some type of resource.

Keywords: algebra; 1st degree equations; didatic books; Theory of Conceptual Fields.

LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1 – Tipos de atividades.....58

Diagrama 2 – Esquema dos indicativos que contribuem para o desenvolvimento das noções iniciais de equação do primeiro grau anterior ao 7º ano.....68

Diagrama 3 – Problema de composição.....93

Diagrama 4 – Problema de composição.....95

Diagrama 5 – Problema de composição.....98

Diagrama 6 – Problema de composição.....99

Diagrama 7 – Problema de composição.....100

Diagrama 8 – Problema de composição.....102

Diagrama 9 – Problema de composição.....103

Diagrama 10 – Problema de composição (item a).....105

Diagrama 11 – Problema de transformação (item c).....106

Diagrama 12 – Problema de proporção simples.....110

Diagrama 13 – Problema de comparação multiplicativa.....110

Diagrama 14 – Problema de comparação multiplicativa (exemplo da atividade 1).....113

Diagrama 15 – Problema de comparação multiplicativa (exemplo da atividade 2).....113

Diagrama 16 – Problema de composição.....115

Diagrama 17 – Problema de transformação.....116

Diagrama 18 – Problema de composição.....119

Diagrama 19 – Problema de composição.....120

Diagrama 20 – Problema de composição.....121

Diagrama 21 – Problema de comparação multiplicativa.....123

Diagrama 22 – Problema de composição.....123

Diagrama 23 – Problema de composição.....124

Diagrama 24 – Problema de comparação multiplicativa.....125

Diagrama 25 – Problema de proporção múltipla.....128

Diagrama 26 – Problema de proporção múltipla.....128

Diagrama 27 – Problema de proporção múltipla.....128

Diagrama 28 – Problema de proporção simples.....130

Diagrama 29 – Problema de proporção simples.....130

Diagrama 30 – Problema de proporção simples.....131

Diagrama 31 – Problema de proporção simples.....132
Diagrama 32 – Problema de proporção simples.....132
Diagrama 33 – Problema de proporção simples.....133
Diagrama 34 – Problema de comparação multiplicativa.....137
Diagrama 35 – Problema de comparação multiplicativa.....137
Diagrama 36 – Problema de comparação multiplicativa.....138
Diagrama 37 – Problema de comparação multiplicativa.....139
Diagrama 38 – Problema de comparação multiplicativa.....141
Diagrama 39 – Problema de comparação multiplicativa.....141

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Balança representando a ideia de equivalência.....34
Figura 2 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.....52
Figura 3 - Um caminho para resolver problemas multiplicativos.....52
Figura 4 - Cronologia das políticas públicas acerca do Livro didático.....71
Figura 5 - Teia de ligações: professor, estudante, matemática e livro didático.....81
Figura 6 - Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.....91
Figura 7 - Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.....92
Figura 8 - Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.....93
Figura 9 - Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.....93
Figura 10 - Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.....94
Figura 11- Relações inversas entre adição e subtração.....97
Figura 12 - Relações inversas entre adição e subtração.....99
Figura 13 - Relações inversas entre adição e subtração.....100
Figura 14 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....102
Figura 15- Relação de igualdade existente entre dois termos.....104
Figura 16 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....105
Figura 17 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....107
Figura 18 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....108
Figura 19 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....109
Figura 20 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....112
Figura 21 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....115
Figura 22 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....116
Figura 23 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....118
Figura 24 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....119
Figura 25 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....120
Figura 26 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....123
Figura 27 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....124
Figura 28 - Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....127
Figura 29 - Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....129
Figura 30 - Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....130
Figura 31 - Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....131
Figura 32 - Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....132

Figura 33 - Problemas de partilha.....135
Figura 34 - Problemas de partilha.....135
Figura 35 - Problemas de partilha.....138
Figura 36 - Problemas de partilha.....140
Figura 37 - Problemas de partilha.....141
Figura 38 - Relações inversas entre adição e subtração.....143
Figura 39 - Relações inversas entre adição e subtração.....144
Figura 40 - Relações inversas entre multiplicação e divisão.....145
Figura 41- Relações inversas entre multiplicação e divisão.....146
Figura 42 - Relações inversas entre multiplicação e divisão.....146
Figura 43 - Relações inversas entre multiplicação e divisão.....147
Figura 44 - Relação de igualdade existente entre dois termos.....148
Figura 45 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....149
Figura 46 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....149
Figura 47 - Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....150

LISTAS DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Tipos de situações pertencentes ao campo das estruturas aditivas.....154
Gráfico 2 – Tipos de situações pertencentes ao campo das estruturas multiplicativas.....155

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tipos de situações do campo das estruturas aditivas.....50

Quadro 2 - Habilidades da BNCC que possibilitam desenvolver as primeiras noções de equação do 1º grau.....63

Quadro 3 - Atividades não classificadas segundo a TCC.....151

Quadro 4 - Tipologia das atividades e problemas que envolve as noções iniciais de equações do 1º grau.....153

Quadro 5 - Recursos explorados pelos livros didáticos.....157

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tipos de situações envolvendo ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração.....96
Tabela 2 - Tipos de situações envolvendo relações inversas.....100
Tabela 3 - Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.....106
Tabela 4 - Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.....110
Tabela 5 - Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.....114
Tabela 6 - Tipos de situações envolvendo elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....117
Tabela 7 - Tipos de situações envolvendo número desconhecido que torna verdadeira a igualdade.....125
Tabela 8 - Tipos de situações envolvendo variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.....133
Tabela 9 - Tipos de situações envolvendo problemas de partilha.....139
Tabela 10 - Tipos de situações envolvendo problemas de partilha.....142

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 26

2.1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU 26

2.1.1 Equações polinomiais: um pouco de história **26**

2.1.2 Equações polinomiais: definição e principais características **29**

2.1.3 Ensino e aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau **32**

2.1.4 O ensino da álgebra nos anos iniciais **37**

3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS **43**

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS 43

3.2 PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA, PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA E PROBLEMAS MISTOS 48

4 PROBLEMAS, ATIVIDADES, NOÇÕES INICIAIS E HABILIDADES: DELIMITAÇÕES NECESSÁRIAS **56**

4.1 EXERCÍCIOS, SITUAÇÕES CONTEXTUALIZADAS E PROBLEMAS: DELIMITAÇÕES NECESSÁRIAS 56

4.2 NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU 60

4.3 HABILIDADES QUE POSSIBILITAM DESENVOLVER AS PRIMEIRAS NOÇÕES DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU 62

5 LIVRO DIDÁTICO **71**

5.1 LIVRO DIDÁTICO: UM POUCO DE HISTÓRIA 71

5.2 LIVRO DIDÁTICO: ALGUMAS DEFINIÇÕES E CARACTERÍSTICAS 76

5.3 O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA 79

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **84**

6.1 TIPO DE PESQUISA 84

6.2 CARACTERIZAÇÃO DAS ETAPAS DA PESQUISA 86

7 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS **90**

7.1 REPRESENTAÇÃO DE DIFERENTES SENTENÇAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO 90

7.1.1 Livro Buriti – Mais matemática do 3º ano **90**

7.2 RELAÇÕES INVERSAS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO 97
7.2.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano 97
7.3 RELAÇÃO DE IGUALDADE EXISTENTE ENTRE DOIS TERMOS 101
7.3.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano 101
7.3.2 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano 107
7.3.3 Livro A Conquista da Matemática do 6º ano 111
7.4 ELEMENTO DESCONHECIDO QUE TORNA VERDADEIRA A IGUALDADE 114
7.4.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano 114
7.4.2 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano 117
7.5 VARIAÇÃO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA ENTRE DUAS GRANDEZAS 126
7.5.1 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano 127
7.6 PROBLEMAS DE PARTILHA 134
7.6.1 Livro Buriti – Mais Matemática do 5º ano 134
7.6.2 Livro A Conquista da Matemática do 6º ano 140
7.7 SITUAÇÕES NÃO CLASSIFICADAS SEGUNDO A TCC 142
7.7.1 Relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão 143
7.7.2 Relação de igualdade existente entre dois termos 148
7.7.3 Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade 149
7.8 RECURSOS UTILIZADOS NAS SITUAÇÕES E ATIVIDADES 157
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 160
REFERÊNCIAS 165

1 INTRODUÇÃO

Há consenso entre historiadores sobre o fato da Matemática, inicialmente, ter sido criada para atender as necessidades mais elementares do cotidiano humano, e que ao longo dos anos foi se desenvolvendo até configura-se atualmente como uma das ciências mais importantes já criadas pela humanidade, favorecendo, entre outros aspectos, o surgimento de novas tecnologias e a resolução de problemas gerados, entre outros aspectos, pela evolução dos modos de produção, de comunicação e de construção de saber. Sabendo disso, ensinar e aprender Matemática torna-se então um imperativo para que as futuras gerações ampliem e consolidem o que já foi elaborado até aqui.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), a Matemática enquanto disciplina escolar, com suas unidades temáticas (números, álgebra, grandezas e medidas, geometria e probabilidade e estatística), tem o propósito de possibilitar que o estudante compreenda muito mais do que a manipulação de símbolos, permite também entender conceitos e saiba aplicá-los na resolução de problemas, e busque construir saberes essenciais para o seu desenvolvimento enquanto ser social, estimulando o raciocínio lógico, a capacidade de argumentar e estabelecer conexões entre o saber construído e outros saberes.

No que se refere às unidades temáticas propostas na BNCC para o ensino de matemática, a álgebra merece destaque, tendo em vista que, visa não somente o desenvolvimento de habilidades, mas também permite ampliar uma forma de pensar matematicamente com o objetivo de fortalecer um tipo específico de pensamento - o pensamento algébrico. Pensamento este que, de acordo com a BNCC, é essencial na utilização de modelos matemáticos, na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, em situações e estruturas matemáticas, utilizando letras e outros símbolos. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.

Nesse contexto, torna-se necessário explicitar como o termo “habilidade” é compreendido nesse trabalho. Habilidade é o saber fazer, é conseguir colocar em prática as teorias e conceitos mentais que foram adquiridos, conforme Perrenoud (1999, p. 5), “habilidade trata-se de uma sequência de modos operatórios, de induções e deduções, onde são utilizados esquemas de alto nível”. Dessa maneira, por meio do desenvolvimento das habilidades é possível construir as competências, que são definidas segundo a BNCC (Brasil, 2018) como a mobilização de

conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas da sociedade. Para esta pesquisa, algumas habilidades, extraídas da unidade temática álgebra, serão o princípio do nosso percurso metodológico, já que, por meio delas desenvolveremos as categorias que serão essências para a sistematização das nossas análises.

Outro aspecto que coloca a álgebra em destaque e evidencia a necessidade de se desenvolver pesquisas sobre o tema é o número considerável de estudantes que apresentam alguma dificuldade durante seu processo de ensino e de aprendizagem. A partir da constatação empírica, enquanto professora de matemática da educação básica, observei que os estudantes possuem diversos entraves ao lidarem com a álgebra, possivelmente, devido ao expressivo grau de abstração com o qual os estudantes não estão habituados. Mediante a minha prática profissional, sempre foi possível observar a empasse dos estudantes em relação a objetos de conhecimentos do campo da álgebra, por exemplo, equações polinomiais do 1º e 2º graus, funções e fatoração de expressões algébricas. Era nítido a dificuldade existente ao tentar resolver, por exemplo, equações do 1º grau (na maioria das vezes, os estudantes demonstravam um conhecimento incompleto em torno das operações básicas da aritmética), pois, não conseguiam compreender o significado do "x" e o porquê que essa letra assumia valores diferentes na medida que mudava o problema matemático proposto, ou seja, o caráter da letra enquanto incógnita ou variável.

Esta realidade pode ser ratificada com os estudos desenvolvidos por Pereira (2017), Gil (2008) e Oliveira (2002); de modo geral, esses autores destacam fragilidades referentes ao processo de ensino e de aprendizagem da álgebra e motivos pelos quais os estudantes apresentam significativa dificuldade no processo de aprendizagem deste campo.

De acordo com Pereira (2017) a álgebra é uma parte da matemática que exige dos estudantes um expressivo grau de abstração, tendo em vista que, os valores numéricos, em diversas situações não são apresentados de forma explícita e não apresenta significação para muitos. Dessa forma, provocam uma considerável queda no aprendizado dos estudantes ao se depararem com este conteúdo. Gil (2008) nos traz que um dos grandes entraves enfrentados pelos estudantes ao se trabalhar com álgebra está na passagem de uma situação-problema da linguagem natural para a linguagem algébrica. Nesse processo, torna-se necessário que este estudante demonstre conhecimento não só no que se refere aos símbolos e a linguagem característica da álgebra, como também, domine a capacidade de interpretação.

Oliveira (2002) acrescenta nos dizendo que uma barreira que se encontrada no trabalho com a álgebra caracteriza-se pelo fato de o estudante trazer para o contexto algébrico

dificuldades herdadas do aprendizado no contexto aritmético, ou por estender, para o contexto algébrico procedimentos aritméticos que não procedem.

De acordo com o Guia de Livros Didáticos para os anos finais do ensino fundamental de matemática, educadores tem defendido a ideia de que conceitos relevantes para a formação da matemática atual sejam abordados desde os primeiros anos de escolaridade. Esta concepção é válida também para conceitos que podem atingir níveis mais elevados de complexidade, podemos citar como exemplo: número racional, probabilidade, semelhança, simetria, equações, dentre outros. Este pensamento apoia-se na "concepção de que a construção de um conceito pelo indivíduo processa-se no decorrer de um longo período, e de estágios mais intuitivos aos mais formais" (Brasil, 2016, p. 13). O documento segue orientando que não se deve esperar que a aprendizagem de conceitos e procedimentos sejam realizados de forma completa, fechada e em um curto período de tempo. Nessa perspectiva, ela é mais efetiva quando os conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada, durante todo o percurso escolar.

Partindo desta recomendação proposta no Guia, percebe-se que os conteúdos matemáticos estão articulados à outros anteriores. Estes quando trabalhados nos anos iniciais do ensino fundamental, tem a função de "preparar" os estudantes para o conteúdo formal com todas as suas propriedades e características. Ou seja, a construção de um conhecimento considerado complexo (construído ao longo dos anos finais do ensino fundamental) pode ocorrer a partir da aprendizagem de propriedades e relações, que são propostos para os anos iniciais, que somados tendem a facilitar a aprendizagem do conteúdo em questão.

De acordo com a Teoria do Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud, um dos aspectos que compõe um campo conceitual é o conceito, este só adquire sentido para o estudante a partir do contato com uma variedade de situações e problemas a serem resolvidos, tornando-se necessário um longo período de tempo, de experiências e de maturação (Camili, 2021). Estes aspectos relacionados à conceitualização representa a essência do desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, para Vergnaud, torna-se necessário dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas, na escola ou fora dela (Vergnaud, 1994, p. 58). Assim, corroborando com o que é recomendado pelo Guia, desenvolver desde os primeiros anos de escolaridade conceitos que serão consolidados nos anos finais do ensino fundamental proporciona a otimização da aprendizagem pelos estudantes, pois, todo esse processo inclui aspectos relacionados a tempo, maturação e contato com diversas situações e problemas.

Corroborando com este pensamento, segundo a BNCC (Brasil, 2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998), a álgebra escolar deve permear toda a educação básica. De modo geral, nos anos iniciais, espera-se que os estudantes desenvolvam conhecimentos e habilidades que os auxiliem nos anos finais a construir uma sólida aprendizagem em álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico. Pode-se destacar, por exemplo, ideias de regularidade (sem o uso de letras), generalização de padrões e propriedades da igualdade. Deve-se atentar também para um trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), a relação de equivalência e noção intuitiva de função e de equação.

Nos anos finais do ensino fundamental, o que se propõe é uma retomada, um aprofundamento e uma ampliação do que foi trabalhado nos anos iniciais. Nesta etapa, os estudantes devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. Ou seja, torna-se necessário que os estudantes estabeleçam relações entre variável e função e entre incógnita e equação; além disso, desenvolver técnicas de resolução de equações e inequações (inclusive no plano cartesiano) com foco na representação e na resolução de tipos específicos de problemas.

Sendo assim, com base no que foi exposto até o momento, desenvolver pesquisas sobre a álgebra permite ampliar a compreensão sobre este campo de conhecimento desvelando suas características e particularidades, e possibilitando aos professores conhecerem possíveis práticas pedagógicas, diferentes formas de trabalhar e explorar as potencialidades do estudante para que este consiga compreender cada habilidade e dessa forma otimizar o processo de aprendizagem.

No leque de possibilidades presentes no campo da álgebra, Leite (2019), enfatiza a importância das equações polinomiais do 1º grau, uma vez que, este conteúdo apresenta-se de forma bastante relevante na vida escolar dos estudantes, pois, a compreensão de termos algébricos representa um grande desafio para muitos destes (aspecto essencial na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas matemáticos); na vida cotidiana, porque é muito comum observarmos em situações do dia a dia problemas que envolvam a álgebra; e na vida dos professores, visto que, demostra a necessidade de uma diversificação nos procedimentos metodológicos, isto é, a mudança nos métodos de ensino tradicionais para os mais dinâmicos.

Vale ressaltar ainda que, essas equações polinomiais permeiam boa parte da Educação Básica, iniciando efetivamente (fazendo uso das relações e propriedades características da

linguagem algébrica) no 7º ano dos anos finais do ensino fundamental e se estendendo até o 3º ano do ensino médio; isso ocorre porque este conteúdo pode ser encontrado em diversos outros campos do conhecimento da matemática, na geometria e em grandezas e medidas, por exemplo. É possível observar também este conteúdo presente em diversas disciplinas, tais como a Química, a Física e a Biologia.

O Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental – CPE (Pernambuco, 2019), aponta que nos anos iniciais diversas articulações devem ser desenvolvidas no campo da álgebra para otimizar a construção formal do conceito de equação do 1º grau, dentre elas está a determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática. Nesta etapa, situações como esta devem ser exploradas por meio da ideia de operações inversas, do tipo "determinar o número que, multiplicado por quatro, é igual a vinte". A familiaridade com tais operações possibilitará o progressivo emprego da simbologia convencional da álgebra, pois o efetivo trabalho com "letras" será realizado apenas nos anos finais.

Para os anos finais do ensino fundamental, este mesmo documento recomenda que "as equações do primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de conhecimento, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido" (p. 381). Nessa perspectiva, cabe ao professor desenvolver situações em que os procedimentos aritméticos se tornem cada vez mais ineficazes para resolvê-las, possibilitando aos estudantes estabelecerem outros processos.

Baseado nestas considerações e por meio de observações realizadas na BNCC (Brasil, 2018) e no Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental (Pernambuco, 2019) é possível perceber que ao longo do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental os estudantes passam a lidar com habilidades que irão "prepará-los" para a introdução do conceito formal de equação do 1º grau no 7º ano. Tais habilidades permitirão desenvolver nesses estudantes as primeiras noções, ou seja, conhecimentos iniciais, relacionados a esse objeto de conhecimento. Podemos destacar algumas habilidades que possibilitam esse processo, por exemplo, para o 3º, 4º, 5º e 6º anos, respectivamente: Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença; reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos; resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido; e resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo

relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Dessa forma, trabalhar com os estudantes conceitos elementares da matemática específicos para um determinado conteúdo desde os anos iniciais do ensino fundamental pode proporcionar, no futuro, que eles desenvolvam habilidades mais complexas de forma descomplicada e coerente, pois, estes possuirão o conhecimento que serão essenciais para a compreensão da habilidade em questão. Por exemplo, se tomarmos as habilidades propostas na BNCC, para o 4º ano temos a habilidade EF04MA13 que trata sobre as relações inversas entre as operações adição, subtração, multiplicação e divisão, que basicamente permite ao estudante resolver situações do tipo: determine um número que somado com 8 resulte em 25, ou ainda, determine um número que multiplicado por 5 resulte em 40. Esta habilidade será essencial para desenvolver a habilidade EF07MA18 que trata das equações polinomiais do primeiro grau no 7º ano do ensino fundamental quando o estudante retoma associações feitas em anos anteriores, por meio do uso de tracinhos, figuras ou quadradinhos para representar o valor desconhecido, passando agora a utilizar as letras na construção das equações.

As reflexões apresentadas nos parágrafos anteriores apontam para a importância das situações propostas nos anos iniciais em torno de conceitos e propriedades que serão retomadas e aprofundadas no 7º ano. Segundo Vergnaud (1993), as situações dão que sentido aos conceitos matemáticos são desenvolvidas por meio da relação estabelecida entre o sujeito, as situações e os significantes, mais especificamente, os esquemas que este mobiliza para solucionar determinada situação.

Silva e Ciríaco (2021) reforçam este ponto de vista ao relatarem que a integração da Álgebra nos anos iniciais seria adequada não apenas para o desenvolvimento da capacidade cognitiva das crianças, mas também, para que estas sejam encorajadas a construírem significados e, dessa forma, possam diminuir possíveis dificuldades no ciclo de ensino subsequente da Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental).

Vale destacar ainda que uns dos primeiros pesquisadores que iniciaram pesquisas sobre o Early Álgebra[1] foram Maria Blanton e James Kaput. A partir destes autores que outros pesquisadores (tais como, Canavarro, 2007; Carraher; Schliemann, 2016; Cerca, 2014; Teixeira, 2016; Yamanaka, Magina, 2008) também apresentaram interesse em mostrar que é possível e fundamental a álgebra nos anos iniciais, uma vez que, esta poderá contribuir na aprendizagem da álgebra nos anos finais em todo currículo escolar (Bitencourt, 2017). Contudo,

[1] Segundo Carraher e Schliemann (2007) esse termo é usado para se referir à abordagem da Álgebra no ensino da Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

essa inserção não é necessariamente a manipulação de símbolos, mas sim, como afirma Kaput (1998 *apud* Carraher; Schliemann, 2016), no ensino de princípios algébricos.

Quando falamos em processo de ensino e de aprendizagem, intuitivamente pensamos nos recursos didáticos, pois, estes são indispensáveis nesse processo. Referente aos diversos recursos disponíveis para o professor, nessa pesquisa nos interessamos pelo livro didático, pois, este apresenta-se como um dos principais instrumentos no trabalho em sala de aula, especialmente em redes públicas. Evidentemente não estamos colocando o LD como um recurso didático simples, pois, este caracteriza-se como um texto didático complexo que tem o propósito de possibilitar a construção de conhecimentos (ou auxiliar nesse processo), por meio de atividades, problemas, textos, uso de calculadora, régua, cartolina, celular, etc., dentre outras possibilidades.

Segundo Frison et al. (2009) e Sande (2017), os livros didáticos se apresentam como a principal, se não a única fonte na qual o professor apoia seu trabalho docente, no que se refere a material impresso em sala de aula. Em várias escolas de rede pública, o livro didático representa um recurso básico tanto para o professor como para o estudante no processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, torna-se um desafio tanto para o professor como para o estudante fazer uso do livro didático de forma crítica e reflexiva, explorando todas as potencialidades desse material e identificando as suas fragilidades.

Turíbio e Silva (2017) reforçam o pensamento acima quando ressaltam que, ao longo dos anos, o livro didático vem se tornando cada vez mais relevante como recurso pedagógico e, mesmo diante dos avanços tecnológicos e todas as diversas fontes de informações disponíveis, ele ainda representa o principal material didático utilizado em sala de aula, pois é uma ferramenta a qual todos os estudantes têm acesso e, portanto, é, também, a mais usual.

Neste trabalho defendemos a ideia de que as noções inicias relacionadas à equação do 1º grau, estão presentes nos livros didáticos de matemática desde os anos iniciais do ensino fundamental e, quando bem abordadas em sala de aula, permitirão que os estudantes construam conhecimentos essenciais para compreensão do conceito formal de equação do 1º grau, por exemplo os seguintes conhecimentos: relações inversas, proporcionalidade, propriedades da igualdades e problemas de partilha.

Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud enquanto teoria cognitiva, associada à Psicologia do Desenvolvimento, com foco nos processos de ensino e aprendizagem, é um aporte teórico necessário e adequado para esse estudo, cuja questão problema busca responder que situações são propostas em torno das noções iniciais de equações do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º ano, 4º ano, 5º ano e 6º ano do

ensino fundamental. A noção de campo conceitual, compreendido como um "conjunto de problemas e situações, que requerem o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas diferentes, mas intimamente relacionados" (Vergnaud, 1996, p. 41), nos ajudará a compreender como as habilidades sugeridas pelos documentos oficiais relacionadas a noções que podem favorecer a compreensão das equações polinomiais do 1º grau, pois segundo Vergnaud (1996, p. 117), "muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las".

Esta teoria é composta por elementos que nos proporcionam verificar a aprendizagem, bem como, analisar o desenvolvimento de competências na aprendizagem do estudante. De acordo com Vergnaud (1982), o conhecimento está organizado em Campos Conceituais, dentre eles têm-se o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Estes dois campos conceituais apresentam diferentes grupos de situações-problema que possibilitam os estudantes mobilizar diferentes conceitos matemáticos, por meio da organização de esquemas, durante a resolução dos problemas. Pesquisas de Gérard Vergnaud na área da Educação Matemática, em conjunto com a Psicologia Cognitiva, buscam entender como as crianças desenvolvem conceitos matemáticos ao se deparar com tarefas matemáticas (Rodrigues; Rezende, 2019).

Optamos por analisar os quatro anos anteriores ao 7º ano, ou seja, o 3º, 4º, 5º e 6º anos, pois, é no 7º ano que a linguagem algébrica é apresentada aos estudantes em sua representação formal, ou seja, as equações são abordadas na forma simbólica, com objetos de ensino sistemático incluindo a representação das incógnitas por letras do alfabeto, de acordo com as orientações curriculares (BNCC e Currículo de Pernambuco). A escolha pelo 3º, 4º, 5º e 6º anos é justificada pelo fato de encontrarmos nesses anos escolares conhecimentos que promovem o desenvolvimento de conceitos e relações matemáticas que mais à frente (a partir do 7º ano) serão úteis para a formalização do conceito de equação do 1º grau. Nesse sentido, olhar para esses anos escolares possibilitará analisar com mais profundidade como esses conhecimentos são esboçados e como possibilitam dar lastro para o processo de formalização.

Apresentamos o objetivo desse estudo que busca analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, situações propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º ano, 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental. Para tanto, elencamos como objetivos específicos:

- Identificar em livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental problemas e atividades que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau;

- Classificar, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, situações encontradas nos livros didáticos que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau;
- Descrever recursos utilizados em problemas e atividades que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental.

Para alcançar os objetivos descritos, inicialmente, elencamos as habilidades que, de acordo com a revisão bibliográfica realizada, incluindo textos científicos e didáticos, acreditamos ser essenciais para desenvolver no estudante as noções iniciais de equação do primeiro grau (a partir da BNCC), em seguida, foram elaboradas categorias com base nessas habilidades. A partir dessas categorias foram selecionadas, em livros didáticos de matemática, situações que exploram conhecimentos envolvendo as noções iniciais de equação do 1º grau. Os livros utilizados se referem a duas coleções distintas: para o 3º, 4º e 5º anos dos anos iniciais utilizamos a coleção Buriti – Mais Matemática, e para o 6º ano utilizamos a coleção A Conquista da Matemática. Vale ressaltar que a escolha por essas coleções se dá pelo fato de serem as coleções adotadas pela rede municipal de Garanhuns – PE, ou seja, com base nesse estudo teremos um panorama de como está a proposta de atividades e problemas que permitem ao estudante desenvolver noções iniciais de equação do primeiro grau nessa rede de ensino.

Após essa categorização, classificamos as situações encontradas sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como sendo de estrutura aditiva (composição, transformação e comparação) ou de estrutura multiplicativa (proporção simples, proporção múltipla, comparação multiplicativa e produto de medida), e problemas mistos, de acordo com a releitura realizada por Magina et al. (2001) e Magina, Merlini e Santos (2012). Investigamos, também, neste processo, se nas situações propostas pelo material havia um crescente nível de complexidade entre os problemas tomando como base o campo conceitual a que pertencem e sua respectiva classificação.

Vale ressaltar que, houve questões que devido à ausência de contextualização não foi possível a sua classificação segundo a TCC, sendo assim, dedicamos uma seção exclusivamente para essas atividades. Finalizamos com a descrição dos recursos utilizados nas situações propostas nos livros analisados, como por exemplo, figuras, símbolos, desenhos, objetos.

No capítulo 2 discorremos um pouco sobre a contribuição de alguns povos no desenvolvimento das equações do 1º grau, motivados pelas necessidades reais de seu tempo. Seguimos com a definição e as principais características que compõem as equações polinomiais, em especial, as equações do 1º grau, com destaque para os seus principais

elementos. Discutimos também neste capítulo ideias sobre o sinal de igualdade, o uso da representação da balança de dois pratos, formas de resolução, de reconhecer e de tratar uma equação, e, finalizamos com o papel da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, ressaltando o que trazem os documentos sobre o ensino deste campo para esta etapa e autores que defendem o ensino da álgebra desde os primeiros anos de escolaridade.

O capítulo 3 trata sobre a Teoria da Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud, que caracteriza a teoria que fundamenta esta pesquisa. Apresentamos como ocorre o processo de ensino e de aprendizagem segundo esta teoria, e explicitamos os problemas que compõe o campo das estruturas aditivas e multiplicativas, os problemas mistos e suas devidas classificações.

No capítulo 4 fazemos a distinção entre problemas e atividades, uma vez que, estes termos serão essenciais para definirmos se é possível ou não classificar as questões selecionadas dos livros didáticos segundo a TCC. Em seguida esclarecemos o que chamamos de noções iniciais de equação do 1º grau e, finalizamos elencando e discutindo brevemente as habilidades, retiradas da BNCC (Brasil, 2018), que favorecem o desenvolvimento das noções iniciais de equação do 1º grau para o 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental.

O capítulo 5 foi destinado a fonte documental desse estudo: o livro didático. Iniciamos com uma linha do tempo destacando os principais acontecimentos ao longo da história sobre esse recurso didático. Seguimos com suas principais características e especificações, seu papel na a educação básica e no ensino e aprendizagem da matemática.

O capítulo 6 se refere aos nossos procedimentos metodológicos, no qual discorremos sobre as etapas da nossa pesquisa, os livros selecionados e o percurso de análise a ser realizado na busca por alcançar os objetivos propostos nesse trabalho.

E, por fim, no capítulo 7 são apresentadas as análises dos livros selecionados. Esse processo foi sistematizado segundo uma categorização realizada previamente a partir das habilidades elencadas que desenvolvem as noções de equação do 1º grau. Destacamos também as atividades que não foram classificadas segundo a TCC devido à ausência de contextualização. Encerramos as análises destacando os recursos utilizados nos livros para cada categoria envolvendo as atividades e os problemas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo deste capítulo apresentamos alguns aportes teóricos que embasam a presente pesquisa. Iniciamos ressaltando um pouco do aspecto histórico das equações, com destaque para algumas civilizações antigas e suas principais contribuições para o desenvolvimento desse conhecimento matemático. Seguimos discutindo um pouco mais sobre a definição e características das equações polinomiais, em especial, as equações polinomiais do primeiro grau; destacamos também alguns elementos, formas de resolução, de reconhecer e de tratar as equações; ressaltamos o ensino da álgebra nos anos iniciais, enfatizando dentre outros elementos o pensamento algébrico.

2.1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU

2.1.1 Equações polinomiais: um pouco de história

Assim como outros conteúdos matemáticos surgiram para resolver as necessidades cotidianas das antigas civilizações, as equações também desempenham um papel bastante significativo dentro desse contexto. Segundo Silva (2017) a aplicabilidade das equações permeia várias áreas de conhecimento científico, bem como o dia a dia das mais variadas sociedades. No cotidiano estão presentes muitas situações que abordam as noções de equações e permitem fazer uso dela para melhor interpretar e solucionar problemas diversos.

O autor segue definindo a palavra equação que tem origem latina e é derivada da noção de igual ou igualdade. Comumente a noção de equação está relacionada direta ou indiretamente a igualdade ou equilíbrio e pode ser utilizada para resolver problemas dos mais variados tipos. Para Garbi (2010, p. 1) “qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado direta ou indiretamente, por meio de equações”.

Muitos problemas cotidianos que a matemática buscou solucionar eram de ordem geométrica e aritmética e auxiliavam no progresso das sociedades. Segundo Eves (2004) a matemática foi se desenvolvendo e por meio da evolução da aritmética e da geometria foi surgindo a álgebra e junto dela as equações. Um dos principais registros, no que se refere a álgebra, nas civilizações antigas, em sua grande maioria, são de resolução de equações aplicadas a situações práticas envolvendo aritmética e geometria.

A exemplo de antigas civilizações e seu papel no desenvolvimento das equações podemos citar os babilônicos que expressavam suas habilidades com a álgebra por meio da

resolução de diversos tipos de equações. Em seus escritos, as equações frequentemente eram abordadas no contexto de situações geométricas. Segundo Eves (2004, p. 61-62): “Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)”. Pitombeira (2004) acrescenta dizendo que os babilônicos dominavam uma álgebra retórica bastante desenvolvida e apresentavam problemas significativos envolvendo as equações nos contextos aritméticos e geométricos.

Os egípcios, por sua vez, têm seus escritos expostos em dois famosos papiros: o Papiro de Rhind (1650 a, C.) e o Papiro de Moscou (1850 a. C.). Segundo Ribeiro e Cury (2015) e Eves (2004) as atividades matemáticas dos povos egípcios surgiram de necessidades práticas que envolviam: pão, cerveja, balanceamento de rações, armazenamento de alimentos e outras atividades. É, então, a partir desses problemas que notamos a presença das equações na cultura matemática desse povo. Ainda de acordo com o autor (p.73), boa parte desses problemas envolvia a resolução de equações lineares simples de uma incógnita, resolvidos na sua grande maioria pelo que mais tarde ficou conhecido como regra de “falsa posição”. Esse método de resolução, de modo geral, consiste na escolha de um número qualquer para substituir o valor de x (naquela época chamada de “*aha*”); por meio do valor escolhido se calculava o resultado da expressão à esquerda da igualdade e se comparava o resultado com a expressão à direita da igualdade, em seguida, se calculava o fator de correção para se obter o valor correto da incógnita x.

Na história da matemática grega podemos destacar alguns nomes de grande repercussão, principalmente na geometria; dentre eles podemos citar: Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides e Diofanto de Alexandria. Tales dedicava seu tempo a filosofia, matemática e astronomia, em um certo momento de sua vida, em uma visita ao Egito, ele mediu a sombra da pirâmide de Quéops e de um bastão que havia previamente posicionado na areia, calculando, dessa forma, a altura da pirâmide utilizando relações de triângulos semelhantes. Posteriormente, esse método ficou conhecido como o Teorema de Tales. Por meio desse teorema, Tales de Mileto demonstrou a existência de uma proporcionalidade entre segmentos de reta formados por retas paralelas cortadas por retas transversais, as quais para encontrar os valores desconhecidos faz-se necessário a utilização do conhecimento sobre as equações do 1º grau.

Pitágoras, possivelmente foi um dos mais conhecidos e reconhecidos matemáticos gregos, principalmente pela demonstração de seu mais famoso teorema, o Teorema de Pitágoras, que afirma que $a^2 + b^2 = c^2$. Vale ressaltar que, graças aos pitagóricos, esta foi a primeira vez em que na Europa antiga se produziu uma equação do 2º grau (Garbi, 2010).

Com a publicação do livro *Os Elementos* de Euclides a matemática grega toma um novo brilho, com este livro Euclides sistematiza todo o conhecimento matemático que se tinha até então. Segundo o autor essa obra foi tão significativa que toda a matemática grega que se tinha antes foi descartada ou ficou esquecida (Eves, 2004). Silva (2017) afirma que foi por meio dessa obra se pode avançar bastante no trabalho com a álgebra e com as equações. A principal contribuição dos gregos antigos era na geometria, eles validaram métodos bastante usuais atualmente na resolução de equações de variados tipos, dentre as quais, podemos citar: se temos uma equação podemos somar ou subtrair um mesmo valor de ambos os membros sem perder o equilíbrio entre os membros.

Por fim, Diofanto de Alexandria foi considerado o maior algebrista grego, também se dedicou e fez contribuições significativas para a álgebra. Ele foi um matemático grego que viveu no século III d. C e, por meio de seus estudos, ele propôs representar um número desconhecido por uma letra, influenciado, assim, muitos matemáticos (Zardo, 2006).

O povo Hindu deu início ao desenvolvimento de uma série de algoritmos, dos quais originaram-se muitos dos que utilizamos hoje. Eves (2004) nos conta que esses algoritmos desenvolvidos pela Aritmética hindu foram adotados pelos árabes e, posteriormente, repassados à Europa Ocidental. Dentre os principais matemáticos desse povo podemos citar Brahmagupta, que segundo Ribeiro e Cury (2015) viveu na Índia central por volta do ano 628, e encontrou soluções gerais das equações quadráticas. Ele teria sido o primeiro a encontrar todas as possíveis soluções inteiras da equação linear diofantina $ax + by = c$, com a, b e c inteiros.

Outro matemático, bastante conhecido por desenvolver a fórmula de resolução de equações do 2º grau, é Bháskara que realizou significativas contribuições nos trabalhos com equações em seu trabalho *Lilavati*, que dentre os conteúdos abordados nessa obra estavam as equações lineares e quadráticas. Para Ribeiro e Cury (2015), a obra *Lilavati*, de Bháskara foi quem preencheu as lacunas deixadas pelos trabalhos anteriores, com destaque para as descobertas de Brahmagupta.

Os povos Árabes também realizaram contribuições significativas para a matemática, com escritos sobre números e álgebra elementar. Dentre os nomes de destaque podemos citar Al-Khwarizmi, segundo Ribeiro e Cury (2015, p. 33), nos trabalhos de al-Khwarizmi, as equações poderiam ser reduzidas a seis tipos, “uma preocupação constante em buscar formas canônicas que possibilitassem resolver qualquer tipo de equação quadrática.”. Assim, é possível perceber um cuidado com a resolução das equações não somente para se encontrar soluções particulares quaisquer, mas também, para encontrar todas as soluções possíveis para todas as formas em que a equação possa se apresentar. Eves (2004) destaca o trabalho de Omar

Khayyam (1100) que marcou a Álgebra da época com a resolução geométrica das equações cúbicas e por seu trabalho *Rubaiyat*, bastante difundido pela Europa.

Como vimos, vários povos, entre eles os babilônicos, os egípcios, os gregos, os hindus e os árabes contribuíram para o desenvolvimento da álgebra e dos métodos para resolução de equações, sejam do 1º grau ou de outros tipos. Cada povo foi motivado por problemas reais do seu tempo.

A partir destas reflexões sobre as contribuições de alguns povos para o desenvolvimento das equações ao longo da história, nos propomos a olhar para as equações, especificamente na perspectiva escolar, ou seja, como esse saber construído ao longo dos anos é sistematizado no ensino de matemática. Nesse sentido, apresentaremos no tópico seguinte, sua definição, os principais elementos e características (membros, termos, coeficientes, raízes, dentre outros), com destaque para as equações do 1º grau, o foco desta pesquisa.

2.1.2 Equações polinomiais: definição e principais características

As equações polinomiais são comumente utilizadas para encontrar valores desconhecidos em problemas matemáticos. Uma equação polinomial caracteriza-se por possuir um polinômio $P(x)$ igualado a zero, ou seja, $P(x) = 0$, em que $P(x)$ é um polinômio de grau maior ou igual a 1. Segundo Silva e Costa (2014), equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. Tomando como base os trabalhos de Neto (2016), este define equação polinomial em sua forma irredutível:

$$P(x) = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 = a_1x^1 + a_0 = 0$$

Na definição acima, temos as constantes reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que são denominados de coeficientes do polinômio, $a_n\, x^n$, $a_{n-1}\, x^{n-1}$,a_2x^2, a_1x, a_0 são chamados termos e n é o grau do polinômio p. Tomando como referência o caso geral, são exemplos de equações polinomiais:

- $3x + 1 = 0;$
- $4x^2 + 3x - 3 = 0;$
- $-3y^3 + 2y + 1 = 0.$

Toda equação é composta por dois membros (o primeiro membro antes da igualdade e o segundo membro depois da igualdade) e cada membro é composto por termos, que por sua vez

são formados por coeficientes, por exemplo, na equação $3x + 2 = x + 6$, temos, o primeiro membro $3x + 2$, os termos são representados por $3x$ e 2 e os coeficientes são 3 e 2. No segundo membro temos $x + 6$ e esse membro é composto pelos temos x e 6 e pelos coeficientes 1 e 6.

Ao lidarmos com as equações é preciso ter bem claro o significado de variável e incógnita. De acordo com Silva e Costa (2014), dada uma equação qualquer, variável é quando a letra pode representar diferentes valores, por exemplo, $x + y = 4$. Nesse caso, podemos observar que para cada valor de y teremos um valor diferente para x, ou seja, para $y = 1$, temos $x = 3$; para $y = 2$, temos $x = 2$, e assim por diante. Com isso, temos que, dependendo do conjunto universo, teremos infinitos pares de números cuja soma é igual a 4 (nesse caso temos x e y como variáveis).

Por sua vez, incógnita, considerando as equações polinomiais do primeiro grau, é quando a letra admite um único valor a ser encontrado; ainda segundo Moraes (2015), a palavra incógnita deriva do latim *incognitu* que significa *coisa desconhecida*. Por exemplo, dada a equação $3x + 15 = 0$, o x admite um valor único de -5. A incógnita pode ser representada por qualquer letra do alfabeto, no entanto, os símbolos mais utilizados como incógnitas na matemática são x, y, z, a, b, c. (Wykrota, 2012).

Nogueira (2008, p. 24), complementa as definições acima citadas nos dizendo que na equação "[...] as letras foram utilizadas inicialmente para designar valores desconhecidos, visando a resolver problemas de ordem prática dos povos antigos. Posteriormente, sua utilização teve a função de representar um conjunto de valores". Dessa forma, se destaca o conceito de incógnita e de variável. Na equação, as letras são chamadas de "incógnitas", pois há um valor (ou um conjunto de valores, considerando as equações com grau maior ou igual a 2) que torna a igualdade (principal elemento da equação) verdadeira. Já o significado "variável" se diferencia pela possibilidade de variar em função das relações estabelecidas, estão presentes nas funções, por exemplo.

Resumindo as ideias acima, Sperafico, Dorneles e Golbert (2015) afirmam que as equações polinomiais são caracterizadas pela existência de letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas incógnitas, um sinal de igualdade, uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro, e uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro. Os membros de uma equação são compostos por termos, que são informações numéricas ou incógnitas.

Menezes nos traz que:

> [...] Equação é a igualdade cujos dois membros somente se tornam iguais para certos valores, chamados raízes da equação, atribuídos a determinadas letras neles contidas,

> denominadas incógnitas. A equação é, portanto, uma igualdade condicionada (1970, p. 121).

Como mencionado por Menezes, outra característica que merece destaque são as raízes de uma equação. Estas são determinadas pelo valor que sua incógnita assume de modo que essa equação seja válida perante a igualdade. Como mostrado no exemplo acima, a raiz da equação: $3x + 15 = 0$ é -5, pois, se substituirmos -5 na equação a igualdade se torna verdadeira, ou seja, 3.(-5) + 15 = 0. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), toda equação polinomial de grau n possui n soluções complexas, essas soluções são conhecidas como raízes da equação, ou seja, uma equação do primeiro grau possui uma solução ou raiz, uma equação do segundo grau possui duas soluções ou raízes, e assim por diante.

Para determinar o grau de uma equação polinomial, basta encontrar a maior potência cujo coeficiente seja diferente de zero, por exemplo:

- $3x^4 + 4x^2 - 1 = 0$: a equação é do quarto grau.
- $5x^2 - 3 = 0$: a equação é do segundo grau.
- $6x - 1 = 0$: a equação é do primeiro grau.
- $7x^3 - x^2 + 4x + 3 = 0$: a equação é do terceiro grau.

Neste trabalho daremos destaque para as equações do primeiro grau, esta é descrita por um polinômio de grau 1, como apresentado nos exemplos acima. Podemos escrever uma equação do primeiro grau, de forma geral, da seguinte maneira: *uma equação do primeiro grau na variável x é uma expressão na forma:*

$$ax + b = 0$$

onde $a \neq 0$, $b \in R$ e x é um número real a ser encontrado.

Oliveira (2017) corrobora com a definição acima citada ao definir que a equação algébrica de primeiro grau, escrita na forma: $ax + b = 0$, onde x é a incógnita e a e b são números reais e $a \neq 0$, tem como solução $x = -b/a$. Essa solução é obtida fazendo operações válidas em ambos os membros da igualdade, afim de conservá-la. Ou seja,

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = 0 - b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow ax/a = -b/a \Leftrightarrow x = -b/a\ .$$

Podemos citar alguns exemplos de equações do primeiro grau:

- $4x + 2 = 0$
- $5a – 12 = -3$
- $3x + 2 = x + 1$

É relevante salientar que o coeficiente *a* deve ser diferente de zero caso contrário não seria possível garantir a caracterização de equação, pois, o valor da incógnita também seria zero, inviabilizando nossa procura pelo elemento desconhecido. Além disso, não seria possível garantir a sentença verdadeira, fundamento essencial de uma equação, por exemplo: $0x + 3 = 6$; pelo resultado teríamos $3 = 6$, o que não é verdadeiro, porque $3 \neq 6$, assim deixaria de ser uma equação do primeiro grau e não seria possível tornar a sentença verdadeira (Moraes, 2015).

Dentre as equações matemáticas existentes, a equação do primeiro grau caracteriza-se como a mais simples e rápida de solucionar. Existem diferentes maneiras de solucionar equações do primeiro grau e de reconhecer e de trata-las; assim como também existem algumas percepções sobre o sinal de igualdade. Essas e outras características serão apresentadas a seguir como uma forma de ampliarmos nossa percepção sobre esse tipo de equação e seus processos de aprendizagem.

2.1.3 Ensino e aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau

As equações, de acordo com Bernard e Cohen (1995), desempenham um papel importante na Matemática e em diversas outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na Biologia, na Física e na Química. Podemos destacar alguns conteúdos presentes nessas disciplinas que necessitam dos conhecimentos sobre a resolução de equações para solucioná-los, por exemplo, em Física encontramos no campo da cinemática (parte da física que estuda os movimentos), conteúdos como velocidade e aceleração média e a 2º lei de Newton; na Química temos a radioatividade, cálculo de Nox de axiácidos; e na Biologia, ciclo de vida das bactérias. De modo geral, por meio das equações é possível representar e descrever modelos matemáticos para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento, ou seja, as equações apresentam uma significativa versatilidade percorrendo diversos campos do conhecimento em diferentes disciplinas.

À medida que os estudantes vão avançando nos anos de escolaridade, vão percebendo que os recursos aritméticos não são mais suficientes para a resolução de atividades e problemas

propostos, assim, torna-se necessário ampliar os conhecimentos matemáticos afim de encontrar novos caminhos de resolução envolvendo os recursos algébricos. Dentre esses caminhos de resolução, as equações polinomiais tornam-se essenciais no ensino da álgebra, porque possibilitam a representação e solução de problemas mais complexos que não poderiam ser resolvidos apenas com recursos aritméticos.

Ponte (2004, p.149-150) afirma que

> a aprendizagem das equações, conceito central da Álgebra, representa para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática. Ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações com que contataram anteriormente, surgem agora outras expressões, envolvendo novos símbolos e novas regras de manipulação, que remetem para outro nível de abstração [...].

Um elemento que merece destaque no processo de ensino e de aprendizagem das equações é o sinal de igualdade. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), existem três significados que são atribuídos ao sinal de igualdade: a noção operacional, a ideia de equivalência e a noção relacional. Esses três significados estão presentes em atividades propostas desde os anos iniciais do ensino fundamental.

