UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

DIANA FRANÇA COSTA DA SILVA

A MOBILIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS COMBINATÓRIOS DE PROFESSORAS QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS A PARTIR DE UM PROCESSO FORMATIVO

Recife
2023

DIANA FRANÇA COSTA DA SILVA

A MOBILIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS COMBINATÓRIOS DE PROFESSORAS QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS A PARTIR DE UM PROCESSO FORMATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica. **Área de concentração**: Processos de Ensino Aprendizagem em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Recife

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

S586m Silva, Diana França Costa da

A mobilização de conhecimentos combinatórios de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais a partir de um processo formativo/ Diana França Costa da Silva. –2023.
168 f.

Orientação de: Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica-PPGEdumatec, 2023.
Inclui Referências.

1. Formação de professores. 2. Matemática. 3. Educação. I. Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão (Orientação). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2024-010)

DIANA FRANÇA COSTA DA SILVA

A MOBILIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS COMBINATÓRIOS DE PROFESSORAS QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS A PARTIR DE UM PROCESSO FORMATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 25/08/2023

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
(Orientadora e Presidenta)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Profa. Dra. Ana Côelho Vieira Selva
(Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Profa. Dra. Ana Paula Barbosa de Lima
(Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Dedico à minha querida avó, Severina Cícera, que é a força motriz que dá significado à minha jornada. Ela tem sido minha companheira constante, me apoiando ao longo de minha trajetória acadêmica e de vida. Seu encorajamento e motivação foram minha âncora nas batalhas diárias, permitindo que meus sonhos se tornassem realidade. Vovó, meu amor por você é além das palavras!

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a Deus por ter proporcionado a oportunidade de realizar esse sonho, por me conceder a vida, a saúde e a fé que me guiaram e ajudaram a superar esta etapa importante da minha jornada. Pois Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas e essa pesquisa não foi exceção.

Gostaria de agradecer à minha avó, Severina Cícera, à minha mãe Fernanda de França, à minha irmã Dayane França e ao meu irmão Darlan Vinícius. Seus incentivos, confiança, apoio, conselhos, educação e amor foram fundamentais. Sem dúvida, vocês são as pessoas mais importantes na minha vida e têm minha gratidão eterna por torcerem por mim e por suas orações.

Ao meu namorado Rodrigo Tavares, agradeço pelo incentivo e compreensão, por não ter permitido que eu desistisse. Sou grata por todo o companheirismo e assistência.

À minha querida orientadora Jaqueline Lixandrão, uma mulher incrivelmente humana, que me acolheu e teve paciência com todos os meus processos. Obrigada por todos os ensinamentos. Tenho profunda admiração pela pessoa que você é.

Aos meus amigos mais que especiais, Adna Samire, Danyele Karla, Leonardo Paulo, Kymberli Souza e Wemia Alves, por estarem ao meu lado, por todo o apoio e por ouvirem meus desabafos nos momentos em que mais precisei. Não existem palavras suficientes para expressar minha gratidão pela vida de vocês.

À minha amiga Angela Silva que foi e continua sendo essencial na minha vida. Sempre me aconselhando, incentivando e me dando força para não desistir dessa jornada. Obrigada por acreditar mais em mim do que eu mesma.

À minha amiga Thais Araújo, pela ajuda prestada nesta pesquisa. Sua contribuição foi muito importante e sou muito grata por tê-la em minha vida. Espero que possamos continuar a trilhar juntas essa jornada acadêmica. Que Deus retribua em dobro a bondade que você tem compartilhado.

À minha diretora, Danielle Gouveia, por ter acreditado em mim e me ajudado ao longo desses dois anos de mestrado. Obrigada por sempre ter confiança em mim!

Às professoras Ana Lima e Ana Selva, por aceitarem o convite para fazer parte da banca examinadora desta pesquisa, por dedicarem seu tempo à leitura, análise, e por toda as suas contribuições.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Edumatec, pelo empenho e pelos ensinamentos nas aulas. Cada um de vocês contribuiu de forma especial para minha formação, em especial aos professores Ana Selva, Carlos Eduardo, Cris Pessoa, Jaqueline Lixandrão, José Ivanildo, Juliana Azevedo, Gilda Guimarães e Liliane Teixeira. Também gostaria de agradecer aos amigos que fiz no programa, em especial Anderson Rodrigo, Karine, Gabriela Figueredo, Gabryella Vasconcelos, Helton Danilo, Jhonatan, Wanessa, José Vitor, Rosymere Medeiros e Saulo Augusto, que foram fundamentais para tornar essa jornada mais leve.

Ao Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatórios e Probabilístico (GERAÇÃO) pelas valiosas contribuições, discussões e reflexões que enriqueceram e subsidiaram a construção desta pesquisa. Sua colaboração foi fundamental e sou imensamente grata.

Ao meu amigo Fredson Murilo, gostaria de agradecer sinceramente por toda a ajuda e paciência. Sou extremamente grata pela dedicação que você teve comigo na reta final da dissertação.

Às participantes desta pesquisa, meu profundo agradecimento por aceitarem fazer parte deste processo formativo. Sou imensamente grata por colaborarem com a construção deste trabalho por meio do compartilhamento de seus saberes e experiências.

Gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro proporcionado e à Universidade Federal de Pernambuco por ter oferecido a oportunidade e disponibilizado os recursos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Sua contribuição foi fundamental para tornar tudo isso possível.

Por fim, gostaria de expressar meu agradecimento a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a concretizar esta dissertação. Seja por meio de palavras de encorajamento, apoio moral, contribuições intelectuais ou qualquer forma de auxílio, sou grata a cada um de vocês.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não podem dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria” (FREIRE, 1996, p. 72).

RESUMO

Pesquisas anteriores apontaram para uma dificuldade no reconhecimento e trabalho da Combinatória, especificamente nos invariantes de escolha e ordem nos problemas combinatórios. Nesse contexto, o objetivo da presente pesquisa é analisar os conhecimentos combinatórios mobilizados por professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais a partir de um processo formativo. Todo o desenvolvimento da pesquisa foi fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais, a qual explora três dimensões essenciais - situações (S), invariantes (I) e representações simbólicas (R). Além disso, os conhecimentos das professoras foram analisados no que diz respeito ao conhecimento especializado do conteúdo, o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, bem como o conhecimento do conteúdo e do ensino. O processo formativo contou com a participação voluntária de seis professoras do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental, que compartilharam suas experiências e conhecimentos sobre o tema. A metodologia foi constituída em entrevistas individuais semiestruturadas e um processo formativo com três encontros. Durante o primeiro encontro, as professoras discutiram diferentes situações combinatórias e suas propriedades invariantes, utilizando materiais manipuláveis e problemas impressos. No segundo encontro, analisaram representações simbólicas de respostas de estudantes em situações combinatórias. No último encontro, refletiram sobre como trabalhar a Combinatória em sala de aula. Essa abordagem permitiu uma interação mais próxima entre as participantes, promovendo uma troca rica de informações e experiências ao longo do processo formativo. Ao analisarmos a entrevista inicial com o desenrolar de todo processo formativo das professoras e as perguntas finais, percebe-se que houve considerável avanço no domínio do conhecimento especializado do conteúdo, no conhecimento do conteúdo e dos estudantes, e no conhecimento do conteúdo e do ensino. Elas identificaram relações e propriedades nas situações combinatórias, aprimorando sua compreensão após discussões e análises dos protocolos de respostas dos estudantes. Reconheceram a relevância das representações na resolução dos problemas combinatórios e na compreensão dos estudantes. O entendimento pelas professoras sobre os invariantes e significados das situações combinatórias foi enriquecido, e a sistematização revelou-se uma estratégia útil para auxiliar os seus estudantes na resolução dos problemas. O estudo reforça a importância dos processos formativos para aprimorar aos conhecimentos dos professores e enriquecer o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: conceitos combinatórios. formação de professores. matemática. anos iniciais. teoria dos campos conceituais. conhecimentos docentes.

ABSTRACT

Previous research has pointed to a difficulty in recognizing and working with Combinatorics, specifically in the invariants of choice and order in combinatorial problems. In this context, the objective of the present research is to analyze the combinatorial knowledge mobilized by teachers who teach Mathematics in the early years through a formative process. The entire development of the research was based on the Theory of Conceptual Fields, which explores three essential dimensions - situations (S), invariants (I), and symbolic representations (R). In addition, the teachers' knowledge was analyzed regarding specialized content knowledge, content and student knowledge, as well as content and teaching knowledge. The formative process involved the voluntary participation of six teachers from the 4th and/or 5th year of Elementary School, who shared their experiences and knowledge on the subject. The methodology consisted of semi-structured individual interviews and a formative process along three meetings. During the first meeting, the teachers discussed different combinatorial situations and their invariant properties, using manipulable materials and printed problems. In the second meeting, they analyzed symbolic representations of student responses in combinatorial situations. In the last meeting, they reflected on how to work with Combinatorics in the classroom. This approach allowed for closer interaction among the participants, promoting a rich exchange of information and experiences throughout the formative process. Analyzing the initial interview with the unfolding of the entire formative process of the teachers and the final questions, it is evident that there was a considerable advancement in the mastery of specialized content knowledge, content and student knowledge, and content and teaching knowledge. They identified relationships and properties in combinatorial situations, enhancing their understanding after discussions and analyses of student response protocols. They recognized the relevance of representations in solving combinatorial problems and understanding students. The teachers' understanding of the invariants and meanings of combinatorial situations was enriched, and systematization proved to be a useful strategy to assist their students in problem-solving. The study reinforces the importance of formative processes to enhance teachers' knowledge and enrich the teaching of Mathematics in the early years of Elementary School.

Keywords: combinatorial concepts. teacher education. Mathematics. early years. theory of conceptual fields. teaching knowledge.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino e a aprendizagem da Matemática, especialmente no contexto da Combinatória, é um tema que merece destaque nos debates relacionados à Educação Matemática, principalmente nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

De acordo com Borba (2010), aprender sobre Combinatória desde cedo contribui significativamente para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes, despertando a curiosidade necessária para a aprendizagem e influência de outros conceitos matemáticos. Essa influência se estende à organização do pensamento, capacidade de análise crítica, abstração e diferentes abordagens na resolução de problemas. Em síntese, a inclusão da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental emerge para o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de resolver problemas dos estudantes ao longo de sua educação.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) já recomendassem o ensino dessa área desde os anos iniciais, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) introduz conceitos específicos de Combinatória apenas a partir do 4º ano do Ensino Fundamental. No entanto, ela está intrinsecamente ligada ao ensino de Probabilidade e Estatística que é realizado nos anos anteriores (Brasil, 2018).

Nesse contexto, a abordagem que o professor adota para ensinar é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Assim, os professores precisam compreender como os estudantes constroem conhecimento e incentivam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, proporcionando uma educação Matemática ampla e estimulante (Rocha, 2011).

De acordo com Santos (2021), muitos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental possuem formação técnica em Magistério, Normal Superior e/ou Licenciatura em Pedagogia. Atualmente, é necessário que os professores que atuam nessa etapa tenham uma formação em Pedagogia, a qual proporciona uma preparação pedagógica específica para a docência, bem como uma base teórica sólida (ibid.).

Os cursos de Licenciatura em Pedagogia são amplamente reconhecidos por fornecer uma formação abrangente, capacitando os graduados para atuarem em diversas áreas da educação. Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Pedagogia, estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação, os pedagogos estão habilitados para assumir a função de docente na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como desempenhar funções importantes no desenvolvimento de competências de ensino em cursos de nível médio, na modalidade Normal Superior, e na educação profissional em serviços e apoio escolar. Além disso, eles podem atuar em atividades de gestão educacional, produção de conhecimento científico-tecnológico no campo educacional e na organização de práticas pedagógicas (Brasil, 2006).

Estudos como o de Sabo (2010) e Santos (2012), com mais de uma década de existência, já indicavam que a preparação dos professores que ensinam Matemática é considerada insuficiente, resultando em lacunas no conhecimento e na abordagem pedagógica. Isso implica que os professores podem se encontrar ensinando conceitos de Combinatória sem terem sido adequadamente preparados durante o percurso de sua formação em Pedagogia. Essa falta de formação específica pode ter um impacto adverso na qualidade do ensino e da compreensão dos estudantes sobre o conteúdo.

Rocha (2011), Assis (2014) e Lima (2016) ressaltam a importância de reflexões sobre os conhecimentos dos professores acerca do ensino e da aprendizagem da Combinatória, indicando limitações existentes no domínio do conteúdo e na didática adequada para ensiná-la. De fato, o ensino de Combinatória vai além da simples exposição de conteúdos, requerendo uma formação adequada dos professores. Essa, por sua vez, precisa contemplar a abordagem e reflexão sobre o ensino específico dessa área, levando em consideração as situações, invariantes e representações simbólicas, conforme defendido por Vergnaud (1986).

A ausência de ensino específica de Combinatória durante a formação inicial dos professores, como destacado por Rocha (2011), resulta em dificuldades na identificação dos diferentes tipos de problemas combinatórios, nas relações e propriedades envolvidas, assim como na análise das estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes. Essa deficiência na formação inicial evidencia a necessidade de um enfoque no ensino e na preparação dos professores nessa área.

Os autores Ball, Thames e Phelps (2008) defendem a importância de formações contínuas para professores de Matemática, enfatizando a necessidade de aprimorar conhecimentos, explorar estratégias de ensino e refletir sobre a prática pedagógica. Para os autores, essa formação contínua é fundamental para os docentes melhorarem suas habilidades e práticas para proporcionar um ensino de Matemática de qualidade aos estudantes.

Nesse contexto, esta pesquisa desenvolve um processo formativo com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, abordando o tema da Combinatória e fundamentado na teoria de Vergnaud (1986). Para analisar os conhecimentos combinatórios mobilizados ao longo do desenvolvimento do processo formativo, utilizou-se os conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008).

A proposta de pesquisa surge da necessidade de os professores abordarem de forma significativa esse conteúdo matemático. Assim, o problema central que orienta a pesquisa é: quais os conhecimentos mobilizados por professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais a partir de uma entrevista individual e de um processo formativo sobre a Combinatória?

O campo de pesquisa que trata da formação de professores para o ensino da Combinatória é reduzido. Assis (2014), Lima (2016), Lima (2018), Rocha (2011), Rocha e Ferraz (2010), Sabo (2010), Santos e Merlini (2018) e Teixeira (2012) desenvolveram estudos que se concentram na formação e nos conhecimentos dos professores que ensinam Matemática, ressaltando a importância de oferecer processos formativos sobre a Combinatória e suas características. Essas pesquisas evidenciam a necessidade de investir na formação de professores nessa área específica.

Portanto, o objetivo geral desta pesquisa é analisar os conhecimentos combinatórios mobilizados por professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais a partir de um processo formativo. Em termos específicos, buscou-se mapear as experiências e os conhecimentos apresentados pelas professoras do 4º/5º ano do Ensino Fundamental em relação à Matemática e à Combinatória; analisar os conhecimentos apresentados pelas professoras em relação as propriedades invariantes de conceitos combinatórios; analisar os conhecimentos expostos por professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais a partir de representações simbólicas de estudantes em situações Combinatórias; refletir a partir dos relatos das professoras as contribuições do processo formativo sobre a Combinatória para o desenvolvimento de conhecimentos docentes.

Visando responder tais objetivos, além destra introdução, organizamos esta dissertação da seguinte forma:

Segundo capítulo: apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais, com destaque para o campo conceitual das estruturas multiplicativas proposto por

Vergnaud (1986). Esse campo conceitual é abordado com detalhamento, descrevendo sua organização, que é definido como o tripé do conceito;

Terceiro capítulo: o foco recai sobre o ensino e a aprendizagem da Combinatória. Conceitos-chave da pesquisa, como o raciocínio combinatório e os diferentes tipos de problemas nesse campo são discutidos. São exploradas também as situações, invariantes e representações simbólicas da Combinatória;

Quarto capítulo: abordamos os conhecimentos específicos para o ensino de Matemática propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) e os domínios do conhecimento necessários para o professor abordar a Combinatória;

Quinto capítulo: são apresentados estudos anteriores que versam sobre a formação de professores para o ensino da Combinatória na Educação Básica. Essas pesquisas buscam contribuir de maneira reflexiva, investigando o processo de construção dos conhecimentos dos professores nessa área específica;

Sexto capítulo: são fornecidas informações sobre o tipo de pesquisa realizada, o campo de estudo selecionado, o critério de seleção das participantes, bem como os perfis das participantes envolvidas na pesquisa. Além disso, detalhamos os procedimentos metodológicos adotados e os instrumentos de pesquisa utilizados, incluindo detalhes das entrevistas individuais realizadas e o processo formativo conduzido com as professoras;

Sétimo e oitavo capítulos: apresentamos uma análise qualitativa e cronológica, buscando compreender as contribuições do processo formativo para o desenvolvimento dos conhecimentos das professoras em relação à Combinatória;

Considerações finais: apresentamos as implicações da pesquisa para a área da Educação e sugerimos investigações futuras relacionadas ao ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

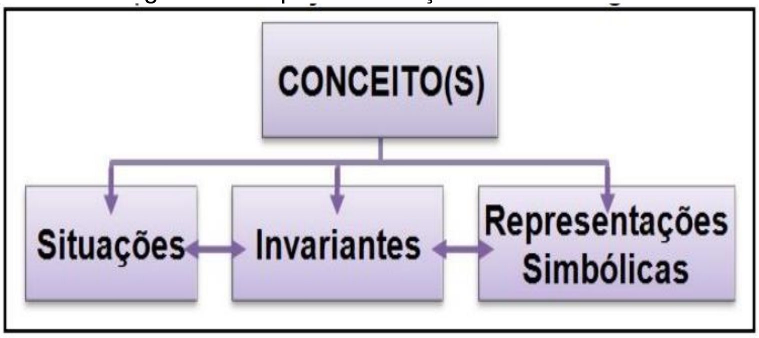
Segundo a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1986), o conhecimento é organizado em campos conceituais, os quais são definidos como conjuntos inter-relacionados de situações, problemas, conceitos e operações do pensamento. É importante destacar que um campo conceitual na Matemática, bem como em outras áreas, envolve múltiplas situações. É a diversidade de situações que possibilita a construção de diversos conceitos. Nas próprias palavras de Vergnaud (1996, p. 190),

> um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito. É necessário, pois, estabelecer como objetos de investigação conjuntos relativamente amplos de situações e de conceitos.

Nesse sentido, o significado dos conceitos só se concretiza por meio do contato com uma variedade de situações. Logo, na sala de aula, as orientações docentes e o envolvimento dos estudantes na interação com as situações permitem que eles sejam agentes ativos na organização e estruturação do pensamento com base em concepções pré-existentes e nas situações propostas pelo professor.

A proposta de Vergnaud (1996) propõe a existência de três estruturas fundamentais em um campo conceitual, as quais são representadas como um tripé que abarca situações (S), invariantes (I) e representações simbólicas (R), conforme esquematizado na Figura 1. Assim, em um campo conceitual encontramos uma variedade de problemas que envolvem diferentes conceitos, suas relações e propriedades, além de procedimentos de resolução e representações simbólicas. Esses elementos são de naturezas diversas, porém estão intimamente interligados.

Figura 1 – Tripé da formação dos conceitos



Fonte: Vergnaud (1986).

Com base no tripé proposto por Vergnaud (1986), busca-se a identificação e classificação das situações relacionadas aos conceitos, promovendo a exploração dos invariantes que potencialmente moldam a compreensão desses elementos. Adicionalmente, o autor enfatiza a relevância de compreender como as representações simbólicas contribuem para a construção conceitual. Portanto, é fundamental abordar essas dimensões de maneira integrada, buscando uma compreensão mais clara dos conceitos.

É essencial compreender que as dimensões do tripé (S, I e R), no entanto, não devem ser consideradas de forma isolada, uma vez que estão interconectadas na formação e compreensão dos conceitos.

De acordo com Vergnaud (1994), a formação de um conceito ocorre de maneira gradual e progressiva, demandando um período em que diversas situações devem ser experimentadas para que o conceito adquira significado. Isso inclui reflexões e a formulação de hipóteses sobre as dificuldades encontradas no processo. Essa aquisição não ocorre de forma imediata, mas por meio da interação do indivíduo com o mundo, da experiência acumulada ao longo da vida, do amadurecimento cognitivo e da aprendizagem sistemática.

Durante esse processo, o indivíduo constrói seu entendimento dos conceitos, assimila novas informações, estabelece relações e refina suas representações mentais. Portanto, a aquisição de conceitos demanda tempo, prática e a oportunidade de enfrentar desafios que promovam a reflexão e a consolidação do conhecimento. Nesse sentido, a aprendizagem não pode ser vista como um evento isolado, mas como um processo contínuo e progressivo que se estende ao longo da vida.

De acordo com Vergnaud (1986), a aprendizagem de um conceito ocorre por meio de diversas situações. É por meio dessa vivência que o conceito é explorado e hipóteses são elaboradas e verificadas para solucionar as situações propostas. Ao realizar questionamentos, formular hipóteses e verificar por meio da análise de diferentes resoluções, o estudante se envolve em um contexto desafiador de investigação e tem a oportunidade de desenvolver seu conhecimento sobre conceitos.

O processo de aprendizagem ocorre quando se reconhece que um conceito envolve invariantes, ou seja, propriedades e relações que se mantêm constantes, mesmo em situações com diferentes significados. Além disso, a aprendizagem se realiza por meio da exposição às diversas formas simbólicas, como ilustrações, gráficos, listagens, diagramas de possibilidades e equações (como na área da

Combinatória), que são empregadas para representar o referido conceito. Isso torna a aprendizagem mais atrativa para os estudantes. Estas múltiplas representações desempenham um papel fundamental na compreensão e na aplicação do conceito em diferentes contextos.

Vergnaud (1996) identifica diferentes campos conceituais, a saber: Campo Conceitual do Número; Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e o Campo Conceitual das Figuras e Medidas. Dentre esses campos, o pensamento combinatório encontra-se integrado no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, uma vez que a base para a solução de problemas combinatórios envolve operações de multiplicação e divisão. Dessa forma, concentraremos nossa análise no desdobramento do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, o qual detalhamos na sequência.

2.1 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é composto por diversos conceitos matemáticos. Para Vergnaud (1996), este campo consiste em um conjunto de situações envolvendo uma ou mais multiplicações ou divisões, acompanhadas por conceitos, teoremas e representações que permitem analisar tais situações. Nesse campo, encontramos conceitos como proporção simples e múltipla, função linear e não linear, análise dimensional, razão direta e inversa, combinação linear, aplicação linear, fração, número racional, múltiplo e divisor, entre outros.

Segundo Borba (2016) e Magina, Merlini e Santos (2012), a multiplicação é frequentemente apresentada nos livros didáticos e nas salas de aula como uma continuidade da adição, sendo ensinada apenas como uma soma de parcelas repetidas. Entretanto, alguns autores tem argumentado que:

> A conexão entre multiplicação e adição não é conceitual. A relação que existe entre multiplicação e adição está centrada no processo de cálculo da multiplicação: o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida porque a multiplicação é distributiva com relação à adição (Nunes *et al.*, 2005, p. 84).

Consequentemente, é importante reconhecer que há relações entre a multiplicação e a adição no processo de cálculo numérico. A abordagem de soma de parcelas repetidas pode ser uma forma de resolver alguns problemas multiplicativos.

Todavia, é fundamental destacar que o raciocínio utilizado na adição é diferente daquele necessário para resolver uma multiplicação (Pessoa, 2009).

Nesse contexto, Nunes e Bryant (1997) argumentam que é um erro considerar os problemas de multiplicação como sendo mais complexos do que os de adição, assim como os de divisão mais desafiadores do que os de subtração. Consequentemente, o ensino que envolve a multiplicação como uma extensão da adição, muitas vezes, apresenta obstáculos para a aprendizagem da multiplicação, uma vez que negligencia a necessidade de estabelecer distinções claras entre essas duas operações.

Essa abordagem pode restringir a multiplicação apenas à adição de parcelas iguais limitando a compreensão mais ampla do campo multiplicativo, especialmente no contexto da Combinatória (Nunes *et al.* 2005; Gitirana *et al*., 2014). Além disso, Nunes e Bryant (1997) destacam que os estudantes precisam compreender um conjunto completamente novo de significados numéricos e um novo conjunto de invariáveis, todos relacionados à multiplicação e à divisão, mas não apenas à adição e à subtração.

Vergnaud (1991) destaca duas categorias no contexto dos problemas de multiplicação: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Os problemas que se enquadram na categoria de isomorfismo de medidas exibem uma estrutura quaternária. Nesse formato, surge uma dupla relação entre duas quantidades, conforme apontado por Magina, Santos e Merlini (2014). Os problemas pertencentes à classe de produto de medidas possuem uma lógica ternária, em que existe uma relação entre dois elementos, podendo ser de naturezas iguais ou distintas, que se combinam para formar um terceiro elemento (Magina; Santos; Merlini, 2014).

No contexto da multiplicação, conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas conforme discutido por Vergnaud (2014). Na divisão, temos o caso da subclasse, que é a divisão partitiva, associada ao ato de repartir, ou seja, ao ato de dividir quantidades de naturezas diferentes. Em problemas de partição, é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que essa quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos) (Vergnaud, 2014). A outra subclasse, que é a divisão quotitiva, está relacionada à medida, ou seja, à ideia de divisão por quantidades de mesma natureza. Em problemas de divisão por quotas, é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes) (Vergnaud, 2014).

São apresentados alguns exemplos de Vergnaud (2014) referentes aos problemas do tipo de isomorfismo, sendo o primeiro sobre multiplicação, o segundo sobre divisão de partição e o terceiro sobre divisão de quotação:

> Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” [...] “Paguei R$12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?” [...]; Pedro tem R$12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar? (Vergnaud, 2014, p. 239-240).

Vergnaud (2007) destaca a importância de reconhecer que a identificação de problemas que se encaixam na categoria de isomorfismo de medidas é um passo inicial e essencial no processo de ensino de situações multiplicativas. Isso se deve principalmente à sua ligação direta com a primeira ação mediadora do professor: a escolha da situação de aprendizagem a ser apresentada aos estudantes.

A segunda categoria apresentada por Vergnaud (1991) envolve os produtos de medidas, os quais estabelecem uma relação ternária, ou seja, a interação de três variáveis, em que uma quantidade é resultante do produto das outras duas. Nesse contexto, duas classes de situações se delineiam nesse espectro: configuração retangular e Combinatória (Vergnaud, 2014). Nas situações relacionadas a categoria de configuração retangular, atribui-se também o significado de produto cartesiano. Gitirana *et al*. (2014) destacam que nessa classe são apresentadas duas grandezas de natureza similar, culminando em uma terceira grandeza obtida por meio da operação de multiplicação.

Referentes aos problemas do tipo de produto de medidas, os dois primeiros são exemplos sobre configuração retangular e os dois últimos sobre Combinatória:

> Uma piscina tem uma área de 265,4m2 e são necessários 633,3m3 de água para enchê-la. Qual é a profundidade média da piscina?; [...] Um retângulo tem uma superfície de 18,66m2 e uma largura de 3,23m. Qual é seu comprimento?; [...] “Um comerciante deseja oferecer aos clientes 15 opções de sorvetes com cobertura de chocolate. Atualmente, ele possui três variedades de sorvetes cobertos de chocolate. Quantas variedades adicionais de sorvete ele precisa ter para alcançar o total de 15 variedades?”; [...] “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis? (Vergnaud, 2014, p. 240).

Desse modo, por envolverem duas medidas diferentes, percebe-se que os problemas de produtos de medidas são mais complexos de serem analisados, da qual é decorrente uma terceira medida.

No próximo capítulo, discutiremos o ensino e a aprendizagem de Combinatória, o raciocínio combinatório, as situações envolvendo agrupamento de elementos, invariantes e representações simbólicas.

3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA

A Combinatória é um amplo campo de estudo com diversas aplicações, especialmente no campo do ensino e da aprendizagem. Por meio de diferentes situações e contexto, ela auxilia o estudante a desenvolver estratégias cognitivas. A Combinatória possibilita que os problemas sejam discutidos por meio da construção de conjecturas e da discussão de ideias, propiciando a construção da capacidade de argumentação em diversos níveis de ensino (Almeida, 2010).