A noção operacional refere-se a contextos essencialmente aritméticos, já que as atividades que abordam as operações aritméticas possibilitam que as crianças percebam o sinal de igualdade como um símbolo operacional (por exemplo, 4 + 5 dá/é igual a 9), ou seja, é um símbolo que indica uma ação (operação) a ser realizada. Dessa forma, os estudantes aprendem que devem armar e efetuar as operações e depois “dar a resposta” (Behr; Erlwanger; Nichols, 1980). Os estudos desses autores indicam que esse tipo de atividade permite que as crianças percebam o sinal de igualdade como uma “instrução” para fazer algo do lado esquerdo e colocar a resposta no lado direito.

A compreensão do sinal de igualdade como noção de equivalência é fundamental no trabalho com conceitos algébricos, principalmente no que refere ao conceito de equação. Atividades que utilizam a balança de dois pratos, por exemplo, podem contribuir para essa compreensão, pois este instrumento permite que o estudante perceba que uma igualdade não se altera quando se adiciona ou subtrai um mesmo número em seus dois membros; os membros são representados pelos dois pratos da balança (Trivilin; Ribeiro, 2015).

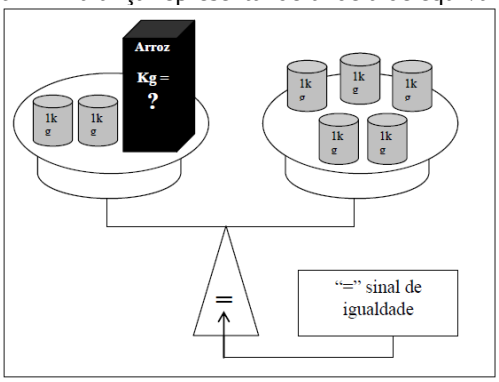
Com foco nos objetivos desta pesquisa, que destaca o significado no sinal de igualdade no sentido de equivalência (essencial no trabalho com as equações), abriremos espaço, nesse momento, para ressaltar o papel da balança de dois pratos como um dos instrumentos mais

significativos para a introdução no trabalho com as equações, quando o objetivo é desenvolver a ideia de equivalência.

De acordo com Oliveira e Corcho (2010), uma forma de se trabalhar com as equações do primeiro grau e resolvê-las é por meio do uso da balança de dois pratos, essa metáfora extramatemática é utilizada com bastante frequência nos livros didáticos tanto dos anos iniciais como dos anos finais do ensino fundamental para introduzir a noção de equivalência, conceito essencial para a aprendizagem das equações. A partir desse instrumento podemos, por exemplo, colocar dois objetos de mesma massa em cada prato da balança, e estes estarão em equilíbrio, dessa forma, podemos adicionar ou retirar a mesma quantidade de ambos os pratos, que mesmo assim eles permanecerão equilibrados.

Gomes e Noronha (2022), afirmam que por meio da metáfora da balança é possível "visualizar", de modo mais claro, que "a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos", conforme orientado pela BNCC (Brasil, 2018, p. 287). Essa é uma das principais propriedades quando estamos trabalhando com equações. Na figura abaixo está representada uma balança, de modo que, partindo da ideia de equivalência podemos descobrir o valor da massa do arroz.

Figura 1 – Balança representando a ideia de equivalência.



Fonte: Lessa (1996).

Outra característica das balanças de dois pratos é que ela permite aos estudantes perceber que mesmo a equação possuindo termos distintos, no primeiro e no segundo membro, é possível estabelecer uma equivalência (que na equação identificamos pelo sinal de igualdade) entre eles; esses termos são representados pelos pesos ou massas de objetos que estão sobre a balança e quando esses pesos[2] ou objetos são correspondentes em ambos os lados os pratos da

[2] A balança é um instrumento para medir a massa de objetos. Há vários modelos, o mais antigo e comumente usando como recurso para ensinar equações é a chamada "balança de dois pratos", nela podem ser utilizados objetos geralmente fabricados de ferro, popularmente chamados "pesos", com massas em quilogramas ou gramas

balança ficam em equilíbrio. Vale salientar que, a balança de dois pratos mesmo não sendo mais tão usualmente utilizada nos dias atuais é bastante relevante para a compreensão de algumas propriedades que são essenciais para o trabalho com as equações e por isso representa um importante instrumento nas aulas que pretendem introduzir este conceito.

De acordo com Nunes, Carraher e Schliemann (2011), quando introduzida, a simbolização algébrica no ensino da matemática, é perceptível uma ruptura no progresso de alguns estudantes que, até então, se mostravam capazes de desenvolver habilidades envolvendo operações aritméticas. Pensando nisso, o uso de materiais concretos, como no exemplo, a balança de dois pratos, segundo Oliveira, Arruda e Camargo (2013), pode contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem de equações do 1º grau.

Dando continuidade aos significados atribuídos ao sinal de igualdade, a noção relacional, ainda segundo os autores Trivilin e Ribeiro (2015), envolve a compreensão de uma relação estática numa igualdade aritmética ou algébrica, isto é, esta noção é abordada em situações nas quais o sinal de igualdade é utilizado para representar uma igualdade de expressões, em uma relação funcional. Podemos citar como exemplo 3 + ___ = 15 – 2.

Para se resolver uma equação torna-se necessário encontrar valores para as incógnitas, de modo que os dois membros se tornem idênticos, e esses valores encontrados serão chamados de raízes ou soluções da equação. Bernard e Cohen (1995) nos apresenta quatro métodos de resolução de equações do 1º grau que podem ser constituídas também como uma sequência de ensino evolutiva; esses métodos são: gerar e avaliar, esconder, desfazer e equações equivalentes.

O método gerar e avaliar consiste em um processo de tentativa e erro, ou seja, são escolhidos inicialmente valores aleatórios que são aplicados às equações verificando ou não sua validade. O método de esconder é utilizado em equações mais simples, do tipo: 12 – x = 4, onde se esconde uma parte da equação (a parte desconhecida, chamada incógnita) e utiliza-se o método anterior para determinar a solução da equação dada. Ambos os métodos descritos acima podem ser observados em problemas resolvidos nos anos iniciais.

Os dois últimos métodos são mais abordados nos anos finais do ensino fundamental. O método de desfazer "baseia-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis" (Bernard; Cohen, 1995, p. 116), ou seja, as operações, geralmente do primeiro membro, são "desfeitas", por meio de operações inversas, com o propósito de isolar a incógnita e determinar seu valor.

---

que serão colocados em um dos pratos da balança e no outro prato será colocado um objeto que se deseja conhecer o valor da massa, e, por meio da manipulação desses "pesos" é possível determinar o valor da massa do objeto.

O último e mais complexo método de resolução pressupõe a conceitualização de equações equivalentes. Segundo França e Vieira (2019), este método permite transformar uma equação em outra mais simples, porém equivalente a inicial, podendo ainda ser realizado uma comparação entre a balança de dois pratos em equilíbrio. De modo geral, este método é semelhante ao anterior, embora a diferença exista pelo fato de a equação constituir uma equivalência, isto é, as operações devem ser desfeitas em ambos os membros da equação.

Existem diferentes perspectivas de reconhecer e de tratar uma equação, desse modo, Ribeiro (2007), fez uma análise da noção de equação presente na literatura nacional e internacional e nos apresenta seis significados para a equação: Intuitivo-Pragmático; Dedutivo-Geométrico; Estrutural-Generalista; Estrutural-Conjuntista; Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional.

Para o significado Intuitivo-Pragmático, o autor considera a equação como uma noção intuitiva, relacionada à ideia de igualdade entre duas quantidades, cuja utilidade está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, originários de situações do cotidiano. Já o significado Dedutivo-Geométrico, concebe a equação como noção ligada aos conceitos específicos da Geometria. Sua utilidade está relacionada às situações envolvendo cálculos e operações com aspectos geométricos.

No terceiro significado da equação, Estrutural Generalista, o autor enfatiza que a equação é concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre si, cuja utilização está relacionada à busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza. O quarto significado, Estrutural-Conjuntista, concebe a equação na visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. Dessa forma, a equação é vista como ferramenta para resolver problemas.

No Processual-Tecnicista a equação é concebida como a sua própria resolução, ou seja, como métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la. Diferentemente do que acontece na visão estrutural, nessa perspectiva, as equações não são observadas como um ente sobre o qual as operações e manipulações realizadas atendem a regras bem definidas. A origem deste significado foi desenvolvida, principalmente, a partir da análise de alguns livros didáticos, paradidáticos e artigos sobre pesquisas em educação matemática.

E por fim, no significado Axiomático-Postulacional, a equação envolve a noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias matemáticas e não matemáticas são construídas (Ribeiro, 2007). Este significado surgiu em resposta às discussões apresentadas por Chevallard em sua teoria da transposição didática, referente à

noção de equação ser ou não uma noção matemática e, por consequência, poder tomar lugar junto aos objetos do ensino.

Concepções como a ideia do sinal de igualdade enquanto sentido de equivalência, a utilização da representação balança de dois pratos, os métodos de resolução que nos mostram habilidades, propriedades e características que serão posteriormente, nos anos finais do ensino fundamental, retomadas de modo sistematizado proporcionando a consolidação do significado das equações, e por fim, as diferentes perspectivas de reconhecer uma equação que perpassa sua concepção mais intuitiva à formal com uso de métodos e técnicas serão elementos fundamentais nesta pesquisa. Na próxima seção, discutiremos sobre o papel da álgebra nos anos iniciais, ressaltando alguns documentos e autores que defendem esse ensino nesta etapa de escolaridade e quais as implicações e importância deste trabalho com as crianças.

2.1.4 O ensino da álgebra nos anos iniciais

As equações polinomiais do 1º grau estão previstas para serem trabalhadas de forma sistematizada no 7º ano do ensino fundamental, de acordo com a habilidade (EF07MA18) "resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade", proposta na BNCC (Brasil, 2018, p. 307), nos anos seguintes, 8º e 9º anos, os conhecimentos algébricos são aprofundados de forma sistemática. É importante ressaltar que, os estudantes já começam a ter contato com algumas habilidades referente à unidade temática desde os primeiros anos dos anos iniciais, dentre elas, podemos citar as equações do 1º grau.

As aprendizagens nos anos iniciais permitem que quando estes estudantes cheguem aos anos finais haja uma conceitualização formal mais consistente, uma vez que, o contato com determinadas habilidades desde os primeiros anos de escolaridade propõem otimizar a compreensão do estudante ao se defrontar com este conteúdo nos anos finais do ensino fundamental, tendo em vista, as peculiaridades características presentes na linguagem algébrica, como por exemplo, seu forte direcionamento para a abstração e a generalização.

Tais considerações podem ser ratificadas se observarmos as orientações curriculares da BNCC (Brasil, 2018) e do Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental (Pernambuco, 2019). Em documentos anteriores a BNCC, como por exemplo nos PCN (1998) para o ensino fundamental, a álgebra é implicitamente apresentada como eixo temático nos anos finais do ensino fundamental; nos anos iniciais, esse campo também está presente, mas, assim como nos anos finais, se encontra integrado ao eixo números e operações.

As discussões sobre o ensino álgebra ser iniciado desde os primeiros anos do ensino fundamental vem sendo desenvolvidas há alguns anos, o próprio PCN (1998) já destacava a importância do trabalho com álgebra nos anos iniciais, embora não deixasse claro como esse campo do conhecimento deveria ser desenvolvido. Em contrapartida, a BNCC, homologada em dezembro de 2018, trouxe a unidade temática 'álgebra' para todos os anos dos anos iniciais do ensino fundamental de forma mais sistematizada, por meio de objetos de conhecimento e habilidades específicas a serem desenvolvidas durante todo o percurso dessa etapa escolar.

Um dos propósitos do ensino deste campo do conhecimento no ensino fundamental é despertar e desenvolver um novo tipo de pensamento no educando, o pensamento algébrico. Existe um consenso entre os pesquisadores em Educação Matemática da relevância de que o estudante desenvolva esse tipo de pensamento, embora esse consenso não exista quando nos debruçamos ao conceito dessa forma de pensar (Almeida, 2016). Essa dificuldade, segundo Radford (2006), ocorre, possivelmente, pelo número expressivo de objetos de estudo, tais como, equações, funções, inequações, sistema de equações, padrões, dentre outros, além de processos algébricos, como inversão e simplificação. Tendo isso em vista, apresentamos a definição de Kaput (1999, 2008) sobre este pensamento na busca de uma melhor compreensão deste.

Kaput (1999, 2008) defende que o pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana que surge das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal, usada na argumentação. Por exemplo, um estudante visualiza ou responde uma equação como um objeto algébrico quando ele está pensado algebricamente, quando consegue compreender uma equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membros e para resolvê-la deve encontrar o valor de "x" que torne verdadeira a igualdade. Ou seja, para kaput, assim como Lins (1992), o pensamento algébrico se desenvolve quando se compreende ou constrói significado para um determinado conceito, no caso do exemplo, a equação.

Neste estudo temos como ênfase que o objetivo do ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, com foco no desenvolvimento desse pensamento, é trabalhar a ideia de proporcionalidade, sequências, relação de igualdade, padrões, ou seja, estimular a criança ao pensamento e raciocínio fazendo com que ela perceba/pense qual critério ela está utilizando para evidenciar as grandezas, e qual foi o percurso investigativo que ela fez para chegar nas conclusões prévias (Tolfo, 2019). Ou seja, para os anos iniciais, o que se propõe para o ensino da álgebra é permitir que os estudantes desenvolvam habilidades que os possibilitem mais a

diante, quando se depararem com o objeto de conhecimento em sua concepção formal, a otimização do seu processo de aprendizagem.

Esta característica de colocar a álgebra desde os anos iniciais reforça a ideia de currículo espiralado em que se pauta a BNCC (Brasil, 2018) e os demais documentos que orientam o ensino da Educação Básica no Brasil, tais como, os PCN (1998) e, no caso do estado de Pernambuco, o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019). Esse modelo de currículo foi desenvolvido pelo psicólogo americano Jerome Bruner, a principal característica desse modelo curricular é que cada conteúdo deve ser estruturado sobre o anterior, ampliando, diferenciando e oferecendo outros níveis de profundidade (Bruner, 1975).

Quando queremos nos referir a abordagem da álgebra no ensino da matemática nos anos iniciais podemos usar o termo *Early álgebra* (Carraher; Schliemann, 2007). Bitencourt (2018) nos conta que esse termo surgiu em 2006 nos estados Unidos (mesmo que pesquisas envolvendo esse tema tenham iniciado desde a década de 90) quando 50 especialistas foram convidados a pensar sobre ciência e tecnologia, como uma forma do país alcançar êxito no século XXI.

Blanton et al. (2007) explica que *Early álgebra* não se trata de um novo conteúdo, ou seja, não se pode perceber este termo como um conjunto de atividades que são propostas para os estudantes depois que estes dominam as habilidades aritméticas. Muito menos seria uma pré-álgebra cujo propósito é desenvolver habilidades de manipulação simbólica e procedimentos algébricos. Ainda segundo os autores,

> [...] Early Algebra é uma forma de pensar que traz significado, profundidade e coerência à compreensão matemática das crianças, por mergulhar mais profundamente em conceitos que já estão a ser ensinados, para que haja oportunidade de generalizar relações e propriedades em matemática (Blanton et al., 2007, p. 7).

Partindo do exposto, a álgebra nos anos iniciais propõe dar oportunidade as crianças de adquirir uma linguagem simbólica e algébrica desde cedo, e aprender a pensar algebricamente para que possam expressar as suas ideias, possibilitando, assim, desenvolver formas de pensar que sejam subjacentes a estrutura matemática, em particular a de generalização. Obviamente que nessa etapa escolar, como já citamos anteriormente, não estamos falando da álgebra por meio do uso de letras, equações, funções, inequações, que são vistos apenas nos anos finais do ensino fundamental, estamos falando de regularidades, generalizações, padrões, propriedades da igualdade, ou seja, elementos que, mais à frente, nos auxiliarão a desenvolver conceitos algébricos em sua perspectiva formal.

Bastos (2019) nos chama a atenção para pesquisas que apontam para crianças conseguem resolver problemas com ênfase na álgebra desde muito jovens. Schliemann e

Carraher (2016) corroboram com este pensamento quando afirmam que crianças dos anos iniciais do ensino fundamental conseguem compreender e usar regras e princípios, e realizar representações algébricas. Ainda segundo os autores (p. 65), “desde os oito anos, as crianças podem ter acesso a ideias e representações algébricas, produzir, interpretar e inter-relacionar vários tipos de representações que, em geral, somente são introduzidas ao fim da escola primária.”

No que refere ao ensino das equações polinomiais do primeiro grau, nos anos iniciais e no 6º ano do ensino fundamental, o objetivo não é que os estudantes aprendam a resolvê-las por meio de técnicas, regras e letras, mas sim, desenvolver o conceito de igualdade e a compreensão das propriedades das operações e da relação de cada operação com a sua inversa. Ou seja, nessa etapa da educação básica o propósito é possibilitar ao estudante desenvolver as primeiras noções de equação do 1º grau, a partir de estratégias pessoais (Ponte; Branco; Matos, 2009).

As primeiras habilidades que permitem desenvolver estas noções podem ser identificadas de forma efetiva (discorreremos mais profundamente sobre essas habilidades na seção 3.1.7), de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), a partir do 3º ano dos anos iniciais. Temos uma habilidade na unidade temática de álgebra que permite ao estudante reconhecer a ideia de igualdade por meio de diferentes sentenças de adição e subtração que resultem na mesma soma ou diferença, por exemplo: 10 + 5 = 15, assim como também, 7 + 8 = 15, ou seja, 10 + 5 = 7 + 8.

Para o 4º e 5º anos, se propõe aos estudantes resolver equações simples, sem a utilização de letras, do tipo: ___ + 2 = 14; 12 = ___ + 3; 25 = ___ x 5 ou $\frac{18}{_}$ = 6. Na resolução destas equações, o objetivo é que os estudantes sejam capazes de atender ao significado das operações que nelas surgem, bem como à respectiva operação inversa. Entretanto, é natural que muitos estudantes não consigam resolver as equações com esse tipo de raciocínio, podendo, num primeiro momento, utilizar estratégias mais informais como a contagem ou a tentativa e erro (Ponte; Branco; Matos, 2009).

No 6º ano podem surgir as letras para representar os elementos desconhecidos, ou seja, as incógnitas. É relevante salientar que, neste momento, ainda não se recomenda que o uso da linguagem algébrica seja introduzido (a partir de suas propriedades e relações), mas que se continue trabalhando de forma intuitiva a noção de equações. O estudante pode utilizar como meios de resolução o método gerar e avaliar ou o método esconder, podendo também fazer uso da balança de dois pratos.

Neste ano escolar, segundo a BNCC (Brasil, 2018), os conceitos abordados permeiam as relações de igualdade existente entre dois termos (envolvendo também elementos desconhecidos na resolução de problemas), ou seja, ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os dois membros por um mesmo número a igualdade não se altera; e, os problemas de partilha. Discorreremos mais à frente sobre cada uma dessas habilidades para todos os anos escolares contemplados nessa pesquisa.

A partir do 7º ano, o conceito de equação é apresentado de forma mais elaborada, permitindo aos estudantes utilizar propriedades e relações matemáticas próprias da linguagem algébrica, podemos citar equações do tipo: $x + 5 = 9$, $2x + 4 = -3$, ou $-\frac{3}{2}x + 0{,}5 = \frac{x+1}{4}$. Deve-se atentar para o fato de que os estudantes precisam compreender que uma equação envolve uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos. Será necessário alertá-los para o fato de que nem todas as expressões que envolvem o sinal de "=" são equações, por exemplo, $5 + 2 = 7$ não é uma equação porque nela não há qualquer valor desconhecido (Ponte; Branco; Matos, 2009). Os seja, o 3º, 4º, 5º e 6º anos têm o papel de desenvolver habilidades de modo que no 7º ano os estudantes formalizem tais conceitos, sabendo solucionar equações como as acima propostas, fazendo uso das propriedades e relações que foram vistos nos anos anteriores.

Partindo das reflexões apresentadas acima, tais como, aspectos relacionados às contribuições de vários povos para o desenvolvimento das equações ao longo da história, e nosso interesse específico em a olhar para as equações na perspectiva escolar, ou seja, como esse saber construído ao longo dos anos é sistematizado no ensino de matemática. Também pelo fato de, dentre as equações, às polinomiais do 1º grau possibilitarem diferentes procedimentos e métodos para encontrar o valor desconhecido, incluindo nesse bojo a reflexão sobre o sinal de igualdade como noção de equivalência e a presença da balança de dois pratos como um recurso que mobiliza essa noção.

Dentre os métodos de resolução, como já sinalizado, citamos os apresentados por Bernard e Cohen (1995): gerar e avaliar, esconder, desfazer e equações equivalentes. Por outro lado, também já pontuamos que existem diferentes perspectivas de reconhecer e de tratar uma equação, Ribeiro (2007), por exemplo, apresenta seis significados para a equação: Intuitivo-Pragmático; Dedutivo-Geométrico; Estrutural-Generalista; Estrutural-Conjuntista; Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional. Outro aspecto que discutimos, é o fato da álgebra a ser abordada nos anos iniciais supor a possibilidade da compreensão da linguagem simbólica e algébrica desde cedo, mas principalmente o desenvolvimento do pensamento algébrico. Do

ponto de vista do ensino previsto nas orientações curriculares vigentes no Brasil e no estado de Pernambuco, as primeiras habilidades relacionadas a noções que podem favorecer a compreensão das equações polinomiais do 1º grau, devem ser desenvolvidas a partir do 3º ano dos anos iniciais.

Consideramos que a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gerard Vergnaud, é um aporte teórico necessário e adequado para responder nossa problemática de pesquisa, pois, a noção de campo conceitual, compreendido como um "conjunto de problemas e situações, que requer o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas diferentes, mas intimamente relacionados" (Vergnaud, 1996, p. 41), nos ajudará a compreender como as habilidades sugeridas pelos documentos oficiais relacionadas a noções que podem favorecer a compreensão das equações polinomiais do 1º grau, sugeridas pelos documentos oficiais, são abordadas em livros didáticos de matemática, pois segundo Vergnaud (1996, p. 117), "muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las".

O próximo capítulo é dedicado exclusivamente a Teoria dos Campos Conceituais que representa a teoria que fundamenta e embasa nossa pesquisa. Nesse sentido, torna-se necessário conhecermos um pouco mais sobre ela para compreendermos como esta teoria nos auxiliará no processo de análise dos problemas propostos nos livros didáticos. Ao longo do capítulo discorremos um pouco sobre essa teoria, como ocorre o processo de aprendizagem de acordo ela e quais os principais elementos presentes, com destaque para os problemas de estrutura aditiva e os problemas de estrutura multiplicativa e suas devidas especificações.

3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Para este capítulo, exploramos mais profundamente a teoria que norteia a análise desta pesquisa, que é a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud. Buscamos apresentar qual é a perspectiva do processo de ensino e aprendizagem segundo essa teoria que foi desenvolvida tanto a partir de pesquisas realizadas no âmbito da Educação Matemática como também em conjunto com a Psicologia cognitiva. Também apresentamos uma seção que trata das situações pertencentes ao campo das estruturas aditivas, ao campo das estruturas multiplicativas e aos problemas mistos (com destaque para os seus principais elementos e características).

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) surgiu no início da década de 1980 na França, a partir dos estudos desenvolvidos pelo psicólogo Gérard Vergnaud. Esta teoria foi desenvolvida a partir de pesquisas realizadas na área de Educação Matemática, em conjunto com a Psicologia Cognitiva, na busca por compreender como as crianças desenvolvem conceitos matemáticos ao se deparar com as tarefas matemáticas, com o propósito de explicar, principalmente o processo de conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas (Rodrigues; Rezende, 2019).

Maia (2000, p. 42) afirma que "a teoria dos campos conceituais é uma teoria desenvolvimentalista multidimensional da conceitualização, que procura identificar as filiações e as rupturas entre as diversas formas de conhecimento em via de aquisição pelo indivíduo". A conceitualização à qual o autor de refere depende das situações e das representações que são mobilizadas pelos sujeitos.

Vergnaud (1993, p. 1) define essa teoria dizendo que:

> Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimentos", tanto as habilidades quanto as informações expressas.

Sendo assim, para este autor, o conhecimento é organizado em Campos Conceituais que são desenvolvidos nos sujeitos, em um determinado período de tempo, por meio do pensamento,

experiências, maturação e aprendizagem. Deve-se destacar ainda que, a TCC possibilita estudar as ações e as condições que os estudantes podem compreender e assimilar um determinado conceito, durante as situações de aprendizagem (Camili, 2021). Nessa teoria, a aprendizagem é construída a partir de um número significativo de situações e problemas, que os estudantes possuem certa familiaridade.

As equações polinomiais do 1º grau supõem um vasto leque de aspectos que poderiam, na ótica da TCC, compor um campo conceitual. Dadas as limitações de uma pesquisa de mestrado, não é possível caracterizá-las como um campo conceitual, porém, nesse estudo contribuímos para delimitação do mesmo, olhando para situações do campo conceitual das estruturas aditivas, do campo das estruturas multiplicativas e problemas mistos que são propostas em livros didáticos dos anos iniciais e finais do ensino fundamental (3º, 4º, 5º e 6º anos, especificamente) em torno de aspectos conceituais que contribuem para a compreensão desse objeto matemático de maneira mais formal.

O campo conceitual das estruturas aditivas, é compreendido como "o conjunto das situações, cujo tratamento implica em uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações. Ao mesmo tempo, pode ser entendido, também, como o conjunto dos conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (Vergnaud, 1990, p. 9). O campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve situações que necessitam da multiplicação, da divisão ou da combinação entre elas. Vergnaud (1982) reconhece que, embora as estruturas multiplicativas não independam das estruturas aditivas, elas compõem um campo específico que é o da proporcionalidade. Já o campo das estruturas aditivas engloba situações de composição e decomposição.

No caso desta pesquisa, as situações que buscaremos analisar nos livros didáticos estão voltadas para as equações polinomiais do primeiro grau, mais especificamente para as situações que mobilizem conhecimentos que serão essenciais no 7º ano do ensino fundamental e o conceito de equação é trabalhado em seu aspecto formal. Classificaremos os problemas encontrados em de estrutura aditiva, de estrutura multiplicativa ou problemas mistos, e suas respectivas especificações.

O campo conceitual é compreendido como um "conjunto de problemas e situações, que requer o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas diferentes, mas intimamente relacionados" (Vergnaud, 1996, p. 41). O desenvolvimento da aprendizagem do estudante ocorre quando este é exposto a situações problemas, permitindo o estabelecimento de relações entre diversos conceitos e situações. Ainda segundo Vergnaud (1988), o estudante

ao ser confrontado com novas situações utiliza conhecimentos adquiridos e suas experiências passadas, em situações mais simples e familiares, e tentam adaptá-la às novas situações.

O conceito, por sua vez, é caracterizado a partir de uma variedade de situações e problemas, de modo que, por meio de experiências e maturação, essas situações e problemas façam sentido para o estudante. Ou seja, para se dominar um conceito, deve-se levar em consideração alguns fatores, como por exemplo: o fator maturacional, relacionado ao desenvolvimento biológico do sujeito; o fator experiência, que se refere à familiaridade do sujeito à situação; e o fator aprendizagem que está ligado à escola. Nesse sentido, a aprendizagem de um determinado conceito pode levar muito tempo, e nesse período, o sujeito passa por inúmeras situações, vivenciadas tanto no processo escolar quanto em seu cotidiano, as quais lhe permitirá o desenvolvimento de novos esquemas para lidar com essas situações (Magina et al., 2010). Partindo dessa concepção, podemos considerar que, segundo a TCC, no contexto das equações do 1º grau, as situações não problematizadas (que fazem uso unicamente das equações) dificilmente permitirão que os estudantes compreendam este conceito.

Dessa forma, o conceito é construído a partir do domínio de três aspectos: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas (S, I, R), que devem ser desenvolvidos simultaneamente.

> S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; tornando-o significativo. I é um conjunto de invariantes (objetivos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; e R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e procedimentos para lidar com elas (Vergnaud, 1990, p. 145).

As situações são representadas por tarefas que podem variar em sua complexidade, com o propósito de moldar os conhecimentos dos estudantes, de modo que, progressivamente tais conhecimentos possam ser completamente compreendidos. Uma situação não pode ser analisada com base em um único conceito, nem um conceito pode ser desenvolvido por meio de uma só situação; dessa forma, são as situações que dão sentido ao conceito, e é a partir da execução de tarefas que o indivíduo expõe seus conhecimentos implícitos e seu modo de resolução, seja este pertinente ou não.

Com base nas situações que encontraremos nos livros didáticos analisados (além de classificá-las como de estrutura aditiva, de estrutura multiplicativa ou mistos, como dito anteriormente), observaremos a progressão do nível de complexidade apresentadas pelas situações de cada categoria, e, a partir desses dados, poderemos tecer reflexões sobre o potencial dessas situações para favorecer aprendizagens futuras sobre o tema.

Segundo Vergnaud (1996, p. 117), “muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las”. Vergnaud (1993) descreve duas ideias principais sobre as situações:

> 1) a de variedade: existe uma grande variedade de situações num campo conceitual dado, e as várias situações são um meio de construir sistematicamente o conjunto de classes possíveis; 2) a de história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (Vergnaud, 1993, p. 12).

Situação para a TCC não se refere a situação didática, mas sim, o de tarefa; de modo que uma situação complexa seja analisada como uma combinação de tarefas, e essa complexidade está relacionada aos próprios conceitos matemáticos envolvidos numa determina situação. Existem dois tipos de situações: as que os estudantes já possuem esquemas necessários para resolvê-la; e as situações em que eles não possuem ou precisam testar vários esquemas para encontrar. Dessa forma, esquema é a organização realizada pelo indivíduo com o propósito de resolver uma dada situação.

Vergnaud (2014) define esquema como a organização invariante do comportamento para uma classe de situações voltadas à aprendizagem específica de um conceito. Nessa perspectiva, esquema é a organização feita pelo estudante, diante das situações propostas, para conduzir o processo de resolução da situação dada. Muniz (2009, p. 47) complementa dizendo que “o esquema não organiza somente as condutas, mas também as atividades do pensamento subjacentes ao comportamento”.

Os esquemas são recursos adaptáveis, eles assimilam novas situações e acomodando-se a elas. Assim, a definição de esquemas deve conter regras e procedimentos já prontos que tenham sido moldados por situações já dominadas; mas estes componentes também devem oferecer a possibilidade para se adaptar a novas situações (Vergnaud, 2009, p. 88).

Referente aos invariantes operatórios, temos que, o termo “invariante” nos traz a ideia de estabilidade relativa a um agrupamento de transformações ou de variações, enquanto o adjetivo “operatório” complementa a ideia de que esta estabilidade se torna necessária para a ação do sujeito, sendo o determinante da presença. Os invariantes operatórios dão significado ao conceito, ou seja, são conhecimentos presentes nos esquemas de ação do indivíduo, possibilitando a operacionalidade do conceito em uma dada situação. Os invariantes podem se manifestar de dois tipos diferentes: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação.

Os conceitos-em-ação possuem foco na ação do estudante, ou seja, ele mobiliza conceitos matemáticos implícitos numa determinada situação; já os teoremas-em-ação mobilizam proposições tidas como verdadeira ou falsa numa ação (Nogueira; Ferreira, 2016). Estes ainda podem ser definidos como "relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver determinado problema" (Gitirana et al., 2014, p. 22).

Por fim, nas representações simbólicas, destaca-se a relevância de não minimizar o papel da linguagem e dos símbolos. Consequentemente, convém, classificá-las e analisá-las dentro de uma variedade de símbolos e significados linguísticos que podem ser usados quando falamos e pensamos em determinado campo. Ainda segundo Vergnaud (1996, p. 184), "as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas".

O termo "representação" na Teoria vergnaudiana, de acordo com Camili (2021, p. 45), é considerado como:

> Um sistema de categorias de pensamentos e conhecimentos e também como um sistema de relações entre significantes e significados. As representações simbólicas (significantes) correspondem a modos de representações verbais, escritos, gráficos, pictóricos e esquemas e podem ser usados para representar os invariantes operatórios (significados) para fins de comunicação, representação, inferências e conclusões.

Sendo assim, as representações simbólicas, de acordo com Vergnaud (1990), configuram-se como um conjunto de significantes, ou seja, são todos os signos, ferramentas e materiais que representam o conceito, sua propriedade, os procedimentos de tratamento e as situações em que o conceito se aplica. Assim sendo, indicam e representam os invariantes operatórios do conceito.

Tendo em vista nosso interesse pelo ensino, após identificarmos, classificarmos e analisarmos, sob a ótica da TCC, as situações que exploram noções iniciais de equações do 1º grau presentes nos livros didáticos, identificaremos recursos, ou seja, instrumentos, objetos, imagens utilizadas nessas situações e atividades. Ou seja, quais recursos os livros didáticos mais utilizam na construção de suas atividades e problemas que auxiliam o estudante em sua resolução. No entanto, para realizarmos essa classificação das situações propostas nos livros didáticos analisados torna-se necessário conhecermos um pouco mais sobre os problemas de estrutura aditiva, os problemas de estrutura multiplicativa e os problemas mistos, e é isso que faremos na próxima seção.

3.2 PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA, PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA E PROBLEMAS MISTOS

Como mencionado no início da sessão anterior, a TCC busca compreender como crianças desenvolvem conceitos matemáticos diante de tarefas, propondo explicar o processo de conceitualização das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas. Mas que tipo de problemas compõem essas estruturas? Quais suas principais características? O que é possível observar a partir de cada um desses problemas? Nesta sessão, buscaremos responder a esses questionamentos e ampliar nossa compreensão também para os problemas mistos.

Vergnaud (1990) destaca dois campos conceituais como especiais por alicerçarem todos os demais campos matemáticos, são eles: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. De modo geral, o primeiro, se refere a um conjunto de situações que requer para sua resolução operações de adição, subtração ou a combinação das duas; o segundo, é caracterizado como um conjunto de situações que requer para sua resolução operações de multiplicação, divisão ou a combinação de ambas. Discorremos um pouco sobre cada um desses campos conceituais.

O campo conceitual das estruturas aditivas é definido tanto como um conjunto de situações cuja resolução necessita de uma ou mais adições ou subtrações, ou ainda, a combinação entre essas duas operações, como também um conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas (Vergnaud, 1996).

Para ter domínio das estruturas aditivas os estudantes deverão ser capazes de solucionar vários tipos de situações; nelas estão presentes diversos conceitos que compõem essas estruturas, tais como: medidas, adição, subtração, transformação de tempo, relações de comparação e composição de quantidades. Magina et al. (2010), ao realizar uma releitura do campo conceitual das estruturas aditivas, classifica os problemas pertencentes a este campo conceitual como: problemas de composição, de transformação e de comparação. A seguir apresentaremos a definição e exemplos de cada tipo ainda de acordo com os autores acima.

Os problemas de composição envolvem relações de parte e todo. Nesse tipo de problema é possível apresentar os valores de duas ou mais partes e perguntar sobre o valor do todo, ou ainda, informar o valor do todo e de um ou mais partes e perguntar sobre o valor da parte restante, como exemplo podemos citar: *"Num tanque haviam 6 peixes vermelhos e 7 peixes amarelos. Quantos peixes haviam no tanque?"*. Nesses problemas temos o valor das partes e queremos saber o valor do todo.

Nos problemas de transformação a ideia temporal está sempre envolvida, ou seja, ela estabelece uma relação entre uma quantidade inicial e uma quantidade final, por exemplo: *"Maria tinha 9 figurinhas e ganhou mais 4 do seu irmão. Quantas figurinhas Maria tem agora?",* nesse caso temos a quantidade inicial (10 figurinhas) e o valor da transformação (8 figurinhas) e se quer saber a quantidade final.

E por fim, os problemas de comparação, nos quais é possível comparar duas quantidades, que chamamos de referente e referido, sempre existindo uma relação entre elas, exemplo: *"Ana tem 8 anos e Carlos tem 2 anos a mais que ela, quantos anos têm Carlos?"*. Nessa questão, o referente é a idade de Amanda e o valor do referido é a idade de Ricardo, por meio da relação, que neste caso é + 4.

As relações aditivas são caracterizadas como relações ternárias, porque ligam três elementos entre si, por exemplo, *cinco* mais *sete* é igual a *doze*. Além disso, esses problemas são classificados de acordo com seu nível de complexidade, são eles: protótipos, 1ª extensão, 2ª extensão, 3ª extensão e 4ª extensão. Os *protótipos* são os problemas mais simples, ou seja, de menor complexidade. Com essa característica podemos citar os problemas de composição e transformação. Nos protótipos de composição, conhecemos duas partes e queremos saber o todo, conforme o exemplo citado no grupo dos problemas de composição mencionado mais acima. Nos protótipos de transformação, conhecemos o estado inicial e a transformação e queremos encontrar o estado final, um exemplo foi citado dentro do grupo de problemas de transformação, também exposto acima.

Os problemas de 1º extensão possuem um nível maior de complexidade se comparado aos protótipos e envolvem os problemas de composição e de transformação. Nos problemas de composição uma das partes é desconhecida, por exemplo: *Moema tem 13 doces, sendo balas e chicletes. Sete são balas, quantos são os chicletes?* Nesse caso, o todo e uma das partes são conhecidos e, a partir da subtração destes, descobre-se a parte desconhecida. Nos problemas de transformação de primeira extensão temos a transformação desconhecida, ou seja, sabe-se o estado inicial e final e se procura a transformação ocorrida, por exemplo: *Na prateleira da escola, havia 15 livros. Foram colocados alguns livros nessa prateleira e agora há 22 livros nela. Quantos livros foram colocados na prateleira?* (Etcheverria; Campos; Silva, 2015).

Ainda segundo os autores acima citados, dentre os problemas de 2ª e 3ª extensão, compreendem os conceitos de comparação. Dentro dos problemas de comparação de 2ª extensão temos o referente e a relação conhecidos e queremos descobrir o valor do referido, por exemplo: *Vitória tem 18 figurinhas e Roberta tem 6 figurinhas a menos que Vitória. Quantas figurinhas tem Roberta?* Nesses tipos de problemas, o referido tanto pode ter uma medida a

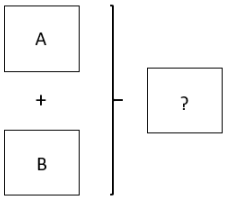
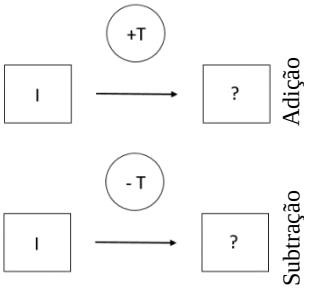
mais ou a menos que o referente, o importante nesse processo é que o estudante perceba a relação como uma comparação de medidas.

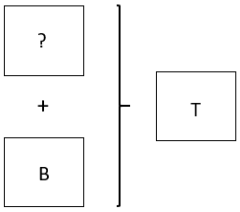
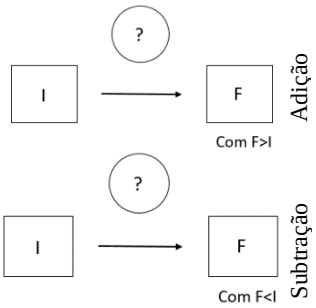
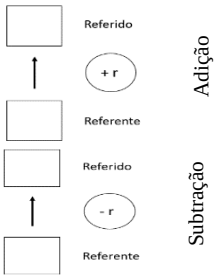
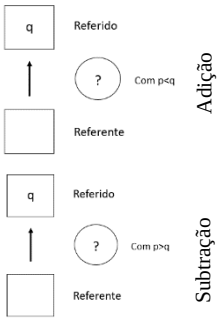
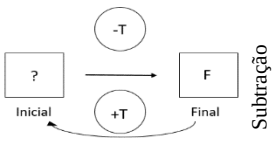
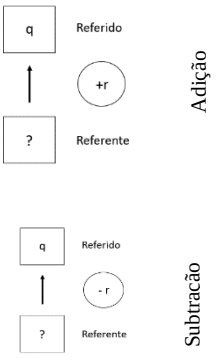
Em um problema de comparação de 3ª extensão, conhecemos as duas partes (referente e referido) e desconhecemos a relações entre elas, por exemplo: *Graziela e Juliana ganharam bombons de presente. Graziela ganhou 5 bombons e Juliana ganhou 11 bombons. Quem ganhou mais bombons? Quantos bombons a mais?* A primeira pergunta é mais simples, uma vez que, basta os estudantes compararem os valores dados; no entanto, para responder à segunda pergunta o estudante precisa entender que a resposta "se refere à diferença entre as quantidades e não as quantidades propriamente ditas" (Magina et al., 2008, p. 44).

Os problemas de 4ª extensão também abarcam dois tipos de problemas: transformação e comparação. Este representa o nível mais complexo dentre todos os outros. Nos problemas de transformação de 4ª extensão são conhecidos o estado final e a transformação, e se desconhece o estado inicial, por exemplo: *Michel tinha alguns bonés. Ganhou de aniversário 4 bonés, ficando com 11 bonés. Quantos bonés Michel tinha antes?* Já os problemas de comparação de 4ª extensão são conhecidos o referido e a relação, e se desconhece o referente, por exemplo: *Carla e Rita têm reais guardados em seus cofrinhos. Rita guardou 6 reais a menos que Carla. Sabendo que Rita guardou 14 reais, quantos reais Carla guardou?*

A seguir apresentamos um quadro resumo sobre os problemas de estrutura aditiva envolvendo os três raciocínios aditivos já apresentados. A partir dele é possível observarmos os modelos diagramais que correspondem a cada tipo de situação e ao nível de complexidade (protótipo, de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª extensões), tais diagramas serão utilizados em nossas análises para representar cada situações encontrada nos livros didáticos.

Quadro 1 - Tipos de situações do campo das estruturas aditivas.

TIPOS DE SITUAÇÃO-PROBLEMA			
	COMPOSIÇÃO	**TRANSFORMAÇÃO**	**COMPARAÇÃO**
Protótipo	 Todo desconhecido	 Estado Final Desconhecido	

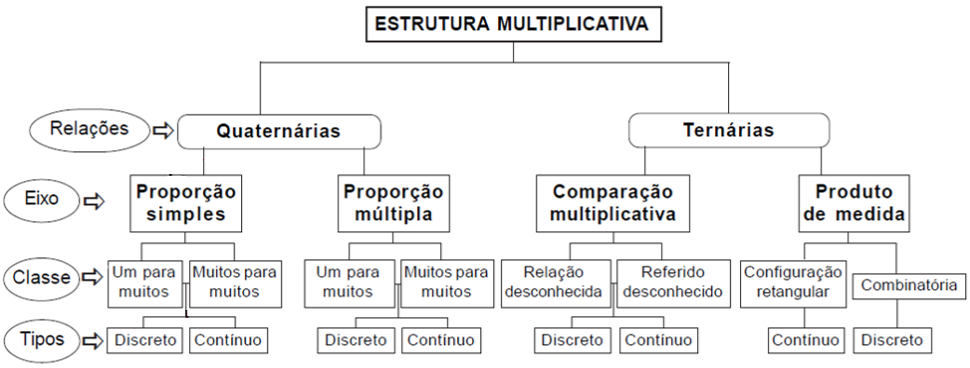
1ª extensão	 Parte desconhecido (Problema com inversão)	 Transformação desconhecida	
2ª extensão			 Referido desconhecido
3ª extensão			 Relação desconhecida
4ª extensão		 Estado inicial desconhecida (problema com inversão)	 Referente desconhecido (problema com inversão)

Fonte: Magina, et al. (2008).

Conhecemos um pouco sobre os problemas de estrutura aditiva e dando continuidade discutiremos um pouco sobre os problemas de estrutura multiplicativa. Segundo Magina,

Santos e Merlini (2014), o campo conceitual multiplicativo envolve diversos conceitos, dentre os quais, é possível citar: a multiplicação e a divisão, a razão e a proporção, as funções lineares e a n-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração e a porcentagem. Esses mesmos autores elaboraram, com base na teoria de Vergnaud, um esquema que sintetiza as ideias centrais desse campo, como mostra a figura abaixo.

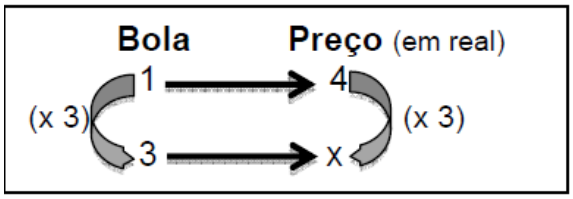
Figura 2 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.



Fonte: Magina; Merlini; Santos (2012).

Dentre as relações existentes, observando o esquema acima, discorremos brevemente sobre o que são relações ternárias e quaternárias. Dada a situação: Uma bola custa R$ 4,00. *Quanto pagarei na compre de três bolas?* Gitirana, *et al.* (2013) considera esse problema como um protótipo da multiplicação, e comumente sua resolução se apoia em uma relação ternária: a x b = c, nesse caso, 3 x 4 = 12. No entanto, o que está implícito nesse tipo de problema é uma relação quaternária entre duas variáveis de naturezas diferentes (bola e preço) que é possível representar da seguinte forma:

Figura 3 - Um caminho para resolver problemas multiplicativos.



Fonte: Magina; Merline e Santos (2012).

Ainda segundo os autores, o entendimento de problemas desse tipo permite que o estudante compreenda o porquê de nessa situação ao se multiplicar o número de bolas pelo preço de uma delas o resultado será dado em reais, não em bolas. Além disso, amplia suas

estratégias de resolução, uma vez que, podendo pensar no fator escalar multiplicativo (vezes 3) como estratégia.

No que se refere aos eixos, temos quatro principais: *proporção simples, proporção multiplica* (ambos com duas classes: um para muitos e muitos para muitos), *comparação multiplicativa* (com duas classes: relação desconhecida e referente ou referido desconhecido) e *produto de medida* (com duas classes: configuração retangular e combinatória).

O eixo da proporção simples, pertencente as relações quaternárias, envolve uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e duas de outro, ou uma simples proporção entre duas variáveis, por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, entre outras. Como já mencionado, esse eixo é dividido em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos. Na primeira correspondência a relação entre as quantidades se apresenta de forma explícita, por exemplo: *Uma bicicleta tem duas rodas. Quantas rodas tem cinco bicicletas?* Na segunda correspondência, pode envolver duas situações: na primeira se pode chegar a relação um para muitos; e na segunda situação não é possível se chegar a relação um para muitos, para este caso tomamos como exemplo a seguinte situação: *na compra de 5 pacotes de leite em pó, o supermercado Bem Amigo dá 2 caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons quantos caramelos ela ganhará?* (Magina; Merlini; Santos, 2014).

No segundo eixo temos as proporções múltiplas, que tratam de várias proporções, ou seja, ela envolve pelo menos duas proporções simples. Esse eixo se refere a situações que envolvem uma relação quaternária entre duas ou mais variáveis relacionadas duas a duas, por exemplo: pessoas, litros de água e dias. Assim como o eixo anterior, este também se divide em: correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos. Para a primeira correspondência podemos citar como exemplo o seguinte: *Uma pessoa costuma beber em média 3 litros de água em dois dias. Qual é o consumo semanal (7 dias) de uma família com 4 pessoas?* E para a segunda correspondência: *Um grupo de 50 escoteiros vai passar 15 dias no campo. Eles querem comprar a quantidade de açúcar suficiente para suprir a todos. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 3Kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?*

No terceiro eixo, comparação multiplicativa, envolvem situações entre duas variáveis de mesma natureza. Situações envolvendo a relação de dobro e de metade, por exemplo, fazem parte do rol de situações que configuram protótipos dessa classe de situação, por exemplo: *João tem a metade da quantia de Maria. Se João tem R$ 10,00, qual é a quantia de Maria?* No que se refere a primeira classe, relação desconhecida, temos como exemplo: *Comprei uma boneca*

por R$21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola? E para a segunda classe, referido desconhecido, temos: *A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?*

O quarto e último eixo, produto de medidas, é constituído por duas classes: configuração retangular, em que as situações envolvem varáveis que representam certas medidas dispostas na horizontal e na vertical, dispostas em forma retangular, exemplo: *Qual a área de um terreno de formato retangular, sabendo que tem 15 metros de frente e 35 metros de comprimento?*; e combinatória, onde as situações aqui remetem a noção do produto cartesiano entre dois conjuntos disjuntos, exemplo: *Numa festa há quatro meninas e três meninos. Cada menino quer dançar com cada uma das meninas, e cada menina também quer dançar com cada um dos meninos. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis de serem formados?*

Além dos problemas citados acima, podemos citar os mistos que, segundo Vergnaud (2009), são problemas aritméticos constituídos por várias relações e questões, que possibilitam ao estudante solucioná-los de diferentes maneiras. Esse tipo de problema necessita da realização de interpretações para que se identifiquem as relações existentes entre os elementos do campo aditivo e do campo multiplicativo, e desenvolvam os cálculos relacionais e numéricos para encontrar o procedimento que possibilite resolvê-los.

A partir do exposto acima, mediante as atividades e problemas encontrados nos livros didáticos selecionadas por meio das categorias elencadas, que permitem o desenvolvimento das noções de equação do 1º grau, classificaremos tais situações como pertencentes ao campo das estruturas aditivas e multiplicativas, e suas respectivas especificações. Por exemplo, nos problemas de estrutura aditiva, mais especificamente os problemas de composição de 1ª extensão se que se conhece o todo e uma das partes e se quer descobrir o valor da outra parte, claramente para a resolução desse tipo de problema torna-se necessário o conhecimento sobre relações inversas (habilidade necessária para a construção do conceito de equação do 1º grau e trabalhada no 4º ano dos anos iniciais). Outro exemplo, agora no contexto dos problemas de estrutura multiplicativa, temos no eixo proporção simples, na classe um para muitos, a possibilidade de trabalhar com o elemento desconhecido (mais uma habilidade necessária para o desenvolvimento da noção de equação do 1º grau, também trabalhada no 4º ano dos anos inicias) se utilizarmos a relação quaternária, como mostra a figura 3.

Agora que conhecemos mais a Teoria dos Campos Conceituais, como ocorre o processo de aprendizagem dos estudantes sob a ótica dessa teoria e explicitamos as principais características e elementos do campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas, seguiremos para o próximo capítulo no qual apresentaremos informações essenciais no

desenvolvimento desta pesquisa. De modo geral, distinguimos as principais diferenças entre problemas e atividades, definimos o que chamamos de noções iniciais que possibilitam desenvolver o conhecimento formal das equações do 1º grau e destacamos quais as habilidades foco desta pesquisa com essa finalidade.

4 PROBLEMAS, ATIVIDADES, NOÇÕES INICIAIS E HABILIDADES: DELIMITAÇÕES NECESSÁRIAS

Este capítulo será destinado a apresentar algumas informações e dados que serão fundamentais para o andamento desta pesquisa. Iniciamos descrevendo o que consideramos problemas e atividades, pois, estes serão fundamentais para o nosso processo de análise; seguimos especificando o que consideramos noções inicias que permitem otimizar o processo de aprendizagem formal das equações do 1º grau no 7º ano do ensino fundamental e, finalizamos, elencando as habilidades, a partir da BNCC, que acreditamos desenvolver as noções iniciais de equação do 1º grau.

4.1 EXERCÍCIOS, SITUAÇÕES CONTEXTUALIZADAS E PROBLEMAS: DELIMITAÇÕES NECESSÁRIAS

A Matemática, como já mencionado anteriormente, desenvolveu-se inicialmente para atender as necessidades de antigas civilizações em situações cotidianas, e posteriormente, por meio de diversos estudiosos, de várias nacionalidades, foi se tornando mais precisa e respondendo a problemas cada vez mais sofisticados, adotando uma linguagem de caráter universal. O ensino de Matemática não deve ser apenas um momento para que o estudante tenha acesso à essa linguagem específica, mas também uma possibilidade de explorar este objeto do conhecimento sob diversas perspectivas e contextos.

No ensino da Matemática os estudantes se depararam com problemas, situações contextualizadas e exercícios. Cada uma dessas modalidades possui características específicas. Outras expressões correlatas são atividades, questões, tarefas, no entanto, tendo em vista o referencial teórico que utilizamos nesse estudo, a TCC, na qual *atividade* e *tarefa* são compreendidas do ponto de vista cognitivo, não os assumimos aqui como sinônimos e correlatos desses outros. Por outro lado, nesse estudo analisamos o que livros didáticos propõem em relação às noções iniciais de equação do primeiro grau, por isso nessa seção, discorremos sobre em que cenário compreenderemos os exercícios, as situações contextualizadas e os problemas, tendo em vista que, estas definições serão fundamentais para sistematizar os dados obtidos nesse estudo.

De acordo com Vila e Callejo (2006, p. 154), exercícios são atividades cujo objetivo é "mecanizar/automatizar determinados procedimentos apresentados em aula ou para ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de

repetição ou de execução de algoritmos". Corroborando com esta ideia, Echeverría e Pozo (1998, p. 16), afirmam que na resolução de um exercício "dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução".

Nesse sentido, ao se propor um exercício para os estudantes, não se faz necessária a mobilização de novos conhecimentos ou técnicas para resolvê-la, ou seja, os exercícios são resolvidos a partir da aplicação de algoritmos já conhecidos pelos estudantes (Peduzzi, 1997). Vale ressaltar que, os exercícios remetem à obtenção de uma resposta única e ainda configuram-se como as propostas de atividades matemáticas mais encontradas nos livros didáticos. Convém salientar que o papel dos exercícios em sala de aula também é importante para o estudante, uma vez que "é através dele que o estudante desenvolve e consolida habilidades" (Peduzzi, 1997, p. 230).

O ensino da matemática não deve ser pautado apenas pela resolução de exercícios, outros tipos de atividades precisam estar presentes no processo de ensino desta disciplina, tendo em vista, sua contribuição para a aprendizagem dos estudantes. Cequalini Filho, Ribeiro e Luna (2020) nos dizem que, geralmente, o ensino de matemática em sala de aula, tem-se baseado na resolução de exercícios, proporcionando aos estudantes uma aprendizagem mecanizada, por meio de do uso de fórmulas prontas e técnicas momentâneas, deixando de lado a interpretação e a compreensão dos conceitos matemáticos de forma puramente abstratas.

Embora o uso de fórmulas prontas e técnicas também pode ser desencadeadas em situações que contenham "texto", nesse estudo faremos a distinção entre exercícios e situações contextualizadas, ou seja, consideraremos nas análises "exercícios" aquelas atividades nas quais o contexto é apenas numéricos, sem referência a uma situação real ou imaginária.

As situações contextualizadas (também denominada por alguns autores como problemas convencionais) são atividades matemáticas que apresentam um contexto e nele é direcionado ou informado a operação que deve ser efetuada. Para Vila e Callejo (2006, p. 154), as situações contextualizadas "são propostas estreitamente relacionadas com conhecimentos matemáticos e têm como finalidade fixar tais conhecimentos mediante uma conexão com a vida real ou com uma pseudo-aplicação da matemática". Esse tipo de atividade é comum durante e após a explicação de um conteúdo matemático, como forma de exemplificar sua aplicabilidade.

Nas palavras de Diniz (2001, p. 99) as situações contextualizadas podem ser resolvidas

> [...] pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica na sua resolução é identificar que operações são apropriadas para mostrar a solução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única.

No que se refere a atividade matemática relativa aos problemas, Dante (1998) define como uma proposta que exige uma forma matemática de se pensar e conhecimentos específicos para solucioná-lo. Ainda segundo o autor, um bom problema deve: ser desafiador para os estudantes; ser real; ser interessante; ser o elemento de um problema realmente desconhecido; não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas; e ter um nível adequado de dificuldade.

Segundo Cardozo, Meneghelli e Possamai (2018) um problema pode apresentar como objetivo proporcionar ao estudante a aprendizagem de um novo conteúdo, este "deve propiciar ao professor e estudantes progredirem na construção dos conceitos referentes ao conteúdo matemático que se deseja abordar, além de poder remeter também a conhecimentos já adquiridos" (p. 76). Alvarenga, Andrade e Santos complementam dizendo que

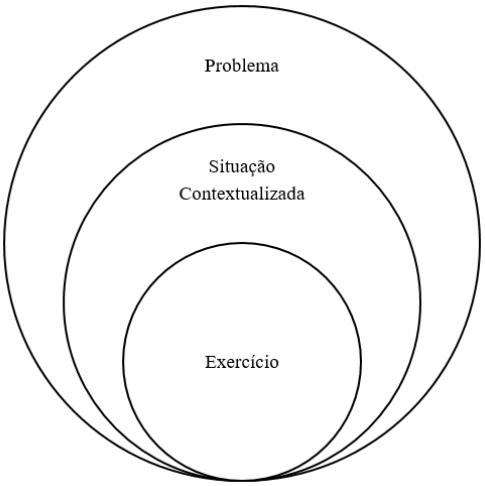
> Um problema pode ser definido como toda situação que tem por objetivo alcançar uma meta mediante estratégias, raciocínio lógico, modelagem e interpretação. Assim, um problema requer mais do que aplicação de fórmula ou de operações aprendidas nas aulas e passa a existir quando é indispensável interpretar, estruturar e contextualizar a situação (Alvarenga; Andrade; Santos, 2016, p. 41).

Para os anos iniciais do ensino fundamental, Ponte (2018), nos traz que no ensino da matemática é indispensável que se desenvolva na criança o raciocínio lógico e a criatividade, e a resolução de problemas vem como uma proposta de tomada de decisão, na qual a criança é centro do processo. É preciso desde cedo mostrar para as crianças que a matemática está em tudo e que podemos percebê-la sob as mais variadas formas, principalmente em situações do seu cotidiano.

Para os anos finais do ensino fundamental este autor segue afirmando que o ensino e aprendizagem da matemática nessa etapa deve estar respaldado em despertar nos estudantes o desenvolvimento de sua criatividade para resolver problemas e tomar as melhores decisões diante de um determinado tipo de situação. Vale ressaltar também que, é importante que essas situações-problema façam sentido para o estudante, que estejam contextualizadas dentro de sua realidade, só assim a matemática fará sentido para ele.

A seguir apresentaremos um diagrama que sistematiza a ideia de exercício, situação contextualizada e problema como tipos de atividades.

Diagrama 1 – Tipos de atividades



Fonte: A Autora (2023).

A partir do diagrama acima, percebemos uma relação entre os três tipos de atividades apresentadas. Os exercícios caracterizam-se por si só com o propósito de possibilitar ao estudante aplicar técnicas de cálculo as quais ele já conhece. As situações contextualizadas, por sua vez, permitem mais do que a aplicação de técnicas e algoritmos, mas sim, a partir do contexto ao qual é constituído, o estudante identifica o conceito que envolve a situação e a resolve. Os problemas vão bem mais além dos exercícios e das situações contextualizadas, neste tipo de atividade, o estudante precisará realizar a aplicação de algoritmos, técnicas de cálculo e relações matemáticas, assim como também, identificar o conceito matemático envolvido a partir do contexto; o que o diferencia é que esse contexto proporciona muito mais do que identificar a operação ou relação matemática que ele precisará utilizar, ou seja, por meio do problema o estudante pode construir um novo conhecimento, e para isso ele desenvolve hipóteses, seu pensamento crítico, fazer uso da modelagem, do raciocínio lógico.

Na TCC, o conceito de situação, conforme já mencionado, é utilizado por Vergnaud como sinônimo de tarefa, no qual toda situação complexa pode ser analisada como a combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das diferentes subtarefas envolvidas, mas o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global (Vergnaud,1990, p. 146; 1993, p. 9). Assim, uma subtarefa pode corresponder a um exercício, uma situação contextualizada ou um problema, ou ainda, cada uma dessas atividades permitindo ao estudante construir um determinado conceito.

Nesta pesquisa, iremos utilizar a terminologia “problema” para designar as situações contextualizadas, pois não se percebe com frequência problemas em livros didáticos que

desenvolvam o raciocínio lógico, a capacidade de adquirir novos conhecimentos e a modelagem característicos de um problema. Ou seja, para as atividades que apresentem uma contextualização que permitam o estudante identificar o conhecimento e a técnica a ser utilizada em sua resolução chamaremos de "problema".

Para as atividades caracterizadas como exercícios, empregaremos a terminologia "atividade", isto é, chamaremos de atividades os exercícios propostos pelos livros didáticos que não apresentam uma contextualização, no qual seu objetivo é apenas utilize o algoritmo o qual já possui domínio.

Buscaremos nessa pesquisa a partir das situações envolvendo ideias iniciais de equações do primeiro grau criar uma categorização por meio das habilidades previamente identificadas nos documentos oficiais (ver quadro 2, da seção 4.3). As situações identificadas serão classificadas, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, com a tipologia dos problemas de estrutura aditiva ou multiplicativa, mais adiante, na seção que trata dos procedimentos metodológicos, daremos mais detalhes de como essa classificação ocorrerá. As situações de estrutura aditiva são classificadas em três tipos distintos: composição, transformação e comparação; e, as de estrutura multiplicativa são classificadas em quatro eixos: proporção simples, proporção múltipla, comparação multiplicativa, produto de medida; além dos problemas mistos que envolvem ao menos uma vez as operações de adição (subtração) e multiplicação (divisão), conforme mostrado na seção 3.2.

As habilidades previamente selecionadas, como já mencionado tomarão como base conhecimentos que mobilizam a aprendizagem das noções inicias de equação do 1º grau, e é esse o foco da nossa próxima seção, relatar o que estamos considerando noções iniciais de equação do 1º grau.

4.2 NOÇÕES INICIAIS DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

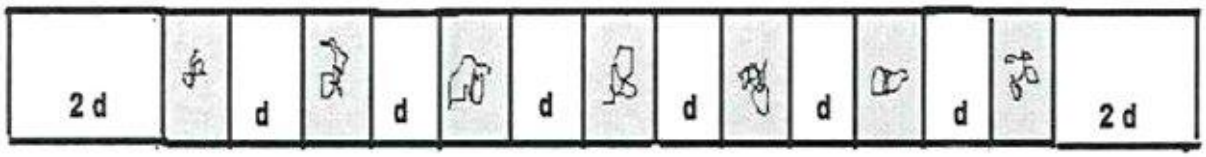
A partir de um estudo teórico e orientado pela Base Nacional Comum Curricular[3] (BNCC), elencamos as habilidades que consideramos desenvolver as noções iniciais de equação do 1º grau que serão exploradas, em sua concepção formal, no 7º ano do ensino fundamental. Conforme veremos ao longo desta e da próxima seção, apresentaremos os caminhos que nos conduziram a escolha de tais habilidades e porque elas se mostram promissoras na potencialização do trabalho com as equações do 1º grau.

[3] Documento de caráter normativo que define as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas com todos os estudantes da educação básica (Brasil, 2018).

Uma equação polinomial do primeiro grau, como já mencionado, é uma igualdade entre expressões algébricas com a presença de uma incógnita (frequentemente se usa a letra minúscula x); as equações, geralmente, são utilizadas para encontrar valores desconhecidos em problemas matemáticos. Podemos observar em diversas situações do nosso cotidiano momentos em que é possível utilizarmos as equações do primeiro grau. Os exemplos abaixo foram extraídos do site: https://www.todamateria.com.br/equacao-do-1-grau-exercicios e são indicados para serem trabalhados com estudantes a partir do 7º ano do ensino fundamental. A escolha desses problemas pode ser explicada pelo fato deste público-alvo precisar de habilidades matemáticas que são desenvolvidas ainda nos anos iniciais do ensino fundamental. Habilidades estas que queremos evidenciar, pois, serão por meio delas que os estudantes poderão desenvolver, nos anos finais do ensino fundamental, o conceito formal de equação do 1º grau e um dos objetivos deste trabalho é identificar tais habilidades.

Situação 1: Pedro tinha x reais das suas economias. Gastou um terço no parque de diversões com os amigos. No outro dia, gastou 10 reais com figurinhas para seu álbum de jogadores de futebol. Depois saiu para lanchar com seus colegas na escola gastando mais 4/5 do que ainda tinha e ficou ainda com um troco de 12 reais. Qual o valor de x em reais?

Situação 2: Analise a figura a seguir.



Um arquiteto pretende fixar em um painel de 40 m de comprimento horizontal sete gravuras com 4 m de comprimento horizontal cada. A distância entre duas gravuras consecutivas é **d**, enquanto que a distância da primeira e da última gravura até as respectivas laterais do painel é **2d**. Sendo assim, é correto afirmar que **d** é igual a:

Tanto na situação 1 como na situação 2, além de transcrever os problemas da linguagem natural para a linguagem algébrica o estudante precisará dominar algumas habilidades que estão presentes na BNCC (Brasil, 2018) e no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019), como por exemplo: reconhecer as relações inversas entre as operações de adição e de subtração, proposta para ser trabalhada no 4º ano; reconhecer, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo

número a cada um desses termos (esta habilidade é vista no 4º, 5º e 6º anos); determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais e, noção de equivalência, ambas do 5º ano.

Dessa forma, nos dois problemas, o domínio de algumas habilidades, tais como as citadas acima, são essenciais para auxiliar o estudante na sua resolução, conforme elencamos no parágrafo anterior. São essas habilidades presentes tanto na BNCC quanto no Currículo de Pernambuco, que serão pré-requisito para o trabalho com as equações do 1º grau que nós estamos chamando de noções iniciais, ou seja, são os elementos necessários que acreditamos facilitar o processo de compreensão e resolução de equações polinomiais do 1º grau, proposta para o 7º ano do ensino fundamental.

A partir das considerações expostas no decorrer de todas as seções anteriores, aprofundamos um pouco mais sobre as equações polinomiais do primeiro grau, desvelando suas principais características, aspectos históricos e a sua representatividade tanto para o processo de ensino e de aprendizagem da matemática como para outras disciplinas, com destaque para o seu papel no 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental. Na próxima seção elencaremos quais habilidades, partindo das propostas da BNCC, consideramos essenciais para desenvolver as noções iniciais de equações do 1º grau, contemplando os quatro anos que antecedem a formalização desse conceito no 7º ano, ou seja, no 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental.

4.3 HABILIDADES QUE POSSIBILITAM DESENVOLVER AS PRIMEIRAS NOÇÕES DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

De acordo com a discussão construída até aqui, citamos os seguintes objetos de conhecimento (retirados da BNCC) relacionados as noções iniciais de equações: relações de igualdade; relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; propriedades da igualdade; noção de equivalência; grandezas diretamente proporcionais; problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais; e, problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo. A partir desses objetos de conhecimento, identificamos as habilidades da BNCC (Brasil, 2018)[4] que possibilitam o desenvolvimento das primeiras noções de equações do 1º grau no 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental.

[4] Consideramos apenas a BNCC (Brasil, 2018), pois, as habilidades presentes no Currículo de Pernambuco (2019) são exatamente as mesmas.

Quadro 2 – Habilidades da BNCC que possibilitam desenvolver as primeiras noções de equação do 1º grau

Ano escolar	Habilidades da BNCC
3º ano	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ano	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
6º ano	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018).

Baseado no quadro 2, a primeira e única habilidade que consideramos auxiliar o estudante a desenvolver noções iniciais de equação do primeiro grau para o 3º ano é a habilidade EF03MA11, que está inserida no objeto de conhecimento: relação de igualdade. De modo geral, essa habilidade propõe que o estudante represente de diferentes formas sentenças de adição e

de subtração que resultem na mesma soma ou diferença, partindo da compreensão do sinal de igualdade. Vale ressaltar que, é a primeira habilidade dos anos iniciais que consideramos auxiliar o estudante a compreender uma relação matemática essencial para, mais adiante, ser formalizada no 7º ano por meio do conceito de equação do 1º grau. A BNCC orienta que:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Brasil, 2018, p. 270).

Essa habilidade permite ao estudante perceber que por meio de uma igualdade podemos escrever diferentes sentenças matemáticas com números naturais que resultem na mesma adição ou subtração, ou seja, se somarmos 7 e 5 encontramos o resultado 12, mas se somarmos outros valores também podemos encontrar esse mesmo valor, por exemplo, 2 + 10 = 12 ou 4 + 8 = 12 ou 5 + 7 = 12. Logo, 7 + 5 = 2 + 10, ou ainda, 7 + 5 = 4 + 8, dentre outros (o mesmo vale para a subtração). Isso auxiliará os estudantes quando estiverem formalizando o conceito de equação do 1º grau, pois, a igualdade representa que nos dois membros de uma equação a soma ou subtração dos seus termos são iguais.

Para o 4º ano, há dois objetos de conhecimento que contemplam habilidades que podem desenvolver as noções iniciais de equação do 1º grau nos estudantes: Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão, e, propriedades da igualdade.

Para o primeiro objeto de conhecimento temos a habilidade EF04MA13, que propõe aos estudantes reconhecer as relações inversas entre as operações de adição e subtração envolvendo a compreensão de que, se a + b = c, então, c – b = a e c – a = b; por exemplo, se 10 + 6 = 16, então, 16 – 10 = 6 e 16 – 6 = 10 e, reconhecer as relações inversas entre as operações de multiplicação e divisão implica saber que, se a x b = c, com a ≠ 0 e b ≠ 0, então, c ÷ a = b e c ÷ b = a, por exemplo, se 8 x 5 = 40, então, 40 ÷ 8 = 5 e 40 ÷ 5 = 8. Como exemplo de problemas podemos citar: *"Fábio tinha 12 balinhas e ganhou mais algumas balinhas de seu irmão, ficando com um total de 25 balinhas. Quantas balinhas Fábio ganhou de seu irmão?".* Logo, o que se espera no trabalho com essa habilidade é a investigação das relações e a resolução de problemas, com e sem o uso da calculadora, seguidas do registro escrito das relações observadas.

Segundo Vergnaud (2011) as relações inversas são operações que permitem passar do estado final ao estado inicial. Nesse tipo de problema um dos fatores da operação é desconhecido, e a pergunta é feita com base nesse valor que até então não se conhece. Nunes et al. (2008) nos diz que a compreensão das relações inversas é a base para a aprendizagem da

aritmética; os autores ainda acrescentam dizendo que a compreensão quanto as relações inversas entre a adição e a subtração é um precursor para compreensão da relação inversa entre multiplicação e divisão. No entanto, segundo Correa, Meireles e Curvelo (2000) é mais difícil para as crianças compreenderem de forma consistente as relações inversas do que das relações diretas, porque elas possuem mais experiência com as relações diretas durante o seu processo de desenvolvimento.

Para o segundo objeto de conhecimento temos duas habilidades: a EF04MA14 e a EF04MA15. Na primeira habilidade, o conceito chave previsto refere-se ao princípio aditivo das igualdades, o qual afirma que adicionando ou subtraindo o mesmo valor em ambos os membros de uma igualdade, a relação de igualdade se mantém inalterada. Por exemplo, dada a igualdade $2 + 7 = 10 - 1$, se adicionarmos 5 unidades em ambos os membros, a expressão obtida continua representando uma igualdade $2 + 7 + 5 = 10 - 1 + 5 \Rightarrow 14 = 14$; o mesmo acontece se subtrairmos 5 unidades a ambos os membros, $2 + 7 – 5 = 10 – 1 – 5 \Rightarrow 4 = 4$.

De acordo com Ponte e Cerca (2017) a compreensão da relação de igualdade tem início desde os primeiros anos de escolaridade, quando os estudantes, de forma intuitiva, desenvolvem conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações. Para o desenvolvimento desta habilidade, dentre outros fatores, é preciso compreender a ideia relacional do sinal de igualdade, segundo Kuhn e Klafke (2021), isso implica entender que o sinal de igualdade representa uma relação de equivalência. Nos anos iniciais, essa relação é, muitas vezes, interpretada como significando "é a mesma quantidade que" ao expressar uma relação entre quantidades equivalentes.

A partir da segunda habilidade (EF04MA15) o estudante deverá identificar o número desconhecido que torna a igualdade verdadeira, e, para isso, precisará compreender as relações entre as operações, assim como o sinal de igualdade no sentido de equivalência e investigar a propriedade da igualdade em que, ao somar e subtrair um mesmo número a cada um dos termos, a igualdade permanece.

Para que o estudante consiga determinar que número desconhecido que torna uma igualdade verdadeira, é preciso que ele consiga estabelecer relações entre as operações envolvidas, sobretudo com o sinal que expressa a equivalência entre as sentenças para que ele consiga descobrir o número que torna a sentença $\square + 7 = 10 – 1$ verdadeira, por exemplo. Nesse momento, ele terá que saber identificar que a expressão à esquerda do sinal da igualdade é uma adição, que a expressão à direita do sinal da igualdade representa uma subtração e que os resultados tanto da expressão a esquerda como da direita são iguais. Segundo Pitombeira

(2020) essa habilidade trata do princípio do estudo das equações e sua determinação pode ser realizada a partir do uso das operações inversas.

No 5º ano temos dois objetos de conhecimento: propriedades da igualdade e noção de Equivalência, com as habilidades (EF05MA10) e (EF05MA11); e grandezas diretamente proporcionais/problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais, com as habilidades (EF05MA12) e (EF05MA13).

O desenvolvimento da habilidade (EF05MA10) está ligado à compreensão, primeiramente, do sentido de equivalência, associado ao sinal de igualdade. No desenvolvimento dessa habilidade torna-se imprescindível que o estudante amplie o significado do sinal de igualdade, não sendo apenas uma expressão de *"é equivalente a"* e *"é o mesmo que"*. Essa ampliação no que se refere à compreensão do sinal de igualdade é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse sentido, ao longo da habilidade, devem ser trabalhos os princípios aditivos e multiplicativos da igualdade, assim como a sua utilização para a resolução de problemas.

Essa habilidade traz uma ampliação do trabalho previsto na habilidade EF04MA15, no qual o estudante, por meio de investigações, conclui o princípio aditivo e, agora, o princípio multiplicativo das igualdades. No caso do princípio multiplicativo, ao multiplicarmos ou dividimos ambos membros de uma igualdade por um mesmo valor (não nulo) a expressão obtida permanece sendo uma igualdade. Por exemplo, a partir de investigações, os estudantes podem verificar que se 4 + 8 = 5 + 7 então 3 x (4 + 8) = 3 x (5 + 7) e que se 18 - 3 = 10 + 5 então (18 - 3) : 5 = (10 + 5) : 5.

Na habilidade (EF05MA11) o objetivo é resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido, por exemplo: "*A diferença entre dois números é 22 e o maior deles é 34. Qual é o outro número?*" ou "*Pensei em um número, multipliquei por 14 e obtive 168. Em que número pensei?"*. O desenvolvimento dessa habilidade envolve o conhecimento das relações entre as operações (adição e subtração; multiplicação e divisão), assim como o sentido do sinal de igualdade como equivalência, o conhecimento previsto na habilidade (EF05MA10) e, ainda, experiência de resolver e elaborar problemas.

A Habilidade (EF05MA12) propõe, dentre outras possibilidades, que resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas implica a compreensão de que a relação de proporcionalidade direta estuda a variação de uma grandeza em relação à outra em uma mesma razão, ou seja, se uma dobra, a outra dobra; se uma triplica, a outra triplica; se uma é dividida em duas partes iguais, a outra também é reduzida à metade.

Esta noção tende a facilitar o processo de resolução de problemas quando se trabalha com problemas algébricos nos quais os estudantes precisam passar da linguagem natural para a linguagem algébrica com a utilização dessas relações de dobro, triplo, metade, etc.

O raciocínio proporcional é bastante utilizado em inúmeras situações do dia-a-dia, tendo em vista que, muitos fenômenos da realidade podem ser descritos por meio do modelo da proporcionalidade. Sendo assim, o desenvolvimento desta capacidade de raciocínio é essencial na interpretação de situações da vida cotidiana e na resolução de problemas de muitas áreas do saber. O desenvolvimento do raciocínio proporcional constitui um dos principais objetivos do ensino da Matemática elementar. O propósito de ensino deve passar pela mobilização das estratégias intuitivas dos estudantes, que frequentemente são aditivas e orientá-los para a construção de estruturas multiplicativas (Clark; Kamii, 1996).

A habilidade (EF05MA13) trata da resolução dos problemas de partilha, ou seja, nesse tipo de problema o todo é conhecido e dividido em partes desiguais e desconhecidas e explora relações aditivas e multiplicativas. Essa habilidade possibilita que o estudante seja capaz de resolver problemas do seguinte tipo: *"Júlio e Antônio fizeram um trabalho juntos e receberam por ele R$ 4800,00. Júlio dedicou 5 dias a realizar a sua parte do trabalho e Antônio, 7 dias. Quanto cada um receberá pelos dias trabalhados?"*. Vale ressaltar que, se eles tivessem trabalhado a mesma quantidade de dias, seria necessário apenas dividir o valor recebido por 2; no entanto, eles trabalharam quantidades de dias diferentes, logo, devemos dividir 4800 por 12, obtendo o valor de um dia de trabalho, e pagar o equivalente a 5 dias para Júlio e 7 dias para Antônio.

Para o 6º ano, na unidade temática álgebra, há dois objetos de conhecimento que possuem habilidades que podemos destacar, são eles: propriedades da igualdade e problemas que tratam da partição de um todo duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

No primeiro objeto de conhecimento, existe uma única habilidade a ser desenvolvida: a EF06MA14, que nada mais é do que uma extensão da habilidade EF04MA14 vista no 4º ano e, da habilidade EF05MA10 vista no 5º ano. Nessa habilidade, se propõe uma introdução ao desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de observações de padrões e regularidades, princípios da equivalência e comparações para determinar um valor desconhecido em uma sentença.

No 4º ano é proposto que se perceba que ao adicionarmos ou subtrairmos o mesmo valor em ambos os membros de uma igualdade a relação de igualdade existente entre dois termos permanece; já a habilidade EF06MA14 propõe não somente soma e subtração em ambos os

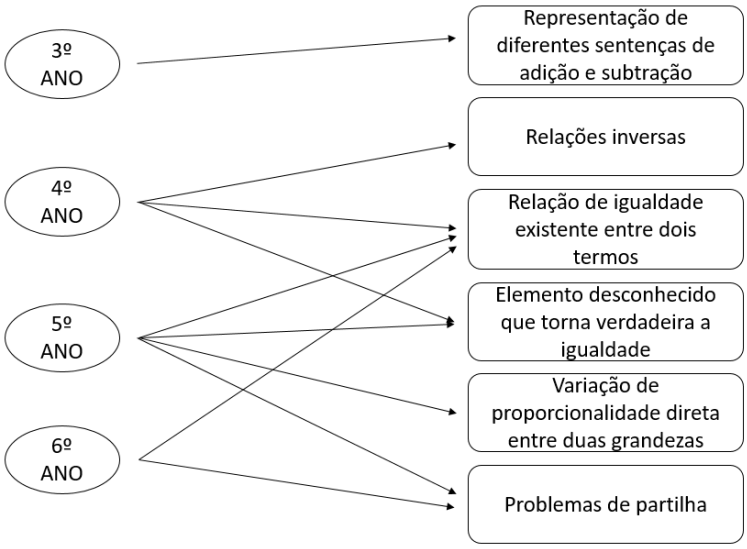
membros, como também a multiplicação e a divisão. No 5º ano, a habilidade EF05MA10 propõe, como já mencionado, o mesmo percurso proposto para o 6º ano, só que o foco do 5º ano está em desenvolver a noção de equivalência apenas, e no 6º ano o foco é a resolução de problemas. Para o desenvolvimento desta habilidade a utilização da balança de dois pratos pode otimizar a sua compreensão, uma vez que, os estudantes podem perceber que só haverá equilíbrio quando as quantidades nos pratos da balança forem iguais.

No segundo objeto de conhecimento, há a habilidade EF06MA15, que propõe a exploração da ideia de partilha de uma quantidade em duas partes desiguais; nesse momento é possível utilizar ralações aditivas e multiplicativas, como também a ideia de razão entre as partes e entre uma das partes e o todo. O propósito desta habilidade é mostrar para os estudantes que uma determinada quantidade pode ser dividida não semente em partes iguais como também em partes desiguais e, quando dividido em partes desiguais, torne-se possível iniciar os estudos sobre a proporcionalidade. Por exemplo: *"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas têm cada um?".* Vale ressaltar que esta habilidade é uma ampliação da habilidade EF05MA13 do 5º ano.

Analisando as habilidades expostas no quadro 2 podemos observar que estas possibilitam o estudante construir noções intuitivas que os auxiliarão a desenvolver o conceito de equação do primeiro grau no 7º ano do ensino fundamental. Isso se torna evidente quando percebemos nas habilidades elementos como: relações inversas, relação de igualdade, determinação de elementos desconhecidos, noção de equivalência, relações aditivas e multiplicativas. Desse modo, posteriormente, quando esse estudante for apresentado ao conceito formal de equação reconhecerá tais habilidades e construirá de forma mais linear este objeto de conhecimento com todas as suas relações e propriedades dentro do contexto da linguagem algébrica.

Apresentadas as habilidades, será por meio delas que iremos elencar as nossas categorias de análise que serviram de base para sistematizarmos as situações encontradas nos livros didáticos que esboçam as noções iniciais de equação do 1º grau. No esquema abaixo relacionamos os indicativos que, de acordo com a revisão bibliográfica realizada, podem contribuir para o desenvolvimento das noções iniciais de equação do primeiro grau antes do 7º ano com base no quadro 2.

Diagrama 2 – Esquema dos indicativos que contribuem para o desenvolvimento das noções iniciais de equação do primeiro grau anterior ao 7º ano.



Fonte: A Autora (2023).

A partir do diagrama acima, não há nenhum indicativo que esteja presente em todos os anos escolares que serão analisados nesta pesquisa. No entanto, é relevante destacar que existe um único indicativo que está presente no 4º, 5º e 6º anos, que é a "relação de igualdade existente entre dois termos". É possível considerar essa relação como umas das principais quando pretendemos trabalhar com equações do primeiro grau e um dos principais instrumentos para desenvolver esse tipo de pensamento é a balança de dois pratos.

Há três indicativos que são contemplados por apenas um ano cada: "representação de diferentes sentenças de adição e subtração" que está presente apenas no 3º ano, vale ressaltar também que, este é o único ano que contempla apenas uma categoria, os demais anos mesmo apresentando categorias exclusivas também estão presentes em outras categorias. As "relações inversas" que está apenas no 4º ano, e "variação de proporcionalidade entre duas grandezas" que contempla apenas o 5º ano. No mais, os demais indicativos estão presentes em pelo menos dois anos escolares.

Resultados de estudos anteriores e observações empíricas em nossa prática profissional apontam para a importância do livro didático para o ensino de matemática, sendo assim, este será o instrumento de coleta de dados utilizado para esse estudo que busca analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, que tipo de situações são propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º ano, do 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental.

Será por meio do livro didático que extrairemos todas as situações que nos auxiliarão nas análises das atividades e problemas segundo a Teoria dos Campos conceituais. O próximo

capítulo é dedicado à caracterização do livro didático como um recurso presente no ensino de matemática e seu papel ao longo do tempo e dentro das salas de aula.

5 LIVRO DIDÁTICO

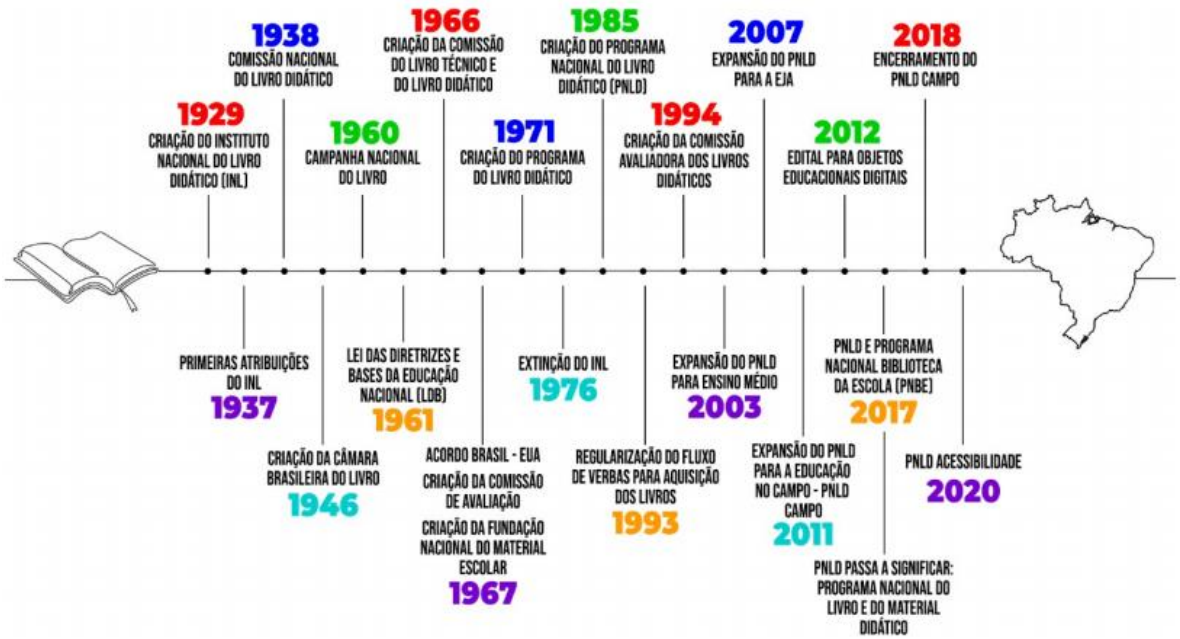
Neste capítulo, daremos destaque ao nosso instrumento de coleta de dados: o livro didático. Torna-se necessário conhecermos um pouco mais deste recurso didático, destacando suas principais características, especificidades e definições, um pouco da sua origem e desenvolvimento ao longo dos anos, o seu papel na educação escolar básica e a importância do seu uso nas aulas de matemática com foco no ensino fundamental.

5.1 LIVRO DIDÁTICO: UM POUCO DE HISTÓRIA

O livro didático (LD) passou a ser utilizado no Brasil no início do século XX, conforme os moldes definidos na França. Nos últimos cem anos tem se apresentado como a principal fonte de informações para os estudantes na promoção da aprendizagem escolar. É relevante destacar que, ao longo desses anos, o livro didático vem contribuindo de forma significativa no desenvolvimento do processo educativo merecendo uma maior atenção por parte dos professores e demais sujeitos envolvidos na promoção desse processo (Costa, et al., 2017).

Abaixo segue uma cronologia, elaborada a partir das ideias de Mazzi (2018), das políticas públicas sobre o livro didático desenvolvida ao logo dos anos. Buscaremos elencar boa parte desses marcos cronológicos ao logo desta seção.

Figura 4 – Cronologia das políticas públicas acerca do Livro didático.



Fonte: Mazzi; Amaral-Schio (2021).

A trajetória das políticas voltadas para a avaliação, regulação e distribuição dos livros didáticos no Brasil teve início em 1929 com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), órgão específico para legislar sobre políticas do livro didático. O principal objetivo deste órgão era contribuir para a legitimação do livro didático nacional e, por consequência, auxiliar no aumento de sua produção. Embora tenha-se dado o primeiro passo, foi apenas no ano de 1937, no governo do presidente Getúlio Vargas, que o INL recebeu suas primeiras atribuições, como por exemplo, editar obras literárias para a formação cultural da população, elaborar uma enciclopédia e um dicionário nacionais e expandir o número de bibliotecas públicas (Freitas; Rodrigues, 2008).

Em 1938, o Decreto-Lei nº 1006 a respeito das condições de produção, importação e utilização dos livros é assinado; tópicos relevantes foram abordados nesse decreto, no que diz respeito à autorização do Ministério da Educação e da Saúde Pública e à escolha dos livros didáticos pelas escolas. Em um de seus artigos, este decreto indicava que, a partir daquele momento, caberia ao Estado fornecer a liberação necessária para que os livros pudessem ser adotados pelas escolas. Caso o Ministério da Educação e da Saúde Pública reprovasse o material, este ficaria proibido de ser acessado pela escola. Vale ressaltar que este é um dos primeiros marcos da relação Livro-Estado que perdura até os dias atuais, ou seja, a autonomia das escolas está condicionada a uma permissão estatal.

Ainda nesse ano, o livro didático ganhou destaque ao entrar na pauta do governo, na criação da Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que representava a primeira política de legislação para tratar da produção, do controle e da circulação dessas obras. Essa Comissão possuía as seguintes atribuições:

> a) examinar os livros didáticos que lhe forem apresentados, e proferir julgamento favorável ou contrário à autorização de seu uso; b) estimular a produção e orientar a importação de livros didáticos; c) indicar os livros didáticos estrangeiros de notável valor, que mereçam ser traduzidos e editados pelos poderes públicos, bem como sugerir-lhes a abertura de concurso para a produção de determinadas espécies de livros didáticos de sensível necessidade e ainda não existentes no país; d) promover, periodicamente, a organização de exposições nacionais dos livros didáticos cujo uso tenha sido autorizado na forma desta lei [art. 10] (Brasil, 1939).

Posteriormente, sugiram alguns questionamentos sobre a legitimidade dessa comissão o que desencadeou, em 1945, na criação de uma legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos, conforme definido no art. 5º do Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45.

No final do governo de Juscelino Kubitschek, por meio de mais um decreto (decreto nº 48.902, de 27 de agosto de 1960) deu-se início à Campanha Nacional do Livro (CLN). Um dos principais focos da CLN foi:

> Organizar congressos, festivais e exposições de livros; distribuir prêmios às melhores obras publicadas no país; promover a realização de filmes documentários de divulgação do livro, de bibliotecas e de nossa história literária; financiar bolsas de estudos; criar e manter bibliotecas (Brasil, 1960).

Mesmo apresentando propostas bastante interessantes para o desenvolvimento cultural do país, a campanha não foi adiante. Em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) organizou a obrigatoriedade do ensino primário no Brasil, este fato influenciou diretamente as políticas do livro didático. Essa nova resolução permitia que mais estudantes estivessem nas escolas o que implicava a necessidade de uma maior quantidade de livros didáticos disponíveis a esses estudantes (Mazzi; Amaral-Schio, 2021).

A partir de 1964, com a ruptura da ordem democrática pelo Golpe Militar de 1964 e a instauração da Ditadura-Civil Militar, surge um novo cenário. O governo militar precisou repensar o funcionamento do INL e propor mudanças que atendessem às necessidades dessa nova realidade para o ensino. Uma das principais transformações ocorreu por meio de acordo realizado, em 1966, entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) com a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED). Esta comissão apresentava como objetivo coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático, e pretendia distribuir gratuitamente 51 milhões de livros no período de três anos. No entanto, uma vez que a USAID tinha todo o controle e ao MEC e ao SNEL (Sindicato Nacional de Editores de Livros) caberiam apenas responsabilidades de execução houve bastante críticas a esse acordo (FREITAS; RODRIGUES, 2008).

Com a extinção do COLTED, em 1971, e o término do convênio com MEC/USAID, o INL passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), assumindo as atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros. Após cinco anos, em 1976, o INL foi extinto e a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) passou a ser responsável pela execução do PLIDEF.

Em 1983, para substituir a FENAME, foi criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) incorporando vários programas de assistência do governo, incluindo o PLIDEF. No entanto, mais uma vez houve diversas críticas a essa centralização da política assistencialista do governo. De acordo com Freitas, Motta e Costa (1989) dentre as denúncias estavam a não

distribuição dos livros didáticos nos prazos estabelecidos, a pressão política das editoras e o autoritarismo na escolha dos livros. Foi nesta época que se propôs a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, incluindo as demais séries do ensino fundamental.

Em substituição ao PLIDEF em 1985, foi criado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) sob o decreto nº 91.542, de 19/8/85. Este programa, segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento da educação (FNDE), apresenta como objetivo abastecer as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários. O PNLD analisa, avalia e recomenda os livros didáticos a serem adotados pelas escolas públicas brasileiras (Corrêa; Meggiolaro; Reis, 2019).

Ainda segundo os autores acima citados, o PNLD permite que a escola e os professores escolham, dentre as coleções aprovadas, os livros didáticos que melhor atendam ao projeto educativo da escola. Este processo de escolha possibilita aos profissionais da educação um momento rico de reflexões e discussão coletiva. Até meados de 1992 somente estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental tinham acesso aos livros didáticos, tenho em vista o orçamento curto do governo.

Em 1994, por meio da equipe responsável pelo PNLD, foi proposto um documento que contivesse critérios para avaliação dos livros didáticos produzidos pelas editoras com a intenção de identificar os pontos positivos e os problemas nesse material. A partir dessas análises surgiu o documento chamado “Guia de Livros Didáticos”; nesse guia os professores acessavam todos os tópicos que foram considerados mais relevantes pela comissão avaliadora. Ao logo do tempo esse processo foi aperfeiçoado sendo utilizado até os dias de hoje durante a seleção dos livros (Mazzi; Amaral-Schio, 2021).

Ao longo dos anos o PNLD foi expandindo, e em 2003 e 2007 passou a atender estudantes do ensino médio e da EJA, aumentando de forma considerável seu alcance. Em 2011 mais uma expansão foi realizada, instituindo o PNLD Campo, com o propósito de atender as escolas do campo a partir da Resolução no 40/2011. Segundo as normativas, essa nova vertente do PNLD teve por objetivo

> [...] prover as escolas públicas de ensino fundamental que mantenham classes multisseriadas ou turmas seriadas do 1º ao 5º ano em escolas do campo com livros didáticos específicos no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático do Campo (Brasil, 2011).

No ano de 2012, o PNLD lançou um edital que permitia a disponibilização de materiais digitais a usuários da educação. Esse novo material multimídia refere-se a jogos educativos,

simuladores e infográficos animados. Alem disso, várias coleções de livros didáticos trouxeram endereços online possibilitando ao estudante ter acesso ao material multimídia. Já em 2017 um novo PNLD iniciou um novo ciclo com algumas alterações, uma nova nomenclatura, diferentes funções, alterando ciclos e assistindo ao um novo nível escolar (Mazzi; Amaral-Schio, 2021).

Ainda segundo os autores, em 2017, houve a unificação entre o PNLD e o Programa Nacional da Biblioteca da Escola (PNBE). Por meio dessa junção surgiu o "novo" PNLD que mesmo apresentando a mesma sigla, agora denomina-se Programa Nacional do Livro e do Material Didático. De acordo com (Brasil, 2021),

> Com nova nomenclatura, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD também teve seu escopo ampliado com a possibilidade de inclusão de outros materiais de apoio à prática educativa para além das obras didáticas e literárias: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar, entre outros.

Nessa nova fase, o programa atenderá a educação infantil, que até então não recebe livros didáticos, que passará a receber a partir de 2022. Além disso, os estudantes do ensino médio receberão livros de projetos integradores e projetos de vida. Outra mudança que podemos ressaltar é ciclo de funcionamento do programa que passou de três para quatro anos.

Outra modificação realizada na nova fase no PNLD corresponde ao processo de avaliação dos materiais submetidos. Até o PNLD de 2018, uma universidade era selecionada por meio de uma chamada pública e esta ficava responsável pela avaliação do material. A partir do PNLD de 2019, o MEC começou a criar uma comissão técnica, composta por professores e por entidades ligadas à educação, como por exemplo, a Associação Nacional dos Dirigentes de Instituições ligadas à Educação (Andifes), o Conselho Nacional de Secretários Estaduais (Consed) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais (Undime), dentre outros.