O ensino e a aprendizagem da Combinatória têm representado um desafio significativo para os professores. Muitas vezes, esses docentes se sentem despreparados para abordar os conteúdos desse campo da Matemática, o que acaba gerando dúvidas e dificuldades aos estudantes. Desde os anos iniciais, os estudantes apresentam dificuldades em situações de contagem e à medida que chegam ao Ensino Médio, se deparam com situações-problema que exigem maior habilidade intuitiva (Souza; Marasca, 2010). Portanto, é recomendável incentivar o desenvolvimento das habilidades de raciocínio estatístico, probabilístico e combinatório desde os primeiros anos do Ensino Fundamental (Brasil, 1997).

As situações combinatórias mais elaboradas são trabalhadas de modo mais formal nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No entanto, quando introduzido desde os primeiros anos escolares dos estudantes, a partir de situações práticas e lúdicas, pode-se desenvolver e construir noções mais simples de alguns conceitos (Borba, 2016).

Nesse contexto, Lima (2016) sugere que o processo de ensino dos conteúdos de Combinatória seja desenvolvido em uma perspectiva problematizadora, de maneira investigativa e discursiva, sendo construído a partir das estimativas levantadas pelos estudantes apresentadas e/ou mediadas pelo professor.

Para Lockwood, Wasserman e Tillema (2020), o envolvimento com a Combinatória desde a Educação Infantil é importante, pois as situações combinatórias apresentam cinco razões para o desenvolvimento do estudante: sua acessibilidade; oferta de oportunidades para um pensamento matemático rico; estímulo às práticas matemáticas desejáveis; contribuição positiva para questões de equidade na educação Matemática; e um domínio no qual se pode desenvolver a atividade computacional.

Pessoa e Borba (2010) argumentam que o trabalho simultâneo dos quatro tipos de problemas de Combinatória - arranjo, combinação, permutação e produto de medidas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode promover um desenvolvimento do raciocínio combinatório. Isso, por sua vez, promove a compreensão dos conceitos combinatórios pelos estudantes, tanto em níveis mais básicos quanto em níveis mais avançados de ensino. As autoras atribuem tal situação ao fato de que nos quatros tipos de problemas existe a característica de levantamento de possibilidades por contagem direta ou indireta.

A utilização de situações-problema favorece a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos, inclusive da Combinatória. Porém, para uma aprendizagem com compreensão, é necessário que haja discussões e troca de experiências entre professores e estudantes e também, entre os próprios estudantes.

De acordo com Rocha (2019), diálogos e discussões argumentativas se fazem necessários para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois o uso de situações-problema, por si só, não é suficiente para tal desenvolvimento e para a promoção de uma aprendizagem significativa.

Os problemas combinatórios estão presentes nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, Barreto e Borba (2010) constataram que é necessário que os professores saibam como tratar as diferentes situações combinatórias, estimulando os estudantes a pensarem em questões interessantes de investigação e como informações podem ser levantadas, organizadas, classificadas e interpretadas para favorecer o desenvolvimento do pensamento combinatório dos estudantes. As autoras ressaltam ainda a importância dos livros didáticos para orientar os professores sobre as semelhanças e diferenças entre os problemas combinatórios, bem como tratá-los adequadamente junto aos estudantes dos Anos Iniciais.

Diante disso, Borba (2016) destaca a importância de que os professores abordem a sala de aula como um ambiente propício para a metodologia investigativa. Isso implica em incentivar os estudantes a refletirem e discutirem sobre os invariantes dos problemas combinatórios. Segundo a autora, quanto mais cedo os conceitos relacionados a esses problemas forem tratados na sala de aula, os estudantes terão mais oportunidades de refletir sobre a Combinatória, desenvolver ideias intuitivas e ampliarem seu modo de raciocinar. Uma maneira considerada propícia à construção do raciocínio combinatório é considerar a vida cotidiana do estudante e trabalhar com problemas contextualizados. Assim, o estudante terá maior compreensão, pois encontrará sentido nos conceitos matemáticos construídos.

Diante do exposto, é importante para o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória que o professor adote uma abordagem organizada, incluindo os diferentes tipos de problemas combinatórios nas atividades propostas aos estudantes. Essa abordagem deve promover discussões em grupos e socializações com todos os estudantes. Assim, eles terão a oportunidade de construir conceitos combinatórios a partir da resolução de problemas, além de apresentar e argumentar com a turma sobre as descobertas elaboradas em grupo.

3.1 COMBINATÓRIA E O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A análise Combinatória[1] é uma área da Matemática que está continuamente presente em nosso cotidiano, envolvendo situações que requerem raciocínio combinatório. Ela lida com métodos de contagem de agrupamentos possíveis, de acordo com os elementos fornecidos e as condições estabelecidas. Como afirmam Morgado *et al*., (1991, p. 15):

> A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é ‘contar’, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.

Conforme Merayo (2001), a Combinatória é uma técnica que possibilita a determinação da quantidade de elementos em um conjunto sem a necessidade de contá-los individualmente, evitando assim a enumeração de todos os itens. Pessoa e Borba (2010) reforçam essa perspectiva ao afirmar que na Combinatória se utiliza o raciocínio multiplicativo para contar grupos de possibilidades por meio de uma abordagem sistemática. Isso pode envolver o uso de fórmulas ou o desenvolvimento de estratégias que atendam aos requisitos desses problemas, como a formação de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Conforme destacado por Pessoa e Borba (2010), a Combinatória é uma forma de pensamento que envolve a quantificação de elementos em conjuntos ou subconjuntos de objetos ou situações, utilizando estratégias e fórmulas específicas,

---

[1] Neste estudo “Análise Combinatória” e “Combinatória’” são consideradas termos sinônimos.

mesmo sem conhecer a quantidade exata de elementos ou eventos em uma situação específica. Esse tipo de pensamento é fundamental na análise de situações em que os elementos dos conjuntos precisam ser agrupados com base em critérios de escolha e/ou ordenação, permitindo determinar o número total de agrupamentos possíveis.

Essas ideias são reforçadas por Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997, p. 181-199) ao afirmarem que os problemas de Combinatória podem ser usados:

> Para treinar os alunos na contagem, fazendo conjeturas, generalização e pensamento sistemático, que pode contribuir para o desenvolvimento de muitos conceitos, tais como as relações de equivalência e ordem, função, amostra etc. [...] No entanto, a combinatória é um campo que a maioria dos alunos encontra muita dificuldade. Dois passos fundamentais para tornar o aprendizado deste assunto mais fácil é compreender a natureza dos erros dos alunos na resolução de problemas combinatórios e identificar as variáveis que podem influenciar esta dificuldade.

Pessoa e Borba (2010) enfatizam a importância de abordar os diferentes tipos de situações de forma simultânea com as Combinatórias desde os primeiros anos de escolaridade, pois isso permite que o conhecimento desenvolvido na área contribua para novas aprendizagens e ajude a superar erros e dificuldades iniciais, preparando os estudantes para o aprendizado sistemático no Ensino Médio. Isso se deve ao fato de que eles pertencem ao mesmo campo conceitual e ao serem trabalhados em conjunto, destacam-se as semelhanças e diferenças entre eles. Ademais, ao entrar em contato com uma variedade de problemas, é possível comparar os elementos comuns e distintivos de cada situação combinatória. Desse modo, a abordagem conjunta desses problemas fomenta uma compreensão mais abrangente e aprofundada do assunto.

3.1.1 Situações

Como já mencionado, Pessoa e Borba (2010) destacam que os problemas combinatórios básicos envolvem quatro tipos de situações: produto de medidas; arranjo; combinação; e permutação. Esses problemas foram considerados pelas autoras como característicos do pensamento combinatório, contribuindo para a reflexão teórica da necessidade de se considerar os diferentes tipos de situações no ensino e aprendizagem da Combinatória na Educação Básica.

Para que haja o desenvolvimento de conceitos combinatórios, é necessário que todos os significados sejam trabalhados adequadamente, ou seja, que os diferentes tipos de problemas combinatórios sejam cuidadosamente abordados pelo professor a fim de auxiliar o estudante a reconhecer a estrutura dos problemas, desenvolver raciocínios distintos e encontrar o procedimento que o levará a sua solução.

Conforme abordado anteriormente, Vergnaud (1986) considera que o conhecimento está estruturado em campos conceituais e a aquisição dos conceitos ocorre ao longo de um extenso período, por meio de experiência, amadurecimento e aprendizado. Para o referido autor, é de extrema importância fornecer uma variedade de abordagens para a resolução de situações, uma vez que os conceitos são intrinsecamente interconectados e só adquirem significado quando o estudante os compreende à luz de suas vivências anteriores. Essas experiências prévias devem estar vinculadas aos tipos de problemas que os estudantes já enfrentaram nos anos precedentes de sua educação.

As situações combinatórias estão interligadas por uma lógica comum no raciocínio combinatório, baseada nas formas de seus invariantes. Essas situações podem envolver escolha e ordenação de elementos, e os métodos usados para abordá-las podem variar. No entanto, a ideia central é considerar todas as possibilidades relevantes para obter resultados precisos. Compreendendo que as situações combinatórias são definidas pelos invariantes, ou seja, pela relação de escolha e ordenação de elementos. A seguir são apresentados os diferentes tipos de situações combinatórias, classificados de acordo com seus invariantes.

3.1.2 Invariantes das Situações Combinatórias

Cada conceito possui características únicas que o distinguem de outros, sendo essas características apresentadas de forma implícita e/ou explícita nas situações-problema através de representações simbólicas. Inicialmente, o estudante pode utilizar essas características invariantes sem plena consciência de que são relações que se mantêm constantes e que proporcionam a distinção entre diferentes tipos de situações.

No entanto, é ressaltado que os estudantes não necessariamente precisam manifestar um entendimento explícito do conceito de invariantes combinatórios. Eles podem incorporá-los durante a resolução dos problemas, mesmo que não tenham uma percepção detalhada de cada um individualmente. Contudo, é relevante que o professor direcione a atenção dos estudantes para a conexão entre a seleção e a ordenação dos elementos em cada categoria de situação (AZEVEDO, 2013).

Segundo Vergnaud (1996, p. 166), as singularidades das situações são definidas como o "conjunto de invariantes nos quais se baseia a operacionalidade dos esquemas". O autor enfatiza que a dimensão invariante (I) não se reduz, nem subestima as outras dimensões - situações (S) e representações simbólicas (R).

Borba (2013, 2016) destaca que as propriedades de escolha e ordenação dos elementos são os invariantes conceituais básicos que caracterizam os problemas combinatórios. A autora também ressalta que uma característica essencial desses problemas é determinar o número total de combinações possíveis, o que requer a consideração minuciosa de todas as possibilidades.

Para resolver os problemas de Combinatória, é necessário considerar uma série de questões: quais são os elementos dados? Como esses elementos devem ser selecionados e combinados? Quantos elementos devem ser escolhidos de cada vez? Suas ordens determinam possibilidades distintas, ou seja, a possibilidade (A, B) é a mesma que (B, A)? Qual é o número total de possibilidades?

No Quadro 1 abaixo, são apresentados os diferentes tipos de situações combinatórias e as respectivas características de seus invariantes.

Segundo Pessoa e Borba (2010), em situações de arranjos, os elementos não são escolhidos todos de uma vez e um grupo maior de elementos proporciona a geração de novas possibilidades na formação de subgrupos, pois a ordem e a escolha dos elementos resultam em diferentes possibilidades. Em situações de combinação, por sua vez, são selecionados objetos para construir subgrupos a partir de um único conjunto e a ordem de escolha dos objetos não gera novas possibilidades.

Nas situações de permutação, todos os elementos do conjunto são utilizados, e a maneira como são organizados resulta em diferentes possibilidades. A ordenação dos elementos desempenha um papel fundamental nesses casos, pois cada possibilidade distinta produz uma permutação única.

Por fim, nos casos de problemas que envolvem o produto de medidas, consiste em combinar dois ou mais conjuntos para formar um novo grupo e a ordem dos componentes não gera novas possibilidades.

Quadro 1 – Situações combinatórias: características

Situação	**Exemplos**	**Invariantes Combinatórios**		
		Conjuntos	**Escolha**	**Ordem**

Arranjo	O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?	Único conjunto	Alguns elementos	Gera novas possibilidades
Combinação	Três estudantes (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	Único conjunto	Alguns elementos	Não gera novas possibilidades
Permutação	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.	Único conjunto	Todos os elementos	Gera novas possibilidades
Produto de medidas	Para a festa de São João da escola, há 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados	Dois ou mais conjuntos distintos	Um elemento de cada conjunto	Não gera novas possibilidades

Fonte: Vergnaud (1986) e Pessoa (2009).

As soluções das situações combinatórias podem ser expressas através de diversas formas de representações simbólicas. À medida que se compreendem as relações dos invariantes específicos para cada tipo de situação, as representações simbólicas podem ser refinadas e sistematizadas.

A seguir, são expressas representações simbólicas das diferentes situações combinatórias.

3.1.3 Representações simbólicas na Combinatória

As representações simbólicas são as formas como os conceitos são registrados na solução das situações-problema. Entre as representações simbólicas, temos as mais formais, como as linguagens matemáticas escolares, até as menos formais, que são utilizadas enquanto o indivíduo está internalizando os invariantes conceituais.

As representações simbólicas desempenham um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Além de registrarem as soluções das situações-problema, elas também fornecem um *feedback* valioso para o professor. Por meio dessas representações, é possível avaliar a compreensão dos estudantes, identificar possíveis dificuldades e ajustar as estratégias de ensino.

Dentro do contexto da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), as representações simbólicas constituem uma das três dimensões do tripé, juntamente com as situações-problema e os invariantes conceituais. Nessa perspectiva, o professor e/ou pesquisador pode analisar as representações simbólicas utilizadas pelos estudantes para compreender melhor suas concepções e interpretar suas soluções.

Nos primeiros anos de escolaridade, as representações dos estudantes na resolução de situações de Combinatória tendem a ser menos formais e o uso de desenhos, listagens, quadros e árvores de possibilidades podem variar de acordo com o nível de conhecimento dos mesmos. Nesse sentido, Pessoa (2009) recomenda a proposição de problemas com um número reduzido de possibilidades, de forma que seja possível explorar o esgotamento de todas as opções por meio de representações menos formais.

Segundo Pessoa e Borba (2010), as diferentes formas de representações simbólicas são possíveis, tanto no que se refere às soluções apresentadas pelos estudantes, quanto à proposição da questão. Além de compreender os problemas, os estudantes devem reconhecer que diferentes tipos de problemas podem originar variadas formas de representação. Nesse contexto, é fundamental que o professor explore as múltiplas representações, permitindo aos estudantes abordar e analisar um conceito específico a partir de diversas perspectivas.

De acordo com diferentes documentos curriculares, como os PCNs (Brasil, 1997), BNCC (Brasil, 2018) e os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCPE) (Pernambuco, 2012), bem como Azevedo e Borba (2011), o emprego de recursos didáticos, como materiais manipuláveis, ilustrações e software, desempenha um papel facilitador na compreensão de situações-problema complexas, incluindo as relacionadas à Combinatória, por estudantes nos anos iniciais.

No entanto, por si só, esses recursos não garantem a aprendizagem, sendo fundamental a mediação do professor durante seu uso, estimulando a reflexão, especialmente em relação às diferentes relações de escolha e ordenação dos elementos em cada possibilidade.

No próximo capítulo, conforme as abordagens de Ball, Thames e Phelps (2008), apresentamos os conhecimentos necessários para a prática docente, especificamente para desenvolver e mobilizar nas aulas de Matemática e no tocante à Combinatória.

4 CONHECIMENTOS DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Para Shulman (1986), a análise dos saberes docentes é feita a partir da relação entre o conhecimento e os dispositivos didáticos, necessária para a construção de uma base de conhecimento para o professor. Essa estrutura é composta pelas seguintes categorias: o **Conhecimento do Conteúdo**, que envolve o entendimento pedagógico geral com foco em princípios e estratégias abrangentes para a gestão e organização da sala de aula; o **Conhecimento Curricular**, que abarca uma compreensão específica dos materiais e programas utilizados como recursos pelos docentes; o **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**, que relaciona o conteúdo e a pedagogia pertencente ao domínio profissional dos professores, a familiaridade com os estudantes e suas características individuais, a compreensão dos contextos educacionais que varia desde a dinâmica da sala de aula até questões de governança e financiamento dos distritos escolares, e ainda; o **Conhecimento dos Objetivos Educacionais**, que envolve seus propósitos, valores, fundamentos filosóficos e históricos.

Quanto às referidas categorias, Shulman (1987) enfatiza a importância do **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**[2], pois esse conhecimento envolve a relação entre a matéria e a didática, determinando a compreensão de como temas e problemas são organizados, representados e adaptados de acordo com os interesses e capacidades dos estudantes.

Nas análises realizadas por Ball, Thames e Phelps (2008), eles concordam com a importância do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, mas criticam o significado utilizado por Shulman (1987). Os autores afirmam que o **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** é uma combinação do Conhecimento do Conteúdo e do Conhecimento sobre a metodologia de ensino empregada. Isso implica que um professor pode ter um conhecimento aprofundado sobre um determinado tópico, mas não fica claro como as ações, o raciocínio, as crenças e o conhecimento do professor se distinguem nesse contexto.

A partir das análises conduzidas por Ball, Thames e Phelps (2008), as quais surgem da avaliação das categorias propostas por Shulman (1986) - o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo - identificam-se duas

---

[2] Do inglês: *Pedagogical Content Knowledge.*

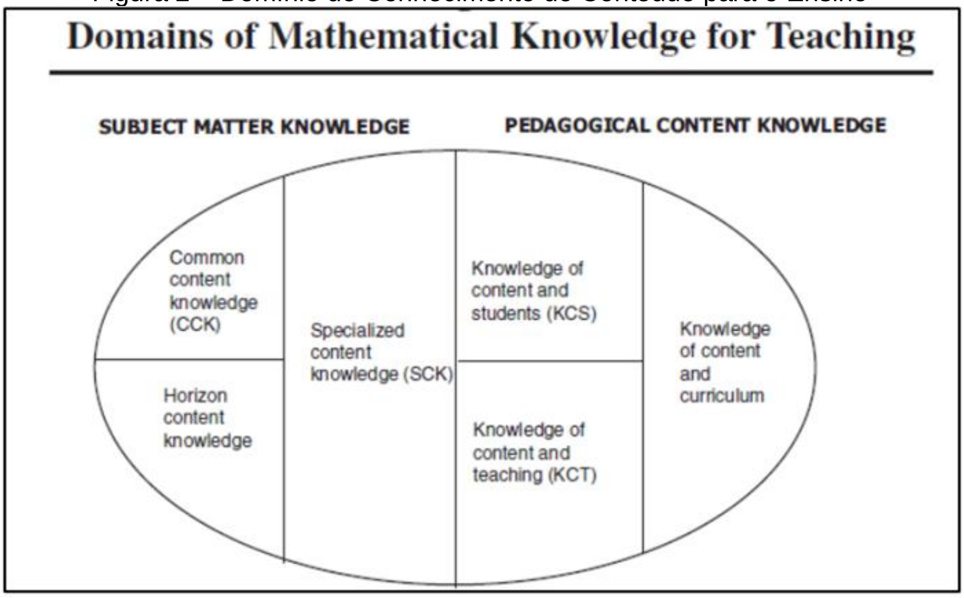
principais categoria. Na primeira, desdobram-se os domínios do Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento Especializado do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo no Horizonte. Na segunda, emerge a interseção entre o Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes, o Conhecimento do Conteúdo e o Ensino, bem como o Conhecimento do Conteúdo e o Currículo. Em seguida, nos aprofundaremos na exploração e trabalhos dos referidos autores, visando melhor compreensão dos conceitos em questão.

4.1 CONHECIMENTOS DOCENTES

Baseados nos estudos sobre a base de conhecimentos propostas por Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) fizeram um refinamento das categorias, a saber: **Conhecimento do Conteúdo**[3] e **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**[4], com o objetivo de identificar e definir os domínios de conhecimento matemático para o seu ensino.

O refinamento das categorias dos domínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) culminaram na criação do Mapa do Domínio do Conhecimento do Conteúdo para o Ensino[5], conforme apresentado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 – Domínio do Conhecimento do Conteúdo para o Ensino



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

[3] Do inglês: Content knowledge
[4] Do inglês: Pedagogical Content Knowledge
[5] Do inglês: Map of the domain of content knowledge for teaching.

As dimensões e os domínios do conhecimento docente proposto por Ball, Thames e Phelps (2008) na Figura 2 são as seguintes:

Conhecimento do Conteúdo[6]: a) Conhecimento Comum do Conteúdo[7]; b) Conhecimento Especializado do Conteúdo[8]; e c) Conhecimento do Conteúdo no Horizonte[9].

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo[10]: a) Conhecimento do Conteúdo e Estudantes[11]; b) Conhecimento do Conteúdo e Ensino[12]; e Conhecimento do Conteúdo e Currículo[13].

Na representação apresentada na Figura 2, observa-se que os conhecimentos docentes estão interligados tanto aos aspectos do conteúdo matemático quanto aos aspectos técnicos desse campo de conhecimento. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), os diferentes tipos de conhecimento coexistem nas salas de aula e os professores lidam constantemente com eles em diferentes graus.

O uso da Matemática em várias situações não é exclusivo dos professores e caracteriza o domínio do **Conhecimento Comum do Conteúdo**. É importante ressaltar que Ball, Thames e Phelps (2008) não sugerem que o conhecimento comum seja uma habilidade inerente a qualquer pessoa, é um conhecimento necessário, mas não exclusivo para o ensino. O Conhecimento Comum do Conteúdo é definido como um conhecimento matemático e uma habilidade utilizada pelo professor para ensinar, mas não se restringe apenas ao ensino.

O conhecimento em questão é um domínio versátil que pode ser aplicado em diversas situações. Nesse tipo de conhecimento, são abordadas questões básicas para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, como o da Combinatória, foco deste estudo. Os conhecimentos da Combinatória envolvem a resolução de problemas combinatórios, mesmo sem ter uma compreensão consciente dos invariantes das situações apresentadas.

---

[6] Do inglês: *Content knowledge* (CK).
[7] Do inglês: *Common Content Knowledge* (CCK).
[8] Do inglês: *Specialized Content Knowledge* (SCK).
[9] Do inglês: *Content Knowledge on Horizonte* (HKC).
[10] Do inglês: *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).
[11] Do inglês: *Knowledge of Content and Students* (KCS).
[12] Do inglês: *Knowledge of Content and Teaching* (KCT).
[13] Do inglês: *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC). Ball, Thames e Phelps (2008) incluíram esta categoria adicional ao estudo de Shulman (1986). Essa categoria reconhece a importância de compreender como o conteúdo se relaciona ao currículo estabelecido, proporcionando orientação para a prática pedagógica eficaz.

O **Conhecimento Especializado do Conteúdo** se diferencia por ser uma habilidade exclusivamente relacionada ao ensino, direcionada especificamente ao ato de ensinar e normalmente não será necessária para outros fins, a não ser a atividade de ensino. É importante que o professor reconheça erros e estratégias dos estudantes, para ajuda-los a superar dificuldades na resolução de problemas. Também é importante avaliar se o raciocínio do estudante é correto e se é possível fazer generalizações. Assim:

> Os professores, no entanto, devem ser capazes de falar explicitamente sobre como o idioma matemático é usado (por exemplo, como o significado matemático de borda é diferente da referência diária à borda de uma tabela); como escolher, criar e usar representações matemáticas de forma eficaz (por exemplo, reconhecendo vantagens e desvantagens de usar retângulos ou círculos para comparar as frações); e como explicar e justificar as ideias matemáticas (por exemplo, por que inverter e multiplicar para dividir frações) (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 400, **tradução nossa**)[14].

Na Combinatória, o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** é essencial para compreender e resolver os problemas de arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. Para tanto, é importante que o professor esteja familiarizado com os termos específicos e seja capaz de distinguir as características – invariantes das situações combinatórias. Exemplos desse conhecimento englobam a identificação de características próprias, sejam elas de ordem de elementos, de uso, ou não, de todos os elementos de um dado conjunto; identificar semelhanças e diferenças entre as soluções dos estudantes; adaptar tarefas para facilitar a compreensão e reorganizar informações. Essas habilidades são fundamentais para ajudar os estudantes a superar dificuldades e compreender a Combinatória.

O **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte** refere-se aos conhecimentos que permeiam todos os conteúdos matemáticos ao longo da escolarização. Isso significa que os professores precisam ter um entendimento abrangente dos assuntos matemáticos, compreender como eles estão interligados e que são progressivamente desenvolvidos no currículo ao longo dos anos. Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403, **tradução nossa**) afirmam que:

> Os professores da primeira série, por exemplo, podem precisar saber como a Matemática que ensinam está relacionada à Matemática que os alunos

[14] Do inglês: *Teachers, however, must be able to talk explicitly about how mathematical language is used (e.g., how the mathematical meaning of edge is different from the everyday reference to the edge of a table); how to choose, make, and use mathematical representations effectively (e.g., recognizing advantages and disadvantages of using rectangles or circles to compare fractions); and how to explain and justify one's mathematical ideas (e.g., why you invert and multiply to divide fractions)*.

> aprenderão na terceira série para poderem estabelecer a base matemática para o que virá depois. Também inclui a visão útil para ver conexões com ideias matemáticas muito posteriores[15].

Portanto, é essencial que o ensino da Matemática esteja interligado e seja progressivamente construído ao longo dos anos escolares. Os conteúdos não podem ser abordados de forma isolada, mas integrados em uma prática docente que promova a conexão entre eles e que permitam aos estudantes construírem aprendizagens gradativas. Para tanto, é fundamental estabelecer uma relação entre as expectativas de aprendizagem projetadas para cada ano escolar, garantindo uma abordagem consistente e contínua.

No que se refere à Combinatória, o **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte** inclui a relação entre conceitos e procedimentos formais para resolver diferentes situações combinatórias, a importância de abordar a Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e sua aplicação em problemas com diferentes níveis de dificuldade. É essencial que o aprendizado da Combinatória comece no início do processo escolar, para estabelecer uma base sólida para o desenvolvimento dos estudantes nesse campo matemático.

O **Conhecimento do Conteúdo e Estudante** é uma combinação do conhecimento do conteúdo matemático e do conhecimento sobre os estudantes. Esse domínio envolve a capacidade de antecipar as possíveis dificuldades que os estudantes podem enfrentar ao lidar com um determinado conteúdo. Ao escolher atividades, é importante que o professor avalie o nível de complexidade, prevendo como será a interpretação para os estudantes. Os exemplos fornecidos pelo professor devem ser pertinentes e atrativos para os estudantes. Além disso, o professor precisa criar oportunidades para compreender como os estudantes estão raciocinando.

De modo geral, esse domínio concentra-se no conhecimento que o professor possui sobre os estudantes, bem como na adequação e seleção de atividades matemáticas que correspondam ao nível de raciocínio da turma, oferecendo desafios adequados aos estudantes.

> Reconhecer uma resposta incorreta é um conhecimento comum do conteúdo, enquanto avaliar a natureza de um erro, especialmente um erro desconhecido, geralmente requer agilidade ao pensar sobre números,

---

[15] Do inglês: *First grade teachers, for example, may need to know how the mathematics they teach is related to the mathematics students will learn in third grade to be able to set the mathematical foundation for what will come later. It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas*.

> atenção a padrões e pensamento flexível sobre significado de maneiras distintas do conhecimento especializado do conteúdo. Por outro lado, estar familiarizado com erros comuns e decidir quais dos vários erros os alunos provavelmente cometerão são exemplos de conhecimento do conteúdo e dos estudantes (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401, **tradução nossa**)[16].

Consideramos que no **Conhecimento da Combinatória e Estudantes**, o professor mobiliza conhecimentos relacionados ao uso da Combinatória pelos seus estudantes. Isso envolve identificar e explicar as dificuldades dos estudantes ao resolverem problemas combinatórios, reconhecer seus erros comuns, prever os desafios e facilidades que podem surgir, antecipar estratégias motivadoras de resolução e compreender a abordagem dos estudantes na resolução desses problemas.

Esse conhecimento habilita o professor orientar adequadamente a aprendizagem dos estudantes, identificando suas necessidades, promovendo o engajamento e oferecendo suporte para que desenvolvam habilidades nessa área específica da Matemática.

O **Conhecimento do Conteúdo e Ensino**, por sua vez, é um domínio que envolve a combinação de conhecimentos sobre o ensino e conhecimentos sobre a Matemática. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), muitas tarefas matemáticas exigem que o professor possua conhecimento matemático sobre o papel das instruções utilizadas. É responsabilidade do professor, portanto, avaliar as vantagens e desvantagens das instruções e das representações utilizadas para ensinar um conteúdo específico, bem como o uso de diferentes métodos e técnicas. Dessa forma, o professor desempenha um papel fundamental na seleção e na aplicação adequada de estratégias de ensino que promovam o aprendizado dos estudantes.

> As demandas do ensino exigem conhecimento na interseção de conteúdo e ensino. Ao desenvolver um instrumento para avaliar esse conhecimento, fazemos perguntas sobre se uma fita métrica seria ideal para o ensino do valor do lugar, sobre a escolha de exemplos para simplificar os radicais com a finalidade de discutir estratégias múltiplas ou sobre problemas de subtração de sequência com e sem reagrupamento para instrução. Nós também fazemos perguntas sobre como a linguagem e as metáforas podem ajudar e confundir a aprendizagem dos alunos – a forma como a linguagem sobre empréstimo ou cancelamento pode interferir na compreensão dos princípios matemáticos subjacentes ao algoritmo de subtração ou na resolução de

---

[16] Do inglês: *Recognizing a wrong answer is common content knowledge (CCK), whereas sizing up the nature of an error, especially an unfamiliar error, typically requires nimbleness in thinking about numbers, attention to patterns, and flexible thinking about meaning in ways that are distinctive of specialized content knowledge (SCK). In contrast, familiarity with common errors and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS)*.

> equações algébricas. Em cada um desses exemplos, o conhecimento do ensino e do conteúdo é uma amálgama, envolvendo uma ideia ou procedimento matemático particular e familiaridade com os princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo particular (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 402, **tradução nossa**)[17].

Esse conhecimento se manifesta durante a realização de tarefas que requerem uma interação entre o conteúdo matemático abordado e uma compreensão pedagógica das questões envolvidas. Nesse contexto, Ball, Thames e Phelps (2008) exemplificam como essa combinação de conhecimentos se manifesta e se torna evidente. É por meio desse entendimento e da habilidade de ensinar o que os professores demonstram o seu conhecimento do conteúdo e do ensino.

Na Combinatória, esse tipo de conhecimento refere-se às habilidades que o professor emprega ao orientar os estudantes na resolução de problemas combinatórios. Isso inclui o uso de métodos e técnicas de ensino específicos para a Combinatória, a avaliação conjunta com os estudantes das resoluções de problemas nessa área, a apresentação de explicações e conexões com outras estratégias durante o processo de resolução. Essas são algumas das formas em que o conhecimento do professor sobre o conteúdo e o ensino se manifestam no contexto da Combinatória.

O **Conhecimento do Conteúdo e do Currículo** envolve o conhecimento do professor sobre como o currículo é estruturado, permitindo estabelecer conexões com os materiais utilizados como apoio para o desenvolvimento das aulas. Ao mobilizar esse conhecimento, o professor considera a organização curricular e determina abordagens específicas ao conteúdo a ser ensinado em cada ano escolar.

Na área da Combinatória, o **Conhecimento do Conteúdo e do Currículo** refere-se à compreensão de como esse campo é abordado em livros didáticos, diretrizes curriculares e outros documentos oficiais relacionados ao ensino da Combinatória. Esse conhecimento permite ao professor alinhar suas práticas pedagógicas às orientações curriculares estabelecidas.

---

[17] Do inglês: *The demands of teaching require knowledge at the intersection of content and teaching. In developing an instrument to measure such knowledge, we ask questions about whether a tape measure would be good for teaching place value, about choosing examples for simplifying radicals for the purpose of discussing multiple strategies, or about sequencing subtraction problems with and without regrouping for instruction. We also ask questions about how language and metaphors can assist and confound student learning—the way language about borrowing or canceling may interfere with understanding of the mathematical principles underlying the subtraction algorithm or the solving of algebraic equations. In each of these examples, knowledge of teaching and content is an amalgam, involving a particular mathematical idea or procedure and familiarity with pedagogical principles for teaching that content*.

Os conhecimentos docentes abarcam tanto os conhecimentos relacionados aos conteúdos matemáticos, quanto aqueles que vão além das habilidades técnicas nessa área do conhecimento. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), os diferentes tipos de conhecimento coexistem nas salas de aula e os professores lidam com eles o tempo todo, em diferentes graus. Para os autores é importante que os professores tenham um bom domínio dos conteúdos abordados em sala de aula, pois isso é fundamental para o processo de ensino. Aprofundar o conhecimento dos conteúdos permite aos professores criar estratégias de ensino mais eficientes e promover aprendizagem com compreensão para os seus estudantes.

Estudos sobre conhecimentos e concepções docentes, como os de Assis (2014), Lima (2009) e Rocha (2012), destacam a importância das formações iniciais e continuadas dos professores na influência de seus conhecimentos. Esses estudos ressaltam o que Ball, Thames e Phelps (2008) enfatizam no desenvolvimento dos conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos de conteúdo. Para Assis (2014), Lima (2020) e Rocha (2011), a apropriação desses conhecimentos pode ter um impacto significativo no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes em todos os níveis e modalidades de ensino. Tal consideração reforça a importância de investir na formação e atualização dos professores, fornecendo-lhes aprendizagens e reflexões sobre recursos e as estratégias necessárias para promover a aprendizagem efetiva da Combinatória.

A presente pesquisa fundamenta-se nas discussões de Ball, Thames e Phelps (2008) devido à importância e relevância dos domínios propostos por eles. Os domínios do **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e Estudantes** e **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** foram selecionados para investigar o processo de aprendizagem e ensino da Combinatória, tendo em vista que esses domínios podem nos conduzir a compreensão de conhecimentos matemáticos, as estratégias pedagógicas e as características dos estudantes no contexto específico da Combinatória. Dessa forma, pretende-se com este estudo aprimorar a formação de professores e as práticas de ensino nessa área.

No próximo capítulo apresentamos uma revisão de literatura quanto à estudos que investigaram a formação dos professores que ensinam Combinatória.

5 ESTUDOS SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Em um levantamento das pesquisas científicas na Biblioteca de Dissertações e Teses (BDTD), buscamos analisar a formação de professores para o ensino da Combinatória. Dessa forma, encontramos os estudos de Assis (2014), Lima (2016), Lima (2018), Rocha (2011), Rocha e Ferraz (2010), Sabo (2010), Santos e Merlini (2018) e Teixeira (2012), os quais tratam da formação de professores para o ensino da Combinatória.

Rocha e Ferraz (2010) investigaram a compreensão e as estratégias utilizadas por professores com formação em Pedagogia e em Matemática na resolução de oito problemas combinatórios. Participaram do estudo 29 professores, sendo 13 com formação em Pedagogia e 16 com formação em Matemática. Os participantes responderam individualmente um questionário contendo oito problemas combinatórios, dois de cada tipo: arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. Esses problemas foram retirados do estudo de Pessoa e Borba (2010).

Os resultados do estudo indicaram dificuldades dos professores na resolução dos problemas combinatórios, especialmente no tipo combinação. Também foi destacado que os professores com formação em Matemática tendiam a privilegiar o uso do Princípio Fundamental da Contagem como estratégia principal na resolução dos problemas. Em seguida, eles recorriam ao uso de fórmulas específicas. Por outro lado, os professores com formação em Pedagogia utilizavam principalmente a estratégia de listagem. Observou-se também, que em relação à ordem de grandeza dos números envolvidos nos problemas, não havia diferença significativa entre as médias de acertos dos professores de Pedagogia e de Matemática quando os números eram menores. No entanto, a diferença tornava-se significativa à medida que a ordem de grandeza aumentava, indicando que os professores de Matemática apresentavam um desempenho superior nesse contexto.

O estudo realizado por Sabo (2010) investigou os saberes relacionados ao ensino de Combinatória entre professores do Ensino Médio que ensinavam Matemática. O estudo envolveu a realização de entrevistas com seis professores, abordando quatro tópicos principais: identificação dos participantes, influências das experiências docentes no ensino de Combinatória, saberes dos professores e prática docente (planejamento de aulas, uso de livro didático e avaliações).

De acordo com os resultados, alguns professores afirmaram valorizar o uso do princípio multiplicativo em vez das fórmulas, outros utilizavam apenas as fórmulas no ensino de Combinatória, embora não soubessem justificar a escolha e a validade dessas estratégias. Diante dessas constatações, o pesquisador ressaltou a necessidade e a importância dos processos formativos para os professores como meio de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória.

O estudo conduzido de Rocha (2011) teve como objetivo verificar os conhecimentos mobilizados por professores e as estratégias que eles utilizam na resolução de problemas combinatórios. Foi realizada uma análise dos conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio possuíam em relação à Combinatória e ao ensino desse conteúdo. A autora realizou entrevistas semiestruturadas com seis professores, sendo dois dos Anos Iniciais e dois dos Anos Finais do Ensino Fundamental, e dois do Ensino Médio. Na entrevista, os participantes da pesquisa responderam problemas combinatórios do estudo de Pessoa e Borba (2010). Além disso, analisaram protocolos de resolução produzidos por estudantes na pesquisa de Pessoa (2009). As atividades permitiram verificar as dificuldades encontradas pelos professores, além de suas habilidades na diferenciação entre problemas de arranjo e combinação, na compreensão dos enunciados desses problemas e na correção das resoluções dos estudantes.

Os resultados obtidos na pesquisa revelaram que os professores dos diferentes níveis de ensino tiveram dificuldades na Combinatória, como na identificação e diferenciação de problemas de arranjo e combinação, na interpretação dos enunciados e na correção das produções dos estudantes. Segundo a autora, essas dificuldades foram atribuídas à falta de processos formativos e às lacunas na formação inicial dos professores.

Teixeira (2012) investigou o conhecimento de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental em relação à exploração de problemas de contagem. O autor aplicou questionários em 20 professores que atuavam em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e que também estavam participando de um curso de formação continuada oferecida pela UNIBAN/CAPES. A pesquisa tinha por objetivo identificar o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** e o **Conhecimento Pedagógico** relacionado ao ensino de Combinatória.

O estudo realizado evidenciou que alguns professores dependem fortemente do livro didático para ensinar os conceitos de Combinatória, com poucos materiais abordando estratégias que não seja o uso de fórmulas. Além disso, os professores não tiveram experiências durante sua formação, lidando com a resolução de problemas combinatórios em etapas múltiplas, que requerem o uso do princípio multiplicativo e aditivo em conjunto para determinar o total de possibilidades.

Durante a intervenção realizada no estudo, o pesquisador também observou que os participantes ampliaram sua compreensão sobre a aplicação do princípio multiplicativo e aditivo e perceberam que os problemas de contagem podem ser solucionados por meio de outras representações, além das fórmulas. Apesar desse progresso na compreensão, muitos professores ainda demonstraram insegurança em relação aos resultados e optaram por utilizar as fórmulas para resolver problemas combinatórios.

O estudo realizado por Assis (2014) teve como foco investigar as contribuições de um processo de formação continuada sobre o ensino de Combinatória baseado nos invariantes dos problemas combinatórios. O processo de formação foi conduzido com uma professora que ensinava Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O objetivo foi verificar quais são as mudanças de conhecimento demonstradas nas reflexões e na prática da professora após a intervenção.

A pesquisa consistiu em uma sequência de etapas, incluindo uma entrevista inicial, seis encontros de formação e duas observações de aulas ministradas pela professora, seguidas por uma entrevista final. Por meio da entrevista inicial, foram identificadas dificuldades enfrentadas pela professora no tocante ao reconhecimento e ao trabalho com a Combinatória.

Os resultados apontaram especificamente dificuldade nos invariantes de escolha e ordem nos problemas. Durante as intervenções da formação, a professora participante foi capaz de desenvolver uma melhor compreensão dos diferentes significados, invariantes e representações simbólicas envolvidos no raciocínio combinatório dos estudantes. A pesquisa destacou a importância de os professores refletirem sobre esse campo específico da Matemática e suas práticas em sala de aula, evidenciando que a formação continuada teve um impacto positivo no conhecimento e nas habilidades da professora no ensino da Combinatória. Por meio das reflexões e discussões proporcionadas durante os encontros, a professora aprimorou sua compreensão dos conceitos relacionados à Combinatória.

A pesquisa de Lima (2016) investigou o conhecimento de professores de Matemática da Educação Básica acerca do Princípio Fundamental da Contagem como estratégia para a resolução de problemas combinatórios. O estudo também examinou os tipos de conhecimentos demonstrados pelos professores e as estratégias empregadas na resolução dos diferentes problemas apresentados. Participaram da pesquisa 13 professores dos anos finais do Ensino Fundamental (Grupo 1) e 11 professores do Ensino Médio (Grupo 2). O instrumento utilizado para coleta de dados foi um questionário com oito questões, sendo duas de cada tipo de problema: arranjo, combinação, permutação e produto de medidas.

Foi verificado que os professores do Ensino Fundamental (Grupo 1) que participaram da pesquisa não conseguiram reconhecer a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem nos variados problemas de Combinatória, mas principalmente naqueles que envolviam combinação, ocorrendo predominância do uso de fórmulas. Os professores do Ensino Médio (Grupo 2), no entanto, reconheceram melhor o uso do Princípio Fundamental da Contagem quando comparados aos do Ensino Fundamental. Segundo Lima (2009), o estudo indicou influência da prática de ensino, bem como necessidade de melhor abordar esse princípio em formações iniciais e continuadas nas diferentes situações combinatórias, em especial, as de combinação.

A pesquisa de Lima (2016), por sua vez, teve o objetivo de analisar o ensino de Combinatória por docentes de turmas do 2º ano de Ensino Médio. O estudo foi realizado com dois professores formados em Licenciatura em Matemática, com o intuito de analisar os tipos de situações trabalhadas, os invariantes explicitados ao ensinar, as representações utilizadas e estimuladas durante as aulas, e investigar o Conhecimento Pedagógicos do Conteúdo dos professores. Foram realizadas entrevistas iniciais, observações e gravações videográficas de aulas e, por fim, uma entrevista. As observações e gravações videográficas se deram durante todo o planejamento e aulas executadas pelos professores. Também foram solicitadas na entrevista final indicações de possibilidades de trabalhos com o conteúdo de Combinatória em diferentes anos.

Por fim, os resultados da pesquisa de Lima (2016) apontaram para a necessidade de aprimoramento no ensino da Combinatória por parte dos professores de Matemática. Foi observado que os professores enfrentam dificuldades no trabalho com as situações combinatórias, incluindo a explicitação dos invariantes e a exploração de diferentes representações. Além disso, a priorização excessiva das fórmulas como estratégia de resolução limita o desenvolvimento de habilidades mais abrangentes e a compreensão profunda do tema pelos estudantes.

Santos e Merlini (2018) apresentam um estudo que tem como objetivo comparar situações combinatórias elaboradas pelos participantes da pesquisa antes e depois de uma formação continuada. Participaram do processo de formação 14 professores que ensinavam Matemática nos anos iniciais, mas apenas três desses foram selecionados para participar da pesquisa. O processo formativo teve como objeto de estudo o Campo Conceitual Multiplicativo de Vergnaud (1996), com base nas estratégias formativas contidas na espiral de fluxo RePARe, criada por Magina (2008), em suas três dimensões: reflexão, planejamento e ação.

Foi observado pouco conhecimento por parte das professoras em relação à Combinatória e à forma como se dá o desenvolvimento da sua compreensão. Ficou claro que há uma demanda de processos formativos mais robusto no campo da Combinatória, visando melhorar a capacidade dos professores em elaborar e propor situações-problema dessa área. Além disso, enfatizou-se a importância da reflexão, do planejamento e da ação como componentes essenciais para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.

De modo geral, os estudos apresentados destacam a importância de intervenções voltadas para a Combinatória visando o desenvolvimento e reconhecimento das diferentes situações, invariantes e representações simbólicas. Esses estudos também enfatizam a necessidade de oferecer processos formativos para que os professores reconheçam a importância de explorar os invariantes dos problemas e aprimorar a estruturação das representações simbólicas. Esses aspectos desempenham um papel fundamental para os professores auxiliarem os estudantes na resolução de problemas e promoverem o uso de diferentes abordagens por parte deles.

Além do exposto, é fundamental que os professores analisem os erros recorrentes dos estudantes ao confundirem os invariantes dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Com base nessa análise, podem avaliar as vantagens e desvantagens de introduzir diversas representações e estratégias no ensino da Combinatória, com o objetivo de aprimorar o processo de ensino e garantir um ensino mais efetivo nessa área.

Constatamos poucas propostas de formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Combinatória. Para superar essas dificuldades, os professores precisam de processos formativos que ampliem seu conhecimento sobre a Combinatória. Isso implica incentivar o uso de múltiplas representações, promover a compreensão dos invariantes envolvidos nas situações combinatórias e incentivar a resolução de problemas de forma mais exploratória.

Considerando que as pesquisas destacam lacunas na formação de professores, decidimos empreender um estudo centrado no processo de formação, com o propósito de estimular diálogos acerca das situações combinatórias. Nosso objetivo é abordar a identificação de invariantes nesse contexto, enquanto também promovemos reflexões sobre o ensino da Combinatória. Para isso, abordaremos a perspectiva de Vergnaud (1986), explorando tanto as situações em questão quanto os invariantes associados e as representações simbólicas pertinentes.

No próximo capítulo, será apresentada a descrição do método de estudo realizado, assim como serão discutidos os passos e procedimentos envolvidos e como as ferramentas e técnicas utilizadas para coletar e analisar os dados.

6 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos a base metodológica, a caracterização do tipo de pesquisa, o campo em que foi realizada, critérios e participantes envolvidas, além dos métodos empregados no desenvolvimento da aplicação e os instrumentos para a coleta de dados. O estudo contemplou uma estrutura que inclui aspectos qualitativos que se complementam proporcionando uma visão mais abrangente para a compreensão e análise de diversos fenômenos educacionais considerados.

6.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Para atender aos objetivos estabelecidos neste estudo, adotamos a abordagem qualitativa. Essa abordagem envolve um processo de construção, pois a investigação considera não apenas os dados, mas também o percurso percorrido.

A pesquisa qualitativa é interpretativa, dialógica e interativa, envolvendo a relação entre o pesquisador, o grupo e os indivíduos pesquisados (Lazzarin, 2017). Ela permite ao pesquisador obter uma compreensão dos significados referentes ao tema em estudo. Na abordagem qualitativa torna-se possível compreender as perspectivas dos participantes que serão pesquisados, com intenção de compreender as opiniões sobre o tema abordado. Dessa forma, buscamos fazer uso da abordagem qualitativa, no sentido de compreender as questões investigadas, a partir da perspectiva das participantes, explorando suas percepções, atitudes e motivações, na tentativa de entender o processo de aprendizagem e toda sua complexidade.

As pesquisas podem ser classificadas em três grupos principais com base em seus objetivos: exploratória, descritiva e explicativa (Gil, 2008). Devido à natureza deste estudo, ele é fundamentado nos princípios das abordagens qualitativa e exploratória/explicativa. Nesta investigação adotamos a pesquisa exploratória, que, de acordo com Gil (2008, p. 27.), “tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, visando a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores”.

Com relação ao caráter explicativo, este estudo pode ser classificado nessa categoria uma vez que visa ir além da simples descrição dos significados individuais coletados, buscando explicá-los à luz de teorias e fundamentos teóricos.

Neste sentido, a pesquisa explicativa busca identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos estudados, indo além da simples descrição dos eventos. Ela se preocupa em compreender os processos subjacentes e as relações de causa e efeito que influenciam os resultados observados. Nesse tipo de pesquisa, é necessário um maior investimento em síntese, teorização e reflexão a partir do objeto de estudo, com o objetivo de explicar o porquê de as coisas acontecerem (Gil, 2008). Esse estudo tem uma abordagem de pesquisa-ação, descrita por (Gil, 2008, p. 30) como:

> Uma pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com uma resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos do modo cooperativo ou participativo.

Ademais, esta pesquisa é caracterizada como uma pesquisa-ação, que, no contexto educacional, é uma estratégia que visa ao desenvolvimento de professores e pesquisadores para que possam utilizar suas pesquisas para melhorar o ensino e, consequentemente, a aprendizagem dos estudantes (Tripp, 2005).

6.2 CAMPO DE PESQUISA

A pesquisa de campo foi realizada no município de Carpina, localizado na Zona da Mata Norte do Estado de Pernambuco. Carpina é composto pelo distrito sede e pelo povoado de Caramuru. Segundo dados do IBGE de 2021, a população estimada nessa região é de 85.131 habitantes.

A escolha de Carpina como campo de pesquisa foi baseada em critérios específicos, a saber: 1) Ausência de pesquisas anteriores nesse município que abordassem os anos iniciais do Ensino Fundamental no ensino de Combinatória; 2) Disponibilidade de colaboração e apoio das autoridades educacionais e das escolas selecionadas, facilitando a realização do estudo de forma ética e com o consentimento adequado; 3) Intensão de abranger uma quantidade significativa de escolas públicas que oferecessem os anos iniciais do Ensino Fundamental; e 4) A variedade socioeconômica das escolas selecionadas, buscando representar diferentes realidades e contextos educacionais;

No município de Carpina há 49 escolas na rede pública de ensino. Para o estudo, foram incluídas 21 escolas municipais e duas escolas estaduais (região urbana e rural). A escolha de incluir essas escolas específicas levou em consideração a representatividade e a diversidade da amostra, buscando obter uma visão abrangente da realidade educacional local. Todas as escolas escolhidas foram convidadas a participar do estudo, e dentre elas, somente seis escolas da região urbana manifestaram interesse em se envolver na pesquisa.

A proximidade da pesquisadora com o município de Carpina permitiu um maior envolvimento com a realidade educacional local, o que contribuiu para a qualidade e o alcance dos dados coletados. Essa proximidade facilitou o acesso às escolas e a interação com as professoras participantes, proporcionando uma compreensão mais aprofundada dos desafios e das práticas educacionais no contexto estudado.

6.3 CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DAS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi conduzida com um grupo de seis professoras do Ensino Fundamental em escolas públicas da rede municipal de Carpina-PE. É importante ressaltar que essas professoras pertenciam a seis escolas diferentes. Inicialmente, o critério de seleção era que essas professoras ensinassem Matemática no 4º e/ou 5º ano e tivessem pelo menos cinco anos de experiência no ensino. No entanto, durante o processo de seleção, uma das professoras não atendia a esse critério. Apesar disso, decidimos incluí-la no estudo devido ao seu interesse em participar da pesquisa. Com isso, também buscamos valorizar as suas contribuições e perspectivas docentes. Reconhecemos, portanto, a importância de considerar o envolvimento e o engajamento das professoras no estudo, mesmo que alguma delas não atendesse estritamente ao critério de experiência de cinco anos.

A escolha desse grupo específico de professoras foi baseada na compreensão de que elas já desenvolviam atividades relacionadas à Combinatória e possivelmente abordavam discussões sobre estruturas multiplicativas com seus estudantes nas turmas de 4º e 5º anos. A seleção preferencial de professoras com pelo menos cinco anos de experiência foi embasada na perspectiva apresentada por Tardif (2008), que destaca o desenvolvimento da prática dos professores após cerca de cinco anos de profissionalização. De acordo com o autor:

> O saber está sempre ligado a uma situação de trabalho com outros (alunos, colegas, pais, gestores, etc.), ancorado numa tarefa complexa (ensinar), situado num espaço de trabalho (a sala de aula, a escola) e enraizado numa instituição e numa sociedade (Tardif, 2008, p. 15).

Em síntese, ao selecionar as professoras participantes, levamos em consideração sua disponibilidade e interesse em participar do estudo, bem como sua atuação no ensino de Matemática nos anos iniciais, especificamente nas turmas de 4º e/ou 5º ano.

6.3.1 Perfil das participantes da pesquisa

Nesta subseção, com base nos dados coletados nas entrevistas, apresentaremos o perfil das participantes, fornecendo informações relevantes sobre sua formação acadêmica, experiência profissional e anos de atuação no ensino de Matemática. Os dados estão organizados no Quadro 2, apresentando os seguintes aspectos: formação acadêmica, tempo total de experiência profissional, tempo específico dedicado ao ensino de Matemática e anos de escolaridade do Ensino Fundamental em que atua.

Quadro 2 – Caracterização das participantes da pesquisa

Participantes	**Formação Acadêmica**	**Experiência profissional**	**Experiência com Matemática nos anos iniciais**	**Anos de ensino atuais**
P1	Pedagogia e cursando Licenciatura em Matemática (4º período) com especialização em Educação Especial e Inclusiva	8 anos	8 anos	4º e 5º anos
P2	Pedagogia e História com especializações em História do Nordeste e Psicopedagogia	22 anos	15 anos	4º ano
P3	Pedagogia com especialização em Neuropsicopedagogia	6 anos	6 anos	5º ano
P4	Pedagogia e Ciências Biológicas com especializações em Gestão Ambiental e Psicopedagogia Clínica Institucional	24 anos	18 anos	5º ano
P5	Pedagogia com especialização em Educação Especial e	11 anos	11 anos	4º ano

	Inclusiva e Neuropsicopedagogia Institucional e Clínica.			
P6	Pedagogia	3 anos	3 anos	5º ano

Fonte: A autora (2023).

Destaca-se que as professoras participantes foram chamadas de P1, P2, P3, P4, P5 e P6 para garantir a confidencialidade de suas identidades. Das professoras entrevistadas, constatamos que a experiência em sala de aula varia de seis a vinte quatro anos, com exceção da participante P6, que possui três anos de experiência.

Na caracterização das professoras, observamos que todas possuem formação inicial em Pedagogia. Algumas também possuem uma segunda graduação. Por exemplo, P2 possui graduação em História, enquanto P4 possui graduação em Ciências Biológicas. Além disso, é interessante notar que cinco das participantes possuem pós-graduações *lato sensu* em áreas diversas. No entanto, é relevante destacar que a professora P6 possui apenas graduação em Pedagogia, sem nenhuma formação adicional. Vale destacar também que a professora P1 está atualmente cursando o quarto período do curso de Licenciatura em Matemática em uma instituição privada.

Em relação à experiência profissional e ao ensino de Matemática nos anos iniciais, P1, P3, P5 e P6 possuem o mesmo tempo de experiência. Por outro lado, P2 e P5 iniciaram suas carreiras docentes ensinando História e Ciências, respectivamente, e continuam atuando nessas áreas em seu contraturno. Quanto aos anos de atuação como professoras, P1 trabalha com o 4º e 5º anos, mas apenas ensina Matemática. P2 e P5 lecionam para o 4º ano, enquanto P3, P4 e P6 estão envolvidas com o ensino dos 5º anos e são professoras polivalentes, ensinando múltiplas disciplinas.

Ao questionar a participação delas em processos formativos na área de Matemática e/ou em Combinatória, obtivemos as informações sistematizadas no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Participações em processos formativos em Matemática e/ou Combinatória

Participantes	**Participação em processos formativos em Matemática**	**Participação em processos formativos em Combinatória**
P1	Operações Básicas; Letramento Matemático; Geometria plana e espacial.	-
P2	-	-

P3	-	-
P4	Matemática financeira; Planificações de sólidos geométricos	-
P5	-	-
P6	-	-

Fonte: A autora (2023).

Notamos que apenas P1 e P4 mencionaram ter participado de formações relacionadas à Matemática, embora não tenham abordado especificamente a Combinatória. Em contrapartida, as outras quatro professoras afirmaram nunca ter participado de qualquer tipo de formação em Matemática, incluindo a Combinatória.

P1 e P4 ainda destacaram, na entrevista, que mesmo sem terem participado de formações específicas em Combinatória, buscam adquirir conhecimento por meio de recursos como livros didáticos, vídeos no YouTube ou materiais de avaliações externas. Das demais professoras (P2, P3, P5 e P6) que não participaram de nenhum processo formativo em Matemática, P6 menciona que sua escola oferece formações em outras áreas do conhecimento, como alfabetização e letramento. Por sua vez, P2, P3 e P5 participaram de formações em alfabetização, sustentabilidade e tecnologias da informação, respectivamente, sem terem tido acesso a formações específicas em Combinatória.

De acordo com Borba e Pessoa (2010), é fundamental que as escolas considerem a presença dos problemas de combinatórias nos currículos e livros dos anos iniciais. Isso posto, a formação inicial e os processos formativos dos professores devem enfatizar esse conteúdo, permitindo que eles reflitam sobre as características e particularidades das situações combinatórias.