Em 2017 houve uma alteração na Lei de Diretrizes e Bases da educação Nacional (LDB) por meio da lei 13.415, de 16 de fevereiro de 2017 para instituir o Novo Ensino Médio, que começou a ser implantado em janeiro de 2022. A proposta do Ministério da educação (MEC) ao instituir esse novo formato de ensino é alinhar a aprendizagem dos estudantes das redes pública e privada de todo o território nacional, diminuindo a defasagem do conteúdo e as desigualdades regionais e de percurso de formação. Essa mudança afetou diretamente a configuração dos livros didáticos para esta etapa da Educação Básica. De acordo com Copatti, Andreis e Zuanazzi (2021) a principal mudança ocorrida nos livro didáticos é que a partir de 2021, as escolas deixaram de receber as coleções separadas por disciplinas, e passaram a obtê-

las divididas por área de conhecimento, por exemplo, em ciências humanas haverá um único livro para as quatro disciplinas, e assim para as demais áreas de conhecimento.

Em síntese, ao longo dos anos, foram muitas as mudanças que ocorreram nos órgãos que coordenam a avaliação, regulação e distribuição dos livros didáticos no Brasil, e isso influenciou diretamente em mudanças significativas na estrutura desse recurso didático até os dias de hoje. Após conhecermos um pouco mais sobre a trajetória do livro didático e as principais mudanças ocorridas, discutiremos na próxima seção, dentre outras coisas, algumas definições do LD, qual o seu papel na educação básica, ressaltando suas principais características e funções, e sua importância para o professor e para o estudante.

5.2 LIVRO DIDÁTICO: ALGUMAS DEFINIÇÕES E CARACTERÍSTICAS

O livro didático, de acordo com Costa et al. (2017), é um instrumento que auxilia a atividade docente contribuindo para uma melhor produção da aprendizagem ampliando e renovando o processo de ensino. Dentre as várias definições existentes podemos destacar a de Sgnaulin (2012) que define o livro didático como sendo "um material impresso, estruturado, destinado ou adequado a ser utilizado num processo de aprendizagem e de formação".

Bittencourt (1997, p.72) acrescenta dizendo que:

> O livro didático é um depositário dos conteúdos escolares, suporte básico e sistematizador privilegiado dos conteúdos elencados pelas propostas curriculares; são por seu intermédio que são passados os conhecimentos e técnicas consideradas fundamentais de uma sociedade em determinada época. O livro didático realiza uma transposição do saber acadêmico para o saber escolar no processo de explicitação curricular.

É relevante salientar que, este instrumento didático representa atualmente uma das principais ferramentas no trabalho em sala de aula, é por meio do livro didático que o professor encontra um suporte na construção de suas aulas (a partir dos textos, exemplos, atividades e desafios propostos), principalmente quando o trabalho a ser realizado é com estudantes de rede pública de ensino, uma vez que, estas escolas tendem a apresentar uma maior restrição de recursos didático-metodológicos. Embora o LD seja o instrumento de coleta de dados desta pesquisa, não estamos colocando-o como o único recurso ou o mais importante no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes, mas, estamos destacando-o como relevante tomando como base uma realidade em que os recursos didáticos são escassos (como é o caso das escolas públicas) e considerando também a relevância desse material no contexto da sala de aula.

Paiva, Sobrinho e Costa (2013), ratificam as ideias acima apresentadas, ao evidenciarem a importância do uso do livro didático nas escolas e nas salas de aula, pois, mesmo com os avanços do mundo tecnológico este material ainda é utilizado em muitos casos como o único recurso didático impresso utilizado pelos professores, principalmente quando o cenário é a escola pública, haja vista a carência e as dificuldades educacionais na qual enfrenta o país. Reforçando esta ideia, Frison et al. (2009), ressalta que o professor ao elaborar sua aula precisa utilizar diversos recursos didáticos e pedagógicos, no entanto, o autor enfatiza que a realidade encontrada em diversas escolas mostra que o livro didático tem se apresentado como o principal instrumento de apoio para o professor e que este se constitui como uma importante fonte de estudo e pesquisa tanto para o professor como para o estudante.

Carvalho (2011), complementa dizendo ainda que a importância do livro didático se torna significativa principalmente em países que apresentam uma situação educacional precária no que se refere ao acesso e uso das tecnologias, como é o caso do Brasil. Esta realidade permite que este recurso condicione e determine os conteúdos e estratégias de ensino.

Alguns autores, tais como, Ferraro (2017), Silva (2011), Silva e Selva (2018), Santos, Junior e Velasque (2018), afirmam que, atualmente, o livro didático representa uma ferramenta indispensável no desenvolvimento do trabalho em sala de aula do professor, destacando-se como um material, que merece uma constante reflexão sobre sua utilização. Na concepção de Costa e Allevato (2010, p. 72):

> O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos.

Ao fazer uso do livro didático o professor encontra um importante apoio pedagógico, pois, este auxilia e contribui para o preparo das aulas. Este instrumento didático auxilia tanto o professor como o estudante: para o primeiro, ele serve como instrumento de organização do ensino; para o segundo, como recurso que auxilia a aprendizagem, dentro ou fora da sala de aula. Partindo de tais considerações, podemos afirmar que os livros didáticos são utilizados como fontes de texto, ilustrações e atividades, ou seja, eles são verdadeiros recursos auxiliares à prática pedagógica, transformando-se em um instrumento de grande utilização pelos professores (Costa et al., 2017).

Lajolo (1996, p. 4) nos conta que para um livro ser considerado didático "precisa ser usado de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de um determinado objeto ou conhecimento, já consolidado como disciplina". De acordo com Costa e Allevato (2010, p. 79):

> O livro didático apresenta-se com destaque no cenário educacional, ou seja, desempenha um papel relevante no desenvolvimento das atividades de sala de aula, realizadas pelos professores com seus alunos. Trata-se, portanto, de um importante instrumento utilizado pelos professores para o desenvolvimento de suas atividades como docentes.

Este recuso didático abarca conhecimentos validados pela sociedade, sua proposta é estar em conformidade com os conteúdos curriculares de uma determinada disciplina e com os documentos que orientam a educação. Sob esse enfoque, espera-se que o livro não disponha de conteúdos aleatórios, mas sim, que contenha conteúdos e conhecimentos pensados e organizados, sistematicamente, para auxiliar os professores e os estudantes (Neves; Parovano, 2020). Silva (2010, p. 21) complementa enfatizando que o professor necessita estar ciente de que possui um recurso que é composto por "uma rede complexa de características e funções que, quando pensadas em conjunto, constituem a unicidade do livro didático".

No que se refere às funções do livro didático, alguns autores nos trazem considerações relevantes sobre este recurso didático. Gerard e Roegiers (1998) ressaltam algumas funções do livro didático para o professor e a estudante. Referente ao professor destaca-se: o auxílio no preparo e planejamento de suas aulas, o favorecimento da aquisição dos conhecimentos, o favorecimento da formação didático pedagógica, o auxílio na avaliação da aprendizagem dos alunos. Em relação ao estudante podemos citar: o favorecimento da aquisição de conhecimento socialmente relevante, o desenvolvimento das competências cognitivas, que contribuem para a autonomia dos alunos, a consolidação, ampliação, aprofundamento e integração dos conhecimentos adquiridos, o auxílio na avaliação da aprendizagem, a formação social e cultural dos alunos, além de desenvolver a capacidade de convivência e exercício da cidadania.

Outro autor que também pontua algumas funções do LD é Choppin (2004). Este nos traz quatro funções do livro didático que considera essencial, que podem variar consideravelmente, de acordo com o ambiente sociocultural, com as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de sua utilização. A primeira delas é a função referencial, também conhecida como curricular ou programática; essa função percebe o livro didático apenas como uma reprodução do programa, ou ainda, segundo Choppin (2004, p. 552-553) "ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário de conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações."

A segunda função, a função instrumental, considera o livro didático com o propósito de realizar exercícios ou atividades, que visam facilitar a memorização ou a aquisição de conhecimentos disciplinares e transversais, contribuindo para o desenvolvimento de competências e habilidades, tais como, a resolução de problemas, métodos de análise, entre

outros (Choppin, 2004). Entende-se que a prática de exercícios possibilita ao estudante elaborar, explicitar e compartilhar diferentes estratégias de resolução, e consequentemente, isso colabora para a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos também na vida prática (Turibio; Silva, 2017).

Sobre a terceira função, a função ideológica, esta é considerada a mais antiga, o livro é concebido como um transmissor essencial de valores culturais das classes dominantes, e dessa forma assume um papel, segundo Choppin (2004, p. 553) "privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político". Por fim, a quarta função do livro didático é a função documental. O autor acredita que por meio da observação e da confrontação com os textos ou documentos fornecidos pelos livros permite ao estudante desenvolver o espírito crítico.

É possível perceber a representatividade do livro didático tanto para os estudantes como para os professores e como o uso adequado deste recurso pode permitir a otimização do processo de aprendizagem pelo estudante. Na próxima seção, discorreremos sobre o papel do LD nas aulas de matemática como uma forma de compreender a importância deste recurso didático no contexto desta disciplina escolar, quais as suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem, destacando algumas mudanças que ocorreram ao longo dos anos após a publicação de documentos oficiais.

5.3 O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Mesmo com a ampliação de novos métodos de ensino, ou seja, com o surgimento das novas tecnologias digitais aplicadas ao ensino, consideradas essenciais e defendida por estudiosos da educação, o livro didático de matemática sempre esteve presente nas salas de aula. Dessa forma, é possível afirmar que o livro tem seu espaço garantido no desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática (Macedo; Brandão; Nunes, 2019).

Ratificando as ideias acima apresentadas, se considerarmos a relação histórica existente entre o uso de livros didáticos e o ensino da matemática, Valente (2008) coloca que a matemática é, possivelmente, a disciplina escolar que apresenta maior dependência deste material. O autor complementa dizendo que

> […] talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento

> da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (Valente, 2008, p. 141).

No entanto, ao longo dos anos os livros didáticos de matemática sofreram inúmeras mudanças decorrentes das necessidades de cada época. Mais recentemente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e o Guia de Livros Didáticos (PNLD, 2016) defendem que o ensino da matemática não seja uma simples transmissão de conteúdo, mas sim um processo de construção de diversas competências, que se dá por meio da participação ativa do estudante. Nesse sentido, os livros didáticos buscam abordar seus conteúdos de forma contextualizada tentando estabelecer uma ligação entre a matemática e as outras áreas do conhecimento, por meio da interdisciplinaridade.

Além disso, o surgimento dessas novas propostas curriculares que orientam o processo de ensino e aprendizagem de matemática evidenciou a necessidade da incorporação das tecnologias da informação e comunicação, de jogos e materiais concretos, da modelagem matemática, entre outros, nos processos educativos com a intenção de otimizar o processo de aprendizagem da matemática pelo estudante. Este cenário desencadeou a constituição de algumas tendências, relativas ao ensino da matemática, consideradas alternativas para serem abordadas em sala de aula, como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais (Colling; Richit; Alberti, 2016).

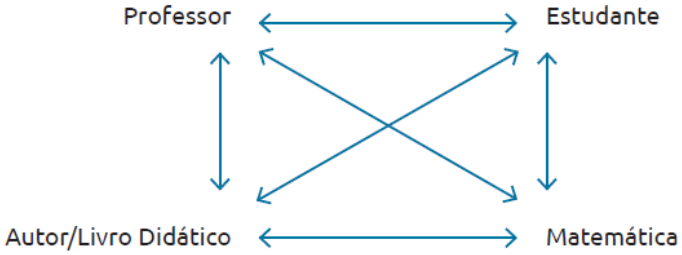
Consequentemente, a partir da consolidação dessas tendências para o ensino da matemática implicaram em mudanças na elaboração dos materiais didáticos, principalmente os livros didáticos. Segundo Oliveira (2007), os autores de livros didáticos passaram a orientar-se pelos PCN e que as propostas dos livros didáticos têm refletido tais orientações, como por exemplo, os livros passaram a ser organizados em blocos de conteúdo, contemplando Aritmética, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação, macro campos da matemática escolar estes estabelecidos pelo Ministério da Educação. Outro aspecto que deve ser observado nos livros didáticos de matemática, elaborados após a publicação dos PCN, refere-se a uma maior preocupação em estabelecer conexões com temas trabalho e consumo, saúde e meio ambiente, além de abordar as tendências resolução de problemas, história da matemática, etnomatemática, tecnologias da comunicação, jogos, contextualização e interdisciplinaridade.

No que se refere a organização dos conteúdos matemáticos, segundo os PNLD de 2016, o que prevalece nos livros a serem analisados é o agrupamento dos conteúdos por campos da matemática escolar: números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas, estatística e probabilidade. A partir dessa configuração, no processo de análise observa-se, por meio de

uma estimativa, em cada coleção e em cada volume o quanto de cada um dos campos está presente no livro didático e o modo como eles são distribuídos nas obras (Brasil, 2016).

Esse documento enfatiza ainda que o livro didático traz o autor como mais um elemento para o processo de ensino e aprendizagem, e a partir desse momento esse autor passa a dialogar com o professor e com o estudante. Por meio desse diálogo, em que o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Dessa forma, estabelece-se uma teia de relações que interligam quatro polos, um deles é formado pelo autor e o livro didático; os outros três são compostos, respectivamente, pelo professor, pelo estudante e pela Matemática.

Figura 5 – Teia de ligações: professor, estudante, matemática e livro didático



Fonte: Brasil (2016).

A compreensão dada a esses polos é de que o(s) autor(es) dos livros didáticos são os responsáveis por produzirem e sistematizarem os conteúdos no material para serem vivenciados no processo de ensino e de aprendizagem; o professor, por meio do livro didático, pode utilizá-lo para planejar suas aulas, podendo adotar ou não todas as recomendações (atividades) do livro; os estudantes podem utilizar esses recurso como fonte de informação e consulta antes ou depois da aula proposta pelo professor; e a Matemática presente nos livros didáticos é fruto de estudos dos autores (Carvalho; Lima, 2010).

A partir do esquema acima apresentado, podemos perceber o quanto esses polos estão intimamente relacionados uns com os outros. É por meio dessa relação estabelecida entre autor/livro didático, professor, estudante e a matemática que ocorre a construção do conhecimento pelo estudante e a organização dos percursos metodológicos pelo professor.

Com a publicação da primeira versão da BNCC em 2017 foi proposto uma nova forma de trabalhar os conteúdos. Anteriormente estes eram trabalhados de forma isolada, e com a BNCC a proposta é trabalhar os conhecimentos de forma integrada e com foco no desenvolvimento de competências e habilidades, conforme Decreto 9.099 de 2017, que

considera a adequação dos materiais didáticos à implementação da BNCC. Segundo Copatti, Andreis e Zuanazzi (2021) a partir da implementação da BNCC, tem-se a efetivação de uma proposta voltada ao desenvolvimento de competências e habilidades consideradas necessárias à formação, fazendo com que os livros didáticos considerem a partir do PNLD 2019, de Anos Iniciais, o desenvolvimento das habilidades e competências mencionadas naquele documento.

Algumas mudanças que também ocorreram recentemente nos livros didáticos de matemática são a ordem de apresentação de algumas unidades temáticas, ou seja, conteúdos que sempre eram abordados nos últimos capítulos passaram a ser vistos nos primeiros capítulos dos livros, um exemplo disso é a unidade temática de Geometria.

Quando o processo de ensino e aprendizagem de matemática ocorre com estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, o livro didático pode auxiliar o docente e sugerir situações-problema, jogos e atividades que favoreçam de maneira prazerosa a apreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos. Para os anos finais do ensino fundamental, que tem o propósito de aprofundar os conhecimentos desenvolvidos nos anos iniciais dessa etapa da educação básica, os livros didáticos vêm para auxiliar nesse processo propondo os conhecimentos de forma sistematizada comtemplando atividades variadas sejam elas por experimentações, escritas, construção e manipulação de objetos, uso de recursos tecnológicos, etc.

A partir de tais considerações, fica evidente que o livro didático assume um papel de grande relevância no âmbito escolar; embora não estejamos dizendo que esse recurso deve ser o único utilizado pelo professor. O docente precisa incorporar outros recursos, como por exemplo, a inserção dos aparatos tecnológicos, inserção de Artes, literatura, jogos, por exemplo; dessa forma, as aulas serão mais diversificadas e, consequentemente, mais interessantes.

Conhecer a trajetória do livro didático, o seu papel nas aulas de matemática, seus principais elementos e características nos mostra a relevância que esse recurso didático teve e tem até hoje no processo de ensino e aprendizagem dos nossos estudantes. É por tudo que já foi discutido até momento e do peso de que ele tem que o livro didático merece destaque e representa um dos principais elementos desta pesquisa.

Até o presente momento destacamos o papel do ensino da álgebra desde os primeiros anos dos anos iniciais do ensino fundamental, as relações matemáticas existentes nas habilidades que são propostas para esta etapa da educação básica e que contribuem para o posterior ensino da equações do 1º grau no 7º ano do ensino fundamental, as equações e seu papel na resolução de problemas, o livro didático como um dos instrumentos possíveis de conduzir o processo de ensino e de aprendizagem deste conteúdo (tendo em vista de papel ao longo dos anos) e do papel deste recurso didático na disciplina de matemática.

O propósito deste trabalho é analisar os tipos de situações propostas, nos livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental, para desenvolver as primeiras noções relacionadas as equações do 1º grau, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Para isso, mapeamos nos documentos curriculares as orientações que sinalizam para os objetos de conhecimento e habilidades relacionadas a construção de noções iniciais de equação do 1º grau (ver tabela 1). Fazendo uso da TCC, a partir das seis categorias que elencamos por meio das habilidades previamente escolhidas em que foram organizadas todas as situações encontradas nos LD, classificamos as situações que correspondiam a problemas segundo a TCC como pertencentes ao campo das estruturas aditivas e ao campo das estruturas multiplicativas. E por fim, iremos descrever os recursos utilizados nas situações que compõe a abordagem de objetos de conhecimento e habilidades que compõem as noções iniciais de equação do 1º grau. Mais detalhes de como iremos alcançar esses objetivos serão descritos mais adiante na seção que se refere aos procedimentos metodológicos.

Com esta seção, finalizamos a nossa fundamentação teórica, nela foi possível conhecer alguns aspectos essenciais para o desenvolvimento da nossa pesquisa, tais como, os principais conceitos que contribuem para a formalização do conceito de equação do 1º grau; o papel do LD no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes e seu papel nas aulas de matemática; a TCC, que será essencial no processo de classificação das situações encontradas; dentre outros. Aproxima seção será dedicada aos procedimentos metodológicos, na qual esboçaremos em detalhes como ocorrerá cada etapa desta pesquisa, qual a abordagem metodológica adotada e qual método de investigação.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar o objetivo de analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, situações propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º ano, 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental, esse estudo adotou os procedimentos metodológicos que passamos a descrever nessa seção.

6.1 TIPO DE PESQUISA

A pesquisa desenvolvida utilizou uma abordagem qualitativa, sob o enfoque da pesquisa documental enquanto método de investigação. Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a pesquisa qualitativa como uma forma de proporcionar aos investigadores encontrar respostas bastante particulares, com um nível de realidade e fidedignidade que não pode ser quantificada, mas sim analisada, interpretada a luz de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, correspondendo a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

A pesquisa documental é um procedimento em que os dados obtidos são estritamente provenientes de documentos, com o propósito de extrair informações neles contidas, a fim de compreender um fenômeno (Flick, 2009). Esta técnica de pesquisa desafia o pesquisador a desenvolver sua capacidade de selecionar, tratar e interpretar a informação, com o propósito de compreender a interação com sua fonte. Esse processo possibilita um incremento de detalhes à pesquisa e os dados coletados tornam-se mais significativos.

Esta abordagem metodológica pode ainda ser caracterizada como “uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja completando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema” (Lüdke; André, 1986, p. 38). Sob esta perspectiva, a análise documental é compreendida como um processo que se utiliza de métodos e técnicas para a apreensão, compressão e análise de documentos dos mais variados tipos.

Assim, a pesquisa documental, como outros tipos de pesquisa, se propõe a produzir novos conhecimentos, criar novas formas de compreender os fenômenos e conhecer a forma como estes têm sido desenvolvidos (Sá-Silva; Almeida; Guindani, 2009). Sob o enfoque do ensino, esta abordagem metodológica permite que o investigador “mergulhe” no campo de estudo procurando captar o fenômeno por meio das perspectivas contidas nos documentos,

trazendo contribuições para a área a qual ele se insere, seja na área da educação, saúde, ciências exatas e biológicas ou humanas (Kripka; Scheller; Bonotto, 2015).

O pesquisador, ao trabalhar com esse tipo de pesquisa, precisa ter bem claro o conceito de documento. Este, se caracteriza como uma fonte poderosa com a qual podem ser retiradas informações e evidências que fundamentam as afirmações e declarações do pesquisador. Estes representam ainda uma fonte "natural" de informação, destacando-se não apenas como uma fonte de informação contextualizada, como também, surgem num determinado contexto e fornecem informações sobre esse mesmo contexto (Lüdke; André, 1986).

Para Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 4),

> Quando um pesquisador utiliza documentos objetivando extrair deles informações, ele o faz investigando, examinando, usando técnicas apropriadas para seu manuseio e análise; segue etapas e procedimentos; organiza informações a serem categorizadas e posteriormente analisadas; por fim, elabora sínteses, ou seja, na realidade, as ações dos investigadores – cujos objetos são documentos – estão impregnadas de aspectos metodológicos, técnicos e analíticos.

De modo geral, o propósito da pesquisa documental é identificar, em documentos primários, informações que permitam auxiliar na busca por responder alguma questão de pesquisa. Documentos primários são caracterizados como dados originais por meio do qual se tem uma relação direta com os fatos a serem analisados, ou seja, é o pesquisador que analisa (Sá-Silva; Almeida; Guindani, 2009). Dentre esses documentos podemos citar: leis, fotos, imagens, revistas, jornais, filmes, vídeos, postagens e mídias sociais, entre outros.

Tilio (2006) conceitua o livro didático como documento de fonte primária, uma vez que, este é caracterizado por um material impresso (documento) que será analisado conforme concebido por seus autores (fonte primária). Este recurso didático é considerado um documento, pois, está inserido em um contexto sócio-histórico, e, assim como qualquer documento, detêm um conteúdo passível de análise. Como já ressaltado anteriormente, Choppin (2007) preocupou-se em apresentar a complexidade relacionada às pesquisas envolvendo livros didáticos quando estes são compreendidos como documentos históricos. De acordo com o autor, a complexidade reside no fato de o livro assumir múltiplas funções das quais nós, enquanto pesquisadores, selecionamos as que mais se identificam com os nossos objetivos.

Lucke e André (1986), propõem que a análise documental é constituída pelas etapas de escolha e recolha dos documentos e de posterior análise. Ainda segundo os autores, devem ser estabelecidos alguns procedimentos metodológicos no processo de análise dos documentos, tais como: a caracterização de documento, a codificação, os registros, a categorização e a análise crítica. Flick (2009), por sua vez, orienta que se deve ter cuidado ao escolher um método de

análise, verificando se este é adequado ao estudo e se nesta escolha são considerados alguns pontos de referência, tais como: a comparação das abordagens, com base em critérios; a seleção do método e a verificação de sua aplicação; a apropriabilidade do método ao assunto e o ajuste do método no processo de pesquisa.

Com base em tais considerações, esta pesquisa, que apresenta como percurso metodológico a análise documental, busca por categorizar e classificar as situações que exploram conhecimentos em torno das noções iniciais de equação do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Propondo-se, também, a descrever as representações simbólicas utilizadas na abordagem de objetos de conhecimento e habilidades que compõem as noções iniciais de equação do 1º grau. Para isto, a presente investigação utilizará como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud, com foco nas situações e representações simbólicas para análise dos problemas encontrados. Na próxima seção daremos mais detalhes de como ocorrerá esse processo de análise e quais coleções de livros didáticos serão utilizadas.

6.2 CARACTERIZAÇÃO DAS ETAPAS DA PESQUISA

Inicialmente, mapeamos habilidades, presentes na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) que possibilitam os estudantes do 3º, 4º, 5º e 6º anos desenvolverem as primeiras noções de equação do 1º grau (ver quadro 2). Posteriormente, seguindo as orientações propostas por Lucke e André (1986), foram selecionadas duas coleções distintas: para o 3º, 4º e 5º anos dos anos iniciais utilizamos a coleção Buriti Mais – Matemática, da editora Moderna; e, para o 6º ano utilizamos a colação A Conquista da Matemática, da editora FTD; ambas as coleções foram aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O critério de escolha para essas duas coleções se deu pelo fato de a rede municipal da cidade de Garanhuns – PE, na qual a primeira autora desse artigo reside e atua como supervisora e formadora de professores de Matemática dos anos finais, adotar essas duas coleções para os anos iniciais e para os anos finais, respectivamente. Foram mapeadas situações disponíveis para o professor vivenciar com seus estudantes em sala de aula e que possuem potencial para desenvolver as habilidades que consideramos ser essenciais para favorecer a aprendizagem formal das equações do 1º grau no 7º ano do ensino fundamental.

Para a última etapa - análise dos documentos - a partir da análise de diferentes problemas que exploram objetos de conhecimento e habilidades que compõem as noções

iniciais de equações do 1º grau, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, classificaremos os diferentes tipos de situações. Mais adiante detalharemos essa etapa.

Não analisaremos os invariantes operatórios, pois, como mencionamos anteriormente, este aspecto necessita da ação do sujeito, ou seja, entende-se que para analisar os invariantes operatórios seria preciso dispor dos estudantes como participantes da pesquisa para extrair resultados mais consistentes, no entanto, esse estudo se restringe à uma análise documental.

Para identificarmos as situações nos livros didáticos, primeiro, observamos no sumário os capítulos e os tópicos buscando palavras-chave, tais como, "propriedades da igualdade", "operações inversas", fazendo assim um levantamento preliminar, com foco nas habilidades previamente identificadas. Em seguida, buscamos pelos códigos das habilidades que são indicados em todas as páginas dos livros (vale ressaltar que o material utilizado é referente ao manual do professor). Além disso, realizamos uma busca em todas as atividades e problemas, página por página de todos os livros analisados, para não corrermos o risco de alguma situação não ser devidamente identificada.

Após a identificação de todas as situações, para dar início as nossas análises, elencamos as categorias que nos auxiliaram na sistematização das situações encontradas. Partindo da seção 4.3, na qual fizemos um levantamento das habilidades que permitem desenvolver as noções de equação do 1º grau, destacamos as seguintes categorias:

- Ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração;
- Relações inversas entre operações de adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Relação de igualdade existente entre dois termos (para a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão);
- Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade;
- Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar; e
- Problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais.

Essas seis categorias abarcam o 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental (ver no diagrama 2) e, com base nelas foi possível selecionar as situações encontradas nos livros do 3º, 4º e 5º anos da coleção Buriti – Mais Matemática e do livro do 6º ano da coleção A Conquista da Matemática.

A análise segue a ordem cronológica dos livros, ou seja, inicia pelo livro do 3º ano, em seguida, do 4º ano, e assim por diante. Como já mencionado, as análises foram organizadas por meio das categorias que elencamos previamente. Para isso, foi feita uma breve descrição dos problemas e das atividades, destacando caminhos de resolução que podem ser seguidos pelos estudantes, deixando claro sua relação com a categoria, e consequentemente, sua contribuição para a aprendizagem formal das equações do 1º grau. Vale ressaltar que, os problemas e atividades encontrados foram propostos para o estudante, ou seja, não utilizamos os exemplos respondidos trazidos nos livros didáticos.

Os problemas encontrados foram classificados segundo a TCC em situações pertencentes ao campo das estruturas aditivas (envolvendo situações aditivas de composição, de transformação e de comparação) ou ao campo das estruturas multiplicativas (envolvendo situações multiplicativas de proporção simples, de proporção múltipla, de comparação multiplicativa e de produto de medida), contemplando também os problemas mistos, que envolvem raciocínios aditivos e multiplicativos (conforme apresentamos na seção 3.2). Como forma de representar as situações de acordo com a classificação da TCC construímos diagramas para sua representação segundo a proposta de Vergnaud. Vale ressaltar que, em alguns dos livros analisados não descrevemos todas as situações encontradas, pois, em alguns casos, elas se mostraram repetitivas (não acrescentando nenhum elemento novo), por isso, não julgamos necessária a sua discussão.

Não foi possível classificar algumas atividades encontradas nos livros didáticos segundo a teoria dos Campos Conceituais, envolvendo diferentes categorias. Dessa forma, criamos uma nova seção para estas atividades, uma vez que, devido à ausência de contextualização estas poderiam contemplar tanto o campo das estruturas aditivas (envolvendo situações aditivas de composição, de transformação e de comparação) como o campo das estruturas multiplicativas (envolvendo situações multiplicativas de proporção simples, de proporção múltipla, de comparação multiplicativa e de produto de medida) ou ainda os problemas mistos. Ou seja, eram questões que envolviam apenas cálculo numérico de adição, subtração, multiplicação ou divisão, sem necessidade de recorrer a cálculo relacional.

Ao final de todas as discussões das situações encontradas para cada categoria do livro analisado (excluindo as atividades que não foram possíveis classificar segundo TCC, conforme explicitamos acima), realizamos uma análise quantitativa destacando o número de situações que foram encontradas classificando-as em: problemas de estrutura aditiva, problemas de estrutura multiplicativa e problemas mistos. Essa análise nos deu um olhar mais preciso para que tipo de situação são mais exploradas pelos livros, se estas se apresentam em quantidade

significativa para a construção e/ou ampliação do conceito abordado, destacando também a diversificação dos problemas e se apresentam um nível crescente de complexidade a partir da ordem em que as situações aparecem, tomando como base o campo conceitual a que pertencem e sua devida classificação. Essa comparação foi realizada tanto numa mesma obra como entre uma obra e outra (este último aspecto não foi considerado para o livro A Conquista da Matemática, uma vez que, esta obra se distingue das demais).

Por fim, após descrevermos, classificamos e analisamos, segundo os critérios acima pontuados, todas as situações e atividades para todas as categorias, tendo em vista nosso interesse pelo ensino do tema, fizemos uma análise dos recursos utilizados para abordagem das situações e atividades nos livros didáticos, ou seja, elencamos quais ferramentas, símbolos, objetos os livros utilizam para representar ou auxiliar na resolução das situações e atividades propostas.

Em resumo, categorizamos, classificamos por tipos de situações (à luz da TCC) e analisamos os diferentes problemas e atividades encontrados nos livros didáticos com o propósito de investigar como as habilidades dos anos escolares pesquisados são propostas, na perspectiva de construir reflexões sobre como essas situações e representações possuem potencial para contribuir na aprendizagem do conceito de equação do 1º grau nos anos seguintes.

7 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse capítulo são apresentadas as análises das situações encontradas nos livros didáticos. Estas situações foram organizadas de acordo com as seis categorias elencadas previamente. Para cada categoria descrevemos e analisamos à luz da TCC as situações encontradas no(s) livro(s) didático(s), ou seja, há categorias em que existe a descrição e análise de apenas um livro, e existem outras que há a descrição e análise de até três livros, pois, a categoria abarca esses anos (ver o diagrama 2 da seção 4.3). Em seguida, ressaltaremos os recursos utilizados na abordagem das situações, tais como, símbolos, desenhos, objetos, que são propostos para auxiliar na compreensão e/ou resolução de uma determinada situação.

7.1 REPRESENTAÇÃO DE DIFERENTES SENTENÇAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Conforme discutimos anteriormente na seção 4.3, essa categoria permite que os estudantes compreendam a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças matemáticas com números naturais que resultem na mesma soma ou subtração, por exemplo, somando os números 5 e 3 encontramos o resultado 8, no entanto, existem outras adições que resultam nesse mesmo resultado, tais como, 2 e 6, 1 e 7, 4 e 4. Dessa forma, a proposta é o estudante perceber que 5 + 3 = 2 + 6 ou 2 + 6 = 1 + 7 ou 1 + 7 = 4 + 4, dentre outras relações. Essa compreensão nos auxiliará quando estiverem formalizando o conceito de equação do primeiro grau no 7º ano do ensino fundamental, pois, a igualdade representa que em cada membro de uma equação a soma ou subtração dos seus termos são iguais.

7.1.1 Livro Buriti – Mais matemática do 3º ano

No livro Buriti – Mais Matemática do 3º ano do ensino fundamental foram encontradas cinco situações envolvendo a ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração. Os problemas que iremos expor foram encontrados na unidade 2 do livro que trata sobre “Adição e subtração”, os quais passaremos a discutir a seguir.

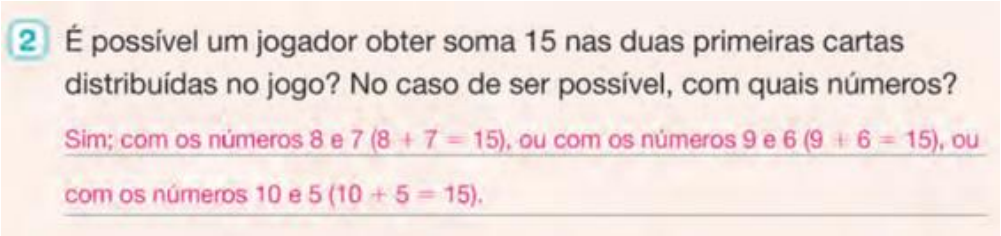
O primeiro problema apresenta um jogo que se chama “Fazendo quinze”, e os materiais necessários são: fichas numeradas de 1 a 10 e 10 feijões para a contagem de pontos. As orientações propostas pelo livro são as seguintes: o jogo inicia com a escolha de um carteador que deverá distribuir as cartas e determinar o número de rodadas a serem jogadas, que deverá ser entre 5 e 10. O carteador embaralha as cartas e distribui duas cartas para cada jogador, incluindo ele mesmo, deixando o restante das cartas no centro da mesa voltadas para baixo.

Cada jogador olha suas cartas (sem deixar que os demais jogadores vejam). O primeiro a jogar é aquele que está à esquerda do carteador, e assim por diante. Cada jogador, na sua vez, pode pedir mais de uma carta ao carteador; isso se repete até que o jogador diga que não quer mais cartas ou até que o jogador obtenha com a adição dos números de suas cartas, a soma maior que 15 (nesse caso, o jogador deverá mostrar a suas cartas e não participar mais dessa rodada). Quando nenhum jogador quiser mais cartas, faz-se a verificação das cartas e aquele que obtiver a adição dos números de suas cartas igual a 15 (ou se ninguém conseguir a soma igual a 15, aquele que conseguir a soma mais próxima de 15) ganha um feijão de cada jogador. Se der empate ninguém ganha. Após cada rodada, embaralham-se novamente as cartas. Vence o jogo que tiver mais feijões no fim de todas as rodadas.

Ao longo do jogo, os estudantes desenvolverão estratégias para a partir dos números das suas cartas compor a soma igual a 15, e perceber que existem algumas possibilidades para isso. A figura 6, apresenta uma pergunta sobre a possibilidade de obter a soma 15 nas duas primeiras rodadas do jogo; nesse caso, a ideia de igualdade é explorada, inicialmente, como noção operacional, ou seja, refere-se a contextos essencialmente aritméticos, no qual os estudantes percebem o sinal de igualdade como um símbolo operacional, isto é, um símbolo que indica uma ação a ser realizada, conforme apresentam os autores Ponte, Branco e Matos (2009).

De acordo com a teoria que utilizamos neste trabalho (a TCC) esse problema caracteriza-se como de estrutura aditiva, no grupo das situações de composição, no qual as partes deverão estar compreendidas entre os números de 1 a 10 e o todo, igual a 15.

Figura 6 – Representação de diferentes sentenças de adição e subtração



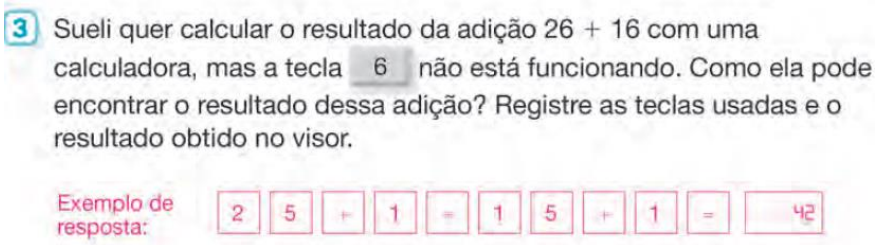
Fonte: Buriti mais (2017, p. 33-34).

No caso do problema acima, os estudantes irão em busca de todas as possibilidades, dentre os números disponíveis, de encontrar a soma igual a 15, considerando apenas as duas primeiras cartas distribuídas no jogo (obtendo como opção de resposta os números 8 e 7, 9 e 6 e 10 e 5). Nesse processo os estudantes começam a entender que não existe apenas um caminho para se chegar a um determinado valor e a perceber, mesmo que intuitivamente, o sinal de igualdade no sentido de equivalência. E, o desenvolvimento dessa noção da igualdade

(equivalência) é fundamental nos estudos das equações, pois, é por meio dessa ideia de igualdade que o estudante, no processo de formalização do conceito formal de equação do 1º grau no 7º ano, compreende que em ambos os membros de uma equação as somas ou subtrações de seus termos deverão ser iguais.

A situação seguinte (figura 7) representa um problema de estrutura aditiva, classificado como de composição de composições, na qual o todo é desconhecido e as partes (26 e 16) deverão ser recompostas de diferentes maneiras para se obter o todo. É proposto que o estudante, com o uso de uma calculadora, realize uma soma sem utilizar uma das teclas. A soma a ser realizada é 26 + 16 e o estudante deverá encontrar possibilidades para realizar essa soma sem utilizar a tecla 6 de sua calculadora, e uma dessas possibilidades é subtrair uma unidade de cada parcela e efetuar a soma 25 + 1 + 15 + 1, ou ainda, subtrair duas unidades 24 + 2 + 14 + 2, e com isso perceber que estas somas são iguais à soma 26 + 16.

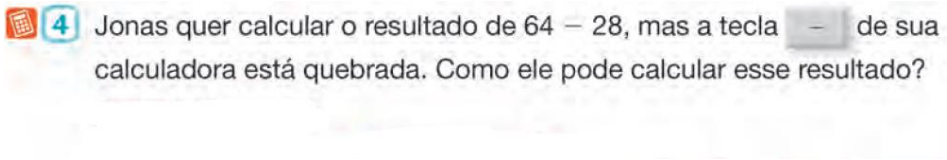
Figura 7 – Representação de diferentes sentenças de adição e subtração



Fonte: Buriti mais (2017, p. 45).

A próxima situação (figura 8) é semelhante a anterior, e se enquadra também no grupo dos problemas de estrutura aditiva, sob a perspectiva dos problemas de composição, em que as partes são conhecidas, mas não se sabe o valor do todo, caracterizando-se como um problema protótipo, isto é, apresentam menor complexidade e no caso dos problemas de composição se conhece o valor das partes e o todo é desconhecido. O problema propõe, ainda com o uso da calculadora, que o estudante descubra o resultado da subtração 64 – 28 sem utilizar a tecla menos (-) da calculadora. Umas das estratégias propostas pelo livro é, partir da menor parcela, no caso, 28, somar outros valores a essa parcela até chegar em 64, e em seguida, somar os valores que foram acrescentados à parcela 28, compondo, assim, o valor 36. Por exemplo: **28** + 30 + 2 + 4 = **64,** assim, se somarmos 30, 2 e 4 temos 36 (é nesse processo de somar os valores que foram acrescentados à parcela 28 que o estudante encontrará diferentes maneiras de representar o número 36); logo, 64 – 28 = 36.

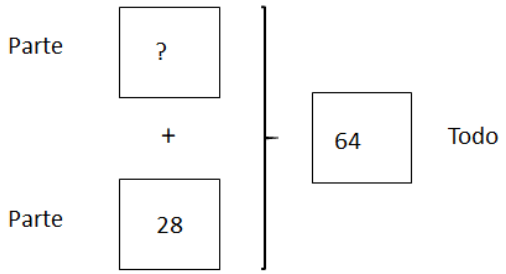
Figura 8 – Representação de diferentes sentenças de adição e subtração



Fonte: Buriti mais, (2017, p. 50).

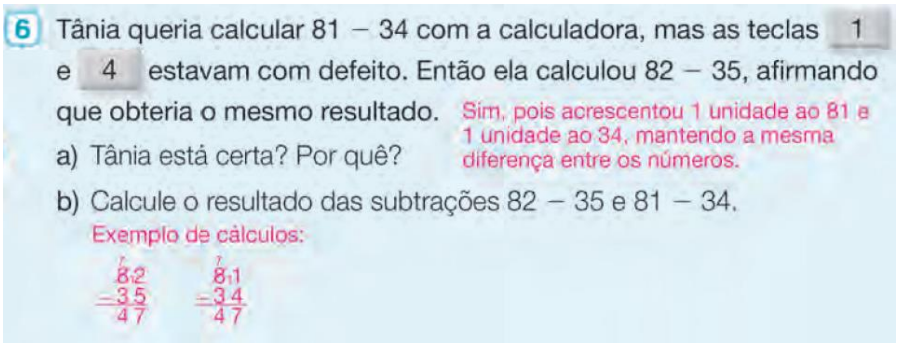
Uma outra perspectiva sobre o problema dado é a noção de operação inversa, uma vez que, é possível interpretá-lo da seguinte maneira: 28 mais um valor desconhecido é igual a 64; ou seja, representando esse valor desconhecido pelo $\square$ (faremos essa substituição durante todas as nossas análises sempre que precisarmos representar um elemento desconhecido), temos um problema de composição com umas das partes desconhecidas, onde, 28 + $\square$ = 64 (as partes são 28 e $\square$ e o todo 64), ou seja, este problema também pode estar compreendido na categoria "relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão". Sob esta perspectiva, podemos representar estas situações por meio do diagrama proposto por Vergnaud.

Diagrama 3 – Problema de composição.



A próxima situação (figura 9), também semelhante a anterior, propõe o uso mais uma vez da calculadora para realizar uma subtração entre dois valores sem utilizar duas teclas (o número 1 e o número 4). Esta caracteriza-se como mais uma situação no grupo das estruturas aditivas, dentro dos problemas de composição onde realizamos duas composições, na parcela 81 que se torna 82 (81 + 1) e, na parcela 34 que se torna 35 (34 +1).

Figura 9 – Ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração



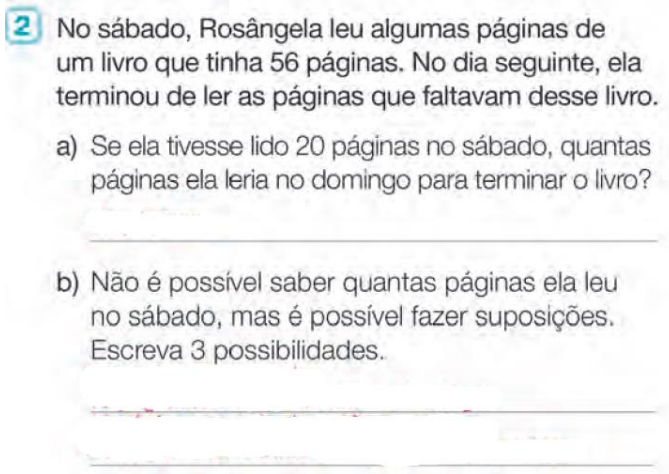
Fonte: Buriti mais (2017, p. 61).

No item a, o estudante é questionado sobre se a afirmação feita no enunciado da atividade está correta ou não e porquê. O enunciado afirma que Tânia precisou realizar a subtração entre os valores 81 e 34, no entanto, duas teclas de sua calculadora não funcionam (a do número 1 e a do número 4); ela então resolveu realizar uma adição a esses valores, acrescentando, assim, uma unidade a cada parcela (no minuendo e no subtraendo, resultando em: 82 e 35), acreditando estar encontrando o mesmo valor da primeira subtração.

Nesse item, o estudante deverá perceber que como foi acrescentado o mesmo valor a cada parcela da subtração o resultado da diferença não será alterado, chegando-se assim ao mesmo resultado. Essa característica é ratificada segundo uma das propriedades da igualdade que afirmam que: ao adicionarmos ou subtrairmos uma mesma quantidade de ambos os membros de uma igualdade, esta não se altera. Sendo assim, o item a, compreende a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos". No item b, o estudante verificará que as duas diferenças (82 – 35 e 81 – 34) representam duas formas distintas de encontrar o resultado 47. Dessa forma, o item b está compreendido na categoria desta seção.

A última situação que encontramos, também se trata de uma situação na seção destinada aos problemas. Esta caracteriza-se como um problema de estrutura aditiva, mais precisamente de composição, onde observamos situações envolvendo parte e todo, no caso, o todo é o total de páginas do livro e uma das partes é quantidade de páginas lidas por Rosângela, logo é um problema de 1º extensão no grupo das estruturas aditivas.

Figura 10 – Representação de diferentes sentenças de adição e subtração.



2 No sábado, Rosângela leu algumas páginas de um livro que tinha 56 páginas. No dia seguinte, ela terminou de ler as páginas que faltavam desse livro.

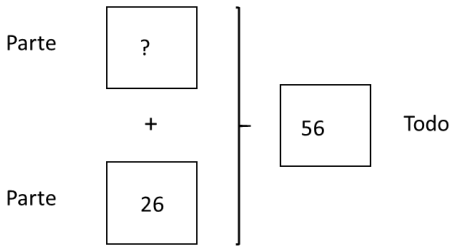
a) Se ela tivesse lido 20 páginas no sábado, quantas páginas ela leria no domingo para terminar o livro?

b) Não é possível saber quantas páginas ela leu no sábado, mas é possível fazer suposições. Escreva 3 possibilidades.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 52).

No item a, é dado o valor de uma das partes, 20, e, sabendo do valor do todo, 56, ou seja, o total de páginas do livro, é solicitado que se determine o valor da outra parte até então desconhecida. Nesse item, além da categoria abordada nesta seção (uma vez que, o estudante pode partir da parcela 20 e buscar valores que somados a essa parcela cheguem ao resultado 56, assim, esses valores encontrados pelos estudantes representarão diferentes formas de se obter a soma igual a 36), é possível observar a presença da categoria "relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão", pois, 20 acrescentado de um valor desconhecido resulta em 56, ou ainda, 26 + $\square$ = 56. A seguir temos a representação deste problema a partir do diagrama proposto por Vergnaud.

Diagrama 4 – Problema de composição.



No item b, percebemos que nenhuma das parcelas ou partes são apresentadas, só é conhecido o valor do todo, ou seja, é proposto ao estudante que faça suposições sobre a quantidade de páginas lidas por Rosângela no sábado. Essas tentativas permitem, ao estudante, encontrar diferentes formas de compor a quantidade 56. Temos como exemplos de respostas: 18 páginas no sábado e 38 no domingo ou 10 páginas no sábado e 46 no domingo, contemplando, assim, a categoria abordada nesta seção.

Terminada as situações encontradas no livro didático, apresentamos uma tabela com os tipos de situações para um olhar quantitativo da nossa pesquisa. Para a categoria "representação de diferentes sentenças de adição e subtração" foram encontradas um total de cinco problemas, sendo todas as situações apresentadas de estrutura aditiva.

Tabela 1 – Tipos de situações envolvendo a representação de diferentes sentenças de adição e subtração

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	5
Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	0

Fonte: A autora (2023).

Como é possível observar na tabela 1, são poucas as situações encontradas nesse livro didático para esta categoria, principalmente se considerarmos que essa habilidade começa a ser desenvolvida no 3º ano do ensino fundamental, abarcando apenas problemas de estrutura aditiva, não contemplando os problemas de estrutura multiplicativa e os problemas mistos não foram encontrados.