Dessa maneira, é essencial que os professores tenham momentos dedicados para refletir e compreender as situações e invariantes combinatórios a fim de desenvolverem as habilidades necessárias para ensinar efetivamente esse tópico aos estudantes. Além disso, é importante que a formação ofereça recursos e estratégias para facilitar a aprendizagem e o ensino da Combinatória nas salas de aula, proporcionando aos professores reflexões que os auxiliem a abordar o assunto de maneira clara e significativa, tornando-o mais acessível e envolvente para os estudantes.

6.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Para atingir os objetivos delineados, este estudo foi conduzido em várias etapas. Antes de dar início ao processo, a pesquisadora realizou uma introdução preliminar do projeto às professoras nas escolas. Durante essa apresentação, foram compartilhadas informações sobre a condução do estudo, e foi estabelecido o primeiro contato com as participantes.

No início do estudo, foi realizada a primeira etapa, que consistiu em entrevistas individuais semiestruturadas com cada professora participante. O objetivo dessas entrevistas foi obter informações detalhadas sobre as formações acadêmicas, experiências e práticas relacionadas à Matemática e Combinatória. Esse levantamento inicial permitiu um melhor entendimento do conhecimento prévio das professoras e suas abordagens no ensino desse conteúdo.

Após as entrevistas, deu-se início à etapa seguinte, que foi um processo formativo voltado para a Combinatória, baseado na abordagem proposta por Vergnaud (1986). O processo formativo foi composto por três encontros, nos quais as professoras tiveram a oportunidade de refletir e aprimorar seus conhecimentos nessa área específica. Dessa forma, por meio das entrevistas iniciais e do processo formativo, foi possível investigar e potencialmente ampliar o conhecimento das professoras em relação à Combinatória, proporcionando subsídios para aprimorar suas práticas de ensino nessa área específica da Matemática.

Como já foi mencionado aqui, os instrumentos de pesquisa utilizados foram as entrevistas semiestruturadas individuais e o processo formativo. Tanto as entrevistas quanto as reuniões do processo foram realizadas por meio da plataforma Google Meet, sendo registradas em formato de videoconferência. A escolha desses instrumentos está diretamente relacionada à natureza da pesquisa, pois, como apontam Marconi e Lakatos (2003), os métodos e técnicas devem se adequar ao problema em estudo, às hipóteses levantadas e ao tipo de informantes envolvidos.

A seguir, apresentaremos mais detalhes sobre cada instrumento utilizado, abordando aspectos relevantes relacionados à sua aplicação e análise.

6.4.1 Entrevistas

Foram realizadas entrevistas individuais de forma síncrona com as participantes da pesquisa a fim de possibilitar a caracterização de seu perfil, obtendo informações sobre sua formação e experiências relacionadas à Matemática, especialmente à Combinatória.

Através das entrevistas realizadas, buscou-se estabelecer um diálogo com as participantes para conhecer suas percepções sobre as temáticas abordadas e suas visões em relação às práticas pedagógicas. Conforme destacado por Gil (2008), a entrevista é uma forma de interação social que envolve um diálogo assimétrico, no qual uma das partes busca coletar dados e a outra se apresenta como fonte de informação. Nesse sentido, as entrevistas proporcionam um espaço para a troca de conhecimentos e experiências entre os participantes e o pesquisador, contribuindo para a compreensão mais aprofundada das questões investigadas.

Em relação ao uso da entrevista para a coleta de dados, Rosa e Arnoldi (2006, p. 14) afirmam que:

> A entrevista é uma ferramenta imprescindível para se trabalhar, buscando-se contextualizar o comportamento dos sujeitos, fazendo a sua vinculação com os sentimentos, crenças, valores e permitindo, sobretudo, que se obtenham dados sobre o passado recente ou longínquo, de maneira explicita, porém tranquila, e em comunhão com seu entrevistador que deverá, inicialmente, transmitir atitudes que se transformem em transferências e troca mútua de confiabilidade.

Para os autores, a entrevista é uma técnica adequada para obter informações relacionadas ao objeto de estudo, permitindo ao pesquisador explorar atitudes e valores relacionados ao comportamento dos participantes. Além disso, a entrevista é uma fonte adicional de esclarecimento dos resultados e pode auxiliar na resolução de dúvidas que possam surgir ao longo do processo investigativo. No contexto educacional, Lüdke e André (1986) afirmam que a abordagem com uso de entrevista com uma estrutura mais livre é a mais adequada, pois proporciona maior flexibilidade ao entrevistar professores, estudantes, pais, diretores e coordenadores. Essa abordagem permite uma maior abertura para explorar diferentes perspectivas e compreender as complexidades do contexto educacional de maneira mais aprofundada.

No Quadro 4 apresentamos o roteiro da entrevista composto por dez questões, as quais foram organizadas em cinco categorias, a saber: Caracterização das

Participantes; Estudo de Combinatória; Ensino de Combinatória; Prática Docente; e Conhecimentos de Combinatória.

Quadro 4 – Roteiro da entrevista semiestruturada

Caracterização das participantes	1. Qual é a sua formação acadêmica? Caso tenha outras formações, quais são? 2. Há quanto tempo você trabalha como professora? 3. Há quanto tempo como professora você ensina Matemática? 4. Você já participou de algum processo formativo na área de Matemática? Se sim, qual? E, em Combinatória? Já participou? Se sim, qual?
Estudo de Combinatória	5. Você se lembra de ter estudado Combinatória na Educação Básica, graduação e/ou pós-graduação? Se sim, como foi o ensino?
Ensino de Combinatória	6. Você está trabalhando ou já trabalhou com Combinatória com seus estudantes? (Caso não, “Qual foi/é o motivo?”) / (Caso sim, como foi/é esse trabalho? Nas suas aulas de Combinatória, os problemas são trabalhados simultaneamente ou separadamente? 7. Você acha que seus estudantes do 4º e/ou 5º ano(s) têm dificuldades em Combinatória? Quais dificuldades e facilidades – em qual das situações especificamente – seus estudantes têm com a Combinatória e por quê? Como você os ajudava/ajuda nas dificuldades? Caso eles não tenham dificuldades em Combinatória, por que você acha que isso acontece?
Prática Docente	8. Você realiza planos de aulas? Com que frequência (diariamente, semanalmente, quinzenalmente, etc.)? E como você planeja as suas aulas de combinatória? Como elas são normalmente organizadas? 9. Quais materiais você usa como consulta para elaborar seus planos de aula de Combinatória?
Conhecimento de Combinatória	10. Você se sente segura com os seus conhecimentos sobre Combinatória? Se não, “Qual é a sua dificuldade?” e “O que é você faz para superar essa dificuldade?”.

Fonte: A autora (2023).

Antes de iniciar os questionamentos sobre o estudo de Combinatória com as participantes, foi realizada uma apresentação em slides contendo quatro problemas de Combinatória (Apêndice A). Esses problemas foram apresentados como uma referência inicial para orientar as discussões e os questionamentos subsequentes.

Após a entrevista, as professoras foram convidadas a participar da próxima fase da pesquisa, que incluía três encontros no processo formativo. Caso aceitassem, foram solicitadas a trazer ou preparar planos de aulas para o encontro seguinte com o tema da Combinatória para turmas do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental. Esses planos de aula seriam analisados pela pesquisadora, como parte do aprofundamento do estudo da Combinatória e da avaliação da eficácia das estratégias pedagógicas propostas pelas professoras. Essa etapa tinha como objetivo oferecer um espaço de aprendizagem e reflexão sobre a Combinatória, buscando aprimorar o conhecimento das professoras nessa área. As professoras manifestaram seu interesse em continuar envolvidas no estudo.

6.4.2 Processo Formativo

O Processo Formativo ocorreu de forma colaborativa, com as professoras desempenhando um papel central e ativo na promoção de reflexões sobre a Combinatória. Elas se envolveram na pesquisa e exploraram diferentes situações, invariantes e representações simbólicas, seguindo o tripé proposto por Vergnaud (1986), delineado no referencial teórico desta dissertação.

Essa etapa envolveu a realização de três encontros com a participação das seis professoras. Para facilitar o planejamento dessas reuniões, um questionário eletrônico foi enviado para coletar informações sobre a disponibilidade semanal das professoras. Com base nessas informações, elas foram divididas em três duplas, conforme suas respectivas disponibilidades, denominadas de G1 (P1 + P6), G2 (P3 + P5) e G3 (P2 + P4).

Nos dois primeiros encontros, as mesmas duplas, G1, G2 e G3, foram mantidas. No terceiro encontro, todas as professoras se reuniram em uma sessão coletiva.

Os encontros foram conduzidos de forma síncrona, por meio da plataforma Google Meet. Com a autorização de todas as participantes, os encontros foram gravados para fins de registro. A estrutura completa do processo formativo está detalhada no Apêndice B. A seguir, serão apresentados os detalhes de cada encontro.

6.4.2.1 Primeiro encontro

O objetivo do encontro foi analisar e discutir o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** das professoras em relação às diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios, bem como explorar as propriedades invariantes desses conceitos e como eles se manifestam em cada situação. O encontro foi dividido em dois momentos. No primeiro, que durou cerca de 10 minutos, o objetivo foi promover uma interação entre as participantes e a pesquisadora. Durante esse encontro, a pesquisadora apresentou-se como mestranda e professora, compartilhando um pouco de sua trajetória acadêmica e profissional. Em seguida, ela incentivou as participantes a fazerem o mesmo com o propósito de promover um ambiente acolhedor e uma boa relação entre elas para os encontros futuros. Houve também espaço para que as participantes esclarecessem eventuais dúvidas sobre a pesquisa.

Em seguida, no segundo momento, com duração de aproximadamente uma hora e vinte minutos, o foco principal foi a análise e discussão do Conhecimento Especializado das professoras no campo da Combinatória. Para isso, empregamos materiais manipulativos, como fichas contendo elementos dos problemas apresentados[18], bem como problemas impressos que foram distribuídos antecipadamente às participantes.

Durante a resolução dos problemas, as duplas fizeram uso dos materiais manipuláveis, o que foi encorajado para auxiliar na compreensão dos conceitos e na resolução dos problemas. A pesquisadora solicitou às participantes que fotografassem suas resoluções com os materiais manipuláveis e enviassem as fotos para seu WhatsApp, para que posteriormente pudessem ser discutidas com a dupla.

Após a resolução dos problemas, a pesquisadora conduziu uma discussão entre a dupla, confrontando as suas soluções e fazendo questionamentos às participantes. Ela incentivou a reflexão sobre as respostas e os raciocínios utilizados, visando aprofundar o conhecimento e identificar as estratégias adotadas pelas professoras.

Além disso, no final, a pesquisadora propôs que as participantes respondessem a um protocolo dos problemas, no qual elas deveriam preencher informações relacionadas a cada um dos problemas trabalhados. Esse protocolo tinha questões sobre a escolha dos elementos, se todos os elementos do conjunto eram utilizados e se a ordem dos elementos gerava novas possibilidades.

6.4.2.2 Segundo encontro

---

18 Os materiais manipuláveis foram compostos por figuras representando os elementos das situações, com fichas repetidas para cada elemento, permitindo a exploração de diferentes combinações e a visualização das possibilidades.

O objetivo do segundo encontro foi examinar as representações simbólicas dos estudantes e a forma como as professoras utilizam o **Conhecimento do Conteúdo e do Estudante**. O encontro foi dividido em dois momentos. No primeiro momento, realizou-se uma recapitulação do que foi discutido no encontro anterior, enfocando a revisão das propriedades inerentes aos problemas de Combinatória[19]. Foi enfatizada a importância desses invariantes na resolução dos problemas e foram apresentados exemplos de situações específicas. Os exemplos apresentados incluíram problemas como produtos de medidas, permutação, arranjo e combinação, cada um com suas características e propriedades únicas.

No segundo momento, após a discussão sobre os problemas, as duplas de professoras analisaram protocolos de respostas de estudantes, os quais já haviam sido recebidos previamente. Esses protocolos consistiam em registros das respostas dadas pelos estudantes aos problemas apresentados, retirados do estudo de Pessoa (2009) e Montenegro (2018). Por meio de slides, as professoras compartilharam os protocolos e iniciaram uma análise detalhada.

Para cada problema, as professoras levantaram questões específicas. Elas discutiram se os estudantes haviam compreendido o problema e qual lógica eles utilizaram em suas respostas. Também avaliaram se as respostas estavam corretas ou se haveria uma resposta alternativa mais adequada.

Além disso, verificaram se todas as possibilidades de combinações haviam sido exploradas e se os casos que atendiam ao solicitado no problema foram devidamente enumerados ou contados. Após a análise individual dos problemas, as professoras prosseguiram com questionamentos mais amplos.

Elas identificaram qual estudante apresentou mais dificuldade e discutiram as razões por trás dessas dificuldades. Também analisaram as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas, observando se eles optaram por listagens, diagramas de possibilidades ou desenhos.

---

19 Inicialmente, esse momento não iria acontecer, mas no encontro 1 as participantes pediram para que fosse feita essa retomada.

6.4.2.3 Terceiro encontro

O objetivo do terceiro encontro foi discutir e refletir sobre como deve ser trabalhada, em sala de aula, a Combinatória, e avaliar as possíveis mudanças nos conhecimentos das participantes ao longo do desenvolvimento do Processo Formativo. O encontro foi dividido em três momentos. Nesse encontro, além de discutir as semelhanças e diferenças entre os oitos problemas combinatórios, quatro desses apresentados no segundo encontro e mais quatro problemas do terceiro encontro, todos embasados do estudo de Gadelha (2020). As professoras foram questionadas sobre o raciocínio necessário para resolvê-los e se agruparam os problemas com base em conjuntos de elementos. Também foi explorado se todos os elementos eram utilizados nas soluções ou apenas alguns deles, assim como se a ordem dos elementos gerava novas possibilidades de resposta.

As professoras passaram para a análise das situações de arranjo e combinação, focando a presença ou ausência de ordenação nas situações apresentadas. Para ilustrar isso, apresentamos dois protocolos de estudante embasados no estudo de Rocha (2011), nos quais eles abordavam a resolução de um problema de arranjo e outro de combinação. Pedimos às professoras que analisassem as estratégias utilizadas pelos estudantes, avaliando se elas eram adequadas para cada situação proposta.

Após essa análise, focou-se na discussão das diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios, bem como suas propriedades invariantes. Foram apresentados slides com situações e invariantes da Combinatória, como produto de medidas, arranjo, permutação e combinação. O objetivo era investigar de que maneira os invariantes se manifestavam em cada situação e como poderiam ser abordados durante as aulas.

Logo após, a pesquisadora conduziu uma série de questionamentos às professoras com o objetivo de refletirem sobre os termos e conceitos da Combinatória e seu desenvolvimento durante o processo formativo. As perguntas incluíam a identificação dos erros que os estudantes poderiam cometer nos problemas combinatórios discutidos, sugestões de como trabalhar essas situações em sala de aula para que os estudantes compreendam as propriedades dos invariantes, a preferência por determinadas representações simbólicas na resolução dos problemas e estratégias para ajudar os estudantes com dificuldades em Combinatória.

Para finalizar o encontro, a pesquisadora pediu às professoras que definissem, em uma palavra, como o Processo Formativo contribuiu para o desenvolvimento de seus Conhecimentos sobre Combinatória. Em seguida, elas criaram uma nuvem de palavras colaborativa utilizando um *link* gerado pelo Mentimeter. Esse exercício permitiu que compartilhassem suas percepções de forma simultânea e colaborativa.

Durante todo o processo de pesquisa, a observação direta desempenhou um papel fundamental. Essa técnica de coleta de dados envolve o uso dos sentidos do pesquisador para obter informações específicas que são consideradas relevantes para a pesquisa (Marconi; Lakatos, 2003). Dessa forma, o pesquisador é desafiado a analisar os eventos a serem estudados, indo além da simples observação e buscando um contato direto com a realidade. As informações coletadas foram de extrema importância e, para garantir sua preservação, foram registradas por meio de gravações. Essas gravações permitiram à pesquisadora revisar e reexaminar as informações e fatos analisados ao longo da investigação. É importante ressaltar que essas gravações foram usadas como uma forma de armazenamento das informações, sendo de grande valor para o desenvolvimento da pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos e discutiremos os resultados do presente estudo a partir das análises realizadas e traremos informações adicionais sobre a temática investigada.

7 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A COMBINATÓRIA

Neste capítulo daremos início às nossas análises, discussões e interpretações dos dados obtidos nesta investigação. Inicialmente apresentaremos o perfil das professoras participantes da pesquisa com relação a aspectos como estudos, conhecimentos, práticas docentes e o ensino com a Combinatória.

7.1 ENTREVISTAS

7.1.1 Estudos e Conhecimentos sobre Combinatória

Nesta seção apresentaremos e discutiremos os dados resultantes das entrevistas sobre os estudos e conhecimentos sobre Combinatória das participantes da pesquisa. Para tanto, analisamos suas respostas sobre seus estudos de Combinatória quando estudantes – **questão 5***,* – e sua segurança ou dificuldade quanto à Combinatória – **questão 10, do roteiro de entrevista***.* As análises estão pautadas em **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e Estudante**, e **Conhecimento do Conteúdo e Ensino***,* descritos por Ball, Thames e Phelps (2008), e também, nas situações, nos invariantes e nas representações simbólicas descritos por Vergnaud (1998).

A experiência profissional de professores é uma fonte de seu saber-ensinar em relação aos conhecimentos adquiridos durante a universidade e à vivência de sua escolaridade. Então, toda a trajetória escolar do professor e sua construção da aprendizagem de certa forma contribuem para seu aprimoramento futuro, ou seja, o conteúdo trabalhado durante a vivência no Ensino Básico pode estimular o seu raciocínio, e, nesse sentido, pode minimizar dificuldades de aprendizagem futuras (Tardif; Raymond, 2009).

No começo, coletamos informações das professoras participantes da pesquisa acerca de suas experiências de aprendizado em Combinatória ao longo da Educação Básica, Graduação e/ou Pós-graduação. Com o objetivo de familiarizá-las com os diversos tipos de problemas Combinatórios, a pesquisadora apresentou em slides, quatro situações combinatórias - uma de cada tipo – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas - retiradas do estudo de Lima (2018), como mostrado no Apêndice A. Essa abordagem permitiu que elas compreendessem claramente os conceitos subjacentes e, assim, fossem capazes de responder às perguntas propostas.

No Quadro 5 apresenta-se de forma objetiva as respostas das participantes quanto a recordação do conteúdo de Combinatória em relação aos seus estudos.

Quadro 5 – Estudos de Combinatória das participantes

Professoras	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Relembra da Combinatória na Educação Básica	Sim	Não	Não	Não	Sim	Sim
Relembra da Combinatória na Graduação	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Relembra da Combinatória na Pós-Graduação	Não	Não	Não	Não	Não	Não

Fonte: A autora (2023).

De acordo com as respostas apresentadas, observa-se que as participantes P2, P3 e P4 não recordam de ter visto o conteúdo de Combinatória durante a trajetória escolar. Por outro lado, as demais participantes possuem lembranças de terem estudado o tema (Quadro 6).

Quadro 6 – Transcrição 1: Estudos de Combinatória na Educação Básica

Pesquisadora: Como foi o ensino da Combinatória na sua Educação Básica?	
P1	"Lembro bem vagamente. Mas, era assim... a professora explicava, no caso, resolvia os problemas com a turma e tudo se baseava nas fórmulas e a gente copiava? Era assim".
P2	"Eu não aprendi foi nada para falar a verdade. O professor só colocava as fórmulas nas fichas ou escrevia mesmo. Não tive uma experiência boa! E foi assim, o meu Ensino Médio".
P6	"Foi bem raso. O professor colocava as fórmulas lá no quadro e a gente decorava para as avaliações. Não era legal, porque não entendíamos o verdadeiro sentido de estar estudando aquilo, sabe? [referindo-se as fórmulas de Combinatória] E nos anos anteriores, no Ensino Fundamental, não foi trabalhado".

Fonte: A autora (2023).

Compreende-se, a partir dessas falas de P1, P5 e P6, que as aulas de Combinatória na Educação Básica não lhes propiciaram uma compreensão aprofundada do **Conhecimento Especializado da Combinatória**, uma vez que o ensino era pautado no uso de fórmulas, não produzindo sentido das situações e apresentando apenas uma possível representação.

Segundo Vergnaud (1986), o ensino baseado apenas na memorização de fórmulas e na resolução de problemas de forma mecânica pode levar a uma compreensão superficial do conhecimento. O autor propõe que o ensino deva enfatizar a compreensão dos conceitos subjacentes e a capacidade dos estudantes de raciocinar e transferir seu aprendizado para novas situações. Dessa maneira, Borba (2010) considera que no ensino da Combinatória na Educação Básica, a exploração de variadas situações — os problemas de arranjo, combinação, permutação e produtos de medidas — possibilita atividades ricas que incentivam a reflexão dos estudantes em detrimento da memorização de fórmulas, como acontece no Ensino Médio.

Diante das análises das falas das professoras e as perspectivas de Vergnaud (1986) e Borba (2010) somos levados a afirmar que quando os estudantes são ensinados a memorizar fórmulas e resolver problemas de forma mecânica, eles podem acabar tendo apenas uma compreensão superficial do conhecimento, sem realmente entender os conceitos por trás das fórmulas e aplicações. Ainda, percebe-se que a exploração de situações variadas, como problemas de arranjo, combinação, permutação e produtos de medidas, é uma abordagem pedagógica muito valiosa. Essa diversidade de contextos permite que os estudantes enxerguem a aplicabilidade da Combinatória em diversas áreas da vida.

A participante P2 relatou que teve uma única disciplina específica de Matemática Básica na Graduação, a qual envolvia a elaboração e resolução de problemas matemáticos com as quatro operações; todavia, como já mencionado, nada relacionado à Combinatória. Enquanto P1, P3, P4, P5 e P6 destacam que, durante o Ensino Superior, tiveram disciplinas que tratavam as teorias de ensino e aprendizagem da Matemática, como aquelas de Vergnaud, Piaget, Chevallard, Vygotsky e outras. Vale destacar que P1, apesar de não ter estudado a Combinatória em sua graduação em Pedagogia, teve a oportunidade de estudar esse conteúdo em seu curso atual em Licenciatura Matemática (Quadro 7).

Quadro 7 – Transcrição 2: Estudos de Combinatória no Ensino Superior

Pesquisadora: Como foi o ensino da Combinatória na Graduação?	
P1	“Quando eu fiz pedagogia, só tive cadeiras pedagógicas que envolviam a Matemática, mas nada mesmo de Combinatória. Já na minha faculdade de Matemática, tive uma disciplina que envolveu a Combinatória, mas nem era obrigatória, viu? Era eletiva. Aí, as aulas eram resumidas em resolver listas com problemas e tínhamos que responder em equipes para depois irmos ao quadro mostrar com fizemos e discuti-los. Lembro que na resolução dos problemas de Combinatória aplicávamos fórmulas. Para mim, a disciplina não foi muito proveitosa, muito curta, de 30 horas. E, vejo o quanto precisamos desse reforço, né?!”
P2	“Que eu me lembre foi uma disciplina com as operações básicas... da adição, subtração, multiplicação e divisão. Só uma pincelada do conteúdo, quase impossível aprender mesmo. E eu ficava questionando ‘como vou levar isso para os meus alunos de forma que eles entendam?’. Eu não via essa relação, sabe? Tudo isso precisa ser revisto, as disciplinas... o curso em geral.
P3	“De Combinatória teve nada. A única disciplina foi com discursões com as teorias, né?! Como Piaget, Vygotsky e outros que não lembro”.
P4	“Olha, eu lembro que a gente lia muito Piaget, ‘visse’!? Aí, era o que falava um pouco do ensino da Matemática”.
P5	Pensando aqui, na verdade, nada em relação a Combinatória. No meu curso tinha habito de discutir os teóricos, de modo geral, aí lembro de Chevallard, Vygotsky... É bem preocupante, né!? Em saber cada probleminha desse conteúdo.
P6	“Muitas e muitas leituras sobre diversos estudiosos de Matemática. Não tivemos nenhuma relacionada à Combinatória.”

Fonte: A autora (2023).

O estudo das teorias de ensino e aprendizagem da Matemática como mencionado por P1, P3, P4, P5 e P6, é fundamental para a formação de professores, permitindo compreender como os estudantes aprendem Matemática e quais abordagens são mais eficazes. No entanto, também é importante incluir a Combinatória no currículo de Pedagogia, pois essa área oferece conhecimentos fundamentais com aplicações práticas, desenvolve o raciocínio lógico, promove a interdisciplinaridade, prepara os estudantes para desafios acadêmicos e estimula a pesquisa e a inovação no ensino.

No fragmento da fala de P1, ela teve uma disciplina específica de 30 horas durante a Graduação em Licenciatura em Matemática, diretamente ligada à Combinatória. No entanto, observamos que o **Conhecimento Especializado da Combinatória** também não foi bem trabalhado durante a sua segunda graduação, priorizando abordagens de ensino que se limitaram apenas à aplicação de fórmulas, sem considerar a construção de conceitos combinatórios ou as relações existentes entre esses conceitos. Esse cenário levanta preocupações sobre a qualidade da formação dos futuros pedagogos em relação à Combinatória.

Por outro lado, P2 teve apenas uma disciplina que envolvia as operações básicas, o que também é motivo de preocupação. A Combinatória é uma área importante e merece maior atenção e estudo para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e para a compreensão das estruturas discretas, possibilitando uma formação completa dos futuros pedagogos.

De acordo com as ideias de Shulman (1986), uma das fontes de base de conhecimento do conteúdo de professores é a formação acadêmica. Nesse sentido, os cursos de Ensino Superior desempenham um papel crucial no processo de formação desses profissionais, por meio de seus currículos. Os currículos, como componentes essenciais nesse processo, abarcam as aprendizagens da Matemática, e devem ser incluindo o conteúdo de Combinatória.

No entanto, negligenciar a Combinatória na formação inicial desses professores, pode acarretar sérios riscos, prejudicando a qualidade do ensino dessa importante área da Matemática aos seus estudantes. Tal omissão pode resultar em lacunas no Conhecimento do Conteúdo e, consequentemente, no preparo adequado para abordar Combinatória em sala de aula. Além disso, é importante destacar que a Combinatória desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade de análise e da resolução de problemas. A ausência da exploração desse conteúdo durante a formação no ensino superior, pode limitar o desenvolvimento dessas habilidades nos futuros professores e, consequentemente, comprometer o processo de aprendizagem nos estudantes que serão por eles instruídos.

Na fala de P3 é destacada a necessidade de mudanças nas estruturas dos cursos de formação inicial de professores e nas estruturas das disciplinas, de modo que elas se tornem mais articuladas com a prática docente escolar. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), em todas as decisões do professor precisa haver uma integração entre a Matemática que está sendo apresentada e os objetivos de ensino. Dessa forma, a discussão sobre o ensino de conteúdo específico não pode deixar de acontecer na formação inicial de professores.

Segundo os referidos autores, ao realizar o ensino, os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar. Entretanto, o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** por si só não é o suficiente para o ensino, é preciso que o professor consiga identificar o conhecimento prévio do estudante em relação ao tema em questão, assim como possíveis fontes de erros. Além disso, é necessário que o professor seja capaz de criar situações didáticas adequadas para auxiliar o estudante a superar esses erros e facilitar a aprendizagem de novos conceitos. Em outras palavras, o professor deve ser capaz de aplicar uma intervenção Matemática apropriada para promover o aprendizado significativo do estudante (Lima, 2009).

Nas entrevistas, as professoras foram questionadas sobre sua segurança em relação aos conhecimentos de Combinatória, e todas responderam de forma negativa. Em seguida, indagamos sobre suas dificuldades e como pretendiam superá-las (Quadro 8).