Percebemos que no primeiro problema (figura 6) a categoria é trabalhada de forma mais elementar, uma vez que, as fichas são numeradas de 1 a 10, reduzindo, assim, as possibilidades, por isso, encontrar a resposta se torna mais simples. Como ponta pé inicial para o trabalho com esta categoria, um jogo se mostra bastante promissor e instigante para os estudantes, pois, se bem conduzido estes aprendem de forma lúdica. Segundo Melo e Lima (2022), o jogo é considerado um recurso indispensável nas aulas de matemática, ainda segundo os autores, "o uso de jogos em sala de aula motiva e desperta o interesse do aluno, tornando a aprendizagem mais atraente e significativa" (p. 1).

Referente as situações apresentadas nas figuras 7, 8 e 9, percebe-se que, com o uso da calculadora, a noção intuitiva de equação está presente em cada uma das partes, ou seja, nas parcelas no caso da adição, e no minuendo e subtraendo no caso da subtração. Isto significa que a igualdade, no sentido de equivalência, está relacionada à composição e recomposição dos valores que correspondem às partes, por exemplo, no problema da figura 8, o estudante recompôs os valores 26 e 16, que são as partes, para compor cada valor de formas diferentes (no caso da primeira parcela: 25 + 1 ou 24 + 2, dentre outros; o mesmo raciocínio acontece com a segunda parcela).

Foi observado que alguns problemas apresentaram outras categorias para além da abordada nesta seção, é o caso dos problemas das figuras 8, 9 e 10. Na figura 8, é possível

também analisa-la sob a perspectivas das relações inversas, pois, a operação inversa à subtração é a adição, logo, se a – b = c, então, c + b = a; na figura 9, no item a, trata das relações de igualdade existente entre dois termos; e, na figura 10, no item a, assim como na figura 8, se refere às relações inversas.

7.2 RELAÇÕES INVERSAS ENVOLVENDO AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

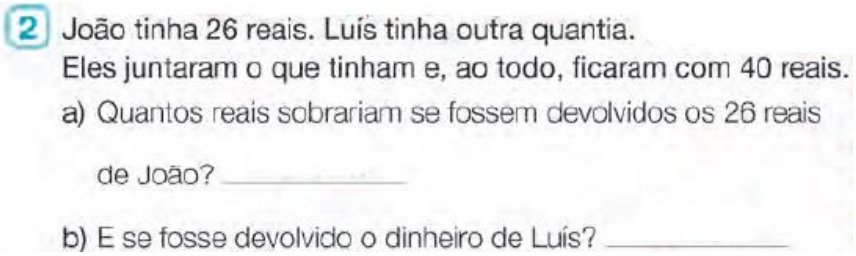
Em situações presentes nessa categoria um dos fatores (fator, quando se trata multiplicação) ou uma das parcelas (nas adições, ou ainda, pode-se dizer: uma das "partes" que é a linguagem utilizada na TCC) da operação é desconhecido, e a pergunta é feita com base nesse valor que até então se desconhece. Por exemplo, as relações inversas entre as operações de adição e subtração envolve a compreensão de que, se a + b = c, então, c – b = a e c – a = b; ou seja, se 10 + 6 = 16, então, 16 – 10 = 6 e 16 – 6 = 10, e, as relações inversas entre as operações de multiplicação e divisão implica saber que, se a x b = c, com a ≠ 0 e b ≠ 0, então, c ÷ a = b e c ÷ b = a, por exemplo, se 8 x 5 = 40, então, 40 ÷ 8 = 5 e 40 ÷ 5 = 8.

7.2.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano

No livro Buriti – Mais matemática do 4º ano do ensino fundamental foram encontradas três situações desta categoria: relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; mais precisamente, as relações inversas entre adição e subtração (as atividades que abordam as relações inversas de multiplicação e divisão encontradas neste livro não puderam ser classificadas segundo a TCC, conforme veremos no próximo capítulo).

O problema proposto na figura 11, explora relações inversas e é caracterizado como um problema de composição, compreendido no grupo das estruturas aditivas, pois, como já definido anteriormente na seção 5.2, este tipo de problema pode apresentar o valor do todo, nesse caso 40 reais, e uma das partes, 26 reais, para que o estudante descubra o valor da parte restante, que seria a quantia de Luís. É importante destacar que, em um problema de composição quando uma das partes é desconhecida, esta caracteriza-se como de 1ª extensão, e segundo a teoria de Vergnaud, configura-se como mais complexo do que o protótipo – no qual se conhece as partes e o todo é desconhecido.

Figura 11 – Relações inversas entre adição e subtração.

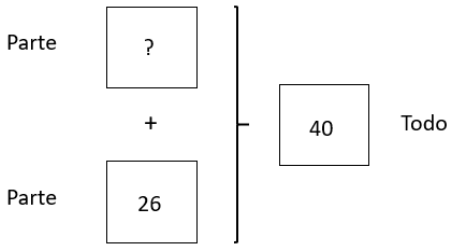


2 João tinha 26 reais. Luís tinha outra quantia.
Eles juntaram o que tinham e, ao todo, ficaram com 40 reais.
a) Quantos reais sobrariam se fossem devolvidos os 26 reais de João? _____
b) E se fosse devolvido o dinheiro de Luís? _____

Fonte: Buriti mais (2017, p. 52).

No item a, o estudante precisa descobrir a quantia que corresponde a Luís, e para isso ele utiliza os princípios das relações inversas, uma vez que, 26 + □ = 40, então, subtraindo o valor do todo, 40, com a outra parcela conhecida, 26 (que corresponde a quantia de João), ele obterá a outra parcela, até então desconhecida, que nesse caso resultará em 14 reais (que corresponde a quantia de Luís), ou seja, devolvendo os 26 reais de João restará 14 reais que corresponde a quantia de Luís. O diagrama sugerido por Vergnaud seria o seguinte:

Diagrama 5 – Problema de composição.

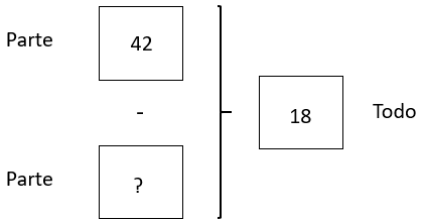


Sabendo agora a quantia que corresponde a Luís, o item b, propõe que o estudante verifique se o resultado que ele encontrou está correto, pois, devolvendo a quantia correspondente a Luís (14 reais), restará a quantia correspondente a João (26 reais), ou seja, 40 – 14 = 26, desse modo, os estudantes compreendem que, por meio da relação inversa da adição (a subtração) eles encontram a quantia até então desconhecida.

O próximo problema, também definido como de composição de 1º extensão, propõe uma ideia um pouco semelhante a anterior. Nesse problema (figura 12), o livro propõe, no item a, que o estudante descubra quantos andares Roberta desceu, por meio de uma subtração 42 - □ = 18, nesse caso, este item também pode corresponder a categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade", pois, o estudante poderá responder por meio dos princípios das relações inversas (ou seja, conhecendo essa relação, saber que 18 adicionado do elemento desconhecido resultará em 42), como também, utilizar o elemento desconhecido e buscar o valor que foi retirado de 42 e resultou em 18, ou seja, terá que descobrir o valor da

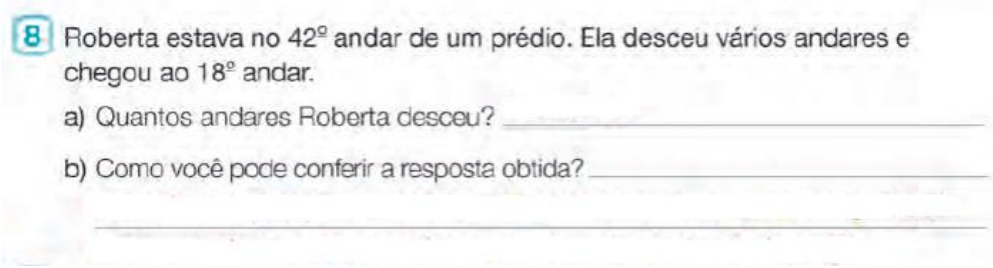
parcela que representa o quadrado, para isso, basta que ele subtraia o valor da parcela conhecida 42 pelo valor do resultado 18, obtendo a diferença, 24. A seguir apresentamos o diagrama que corresponde a este item.

Diagrama 6 – Problema de composição.



No item b, é proposto que o estudante verifique se o resultado encontrado está correto, e para isso basta que ele some o resultado da diferença entre os valores 42 e 18 realizado no item a (que corresponde a 24) com 18 (que corresponde à diferença, ou seja, o resultado da subtração entre 42 e 24) e obterá como resultado, 42, que é o andar inicial de onde Roberta partiu.

Figura 12 – Relações inversas entre adição e subtração.


8 Roberta estava no 42º andar de um prédio. Ela desceu vários andares e chegou ao 18º andar.

a) Quantos andares Roberta desceu? _____

b) Como você pode conferir a resposta obtida? _____

_____

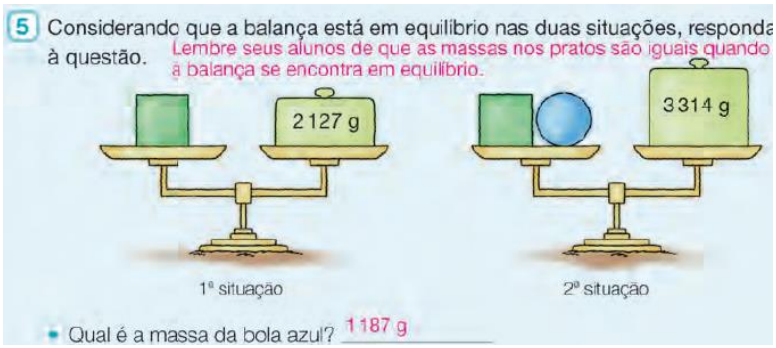
Fonte: Buriti mais (2017, p. 54).

A última situação (figura 13), ao contrário das anteriores, propõe (por meio da representação da balança de dois pratos) que o estudante descubra o valor da massa de um dos objetos da balança (a esfera). O livro recomenda que o professor trabalhe algumas situações com os estudantes para que eles as analisem e verifiquem se são verdadeiras ou não, por exemplo, se é possível afirmarmos, observando apenas a situação 1, que a massa do cubo verde é mais de 2000g, ou, observando a situação 2, é possível concluirmos que a esfera azul tem massa maior que o cubo.

Partindo da ideia de que o valor da massa do cubo mais o valor da massa da esfera azul corresponde a 3314g (pois a balança da situação 2 está em equilíbrio), então, sabendo a massa do cubo, basta subtrairmos 3314g pela massa do cubo, e o resultado da diferença será o valor

da massa correspondente a esfera; ou seja, sabendo que a massa do cubo é 2127g (por meio da situação 1, pois, a balança está em equilíbrio, assim, possuem a mesma massa, correspondendo a 2127g) temos que: 3314g – 2127g = 1187g, que se refere a massa da esfera azul.

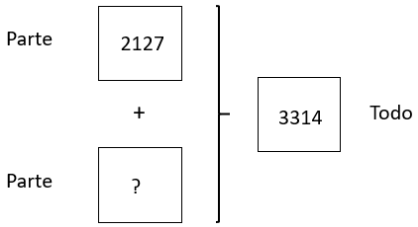
Figura 13 – Relações inversas entre adição e subtração.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 63).

Observando a situação 1 da atividade, percebemos que se trata de uma comparação, em que o estudante, por meio da compreensão sobre a ideia de igualdade como noção de equivalência proposto na balança de dois pratos, identifique que o cubo verde possui uma massa de 2127g (sabendo que em ambas as situações a balança está em equilíbrio). Na situação 2, é possível verificar uma composição de 1º extensão, porque o estudante sabendo o valor da massa do cubo (parte) e sabendo o valor da massa do objeto maior do outro prato de 3314g (todo), ele precisará buscar o valor da massa da esfera azul (parte desconhecida). O diagrama referente a esta atividade seria:

Diagrama 7 – Problema de composição.



Agora que apresentamos os problemas propostos pelo livro didático analisado, mostramos abaixo na tabela 2 as quantidades de situações de acordo com o tipo.

Tabela 2 – Tipos de situações envolvendo relações inversas.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	3

Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

É notório que no livro didático Buriti – Mais Matemática do 4º ano existem poucas situações que abordam a categoria analisada, apresentando apenas três problemas, totalizando 3 situações, todas pertencentes as estruturas aditivas, não contemplando nenhum problema de estrutura multiplicativa ou problema misto.

O primeiro e segundo problemas (figuras 11 e 12, respectivamente), temos duas categorias presentes: a que aborda o elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade e a categoria das relações inversas. Situações como esta tendem a mobilizar mais conhecimentos dos estudantes, pois lhes proporcionam acessar e ampliar esquemas na busca por compreender os conceitos presentes nessas situações. No problema apresentado na figura 13, percebemos em cada balança uma perspectiva diferente: em uma delas (situação 1), há uma comparação e na outra (situação 2), uma composição, mobilizando, assim, conhecimentos distintos, dentro do campo aditivo, fazendo uso de uma representação (balança) não explorada em outras situações anteriores.

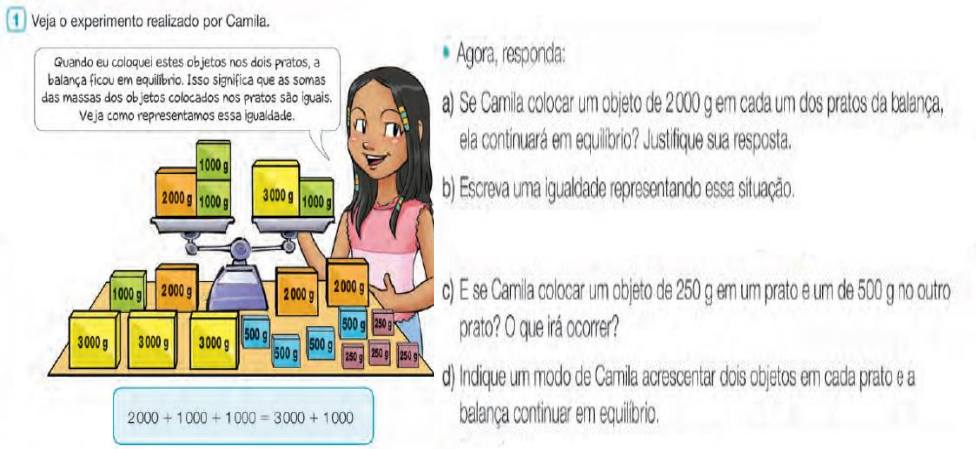
7.3 RELAÇÃO DE IGUALDADE EXISTENTE ENTRE DOIS TERMOS

O conceito chave desta categoria se refere ao princípio aditivo da igualdade, este princípio afirma que ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir o mesmo valor em ambos os membros de uma igualdade, essa relação de igualdade se mantém inalterada, segundo Kuhn e Klafke (2021), isso implica entender que o sinal de igualdade representa uma relação de equivalência. Nos anos iniciais, essa relação é, muitas vezes, interpretada como significando "é a mesma quantidade que" ao expressar uma relação entre quantidades equivalentes.

7.3.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano

No livro Buriti – Mais Matemática, do 4º ano do ensino fundamental, foram encontradas três situações que envolvem a relação de igualdade existente entre dois termos, no qual todas são de estrutura aditiva. Vale ressaltar que, neste ano escolar, as relações de igualdade se referem a adição e subtração apenas, somente a partir do 5º ano essa relação é ampliada para as operações de multiplicação e divisão. A primeira delas está na seção sobre as “propriedades da igualdade”, na qual é utilizada a representação da balança de dois pratos (figura 14).

Figura 14 – Relação de igualdade existente entre dois termos.

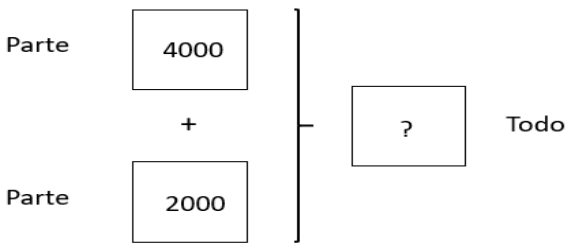


Fonte: Buriti mais (2017, p. 55).

O trecho acima caracteriza-se como um problema que pertence ao campo das estruturas aditivas. No que se refere a balança de dois pratos, é possível retirar ou adicionar massas dos dois pratos e com isso estabelecer uma relação de equilíbrio e desequilíbrio, assim, a balança representa uma relação de comparação. No entanto, classificaremos este problema como pertencente ao grupo das composições, pois, toda balança de dois pratos estabelecerá uma relação de comparação, então nosso foco será as relações estabelecidas para além da comparação, já que é uma condição desse instrumento.

Observando os itens a e d, percebemos uma composição, pois, em cada prato temos 4000g (que representa uma parte dentro do problema de composição) e, no caso do item a, será acrescentado um objeto de massa equivalente a 2000g em cada um dos pratos (que representa a outra parte), assim, o valor do todo corresponderá a 6000g e a balança permanecerá em equilíbrio, uma vez que, pelo princípio aditivo da igualdade, como foi adicionado um objeto de mesma massa em ambos os pratos, em uma balança inicialmente em equilíbrio, esta permanecerá em equilíbrio. A seguir, apresentamos o diagrama correspondente ao item a.

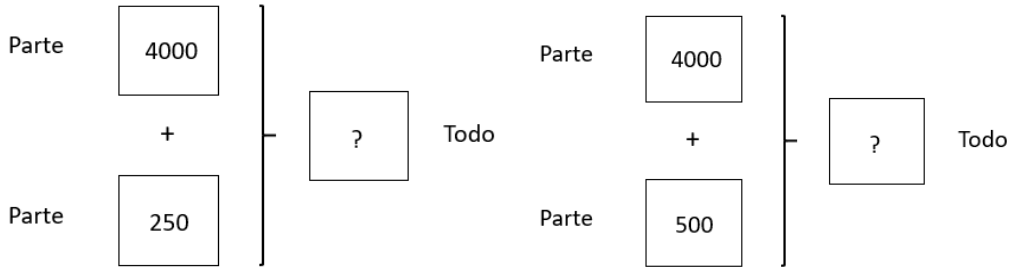
Diagrama 8 – Problema de composição.



O item d segue a mesma lógica do item a, diferindo apenas nas opções de resposta, pois, como não foi estipulado a massa dos objetos a serem colocados em cada prato, ampliam-se as opções de resposta dos estudantes. Esse item propõe adicionar dois objetos de mesma massa em cada um dos pratos, como exemplos temos: 2 objetos de 500g; 2 objetos de 250g; 1 objeto de 500g e outro de 250g, dentre outras opções. Dessa forma, Camila estará garantindo o equilíbrio da balança.

No item c, é proposto o acréscimo de massas de valores distintos em cada prato (250g em um prato e 500g em outro prato), com isso, pelo princípio acima citado não será possível a balança permanecer em equilíbrio, pois, foram acrescentados objetos de massas diferentes, não garantindo assim a equivalência entre os dois pratos da balança, pois, o total de massas de cada prato não será o mesmo, sendo 4250g em um prato e 4500g em outro. A seguir, apresentamos o diagrama correspondente a cada prato a partir do que é solicitado no item c.

Diagrama 9 – Problema de composição.



É preciso compreender que os dois lados da balança precisam ter um total de massas equivalentes para a balança ficar em equilíbrio. Outra percepção interessante é o estudante entender o que acontece quando há alteração das massas em cada prato, ou seja, o que é possível observar colocando objetos com massas iguais e diferentes e como escrever essas igualdades representando cada situação em linguagem matemática.

Nunes, Carraher e Schliemann (2011), afirmam que a balança de dois pratos representa uma ferramenta essencial para a introdução da álgebra, pois exploram dois aspectos que são grandes obstáculos para os estudantes na compreensão da álgebra escolar: 1) a operação sobre incógnitas; 2) a utilização de um conceito de equivalência distinto dos significados anteriormente atribuídos pelos alunos ao sinal de igual. Gomes e Noronha (2022), afirmam que por meio da metáfora da balança é possível "visualizar", de modo mais claro, que "a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos", conforme orientado pela BNCC (Brasil, 2018, p. 287).

É indispensável que os estudantes desenvolvam esta habilidade, uma vez que, quando apresentado as propriedades das equações no 7º ano, essa relação será retomada, só que por meio de resolução de equações do 1º grau quando se fala em: ao somar ou subtrair o mesmo valor do primeiro e segundo membro da equação esta não se altera, ou seja, se obtém uma equação equivalente a primeira.

Na situação seguinte (figura 15), o estudante precisa analisar quais objetos de mesma massa estão em ambos os lados da balança, e a partir disso conseguir responder à questão. Temos, portanto, uma atividade pertencente ao campo das estruturas aditivas, sob o aspecto comparativo, se observarmos a balança e a relação que ela estabelece entre as massas de ambos os pratos; e, representa uma composição, assim como no problema anterior, pois, sabendo o valor do todo (soma das massas de cada prato) será retirado uma quantidade (de ambos os pratos) que podemos considerar como uma das partes.

Figura 15 – Relação de igualdade existente entre dois termos.

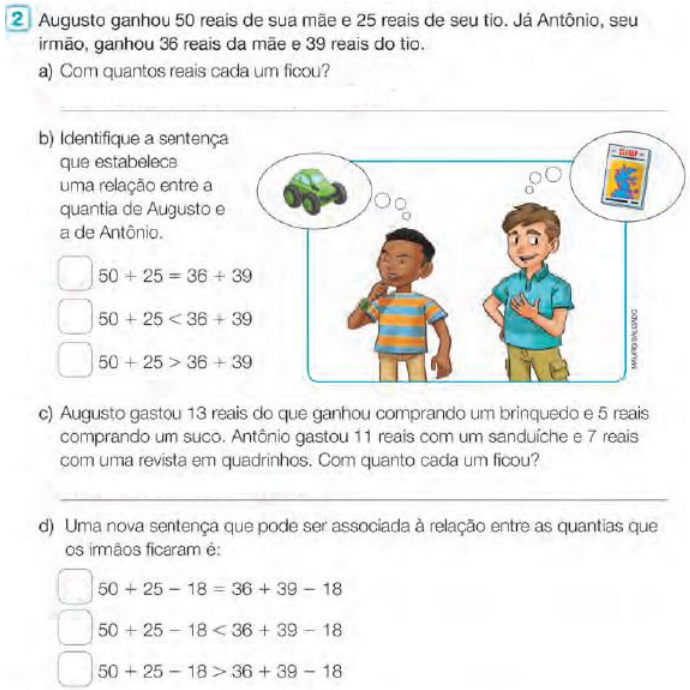
Fonte: Buriti mais (2017, p. 56).

Ao contrário do que é proposto na atividade anterior (figura 14), que retratava a adição de objetos, nesta atividade o foco é a subtração ou a retirada de objetos. De acordo com o que está posto na balança o estudante terá três opções de respostas: retirar um objeto de 1000g de cada lado; retirar um objeto de 500g de cada lado ou retirar dois objetos, um de 100g e o outro de 500g de cada prato; em todos os casos a balança continuará em equilíbrio.

Ainda no grupo dos problemas de estrutura aditiva, referente as propriedades da igualdade, temos mais um problema (figura 16). No entanto, a questão envolve três raciocínios distintos de estrutura aditiva: a composição, a comparação e a transformação. No item a, temos uma composição, na qual conhecemos o valor das partes de Augusto e Antônio e se quer saber o valor do todo (caracterizando um protótipo de composição); já nos itens b e d, temos uma relação de comparação entre as quantias de Augusto e Antônio; e, no item c, é proposto uma

transformação, pois, eles gastaram uma parte de suas quantias e é questionado sobre a quantia que restou para cada um após esse gasto.

Figura 16 – Relação de igualdade existente entre dois termos.



2 Augusto ganhou 50 reais de sua mãe e 25 reais de seu tio. Já Antônio, seu irmão, ganhou 36 reais da mãe e 39 reais do tio.

a) Com quantos reais cada um ficou?

b) Identifique a sentença que estabelece uma relação entre a quantia de Augusto e a de Antônio.

- ☐ 50 + 25 = 36 + 39
- ☐ 50 + 25 < 36 + 39
- ☐ 50 + 25 > 36 + 39

c) Augusto gastou 13 reais do que ganhou comprando um brinquedo e 5 reais comprando um suco. Antônio gastou 11 reais com um sanduíche e 7 reais com uma revista em quadrinhos. Com quanto cada um ficou?

d) Uma nova sentença que pode ser associada à relação entre as quantias que os irmãos ficaram é:

- ☐ 50 + 25 − 18 = 36 + 39 − 18
- ☐ 50 + 25 − 18 < 36 + 39 − 18
- ☐ 50 + 25 − 18 > 36 + 39 − 18

Fonte: Buriti mais (2017, p. 56).

No item a, ao somar as duas partes referentes a Augusto e Antônio o estudante irá perceber que ambos possuem a mesma quantia, no caso, 75 reais (caracterizando a composição); já no item b, o estudante deverá representar a quantia dos dois rapazes por meio do sinal de igualdade (configurando uma comparação). No item c, ocorre uma transformação em que tanto Augusto como Antônio gastam a mesma quantia (Augusto gasta 13 reais com brinquedo e 5 reais com um suco, totalizando 18 reais; e Antônio gasta 11 reais com um sanduíche e 7 reais com uma revista em quadrinhos, totalizando também 18 reais), sabendo que eles gastaram o mesmo valor, e realizando uma nova comparação após esses gastos, eles permanecerão com a mesma quantia, só que agora com 57 reais, ou seja, subtraindo o mesmo valor (18 reais) em quantias iguais (75 reais) obtemos os mesmo valor para ambos. Vale ressaltar que, esta situação aborda a mesma ideia das situações anteriores só que sem a representação da balança de dois pratos, exigindo, assim, um pouco mais de conhecimento dos estudantes. Abaixo apresentamos os diagramas referentes aos itens a e c.

Diagrama 10 – Problema de composição (item a).

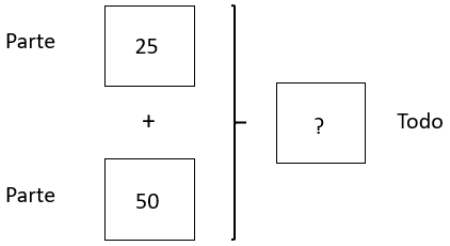
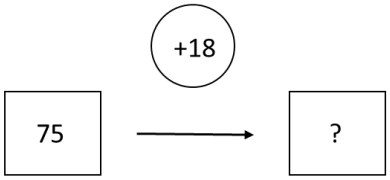


Diagrama 11 – Problema de transformação (item c).



Diante da categoria: relação de igualdade existente entre dois termos, percebe-se ao observar a tabela 3 que os tipos de situações são bem escassos, comtemplando este livro apenas situações pertencentes ao campo das estrutura aditiva.

Tabela 3 – Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	3
Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

Na primeira situação (figura 14) proposta pelo livro explica o significado da balança estar em equilíbrio e estabelece uma relação entre o equilíbrio da balança com a sinal de igualdade, ou seja, nesse momento o sinal de igualdade está posto no sentido de equivalência, reforçando o conhecimento sobre as propriedades da igualdade. Essa atividade também propõem a representação dos objetos da balança em equilíbrio na linguagem matemática, ou seja, utilizando símbolos próprios com o propósito de comunicar ideias matemáticas. O segundo problema (figura 15), se apresenta de forma bem mais elementar se comparada a anterior, pois, explora apenas a noção de igualdade como sinônimo de equivalência.

A última situação (figura 16), caracteriza- se por um problema que não utiliza a balança de dois pratos, como nas situações anteriores, mas busca estabelecer uma relação entre duas quantidades (que são iguais) e demonstrar que ao subtrair o mesmo valor de ambas as quantias, estas permanecem iguais, ou seja, propõe desenvolver no estudante o princípio aditivo da igualdade, o que também estava sendo feito nas situações anteriores.

7.3.2 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano

Sobre a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos", encontramos no livro do 5º ano três situações na unidade 4, na seção "propriedades da igualdade". A primeira consiste em propor que o estudante perceba o que é necessário para deixar a balança em equilíbrio e a partir disso explorar ainda mais a noção de equilíbrio e sua relação com as propriedades da igualdade. É um problema pertencente as estruturas aditivas, sob duas perspectivas, assim como as situações anteriores que envolvem a balança de dois pratos: comparativa, observando os dois pratos da balança que comparam as massas dos objetos; e, composição, pois, em cada prato será adicionado ou retirado (parte) massas de modo que, ao final, o total de massas (todo) de ambos os pratos sejam os mesmos, o que garante a equivalência que é a proposta da balança.

Figura 17 – Relação de igualdade existente entre dois termos.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 124).

Na atividade acima, para que a balança fique em equilíbrio as massas dos dois pratos deverão ser iguais. Vale ressaltar que, não existe uma única resposta para a atividade, pois, os estudantes podem construir diversas respostas retirando ou acrescentando pesos[5] aos pratos, por exemplo, colocar um peso de 200g e outro de 50g no prato da direita que resultará num peso total de 550g, que é o mesmo no prato da esquerda; ou ainda, retirar todos os pesos de ambos os pratos colocar em um dos pratos um peso de 1kg e no outro dois pesos de 500g, dentre outras possibilidades.

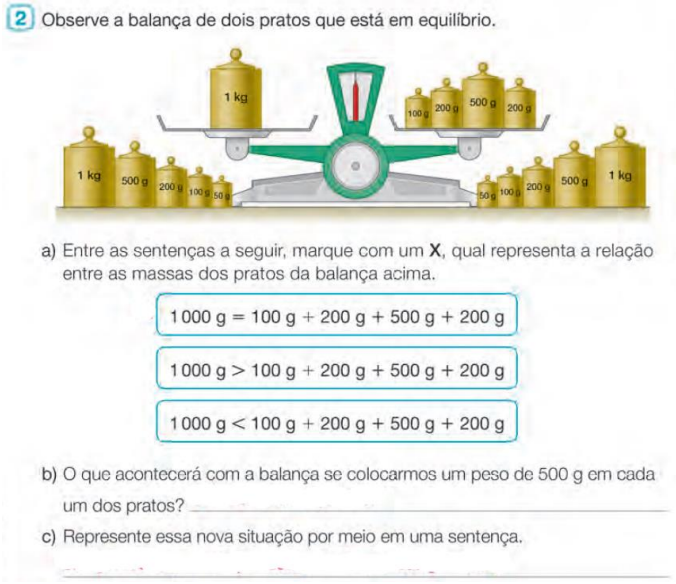
A próxima situação é uma ampliação da primeira, agora partindo da uma balança em equilíbrio. Assim como a atividade anterior, esta também pertence as estruturas aditivas, pois, além da balança por si só já estabelecer uma relação de comparação, no item a temos um reforço

[5] A balança de dois pratos é um instrumento utilizado para medir a massa de um corpo, os "pesos" utilizados na balança possuem massa em gramas ou quilogramas e são utilizados para comparar e encontrar a massa de um objeto.

dessa comparação proposta pela balança; e, no item b, temos uma composição, porque realiza-se em cada prato uma adição, de modo a compor um novo todo.

No item a, os estudantes precisam marcar dentre as três relações apresentadas qual representa a relação entre os pesos dos pratos da balança. A ideia é que eles compreendam que a balança em equilíbrio retrata uma igualdade, uma vez que, o equilíbrio se dá por meio da mesma representação nos dois pratos, ou seja, ambos os pratos precisam estar com a mesma massa.

Figura 18 – Relação de igualdade existente entre dois termos.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 124).

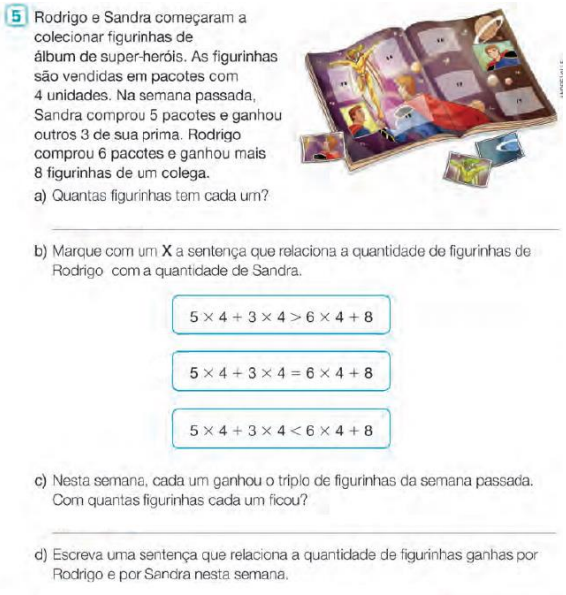
O item b leva os estudantes a perceberem que adicionando um mesmo valor de massa em ambos os pratos a balança continua em equilíbrio. Este representa um princípio importantíssimo para desenvolver a noção formal de equação do 1º grau, pois, como já ressaltado anteriormente, de acordo com o princípio aditivo da igualdade ao adicionar ou subtrair o mesmo valor em ambos os membros de uma igualdade, essa relação de igualdade se mantém a mesma. E assim como mostramos na subseção anterior a balança de dois pratos é um instrumento significativo para desenvolver esse princípio.

No item c, os estudantes precisarão representar a situação proposta no item b, ou seja, sabendo que em cada prato existem um total de 1000g e, acrescentando **500g** em cada prato teremos um novo total de 1500g em cada prato da balança. Como em um prato temos apenas um peso de massa igual 1kg ou 1000g, adicionando 500g, temos: 1000g + **500g**. No outro prato temos 4 pesos com massas iguais a 100g, 200g (sendo dois objetos com essa massa) e 500g,

acrescentando 500g nesse prato, temos: 100g + 200g + 500g + 200g + **500g**. Como o peso acrescentado nos dois pratos possui a mesma massa, temos: 1000g + **500g** = 100g + 200g + 500g + 200g + **500g**, resultando numa nova igualdade equivalente a primeira.

Na última situação temos um problema misto, envolvendo operações de adição e multiplicação. No enunciado do problema existem relações características de uma transformação, pois, tanto Rodrigo e Sandra haviam comprado uma quantidade inicial de pacotes de figurinhas e ganham (transformação) uma outra quantidade de pacotes de figurinhas.

Figura 19 – Relação de igualdade existente entre dois termos.



5 Rodrigo e Sandra começaram a colecionar figurinhas de álbum de super-heróis. As figurinhas são vendidas em pacotes com 4 unidades. Na semana passada, Sandra comprou 5 pacotes e ganhou outros 3 de sua prima. Rodrigo comprou 6 pacotes e ganhou mais 8 figurinhas de um colega.

a) Quantas figurinhas tem cada um?

b) Marque com um X a sentença que relaciona a quantidade de figurinhas de Rodrigo com a quantidade de Sandra.

$5 \times 4 + 3 \times 4 > 6 \times 4 + 8$

$5 \times 4 + 3 \times 4 = 6 \times 4 + 8$

$5 \times 4 + 3 \times 4 < 6 \times 4 + 8$

c) Nesta semana, cada um ganhou o triplo de figurinhas da semana passada. Com quantas figurinhas cada um ficou?

d) Escreva uma sentença que relaciona a quantidade de figurinhas ganhas por Rodrigo e por Sandra nesta semana.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 126).

No item a, é pedido que o estudante determine quantas figurinhas cada um tem, sabendo que cada pacote possui 4 figurinhas e Sandra comprou 5 pacotes e ganhou mais 3 pacotes da sua prima, totalizando 8 pacotes. Para encontrar a quantidade de figurinhas dela basta multiplicar o total de pacotes por 4, que resulta em 4 x 8 = 32 figurinhas, ou ainda, 5 x 4 + 3 x 4 = 32 figurinhas; o mesmo raciocínio deve ser feito para descobrir o total de figurinhas de Rodrigo, ele havia comprado 6 pacotes de figurinhas e ganhou mais 8 figurinhas, ou seja, 6 x 4 + 8 = 32 figurinhas. Neste item, percebemos relações de proporção simples, um para muitos, pois estabelece uma relação de proporcionalidade entre quatro grandezas (duas a duas de mesma espécie) que estão relacionadas por uma taxa entre as grandezas de diferentes espécies, as duas grandezas que temos são: números de pacotes de figurinhas e quantidade de figurinhas. De acordo com Vergnaud o diagrama que representa uma situação desse tipo é o seguinte:

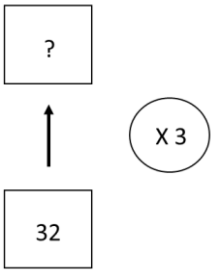
Diagrama 12 – Problema de proporção simples.

Figurinhas de Sandra		Figurinhas de Rodrigo	
Pacotes de figurinhas	Quantidade de figurinhas	Pacotes de figurinhas	Quantidade de figurinhas
1	4	1	4
8	?	6	?

No item b, é proposto que se identifique qual sentença matemática representa a quantidade de figurinhas de Sandra e Rodrigo estabelecendo uma relação entre as duas quantidades, nesse momento, é esperado que os estudantes percebam que Sandra e Rodrigo têm a mesma quantidade de figurinhas, logo, a relação estabelecida entre suas figurinhas é de uma igualdade. Neste item se estabelece uma relação de comparação entre as quantidades de figurinhas de Sandra e Rodrigo.

Em seguida, no item c, temos uma multiplicação comparativa, pois, se propõe triplicar os valores que cada um tinham na semana passada, ou seja, como Sandra e Rodrigo tinham um total de 32 figurinhas cada, temos: 32 x 3 = 96 figurinhas, logo, cada um tem agora 96 figurinhas. No item d, se pede a representação dessa triplicação por meio de uma sentença matemática, tomando como base a representação do item a, temos: 3 x (5 x 4 + 3 x 4) = 3 x (6 x 4 + 8). A seguir apresentamos o diagrama que corresponde a quantidade de figurinhas de Rodrigo e Sandra após triplicar sua quantidade de figurinhas.

Diagrama 13 – Problema de comparação multiplicativa.



Para esta categoria, assim como no livro do 4º ano, é possível observar que não foram encontradas muitas situações, embora encontramos uma situação pertencente aos problemas mistos que se mostrou bastante instigante propondo mobilizar relações tanto das estruturas aditivas como das estruturas multiplicativas.

Tabela 4 – Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.

Tipos de situações	**Quantidade**

Problemas de estrutura aditiva	2
Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	1

Fonte: A Autora (2023).

Como é apresentado na tabela, para o 5º ano dos anos iniciais, a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos" apresenta três situações, sendo duas delas atividades de estrutura aditiva e um problema que perpassa pelas estruturas aditivas e multiplicativas caracterizando-se como um problema misto. Ao longo das duas atividades, até chegar ao problema existe um crescente nível de complexidade, de modo que, na primeira atividade (figura 17) observamos a igualdade no sentido de equivalência, em que o estudante encontra inúmeras soluções por meio da manipulação de diferentes pesos com diferentes massas (o que torna o problema ainda mais interessante).

A atividade seguinte (figura 18), se apresenta ainda mais rica em relações e elementos, pois, permite ao estudante comparar as massas que se encontram sobre os pratos da balança, alterar a quantidade de pesos sobre os pratos de modo a perceber que sempre adicionamos um objeto de mesma massa em ambos os pratos a balança continuará em equilíbrio e representar esta nova relação (após o acréscimo de um mesmo objeto em cada prato) por meio de uma sentença matemática.

A última situação que encontramos é a mais complexa dentre todas encontradas, porque estimula nos estudantes diversos conhecimentos, perpassando pelas estruturas aditivas e multiplicativas. Nesse problema, temos relações de transformação, comparação, multiplicação comparativa e proporção simples, ou seja, esse problema mobiliza e desenvolve diversos esquemas nos estudantes que, se bem abordados pelo professor, tendem a permitir uma aprendizagem significativa sobre os conceitos envolvidos.

7.3.3 Livro A Conquista da Matemática do 6º ano

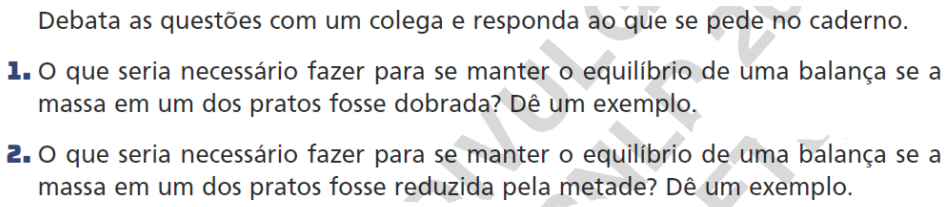
O livro não explora muitas situações que abarcam a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos", pois, encontramos poucas situações que a contemplam. O problema apresentado a seguir pertence a unidade 9 que trata sobre "Massa, volume e capacidade", no capítulo 1, que discorre sobre unidades de medidas de massa, e faz uso da balança de dois pratos como um dos instrumentos para medir massa.

Inicialmente, o livro faz uma breve explanação sobre esse instrumento (a balança de dois pratos), com o objetivo de explorar as propriedades da igualdade e a noção de equilíbrio,

retomando a ideia do princípio da equivalência visto em anos anteriores. Em seguida, propõe duas atividades que exploram a ideia de equivalência com a retirada ou acréscimo de objetos e, como isso, interferir no equilíbrio da balança. O propósito do problema, de acordo com as orientações do livro, é que os estudantes percebam que há uma relação diretamente proporcional entre as operações efetuadas e a massa colocada em cada um dos pratos de uma balança para manter o equilíbrio entre eles, ou seja, o mesmo fator deve ser utilizado nos dois pratos para manter o equilíbrio da balança.

Na primeira situação (figura 20), temos um problema que questiona os estudantes o que seria necessário para uma balança permanecer em equilíbrio caso a massa de um dos seus pratos fosse dobrada. Se o estudante compreendeu o princípio da equivalência perceberá que, se de um lado da balança o valor da massa foi dobrado, para que esta permaneça em equilíbrio o mesmo deverá ser feito no outro prato, ou seja, o valor da massa do outro prato também deverá ser dobrado. Por exemplo, em uma balança em equilíbrio, se em um prato temos um total de 1000g e o valor desta massa é dobrado, ou seja, 2000g, então, para manter essa mesma balança em equilíbrio devemos dobrar o valor da massa do outro prato, passando também para 2000g.

Figura 20 – Relação de igualdade existente entre dois termos.



Debata as questões com um colega e responda ao que se pede no caderno.

1. O que seria necessário fazer para se manter o equilíbrio de uma balança se a massa em um dos pratos fosse dobrada? Dê um exemplo.
2. O que seria necessário fazer para se manter o equilíbrio de uma balança se a massa em um dos pratos fosse reduzida pela metade? Dê um exemplo.

Fonte: Giovanni Júnior; Castrucci (2018, p. 263).

Na 2 situação (ainda na figura 20), segue a mesma ideia apresentada na questão anterior, mas agora ao invés de ser dobrado o valor da massa de um dos pratos da balança, esse valor agora será reduzido à metade. Mais uma vez o estudante seguindo princípio da equivalência deverá perceber que como um dos pratos o valor da massa foi reduzido à metade, o mesmo deverá ocorrer no outro prato, ou seja, o valor da massa desse prato deverá ser reduzido à metade. Seguindo o exemplo dado na atividade 1, temos que: se inicialmente cada prato da balança possui um total de 1000g, se reduzirmos a metade o valor da massa correspondente a um dos pratos, passando para 500g, o mesmo deverá ser feito no outro prato, que também deverá ficar com 500g.

Estas atividades pertencem as estruturas multiplicativas, caracterizando-se como uma comparação multiplicativa, pois, por si só a balança de dois pratos já estabelece essa relação de comparação, e é multiplicativa por fazer uso de termos comuns da linguagem multiplicativa, tais como, “dobro” e “metade”. A seguir apresentamos o diagrama que corresponde às atividade 1 e 2, tomando os exemplos das massas indicadas na descrição dessa atividades:

Diagrama 14 – Problema de comparação multiplicativa (exemplo da situação 1).

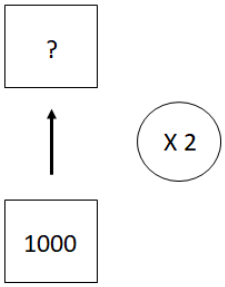
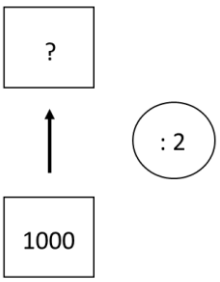


Diagrama 15 – Problema de comparação multiplicativa (exemplo da situação 2).



Como é possível perceber na tabela abaixo, há apenas duas situações que se enquadram nos “problemas de estrutura multiplicativa”.

Tabela 5 – Tipos de situações envolvendo relação de igualdade existente entre dois termos.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	0
Problemas de estrutura multiplicativa	2
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

É relevante salientar que, este livro do 6º ano pertence a outra coleção e outra etapa de escolaridade, e por isso não podemos realizar uma comparação com os outros anos analisados para essa categoria. O livro analisado não apresentou nenhuma outra situação que abarcasse algum tipo de atividade ou problema de estrutura aditiva, muito menos problemas mistos. É

importante destacar que, tanto a quantidade, quanto a ínfima variedade de situações apresentadas neste livro do 6º ano escolar compromete de forma significativa a aprendizagem do estudante, assim como a verificação da aprendizagem, pois, mesmo esta categoria sendo trabalhada no 4º e no 5º anos dos anos iniciais as situações propostas para o 6º ano não se mostram suficientes para verificar se o estudante devolveu de forma significativa esta categoria.

7.4 ELEMENTO DESCONHECIDO QUE TORNA VERDADEIRA A IGUALDADE

Esta categoria está intimamente relacionada a categoria "relações inversas", vista anteriormente, pois, ela permite ao estudante reconhecer o sentido de equivalência no sinal de igualdade. Pitombeira (2020) nos diz que a habilidade que envolve a categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade" trata do princípio do estudo das equações e sua determinação pode ser realizada a partir do uso das operações inversas. Partindo dessa ideia, e sabendo que em ambos os membros da sentença dada, o resultado é o mesmo, o estudante conseguirá descobrir o valor do elemento até então desconhecido a partir do membro que não há valores desconhecidos.

7.4.1 Livro Buriti – Mais matemática do 4º ano

No livro Buriti – Mais Matemática do 4º ano dos anos iniciais do ensino fundamental foram encontradas duas situações envolvendo a categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade", estas situações foram encontradas na seção que trata sobre as propriedades da igualdade. É importante destacar que, todas as situações encontradas pertencem ao campo das estruturas aditivas.

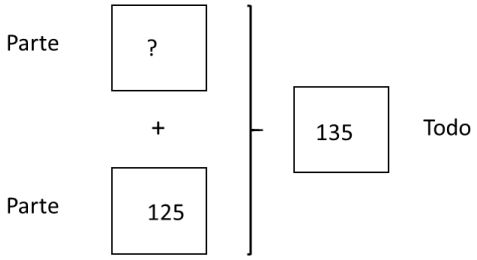
Na primeira situação (figura 21), o estudante, sabendo que as igualdades são verdadeiras (ou seja, o resultado do primeiro membro é igual ao resultado do segundo membro), terá que descobrir o valor do elemento desconhecido para substituir o símbolo do círculo pelo valor correspondente. Sendo assim, sabendo que o segundo membro da sentença corresponde a 135 (130 + 5), o primeiro membro também deverá corresponder a 135, logo, o estudante precisa descobrir a partir do 125 quanto falta para 135; uma sentença que representaria esta situação seria: 125 + ◯ = 135, utilizando o círculo para representar elemento desconhecido. A partir dessa sentença, também é possível utilizar os princípios das relações inversas e realizar uma subtração entre 135 e 125, respectivamente. A partir das duas categorias, o valor do elemento desconhecido encontrado será 10.

Figura 21 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 57).

A partir do que foi posto acima, este caracteriza-se como um problema de estrutura aditiva, sob a perspectiva dos problemas de composição, pois, observando apenas o primeiro membro da sentença dada, temos: 125 como uma das partes e 135 como o todo, e se quer saber o valor da outra parte, ou seja, é uma composição de 1º extensão. A seguir apresentamos o diagrama que corresponde a esta situação.