Quadro 8 – Transcrição 3: Conhecimento de Combinatória

Pesquisadora: Qual a sua dificuldade?	
P1	“Minha maior dificuldade está em saber a diferença de alguns problemas, viu?! Assim, eu me confundo muito na resolução. As vezes coloco mais repostas [referindo-se as possibilidades], sei lá! Vamos ver nesse curso como vou me sair, né!”
P2	“Em entender o que cada problema pede. Aí está o *x da questão*, como diabos achar a forma certa de resolver cada problema? É um desafio mesmo! Acho que é uma questão de prática e de conhecer diferentes tipos de problemas, sabe?”
P3	“Em entender os problemas mesmo. Têm uns problemas que você pensa que é de uma forma, mas não é. Isso é meu calo”.
P4	“Minha dificuldade é em muita coisa [risos]. De entender, de resolver, e até mesmo de explicar aos alunos. Os problemas tem formas e ideias diferentes, isso que quebra minha cachola”.
P5	“Seria em saber o que cada problema pede; não consigo identificá-los, sempre me confundo. Eu sei que os problemas têm diferentes interpretações e para cada uma delas uma forma de resolver o problema, né? Mas o problema está aí, em como resolvê-los”.
P6	“De compreender o que os problemas desse assunto pedem. Tem uns que eu sempre erro”.
Pesquisadora: O que é feito para superar essa dificuldade?	
P1	“Para falar a verdade, procuro na internet, no YouTube, em livros. Estou na correria, isso é o que consigo fazer”.
P2	“Infelizmente, no momento, não faço nada. Só me baseio nos livros”.
P3	“Procuro ajudo no YouTube”.

P4	“Sempre procuro assistir vídeo no YouTube, no Instagram tem uns perfis bem legais que ajudam em algum conteúdo da matemática”.
P5	“Difícil essa pergunta. Nunca pensei nisso, sabe? Mas, quando posso, peço ajuda a colegas que são mais familiarizados com a Matemática”.
P6	“Vê bem, quando me deparo com um problema difícil, a primeira coisa que faço é buscar ajuda na internet. Vou direto para o YouTube e procuro vídeos que expliquem como resolver aquela situação específica”.

Fonte: A autora (2023).

Observamos que as participantes reconhecem implicitamente que cada situação combinatória possui sua própria característica e formas de representação. Elas também comentam sobre a dificuldade em distingui-las, porém não mencionam nenhum estudo para lidar com essas dificuldades. Notamos que as participantes reconhecem a necessidade de buscar recursos externos, como a internet, YouTube e livros, para obter ajuda na compreensão da Combinatória, uma vez que relataram ter dificuldade. No entanto, elas não mencionam a busca por processos formativos para superar essas dificuldades. Segundo Vergnaud (1986), a falta de um estudo aprofundado pode resultar em uma compreensão superficial dos conceitos matemáticos, o que leva a dificuldades persistentes. Ele argumenta que é importante dedicar tempo e esforço para estudar os conceitos matemáticos.

Em caso como esse, é importante que o professor que ensina Matemática compreenda as diferentes características dos problemas combinatórios, uma vez que essa compreensão faz parte do **Conhecimento Especializado de Combinatória**. Ao conhecer invariantes e os significados contextuais do problema, o professor torna-se capaz de refletir sobre como entender e de representar esses desafios matemáticos. Os diferentes significados e invariantes dos problemas são elementos fundamentais que precisam ser discutidos na formação do professor, pois refletem diretamente nas suas escolhas e nas suas ações ao ensinar (Vergnaud, 1998). Acreditamos que tais dificuldades podem ser justificadas por lacunas de conhecimento específico na formação de professores, assim como nos estudos na Educação Básica. Dessa forma, a falta desse conhecimento específico do conteúdo interfere nas práticas que propiciam a construção do raciocínio combinatório.

Na próxima seção são realizadas discussões sobre as práticas docentes e o ensino de Combinatória pelas participantes da pesquisa.

7.1.2 Práticas Docentes e Ensino de Combinatória

Nesta seção apresentaremos e discutiremos os dados resultantes da entrevista sobre as práticas docentes e o ensino de Combinatória. Para isso, analisamos as respostas dadas pelas professoras sobre os planos de aula e os materiais de consulta – **questões 7** e **8**, bem como sobre o ensino e as dificuldades dos estudantes com a Combinatória – **questões 6** e **9**, *do* **roteiro de entrevista**. As análises estão pautadas em **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e Estudante**, e **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) e nas situações, nos invariantes e nas representações simbólicas descritos por Vergnaud (1998).

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), os professores precisam da sequência de conteúdo específico para o ensino, que inclui exemplos para começar e outros que devem ser usados para levar o estudante a se aprofundar no conteúdo. O planejamento pode contribuir para uma melhor abordagem dos conteúdos, pois é uma parte importante para a preparação/elaboração da aula. Assim, a preparação e organização do que será trabalhado em sala de aula poderá contribuir para um melhor desenvolvimento dos conteúdos. Como apontado por Ball, Thames e Phelps (2008), a preparação para as aulas faz parte do domínio do **conteúdo e do ensino***.*

No Quadro 9 abaixo apresenta-se informações sobre **Conhecimento do Conteúdo e de Ensino** das participantes da pesquisa.

Quadro 9 – Conhecimento do Conteúdo e de Ensino

Prof.	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
Realiza planos de aulas	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Frequen.	Quinzenal	Diária	Semanal	Semanal	Quinzenal	Quinzenal
Materiais de consulta	Livro didático e internet	Livro didático	Livro didático	Livro didático e paradidático	Livro didático e internet	Livro didático

Fonte: A autora (2023).

É interessante observar que durante as entrevistas, as professoras relataram que elaboram os planos de aulas de modo simples em caderno escolar, a partir de um modelo que contém tema da aula, conteúdo, objetivos, procedimentos, tempo e recursos utilizados. Quando perguntadas com que frequência o planejamento de aula era feito, P1, P5 e P6 disseram quinzenalmente, o que pode indicar que preferem uma visão mais abrangente e detalhada das próximas atividades educativas, permitindo uma melhor organização e estruturação das aulas ao longo do tempo. Por outro lado, P3 e P4 informaram fazer seus planejamentos semanalmente, possivelmente buscando uma maior flexibilidade para adaptar suas aulas às necessidades e desafios específicos que surgem a cada semana. E P2 diariamente, indicando uma abordagem mais imediata e adaptativa, focada em ajustar suas aulas de acordo com o progresso dos estudantes e as ocorridas tranquilamente em sala de aula.

É interessante notar que, em relação ao planejamento da aula do conteúdo de Combinatória, as professoras relataram já terem explorado esse tema com os estudantes em anos anteriores. Suas abordagens eram organizadas com a resolução de problemas sugeridos pelos livros didático, sendo este o principal recurso utilizado nas aulas.

Ao serem questionadas sobre os seus materiais de consulta para a elaboração de seus planos de aula de Combinatória, foi observado que todas utilizavam constantemente o livro didático e algumas delas a internet e os livros paradidáticos como complemento. É importante destacar que, de acordo com Rocha (2011), o livro didático deve ser utilizado como recurso auxiliar na prática docente e não de forma única e exclusiva, ou seja, ele deve ser usado de forma articulada com recursos didático-pedagógicos. Assim, é preciso refletir sobre possibilidades de materiais didáticos a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório, discutindo aspectos relativos aos diferentes conhecimentos que envolvem o ensino e a aprendizagem de Combinatória (Gonçalves, 2014).

É relevante destacar que, mesmo solicitado pela pesquisadora que as professoras trouxessem planos de aula para análise, todas recusaram. Os relatos das professoras indicam alguns detalhes de como as aulas são planejadas por elas (Quadro 10).

Quadro 10 – Transcrição 4: Prática docente

Pesquisadora: Como você planejou as aulas de Combinatória?	
P1	“Eu sigo o que o livro sugere, né!? Então, seleciono os problemas, e resolvo com os meus pequenos. Nada demais, como falei antes, objetivo ‘trabalhar com os problemas de Combinatória’ e no desenvolvimento resolvo no quadro uns problemas e deixo com eles, para responderem e em seguida discutimos”.
P2	“Coloco no caderno de planejamento o objetivo; por exemplo, ‘selecionar os problemas de multiplicação sobre Combinatória’; o tempo, que geralmente são duas a três aulas de 50 minutos; no procedimento, sempre coloco os

	problemas que vou utilizar, escolho uns 8 a 10 probleminhas, do livro mesmo, e minha aula é resolvê-los com alunos. É isso”.
P3	“Seleciono uns problemas, e a ideia é resolver eles juntos em sala. Agora assim, não misturo tudo isso, como você fez aí (referindo-se aos quatro tipos problemas combinatórios apresentados). Faço um de cada vez”.
P4	“Procuro os problemas mais fácies, como os que são menos contextualizados, né!? explico para a sala e vou chamando para o quadro”.
P5	“Eu geralmente sigo as sugestões do livro. Seleciono problemas específicos e trabalho com meus alunos para resolvê-los. A ideia é proporcionar uma abordagem focada nos problemas de Combinatória. Após a resolução no quadro, deixo alguns problemas semelhantes com eles para responderem individualmente. Em seguida, realizamos uma discussão em sala para esclarecer dúvidas e aprofundar o entendimento do tema”.
P6	“Costumo escolher uns problemas, e defino claramente o objetivo da aula no meu caderno de planejamento. Delimito o tempo de aula para abordar os conteúdos de forma mais detalhada. Para tornar a aula mais interativa, seleciono cerca de 4 problemas do livro didático, com um nível de dificuldade adequado para a turma. Durante a aula, resolvemos esses problemas juntos em sala, estimulando a participação ativa dos alunos e esclarecendo suas dúvidas à medida que surgem”.

Fonte: A autora (2023).

Apesar dos relatos sobre os planos das professoras serem mencionados de forma vaga, é possível observar que o planejamento é fundamentado nos livros didáticos adotados e frequentemente envolvem a resolução coletiva de problemas junto aos estudantes. É importante que o planejamento das aulas seja mais abrangente e envolva uma variedade de recursos, metodologias e atividades para estimular o pensamento crítico, a criatividade e a participação ativa dos estudantes em seu próprio processo de aprendizagem. Os professores podem buscar utilizar materiais complementares, projetos de pesquisa, debates, atividades práticas e outras estratégias que enriqueçam o ensino e promovam a autonomia dos estudantes no aprendizado.

A compreensão profunda do conteúdo e dos procedimentos é uma condição necessária para a aprendizagem efetiva, tanto de professores quanto de estudantes. Por meio da troca de saberes e experiências, esse processo de compreensão torna-se significativo e enriquecedor. Assim, é importante que essas trocas sejam acompanhadas de cursos de formação que tragam subsídios necessários para que o professor utilize em sua realidade educacional, em especial no que se refere ao ensino da Combinatória (Teixeira, 2012).

Após a apresentação desses pontos, procedemos a questionar as professoras sobre o seu trabalho com a Combinatória e os conceitos combinatórios pensados em suas turmas.

Quadro 11 – Transcrição 5: Ensino de Combinatória

Pesquisadora: Nas suas aulas de Combinatória os problemas são trabalhados simultaneamente ou separadamente?	
P1	“Juntos, porque têm a questão de a ordem importar ou não, né?! Cada problema de Combinatória tem sua singularidade, aí acho que fica melhor trabalhar junto mesmo”.
P2	“Primeiro com esse problema um, porque os alunos têm mais facilidade. Com todos ao mesmo tempo é quase impossível, porque eles misturam”.
P3	“Separadamente. Até eu mesma me confundo, porque há uns que as ideias são divergentes...aí, me confundo”.
P4	“Costumo trabalhar separadamente, porque acredito que fique mais claro para o aluno”.
P5	“Pensei que eram todos os mesmos problemas, e, não é? .... trabalho de forma separada, então”.
P6	“Olha, isso vai depender da turma. Tem turma que os quatro eu consigo, e outras que tem que ser separado mesmo”.

Fonte: A autora (2023).

Todas as participantes afirmaram possuir experiência em trabalhar com Combinatória. No entanto, quando questionadas, com exceção de P1, elas enfatizaram que abordavam os problemas combinatórios de forma separada, não integrando os quatro tipos de problemas (arranjo, combinação, permutação e produtos de medidas). Além disso, como mencionado anteriormente, essas professoras enfrentavam dificuldades em lidar com as características dos problemas de Combinatória e pareciam não compreender a importância e a possibilidade de trabalhar com os quatro tipos de problemas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Contudo, de acordo com Borba (2016), é fundamental proporcionar oportunidades que trabalhem diferentes situações envolvendo os quatro tipos de problemas combinatórios, afim de que as crianças compreendam as singularidades de cada tipo e considerem os invariantes que os diferenciam entre si. Um planejamento de aula que abarque essas diferentes situações e diferentes abordagens pode contribuir para minimizar ou solucionar as dificuldades dos estudantes em diferenciar problemas e compreender os invariantes combinatórios. Dessa forma, ao confrontar diferentes situações-problemas e discutir suas especificidades, utilizando-se de variadas representações simbólicas, possibilita amplo desenvolvimento conceitual.

Reconhecer os diferentes tipos de problemas e seus invariantes – relações e propriedades – é uma forma de expressar o **Conhecimento Especializado do Conteúdo**. Enquanto P1, diferentes das demais professoras, pareceu compreender os invariantes de ordem dos problemas, enfatizando que algumas situações podem gerar novas possibilidades de respostas ou não, reconhecendo também, que cada problema de Combinatória tem suas características únicas, mesmo não tenha explicitado em sua fala. Dessa forma, diferenciar e conhecer os invariantes dos problemas combinatórios é importante para saber que estratégia será aplicada às variadas situações. Para Vergnaud (1996), é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido. Portanto, torna-se necessário trabalhar com uma classe diversa de problemas para se conhecer as variadas propriedades dos conceitos e se aprofundar nesses problemas.

Na transcrição 5, destaca-se a fala de P5, onde ela expressa: "pensei que eram todos os mesmos problemas", demonstrando sua falta de compreensão de que a Combinatória abrange quatro tipos distintos de problemas: produto de medidas, arranjo, combinação e permutação. É relevante enfatizar que o aspecto mais importante não é apenas saber identificar os tipos de problemas, mas sim compreender seus invariantes, uma vez que cada situação combinatória requer uma forma diferente de raciocínio.

Durante o desenrolar da entrevista, P2 e P6 relataram que em alguns anos letivos não conseguiram trabalhar com a Combinatória, uma vez que este conteúdo sempre estava no final do livro didático, e, consequentemente não tiveram tempo disponível para iniciá-lo, deixando-o para o professor do ano seguinte. Essa situação é preocupante, pois o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento intrínseca às situações combinatórias e seu desenvolvimento se evidencia já nos anos iniciais de escolarização, que progressivamente vai se modificando no sentido de uma maior sistematização e formalização quanto à compreensão dos diferentes tipos de problemas combinatórios (Pessoa; Borba, 2010).

As professoras relataram que os seus estudantes apresentaram várias dificuldades em relação ao conteúdo, destacando, principalmente duas delas. A primeira dificuldade mencionada foi compreender como lidar com os invariantes de ordenação e esgotar todas as possibilidades de respostas. Além disso, dentre os problemas apresentados nos slides – Apêndice A. P2 e P3 relataram que o problema de permutação é considerado mais difícil por seus estudantes.

Por outro lado, P1, P4, P5 e P6 destacaram os problemas de combinação e arranjo foram considerados como os mais difíceis. Por fim, todas as professoras pontuaram que os problemas do tipo produto de medidas são considerados os mais fáceis para os estudantes.

As participantes enfatizaram as dificuldades que seus estudantes têm com a Combinatória, tanto em relação a ordem dos elementos e à necessidade de esgotar todas as possibilidades, como também em todo o desenvolvimento do raciocínio necessário para resolvê-los como destacado. A facilidade só é mencionada por P1 e P2, onde observaram que os estudantes tem dificuldade no problema do tipo produto de medidas, embora não tenham apresentado um motivo específico. As demais enfatizaram que não sabia dizer a facilidade ou dificuldade que os estudantes tinham em um problema (Quadro 12).

Quadro 12 – Transcrição 6: Ensino de Combinatória

Pesquisadora: Quais dificuldades e facilidades – em qual das situações especificamente – seus estudantes têm com a Combinatória e por quê?	
P1	“De saber como resolver os problemas mesmo, de escrever todas as respostas possíveis. Os alunos têm dificuldade em saber se a ordem interfere, por exemplo. Eu percebo que eles têm dificuldade em alguns problemas, uma confusão sobre a ordem, por exemplo. Aí sempre procuro imaginar o que os meus alunos podem ter de dúvidas e tento ver a melhor estratégia para apresentá-los, como a árvore de possibilidade e desenhos, que eles amam. E facilidade que eles têm é o de produto de medidas, porque eles vão lá e multiplicam, né.”.
P2	“Na interpretação dos problemas. A maior dificuldade que vejo deles é listar todas as possibilidades de respostas que um problema tem. A facilidade é no problema como o primeiro (referindo-se ao problema de produto de medidas), mas não sei dizer o motivo e a dificuldade é nos problemas de... esse terceiro (referindo-se ao problema de permutação, apresentado nos slides), porque têm dificuldade de utilizar todas as coisinhas (referindo-se aos elementos do problema) da questão”.
P3	“Dificuldades de saber o que cada problema vem pedindo e listar todas as possibilidades, né!? E eles não tem facilidades em resolver esses problemas. Então acho que a dificuldade é em entender todos os problemas que você apresenta aí (referindo-se ao slide)”.
P4	“Olha, a dificuldade deles é compreender o problema, saber como resolvê-los. Eles têm dificuldade nesse problema 4 (referindo-se ao problema de arranjo). Aí, sobre a facilidade... não sei dizer...acho que no primeiro problema”.
P5	“... eles têm dificuldades na interpretação dos problemas, viu?! Acho que tem dificuldade em todos os problemas... em entender mesmo”.

P6	“Vê bem, a dificuldade está em resolver e apresentar todos as respostas [possibilidades], por exemplo nesse problema 3 [referindo-se ao problema de permutação] eles têm dificuldades de fazer todas as possibilidades. E, sobre a facilidade, é... acho que em nenhuma”.

Fonte: A autora (2023).

Além disso, P1 destacou a importância da antecipação ao abordar os problemas combinatórios, mencionando que ela procura identificar as possíveis dúvidas dos estudantes e busca a melhor estratégia para apresentar os conceitos, como a utilização de árvores de possibilidades e desenhos, que os estudantes demonstram apreciar.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), é necessário que o professor tenha conhecimento sobre os estudantes e a Matemática para prever possíveis facilidades e/ou dificuldades que poderão encontrar ao terem contato com conteúdo matemáticos e também o que irão considerar interessante e motivador durante o processo de aprendizagem. Assim, envolver o conhecimento de erros usualmente cometidos pelos estudantes e a antecipação da superação de dificuldades e/ou eliminação de erros é fundamental para a construção da aprendizagem dos estudantes.

Segundo Borba (2016), para avaliar o desenvolvimento dos estudantes, o professor necessita ter o conhecimento da Combinatória, ou seja, compreender a situação dos problemas combinatórios e, principalmente ter a noção dos invariantes que assemelham e diferenciam cada uma dessas situações – arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano. Além disso, precisa valorizar as distintas representações que seus estudantes poderão utilizar para resolver os problemas. Dessa forma, questionamos as professoras como elas ajudavam/ajudam os estudantes a superar as dificuldades (Quadro 13).

Quadro 13 – Transcrição 7: Ensino de Combinatória

Pesquisadora: E como você os ajuda nessas dificuldades?	
P1	“Tento sempre repetir o que eles não entenderam, chego perto, sabe? Preciso, eu também estudar mais, por exemplo, sobre a Combinatória”.
P2	“Percebi que a motivação é essencial para ajudar os alunos a superar suas dificuldades, na matemática geral. Estou buscando formas de tornar o aprendizado mais envolvente e divertido, incluindo jogos, desafios e competições relacionadas ao tema. Por isso, é importante formações como essa”.
P3	“Sempre busco trazer algo mais lúdico. É importante também participar de cursos relacionados à Matemática e à Combinatória para me manter atualizada e trazer novas perspectivas para a sala de aula”.

P4	"Acho que preciso me esforçar mais. Fazer cursos na área da Matemática, a Combinatória principalmente ...conhecer alguns recursos, pois não conheço nenhum. Acredito que isso".
P5	"Chegando perto do aluno, tirando as dúvidas. Mas, assim, antes de tudo isso, preciso estudar mais sobre a Combinatória".
P6	"Trazendo jogos, algum recurso.... assim, preciso me aperfeiçoar, né?".

Fonte: A autora (2023).

O **Conhecimento do Conteúdo e do Ensino**, que requer uma interação entre a compreensão matemática específica e uma compreensão de questões didáticas que afetam a aprendizagem (Ball; Thames; Phelps, 2008), é um elemento fundamental para o desenvolvimento efetivo do ensino da Combinatória. Nas falas das participantes acima, é destacado a necessidade de todas elas participarem de processos formativos sobre a Combinatória. Concordamos plenamente com essa necessidade, pois o aprimoramento contínuo do conhecimento do conteúdo e das estratégias de ensino é fundamental para garantir uma abordagem pedagógica eficaz e significativa.

Outro ponto relevante nas falas de alguns participantes é a importância de auxiliar os estudantes em suas dificuldades com o uso de recursos, como por exemplo, o jogo. Embora nenhuma delas tenha mencionado anteriormente a utilização de jogos em seus planos de aula, reconhecemos que isso é fundamental para proporcionar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e envolvente.

A principal ação do professor é auxiliar os estudantes a compreenderem e se apropriarem de determinados conhecimentos. Acreditamos que para o professor superar as dificuldades relativas a seu trabalho, ele precisa tomar a postura de investigador na busca de atualizações quanto à evolução de determinados conteúdos e sobre as mudanças pedagógicas, principalmente levando em consideração o que apontam as pesquisas acadêmicas, procurando evidenciar seu interesse nos conteúdos que ensinam.

Diante do exposto, conclui-se que o professor precisa conhecer os invariantes dos problemas combinatórios e trabalhar com o esgotamento de possibilidades, propiciando um maior desenvolvimento dos estudantes na compreensão das situações a partir dos domínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) e a relação com o conteúdo de Combinatória.

A seguir, realizamos a análise do desenvolvimento dos encontros do processo formativo.

8 O PROCESSO FORMATIVO EM COMBINATÓRIA E OS CONHECIMENTOS DOCENTES

Nesta seção, apresentaremos nossas análises, discussões e interpretações dos dados obtidos no primeiro encontro do processo formativo desenvolvido com as professoras que participaram da pesquisa. Neste encontro, buscamos analisar o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** das professoras em relação às diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios, bem como explorar as propriedades invariantes desses conceitos e como eles se manifestam em cada situação.

8.1 PRIMEIRO ENCONTRO: SITUAÇÕES E INVARIANTES COMBINATÓRIOS

Conforme mencionado no capítulo metodológico, no primeiro encontro do processo formativo foram abordadas as diferentes situações combinatórias – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas – e seus invariantes – escolha, ordenação e esgotamento de possibilidades – com cada uma das três duplas participantes da pesquisa - G1 (P1 +P6), G2 (P3 + P5) e G3 (P2 +P4). As situações apresentadas estão disponíveis no Quando 14:

Quadro 14 – Problemas combinatórios: primeiro encontro

Problema 1	Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?
Problema 2	Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?
Problema 3	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?
Problema 4	Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?

Fonte: Adaptado de Gadelha (2020).

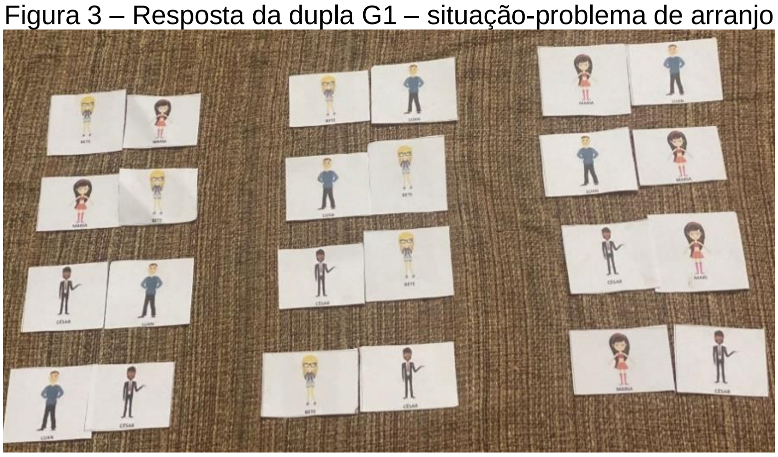
As situações foram resolvidas pelas duplas, usando com material manipulável, sem intervenção da pesquisadora. É importante ressaltar que, para o desenvolvimento do primeiro encontro, foram entregues previamente às participantes uma folha impressa com as situações-problema, materiais manipuláveis (fichas com ilustrações referentes aos elementos dos enunciados nas situações e o protocolo das situações).

A seguir abordamos as diferentes situações combinatórias: problemas de arranjo, combinação, permutação e produto de medidas.

8.1.1 O Problema de Arranjo

Na primeira situação apresentada para as duplas, abordamos um problema de arranjo (Problema 1 – Quadro 14). Nessa situação há dois invariantes: (1) invariante relacionado à escolha de um conjunto maior composto por quatro alunos, no qual são extraídos subconjuntos de dois alunos, um representante e um vice-representante; e (2) invariante relacionado à ordenação dos elementos nos subconjuntos, no qual a ordem dos alunos nos subconjuntos gera novas possibilidades. Assim, nesta situação, o subconjunto formado por “Maria e Bete” é diferente de um subconjunto formado por “Bete e Maria”, já que Maria ser representante é diferente de ser vice-representante (Figura 3).

Figura 3 – Resposta da dupla G1 – situação-problema de arranjo



Fonte: A autora (2023).

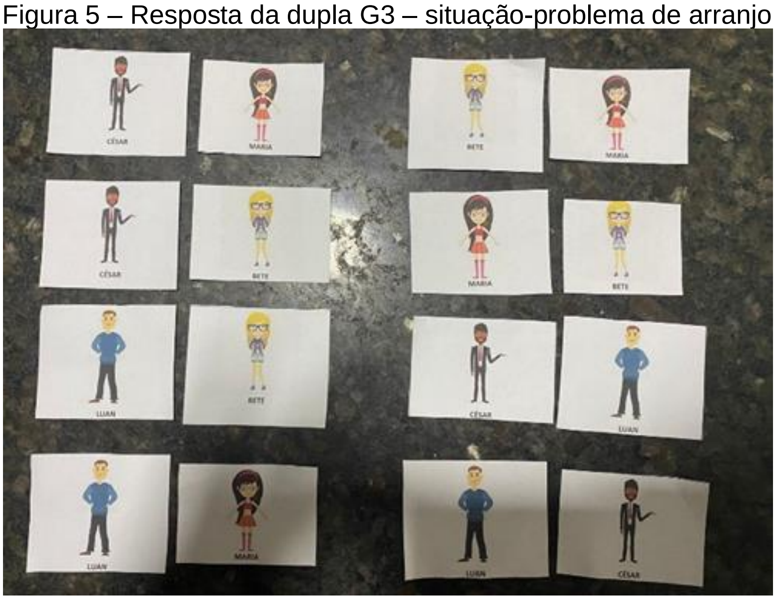
Na resposta do G1, no que se refere a escolha dos elementos, as participantes utilizaram os elementos do conjunto maior para organizar as possibilidades e compreenderam que a ordem dos elementos resulta em novas possibilidades. A dupla empregou a estratégia de sistematização nos agrupamentos e não repetiu possibilidades, conseguindo assim, explorar todas as combinações possíveis e chegar ao esgotamento das possibilidades.

As duplas G2 e G3 fizeram a escolha e a ordem dos elementos do problema 1 adequadamente, porém não esgotaram todas as possibilidades. Os números de possibilidades apresentadas pelos grupos foram inferiores ao número total, logo, não houve o esgotamento (Figura 4 e 5). Desse modo, observamos que G2 e G3 buscaram formas de organizar suas soluções, mas não foram bem sucedidas no controle da sistematização e no esgotamento de todas as possibilidades. Apesar de não terem esgotado todas as possibilidades, as duplas demonstraram reconhecimento dos invariantes ao listar algumas opções, revelando compreensão do processo de resolução.

Figura 4 – Resposta da dupla G2 – situação-problema de arranjo

Fonte: A autora (2023).

Figura 5 – Resposta da dupla G3 – situação-problema de arranjo



Fonte: A autora (2023).

Na resposta do G1, no que se refere a escolha dos elementos, as participantes utilizaram os elementos do conjunto maior para organizar as possibilidades e compreenderam que a ordem dos elementos resulta em novas possibilidades. A dupla empregou a estratégia de sistematização nos agrupamentos e não repetiu possibilidades, conseguindo assim, explorar todas as combinações possíveis e chegar ao esgotamento das possibilidades.

As duplas G2 e G3 fizeram a escolha e a ordem dos elementos do problema 1 adequadamente, porém não esgotaram todas as possibilidades. Os números de possibilidades apresentadas pelos grupos foram inferiores ao número total, logo, não houve o esgotamento (Figuras 4 e 5). Desse modo, observamos que G2 e G3 buscaram formas de organizar suas soluções, mas não foram bem sucedidas no controle da sistematização e no esgotamento de todas as possibilidades. Apesar de não terem esgotado todas as possibilidades, as duplas demonstraram reconhecimento dos invariantes ao listar algumas opções, revelando compreensão do processo de resolução.

Durante a resolução do problema 1, as integrantes das duplas interagiram e trocaram ideias entre si. Durante a discussão com a dupla G1, a princípio, P6 não havia percebido que a ordem dos elementos influenciava nas possibilidades. Então, P1 fez alguns questionamentos para sua parceira: *“*Acho que teria mais possibilidades, você não acha?”, “Se a gente combinar as duplas ‘César e Maria’ e ‘Maria e César’ não seriam respostas diferentes? Como falei, acho que a dupla ‘César e Maria’ é uma opção e ‘Maria e César’ é outra [...]. Vamos formar mais possiblidades para ver?”. Através das indagações feitas por P1, é evidente que P6 começou a considerar o invariante de ordem. Isso foi percebido quando P6 comentou: "Sim, acho que também está faltando ‘Bete e Maria’, ‘Maria e Bete’ [...], se a ordem dos alunos for alterada, teremos uma nova possibilidade."

Durante a resolução do problema pela dupla G3, a participante P4, a princípio, utilizou todos os elementos do problema para formar uma possibilidade, ou seja, “César, Maria, Bete e Luan”. Ao observar tal organização, P2 questionou a escolha dos elementos: “Eu pensei em fazer de dois em dois, porque a questão pede para ser um aluno representante e outro vice, não é? Aí, acho que é para formar duplas com os alunos e não listar todos”. Diante desse questionamento, P2 foi levado a refletir sobre o invariante de seleção de elementos, formulando a seguinte pergunta: ‘Nessa situação, precisamos escolher apenas dois alunos dentre todos’, não é? Vou ficar atento a essa questão de seleção”.

Como mencionado, ao fazer a escolha e a ordem dos elementos do problema 1, G2 não esgotou todas as possibilidades. Assim, após a resolução do problema, a pesquisadora questionou a dupla quanto as suas estratégias sobre os invariantes combinatórios na situação de arranjo:

Quadro 15 – Transcrição 8: Invariantes da situação de arranjo – G2

Pesquisadora:	**Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles ou qual é ele?**
P3 e P5	“Dois”.
Pesquisadora	“Quais são?”
P3	“Representante e vice”.
Pesquisadora	“Isso não seria o subconjunto?”
[nenhuma professora responde]	
Pesquisadora	“Quem seria o conjunto maior? Os alunos, não é?”
P5	“Sim, então quer dizer que na combinação os alunos para serem representante e vice forma o subconjunto, não é?”
Pesquisadora	“É. O conjunto maior, os alunos geram novas possibilidades ao subconjunto, representante e vice-representante”.
P5	“Entendi, agora faz sentido”.
Pesquisadora	“Todos os elementos do conjunto alunos foram utilizados na formação do subconjunto’?”
P3	“Utilizamos todos”.
Pesquisadora	“Não seriam alguns? Porque para formar as possibilidades ao subgrupo, é preciso só de dois elementos, um para representante e outro para vice-representante”.
P3	“Ah, eu não pensei assim. Pensei em todos os elementos que usamos nas combinações de possibilidades. Mas, concordo! A gente só utiliza dois elementos do conjunto maior”.
Pesquisadora	“Isso. De quantas maneiras diferentes pode ser escolhido um representante e um vice-representante?”
P3 e P5	“Seis”.
Pesquisadora	“Por que seis maneiras? A ordem da colocação dos cargos gera novas possibilidades?”
P3	“Porque listamos as duplas ‘Maria e Bete’, ‘César e Maria’, ‘Bete e Luan’, ‘Luan e Bete’ ,‘Maria e César’ e, por fim, ‘Bete e Maria’.”
Pesquisadora	“E “César e Bete”? ‘César e Luan’? Não serão possibilidades distintas?”
P3	“Eita! E tem mais, né? Não prestamos atenção nas outras possibilidades. Deixa a gente encontrar as demais duplas”.
Pesquisadora	“Certo”.
[depois de 2 minutos]	
P5	“São dez possibilidades diferentes”.
P3	“Eu achei doze no total. Fora esses que a gente já falou, ficaram faltando: ‘César e Bete’, ‘César e Luan’, ‘Maria e Luan’, ‘Bete e César’, ‘Luan e César’ e ‘Luan e Maria’”.
P5	“Eu esqueci de ‘Maria e Luan’”.
Pesquisadora	“Exato. Escolher os alunos ‘Maria e Luan’ é a mesma coisa que escolher os alunos ‘Luan e Maria’? Isso gera novas possibilidades”.
P3	“Gera sim. Porque são posições de cargos diferentes, né?”.

P5	“Gera. Se César é representante e Bete a vice, não é a mesma coisa que Bete ser a representante e César o vice. Não sei se me entenderam”.
Pesquisadora	“Entendi sim. É dessa forma. Nesse tipo de situação, a ordem da colocação dos cargos gera novas possibilidades”.

Fonte: A autora (2023).

Na transcrição 8, observa-se que os questionamentos feitos pela pesquisadora incentivaram a dupla G2 a refletirem sobre os conceitos de escolha e ordem no problema de arranjo. Isso levou à consideração da importância da ordem e da necessidade de explorar todas as possibilidades.

Ao identificarem e reconhecerem os invariantes do problema 1, observa-se indícios do **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, conforme ressaltado por Ball, Thames e Phelps (2008). Os resultados são indicativos de que as participantes estão mobilizando conhecimentos no campo da Combinatória.

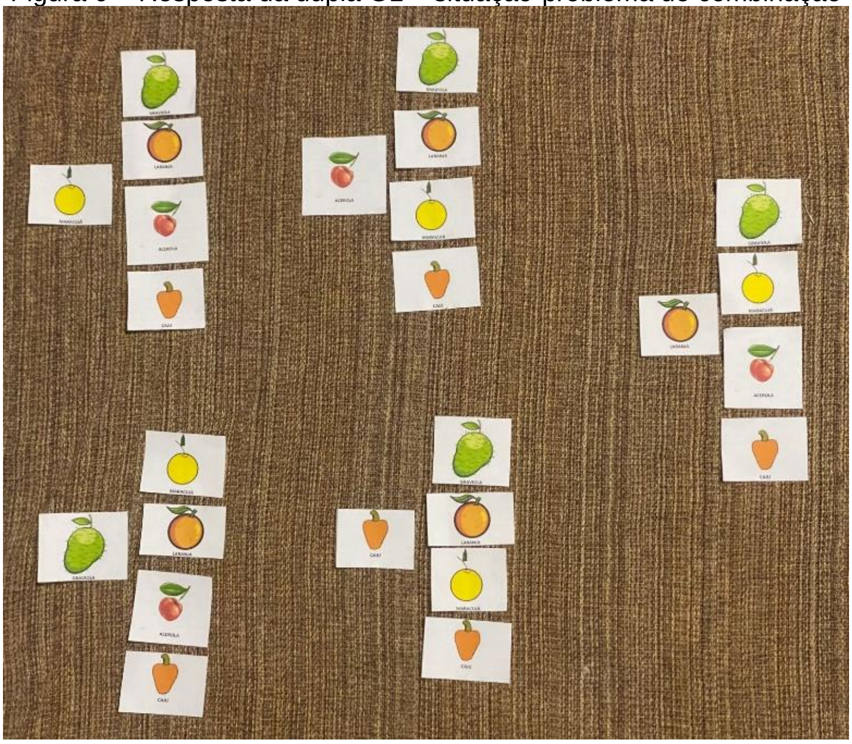
No entanto, apesar de reconhecerem os invariantes, as participantes não indicaram alguma estratégia de sintetização das possibilidades para atingir o esgotamento completo. Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) ressaltam que a falta de uma resolução sistemática dos casos possíveis pode ser um obstáculo para não alcançar o esgotamento das possibilidades, sendo um dos erros mais comuns durante a resolução de problemas combinatórios. Esse aspecto pode comprometer a precisão e a abrangência das respostas encontradas. Sendo assim, é indispensável que as participantes desenvolvam estratégias para sistematizar a resolução dos problemas combinatórios, garantindo que todas as possibilidades sejam consideradas e evitando erros decorrentes de abordagens incompletas. O uso de métodos organizados e aprofundados para explorar as diversas combinações e arranjos são fundamentais para aprimorar a compreensão e alcançar o sucesso na resolução desses tipos de problemas.

8.1.2 O Problema de Combinação

Após a situação de arranjo, foi apresentado a de combinação (Problema 2 – Quadro 14). Nessa situação-problema, o primeiro invariante está relacionado à escolha de elementos a partir de um conjunto maior composto por cinco frutas do qual são extraídos subconjuntos de duas frutas. O segundo invariante está relacionado à ordenação dos elementos. A ordem das frutas nos subconjuntos não influência nas possibilidades, pois ao preparar um suco com duas frutas, a mudança na ordem não gerará um suco diferente. Por exemplo, o suco feito pelo subconjunto “acerola e laranja” é o mesmo que o do subconjunto “laranja e acerola”.

As respostas dos grupos estão dispostas nas Figuras 6, 7 e 8.

Figura 6 – Resposta da dupla G1 – situação-problema de combinação



Fonte: A autora (2023).

Figura 7 – Resposta da dupla G2 – situação-problema de combinação

Fonte: A autora (2023).

Figura 8 – Resposta da dupla G3 – situação-problema de combinação

Fonte: A autora (2023).

Nas soluções apresentadas, observa-se que as duplas não encontraram dificuldades em relação ao invariante de escolha dos elementos da situação. No entanto, em relação à ordem dos elementos, percebe-se que as duplas não compreenderam a relação de ordem para a situação de combinação, extrapolando o total de possibilidades. Ao responderem a situação de combinação, elas agruparam os elementos em posições diferentes, não percebendo que a ordem dos elementos não geraria novas possibilidades.

Na organização das possibilidades, G1 e G3 fixaram um elemento e o combinaram com os demais, considerando com as repetições outra possibilidades (Figuras 4 e 5). G1, provavelmente por equívoco, repetiu uma possibilidade com a mesma fruta (caju e caju). Por sua vez, a dupla G2 colocou os elementos lado a lado formando os pares de frutas, invertendo na possibilidade seguinte a ordem dos elementos (Figura 6).

Consideramos que possivelmente as respostas das duplas foram influenciadas pela resolução da situação de arranjo trabalhada anteriormente. Após cada dupla apresentar a resolução do problema, a pesquisadora conversou sobre as propriedades invariantes do problema.

A seguir, apresentamos fragmentos do diálogo com a dupla G1 (P1 +P6) com a pesquisadora sobre os invariantes combinatórios na situação de combinação:

Quadro 16 – Transcrição 9: Invariantes da situação de arranjo – G1

Pesquisadora:	**Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles ou qual é ele?**
P1	“Um. O conjunto maior, as frutas”.
Pesquisadora	“Perfeito. Poderão ser constituídos subconjuntos de frutas a partir deste conjunto maior de frutas?”.
P6	“Sim. A gente utiliza duas frutas para cada combinação. Me lembrei da situação antes dessa [referindo-se à situação de arranjo], em que não utilizamos todos os alunos, né?”.
Pesquisadora	“Isso. Essa é uma das características que esse problema [referindo-se à situação de combinação] tem com a situação anterior a essa [referindo-se à situação de arranjo]”.
P1	“Eu tinha percebido isso também”.
Pesquisadora	“Perfeito. E quantos subconjuntos diferentes podemos ter nesta situação?”.
P1 e P6	“Vinte”.
Pesquisadora	“Por quê vinte?”.
P6	“Só fazer as combinações de acerola e caju, acerola e laranja, acerola e graviola, acerola e maracujá, caju e acerola [...]”.
P1	“É. No total são vinte combinações que achamos”.
Pesquisadora	“Uma das possibilidades de resposta de vocês foi acerola e laranja, certo?”.
P1 e P6	“Certo”.
Pesquisadora	“A ordem dos sabores das frutas que uma pessoa poderá escolher na barraca gera novas possibilidades?”
P6	“Acho que sim”.
P1	“Por quê?”.
[nenhuma professora respondeu]	
Pesquisadora	“Escolher acerola e laranja é a mesma coisa que escolher laranja e acerola?”.
P1	“Não acredito! [surpresa]. Não prestamos atenção na ordem, né?! Vai ser o mesmo suco?”.
Pesquisadora	“Isso”.
P6	“Ainda não entendi. Se eu escolher acerola e laranja ou laranja e acerola são possibilidades diferentes sim. No outro problema [referindo-se ao problema de arranjo] a gente viu que era assim, tinha isso de mudar e ter outras possibilidades [referindo-se a ordem dos elementos do problema de arranjo]”.
Pesquisadora	“Mas, no problema que trabalhamos anteriormente [referindo-se ao problema de arranjo], se escolhermos Maria como representante e Bete como vice-representante a ordem gerava uma nova possibilidade, porque são cargos diferentes, entende?”.
P6	“Isso daí sim”.
Pesquisadora	“Agora, nesse problema a ordem não influencia. Porque se prepararmos um suco com acerola e laranja ou com laranja e acerola vai ser o mesmo suco. Não é não?”
P6	“Ah, então se mudar a ordem das frutas não seria um novo suco, não é?”.

P1	“Isso, P6. Se a gente faz um suco de laranja e caju, por exemplo, é a mesma coisa de fazer um mesmo suco de caju e laranja. Entendeu?”.
P6	“Agora sim. No problema anterior [referindo a situação de arranjo] a ordem interferia, já neste não interfere”.
Pesquisadora	“Isso mesmo, P1! Nesse tipo de situação a ordenação dos elementos não proporciona possibilidades distintas, ok!”.
P1 e P6	“Ok”.
Pesquisadora	“Então, quantas possibilidades teremos nesta situação?”.
[alguns minutos depois]	
P6	“Seriam dez possibilidades de respostas, não é? Fiz aqui com as fichas”.
P1	“Também fiz. Olha aqui [mostrando as combinações das frutas com as fichas], são dez possibilidades”.
Pesquisadora	“É. São dez possibilidades diferentes”.

Fonte: A autora (2023).

Na transcrição a pesquisadora fez questionamentos visando que as participantes percebessem que, nesse problema, a ordem dos elementos não gera combinações distintas. Ao serem questionadas, as participantes perceberam os invariantes do problema de combinação: escolha (dois entre cinco elementos para formar combinações para o suco), ordem (a posição dos elementos não gera possibilidades distintas) e esgotamento (levantamento de todas as possibilidades). Assim, o diálogo com a pesquisadora possibilitou às participantes refletirem sobre aspectos-chave do problema de combinação.

Durante os questionamentos apresentados na transcrição 9, P6 conseguiu identificar os invariantes relacionados à situação de combinação, como os de escolha e ordem, ao compará-los com a situação analisada anteriormente, mesmo que inicialmente tenha sugerido que a ordem tinha influência em ambas as situações. De forma semelhante, estudos anteriores realizados por Montenegro (2018), Gadelha (2020) e Silva e Bôas (2019) realizados com estudantes revelam um desempenho insuficiente em problemas de combinação. Essa dificuldade é atribuída à compreensão limitada dos invariantes de ordem e escolha presentes nesse tipo de problema combinatório, no qual a alteração na ordem de apresentação dos elementos não resulta em novas possibilidades, sendo necessário eliminar casos duplicados.

Assim, de maneira semelhante aos estudantes, as professoras participantes deste estudo apresentaram dificuldades em esgotar todas as possibilidades, enquanto em outras ocasiões ultrapassaram esse número ao considerar que a variação na ordem dos elementos geraria novas alternativas.

Em relação à complexidade enfrentada pelos docentes, Assis (2014) também discute a dificuldade em discernir a ordenação dos elementos em situações de combinação e arranjo. No entanto, ressalta que essa dificuldade pode ser superada por meio de processos formativos, destacando os notáveis avanços na compreensão desse aspecto por parte dos participantes de sua pesquisa.

8.1.3 O Problema de Permutação

A terceira situação-problema apresentada foi a de permutação (Problema 3 - Quadro 14). Nessa situação, a primeira invariante está relacionada à escolha de elementos de um conjunto maior de três objetos, do qual são extraídos subconjuntos contendo todos os elementos do conjunto maior (bola de futebol, troféu e porta-retrato); e o segundo invariante está relacionado à ordenação dos elementos, ou seja, a ordem dos objetos nos subconjuntos gera novas possibilidades, uma vez que o subconjunto formado por “bola de futebol, troféu e porta-retrato” é diferente do subconjunto formado por “porta-retrato, troféu e bola de futebol”. As respostas dos grupos estão dispostas as Figuras 9, 10 e 11.

Figura 9 – Resposta da dupla G1 – situação-problema de permutação

Fonte: A autora (2023).

Figura 10 – Resposta da dupla G2 – situação-problema de permutação

Fonte: A autora (2023).

Figura 11 – Resposta da dupla G3 – situação-problema de permutação

Fonte: A autora (2023).

Nas resoluções apresentadas pelas duplas, observa-se que G1, G2 e G3 não encontraram dificuldades quanto ao invariante de escolha dos elementos da situação-problema. Já na ordenação, houve dificuldade por parte das duplas G2 e G3 que não esgotaram todas as possibilidades, mas mesmo sem esgotar todas as possibilidades, as G2 e G3 compreenderam o invariante de ordem dos elementos. O que difere a resposta de G1 com as das demais duplas é a sistematização dos elementos ao determinar as possibilidades.

Durante a resolução dos problemas, as integrantes das duplas conversaram entre si. Ao analisarmos o momento de discussão do problema 3 pela dupla G3, observamos que P4 incialmente pensou em utilizar, do conjunto dos objetos, apenas dois elementos, fazendo agrupamento como "bola de futebol e troféu". No entanto, durante a discussão P2 questionou sua dupla sobre a escolha dos elementos, indagando se não deveriam ser utilizados todos os elementos do conjunto dos objetos. Nesse momento, fazendo o uso das fichas, P2 compartilhou as suas possibilidades com os três elementos do conjunto. Esse questionamento e imagem levaram P4 a refletir e concordar com a resposta sobre o invariante de escolha. Provavelmente o equívoco apresentado por P4 venha da ideia de seguir o padrão das respostas dadas nos problemas anteriores (1 e 2), pois eram utilizados dois elementos dos conjuntos para formar o subconjunto.

Esse tipo de comportamento é típico em aulas tradicionais de Matemática, no qual o professor apresenta um exemplo e os demais problemas/exercícios são resolvidos da mesma forma.

Como já explicado anteriormente, após o término da discussão do problema as duplas foram questionadas pela pesquisadora. A seguir, apresentamos um fragmento do diálogo da dupla G3 (P2 + P4) com a pesquisadora.

Quadro 17 – Transcrição 10: Invariantes da situação de arranjo – G3

Pesquisadora:	**Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles ou qual é ele?**
P4	"Os objetos".
P2	"Um".
Pesquisadora	"Isso. E todos os objetos foram utilizados lado a lado na prateleira?".
P4	"Eu pensava que não, mas P2 me explicou e fez sentido. São utilizados todos os objetos".
P2	"Eu pensei o seguinte: quando fazemos uma combinação, iremos utilizar a bola de futebol, o troféu e o porta-retrato. Então, acho que são utilizados todos".
Pesquisadora	"Isso. Nessa situação todos os elementos são utilizados para a formação dos subconjuntos. De quantas formas diferentes pode-se organizar os três objetos na prateleira?".
P2	"Pensamos em três".
P4	"Isso".
Pesquisadora	"Quais são as que vocês pensaram?".
P2	"Bola de futebol, troféu e porta-retrato; Troféu, porta-retrato e bola de futebol; e porta-retrato, troféu e bola de futebol".
Pesquisadora	"A ordem da organização gera novas possibilidades??".
P2	"Acho que sim".
P4	"Também acho".
Pesquisadora	"Por quê?".
[nenhuma professora respondeu]	

Pesquisadora	“Escolher, nessa ordem, bola de futebol, troféu e porta-retrato é a mesma coisa que escolher porta-retrato, troféu e bola de futebol?”.
P2	“Não é a mesma coisa. Por isso que falamos que temos três possibilidade”.
Pesquisadora	“Mas, será que temos só essas três possibilidades aí? [referindo-se as fichas com as possibilidades formadas pela dupla]. Por exemplo, vocês não falaram, mas podemos ter uma outra possibilidade, como: troféu, bola de futebol e porta-retrato”.
P4	“Verdade. Deixa a gente ver aqui [referindo-se ao uso das fichas]”.
[alguns minutos depois]	
P2	“São quatro, não é?”.
Pesquisadora	“Quais são as possibilidades?”.
P4	“Eu achei cinco”.
Pesquisadora	“Tentem responder com as fichas”.
P4	“Calma! São seis possibilidades: Bola de futebol, troféu e porta-retrato; Porta-retrato, troféu e bola de futebol; Troféu, prota-retrato e bola de futebol [...]”.
Pesquisadora	“Isso mesmo!”.

Fonte: A autora (2023).

Observa-se no quadro anterior, que os questionamentos propostos pela pesquisadora possibilitaram reflexões e a dupla G3 identificou os invariantes do problema de permutação: escolha (o uso de todos os elementos para formar combinações) e ordem (a posição dos elementos gera possibilidades distintas). Em relação ao levantamento de todas as possibilidades, a dupla inicialmente não havia esgotado todas, no entanto, ao ser questionada conseguiu enumerar um número maior de combinações, chegando mais próxima ao número total de possibilidades.

O exposto indica a relevância de questionamentos direcionados para estimular a reflexão sobre os invariantes e incentivar o pensamento crítico durante o processo de resolução. Tal indicativo está em consonância com os achados da pesquisa de Silva e Bôas (2019), que ressaltam a importância das reflexões e do levantamento completo das possibilidades.

Posteriormente, após a pesquisadora solicitar que as participantes fizessem uso do material manipulado, elas conseguiram chegar ao esgotamento de possibilidades. Assim, observa-se a relevância dos materiais manipuláveis, como as fichas, para auxiliar as participantes a alcançarem resposta completas e precisas na resolução de problemas combinatórios. Conforme Gadelha (2020), o uso de materiais manipuláveis e uma das ferramentas que possibilita a compreensão e exploração das possibilidades combinatória.

8.1.4 O Problema de Produto de Medidas

A quarta e última situação-problema apresentada no primeiro encontro foi a de produto de medidas (Problema 4 – Quadro 14). No caso específico desse problema temos dois conjuntos distintos - um com sabores de sucos e outro com os tamanhos dos copos – que devem ser combinados para construir um novo conjunto. Nesse problema, o primeiro invariante está relacionado à escolha de elementos a partir dos dois conjuntos diferentes e o segundo, está relacionado à ordenação dos elementos escolhidos. A ordem dos sabores de sucos e tamanhos dos copos nos subconjuntos não gera novas possibilidades, ou seja, um subconjunto formado por “suco de caju e tamanho de copo pequeno” é o mesmo do subconjunto formado por “tamanho do copo pequeno e suco de caju”.

As respostas dos grupos foram as seguintes (Figuras 12, 13 e 14):

Figura 12 – Resposta da dupla G1 – situação-problema de produto de medidas

Fonte: A autora (2023).

Figura 13 – Resposta da dupla G2 – situação-problema de produto de medidas

Fonte: A autora (2023).

Figura 14 – Resposta da dupla G3 – situação-problema de produto de medidas

Fonte: A autora (2023).

As respostas dos grupos indicam que eles compreenderam corretamente os invariantes de escolha ao selecionar dois os elementos dos conjuntos (frutas e copos) para formar um novo grupo. Além disso, perceberam que o invariante de ordem dos elementos não apresentava influência na resposta final, pois não repetiram possibilidades com os mesmos elementos.

As duplas G1 e G2 chegaram ao esgotamento de possibilidades, formando doze maneiras para escolher um suco de sabor e tamanho de copo diferente, sem repetições. Acreditamos que a facilidade das duplas G1 e G2 em resolver adequadamente esse problema seja pelo trabalho mais frequente com esse tipo de situação e também pelo processo de sistematização realizado. A elaboração de processo de sistematização ao longo da resolução de problemas combinatórios é um indicativo de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A dupla G3 apresentou apenas oito possibilidades, das quais duas estavam repetidas. Nesse caso, acredita-se que o equívoco pode estar relacionado a um processo pouco sistematizado ou mesmo não tenha compreendido completamente como formar as combinações sem repetir elementos. Segundo Pessoa e Borba (2010), a falta de compreensão dos invariantes combinatórios pode ter um impacto relevante na resolução desses tipos de problemas, afetando consideravelmente a capacidade de explorar todas as possibilidades envolvidas nas situações combinatórias.

Como na resolução dos problemas anteriores, os integrantes das duplas dialogaram entre si. No momento de discussão do problema 4 pelo G2, P5 inicialmente apresentou dúvidas quanto se a ordem dos elementos gerava possibilidades distintas, como: *"*As minhas fichas são insuficientes para fazer as possibilidades. Está faltando, não é?" *e "*Vai dar mais de vinte possibilidades?*"*. Em diálogo com P3, ambas foram levadas a refletirem sobre a ordem dos elementos nessa situação, isto é, que nesse caso não há diferença quanto à ordem de escolha.

Após a discussão entre a dupla, a pesquisadora fez alguns questionamentos: apresentar a resolução do problema, discutimos as suas propriedades invariantes (Quadro 18).

Quadro 18 – Transcrição 11: Invariantes da situação de arranjo – G3

Pesquisadora:	**Neste problema há quantos conjuntos?**
P3 e P4	"Dois".
Pesquisadora	"Quais são?".
P4	"Sucos e os tamanhos dos copos, né?".
Pesquisadora	"Isso mesmo" Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos dos copos são diferentes?".
P4	"Sim".
P2	"São sim".
Pesquisadora	"Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos de copos, ao serem combinados, podem construir um novo conjunto. Quantos conjuntos poderão ser formados?".

P4	“São oito”.
Pesquisadora	“Quais seriam?”.
P2	“Morango com copo pequeno, morango com copo grande, uva com copo pequeno e [...]”.
Pesquisadora	“E morando com o como médio? E porque caju está com o copo grande duas vezes?”.
P4	“Eita, a gente errou!”.
P2	“Acabou que repetimos e esquecemos mais opções, né!?”.
Pesquisadora	“A ordem dos sabores dos sucos e de tamanhos dos copos gera novas possibilidades de combinação?”.
P4	“Não gera”.
Pesquisadora	“Por quê?”.
P4	“Porque será a mesma combinação. Eu já usei, são doze possibilidades, né?!”.
P2	“Se eu pedir um suco de laranja com o copo pequeno ou pedir um copo pequeno com o suco e laranja, para mim será a mesma coisa [...], são doze possibilidades”.

Fonte: A autora (2023).

As falas apresentadas na transcrição 11 novamente destacam reflexões das participantes a partir dos questionamentos feitos pela pesquisadora. Ao serem indagadas sobre as possibilidades de combinação entre o morango e o copo médio, bem como entre o caju e o copo grande, a dupla percebeu tais os equívocos e também, que não haviam esgotado todas as possibilidades de combinações.

Como mencionado, por meio da interação com a pesquisadora, as professoras tiveram a oportunidade de revisitarem suas respostas e perceberem que haviam mais possibilidades que as indicadas por eles inicialmente. Esse tipo de abordagem incentiva a busca por soluções mais precisas. Esses resultados estão em consonância com a visão de Vergnaud (1996), que enfatiza a importância de discutir e refletir a variedade de situações, compreender as propriedades intrínsecas das situações combinatórias e trabalhar com diversas representações simbólicas, uma vez que são elementos fundamentais para a construção conceitual. Segundo o autor, estudo do desenvolvimento e funcionamento de um conceito, durante o processo de aprendizado ou sua aplicação, requer a consideração simultânea desses três aspectos – situações, invariantes e representações simbólicas.

Cabe destacar que, de acordo com Borba e Pessoa (2010), esse tipo de situação-problema geralmente é o único tipo de problemas combinatórios explicitamente trabalhados desde cedo na escolarização básica. Dessa maneira, é importante que sejam considerados em sala de aula os variados significados e distintas relações e propriedades que compõem as situações combinatórias para que sejam aproveitadas da melhor forma possível, no sentido de auxiliar os estudantes no desenvolvimento desse raciocínio (Borba; Pessoa, 2010).