Diagrama 16 – Problema de composição.



Vale ressaltar que esta categoria permite ao estudante reconhecer esse elemento desconhecido quando estiver no 7º ano, no qual este será substituído por uma letra no trabalho com equação do 1º grau, ou seja, ao invés de resolver utilizando símbolos ou desenhos será utilizado as letras x, y, z, ou qualquer outra letra para representar esse valor desconhecido (é importante ressaltar que, no 7º ano do ensino fundamental, este valor desconhecido será chamado de incógnita, sempre que se estiver trabalhando com equações). Sendo assim, esta é mais uma categoria que permite, ao estudante, desenvolver noções iniciais que o auxiliarão da resolução das equações do 1º grau.

O livro nos apresenta mais um problema, agora de transformação, no grupo de problemas de estrutura aditiva. Como já discutido, esse tipo de problema estabelece uma relação entre uma quantidade inicial e uma quantidade final. Para o personagem de Felipe (figura 22) o problema caracteriza-se como um protótipo de transformação, pois, se conhece o valor inicial

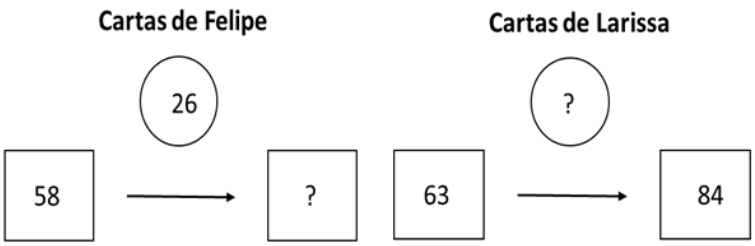
(58 cartas que estão em sua casa) e a transformação (26 cartas que ele ganhou) e se pede o valor final. No caso de Larissa, se trata de um problema de transformação de 1ª extensão, pois, ela possuía uma quantia inicial de 63 cartas que estão em sua casa e, posteriormente, conquistou mais outra quantidade de cartas, com valor desconhecido; ou seja, ela possuía uma quantidade inicial e, em seguida, houve uma transformação que a fez conquistar mais cartas, totalizando o mesmo número de cartas de Felipe que é 84 cartas.

Figura 22 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 57).

Apresentaremos abaixo os diagramas que correspondem as transformações ocorridas na quantidade de cartas de Felipe e Larissa.

Diagrama 17 – Problema de transformação.



Para a categoria: elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade, não percebemos uma diferença significativa no que se refere a quantidade de situações propostas se comparada a categoria anterior, apenas um tipo de situação foi contemplado e com um quantitativo baixo de situações. Vale ressaltar que, a habilidade envolvida nesta categoria começa a ser desenvolvida neste ano escolar e se estende até o 6º ano, ou seja, abarca os três

anos que antecedem a formalização do conceito no 7º ano e que estamos contemplando nesta pesquisa.

Tabela 6 – Tipos de situações envolvendo elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	2
Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

No primeiro problema (figura 21), mais simples se comparado ao problema seguinte, pois, compreende os problemas de composição de 1º extensão, temos um elemento desconhecido representado por um círculo, no qual o estudante pode encontrar esse elemento utilizando as relações inversas por exemplo, ou fazendo uso da categoria abordada nesta seção, por meio de uma contagem (buscando o valor que falta para 135 partindo de 125).

No segundo e último problema (figura 22), o estudante precisará realizar dois procedimentos: primeiro, encontrar o valor correspondente a Felipe, operação que se caracteriza como uma transformação, em que é exposto a quantidade inicial e o valor da transformação, identificado como um problema protótipo, ou seja, o mais simples dentre os problemas de transformação. E em seguida, no caso de Larissa, o problema de transformação nos informa a quantidade inicial e a quantidade final questionando o valor da transformação, definido como um problema de 1º extensão, ou seja, mais complexo que os problemas protótipos.

De modo geral, ao longo dos problemas propostos pelo livro que contemplam esta categoria é perceptível o crescente nível de complexidade, e que todos eles podem ser resolvidos utilizando o princípio das relações inversas. No que se refere a contextualização, percebemos o segundo problema com um nível de contextualização bem mais significativo para os estudantes, pois, parte de uma situação do dia a dia, o que não é possível verificar no primeiro problema, porque este comunica apenas que se quer encontrar um valor desconhecido e expõe as condições para encontra-lo, mas não há contextualização com base numa realidade que pode ser vivida pelos estudantes.

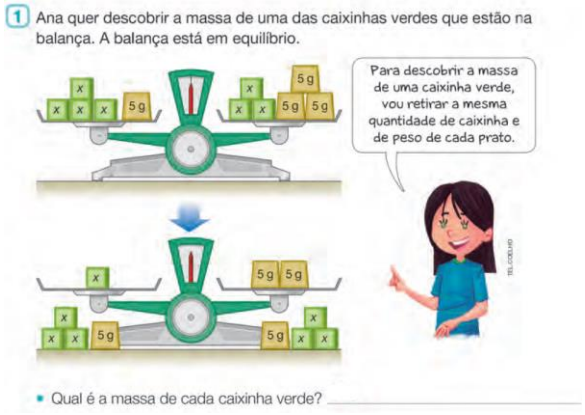
7.4.2 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano

No livro Buriti – Mais Matemática do 5º ano do ensino fundamental foram encontradas 5 situações, dentre elas, três pertencem as estruturas aditivas e duas configuram-se como problemas mistos, envolvendo tanto o campo aditivo como o campo multiplicativo.

Na unidade 4 deste livro encontramos algumas situações que abordam esta categoria e buscam desenvolver no estudante a ideia de elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade. Na seção que trata sobre “valor desconhecido” encontramos, mais uma vez, explorando a ideia de equilíbrio, uma atividade utilizando a balança de dois pratos. Esta atividade, de acordo com as orientações do livro, tem o objetivo de permitir que o estudante identifique qual a massa de cada caixinha verde que está sobre a balança. Ainda segundo as orientações propostas pelo livro, é importante discutir o que deve ser retirado de cada prato e por quê.

Assim como os demais problemas que utilizaram a balança de dois pratos, este problema também pertence ao campo das estruturas aditivas, sob o aspecto da comparação (pois o estudante percebe o equilíbrio da balança e estabelece uma relação de comparação entre os pratos para identificar o valor da massa de uma caixinha verde); e da composição, porque de cada prato (que representa o todo) é retirado alguns objetos (que representa uma das partes), de forma a encontrar o valor da parte desconhecida.

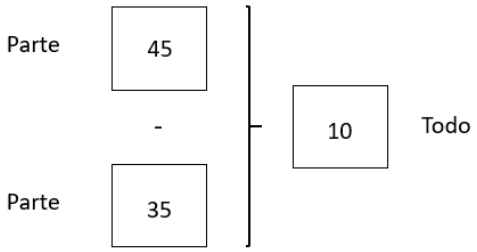
Figura 23 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 127).

Para auxiliar o estudante a responder a atividade é retirado dos dois pratos da balança a mesma quantidade de massa, no caso, a medida da massa de 3 caixinhas verdes e de um objeto de 5g em cada um dos pratos (perceba que de ambos os pratos foi retirado a mesma quantidade de massa) restando em um dos pratos apenas uma caixinha verde e, no outro prato dois objetos de 5g cada. A proposta da atividade é que o estudante perceba, por meio do equilíbrio da balança, que uma caixinha verde equivale a 10g, uma vez que, como foi retirado a mesma massa de ambos os pratos e a balança continuou em equilíbrio. Abaixo representamos o diagrama correspondente a esta situação.

Diagrama 18 – Problema de composição.



Para a próxima atividade (figura 24), eleva-se um pouco o nível de dificuldade, porque agora é o estudante que irá determinar qual(is) objeto(s) retirar da balança de modo que descubra o valor da massa correspondente a uma laranja. Temos, mais uma vez, uma balança de dois pratos, com três laranjas (de mesma massa) e um peso de massa 50g e, no outro prato duas laranjas e um peso de massa 200g, o objetivo é que o estudante descubra qual o valor da massa de uma laranja e explique como chegou a resposta.

Figura 24 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

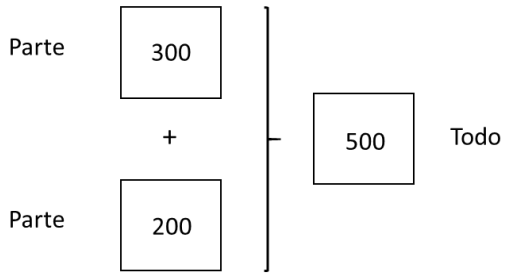
Fonte: Buriti mais (2017, p. 127).

É esperado que os estudantes percebam que para descobrir o valor da massa de uma laranja eles precisarão retirar duas laranjas de cada prato (mantendo, assim, a balança em equilíbrio, uma vez que, será retirado a mesma quantidade de objetos e com mesma massa). Fazendo isso, restará em um prato uma laranja e um peso com massa de 50g e no outro um peso com massa de 200g, dessa forma, como a balança, mesmo após as retiradas desses objetos ainda está em equilíbrio, é possível descobrir, a partir da comparação entre os pratos da balança, que uma laranja possui 150g.

Assim como nas situações anteriores em que foram utilizadas a balança de dois pratos, este problema envolve conhecimentos de estrutura aditiva, sob o aspecto da comparação e da composição. A composição foi explorada no momento em que duas laranjas de mesma massa

foram retiradas de cada prato, ou seja, temos um todo, que corresponde ao valor total da massa de cada prato (em um prato temos: 3 laranjas e um peso de 50g, e no outro prato temos: 2 laranjas e um peso de 200g), e desse valor foi retirado uma parte, equivalente a massa de duas laranjas, e restou o valor da outra parte (que corresponde a massa de uma laranja e um peso de 50g em um prato, e, um peso de 200g no outro prato). Sabendo o valor correspondente a uma laranja (150g), podemos representar o diagrama que se refere a esta situação da seguinte forma:

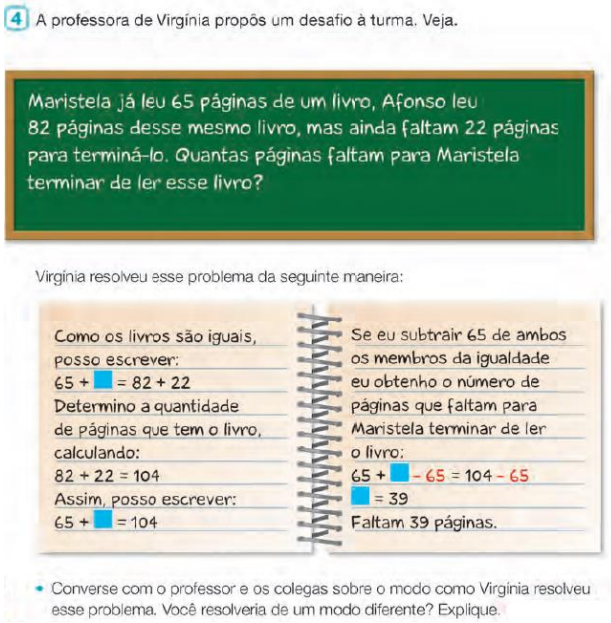
Diagrama 19 – Problema de composição.



A partir da categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade", ao retirar objetos de mesma massa dos dois pratos da balança, esta continuará em equilíbrio; como esse equilíbrio está associado a uma igualdade, quando nos referimos a linguagem matemática temos que: ao retirar, de ambos os membros de uma igualdade, o mesmo valor, esta igualdade não se altera. Assim, por meio de uma comparação entre os objetos restantes nos dois pratos da balança, após a retirada das duas laranjas, é possível identificar o valor da massa de uma laranja.

A próxima situação é caracterizada como um problema de composição, no grupo das estruturas aditivas, em que é conhecido o valor inicial e o todo e se quer saber o valor da parte restante. Vale ressaltar que este tipo de problema é caraterizado como um problema de 1ª extensão. A questão fala de duas pessoas, Maristela e Afonso, que estão lendo o mesmo livro e o problema pede que os estudantes analisem as duas propostas de resolução apresentadas, discuta entre seus pares e apresentem outras possíveis soluções se for o caso.

Figura 25 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.



4 A professora de Virgínia propôs um desafio à turma. Veja.

Maristela já leu 65 páginas de um livro, Afonso leu 82 páginas desse mesmo livro, mas ainda faltam 22 páginas para terminá-lo. Quantas páginas faltam para Maristela terminar de ler esse livro?

Virgínia resolveu esse problema da seguinte maneira:

Como os livros são iguais, posso escrever:
65 + ■ = 82 + 22
Determino a quantidade de páginas que tem o livro, calculando:
82 + 22 = 104
Assim, posso escrever:
65 + ■ = 104

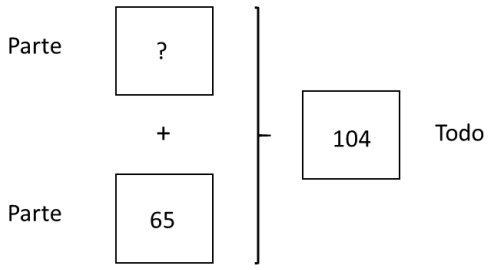
Se eu subtrair 65 de ambos os membros da igualdade eu obtenho o número de páginas que faltam para Maristela terminar de ler o livro:
65 + ■ − 65 = 104 − 65
■ = 39
Faltam 39 páginas.

• Converse com o professor e os colegas sobre o modo como Virgínia resolveu esse problema. Você resolveria de um modo diferente? Explique.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 128).

De acordo com a proposta explicitada no livro didático, inicialmente, os estudantes destacam as informações do problema e iniciam suas inferências buscando interpretar e compreender as duas formas de resolução apresentadas e procuram outros caminhos para chegar ao mesmo resultado. A primeira inferência que precisa ser feita é a de que se os dois estão lendo o mesmo livro, este terá o mesmo número de páginas. Partindo dessa informação e sabendo que Afonso leu 82 páginas, restando apenas 22 páginas para finalizar todo o livro, é possível concluir que no livro há 104 páginas, que corresponde à adição entre 82 e 22 (este valor representa o todo). Logo, para descobrir quantas páginas faltam para Maristela basta descobrir de 65 páginas que ela já leu (primeira parte), quanto falta para 104 (todo), chagando assim ao valor 39 (valor da parte restante), ou seja, faltam 39 páginas para Maristela finalizar a leitura do livro. Partindo desse ideia, temos uma outra categoria envolvida: as relações inversas. O diagrama que representa essa forma de resolução será proposto a seguir.

Diagrama 20 – Problema de composição.

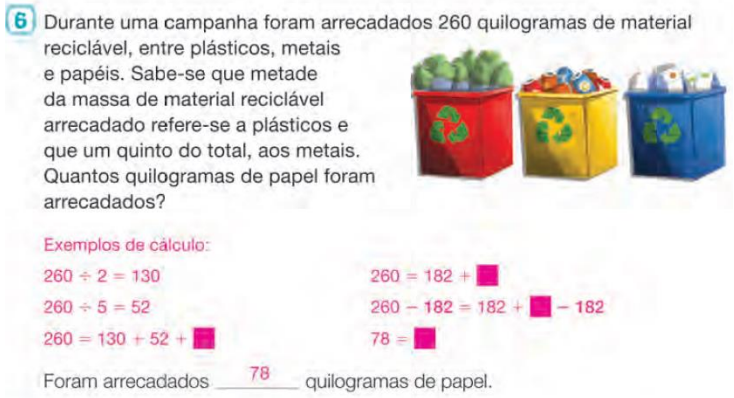


É imprescindível, de acordo com as orientações do livro didático, que haja uma discussão de possíveis formas de resolução junto com os estudantes antes de apresentar as respostas propostas por Virgínia (como a que acabamos de apresentar acima), que sistematizam em linguagem matemática, por meio da simbologia, relações e propriedades matemáticas, o problema. É importante notar que, na resolução da direita, percebemos elementos muito importantes que auxiliarão os estudantes na formalização do conceito de equação do primeiro grau no 7º ano do ensino fundamental. Por exemplo, quando a resolução apresenta a subtração de um mesmo valor em ambos os membros da sentença, mantendo assim, a equivalência entre os membros (Princípio aditivo da igualdade: ao adicionar ou subtrair um mesmo valor de ambos os membros de uma igualdade, esta permanece inalterada) temos um trabalho mais direcionado com foco na resolução de equações, evoluindo, assim, de seu estado mais intuitivo, posposto até esse momento, para o mais formal no sentido de colocar mais elementos que serão reforçados nos anos finais. Este princípio foi trabalhado nas situações anteriores com a balança de dois pratos, só que de forma mais elementar.

O próximo problema (figura 26), segue a mesma proposta do problema anterior, podendo ser resolvido por meio das relações presentes na categoria desta seção como também por meio das relações inversas. É um problema que contempla elementos das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, ou seja, este se caracteriza como um problema misto. No campo das estruturas multiplicativas temos as relações que são características desse campo, nesse caso, os termos: metade e quinta parte, que propõem a realização de uma divisão por 2 e por 5, respectivamente; e no campo aditivo temos as somas e subtrações das parcelas após realizadas as respectivas divisões.

Observando os dados do problema temos o total de quilogramas de material reciclado arrecadado que é de 260kg (todo), partindo desse valor, metade (relação multiplicativa) dele representa o valor de plásticos arrecadados, ou seja, 130kg (parte). Um quinto (relação multiplicativa) do total arrecadado representa o valor dos metais, nesse caso, um quinto de 260 é o mesmo que 260 dividido por 5, que resulta em 52kg (parte) de metais, estas relações pertencem ao grupo das comparações multiplicativas. Com essas informações resta apenas descobrir o valor correspondente aos papéis (parte desconhecida) que representa o que falta para 260 na soma de 130 com 52, ou seja, $260 = 130 + 52 + \square$.

Figura 26 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 129).

Observando o modelo de resolução proposto pelo livro didático percebemos o esquema montado em linguagem matemática muito semelhante a uma equação, em que a letra, nesse caso, está representada pelo quadradinho, mas também poderia ser representado por qualquer outro objeto. Fica clara a presença do campo aditivo, pois, partindo da sentença: 260 = 182 + □ assim como no problema anterior, foi retirado de ambos os membros o valor 182 para encontrar o valor correspondente ao quadradinho, seguindo mais uma vez o princípio aditivo da igualdade. A seguir apresentamos o diagrama que corresponde a esta situação.

Diagrama 21 – Comparação multiplicativa.

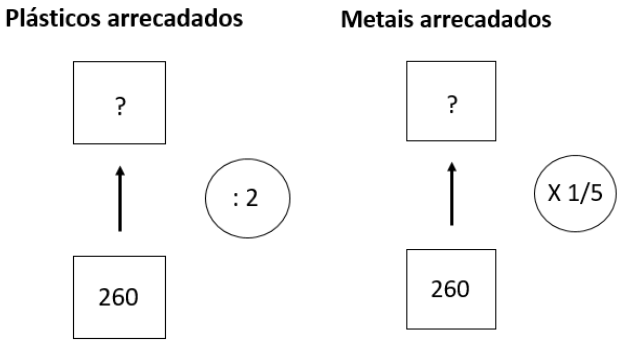
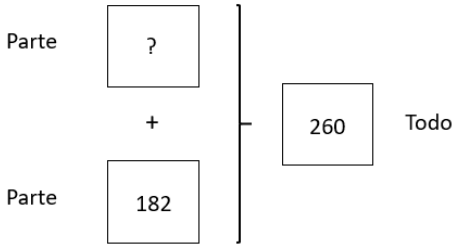


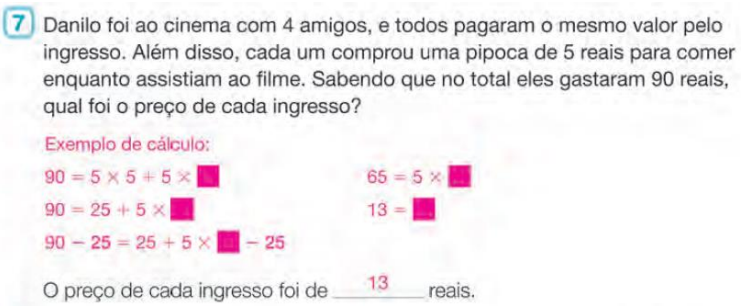
Diagrama 22 – Problema de composição.



A última situação que apresentaremos caracteriza-se também como um problema misto, no qual observamos relações presentes tanto no campo das estruturas aditivas como no campo das estruturas multiplicativas. Partindo dessas considerações, de acordo com o problema, é conhecido o todo, que corresponde ao total gasto pelos cinco amigos (90 reais), uma das partes (valor das 5 pipocas compradas por cada um) e se desconhece a outra parte (valor dos ingressos dos cinco amigos), caracterizando-se por uma composição de 1ª extensão.

No campo multiplicativo, temos o valor de uma das partes, em que é preciso realizar uma multiplicação para encontrar o seu valor, ou seja, 5 pipocas a cinco reais, temos: 5 x 5 = 25 reais; assim como também para encontrar o valor correspondente dos ingressos dos cinco amigos é preciso realizar mais uma multiplicação, só que agora por elemento desconhecido (representado pelo quadradinho), ou seja, 5 x □. Seguindo as orientações do livro, dentre os processos de resolução os estudantes podem pensar em relacionar o seguinte esquema: (valor dos 5 ingressos) + (valor das 5 pipocas) = total gasto.

Figura 27 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.


7 Danilo foi ao cinema com 4 amigos, e todos pagaram o mesmo valor pelo ingresso. Além disso, cada um comprou uma pipoca de 5 reais para comer enquanto assistiam ao filme. Sabendo que no total eles gastaram 90 reais, qual foi o preço de cada ingresso?

Exemplo de cálculo:

$90 = 5 \times 5 + 5 \times \square$ $\quad$ $65 = 5 \times \square$

$90 = 25 + 5 \times \square$ $\quad$ $13 = \square$

$90 - 25 = 25 + 5 \times \square - 25$

O preço de cada ingresso foi de 13 reais.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 129).

De acordo com o exemplo de resolução apresentado pelo livro didático, é proposto que o estudante transcreva em linguagem matemática a sentença que corresponde ao total gasto por Danilo e seus colegas, representando o valor desconhecido por um símbolo (no caso do exemplo dado, o quadradinho), e, após realizar algumas operações, tais como, multiplicar 5x5 (que representa o valor total pago pelas 5 pipocas) e depois subtrair de ambos os membros o valor 25, e chegar ao resultado, ou seja, o valor do elemento desconhecido equivale ao valor 13, logo, a valor de cada ingresso corresponde a 13 reais. A seguir apresentamos o diagrama que representa este problema.

Diagrama 23 – Problema de composição.

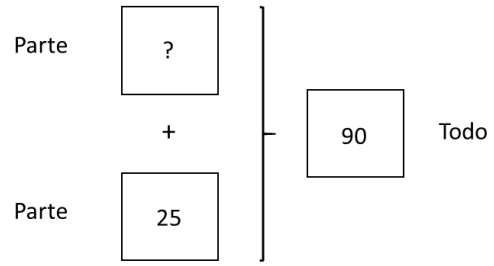
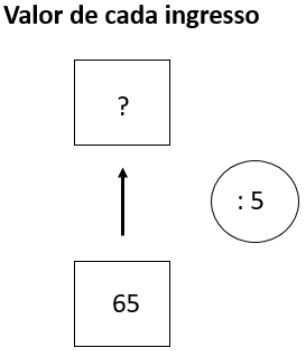


Diagrama 24 – Problema de comparação multiplicativa.



Se observarmos a tabela abaixo, até o momento, esta foi a categoria que mais apresentou problemas mistos. Ressaltamos este tipo de problema, pois eles contemplam conhecimentos que permeiam tanto o campo das estruturas aditivas como o campo das estruturas multiplicativas, proporcionando aos estudantes mobilizar um quantitativo significativo de esquemas que irão otimizar seu processo de aprendizagem.

Tabela 7 – Tipos de situações envolvendo número desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	3
Problemas de estrutura multiplicativa	0
Problemas mistos	2

Fonte: A Autora (2023).

Quando comparado os problemas propostos nesse livro, em relação as proposições do material para o 4º ano, como vimos na seção anterior, percebemos no 5º ano um quantitativo maior de situações, embora o crescente nível de complexidade esteve presente nesses dois anos, isto é, foi observado que ao longo das atividades e problemas encontrados o nível de complexidade se elevava à medida que se avança. Além disso, temos também situações que abarcam mais de uma categoria, como é o caso dos problemas das figuras 25, 26 e 27.

No primeiro problema (figura 23), o mais simples dentre todos desta categoria e deste ano, a retirada de objetos de mesma massa da balança de dois pratos é realizada pelo próprio

problema, o que não acontece na situação seguinte (figura 24), em que o estudante deverá identificar, a partir das massas dos objetos que se encontram em cada prato da balança em equilíbrio, quais objetos deverão ser retirados de modo a identificar o valor da massa de uma laranja.

Dando continuidade as situações propostas, temos mais um problema (figura 25) que apresenta uma forma de resolução bastante semelhante a resolução de uma equação do 1º grau (a mais semelhante até o momento), pois, nas situações anteriores a retirada de uma "quantidade" era feita por meio das massas presentes numa balança de dois pratos, e nessa situação essa "retirada" é feita a partir de uma sentença matemática, o qual foi subtraído dos dois membros da igualdade o mesmo valor para encontrar o valor do elemento desconhecido (representado pelo quadrado). Caracterizando uma ampliação significativa para a compreensão do conceito formal de equação do 1º grau nos próximos anos.

Nos dois problemas seguintes temos dois problemas mistos que exploram relações voltadas tanto ao campo aditivo como ao campo multiplicativo. Dessa forma, caracterizam-se como situações mais complexas, tendo em vista que, esse tipo de problema requer dos estudantes a mobilização de mais esquemas para auxiliá-los na aprendizagem dos conceitos envolvidos e/ou no desenvolvimento de novos conceitos.

Observando a contextualização, percebemos de modo geral, as atividades e problemas com foco em situações do cotidiano, umas mais recorrentes que outras, como é o caso das situações que envolvem a leitura de um livro ou a ida ao cinema entre amigos, em que é possível explorar bastante com os estudantes, uma vez que, se pode coloca-los como protagonistas da história, de modo a otimizar a compreensão do problema.

7.5 VARIAÇÃO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA ENTRE DUAS GRANDEZAS

Essa categoria compreende dois objetos de conhecimentos, que são: as grandezas diretamente proporcionais e problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais. Ressaltamos anteriormente que, o raciocínio proporcional constitui um alicerce curricular fundamental para outros conhecimentos matemáticos, dentre eles, a álgebra. Com esta categoria é possível explorar outras habilidades, tais como: analisar, estabelecer relações e comparações entre grandezas e quantidades, argumentar e explicar relações proporcionais e compreender as relações multiplicativas.

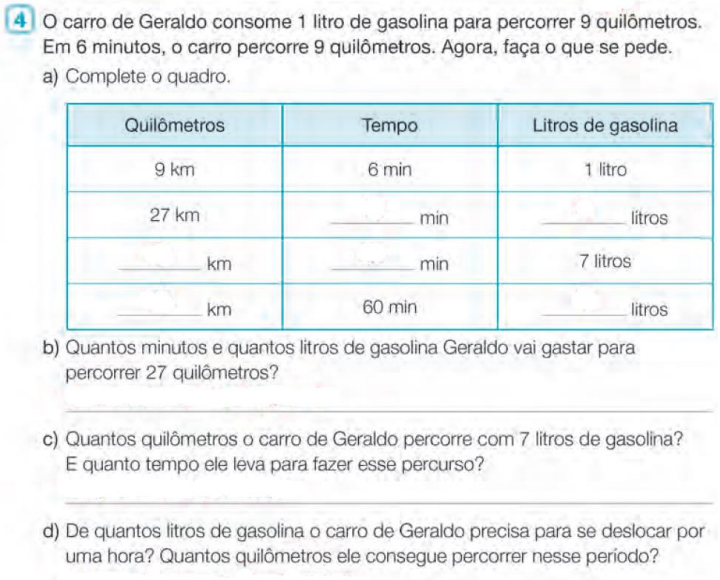
7.5.1 Livro Buriti – Mais matemática do 5º ano

No livro Buriti – Mais Matemática do 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental, encontramos cinco situações, sendo todas elas problemas de estrutura multiplicativa.

Na primeira atividade, encontrada na unidade 2 do livro, temos a questão 4 que estabelece uma relação entre três grandezas: quilômetro e litros (que são grandezas pertencentes as unidades de medida de comprimento e capacidade, respectivamente) e tempo (que corresponde a uma grandeza física). De acordo com as orientações do livro, os estudantes precisam estabelecer a relação de proporcionalidade estabelecida entre os quilômetros percorridos, o tempo gasto e a quantidade consumida em litros de gasolina. Nesta atividade os elementos desconhecidos variam entre as três grandezas e deverão ser encontrados por meio do uso da proporcionalidade.

Este problema é caracterizado no grupo das estruturas multiplicativas, sob a perspectivas dos problemas de proporção múltipla, este tipo de problema envolve duas ou mais proporções simples. As grandezas compreendidas no problema são: gasolina (em litros), distância percorrida (em quilômetros, (km)) e tempo gasto (em minutos).

Figura 28 – Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.



4 O carro de Geraldo consome 1 litro de gasolina para percorrer 9 quilômetros. Em 6 minutos, o carro percorre 9 quilômetros. Agora, faça o que se pede.

a) Complete o quadro.

Quilômetros	Tempo	Litros de gasolina
9 km	6 min	1 litro
27 km	_____ min	_____ litros
_____ km	_____ min	7 litros
_____ km	60 min	_____ litros

b) Quantos minutos e quantos litros de gasolina Geraldo vai gastar para percorrer 27 quilômetros?

c) Quantos quilômetros o carro de Geraldo percorre com 7 litros de gasolina? E quanto tempo ele leva para fazer esse percurso?

d) De quantos litros de gasolina o carro de Geraldo precisa para se deslocar por uma hora? Quantos quilômetros ele consegue percorrer nesse período?

Fonte: Buriti mais (2017, p. 59).

A partir do quadro acima, a grandeza quantidade de litros de gasolina se relaciona a grandeza quilômetros rodados por uma taxa ($9\ \frac{km}{litro}$), ou seja, 9 km percorridos para cada litro

de gasolina. A quantidade de km percorridos, por sua vez, também se relaciona ao tempo gasto por uma taxa $\frac{9}{6}$, isto significa, que para percorrer uma distância de 9 km serão necessários 6 minutos. Estas relações também nos permitem inferir que para gastar um litro de gasolina são necessários 6 minutos, percorrendo uma distância de 9 km.

No item a do problema, temos um quadro que deverá ser completado a partir das relações de proporcionalidade que acabamos de estabelecer. A seguir apresentaremos os diagramas propostos por Vergnaud para representar os problemas de proporção múltipla que correspondem a segunda, terceira e quarta linhas do quadro, respectivamente.

Diagrama 25 – Problema de proporção múltipla.

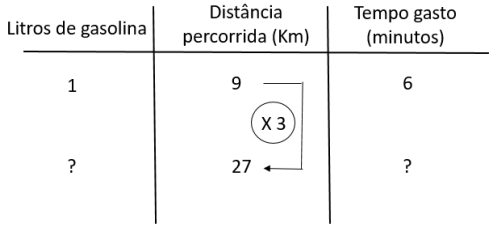


Diagrama 26 – Problema de proporção múltipla.

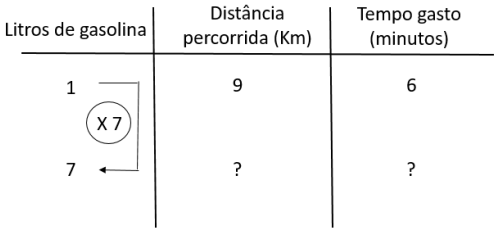
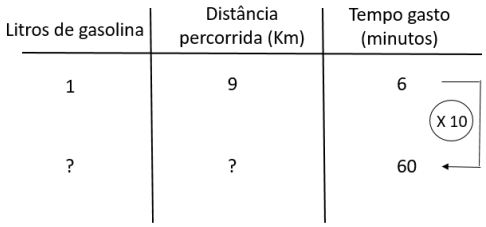


Diagrama 27 – Problema de proporção múltipla.

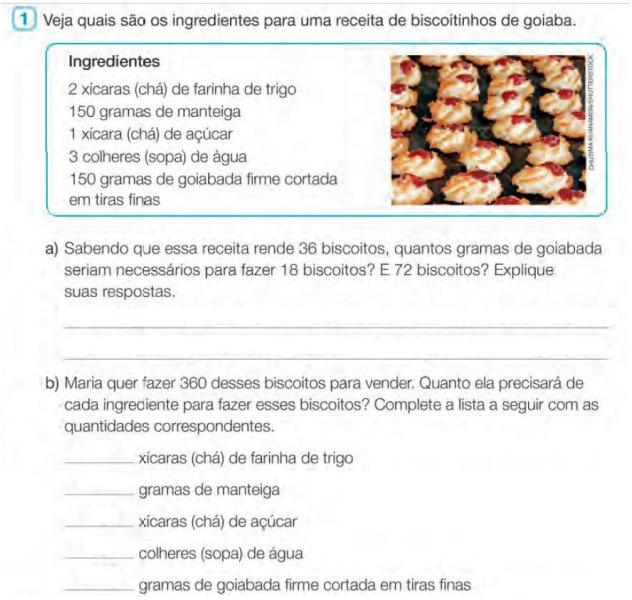


Por meio dos diagramas acima, para encontrar os valores desconhecidos em cada linha basta observar a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas que apresentam dois valores, por exemplo, de acordo com o quadro do item a, temos: na segunda linha do quadro a distância percorrida passou de 9 km para 27 km, ou seja, a distância foi triplicada, logo, o mesmo deverá ser feito com as demais grandezas (litros de gasolina e tempo gasto), assim,

teremos 7 litros de gasolina e 18 minutos gastos para percorrer uma distância de 27 km. O mesmo raciocínio deverá ser utilizado para encontrar os demais valores das grandezas da terceira e quarta linha do quadro. Os itens b, c e d são respondidos a partir do preenchimento do quadro.

Na unidade 4 encontramos mais um problema envolvendo esta categoria. O primeiro deles pertence a seção intitulada “proporcionalidade” e propõem que os estudantes, a partir da lista de ingredientes apresentada na situação, estabeleçam relações de proporcionalidade para responder cada item. Vale ressaltar também que, este problema compreende o campo das estruturas multiplicativas, sob o enfoque da proporção simples, em que as grandezas envolvidas são: quantidade de biscoitos e quantidade de ingrediente.

Figura 29 – Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.



1 Veja quais são os ingredientes para uma receita de biscoitinhos de goiaba.

Ingredientes

2 xícaras (chá) de farinha de trigo
150 gramas de manteiga
1 xícara (chá) de açúcar
3 colheres (sopa) de água
150 gramas de goiabada firme cortada em tiras finas

a) Sabendo que essa receita rende 36 biscoitos, quantos gramas de goiabada seriam necessários para fazer 18 biscoitos? E 72 biscoitos? Explique suas respostas.

b) Maria quer fazer 360 desses biscoitos para vender. Quanto ela precisará de cada ingrediente para fazer esses biscoitos? Complete a lista a seguir com as quantidades correspondentes.

_____ xícaras (chá) de farinha de trigo
_____ gramas de manteiga
_____ xícaras (chá) de açúcar
_____ colheres (sopa) de água
_____ gramas de goiabada firme cortada em tiras finas

Fonte: Buriti mais (2017, p. 115).

Para resolver este problema, o estudante, mais uma vez, deverá identificar as relações de proporcionalidade estabelecidas entre a quantidade de biscoitos de goiabada com a quantidade de ingredientes. Sendo assim, no item a, é preciso associar a quantidade de biscoitos com a quantidade de gramas de goiabada, ou seja, se para fazer 36 biscoitos de goiabada são necessários 150g de goiabada, então, para fazer 18 biscoitos de goiabada (que corresponde à metade da quantidade de biscoitos da receita) será preciso a metade da quantidade de goiabada, ou seja, 70g. Esse item ainda quer saber quantos gramas de goiabada são necessários para fazer 72 biscoitos, seguindo o mesmo raciocínio, como esta nova quantidade de biscoitos corresponde ao dobro de biscoitos da receita original, então, devemos dobrar a quantidade de

gramas de goiabada da receita, encontrando 300g de goiabada. O diagrama de Vergnaud que corresponde a este item[6] é o seguinte:

Diagrama 28 – Problema de proporção simples.

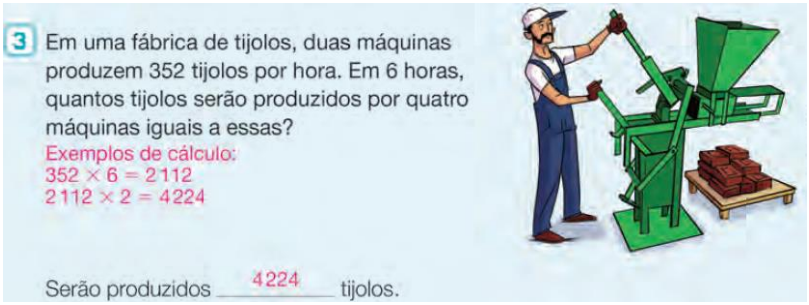
Quantidade de biscoitos		Gramas de goiabada
36	: 2	150
18		?

Diagrama 29 – Problema de proporção simples.

Quantidade de biscoitos		Gramas de goiabada
36	x 2	150
72		?

Ainda na unidade 4, mais uma vez temos uma situação pertencente ao campo das estruturas multiplicativas, sob a perspectiva dos problemas de proporção simples, envolvendo as grandezas: quantidade de máquinas e quantidade de tijolos.

Figura 30 – Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 134).

Para solucionar esse problema o estudante tem alguns caminhos, um deles é relacionar a quantidade de máquinas à quantidade de tijolos, ou seja, se duas máquinas produzem 352 tijolos por hora, logo, se dobrarmos a quantidade de máquinas também dobraremos a quantidade de tijolos produzidos, passando de 352 por hora para 704 tijolos por hora. No entanto, é preciso atentar para um detalhe, a quantidade de horas também foi alterada, passando

[6] O item b segue o mesmo raciocínio do item a.

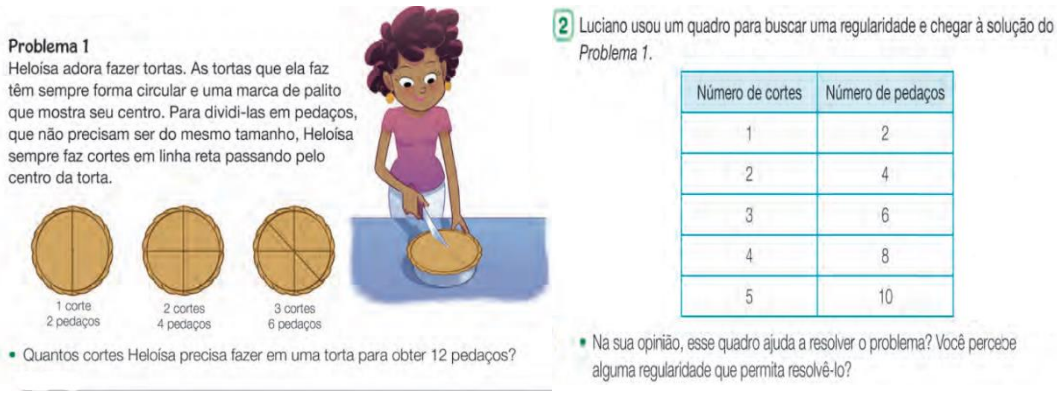
para 6 horas, assim, dobrando o número de máquinas serão produzidos 704 tijolos por hora, em 6 horas serão produzidos por essas mesmas 4 máquinas 4224 tijolos, que representa o resultados da multiplicação 6 x 704, já que a quantidade de horas foi sextuplicada. A seguir apresentamos o diagrama que corresponde a este problema.

Diagrama 30 – Problema de proporção simples.

Quantidade de máquinas		Quantidade de tijolos
2	x 2	352
4		?

Na unidade 5, que trata das "Frações", encontramos mais uma situação que trata dessa categoria. Assim como as anteriores, este se trata de um problema de proporção simples e sua classe de correspondência é de um para muitos; as variáveis envolvidas nessa situação são: quantidade de cortes e número de pedaços.

Figura 31 – Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.



Problema 1
Heloísa adora fazer tortas. As tortas que ela faz têm sempre forma circular e uma marca de palito que mostra seu centro. Para dividi-las em pedaços, que não precisam ser do mesmo tamanho, Heloísa sempre faz cortes em linha reta passando pelo centro da torta.

1 corte
2 pedaços

2 cortes
4 pedaços

3 cortes
6 pedaços

• Quantos cortes Heloísa precisa fazer em uma torta para obter 12 pedaços?

2 Luciano usou um quadro para buscar uma regularidade e chegar à solução do *Problema 1*.

Número de cortes	Número de pedaços
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

• Na sua opinião, esse quadro ajuda a resolver o problema? Você percebe alguma regularidade que permita resolvê-lo?

Fonte: Buriti mais (2017, p. 166 e 167).

Para dar suporte à resolução do problema 1 (figura 31), temos a atividade 2 que vem com a proposta de montar uma tabela e estabelecer uma relação de proporcionalidade entre a quantidade de cortes com o número de pedaços. Para solucionar o problema, o estudante deverá constatar que o número de pedaços será sempre o dobro da quantidade de cortes, assim, se na torta forem feitos 4 cortes teremos 8 pedaços (que é o dobro de 4), se forem feitos 5 cortes teremos 10 pedaços, e assim por diante, então, realizando 6 cortes teremos um total de 12 pedaços de torta. Abaixo temos o diagrama que corresponde a este problema.

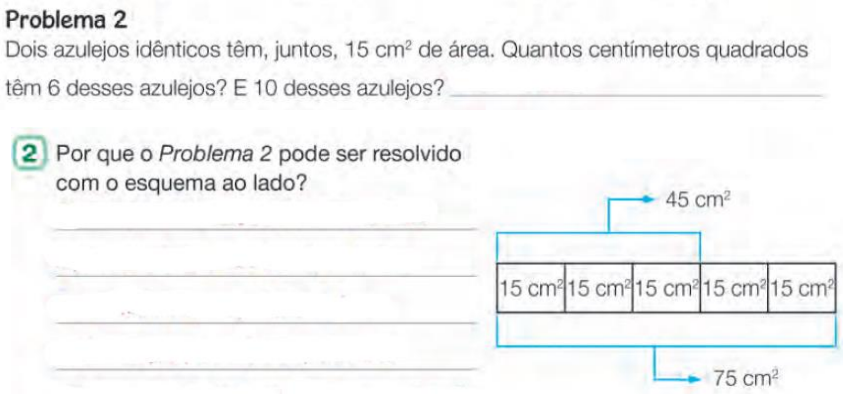
Diagrama 31 – Problema de proporção simples.

Quantidade de cortes	Número de pedaços
1	2
?	12

x 6

A última situação que retrata essa categoria se encontra na unidade 6 que discorre sobre "Grandezas e medidas", mais especificamente na seção que fala sobre a ideia de "volume". Vale ressaltar que, este problema, assim como o acima citado, também caracteriza-se como um problema de proporção simples; as variáveis envolvidas nessa situação são: número de azulejos e área ocupada. O problema diz o seguinte:

Figura 32 – Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 196 e 197).

Sabendo que as duas grandezas que deverão ser estabelecidas as relações são: número de azulejos e área ocupada, os estudantes deverão observar que a cada 2 azulejos a área corresponde a 15 cm² e, por meio do esquema apresentado na atividade 2 é esperado que eles percebam que com o triplo de azulejos, ou seja, 6 azulejos correspondem a 45 cm² de área, o triplo da área (15 x 3 = 45 cm²). Da mesma forma, com 10 azulejos, que corresponde ao quíntuplo da quantidade inicial de 2 azulejos, a área inicial de 15 cm² também será quintuplicada (15 x 5 = 75 cm²). Assim, os estudantes perceberão que o esquema apresentado na atividade 2 contempla o problema. A seguir apresentamos os diagramas correspondentes ao problema.

Diagrama 32 – Problemas de proporção simples.

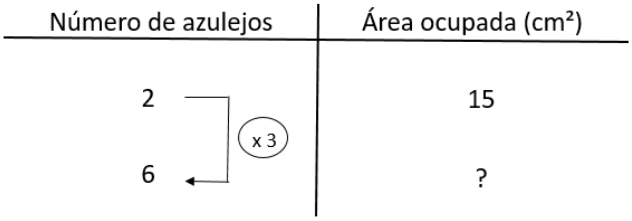
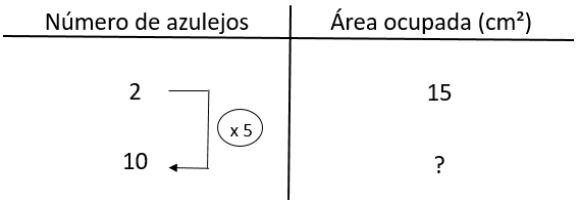


Diagrama 33 – Problemas de proporção simples.



Todo os conceitos mobilizados na categoria abordada nesta seção, permitem que os estudantes retomem e ampliem algumas relações, tais como, a ideia de dobro, triplo, metade, e desenvolvam raciocínios de proporcionalidade direta entre duas grandezas, de modo que, no processo de formalização do conceito de equação do 1º grau utilizem essas relações na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica em um problema, por exemplo.

Seguimos agora para a análise da tabela dos tipos de situações, e percebemos um único tipo de situação sendo contemplada, isso se deve a essência da categoria que permeia a estrutura multiplicativa ao abordar a proporcionalidade. Vale ressaltar que, levando em consideração os anos escolares que estamos analisando, esta categoria é exclusiva deste ano escolar, ou seja, o 5º ano.

Tabela 8 – Tipos de situações envolvendo variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	0
Problemas de estrutura multiplicativa	5
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

Como já mencionado, a categoria por pertencer ao campo das estruturas multiplicativas, todos os problemas encontrados estão compreendidos neste campo. Das cinco situações abordadas pelo livro temos uma de proporção múltipla (que corresponde a primeira situação apresentada) e as demais de proporção simples. Para o processo de resolução dessas situações, percebemos que apenas uma delas propõe a divisão como forma de encontrar o valor desconhecido (o item a da figura 29), nas demais, deve-se fazer uso da multiplicação.

Na primeira situação (figura 28), o estudante deverá perceber que, para encontrar os valores desconhecidos, precisará realizar multiplicações a partir da coluna dos diagramas que apresentam os dois valores. Ao longo desta e dos demais problemas propostos nessa seção, o estudante precisa identificar qual a proporcionalidade envolvida em cada caso para encontrar os valores desconhecidos, estabelecendo relações entre distância e litros de gasolina e entre distância e tempo, para o caso da situação apresentada na figura 28.

Para as situações restantes temos uma única proporção a ser realizada e dentre elas apenas uma envolve a divisão para encontrar o valor desconhecido, as demais envolvem uma multiplicação. A forma de resolução desses problemas segue o mesmo caminho que a situação apresentada acima, sempre realizando multiplicações ou divisões, uma vez que, os valores são sempre múltiplos ou divisores dos valores conhecidos.

O primeiro problema (figura 28) por caracterizar-se como de proporção múltipla configura-se como de maior complexidade, uma vez que, envolve duas ou mais proporções simples na qual os estudantes precisam estabelecer relações de proporcionalidade com duas ou mais grandezas distintas. Assim, não percebemos, como estávamos percebendo em outras categorias apresentadas anteriores, um nível crescente de complexidade, pois, o livro já inicia com a primeira situação sendo a mais complexa, envolvendo três variáveis.

7.6 PROBLEMAS DE PARTILHA

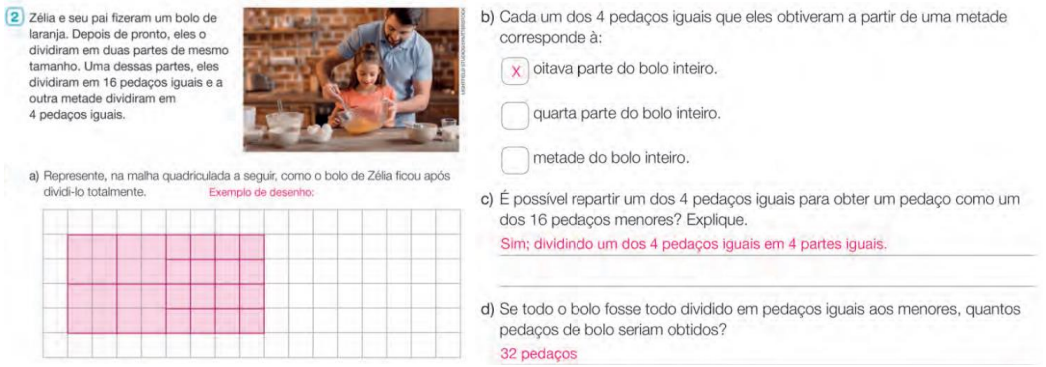
Essa categoria aborda os problemas de partilha como elemento principal. Estes problemas são caracterizados por apresentar um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas explorando as relações aditivas e multiplicativas, ou seja, nesse tipo de problema temos uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em outras partes desiguais e desconhecidas.

7.6.1 Livro Buriti – Mais Matemática do 5º ano

No livro Buriti – Mais matemática do 5º ano do ensino fundamental encontramos um total de 3 situações pertencentes aos problemas de estrutura multiplicativa. No geral, encontramos poucos problemas que abordassem a partilha em partes desiguais, a maioria dos problemas abordavam a partilha em partes iguais. A seguir apresentamos os problemas que foram encontrados após a análise do livro.

Encontramos o problema 2 (figura 33) na unidade 4, na seção que trata sobre “repartir em partes iguais e em partes desiguais”. Este caracteriza-se como um problema de estrutura multiplicativa envolvendo a proporcionalidade.

Figura 33 – Problemas de partilha.

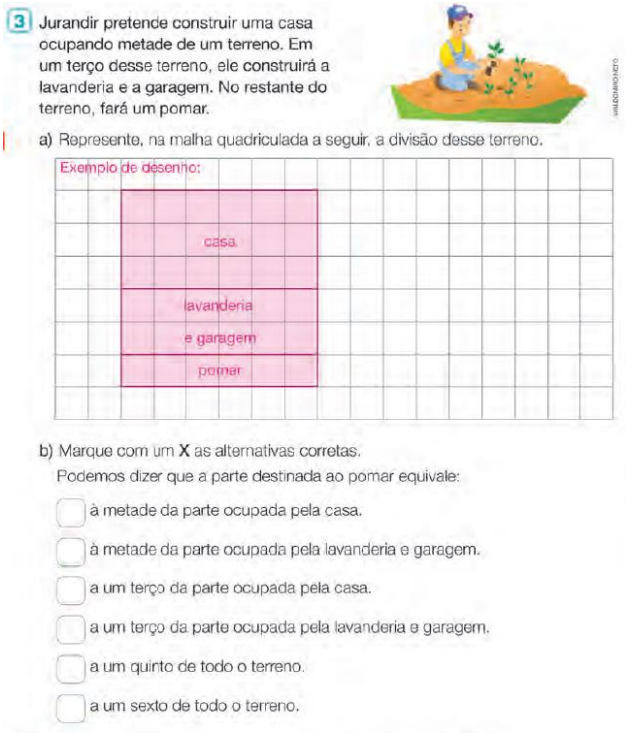


Fonte: Buriti mais (2017, p. 119).

Nesse tipo de atividade, no item a, por meio da representação na malha quadriculada, é possível o estudante perceber com maior facilidade que o todo (representado pelo bolo inteiro), em um primeiro momento, foi dividido em duas partes iguais e, posteriormente, cada metade foi dividida em partes desiguais (uma metade em quatro pedaços iguais e a outra metade em dezesseis pedaços iguais). Nos demais itens, os estudantes estabelecem relações entre essas quantidades e o seu valor correspondente em frações, envolvendo a ideia de razão entre as partes e o todo.

Ainda dentro da unidade 4, temos o problema 3, no que se refere a classificação proposta por Vergnaud, este é caracterizado como um problema de estrutura multiplicativa, cujo grupo é a comparação multiplicativa, que não se conhece a área do terreno e este pode assumir valores diversos.

Figura 34 – Problemas de partilha.



3 Jurandir pretende construir uma casa ocupando metade de um terreno. Em um terço desse terreno, ele construirá a lavanderia e a garagem. No restante do terreno, fará um pomar.

a) Represente, na malha quadriculada a seguir, a divisão desse terreno.

Exemplo de desenho:

b) Marque com um X as alternativas corretas.

Podemos dizer que a parte destinada ao pomar equivale:

- ☐ à metade da parte ocupada pela casa.
- ☐ à metade da parte ocupada pela lavanderia e garagem.
- ☐ a um terço da parte ocupada pela casa.
- ☐ a um terço da parte ocupada pela lavanderia e garagem.
- ☐ a um quinto de todo o terreno.
- ☐ a um sexto de todo o terreno.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 120).

Nesse tipo de problema os estudantes precisarão perceber que o todo, o terreno, será dividido em duas partes desiguais: metade do terreno será destinada a construção da casa, e a outra metade será dividida em duas partes desiguais para a construção de uma garagem, uma lavanderia e um pomar; sendo distribuído da seguinte forma: 1/3 da metade será construída uma garagem e uma lavanderia e 2/3 da mesma metade, será construído um pomar. Partindo dessas informações e de seu conhecimento sobre as ideias de fração enquanto parte/todo e enquanto operador multiplicativo o estudante determinará a área de cada construção.

Tomando como exemplo o desenho mostrado na questão 3, no item a, construindo um terreno de 36 unidades de área (este valor tende a facilitar os cálculos, pois, utilizando um valor múltiplo de 3 se permite que os estudantes trabalhem com resultados compreendidos dentro dos números naturais, pois, a construção da lavanderia, pomar e garagem são propostas sob o denominador 3, 1/3 e 2/3), temos que, metade do terreno será construída a casa (o que corresponde a 18 unidades de área); na terça parte do terreno restante (18 unidades de área) será feita a garagem e a lavanderia, isto equivale a: 2/3 de 18, ou seja, 12 unidades de área; e, o restante dessa metade será construído o pomar, isto é, 1/3 de 18 que corresponde a 6 unidade de área. A seguir apresentamos os diagramas que representam a área destinada ao pomar, a garagem e a lavanderia.

Diagrama 34 – Problema de comparação multiplicativa.

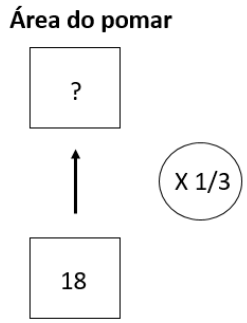
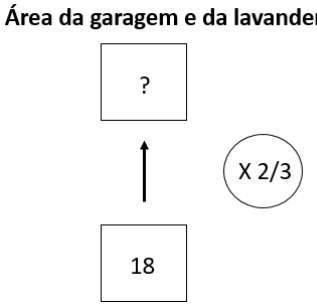


Diagrama 35 – Problema de comparação multiplicativa.

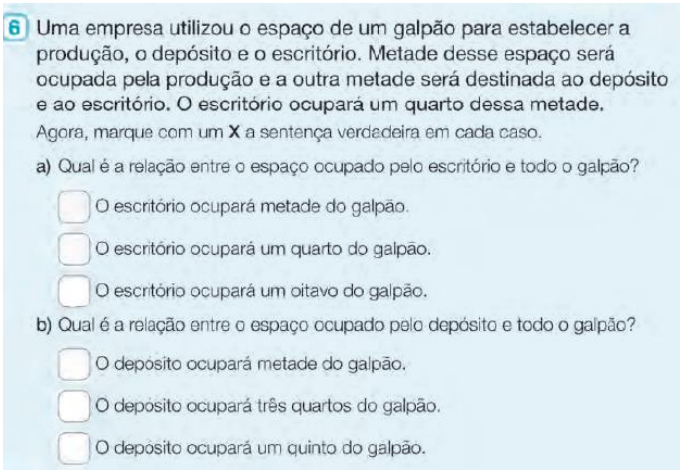


Situações como essas são importantes para que os estudantes desenvolvam a linguagem matemática ao se deparar com problemas em linguagem natural. Saber o que significa terça parte e como representar essa fração como um operador multiplicativo (pertencente ao conjunto dos números naturais) é um recurso bastante útil quando trabalhamos com equações e diversos outros conceitos da matemática. Além disso, mais à frente, nos anos finais do ensino fundamental, o valor da área será representado por uma letra, uma vez que, na álgebra quando não sabemos um determinado valor o representamos por uma letra do nosso alfabeto, e, a partir disso, construímos a equação que atenda ao problema e o resolvemos.

Vale lembrar que, para o 5º ano, a composição dos problemas de partilha se apresenta de forma mais elementar, se compararmos esses mesmos problemas para os anos finais do ensino fundamental, uma vez que, no 5º ano o propósito é desenvolver a ideia de proporcionalidade entre os estudantes, por meio da relação dobro, triplo, metade, a partir da divisão em partes desiguais e compreendendo a ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

O problema 6 (figura 35) foi encontrado na seção de “revisão da unidade” e também retrata um problema de comparação multiplicativa. Por meio das partes divididas de maneira desigual o estudante precisará estabelecer relações entre o todo e as partes, compreendendo o significado de cada parte com o todo.

Figura 35 – Problemas de partilha.



6 Uma empresa utilizou o espaço de um galpão para estabelecer a produção, o depósito e o escritório. Metade desse espaço será ocupada pela produção e a outra metade será destinada ao depósito e ao escritório. O escritório ocupará um quarto dessa metade.

Agora, marque com um **X** a sentença verdadeira em cada caso.

a) Qual é a relação entre o espaço ocupado pelo escritório e todo o galpão?

- ☐ O escritório ocupará metade do galpão.
- ☐ O escritório ocupará um quarto do galpão.
- ☐ O escritório ocupará um oitavo do galpão.

b) Qual é a relação entre o espaço ocupado pelo depósito e todo o galpão?

- ☐ O depósito ocupará metade do galpão.
- ☐ O depósito ocupará três quartos do galpão.
- ☐ O depósito ocupará um quinto do galpão.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 135).

Nesta situação é importante que os estudantes percebam que o todo é representado pelo galpão que será dividido em três partes desiguais (escritório, depósito e produção), ou seja, deverão relacionar cada parte com o todo. Para responder ao item a, os estudantes precisam compreender que, como o escritório corresponde a um quarto da metade (ou seja, cada metade possui um total de 4 divisões iguais), o escritório ocupará 1/8 do galpão. No item b, sabemos que metade do galpão corresponde a produção (o que corresponde a ½ do galpão) e, ¼ da outra metade representa o escritório, o restante, ou seja, ¾ dessa metade representa o depósito, que, por sua vez, corresponde a 3/8 do galpão[7].

Tomando como exemplo um galpão com área igual a 64 m², teríamos a metade correspondente a produção, ou seja, 32 m². O restante da área, 32 m², seria destinado ao depósito e ao escritório, sendo 1/4 desse valor para o escritório e o restante, ¾, para o depósito. A partir dos diagramas propostos por Vergnaud para representar problemas de comparação multiplicativa apresentados abaixo, percebemos que o escritório equivale a 8 m² (que corresponde a 1/8 da área do galpão) e o depósito representa 24 m² (que configura 3/8 da área do galpão).

Diagrama 36 – Problema de comparação multiplicativa.

[7] O livro não apresenta este valor (3/8) como uma opção de resposta, configurando, assim, um erro.

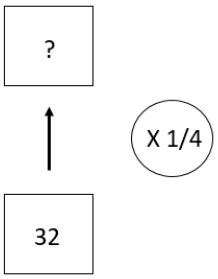
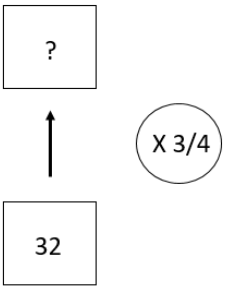


Diagrama 37 – Problema de comparação multiplicativa.



Para esta categoria foram encontrados apenas 3 problemas, todos eles pertencentes ao campo das estruturas multiplicativas.

Tabela 9 – Tipos de situações envolvendo problemas de partilha.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	0
Problemas de estrutura multiplicativa	3
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

Dentre os três tipos de possibilidades apenas os problemas de estrutura multiplicativa foram propostos para trabalhar com partilha em partes desiguais, e, com um quantitativo pouco expressivo de problemas, o que dificulta a aprendizagem e a consolidação dos conhecimentos abordados, uma vez que, é nesse ano escolar que os problemas de partilha aparecem pela primeira vez.

Além disso, os três problemas encontrados apresentam a mesma campo, composto por um espaço ou objeto, seja ele um galpão como apresentado no problema da figura 35 ou a área de um terreno em que se pretende realizar algumas construções, como mostra a figura 34, ou ainda uma torta, conforme apresenta a figura 33. Em todas as situações propostas, temos um todo que será dividido na metade e cada metade será dividida novamente, mas em partes desiguais. Dessa forma, não se percebe uma diversificação na estrutura das situações que

permitam aos estudantes mobilizar diferentes esquemas que os conduzam a uma aprendizagem mais consistente.

7.6.2 Livro A Conquista da Matemática do 6º ano

No livro A conquista da matemática do 6º ano encontramos pouquíssimas situações envolvendo esta categoria, mais precisamente dois problemas de partilha. Esses problemas foram encontrados na unidade 5 que trata sobre "A forma fracionária dos números racionais", na seção de revisão do capítulo.

O primeiro problema é a questão 11 que trata da venda de um terreno, no qual o valor da venda será dividido proporcionalmente ao valor pago por cada um dos compradores, João e Guilherme. Como João pagou 3/5 do terreno receberá essa parte correspondente ao valor do terreno vendido, valor esse que equivale a 35.450,00; e Guilherme ficará com o restante, ou seja, 2/5 do valor total da venda do terreno. No que se refere a classificação dessa situação, trata-se de um problema de comparação multiplicativa.

Figura 36 – Problemas de partilha.

11. João e Guilherme compraram um terreno juntos, de tal forma que João pagou $\frac{3}{5}$ do valor do terreno e o restante foi pago por Guilherme.

Os dois venderão o terreno e conseguiram um comprador que pagará por todo o terreno o valor de R$ 35 450,00. Cada um receberá, desse valor, uma parte proporcional ao valor pago pelo terreno. Quanto cada um receberá?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 169).

Para resolver este problema, primeiramente, o estudante deverá ter a compreensão de que a João corresponde o valor de 3/5 do valor de venda do terreno e a Guilherme corresponde 2/5 (valor que representa o que falta para completar o inteiro de 3/5) do valor do terreno que foi vendido. Compreendido isso, ele precisará calcular quanto corresponde essas frações, 3/5 e 2/5, do valor de venda do terreno que é de 35.450,00 (mobilizando seus conhecimentos sobre frações enquanto operador multiplicativo); esse cálculo pode ser feito realizando-se uma multiplicação entre cada fração e o valor de venda do terreno, ou seja, 3/5 x 35.450,00 e 2/5 x 35.450,00 para

João e Guilherme, respectivamente. Logo, para João corresponde o valor de 21.270,00 e para Guilherme corresponde um valor de 14.180,00.

Diagrama 38 – Problema de comparação multiplicativa.

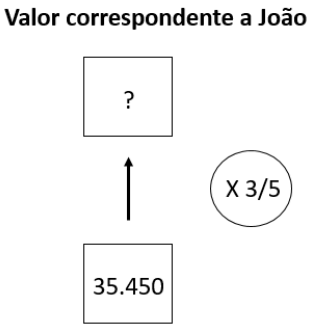
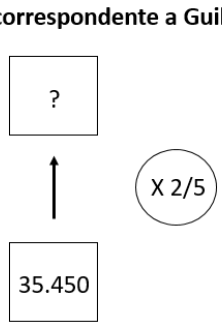
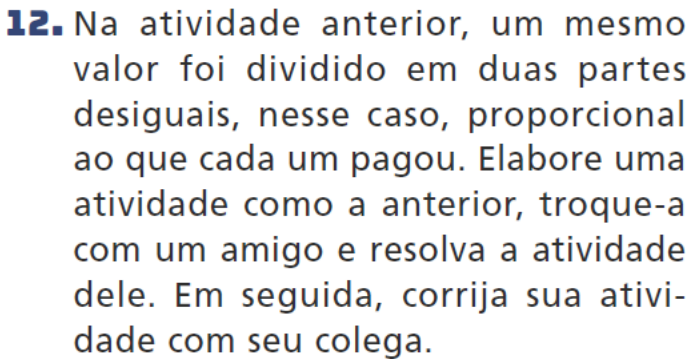


Diagrama 39 – Problema de comparação multiplicativa.



A segunda e última situação propõe a elaboração de um problema de partilha por parte do estudante. Ele deverá criar um problema semelhante ao anterior, trocar seu problema com outro colega para responder e, em seguida, corrigir junto com a turma. O estudante para resolver esta atividade terá inúmeras possibilidades, pois existem inúmeros caminhos que ele poderá seguir (lembrando sempre de respeitar a estrutura do problema que deverá ser de partilha). Como é proposto que este problema siga os moldes do problema anterior, consideraremos este pertencente ao campo das estruturas multiplicativas.

Figura 37 – Problemas de partilha.



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 169).

Conforme dito anteriormente, ao longo da análise do livro não encontramos muitas situações que caracterizassem um problema de partilha.

Tabela 10 – Tipos de situações envolvendo problemas de partilha.

Tipos de situações	Quantidade
Problemas de estrutura aditiva	0
Problemas de estrutura multiplicativa	2
Problemas mistos	0

Fonte: A Autora (2023).

Partindo dos problemas encontrados no livro A Conquista da Matemática, percebemos que estes não se mostram em quantidade suficiente para identificar se o estudante compreende e consegue resolver este tipo específico de problema, uma vez que, é no 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental que ele tem seu primeiro contato com os problemas de partilha.

As duas situações encontradas apresentam um contexto interessante, a primeira situação (figura 37) parte de uma situação contextualizada na busca por dar significado aos conceitos matemáticos dentro do que é proposto no problema; a segunda situação se torna ainda mais interessante, pois, o estudante terá autonomia para construir seu próprio problema de partilha e socializá-lo com seus colegas, o que demanda ainda mais conhecimentos e habilidades mobilizando esquemas, até então, não trabalhados, porque esta é a primeira situação que propõe que o estudante construa um problema. No entanto, como o livro não apresenta uma quantidade significativa de situações, os estudantes podem sentir alguma dificuldade caso não tenham compreendido esse tipo de problema quando explorado no 5º ano.

7.7- SITUAÇÕES NÃO CLASSIFICADAS SEGUNDO A TCC

Esta seção é destinada às atividades que não puderam ser classificadas segundo a Teoria dos Campos Conceituais. Isso ocorreu devido à falta de contextualização dessas situações, ou seja, estas apresentam comandos simples, tais como, resolva ou calcule, ou ainda, as informações fornecidas não são suficientes para determinar qual o tipo de problema ou atividade baseado no campo das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas. Sendo assim, estas situações podem ser interpretadas de diferentes maneiras, um vez que, a depender do contexto que seja proposto, elas assumem diferentes classificações à luz da TCC. Foram três categorias que apresentaram situações que não puderam ser classificadas: relações inversas, relação de igualdade existente entre dois termos, e elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.

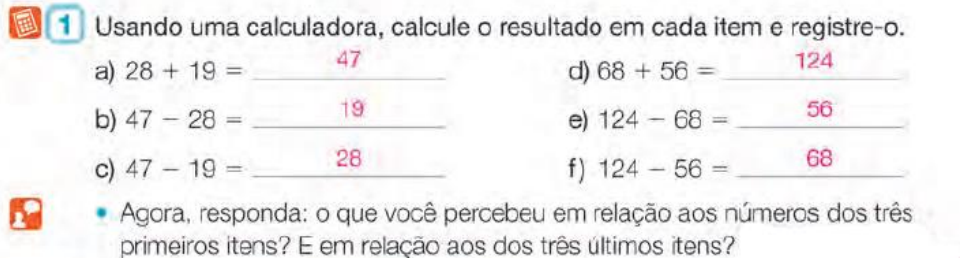
7.7.1 Relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão

Para o livro Buriti – Mais matemática do 4º ano, encontramos 6 situações que contemplam as relações inversas entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão que não foi possível classificar segundo a TCC, devido à ausência de contextualização. A seguir, apresentaremos tais situações que foram separadas de acordo com as relações inversas entre adição e subtração, que pertencem ao campo das estruturas aditivas; e, as relações inversas entre multiplicação e divisão, que pertencem ao campo das estruturas multiplicativas.

Relações inversas entre adição e subtração

A primeira atividade que encontramos proposta pelo livro (como mostra a figura 38) propõe que os estudantes realizem algumas operações com o uso da calculadora e tentem estabelecer algumas relações. Da forma como os itens estão postos, esta atividade pertence ao campo das estruturas aditivas, no entanto, não conseguimos classifica-la entre uma composição ou uma transformação, tendo em vista que, ela não apresenta um contexto; ou seja, a depender do contexto inserido, essa atividade pode caracterizar-se como de composição ou como de transformação.

Figura 38 – Relações inversas entre adição e subtração.



1 Usando uma calculadora, calcule o resultado em cada item e registre-o.

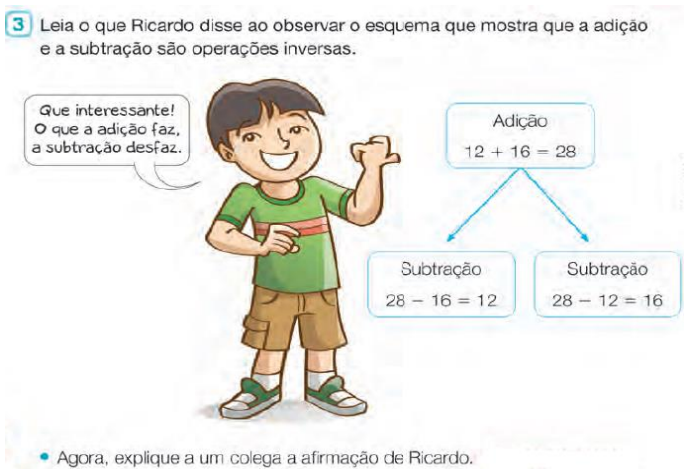
a) 28 + 19 = 47
b) 47 − 28 = 19
c) 47 − 19 = 28
d) 68 + 56 = 124
e) 124 − 68 = 56
f) 124 − 56 = 68

• Agora, responda: o que você percebeu em relação aos números dos três primeiros itens? E em relação aos dos três últimos itens?

Fonte: Buriti mais (2017, p. 52).

De acordo com as observações do próprio livro, o objetivo dessa atividade é que, a partir das respostas indicadas pelos estudantes, eles observem que a cada bloco de três números, o maior número é igual à soma dos outros dois e que ao subtrair qualquer um dos menores números do maior, o resultado será igual ao outro número. Essa é a atividade que o livro propõe como pontapé inicial para introduzir as operações inversas de adição e subtração. O livro segue apresentando mais uma atividade abordando o mesmo conteúdo.

Figura 39 – Relações inversas entre adição e subtração.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 52).

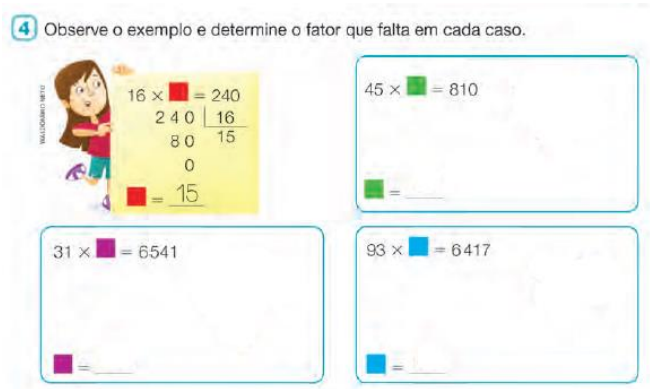
Para a atividade apresentada acima, ampliando um pouco mais o que foi visto na anterior, o que se propõe é fazer com que os estudantes estabeleçam uma relação (inversa) entre as operações de adição e subtração, ou seja, partindo da fala do personagem é proposto que o estudante perceba que se pegarmos o resultado de uma soma e subtrairmos uma das parcelas que originou esse resultado encontraremos a outra parcela. Observando o exemplo acima, temos que 12 + 16 = 28, considerando 12 e 16 as parcelas e 28 o resultado, e subtraindo (inverso da soma) esse resultado, 28, com qualquer uma das parcelas temos como resultado o valor da outra parcela, assim: 28 – 16 = 12 e 28 – 12 = 16.

Relações inversas entre a multiplicação e a divisão

O livro segue propondo atividades, mas agora envolvendo as relações inversas entre a multiplicação e a divisão, em que (conforme mostra a figura 40) os estudantes terão que descobrir o valor que deverá ser multiplicado pelo valor apresentado em cada item para se obter o resultado proposto. Para resolver essa atividade, o estudante precisará conhecer algumas propriedades da divisão (mais precisamente a que afirma que: dividendo = quociente x divisor + resto) e perceber a divisão como o inverso da multiplicação. Por exemplo, dado o produto de uma multiplicação de dois fatores, o valor do produto dividido por um dos fatores resultará no outro fator, que nesse caso da atividade, será o fator desconhecido.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que compreender a divisão implica entender os invariantes operatórios que o compõem, e dentre eles está a seguinte característica: o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes acrescido do resto. Esta característica explica porque o inverso da divisão é a multiplicação e vice-versa, ou seja, porque um dos aspectos que definem a divisão advém de um aspecto multiplicativo.

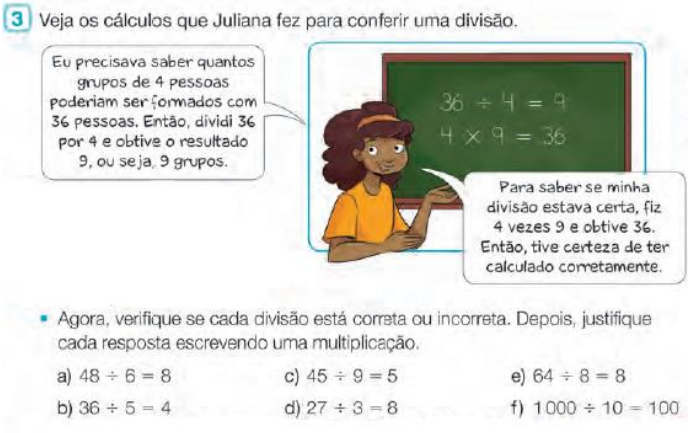
Figura 40 – Relações inversas entre multiplicação e divisão.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 113).

A atividade abaixo tem o propósito de aprofundar ainda mais a ideia das relações inversas entre a multiplicação e a divisão. Nessa atividade (figura 41), Juliana responde uma questão envolvendo as relações entre multiplicação e divisão e, em seguida, propõe que os estudantes façam o mesmo, utilizando outros valores. Ela realiza uma divisão e com o resultado encontrado, ou seja, o quociente, ela realiza uma multiplicação com o divisor (encontrando o valor do dividendo, pois, se trata de uma divisão exata, portanto, que não possui resto) para verificar se encontrou o valor correto.

Figura 41 – Relações inversas entre multiplicação e divisão



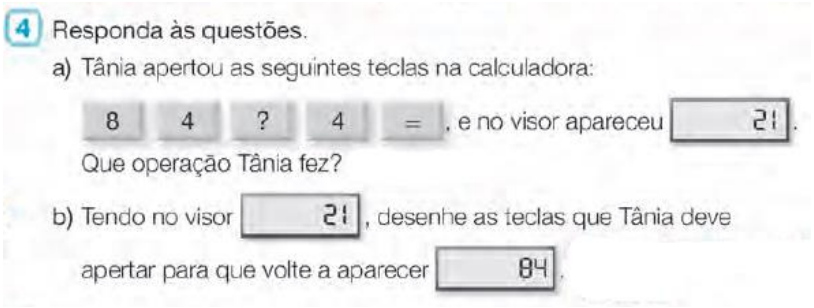
Fonte: Buriti mais (2017, p. 117).

A ideia apresentada no livro é que, aos poucos, o estudante vá ampliando e consolidando suas estratégias de cálculo, assim como as possíveis relações que podem ser estabelecidas entre essas duas operações. Nessa atividade, há a possibilidade de que o estudante utilizar a multiplicação na verificação do resultado de uma divisão, além disso, é possível também fazer o caminho inverso e questionar os estudantes qual divisão exata pode ser verificada por meio da multiplicação: 7 × 13 = 91 (91:13 = 7 ou 91:7 = 13), percebendo uma operação como o inverso da outra. Segundo Mori e Onaga (1996), as relações inversas, retomando as ideias aritméticas, é relevante, porque permite entender como excluir determinados números, em ambos os membros de uma equação, para que seja encontrada a sua solução.

Para compreender o processo de resolução das equações do 1º grau esse elemento (relações inversas), assim como as propriedades da igualdade são imprescindíveis. Ainda segundo os autores acima, as propriedades aditivas e multiplicativas da igualdade afirmam que: adicionando, subtraindo, multiplicando ou dividindo um mesmo número em ambos os membros de uma igualdade, obtém-se uma nova sentença que também é uma igualdade. São esses dois elementos que fundamentam o processo de resolução das equações do 1º grau.

A atividade seguinte (figura 42) propõe que o estudante, fazendo uso da calculadora, para responder ao item a, perceba que a operação representada pela interrogação é uma divisão, pois, para ser uma adição ou uma multiplicação o resultado teria que ser maior do que 84, e para ser uma subtração resultaria em 80, o que não corresponde ao valor apresentado no visor da calculadora, ou seja, mais uma vez é solicitado do estudante a compreensão das principais características e propriedades das operações fundamentais.

Figura 42 – Relações inversas entre multiplicação e divisão.


4 Responda às questões.

a) Tânia apertou as seguintes teclas na calculadora:

8 4 ? 4 = , e no visor apareceu 21.

Que operação Tânia fez?

b) Tendo no visor 21, desenhe as teclas que Tânia deve apertar para que volte a aparecer 84.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 117).

Para responder ao item b, o estudante precisa ter clareza quanto aos elementos que compõem uma divisão e sua definição, que afirma que: ao dividir um número p (dividendo) por um número d (divisor) com $d > 0$, deve-se achar um número q (quociente) e um resto r, de modo que, $p = d \times q + r$, com $r < q$. Sendo assim, ele compreenderá que multiplicando o quociente 21 pelo divisor 4 encontrará o dividendo 84, pois, nesse caso o resto (r) é nulo.

De acordo com Condesso (2015), num estágio mais avançado de aprendizagem, os estudantes recorrem a multiplicação para resolver problemas de divisão, e por meio de problemas contextualizados começam a observar, por exemplo, que: 54 : 9 = 6, pois, 6 x 9 = 54. Alguns autores, tais como, Fosnot e Dolk (2001) e Vergnaud (2009), defendem que o ensino da multiplicação e da divisão devem ser realizados de forma paralela, por meio de problemas e não de forma linear e estanque.

O último problema que não consideramos ser passível classificar segundo a TCC devido à falta de contextualização (figura 43), propõe que os estudantes compreendam que é necessário realizar a operação inversa para descobrir o número que Leandro e Marisa pensaram.

Figura 43 – Relações inversas entre multiplicação e divisão.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 117).

No caso de Leandro, o estudante terá que procurar um número que multiplicado por 7 resulte em 63, ou ainda, dividir (operação inversa da multiplicação) 63 por 7 que resultará na

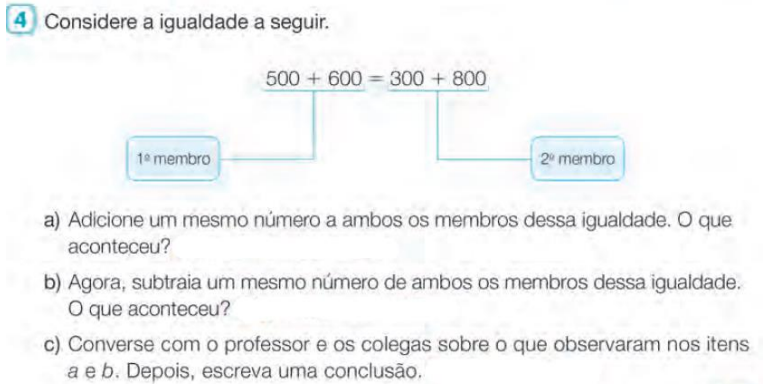
resposta correta; e, no caso de Marisa, procurar um número que dividido por 4 resulte em 25, ou ainda, basta multiplicar (operação inversa da divisão) 4 por 25 que o resultado será a resposta do problema.

7.7.2 Relação de igualdade existente entre dois termos

No livro Buriti – Mais matemática do 5º ano do ensino fundamental encontramos, para a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos", apenas uma única situação que não foi possível ser classificada, mas que pertence ao campo das estruturas aditivas.

Nessa atividade há uma ampliação da compreensão de igualdade como equivalência (nas atividades anteriores, envolvendo essa categoria, o livro fez uso da balança de dois pratos) partindo da representação em linguagem matemática, ou seja, ao invés de utilizar a balança para representar a igualdade no sentido de equivalência entre os valores, usou-se a simbologia matemática. Essa situação nos traz, também, uma informação nova, até então não apresentada pelo livro, que é a identificação dos membros em uma igualdade (1º e 2º membros, mais um elemento essencial para a construção do conceito formal de equação do 1º grau).

Figura 44 – Relação de igualdade existente entre dois termos.



Fonte: Buriti mais (2017, p. 125).

Partindo da representação matemática proposta, a atividade busca basicamente a adição e subtração de valores iguais a ambos os membros da igualdade. No item a, é solicitado que o estudante adicione um valor aos dois membros com o propósito de concluir que, após realizar as operações, a igualdade se mantém. No item b, é proposto a subtração de um valor qualquer (escolhido pelo estudante) em ambos os membros para novamente inferir que não haverá alteração; e, no item c possibilita que os estudantes junto com o professor discutam um pouco sobre as respostas dos itens anteriores e concluam que adicionando ou subtraindo um mesmo

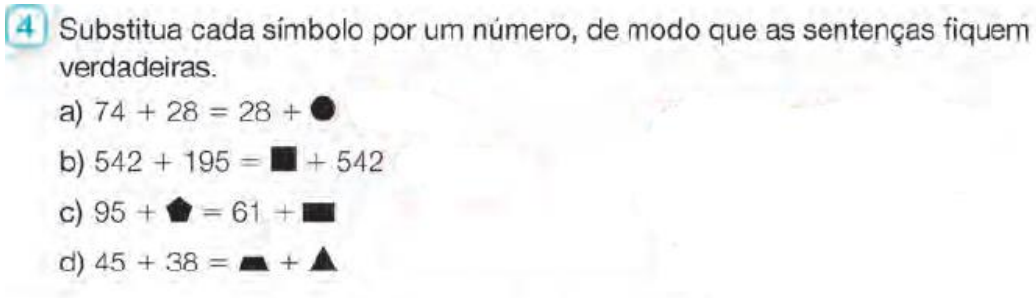
valor em ambos os membros de uma igualdade esta não se altera, contemplando o princípio aditivo da igualdade.

7.7.3 Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade

Para a categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade", o livro Buriti – Mais Matemática do 4º ano do ensino fundamental apresenta duas situações em que não foi possível a sua classificação segundo a Teoria do Campos Conceituais.

Ao trabalhar as propriedades da adição que antecedem o trabalho com as relações inversas, dentre as atividades propostas, o livro apresenta uma para que o estudante descubra o elemento desconhecido (representado por um símbolo) de modo que a igualdade se torne verdadeira, abordando, nesse caso, a propriedade comutativa da adição.

Figura 45 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.


4 Substitua cada símbolo por um número, de modo que as sentenças fiquem verdadeiras.

a) 74 + 28 = 28 + ●

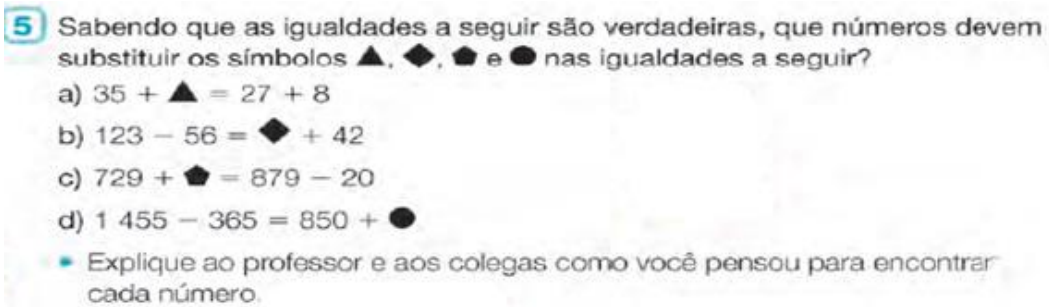
b) 542 + 195 = ■ + 542

c) 95 + ⬟ = 61 + ▬

d) 45 + 38 = ▰ + ▲

Fonte: Buriti mais (2017, p. 50).

Figura 46 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.


5 Sabendo que as igualdades a seguir são verdadeiras, que números devem substituir os símbolos ▲, ◆, ⬟ e ● nas igualdades a seguir?

a) 35 + ▲ = 27 + 8

b) 123 − 56 = ◆ + 42

c) 729 + ⬟ = 879 − 20

d) 1 455 − 365 = 850 + ●

• Explique ao professor e aos colegas como você pensou para encontrar cada número.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 57).

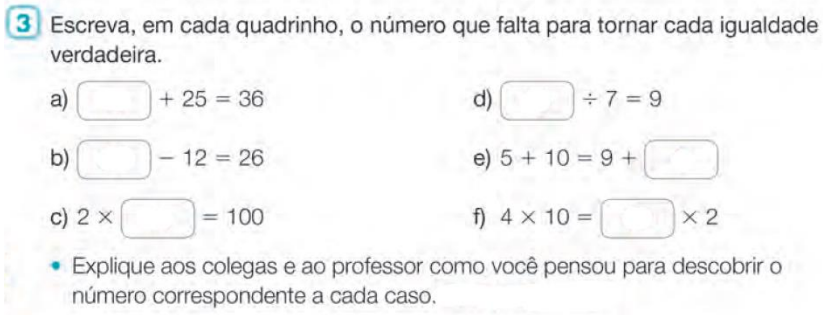
Essas atividades acima propõem que os estudantes, sabendo que as sentenças apresentadas são verdadeiras, ou seja, que as somas ou subtrações em cada membro da igualdade resultam no mesmo valor, deverão identificar o elemento desconhecido, representado

por figuras geométricas. Claramente, por se tratar de adições e subtrações, estas duas atividades pertencem ao campo das estruturas aditivas, no entanto, devido a sua falta de contextualização, como já mencionado, não é possível classificá-las segundo a TCC.

Ainda para a categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade", agora para o 5º ano do ensino fundamental, o livro Buriti – Mais Matemática apresentou uma única atividade que não foi possível realizar sua classificação segundo a TCC.

Essa atividade não aborda a balança de dois pratos, mas sim figuras semelhantes a um retângulo que representam os valores desconhecidos e devem ser identificados pelos estudantes para tornar a igualdade verdadeira. Esta propõe, também, que o estudante exponha junto com os demais colegas e professores suas estratégias de resolução.

Figura 47 – Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade.


3 Escreva, em cada quadrinho, o número que falta para tornar cada igualdade verdadeira.

a) ☐ + 25 = 36

b) ☐ − 12 = 26

c) 2 × ☐ = 100

d) ☐ ÷ 7 = 9

e) 5 + 10 = 9 + ☐

f) 4 × 10 = ☐ × 2

• Explique aos colegas e ao professor como você pensou para descobrir o número correspondente a cada caso.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 128).

É importante ressaltar que, mesmo apresentando elementos desconhecidos, esta situação contempla a categoria apenas no item e, nos demais itens os valores desconhecidos podem ser identificados a partir das relações inversas; dessa forma, esta atividade pertence a duas categorias.

No item a, os estudantes precisarão descobrir qual o valor que somado a 25 resultem em 36, para isso basta subtrair (relação inversa da adição) o valor do todo, 36, da parte conhecida, 25, e chegar a resposta 11. Os demais itens seguem o mesmo raciocínio, envolvendo relações inversas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Somente no item e, é possível identificarmos a categoria abordada nesta seção, pois, dada a sentença, temos no primeiro membro um total de 15 (5 + 10) e, compreendendo a igualdade no sentido de equivalência, para tornarmos a igualdade verdadeira é preciso que o segundo membro também corresponda a 15, assim, o valor desconhecido equivale a 6, porque 9 + 6 = 15.

Abaixo apresentamos um quadro que resume as categorias, o ano escolar do livro didático, o cálculo numérico a qual pertence cada atividade e sua quantidade.

Quadro 3 – Atividades não classificadas segundo a TCC.

Categoria	Ano do LD	Cálculo numérico	Quantidade de atividades
Relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão	4º ano	Aditivo	2
		Multiplicativo	4
Relação de igualdade existente entre dois termos	5º ano	Aditivo	1
Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade	4º ano	Aditivo	2
	5º ano	Aditivo e Multiplicativo	1

Fonte: A Autora (2023).

A primeira categoria que encontramos questões que não foi possível classificar segundo a TCC é a que compreende as relações inversas. A atividade apresentada na figura 38 corresponde a primeira proposta do livro didático Buriti – Mais Matemática, do 4º ano, para o trabalho com essa categoria, o material propõe que os estudantes, ao solucionar cada item, percebam, ainda de forma intuitiva, as relações inversas entre as operações de adição e subtração. A atividade seguinte, figura 39, possibilita um aprofundamento no que foi trabalhado na questão anterior, apresentando a partir de um exemplo a operação de adição como inverso da subtração e a subtração como o inverso da adição.

Para essa mesma categoria, agora envolvendo relações inversas entre multiplicação e divisão, o livro propôs 4 atividades. A primeira atividade (figura 40) apresentada mobiliza conhecimentos referentes as propriedades da divisão, por exemplo, que o dividendo = quociente x divisor + resto, partindo disso, ele perceberá uma relação entre a divisão e a multiplicação. A questão seguinte, figura 41, propõe ampliar as estratégias de cálculo, pois, os estudantes deverão realizar multiplicações para verificar se o resultado da divisão está correto, ou seja, aqui a noção de operação inversa é utilizada para verificar resultados de operações.

Na próxima atividade (figura 42), ainda no contexto das relações inversas entre multiplicação e divisão, temos mais uma vez o uso da calculadora. Essa atividade mobiliza conhecimentos relativos as principais características e propriedades das operações fundamentais, pois, o estudante deverá, por meio desses conhecimentos, identificar qual a operação correta a partir do que posto na imagem da atividade. Para a última questão, figura 43, temos a retomada das relações inversas para descobrir os valores desconhecidos. No que se refere aos recursos utilizados nessas questões podemos citar: calculadora e o quadradinho para representar o elemento desconhecido.

A próxima categoria, “relação de igualdade existente entre dois termos” para o 5º ano, temos uma única atividade envolvendo o cálculo numérico aditivo. As situações que antecederam essa atividade fizeram uso da representação da balança de dois pratos, no entanto, esta atividade propõe uma ampliação do que foi visto anteriormente, já que, a compreensão da ideia da igualdade no sentido de equivalência é proposta a partir da linguagem matemática. Essa atividade também explicita a ideia de membros de igualdade, ainda não vista até o momento.

A última categoria que explora atividades que não foram possíveis classificar é a que trata do “elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade”. Foram encontradas atividades nos livros do 4º a 5º anos (para o 4º ano, 2 atividades; e, para o 5º ano, 1 atividade).

As atividades presentes no livro do 4º ano compreendem cálculos numéricos aditivos e propõe abordar a propriedade comutativa da adição e a propriedade aditiva da igualdade, com caráter bastante introdutório para esta categoria. No livro do 5º ano, temos uma única questão, que, de modo geral, propõe o uso das relações inversas como conhecimento necessário para solucionar a maioria dos itens, somente o item “e” aborda a categoria “elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade”, e assim como a anterior, esta atividade também apresenta um caráter mais elementar.

Em síntese, para o 4º ano, as atividades propostas para a primeira categoria apresentaram um caráter introdutório seguido de atividades de ampliação e consolidação das relações envolvidas. Para a segunda categoria, agora para o 5º ano, a única atividade encontrada apresentou uma proposta de ampliar o que já foi visto anteriormente, deixando de lado a representação da balança e utilizando a linguagem matemática. E, por fim, a última categoria, para o 4º e 5º ano, temos todas as atividades com um caráter mais introdutório.

No quadro abaixo apresentamos, por categoria e ano escolar, as atividades e os problemas, especificando a que campo se relacionam (aditivo ou multiplicativo) no caso dos problemas, destacando os grupos a que pertencem, e, para as atividades, identificamos a qual cálculo numérico (aditivo ou multiplicativo) se referem, dessa forma, pretendemos sintetizar de forma sistemática as nossas análises.

Quadro 4 – Tipologia das atividades e problemas que envolve as noções iniciais de equações do 1º grau.

CATEGORIA	BURITI-MAIS MATEMÁTICA (3º ANO)		BURITI-MAIS MATEMÁTICA (4º ANO)		BURITI-MAIS MATEMÁTICA (5º ANO)		A CONQUISTA DA MATEMÁTICA (6º ANO)	
Ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração	PEA	5 problemas de composição						
Relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão			PEA	3 problemas de composição				
			CNA	2 atividades				
			CNM	4 atividades				
Relação de igualdade existente entre dois termos			PEA	2 problemas de composição 1 problema de composição, comparação e transformação	PEA	1 problema de composição 1 problema de composição e comparação	PEM	2 problemas de comparação multiplicativa
					PM	1 problema de transformação e proporção simples		
					CNA	1 atividade		
Elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade			PEA	1 problema de composição 1 problema de transformação	PEA	3 problemas de composição		
			CNA	2 atividades	PM	2 problemas de composição e comparação multiplicativa		
					CNAM	1 atividade		
Variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas					PEM	1 problema de proporção múltipla 4 problemas de proporção simples		
Problemas de partilha					PEM	3 problemas de comparação multiplicativa	PEM	2 problemas de comparação multiplicativa

Fonte: A Autora (2023).