Ao depararem-se com diversas situações combinatórias, as professoras foram estimuladas a refletir sobre as propriedades e invariantes dos problemas. Além disso, o uso do material manipulável, como fichas e outras ferramentas, foi fundamental para a experimentação de diferentes arranjos e combinações, a visualização e a compressão das diferentes possibilidades; bem como para o desenvolvimento de sistematização ao organizar as possibilidades de respostas.

É importante ressaltar que o diálogo estabelecido entre as professoras de cada duplas na resolução dos problemas e delas, com pesquisadora no final das resoluções, contribuiu para que ideias sobre a combinatória fossem desenvolvidas, equívocos fossem superados e as situações combinatórias fossem melhor compreendidas.

As respostas das duplas indicam que as professoras possuem dificuldades em identificar o invariante de ordem nos problemas de arranjo e combinação, provavelmente devido às semelhanças conceituais, já que ambos envolvem a escolha de elementos de um conjunto. No entanto, a diferença principal reside na relevância da ordem dos elementos selecionados: nos problemas de arranjo, a ordem é importante, enquanto nos problemas de combinação, a ordem é irrelevante. Assim, a identificação de invariantes de escolha e ordem em cada situação pode contribuir para que as professoras compreendam melhor as características fundamentais desses problemas combinatórios.

Dessa forma, ao longo do encontro as professoras demonstraram mais confiança em demonstrar seus conhecimentos de Combinatória e perceberam que a utilização de materiais manipuláveis e a abordagem colaborativa foram fundamentais para o desenvolvimento de Combinatória.

Em suma, consideramos que o trabalho envolvendo a exploração dos diferentes problemas combinatórios, a utilização de materiais manipuláveis e as discussões em duplas e com a pesquisadora propiciou às participantes da pesquisa reflexões relacionadas aos conceitos combinatórios, as propriedades invariantes desses conceitos e como eles se manifestam em cada situação. As respostas indicam que o **Conhecimento Especializado do Conteúdo de Combinatória** foi mobilizado no trabalho proposto, no entanto, ainda oscilante.

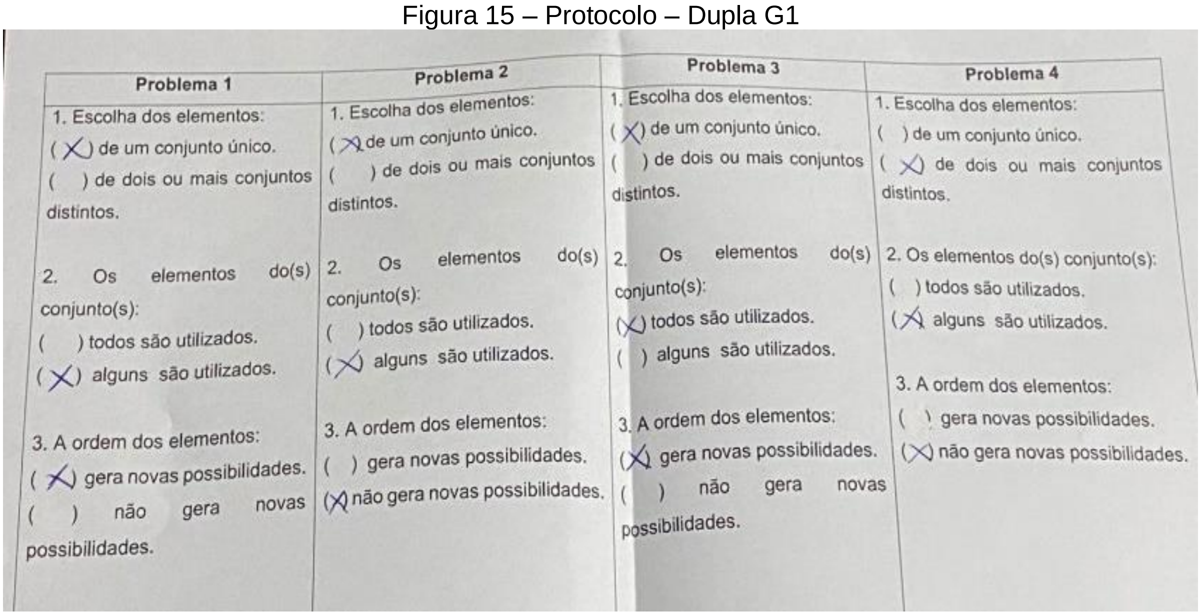
8.2 PROTOCOLOS RELACIONADOS AOS INVARIANTES DAS SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Após discutirem os quatro tipos de situações combinatórias, ainda no primeiro encontro, as duplas foram solicitadas a preencherem um protocolo com as particularidades de cada tipo de situação, ou seja, os aspectos estruturais de cada tipo de problema – os invariantes existentes. De certo modo, o protocolo tinha a função de um registro estruturado das principais características e invariantes de cada tipo de problema combinatório possibilitando que as participantes comparassem as características de cada tipo de situação - arranjo, combinação, permutação e produto de medidas e observassem semelhanças e diferenças.

8.2.1 Os Protocolos

As respostas dos protocolos preenchidos por G1 (P1 + P6), G2 (P3 + P5) e G3 (P2 + P4) sobre as características – escolha e ordenação – das quatro situações-problemas apresentadas foram as seguintes (Figura 15, 16 e 17):

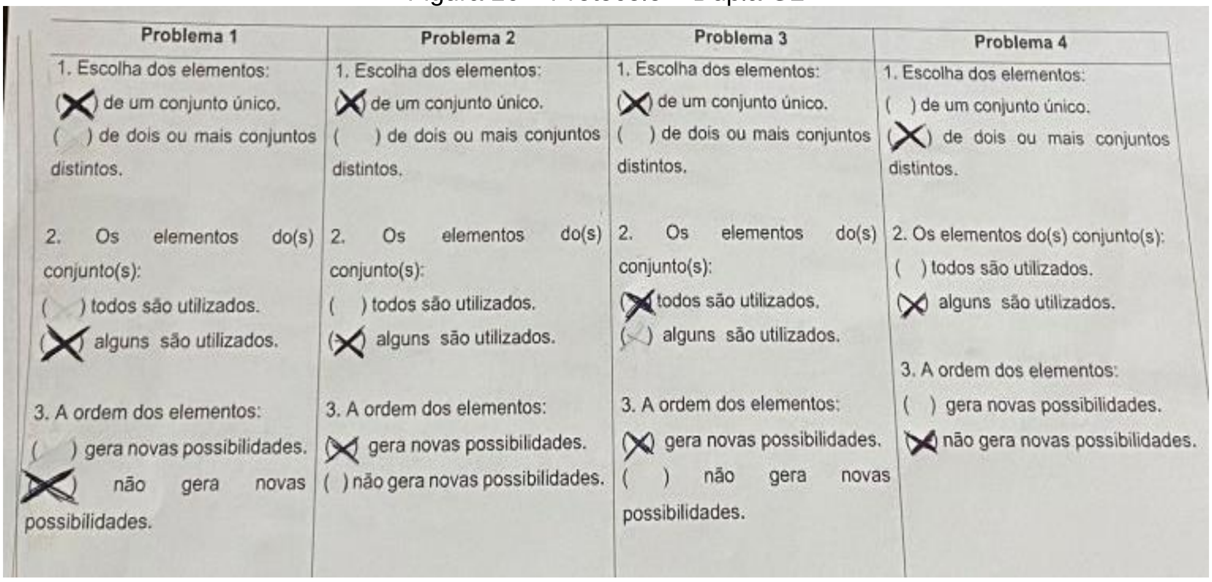
Figura 15 – Protocolo – Dupla G1



Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. (X) de dois ou mais conjuntos distintos.
2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): (X) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.
3. A ordem dos elementos: (X) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (X) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: (X) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (X) não gera novas possibilidades.

Fonte: A autora (2023).

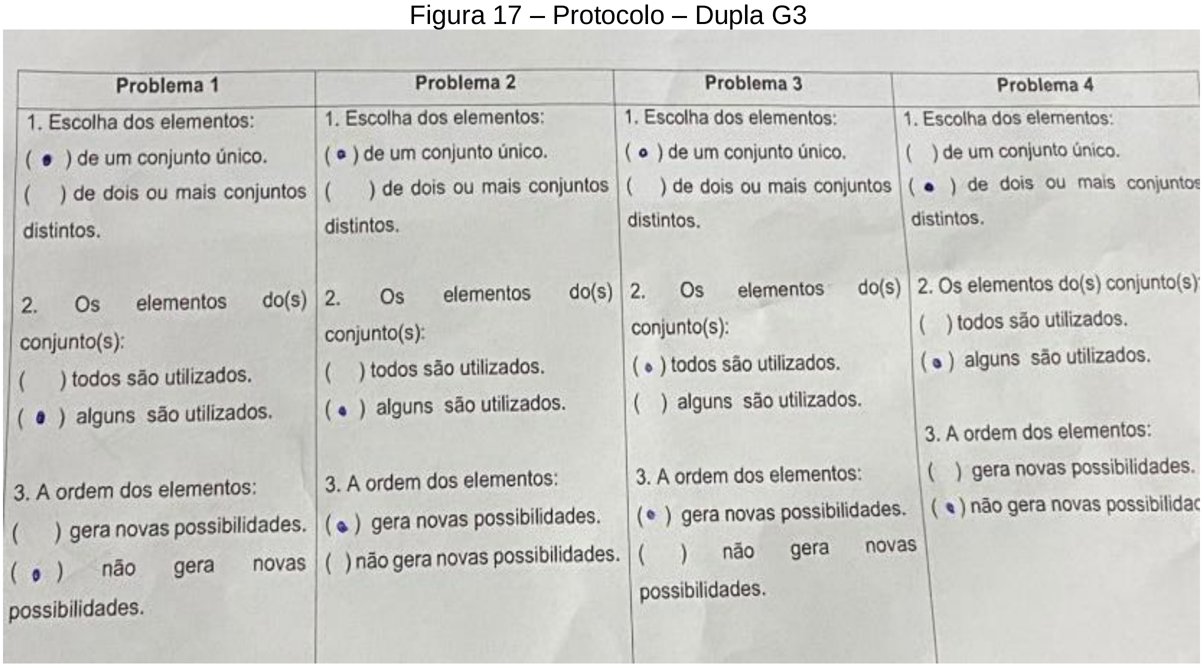
Figura 16 – Protocolo – Dupla G2



Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (X) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. (X) de dois ou mais conjuntos distintos.
2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): (X) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (X) alguns são utilizados.
3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (X) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: (X) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: (X) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (X) não gera novas possibilidades.

Fonte: A autora (2023).

Figura 17 – Protocolo – Dupla G3



Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
1. Escolha dos elementos: (•) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (•) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: (•) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. (•) de dois ou mais conjuntos distintos.
2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (•) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (•) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): (•) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. (•) alguns são utilizados.
3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (•) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: (•) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: (•) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. (•) não gera novas possibilidades.

Fonte: A autora (2023).

Optamos, quanto aos protocolos, por analisar os problemas e não os grupos. Nos protocolos do problema 1 (Situação de arranjo – quadro 14) observa-se que todas as duplas indicaram que se caracteriza por “um conjunto único”, no qual “alguns elementos são utilizados”. Quanto a ordem dos elementos, G1 marcou que a ordem dos elementos “gera novas possibilidades” e G2 e G3 que “não gera”. As respostas de G2 e G3 suscitam possíveis dúvidas quanto à ordem dos elementos em problemas de arranjo.

De forma semelhante a anterior, na situação de combinação (Problema 2 – Quadro 14), as duplas indicaram “um conjunto único” e que “alguns elementos são utilizados”. No item referente a ordem dos elementos, as duplas G2 e G3 não reconheceram que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Assim como no protocolo do problema 1, as respostas das duplas G2 e G3 também indicam possíveis dúvidas quanto à ordem dos elementos, neste caso, em problemas de combinação. Esse equívoco pode ter sido influenciado por semelhanças conceituais entre os problemas de arranjo e combinação, ambos envolvendo a escolha de elementos de um conjunto. A falta de percepção sobre o invariante de ordem também pode ter levado as duplas G2 e G3 a não esgotarem todas as possibilidades corretamente na resolução dos referidos problemas.

Rocha (2011) trouxe à tona em sua pesquisa a constatação de desafios enfrentados por professores na identificação da propriedade de diferenciação presente nos agrupamentos, como indicado pelas estruturas dos problemas envolvendo arranjo e combinação. Essa característica pode também ser interpretada como um obstáculo no processo de resolução de problemas combinatórios, evidenciando a complexidade que os estudantes enfrentam ao assimilar os conceitos essenciais da Combinatória, tal como destacado nos estudos de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997).

Nos protocolos da situação de permutação (Problema 3 – Quadro 14), as duplas identificaram adequadamente as características desse problema: “os elementos são escolhidos de um conjunto único”, “todos os elementos do conjunto são utilizados” e “a ordem dos elementos gera novas possibilidades”. Na resolução dos problemas eles reconheceram que todos os elementos do conjunto deveriam ser utilizados e em diferentes ordens para formar as permutações. Por exemplo, para formar todas as permutações com os objetos bola de futebol, troféu e porta-retrato, os três objetos devem ser usados e quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas.

Por fim, nos protocolos da situação de produtos e medidas (Problema 4 - Quadro 14), as duplas indicaram que esse problema se caracteriza “por dois ou mais conjuntos distintos”, que “alguns elementos do conjunto são utilizados” e que “a ordem dos elementos não gera novas possibilidades”. As respostas das participantes nos protocolos estão adequadas. Tais resultados se alinham com as investigações de Pessoa (2009) e Lima (2018), que apontam para uma maior facilidade na resolução de problemas relacionados ao produto de medidas quando comparados a outras situações combinatórias. Isso é atribuído, em parte, à ampla abordagem desses problemas desde dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que também é influenciado pela relação direta com a operação de multiplicação.

Consideramos que o uso de materiais manipuláveis e as interações promovidas durante a resolução dos problemas foram essenciais para orientar as duplas na análise das características de cada problema combinatório. No entanto, destaca-se ainda dificuldades relacionadas à ordem dos elementos em problemas de arranjos e combinação. Nesse contexto, destaca-se a importância da compreensão da relação de cada invariante com cada categoria de situação. Para atingir esse grau de entendimento, é essencial abordar uma diversidade de situações distintas, como apontado por Vergnaud (1986).

Outro aspecto relevante foi a efetiva utilização dos materiais manipuláveis durante o encontro. Eles desempenharam um papel crucial ao ajudar as participantes a compreenderem os diferentes tipos de situações combinatórias (arranjo, combinação, permutação, produto de medidas), bem como os invariantes (escolha, ordenação e esgotamento de possibilidades), suas relações e a representação das soluções para cada problema. O exposto está em consonância com o estudo de Gadelha (2020), que destaca como a visualização concreta e o uso de materiais manipuláveis auxiliam na compreensão dos invariantes combinatórios em um problema.

Na sequência, é retomada essa discussão abordada no início do segundo encontro.

8.2.2 Retomada do Primeiro Encontro

Como mencionado, após a conclusão do primeiro encontro, na semana seguinte, demos início ao segundo encontro, atendendo os pedidos das participantes da pesquisa. Na ocasião, realizamos uma retomada das discussões do encontro anterior com cada dupla. Revisitamos as propriedades invariantes das situações Combinatórias. Para tanto, apresentou-se em slides, com as seguintes informações (Quadro 19).

A abordagem foi fundamentada nas propostas de Vergnaud (1996), a importância de se trabalhar com a variedade de situações Combinatórias e explorar suas propriedades para aprimorar a conceitualização dos problemas foi destacada pela pesquisadora. Os invariantes de escolha, ordenação e esgotamento de possibilidades foram cuidadosamente abordados.

A revisitação da discussão do primeiro encontro possibilitou que as professoras desenvolvessem uma visão mais abrangente das nuances de cada invariante das diversas situações combinatórias. A reflexão sobre as diferentes situações combinatórias e suas propriedades também contribui para o aprimoramento do Conhecimento Especializado do Conteúdo das professoras e consequentemente, poderá ajuda-las com desafios relacionados ao processo ensino da Combinatória.

Quadro 19 – Situações e invariantes combinatórios: retomada do primeiro encontro

Problemas combinatórios	**Exemplos de situações-problemas**	**Invariantes**
Produtos de medida	Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?	- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com *n* e com *p* elementos), eles serão combinados para formar um novo conjunto; - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Permutação	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?	- Todos os *n* elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo	Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?	- Tendo *n* elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... **p** elementos com < *p* < *n*. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades
Combinação	Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?	- Tendo *n* elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos com < *p* < *n*.

		- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fonte: A autora (2023).

Na próxima seção, o enfoque é observar o conhecimento das professoras a partir procedimentos de situações combinatórias de estudantes.

8.3 SEGUNDO ENCONTRO: REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS DE SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS DE ESTUDANTES

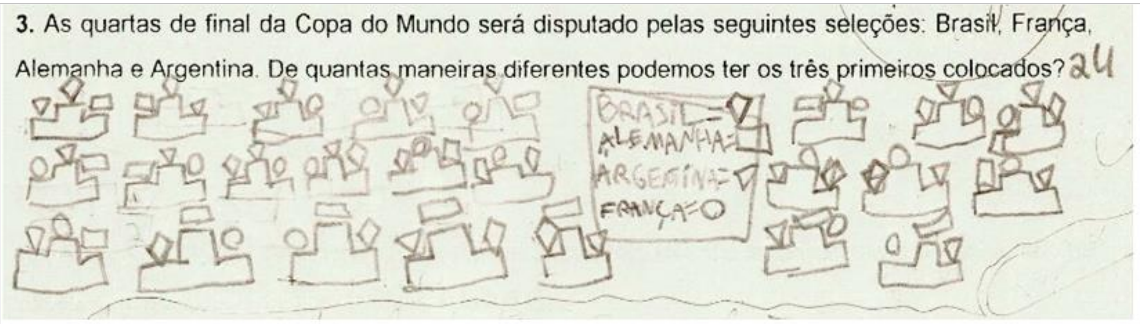
Nesta seção apresentamos os dados relacionados ao segundo encontro do processo formativo. As atividades foram desenvolvidas com as mesmas duplas formadas no encontro 1: G1 (P1 + P6), G2 (P3 + P5) e G3 (P2 + P4), também em dias diferentes. Objetivamos neste encontro analisar e discutir os protocolos relacionados ao desempenho dos estudantes em relação às situações combinatórias.

Para propor a discussão com as duplas foi apresentado *slides* com quatro protocolos com as respostas de estudantes para problemas de combinação, arranjo, produto de medidas e permutação (os quais as professoras já tinham recebido previamente em folha impressa).

Os protocolos são apresentados no quadro 20:

Quadro 20 – Protocolos com as respostas de estudantes

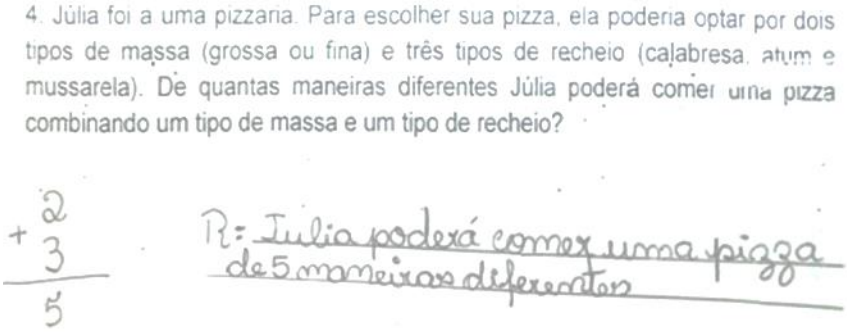
Protocolo 1: Combinação
4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? cachorro, gato — ratinho, cachorro ratinho, peixe — peixe, gato peixe, cachorro Fonte: Vega (2014).
Protocolo 2: Arranjo


3. As quartas de final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? 24

BRASIL =
ALEMANHA =
ARGENTINA =
FRANÇA = O

Fonte: Pessoa (2009).

Produto 3: Produto de Medidas

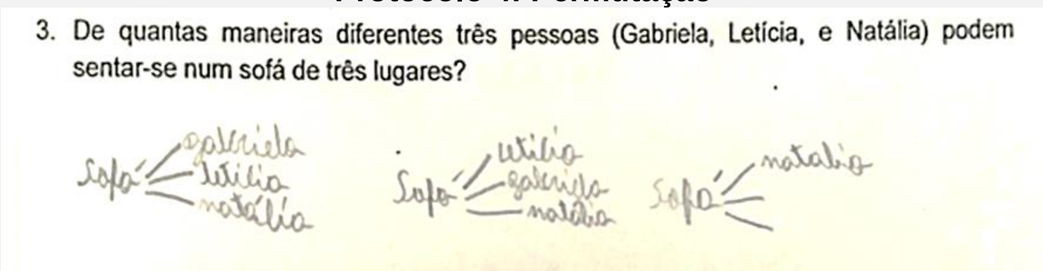

4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

2 + 3 = 5

R= Julia poderá comer uma pizza de 5 maneiras diferentes

Fonte: Vega (2014).

Protocolo 4: Permutação


3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Gabriela, Letícia, e Natália) podem sentar-se num sofá de três lugares?

Sofá – gabriela, leticia, natália
Sofá – leticia, gabriela, natália
Sofá – natalia

Fonte: Montenegro (2018).

Fonte: A autora (2023).

Realizou-se uma análise sobre o **Conhecimento da Conteúdo e Estudante**. Isso foi feito através de uma série de questionamentos voltados para avaliar as respostas dos estudantes em relação a problemas apresentados. Diversas questões foram levantadas, incluindo: "O estudante conseguiu compreender a natureza do problema? Qual abordagem lógica foi empregada?" "A resposta oferecida pelo estudante é apropriada para a questão apresentada? Caso contrário, qual seria a resposta correta?" "Foram consideradas todas as combinações possíveis? Ou seja, foram devidamente enumerados ou contabilizados todos os casos que atendem às demandas do problema?" "Qual estudante demonstrou mais dificuldade? Quais foram os obstáculos enfrentados? Por que essas dificuldades surgiram?" "De que maneira os estudantes abordaram a resolução dos problemas (por meio de listagens, diagramas de possibilidades ou ilustrações)? O que pode ser inferido das estratégias escolhidas por eles?" "Como podemos abordar essas questões em sala de aula para que os estudantes possam compreender as propriedades invariantes de cada problema?" "Que elementos poderiam ser introduzidos de antemão para despertar o interesse dos estudantes e tornar a abordagem de situações combinatórias mais atraente?"

Portanto, durante essa análise, foram considerados os acertos (ainda que em quantidade limitada), as respostas inadequadas e, por conseguinte, as barreiras que possam ter levado a essas respostas equivocadas. Também, foram discutidos possíveis caminhos que poderiam ser adotados para auxiliar os estudantes a progredirem nessa compreensão. Esse enfoque, alinhado com a perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008), ressalta as características específicas do **Conhecimento do Conteúdo e do Estudante**, e como elas interagem nesse contexto.

8.3.1 Protocolo de Estudante na Situação de Combinação

O primeiro protocolo apresentado às duplas foi o de combinação (Protocolo 1 – Quadro 20). Nesse tipo de situação, consideramos que alguns elementos são selecionados de um único conjunto para formar diferentes possibilidades e a ordem de escolha não influencia na criação de novas combinações.

No que se refere à resolução do estudante no protocolo 1, ele compreendeu o problema e representou sua estratégia em forma de listagem. No entanto, não listou as possibilidades de maneira sistemática, assim não esgotou todas as combinações possíveis.

No quadro 21 a seguir apresentamos as respostas das duplas em relação ao questionamento sobre a compreensão e à lógica do problema 1 pelo estudante.

Quadro 21 – Transcrição 12: Protocolo 1 – lógica do problema de combinação – Protocolo 1

Pesquisadora:	**O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?**
G1: P1	“Sim. Ele separou os animais em duplas, né, como o problema solicitou e assim, foi fazendo as combinações.”.
G1: P6	“Também acho que sim. O estudante organizou as possibilidades com os dois animais, como está aí... [referindo-se às possibilidades no protocolo] cachorro e gato...”.
G2: P3	“Compreendeu. Porque o problema está pedindo combinações de dois bichos de estimação e o aluno fez exatamente isso ao listar “cachorro e gato” [...]”.

G2: P5	“Acho que sim. Ele [o estudante] listou em cada possibilidade os dois animais, né? Essa foi a lógica dele”.
G3: P4	“Não sei se compreendeu, porque o estudante só listou dois animais nas possibilidades. Seria os quatros [referindo-se aos elementos da situação] e ele não fez isso”.
G3: P2	“Compreendeu sim. A lógica foi organizar as combinações de dois em dois bichinhos”.

Fonte: A autora (2023).

Observamos no quadro 21, que com exceção de P4, as demais duplas identificaram que o estudante compreendeu o invariante de escolha na resolução do problema, ou seja, ele entendeu que de um conjunto maior (no caso, o de animais), podem-se formar subconjuntos, de acordo com o solicitado. Nesse caso específico, a partir de um conjunto de quatro elementos é possível formar subconjuntos com dois elementos cada.

Cabe destacar que, logo após a resposta dada por P4 ao questionamento feito pela pesquisadora sobre a compreensão e a lógica do problema pelo estudante na situação de combinação, a participante P2, sua dupla, a questionou sobre o invariante escolha: “esse problema solicitou que fossem escolhidos dois bichinhos de um conjunto que tem quatro animais. Pensa bem! Você terá que formar duplinhas com esses bichinhos, entendeu?”. A indagação de P2 incitou P4 a reconsiderar o significado desse invariante, resultando em P4 dizendo: "Neste problema, eu só devo escolher dois animais, e não todos, como eu estava pensando inicialmente. Agora compreendi”. Essa interação entre P2 e P4 possivelmente influenciou as respostas dadas aos próximos questionamentos feitos pela pesquisadora.

As duplas foram questionadas pela pesquisadora se as respostas dos estudantes estavam apropriadas ou não. Além disso, as duplas foram questionadas sobre o motivo por trás da adequação ou inadequação da resposta e como seria a resposta correta, caso a resposta fornecida pelo estudante estivesse incorreta.

Quadro 22 – Transcrição 13: reposta ao problema de combinação – Protocolo 1

Pesquisadora:	A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Por quê? Caso não, qual seria a resposta correta?
G1: P1	“Está adequada; ele considerou certinho as duplas de bichinhos e a ordem deles também”.
G1: P6	“Está! Ele considerou as possibilidades com os dois animais e a ordem também, já que escolher, por exemplo, gato e ratinho é o mesmo que se Marcelo escolher ratinho e gato, não é?!”.
G2: P3	“Acho que não. Estava resolvendo aqui, o aluno colocou como uma das respostas “cachorro e gato” e cadê “gato e cachorro? Por isso que não está adequada”.

G2: P5	"Isso. Eu acho que também não está. Ele [estudante] não respeitou a ordem, não é?".
G3: P4	"Não está adequada, pelo o meu ver, não é. Sabe por quê? Faltou ele colocar "gato e cachorro", "peixe e ratinho" "cachorro e peixe" ... Seria a resposta correta".
G3: P2	"Vou concordar com P4, acho que não está adequada, apesar de que estou na dúvida, porque sempre me confundo com isso, se gera ou não gera novas respostas [referindo-se à ordem dos elementos".

Fonte: A autora (2023).

No quadro anterior, estaca-se que a dupla G1 destacou um apontamento bastante pertinente, ressaltando que o estudante compreendeu adequadamente o problema em questão. Especificamente, o G1 identificou que o estudante não considerou a ordem dos elementos, reconhecendo que esses aspectos não tinham uma influência significativa nesse tipo específico de situação-problema, embora não tenha explorado todas as possibilidades. Isso indica uma compreensão precisa das propriedades envolvidas no problema.

Por outro lado, nas duplas G2 e G3, uma observação distinta se destacou. Ambos os grupos ressaltaram que a resposta fornecida pelo estudante não era adequada, uma vez que o invariante relacionado à ordem dos elementos não tinha sido considerado. Portanto, segundo suas análises, ao levar em conta a ordem dos elementos, as possibilidades se expandiriam. O ponto levantado por G2 e G3 sugere que, nessas situações, o entendimento acerca da relevância da ordem nos problemas de arranjo ainda não estava completamente mobilizado.