Legendas:

PEA: Problemas de estrutura aditiva

PEM: Problemas de estrutura multiplicativa

PM: Problemas mistos

CNA: Cálculo numérico aditivo

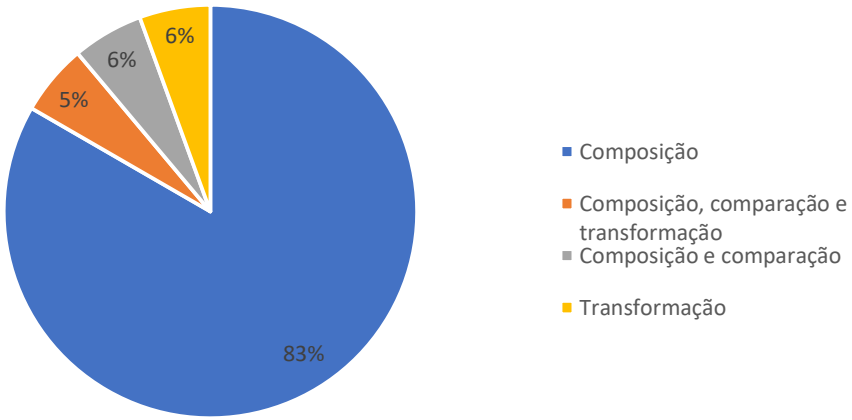
CNM: Cálculo numérico multiplicativo

CNAM: Cálculo numérico aditivo e multiplicativo

A partir do quadro 4, percebemos que para a maioria das categorias analisadas foram encontrados problemas e/ou atividades envolvendo as relações aditivas. Se consideramos apenas as que pertencem exclusivamente a este campo, temos 18 situações e 5 atividades, caracterizando-se como a relação mais presente se comparada a relação multiplicativa e as que envolvem as duas relações. Apenas nas categorias "variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas" e "problemas de partilha" não foram encontrados nenhum problema ou atividade envolvendo a relação aditiva.

Para as categorias que apresentaram os problemas pertencentes ao campo das estruturas aditivas, o tipo de problema envolvendo a composição está presente em todas elas, caracterizando-se como a mais encontrada dentre as classificações que compõem este campo, uma vez que, dentre os 18 problemas (contabilizando todas as categorias em que essa relação esteve presente) pertencentes a esse campo conceitual, 15 compreendem o grupo das composições, os três restantes, correspondem a problemas de transformação; composição e comparação; e, composição, comparação e transformação, conforme apresenta o gráfico abaixo.

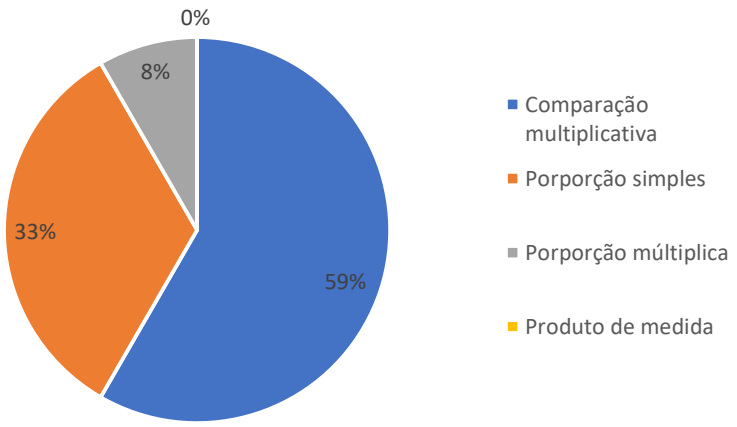
Gráfico 1 – Tipos de situações pertencentes ao campo das estruturas aditivas.



Fonte: A Autora (2023).

Os problemas de estruturas multiplicativas estiveram presentes em três categorias: relação de igualdade existente entre dois termos, variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas e problemas de partilha. Sendo a categoria que trata sobre variação de proporcionalidade a que mais apresentou esse tipo de problema, totalizando 5 situações. Referente aos problemas de partilha, para essa categoria, foram encontrados apenas problemas pertencentes a este campo conceitual. Se consideramos os problemas e atividades que compreendem exclusivamente este campo, temos um total de 4 atividades e 12 problemas, compreendendo os grupos: comparação multiplicativa, proporção simples e proporção múltipla, e sendo a comparação multiplicativa a mais presente com 7 situações.

Gráfico 2 – Tipos de situações pertencentes ao campo das estruturas multiplicativas.



Fonte: A Autora (2023).

Os problemas mistos apareceram em apenas duas categorias: relação de igualdade existente entre dois termos e elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade, totalizando 3 problemas (todos encontrados nos livros do 5º ano), sendo 1 problema para a primeira categoria envolvendo transformação e proporção simples, e, 2 para a segunda categoria, envolvendo a composição e a comparação multiplicativa. Nas atividades, o cálculo numérico envolvendo relações aditivas e multiplicativas esteve presente em apenas uma categoria: elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade, do 5º ano. Assim, tanto as atividades envolvendo as duas relações como os problemas mistos foram os menos encontrados nos livros pesquisados.

As categorias: ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração e relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, apresentaram, para o 3º e 4º ano, respectivamente, somente problemas de composição. Para o 4º ano encontramos também 6 atividades, nas quais 2 delas envolveram relações aditivas e 4 relações multiplicativas. Assim, se considerarmos apenas os problemas, para as duas primeiras categorias apresentadas no quadro houve apenas um campo contemplado (aditivo) e o mesmo tipo de classificação (composição) presente no que se refere aos problemas.

Para o 4º e 5º anos, na categoria "relação de igualdade existente entre dois termos" encontramos problemas de estrutura aditiva classificado como de composição e transformação para o 4º ano; e, problemas de composição, transformação e, no campo multiplicativo, a proporção simples para o 5º ano. Nas atividades, encontramos somente uma envolvendo relação aditiva para o 5º ano. Se consideramos somente os problemas, percebemos que para esses dois anos, mesmo apresentando o mesmo número de situações, no 4º ano, temos apenas problemas de estrutura aditiva, e para o 5º ano temos problemas de estrutura aditiva e problemas mistos, o que eleva o nível de complexidade de um ano para o outro, embora não se apresentem em quantidade significativa.

A categoria "elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade" ainda para o 4º e 5º anos, percebemos o mesmo que relatamos na categoria anterior: no 4º ano temos apenas problemas de estrutura aditiva, no grupo das composições, e para o 5º, problemas estrutura aditiva e, problemas mistos envolvendo a composição e a comparação multiplicativa, caracterizando mais uma vez um crescente nível de complexidade. Vale ressaltar que, para esta categoria o número de situações se mostrou maior para o 5º ano do que na categoria anterior para o mesmo ano.

Por fim, de modo geral, o campo conceitual das estruturas aditivas foi o mais identificado nas situações propostas pelos livros didáticos analisados. Para este campo, os

problemas classificados como de composição também mostram mais presentes se comparados aos de transformação e comparação. Referente as atividades, as que envolveram as relações aditivas também prevaleceram em comparação as relações multiplicativas e as que envolviam as duas relações. No 4º e o 5º anos para duas categorias percebemos que, mesmo apresentando poucas situações, estas se apresentaram de forma mais complexa no 5º ano em relação ao 4º ano, nos mostrando que os problemas propostos para o 5º ano configuram-se como mais complexos se comparados aos propostos para o 4º ano considerando a mesma categoria analisada.

7.8 RECURSOS UTILIZADOS NAS SITUAÇÕES E ATIVIDADES

Após classificarmos, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, os problemas pertencentes as categorias, que foram criadas a partir das habilidades que desenvolvem, no estudante, noções iniciais de equações do 1º grau, e identificarmos as atividades que não puderam ser classificadas segundo essa teoria, neste capítulo, descrevemos os recursos utilizados nas atividades e problemas encontrados nos livros utilizados como fonte documental. Nesse trabalho, consideramos recursos os desenhos, imagens, figuras, assim como também, objetos presentes na vida real, estes têm o propósito de auxiliar o estudante no processo de resolução da atividade ou problema.

Como foi possível observar o livro Buriti – Mais Matemática, do 3º ano, explora poucas situações que tratam da categoria "ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração" analisada nesta pesquisa e, consequentemente, também explora poucos recursos. Foram encontrados um total de 5 problemas, no entanto, apenas 3 deles faziam uso de algum objeto, imagem ou desenho. Vale ressaltar que, no livro Buriti – Mais matemática do 3º ano do ensino fundamental, contemplada apenas a categoria referida acima.

Quadro 5 – Recursos explorados pelos livros didáticos.

Recursos	**3º ano**	**4º ano**	**5º ano**
Calculadora	Figura 7, figura 8, figura 9	Figura 38, figura 42	
Quadradinhos, círculos, retângulos, triângulos, trapézios, traços, etc.		Figura 21, figura 40, figura 45, figura 46 e figura 47	Figura 25, figura 26, figura 27, figura 28

Balança de dois pratos.		Figura 13, figura 14, figura 15	Figura 17, figura 18, figura 23, figura 24

Fonte: A Autora (2023).

Dentre as cinco situações propostas para a categoria, apenas três delas apresentam algum recurso. A partir do quadro acima, temos nas figuras 7, 8 e 9, que propõem o uso da calculadora no processo de resolução dos problemas, nessas questões é indicado que algumas teclas desse instrumento estão quebradas e a partir disso o estudante deve mobilizar seus conhecimentos para solucionar os problemas com a ausência dessas teclas. Todos os problemas pertencem ao campo das estruturas aditivas.

Para o 4º ano com o livro Buriti – mais Matemática foram contempladas três categorias, são elas: relações inversas; relação de igualdade existente entre dois termos; e, número desconhecido que torna verdadeira a igualdade. Nessas categorias foram encontradas tanto atividades como problemas que utilizaram algum tipo de recurso, no entanto, a grande maioria dos problemas e atividades não apresentavam recursos como forma de subsidiar o estudante no processo de resolução e/ou compreensão.

Conforme mostra o quadro 5, para este ano, o primeiro recurso que destacamos é a calculadora, percebemos o uso dela em duas atividades apresentadas nas figuras 38 e 42 que correspondem a seção que explicita as atividades que não puderam ser classificadas a luz da TCC, uma dessas atividades pertence ao campo numérico aditivo e a outra ao campo numérico multiplicativo. Como segundo tipo de recurso, temos as figuras geométricas que representam os elementos desconhecidos (círculo, quadrado, triângulo, retângulo, entre outros). Os problemas e atividades indicados nas figuras no quadro acima utilizaram esses elementos como recurso, dentre elas, temos um problema de estrutura aditiva e as demais caracterizam-se como atividades que envolvem tanto cálculos aditivos e/ou multiplicativos.

Para o terceiro e último tipo de recurso, ainda no 4º ano, temos um exemplo clássico quando a proposta é compreender o significado do sinal de igualdade como uma relação de equivalência em que ambos os lados da igualdade precisam ser iguais, que é a balança de dois pratos. Para esse recurso encontramos três situações que utilizaram esta representação e todas elas pertencem ao campo das estruturas aditivas.

O livro Buriti - Mais Matemática, do 5º ano, contemplou 4 categorias: relação de igualdade existente entre dois termos, número desconhecido que torna verdadeira a igualdade, variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas e problemas de partilha. No 5º ano,

para o segundo recurso (quadradinhos, círculos, retângulos, etc.) encontramos também atividades e problemas que utilizaram essa representação, dentre eles as figuras 25, 26, 27 e 28 que correspondem a problemas classificados segundo a TCC como pertencentes as estruturas aditivas (figura 26), estruturas multiplicativas (figura 28) e estruturas aditivas e multiplicativas (figuras 26 e 27). A figura 47, representa uma atividade que envolve o cálculo numérico aditivo e multiplicativo. Para o terceiro tipo de recurso, a balança de dois pratos, temos 4 problemas todos pertencentes ao campo das estruturas aditivas que fazem uso dessa representação.

No que se refere ao livro didático do 6º ano, pertencente a uma coleção diferente das analisadas anteriormente, antes com o Buriti – Mais Matemática e agora com A conquista da Matemática. Este ano escolar contemplou duas categorias: relação de igualdade existente entre dois termos e problemas de partilha; e, de acordo com o quadro 5, nenhum dos problemas encontrados fizeram uso de algum recurso que subsidiasse o estudante na compreensão e/ou resolução destes.

De modo geral, o 3º ano, que esteve presente em apenas uma categoria foi o ano que encontramos apenas um tipo de recurso, em contrapartida, o 4º ano mesmo não sendo o ano que mais contempla categorias (o 4º ano abarca 3 categorias enquanto o 5º ano contempla 4 categorias) caracterizou-se como o ano que apresentou uma maior variedade de recursos. E, o 6º ano, que contempla duas categorias, não apresentou nenhum tipo de recurso.

Dentre todas as situações analisadas percebemos um recurso que se sobressaiu em relação aos demais: a representação da balança de dois pratos. Foram encontradas sete situações, dentre as 15 analisadas. Instrumento este que, por muito tempo, esteve presente no cotidiano humano e se tornou uma referência no ensino da noção de equivalência em igualdades, que representa um conhecimento essencial no processo de formalização do conceito de equação do 1º grau.

Esse tipo de balança corresponde a um recurso de grande potencial para desenvolver uma das noções iniciais de equação do 1º grau, pois, permite aos estudantes visualizar, por meio do equilíbrio da balança (que simboliza a igualdade) que, adicionando ou subtraindo um mesmo valor em ambos os pratos de uma balança, esta permanecerá em equilíbrio. No 7 ano, essa noção será essencial quando explorado o princípio aditivo das igualdades, já que este princípio que afirma que: adicionando ou subtraindo um mesmo número, em ambos os membros de uma igualdade encontra-se outra sentença que ainda é uma igualdade.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, enfatizamos a unidade temática álgebra, tendo em vista, o seu propósito no ensino da matemática, buscando não somente desenvolver habilidades específicas, mas também uma forma particular de pensamento - o pensamento algébrico; destacamos também as dificuldades existentes entre os estudantes no processo de aprendizagem dos conteúdos presentes nesse campo da matemática. Dentre os conteúdos que compreendem esta unidade temática, enfatizamos nesta pesquisa as equações polinomiais do 1º grau, que são desenvolvidas em sua concepção formal no 7º ano do ensino fundamental e se estendem para as demais etapas escolares chegando até o ensino médio.

Partimos da premissa de que existem conhecimentos desenvolvidos no 3º, 4º e 5º anos dos anos iniciais do ensino fundamental e no 6º ano dos anos finais que fornecem elementos necessários para a melhor compreensão e resolução das equações do 1º grau quando desenvolvidas em sua concepção formal no 7º ano, esses conhecimentos são denominados nesta pesquisa como noções inicias de equação do 1º grau. Assim, a partir de algumas leituras, realizamos um mapeamento nos documentos oficiais, BNCC (Brasil, 2018) e Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019), em busca de habilidades que desenvolvem essas noções.

Nosso objetivo nesta pesquisa foi analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, situações propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º ano, 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental. Para alcançar este objetivo, identificamos em livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental problemas e atividades que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau. Classificamos, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, situações encontradas nos livros didáticos que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau; e descrevemos os recursos utilizados em problemas e atividades que envolvem noções iniciais de equação do 1º grau em livros didáticos de matemática do 3º, 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental.

Após elencarmos as seis categorias que envolvem os conhecimentos que consideramos essenciais no desenvolvimento das noções iniciais de equação do 1º grau: ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração; relações inversas entre operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; relação de igualdade existente entre dois termos (para a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão); elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade; variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar; e problemas envolvendo a partilha de uma

quantidade em duas partes desiguais; classificamos os problemas segundo a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud, e para as atividades destacamos o cálculo numérico envolvido. Ao todo, após o processo de análise foram encontrados 33 problemas e 10 atividades.

Observamos que os problemas que correspondiam, exclusivamente, ao campo das estruturas aditivas, se sobressaíram se comparados aos demais, totalizando 18 problemas. Dentre os problemas pertencentes a este campo conceitual, os classificados como de composição foram os mais encontrados, correspondendo a 83% dos problemas relativos a este campo - foram 15 problemas de composição dentre os 18 problemas de estrutura aditiva. Os três problemas restantes apresentavam uma transformação; uma composição e comparação; e uma composição, comparação e transformação, correspondendo cada um a 6%.

Os problemas de estrutura multiplicativa estiveram presentes em 12 situações, se considerarmos todas as categorias analisadas, o tipo de problema mais identificado pertence ao grupo das comparações multiplicativas que correspondeu a 59% do total de problemas presentes neste campo conceitual. Os problemas que caracterizam o grupo produto de medidas não foram encontrados.

Para os problemas mistos identificamos somente 3 situações envolvendo raciocínios distintos pertencentes ao campo aditivo e ao campo multiplicativo: transformação e proporção simples, e, composição e a comparação multiplicativa. Estes contemplavam duas categorias distintas: relação de igualdade existente entre dois termos e elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade, e ambas pertencem ao 5º ano.

Referente as atividades, assim como nos problemas, as que envolviam relações aditivas se mostraram mais presentes do que as demais relações. Foram 10 atividades encontradas ao todo e, dentre elas, metade contemplavam essa relação. As demais, 4 envolveram relações multiplicativas e 1 atividade envolveu as duas relações, aditiva e multiplicativa.

Verificamos que, para a categoria "relação de igualdade existente entre dois termos" do 4º ano e do 6º ano, não foi identificado um crescente nível de complexidade a partir da ordem em que se apresentaram as situações. O mesmo aconteceu para a categoria "variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas" do 5º ano e para a categoria "problemas de partilha" também do 5º ano. Nas demais categorias e anos apresentados nessa pesquisa foi possível perceber uma linearidade no que se refere a dificuldade de um problema para o outro na ordem em que foram propostos em cada livro.

O nível de complexidade entre as obras, quando analisadas de um ano para outro, foi verificado para duas categorias relativas ao 4º e 5º anos, uma vez que, estes anos representaram

categorias em comum e pertencem à mesma coleção de livros (Buriti – Mais matemática). De modo geral, foi percebido um aumento significativo no nível de complexidade entre esses dois anos escolares, pois, para ambas as categorias tivemos problemas de estrutura aditiva para o 4º ano e, para o 5º ano encontramos problemas de estrutura aditiva e problemas mistos.

O número de situações encontradas em todas as categorias analisadas não se mostrou em quantidade significativa, conforme enfatiza Vergnaud (1986), a aprendizagem ocorre por meio do contato com um grande número de situações, tanto dentro como fora da escola. Assim, a partir do que é proposto pelo autor, quanto mais situações os estudantes tiverem contato, mais eles tendem a desenvolver determinado conceito. Guitirana et al., (2014), ratifica as ideias acima, ressaltando que não é suficiente que o estudante realize o cálculo numérico adequado, é necessário que este compreenda e experimente diferentes situações relacionadas ao conceito em questão, porque situações distintas permitem ao estudante mobilizar raciocínios e esquemas diversos.

Além disso, após a análise dos problemas propostos nos livros consultados não percebemos uma diversificação entre eles, se considerarmos o campo das estruturas aditivas, por exemplo, tivemos categorias que compreenderam apenas esse campo conceitual, como é o caso das categorias: a ideia de igualdade para representar diferentes sentenças de adição e subtração; relações inversas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; elemento desconhecido que torna verdadeira a igualdade; e a relação de igualdade existente entre dois termos (para o 4º ano apenas).

Vergnaud (2009), traz em sua teoria a importância da diversificação das situações no processo de compreensão de um conceito. Dentre os preceitos que fundamentam a TCC, segundo Vergnaud (1994), a diversificação das situações compre um papel fundamental no processo de conceitualização, já que, oferecem uma base para que os estudantes testem seus modelos explicativos em diversos contextos, enriquecendo e reformulando tais modelos.

No que se refere aos recursos utilizados no processo de resolução das atividades e problemas, o livro do 4º ano foi onde encontramos um maior número de objetos e desenhos. Neste ano, foram identificados a calculadora, a representação da balança de dois pratos e figuras geométricas para representar elementos desconhecidos. No 3º ano encontramos apenas um único recurso, a calculadora; para o 5º ano, a balança de dois pratos e figuras geométricas para representar elementos desconhecidos; e, por fim, para o 6º ano, não foi encontrado nenhum recurso.

Na procura pelos problemas e atividades, percebemos nos livros didáticos alguns problemas que pertenciam as categorias previamente elencadas nesta pesquisa, mas que não

foram sinalizadas pelos autores, ou seja, estes foram classificados em outras habilidades (vale lembrar que, os livros analisados pertenciam ao manual do professor, logo, nas páginas ou no início de cada capítulo era destacada as habilidades envolvidas), evidenciando, assim, uma fragilidade na compreensão dos conceitos envolvidos por parte dos autores. Além disso, por meio das análises e propostas de resolução dos problemas percebemos um erro em um dos problemas (figura 35), no qual não havia resposta correta dentre as alternativas apresentadas no livro, o que aponta mais uma limitação deste material.

Ao longo da construção deste trabalho alguns desafios estiveram presentes, dentre eles destacamos o processo de compreensão da teoria abordada (Teoria dos Campos Conceituais - TCC) com o objetivo de entender a sua real adequação à presente pesquisa, que posteriormente se mostrou suficiente e necessária no processo de análise dos problemas encontrados nos livros didáticos. Todas as etapas que pretendíamos realizar foram concretizadas, apenas ajustamos alguns pontos, como por exemplo, percebemos que não seria possível utilizar todos os elementos que compõem o conceito proposta na TCC (situação, invariantes operatórios e representações simbólicas), tal realidade nos fez optar por reorganizar as nossas análises e utilizarmos apenas a compreensão dos problemas (situações) nesse processo.

Espera-se, com o presente estudo, contribuir para a reflexão sobre o ensino da álgebra, em especial, das equações polinomiais do 1º grau e as possibilidades de otimizar seu processo de ensino tomando como referência os problemas e atividades propostos nos livros didáticos, que representam um recurso significativo presente nas salas de aula de matemática; assim como também, permitir ao professor ampliar seu olhar para os tipos de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, e, quais os raciocínios envolvidos em cada situação proposta, de modo a possibilitar aos estudantes uma maior diversificação de problemas para que este desenvolva um conceito de forma significativa.

Estudos posteriores podem aprofundar um pouco mais e analisar os invariantes operatórios e as representações simbólicas mobilizadas nas situações propostas nos livros didáticos que possibilitam auxiliar o estudante no seu processo de compreensão e/ou resolução. É possível também, a partir de situações envolvendo as categorias elencadas, verificar junto ao estudante se estas desenvolvem o pensamento algébrico, uma vez que, este é o objeto do ensino da álgebra desde os anos iniciais, segundo a BNCC (Brasil, 2018), mobilizando nesse processo os invariantes operatórios a luz da TCC; ou ainda, verificar (diante do que foi encontrado nos livros didáticos do 3º, 4º, 5º e 6º ano do ensino fundamental) quais os tipos de problemas e atividades encontrados nos livros do 7º ano do ensino fundamental, quando é proposta a

concepção formal do conceito de equação do 1º grau, destacando sua diversificação, nível de complexidade, quais os recursos utilizados e em qual campo conceitual estão mais presentes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. 202f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Recife. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7451?mode=full. Acesso em: 12 ago. 2021.

ALVARENGA, K. B.; ANDRADE, I. D.; DE JESUS SANTOS, R. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. **Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 12, n. 24, p. 39-52, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2571. Acesso em: 23 set. 2022.

BASTOS, L. S. **Early álgebra:** as estratégias de resolução de estudantes do 4º e 5º ano frente a problemas que aludem à álgebra. 2019. 174f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2031. Acesso em: 04 out. 2021.

BEHR, M., ERLWANGER, S., NICHOLS, E. (1980). How Children View the Equals Sign. Mathematics Teaching, 92, 13-18. Disponível em: https://gpc-maths.org/data/documents/doks/behr-howequal.pdf. Acesso em: 04 out. 2021.

BERNARD, J.; COHEN, M. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, A. & SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra.** Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 10, p. 111-126.

BITTENCOURT, C. M. **Livros didáticos**: concepções e uso. Recife: Secretaria da Educação e Esporte de Pernambuco, 1997. (Coleção Qualidade do Ensino, Série: Formação do Professor).

BITENCOURT, D. V. Early álgebra: uma análise de livros didáticos. In: **XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**. Pelotas, 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/07/gd1_daiane_bitencourt.pdf. Acesso em: 04 out. 2021.

BITENCOURT, D. V. **Early álgebra na perspectiva do livro didático.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2018. Disponível em: https://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201611807D.pdf. Acesso em: 04 out. 2021.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: VICTOR, J. K. (Ed.) Algebra: Gateway to a Technological Future. Columbia/USA: The MathematicalAssociationofAmerica, 2007.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Decreto-Lei no 1006, de 30 de dezembro de 1938**: Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático, 1939. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. **Decreto no 48.902, de 27 de agosto de 1960**: Institui a Companhia Nacional do Livro, 1960. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1960-1969/decreto-

48902-27-agosto-1960-388305-publicacaooriginal-1-pe.html#:~:text=Institui%20a%20Companhia%20Nacional%20do%20Livro. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. **Resolução nº 40 de julho de 2011**. Dispõem sobre o Programa Nacional do Livro Didático do Campo (PNLD Campo) para as escolas do Campo, 2011. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/194-secretarias-112877938/secad-educacao-continuada-223369541/18721-programa-nacional-do-livro-didatico-pnld-campo. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2017**: matemática – Ensino fundamental anos finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016. 155 p. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/phocadownload/programas/Livro_Didatico_PNLD/Guias/PNLD_2017/pnld_2017_matematica.pdf. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Ministério da Educação, Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 mai. 2021.

BRASIL. **PNLD**. Site. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391. Acesso em: 15 dez. 2022.

BRUNER, J. S. **Entry into early language**: A spiral curriculum: The Charles Gittins memorial lecture delivered at the University College of Swansea on March 13, 1975. University College of Swansea, 1975.

BURITI MAIS. **Matemática**: manual do professor /organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora responsável: Carolina Maria Toledo. São Paulo: Moderna, 2017.

CAMILI, M. C. M. **Estruturas multiplicativas:** um estado de conhecimento. 2021. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) - Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista, Bauru. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/ensino/pos-graduacao/programas/educacao-para-a-ciencia/home/.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Vol. XVI, Nº 2, 2007. p. 1-38. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

CARDOZO, D., MENEGHELLI, J., POSSAMAI, J. P. Concepção dos professores quanto a utilização de exercícios, situações contextualizadas e problemas. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v. 14. p. 73 – 87, Mar./Out. 2018. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/5701. Acesso em: 04 dez. 2022.

CARRAHER, D., SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing. 2007. p. 669-705.

CARRAHER, D. W.; SCHILIEMANN, A. D. O lugar da álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E.; LAUTERT, S. **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores**: Contribuições da Psicologia da Educação Matemática. Rio de Janeiro: Autografia, 2016. p.34 -73.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Coleção Explorando o Ensino**: Matemática, v. 17. Brasília: MEC, 2010, p. 15-30.

CARVALHO, J. I. F. **Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino finais do ensino fundamental.** 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3728. Acesso em: 04 dez. 2021.

CEQUALINI FILHO, J. L.; RIBEIRO, B.T.O.; LUNA, M. B. A resolução de problemas através de conteúdos matemáticos na forma concreta e contextualizada. In: **VII Congresso Nacional de Educação**, Maceió - AL, 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/67839. Acesso em: 04 dez. 2021.

CERCA, M. R. L. O. **O Desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade**: uma experiência de ensino no 3ºano. 2014. 227f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/17686. Acesso em: 04 dez. 2021.

CLARK, F. B., KAMII, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. **Journal for Research in Mathematics Education**, *27*(1), 41–51. Disponível em: https://psycnet.apa.org/record/1996-38330-001. Acesso em: 04 dez. 2021.

CORRÊIA, M. L.; MEGGIOLARO, G. P.; REIS, A. Q. M. Abordagem do conteúdo de frações a partir do programa nacional do livro didático. **REnCiMa**, v. 10, n.6, p. 21-38, 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1993. Acesso em: 04 dez. 2021.

CORREA, J., MEIRELES, E., CURVELO, C. A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas**. Estudos de Psicologia**, 5(1), 11-31, 2000. Disponível em: https://www.scielo.br/j/epsic/a/SwdSrdGhZWxhwdtpYM4rk6p/. Acesso em: 04 dez. 2021.

COLLING, J.; RICHIT, A.; ALBERTI, L.A. **Formação inicial de professores para o uso das tecnologias:** a apropriação do conhecimento tecnológico evidenciado nos planos de ensino. 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/344468053. Acesso em: 04 dez. 2022.

CONDESSO, J. P. M. O. **A multiplicação e a divisão de números naturais**: uma análise de manuais escolares do 1º ciclo**.** 2015. 125f. Dissertação de Mestrado (Educação Matemática) – Escola Superior de Educação de Lisboa. Disponível em: https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/5622/1/A%20multiplica%C3%A7%C3%A3o%20e%20a%20divis%C3%A3o%20de%20n%C3%BAmeros%20naturais.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

COPATTI, C., ANDREIS, A. M., ZUANAZZI, L. C. C. Olhares ao programa do livro didático: relações entre estado, mercado editorial e os livros didáticos na escola. **Revista perspectivas em Políticas Públicas**, n. 27, v. 14, jan./jul. 2021. Disponível em: https://revista.uemg.br/index.php/revistappp/article/view/5795. Acesso em: 04 dez. 2022.

COSTA, M. H. C.; MACENA, R. A.; CRISPIM, R. C.; OLIVEIRA NETO, O. M.; SANTOS, J. O**.** O papel do livro didático no processo educativo. In: **Congresso Nacional de Educação** – CONEDU. João Pessoa, 2017. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/37844. Acesso em: 04 dez. 2022.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/312/285. Acesso em: 04 dez. 2022.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa — FEUSP**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/GNrkGpgQnmdcxwKQ4VDTgNQ/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 04 dez. 2022.

CHOPPIN, A. Traiter le manuel scolaire comme source documentaire: une approche historique. **Revista língua escrita**, Belo Horizonte, n.3, p. 1-10, dez. 2007. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/411137453/ARTIGO-TRAITER-LE-MANUEL-SCOLAIRE-COMME-SOURCE-DOCUMENTAIRE-pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática,

1998.

DINIZ, M. I. Os Problemas Convencionais nos Livros Didáticos**.** In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 99-120.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

ECHEVERRÍA, M. P. P., POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender**.** In: POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

ETCHEVERRIA, T. C., CAMPOS, T. M. M., SILVA, A. F. G. Campo conceitual aditivo: um estudo com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Bolema**, n. 53, v. 29, p. 1181 – 1200, dez. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/fgC8Lwr8HwVnFCY7t4stjpL/. Acesso em: 04 dez. 2022.

FERRARO, J. L. S. Análise de conteúdo sobre o conceito de nicho ecológico: o que dizem os livros didáticos? **Revista de Ensino de Ciências e Matemática – RenCiMa,** v. 8, n. 5, p. 35-50, 2017. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1236. Acesso em: 04 dez. 2022.

FLICK, U. **Uma Introdução à Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre, RS: Bookman, 2009.

FOSNOT, C., DOLK, M. **Young mathematicians at work:** Constructing multiplication and division. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001.

FRANÇA, R. C.; VIEIRA, E. R. **Equações polinomiais do 1º grau:** uma incógnita...uma revisita à igualdade. Edite Resende Vieira. Rio de Janeiro: Imperial Editora, 2019.

FREITAS, B.; MOTTA, V. R.; COSTA, W. F. **O livro didático em questão.** São Paulo: Cortez, 1989.

FREITAS, N. K.; RODRIGUES, M. H. **O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo.** 2008. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/leh/files/2017/12/RODRIGUES-Melissa-Haag.-O-livro-did%C3%A1tico.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

FRISON, M. D.; VIANNA, J.; CHAVES, J. M.; BERNARDI, F. N. Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. In: **Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, 2009, Florianópolis. Disponível em: https://docplayer.com.br/7582442-Livro-didatico-como-instrumento-de-apoio-para-construcao-de-propostas-de-ensino-de-ciencias-naturais.html. Acesso em: 04 dez. 2022.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GERARD, F. M.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares.** Porto: Ed. Porto, 1998.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra**. 2008. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. São Paulo: FTD, 2018.

GITIRANA, V; CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S. M. P, SPINILLO, A.G. **Repensando multiplicação e divisão**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GOMES, L. P. S., NORONHA, C. A. Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: orientações e práticas de ensino e aprendizagem. **Revista Educação e Infâncias.** v. 1, n. 1, Natal, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufrn.br/educacaoinfancia/article/view/21048. Acesso em: 04 dez. 2022.

KAPUT, J. Teaching and learning a new álgebra. In: FENNEMA, E. ROMBERG, T. A. **(Eds), Mathematics classrooms that promote understand.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.;

BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New

York, 2008.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L; Pesquisa documental na pesquisa qualitativa. **Revista de investigaciones UNAD**, v. 14, nº 2. Colômbia, 2015. Disponível em: https://hemeroteca.unad.edu.co/index.php/revista-de-investigaciones-unad/article/viewFile/1455/1771. Acesso em: 04 dez. 2022.

KUHN, M. C, KLAFKE, C. **Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: conexões entre conteúdo de questões da OBEMEP 2018 nível A e BNCC. 2021. Acesso em: abril de 2022. Disponível em: https://san.uri.br/revistas/index.php/encitec/article/view/1320. Acesso em: 04 dez. 2022.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. **Revista Em aberto**, ano 16, n. 69, Brasília, 1996. Disponível em:

http://www.emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2368. Acesso em: 04 dez. 2022.

LEITE, J. S. L. **Equações do 1º grau**: a importância de práticas interligadas ao cotidiano do aluno. 2019. 43f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Santana dos Garrotes. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/17846/1/JSLL28072020.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

LESH, R., POST., BEHR, M. Proportional reasoning. Number Concept and Operations in the Middle Grades. **Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics**, p. 93-118, 1988. Disponível em: https://experts.umn.edu/en/publications/proportional-reasoning. Acesso em: 04 dez. 2022.

LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à Álgebra**: um estudo comparativo. 1996. 236f, Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife-PE. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/8302/1/arquivo889_1.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, Universiry of Nothingam, Nothingam, UK, 1992. Disponível em: https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo, SP: Ed. Pedagógica e Universitária, 1986.

MACEDO, J. A.; BRANDÃO, D. P.; NUNES, D. M. Limites e possibilidades do uso do livro didático de matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 68-86, jan./abr. 2019. Disponível em: https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAGINA, S., MERLINI, V. L., SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In**: 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – SIPEMAT. Fortaleza - CE, 2012. Disponível em: https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/mesas/3/3.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAGINA, S., SANTOS, A., MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações de estruturas multiplicativas. **Revista Ciência, Educação, Bauru,** n. 2, v. 20, p. 517- 533. 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QrTnTjTzRVW576mbqMH7cMd/abstract/?lang=pt. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P; SANTANA, E. R. S.; CARZOLA, I. M.; CAMPO, T. M.M. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v. 18 n. 34 – jul/dez – 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646679. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAGINA, S., CAMPOS, T., NUNES, T. E GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S., CAMPOS, T., NUNES, T., GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MAIA, L.S.L. A Teoria dos Campos Conceituais: um novo olhar para a formação do professor. In: **Boletim** GEPEM, nº 36 – fevereiro de 2000, p. 37-46. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/6rHfN88Ccn67444CKmgssDQ/. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio:** um foco nos capítulos de Geometria. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1079817. Acesso em: 04 dez. 2022.

MAZZI, L.C.; AMARAL-SCHIO, R. B. Uma trajetória histórica dos livros didáticos: um foco nas políticas públicas implementadas nos séculos XX e XXI. **Intermaths,** vol. 2, N. 1, Jan – Jun, 2021, p. 88-105. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/8077. Acesso em: 04 dez. 2022.

MELO, C. H. C.; LIMA, C. N. A importância dos jogos no ensino de matemática no ensino fundamental II. **Revista Educação Pública**. V. 22, nº 39, Rio de Janeiro, 2022. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii. Acesso em: 04 dez. 2022.

MENEZES, D. L. **Abecedário da Álgebra**. São Paulo: Nobel, 1970.

MORAES, A. M. S. **A importância e aplicação das equações do 1º grau no ensino fundamental.** 2015. 40f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Ceará. Maranguape. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/35722?locale=en. Acesso em: 04 dez. 2022.

MORI, I.; ONAGA, S. D. **Matemática, ideias e desafios**. São Paulo: Saraiva, 1996.

MUNIZ, C. A. A produção de notações matemáticas e seu significado. In: Maria Helena Fávero e Célio da Cunha. (Org.). **Psicologia do Conhecimento**: o diálogo entre as ciências e a cidadania. 1ed.Brasília: Unesco e UnB, 2009, v. 1, p. 115-143.

NEVES, C. D.; PEROVANO, A. P. **Livro didático nas aulas de matemática**. Universo dos segmentos envolvidos com a educação matemática 2. Organizadora Annaly Schewtschik. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: Polinômios. São Paulo: SBM, 2016.

NOGUEIRA, R. C. S. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental**: uma análise praxiológica. 2008. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo grande. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3636/2897. Acesso em: 04 dez. 2022.

NOGUEIRA, L. M., FERREIRA, R. S. Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática-ENEM**. São Paulo, 2016. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22612. Acesso em: 04 dez. 2022.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., BURMAN, D., B., D., EVANS., D. H, D., MONTGOMERY, L. (2008). Deaf Children's Understanding of Inverse Relations. In M. Marschark; P. C. Hauser.

(Eds.) Cognitive Underpinnings of Learning by Deaf and Hard-of-Hearing Students. Oxford: Oxford University Press.

NUNES, T.; CARRAHER D.; SCHLIEMANN A. N. **Na Vida Dez na Escola Zero.** Paulo: Cortez, 2011.

OLIVEIRA, A. T. C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, ano 9, n. 12, p. (35 – 39), jun. 2002. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/310. Acesso em: 04 dez. 2022.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental.** 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Disponível em: http://repositorio.ufpe.br:8080/xmlui/handle/123456789/4542. Acesso em: 04 dez. 2022.

OLIVEIRA, D. F. **Equações polinomiais**: da equação de 1º grau à teoria de Galois. 2017. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/items/5bdb43a6-3f0b-4b4b-8e96-8858a57e8510. Acesso em: 04 dez. 2022.

OLIVEIRA, J. L.; ARRUDA, A. M.; CAMARGO, J. A. Álgebra na balança. **Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação matemática: retrospectivas e perspectivas - (XI ENEM)**. Curitiba, 2013. Disponível em: https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/. Acesso em: 04 dez. 2022.

OLIVEIRA, K.; CORCHO, A. J. **Iniciação à matemática**. 2010. 101f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional). Disponível em: https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/1099. Acesso em: 04 dez. 2022.

PEDUZZI, L. O. Q. Sobre a resolução de problemas no ensino da Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 14, n. 3, p. 229-253, dez. 1997. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6982. Acesso em: 04 dez. 2022.

PAIVA, R. S.; SOBRINHO, D. M. S.; COSTA, M. L. S. O ensino e o uso do livro didático: relato de experiência em estágio supervisionado de geografia. **Revista Geotemas,** v. 3, n. 1, p. 69-80. 2013. Disponível em: https://www.academia.edu/42356393/O_ENSINO_E_O_USO_DO_LIVRO_DID%C3%81TICO_RELATO_DE_EXPERI%C3%8ANCIA_EM_EST%C3%81GIO_SUPERVISIONADO_DE_GEOGRAFIA. Acesso em: 04 dez. 2022.

PERNAMBUCO. **Currículo para o Ensino Fundamental:** Matemática. Secretária de Educação e Esportes, Recife, 2019. Disponível em: https://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

PEREIRA, D. E. **Dificuldade dos alunos em aprender álgebra.** 2017. 40f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São João Del-Rei. http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/handle/123456789/80. Acesso em: 04 dez. 2022.

PERRENOUD, P. **Construir competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PITOMBEIRA, J. B. **Revisitando uma velha conhecida**. Departamento de Matemática. PUC-Rio, 2004.

PITOMBEIRA, H. O. R. S. **O kahoot no ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2020. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional) – Universidade Federal de Alagoas – UFAL. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/6973/3/O%20Kahoot%20e%20o%20ensino%20da%20%C3%A1lgebra%20nos%20anos%20iniciais%20do%20ensino%20fundamental.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

PONTE, J. P. As equações nos manuais escolares. **Revista Brasileira de História da Matemática** - v. 4, nº 8. p. 149 – 170. Portugal, 2004. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/235. Acesso em: 04 dez. 2022.

PONTE, J.P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDE, 2009.

PONTE, J. P., CERCA, R. **Desenvolvendo o raciocínio relacional nos alunos dos primeiros anos.** 2017. Acesso em: abril de 2022. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/36441/1/Ponte%2C%20Cerca%202017.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

PONTE, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sitio Novo,** n. 2, v. 2, jul./dez. 2018. Disponível em: https://sitionovo.ifto.edu.br/index.php/sitionovo/article/view/136. Acesso em: 04 dez. 2022.

RADFORD, L. Algebraic thinkng and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **Anais do Sixth Congress of the Internetional Group of Psychology of Mathematics Education – PME.** Bergen Universiry Collge, v. 1, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/239933692_Algebraic_thinking_and_the_generalization_of_patterns_A_semiotic_perspective. Acesso em: 04 dez. 2022.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. 2007. 141f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11208. Acesso em: 04 dez. 2022.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N**. Álgebra para a formação do professor.** Explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

RODRIGUES, C. L. H.; REZENDE, V. Problemas mistos nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições da teoria dos campos Conceituais. In: **Encontro Paranaense de Educação Matemática**, 2019, Londrina/PR. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1074/734. Acesso em: 04 dez. 2022.

SANDE, O. F. R. O. **Uma análise do conteúdo frações em livros didáticos**. 2017. 53f. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB, Vitória da Conquista. Disponível: http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/monografia_Kamila_Barros_Pereira.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

SANTOS, W. D.; JUNIOR, J. S.; VELASQUE, L. S. O desenvolvimento do letramento estatístico pelos livros didáticos e a base nacional comum curricular. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática – RenCiMa**, v. 9, n. 2, p. 210-229, 2018. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1664. Acesso em: 04 dez. 2022.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História e Ciências Sociais**, v. 1, n.1, Jul. 2009. Disponível em: https://www.periodicos.furg.br/rbhcs/article/view/10351. Acesso em: 04 dez. 2022.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. O lugar da álgebra no Ensino Fundamental. In: MARTINS, E.; LAUTERT, S. (ORG) **Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores**: Contribuições da Psicologia da Educação Matemática. Editora Autografia. Rio de Janeiro, RJ. 2016.

SGNAULIN, I.M. **Seleção e uso do livro didático de ciências por professores iniciantes e experientes, da rede Municipal de Ensino de Campo Grande.** Mato Grosso do sul. Universidade Católica Dom Bosco: Campo Grande, 2012.

SILVA, D. R. **Livro didático de Matemática**: lugar histórico e perspectivas. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação. São Paulo. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-03082010-103617/pt-br.php. Acesso em: 04 dez. 2022.

SILVA, J. P. **As dificuldades dos estudantes na transposição de informações dos enunciados de problemas envolvendo equações do 1o grau para linguagem algébrica.** Monografia. Itaporanga - PB, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/352?locale=pt_BR. Acesso em: 04 dez. 2022.

SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação no livro didático de matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em matemática) – Universidade federal de Pernambuco – UFPE, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/41815. Acesso em: 04 dez. 2022.

SILVA, J. M., CIRÍACO, K. T. Possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de tarefas nos anos iniciais. In: **I Encontro Cearense de Educação Matemática**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – v. 8, n. 23, p. 115 – 130, 2021. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4998. Acesso em: 04 dez. 2022.

SILVA, A. A., COSTA, G. M. P. **Equações do 1º grau**: uma proposta de aula baseada na análise de livros. 2014. 64f. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/alexandre_azevedo.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

SILVA, I. T.; SELVA, A. C. V. Programa de Educação financeira nas escolas – Ensino Médio: Uma análise das orientações contidas nos livros do professor e suas relações com a matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática – RenCiMa.** REnCiMa, v. 9, n. 1, p. 140-157, 2018. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1293. Acesso em: 04 dez. 2022.

SPERAFICO, Y. L. F., DORNELES, B. V., GOLBERT, C. S. Competência cognitiva e resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau. **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 333-348, abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/dP793YcmQjjdR3zsbWtWjjh/. Acesso em: 04 dez. 2022.

TEIXEIRA, A. C. N. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental**: uma proposta de intervenção. 2016. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus. Disponível em:

https://vdocuments.com.br/a-introdufo-do-raciocnio-funcional-no-5-ano-do-fundamental-uma-intervenfo.html. Acesso em: 04 dez. 2022.

TÍLIO, R. C. **O livro didático de inglês em uma abordagem sócio-discursiva**: Culturas, identidades e pós-modernidade. 2006. 258f. Tese (Doutorado em Letras) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: https://www.leffa.pro.br/tela4/Textos/Textos/Teses/Rogerio_Tilio_tese.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022.

TOLFO, E. D. **A presença da álgebra nos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental**: desafios e perspectivas. 2019. 35f. Trabalho de Conclusão do Curso (Graduação em Pedagogia) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/42898. Acesso em: 04 dez. 2022.

TRIVILIN, L. R., RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Bolema,** Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 38-59, abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/GqBLw5M9bHhx7KqrdQMv84h/abstract/?lang=pt. Acesso em: 04 dez. 2022.

TURÍBIO, S. R. T.; SILVA, A. C. A influência do livro didático na prática pedagógica do professor que ensina matemática. **Revista Prática Docente**. v. 2, n. 2, p. 158-178, jul/dez, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/322016056_A_INFLUENCIA_DO_LIVRO_DIDATICO_NA_PRATICA_PEDAGOGICA_DO_PROFESSOR_QUE_ENSINA_MATEMATICA. Acesso em: 04 dez. 2022.

VALENTE, W. R. Livro didático e Educação Matemática: uma história inseparável**. Zetetiké**, Cempem, FE, Unicamp, v.16, n.30, Jul./dez. 2008. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894. Acesso em: 04 dez. 2022.

VERGNAUD, G. **Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática**: algumas questões teóricas e metodológicas. Trad. de Weiss, J. Apresentação concedida para o grupo Canadense de Estudos em Educação Matemática na Queen'se University, Kingston, jun.1982.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 04 dez. 2022. Acesso em: 04 set. 2022.

VERGNAUD, G. Multiplicative Strutures.In: M Behr and J Hiebert. **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**, p.141-160. Reston: National Council of Theacher of Mathematics, 1988.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1, Rio de Janeiro, 1993. **Anais.** Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundão, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26. https://www.researchgate.net/profile/Wagner-Pommer/publication/325035542_A_Teoria_dos_Campos_Conceituais_de_Gerard_Vergnaud/links/5af27dafaca272bf4259dd17/A-Teoria-dos-Campos-Conceituais-de-Gerard-Vergnaud.pdf. Acesso em: 23 set. 2022.

VERGNAUD, G. La teoría de los campos conceptuales. **Recherches en didáctique des mathématiques**, p. 133-170, 1990. Disponível em: https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf. Acesso em: 23 abr. 2021.

VERGNAUD, G. Multiplicative Conceptual Field What and Why?.In:G Harel e J Confrey. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics,** p.41-59, 1994. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED379161. Acesso em: 04 dez. 2022.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In.: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. **A Criança, a matemática e a Realidade**. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista.** Curitiba, Brasil, nº. Especial 1, 15-27, 2011. Editora UFPR. Disponível em: https://www.scielo.br/j/er/a/x4HTcHwzHHhkH6bDw7k9Qgs/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 23 abr. 2021.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

WYKROTA, R. **Apostila de matemática básica para EJA.** Curituba-Paraná, 2012. Disponível em: http://www.ceepcuritiba.com.br/arquivos/Professores/Ronald%20Wykrota/MATEMATICA.pdf. Acesso em: setembro de 2021. Acesso em: 23 abr. 2021.

YAMANAKA, O.; MAGINA, S. Um estudo da "Early Algebra" sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. In: **Encontro Paulista de Educação Matemática**, 9. 2008, Bauru. Anais. São Paulo: SBEM/SBEM-SP, 2008. Disponível em: https://docplayer.com.br/59470516-Anais-do-ix-encontro-paulista-de-educacao-matematica-o-livro-didatico-contexto-geral.html. Acesso em: 14 mai. 2022.

ZARDO, T. **Equações do 1º grau**: um estudo didático. 2006. 60f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96543/Taciana_Zardo.pdf. Acesso em: 23 abr. 2021.