Em seguida, as participantes foram convidadas a abordar a questão do esgotamento de possibilidades pelo estudante. Nesse sentido, foi questionado se os estudantes haviam de fato esgotado todas as possibilidades em sua resolução no problema (Quadro 23).

Quadro 23 – Transcrição 14: reposta ao problema de combinação – Protocolo 1

Pesquisadora:	**Foram esgotadas todas as possibilidades de combinações? Ou seja, foram enumerados ou contados todos os casos que atendessem ao solicitado no problema?**
G1: P1	"Tem mais combinações, não é? Não foram esgotadas todas as possibilidades. Acredito que se o aluno tivesse organizado essas respostas, colocando o cachorro e fazendo as ligações com os demais e, assim por diante, talvez notaria que está faltando mais uma possibilidade".
G1: P6	"Já respondi aqui no papel, está faltando peixe e gato. Então, não foram esgotadas todas as possibilidades".

G2: P3	“Não foram esgotadas. Seriam doze possibilidades. Aí [referindo-se ao protocolo] só tem cinco”.
G2: P5	Acho que não foram esgotadas porque o aluno não prestou atenção na ordem.
G3: P4	“Acredito que não. O aluno faltou colocar mais sete possibilidades”.
G3: P2	“Não foram esgotadas

Fonte: A autora (2023).

Portanto, o estudante comprovou a compreensão dos invariantes envolvidos no problema de combinação, faltando apenas esgotar todas as capacidades. contudo o estudante demonstrou compreender o que se pedia no problema.

Nas respostas apresentadas no quadro anterior, nota-se que a dupla G1 identificou que o estudante não esgotou todas as possibilidades, destacou que ele entendeu que poderia combinar “dois bichinhos” dentre os quatros sugeridos no problema e percebeu que a ordem dos elementos não gerava possibilidades diferentes. Nesse contexto, P1 ainda trouxe a percepção de que a falta de sistematização pode ter interferido na resposta final do estudante.

Segundo Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), os erros mais comuns na resolução de problemas de Combinatória estão relacionados a listagem não sistemática. Diante dessa dificuldade é importante que uma representação simbólica como a listagem seja aprimorada, visando-se o aperfeiçoamento das resoluções obtidas a partir de seu uso.

Diferentemente de G1, as duplas G2 e G3 indicaram que a resposta não estava adequada, pois era preciso que o estudante levasse em consideração que a ordem dos elementos geraria novas possibilidades e, por consequência, não foram esgotadas todas as possibilidades.

Observamos que as duplas G2 e G3 ainda evidenciaram alguma confusão quanto à importância da ordem nos problemas de Combinação (**Conhecimento Especializado do Conteúdo**), conforme foi ressaltado no primeiro encontro. Nesse sentido, a pesquisadora voltou a questionar as duplas sobre o conceito de invariante de ordem na situação de combinação (Quadro 24).

Quadro 24 – Transcrição 15: reposta ao problema de combinação – Protocolo 1: G2 e G3

Pesquisadora:	**Se Marcelo chegar na loja, ele pode escolher um cachorro com um gato?**
G2: P3 e P5	“Pode”.
G3: P4 e P2	“Pode sim”.

Pesquisadora	“Se ele desistir... Não quero mais escolher cachorro e gato, quero escolher gato e cachorro. Ele ia estar escolhendo os mesmos bichinhos?”.
G2: P3	“Seriam os mesmos”.
G2: P5	“Entendi. A ordem não interfere, seriam os mesmos bichinhos”.
G3: P4	“São os mesmos”.
G3: P2	“Verdade, são os mesmos. Aí a ordem não vai gerar novas possibilidades”.
Pesquisadora	“Preciso contar duas vezes? Não né? Então não vou nem marcar ele... Porque já tinha escolhido antes a mesma coisa, mas o estudante esgotou todas as possibilidades?”.
G2: P3	“Eu pensei em contar como duas possibilidades. Mas entendi, a ordem não interfere. Ele mesmo assim não esgotou”.
G2: P5	“Está faltando uma possibilidade, né? Gato e peixe, ele não colocou”.
G3: P4	“Não precisa, eles são os mesmos. Compreendi. Então está faltando mesmo assim, ele deveria colocar gato e peixe”.
G3: P2	“Não esgotou. Seriam seis possiblidades”.

Fonte: A autora (2023).

Inicialmente, ao responder o problema de combinação, as duplas G2 e G3 perceberam que a ordem dos elementos geraria novas possibilidades (Quadro 24); contudo, após ser questionada novamente pela pesquisadora, a partir de uma situação que destacava o invariante da ordem no problema, as duplas verificaram o erro e perceberam que nem todos os casos gerariam novas possibilidades.

O diálogo entre as duplas e a pesquisadora provocou reflexões sobre o **Conhecimento do Conteúdo e Estudante**, pois envolveu a busca por uma compreensão dos erros dos estudantes e também com **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, especialmente em relação aos invariantes. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), é fundamental que o professor não apenas compreenda os erros, mas também seja capaz de antecipar possíveis dívidas dos estudantes. Essa abordagem indica que os professores conseguem prever obstáculos que seus estudantes podem encontrar ao resolver diversas situações relacionadas à combinação de elementos. Dessa forma, os professores podem propor situações de ensino que favoreça a reflexão e o diálogo para minimizar tais dificuldades.

8.3.2 Protocolo de Estudante na Situação de Arranjo

O segundo protocolo apresentado para as duplas foi o de arranjo (Protocolo 2 – Quadro 20). Nesse tipo de situação, deve-se considerar que a partir de um conjunto dado serão selecionados alguns de seus elementos para a formação das possibilidades e que a ordem desses elementos é importante para a composição de cada arranjo.

A resolução do protocolo 2 indica que o estudante compreendeu a situação combinatória e utilizou estratégia sistematizada para elencar todas as possibilidades. Ele colocou símbolos para representar cada um dos países propostos no problema e esgotou todas as possibilidades possíveis de forma organizada.

A partir da análise do referido protocolo, a pesquisadora questionou as duplas. A seguir, apresentamos das falas em relação à compreensão e à lógica do problema de arranjo pelo estudante na situação (Quadro 25).

Quadro 25 – Transcrição 16: resposta ao problema de arranjo – Protocolo 2

Pesquisadora	**“O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?”**
G1: P1	“Acredito que ele compreendeu, sim. Fez as opções em formas de topos, não é? [referia-se às possibilidades]. Em cada topo ele colocou três países respeitando a ordem de cada colocação”.
G1: P6	“Para mim sim, ele compreendeu. Representou as respostas em forma de desenho considerando o primeiro, o segundo e o terceiro lugar. Ainda colocou uma legenda para cada país. Achei bacana!”.
G2: P3	“Acho que o estudante não compreendeu o problema não! A lógica que ele utilizou foi separar de três em três países, como mostra a figura [referindo-se às possibilidades]. Mas ele repetiu respostas [ordem dos elementos], por isso acho que ele não compreendeu”.
G2:P5	“Concordo com P3, acho que o estudante não compreendeu. Em cada figura ele fez grupinhos que têm três países [referindo-se às possibilidades], mas ele repetiu [referindo-se à ordem dos elementos], não é?”
G3: P4	“Não compreendeu, porque a lógica utilizada foi em cada opção de possibilidade juntar os países, no caso, três, não é? Por exemplo, essas duas primeiras possibilidades da linha [referindo-se à possibilidade de Argentina, Brasil e Alemanha, e à outra, Alemanha, Brasil e Argentina] são as mesmas, não é? Por isso, acho que ele não compreendeu”.
G3: P2	“Já eu, acho que sim, que o aluno compreendeu. Em cada opção de resposta, que são os desenhos que ele fez, tem os três países. E, a cada opção de resposta ele considerou que tem o primeiro, o segundo e o terceiro colocado. Achei muito organizado”.

Fonte: A autora (2023).

Observamos no quadro anterior, que as duplas indicaram que o estudante reconheceu o invariante de escolha na resolução do problema, ou seja, ele compreendeu que a partir de um conjunto maior (os países) foram selecionados três deles para formar os arranjos. Quanto à ordem dos elementos no protocolo apresentado, P1 (G1), P2 (G3) e P6 (G1) enfatizaram que ela importa, gerando assim, novas possibilidades e compreensão do problema pelo estudante.

Em contrapartida, P3 (G2), P4 (G3) e P5 (G2) destacaram que o estudante não compreendeu totalmente o problema e que isso se justificava por ele não ter considerado que a ordem dos elementos não iria interferir no resultado final dos arranjos. Essa confusão em relação à ordem dos elementos já havia sido identificada no primeiro encontro, quando os participantes interagiram com fichas contendo elementos dos problemas. Além disso, essa mesma dificuldade foi evidenciada nas respostas dos estudantes ao protocolo de problemas durante o encontro inicial. Portanto, há uma a falta de compreensão sobre a ordem dos elementos nos problemas de arranjo identificada no primeiro encontro e as observações feitas por P3, P4 e P5 durante esta análise.

Nesse sentido, foi necessário questionar a dupla G2 e a participante P4 sobre o invariante ordem na situação de arranjo (Quadro 26).

Quadro 26 – Transcrição 17: resposta ao problema de arranjo – Protocolo

Pesquisadora	**"Sobre a resolução do estudante [protocolo 2], ele não compreendeu o problema por conta de ele considerar possibilidades repetidas, como: "Argentina, Brasil, e Alemanha" e "Alemanha, Brasil e Argentina", certo?".**
G2: P3	"Sim".
G2: P5	"Isso".
G3: P4	"Sim".
Pesquisadora	"Isso não gera novas possibilidades? Vamos pensar: se Argentina ganha em primeiro, Brasil em segundo e Alemanha em terceiro lugar, seria a mesma coisa se Alemanha ganhasse em primeiro, Brasil em segundo e Argentina em terceiro?".
G2: P3	"Não é a mesma coisa".
G2: P5	"Verdade. A ordem interfere nesse problema. Então ele [o estudante do protocolo 2] compreendeu".

Fonte: A autora (2023).

Conforme observado no quadro 26, a pesquisadora buscou chamar a atenção para o fato de que em situações de arranjo a ordem dos elementos dos subconjuntos geram novas possibilidades. É possível observar que P3 (G2), P4 (G3) e P5 (G2), possivelmente influenciadas pela resolução da situação de combinação, inicialmente acreditavam que não era necessário escolher de novo o mesmo trio para o pódio, uma vez que se tratavam dos mesmos países; entretanto, quando questionadas sobre a ordem na classificação, elas perceberam a diferença entre ser o primeiro, o segundo ou o terceiro lugar. Em outras palavras, que a ordem dos elementos indica possibilidades distintas em casos de arranjos.

Em seguida, as duplas foram questionadas se a resposta apresentada pelo estudante estava adequada e, caso não estivesse, qual seria a resposta correta.

Quadro 27 – Transcrição 18: resposta ao problema de arranjo – Protocolo 2

Pesquisadora	**“A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Por quê? Caso não, qual seria a resposta correta?”.**
G1:P1	“Está sim. Acho que pelo desenho fica bem clara a ideia do aluno, pelo menos neste eu achei. Para cada topo, escolheu os três países... acredito que as posições dos países, se trocar, darão respostas diferentes, né? [referindo-se à ordem dos elementos]. Então, eu acho que está correto”.
G1:P6	“É... O desenho deixa claro o que o estudante quer passar. Acredito que a resposta está adequada sim”.
G2:P3	“Acho que sim. Porque ele selecionou para cada alternativa de respostas três países e que “aquilo” que você disse antes... esqueci a palavra... não importa... [a participante referiu-se à ordem dos elementos]”.
G2:P5	“Eu considero que sim. Concordo com P3”.
G3:P4	“Acredito que sim. Olhando esse protocolo, noto que ele considerou as possibilidades respeitando as posições certinhas [referindo-se à ordem dos elementos] de cada resposta e para cada uma delas foram considerados três países”.
G3:P2	“Está adequada sim. Eles utilizaram corretamente a ordem e para cada desenho utilizaram três países. Está ok na minha visão”.

Fonte: A autora (2023).

Ao analisar o protocolo 2, as duplas concordaram que o estudante chegou ao resultado adequado, realizando de forma assertiva o cálculo numérico e o relacional. As duplas notaram que o estudante reconheceu os invariantes do problema de arranjo. Também notaram que o estudante compreendeu que a partir de um conjunto maior podem-se formar arranjos com conjuntos menores, na situação proposta, de um conjunto de quatro elementos formaram-se subconjuntos com três elementos. Além disso, que o aluno indicou a compreensão de outro invariante ao observar que a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Em seguida, as duplas foram questionadas se o estudante havia esgotado todas as possibilidades de combinações. Todas as duplas destacaram que o estudante esgotou todas as possibilidades, chegando ao total de vinte quatro símbolos para representar cada um dos países propostos no problema. Cabe destacar que as participantes da dupla G2 indicaram, antes dos questionamentos da pesquisadora referente à ordem dos elementos nessa situação, que o estudante havia extrapolado as possibilidades, já que elas não haviam prestado atenção ao fato de que a ordem dos elementos interferia na contagem.

8.3.3 Protocolo de Estudante na Situação de Produto de Medidas

O terceiro protocolo apresentado para as duplas foi o de produto de medidas (Protocolo 3 – Quadro 20). Nesse tipo de situação deve ser considerar que há dois conjuntos diferentes e ao combinar um elemento de cada conjunto, novos conjuntos serão formados. Além disso, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

No que se refere a resolução do estudante no protocolo 3, ele utilizou os números presentes no enunciado do problema e fez uma adição. Não há indícios de que houve compreensão da proposta do problema, pois não há relação aparente com o que foi solicitado.

A seguir, apresentamos fragmentos das falas das duplas em relação à compreensão e à lógica do problema pelo estudante na situação de produto de medidas (Quadro 28).

Quadro 28 – Transcrição 19: resposta ao problema de produto de medidas – Protocolo 3

Pesquisadora	O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?
G1: P1	"Não compreendeu. Ele fez adição dos tipos de massas e recheios, apenas não compreendendo a ideia do problema".
G1: P6	"Também acho que não. Somou dois mais três e considerou como se fosse a quantidade de possibilidades do problema".
G2: P3	"Está na cara que esse aluno não compreendeu. A estratégia dele foi realizar a operação da adequação que não está certa aí, não é?".
G2: P5	"Não compreendeu mesmo. Ele pegou os dois tipos de massas e adicionou com três tipos de recheios".
G3: P4	"Acredito que não compreendeu. O aluno só fez a 'sominha' [referindo-se ao resultado da adição]".
G3: P2	"O aluno não compreendeu. A estratégia que ele utilizou foi uma adição, que não faz sentido no problema".

Fonte: A autora (2023).

As participantes reconhecem que o estudante não compreendeu o problema e utilizou uma adição para responder à situação de produto de medidas. Talvez tenha cometido tal equívoco por ser comum realizar operações de adição nas situações problemas escolares.

A partir das respostas das participantes quanto compreensão e à lógica do problema pelo estudante na situação de produto de medidas, a pesquisadora realizou o seguinte questionamento (Quadro 29):

Quadro 29 – Transcrição 20: resposta ao problema de produto de medidas – Protocolo 3

Pesquisadora	**A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Caso não, qual seria a resposta correta?**
G1: P1	“Não está adequada, pois a operação da adição não responde ao problema. Seriam seis possibilidades e não cinco. Acho que ao invés dele somar, poderia fazer a multiplicação”.
G1: P6	“Como já falei, o fato de o aluno somar os tipos de massas com os recheios az com que fique errado. Seriam seis combinações. Bastava multiplicar os elementos. Isso serve até para problemas desse tipo com o número maior de elementos, né?”.
G2: P3	“É... Acho que não está. Nos meus cálculos, dá seis possiblidades e não cinco”.
G2: P5	“Isso. Acredito que também não esteja adequado...O aluno só fez a operação da adição, né? Acho que na resposta seriam seis possibilidades diferentes”.
G3: P4	“Claro que não está adequado. Eu fiz aqui e deu seis possibilidades. Bastava ele multiplicar as massas com os receios”.
G3: P2	“Não apresentou uma resposta adequada. Somar os tipos de massas com os recheios não chega ao resultado final, até porque a resposta correta seria seis possibilidades... Ao multiplicar a quantidade de massas disponíveis e de recheios, ele chegaria a uma resposta correta. Faço isso até para problemas desse tipo com mais elementos”.

Fonte: A autora (2023).

Observa-se nas respostas das professoras que elas identificaram que o estudante não apresentou uma resposta adequada, pois utilizar a soma não responde a resolução do problema. As integrantes das duplas G1 e G3 reconheceram como possibilidade para chegar ao resultado do problema o algoritmo da multiplicação. Em relação ao esgotamento de possibilidades pelo estudante no protocolo 3, as duplas G1, G2 e G3 afirmaram que o estudante não enumerava as possibilidades - um total de seis possibilidades para representar as combinações de tipos de massas e recheios -, pois não compreendeu o problema.

As considerações das professoras quanto ao protocolo indicam que elas identificaram a dificuldade apresentada pelo estudante e conseguiram explicar adequadamente os invariantes relacionados a escolha e a ordem, demonstrando o caminho correto de resolução. Essa abordagem dá indícios de que as professoras possuem certo **Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes**.

8.3.4 Protocolo de Estudante na Situação de Permutação

O quarto e último protocolo apresentado foi o de permutação (Protocolo 4 -– Quadro 20). Nesse tipo de situação é necessário considerar que de um conjunto são selecionados todos os seus elementos para a formação das possibilidades, e que a ordem das escolhas irá gerar novas possibilidades.

A resolução do estudante no protocolo 4 sugere que ele não compreendeu o invariante de escolha, pois não levou em consideração que havia somente um conjunto maior e que a partir dele, era preciso apenas mudar a ordem dos elementos para chegar ao resultado final. A seguir, apresentamos trechos das respostas das duplas em relação à compreensão e à lógica do problema pelo estudante na situação de permutação (Quadro 30).

Quadro 30 – Transcrição 21: resposta ao problema de permutação – Protocolo 4

Pesquisadora	O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?
G1: P1	“Olhando o protocolo, o aluno não compreendeu o problema. Ele separou o sofá, as três pessoas e os lugares... Fez tudo ao contrário”.
G1:P6	“Ele não compreendeu. Ao invés de separar as três pessoas para formar as possibilidades, ele separou os três lugares, né? Confuso”.
G2:P3	“Não compreendeu. Fixou o sofá e fez referência com três pessoas. Mas a questão não pede isso, né?!”.
G2:P5	“Com certeza ele não compreendeu o problema. O aluno pegou o sofá e saiu fazendo combinações com as pessoas”.
G3:P4	“Não foi compreendido. Ele separou três sofás e ligou com as três pessoas... O que ele fez foi uma árvore de possibilidades, mas aí ele trocou foi tudo”.
G3:P2	“Veja, ele trocou tudo, não foi? Ele não compreendeu. Na verdade, o aluno considerou o grupo do sofá e dos lugares com as pessoas”.

Fonte: A autora (2023).

As respostas das duplas indicam que o invariante de escolha não foi compreendido pelo o estudante no problema de permutação, pois ele considerou que haviam dois conjuntos diferentes (pessoas e lugares no sofá), quando na verdade só havia um conjunto (pessoas). Neste problema deveriam mudar a ordem das pessoas no sofá para chegar à resposta correta.

Em seguida, as duplas foram questionadas pela pesquisadora se a resposta apresentada pelo estudante estava adequada e, caso não estivesse, qual seria a resposta correta. As respostas das duplas foram as seguintes (Quadro 31):

Quadro 31 – Transcrição 22: resposta ao problema de permutação – Protocolo 4

Pesquisadora:	A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Caso não, qual seria a resposta correta?
G1: P1	“Acredito que não esteja adequada, como já falei. Deveria ter feito as combinações com três pessoas. Seriam seis possibilidades, né?”.
G1: P6	“Eu acho que não. Nas minhas possibilidades que pensei seriam seis também”.
G2: P3	“Não está adequado. As possibilidades deveriam ser ‘Gabriela, Leticia e Natália’; ‘Leticia, Gabriela e Natália’; ‘Natália, Gabriela e Letícia’ ... Seriam seis possibilidades”.
G2: P5	“A resposta que ele apresentou não está correta. Ele deveria apresentar seis possibilidades com três pessoas em cada uma”
G3: P4	“Não está adequada. Aí, pensando nas possibilidades, deveriam ser três, né? ‘Gabriela, Leticia e Natalia’; ‘Gabriela, Natália e Letícia’ e ‘Leticia, Gabriela e Natália’”.
G3:P2	“Não está adequada mesmo. A resposta correta são seis combinações diferentes: ‘Gabriela, Leticia e Natalia’; ‘Gabriela, Natália e Letícia’”.

Fonte: A autora (2023).

As duplas enfatizam em suas respostas que o estudante não apresentou uma resposta adequada ao problema. Ao serem questionadas sobre qual seria a resposta adequada para essa situação, apenas P4 não listou todas as possibilidades, indicou apenas três: Gabriela, Leticia e Natália; Gabriela, Natália e Letícia; e Leticia, Gabriela e Natália. No entanto, após P2 listar as seis possibilidades, P4 refletiu e mudou de resposta, concordando que há mais três possibilidades e indicando as que faltavam: Natália, Gabriela e Letícia; Natália, Letícia e Gabriela; e Letícia, Natália e Gabriela.

Na sequência as duplas foram questionadas quanto ao estudante ter esgotado todas as possibilidades de combinações. As duplas confirmaram que não foram listadas, uma vez que o estudante não havia compreendido os invariantes da situação, de escolha e de ordem.

No início, as duplas, principalmente G2 e G3, enfrentaram desafios para identificar e descrever claramente as dificuldades apresentadas pelos estudantes, especialmente nos protocolos relacionados aos problemas de arranjo e combinação. No entanto, por meio dos questionamentos da pesquisadora e das reflexões das próprias participantes, elas progrediram na compreensão da situação. Essa abordagem reflexiva e colaborativa foi essencial para a compreensão das participantes sobre Combinatória.

A análise dos protocolos possibilitou que as participantes analisassem e descrevessem as respostas dos estudantes nas situações combinatórias. Esse processo não favoreceu apenas que as professoras entendessem as concepções equivocadas que os estudantes apresentavam, mas também seus conhecimentos a certa da Combinatória.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), o domínio do **Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes combina** o conhecimento sobre o ensino e sobre os estudantes desse ensino. Dessa forma, um professor tem condições de identificar quando os estudantes estão engajados na resolução das tarefas escolares e quando não estão. Além disso, indica que é necessário oferecer alternativas que aumentem essa motivação ou administrar a dinâmica da sala de aula de maneira apropriada.

Portanto, a análise dos protocolos dos estudantes, a identificação dos erros, dos acertos e a reflexão sobre o processo de aprendizagem foram fundamentais para que as professoras pudessem mobilizar o Conhecimento do Conteúdo e do Estudante de maneira mais efetiva.

8.4 CONHECIMENTO DA COMBINATÓRIA E ESTUDANTES

Após as duplas analisarem e discutirem os protocolos dos estudantes um de cada tipo – combinação, arranjo, produto de medidas e permutação - separadamente, as duplas foram levadas a refletir e discutir os protocolos simultaneamente.

Inicialmente as duplas foram questionadas sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao responderem os protocolos 1, 2, 3 e 4. As respostas das duplas foram as seguintes (Quadro 32):

Quadro 32 – Transcrição 23: dificuldades apresentadas pelos estudantes

Pesquisadora:	**Qual dos estudantes apresentou mais dificuldades? Qual foi a dificuldade? Por que isso aconteceu?**
G1: P1	“Os estudantes dos protocolos 3 e 4. A dificuldade foi em entender mesmo o problema. Olha aí [apontando para o *slide* dos protocolos 3 e 4]. Se esses alunos compreendessem quais seriam os conjuntos desses problemas, se precisariam usar todos ou alguns itens dele [referindo-se ao invariante de escolha], como também se as posições das combinações feitas alteram ou não [referindo-se ao invariante de ordem], eles teriam dado uma resposta correta”.

G1: P6	“Acredito que os alunos dos protocolos 3 e 4. Eles tiveram dificuldade de interpretação no problema. Não foi prestada atenção a quais seriam os conjuntos dos problemas”.
G2: P3	“Sem dúvidas os dois últimos [referindo-se ao protocolo 3 e 4]. Os alunos não compreenderam o problema, não prestando atenção a qual seriam os conjuntos que deveriam ser considerados e o que fazer com eles”.
G2: P5	“Nos protocolos 3 e 4, são os que apresentaram mais dificuldades. Mas tivemos outro aluno que também teve dificuldade, que foi esse primeiro [referindo-se ao protocolo 1], mas ele compreendeu, né? A dificuldade é entender... compreender quem são os conjuntos, a ordem, né?! E listar todas as possibilidades”.
G3: P2	“Apesar de que o estudante do protocolo 1 não esgotou todas possibilidades, acredito que os que tiveram uma maior dificuldade foram o 3 e o 4. A dificuldade foi em identificar os conjuntos do problema, por exemplo, esse debaixo aí [referindo-se ao protocolo 4], se ele compreendesse que o conjunto era as três pessoas e que só precisaria mudar de lugar, possivelmente ele acertaria”.
G3: P4	“Os estudantes que responderam os protocolos 3 e 4. Acredito que seria em saber o que o problema pede, né? De saber que se mudarem os elementos, isso gera novas possibilidades, essas coisas...”.

Fonte: A autora (2023).

As respostas das duplas apontam que os estudantes dos protocolos 3 e 4 tiveram mais dificuldades em responder os problemas combinatórios. Em suas falas, elas enfatizaram que essas dificuldades estão no não reconhecimento dos invariantes de escolha e ordem nos problemas combinatórios. Dessa forma, as dificuldades dos estudantes citadas, no que diz respeito à influência da ordem dos elementos para geração ou não de novas possibilidades, estão relacionadas à interpretação textual dos enunciados das situações.

Durante o desenvolvimento desse encontro buscou-se, por meio de questionamentos, chamar a atenção das participantes para a representação simbólica nas situações combinatórias. No quadro a seguir, as duplas discorrem sobre a maneira como os estudantes representaram suas resoluções nos protocolos 1, 2, 3 e 4 (Quadro 33):

Quadro 33 – Transcrição 24: estratégias escolhidas para resolução dos protocolos

Pesquisadora	De que maneira os estudantes resolveram os problemas (listagem, diagramas de possibilidades ou desenhos)? O que você pode dizer sobre as estratégias escolhidas por eles?
G1:P1	“Teve um que listou, né?! Outro fez com a árvore de possibilidades e pela adição... Outro por desenho. Eu acredito que todas as maneiras foram legais, menos o protocolo 3... Só precisa prestar atenção... Todas as possibilidades desse faz sentido... Organizar as possibilidades”.
G1: P6	“O primeiro foi por citar as possibilidades, o segundo por desenhos, o terceiro pela adição e o último pela árvore de possibilidades. Eu acredito que a primeira e a última maneira [referindo-se aos protocolos 1 e 4] são as mais eficientes, porque sai colocando os nomes dos elementos dos problemas para saber as possibilidades”.
G2:P3	“No protocolo 1, foi por listagem, no 2, por desenho, no 3, por soma, e no 4, por possibilidades... A árvore de possibilidades [corrigiu]. Retirando a terceira [referindo-se ao protocolo 3], acho que todas são uma boa opção. O que os alunos precisam prestar atenção é para a arrumação... listar os elementos... para não se esquecerem de nenhum deles”.
G2:P5	“Por desenhos, por lista, por conta da adição e por árvore de possibilidades. Como já falei, o protocolo 3 não faz sentido, né! Acho os desenhos uma estratégia interessante para organizar os elementos”.
G3:P2	“Citando os nomes dos elementos [referindo-se à representação por listagem dos elementos], por desenhos, pela continha da adição e... pela árvore, né? Menos a do protocolo 3, acho que as estratégias são ótimas para organizar nome por nome [referindo-se aos elementos das situações] e formar as possibilidades”.
G3:P4	“Eles resolveram por listagem, desenhos, adição e pela árvore de possibilidades. O que tenho a dizer sobre as estratégias deles é que resolver problemas por listagem e pela árvore são alternativas boas, já que o aluno vai conseguir fazer e ver as possibilidades”.

Fonte: A autora (2023).

Observa-se no quadro anterior, que a participante P5 reconheceu o desenho como uma representação válida para o estudante utilizar na resolução dos problemas. Já P6 e P4, destacaram a listagem e a árvore de possibilidades como formas de abordar os problemas. De modo geral, percebe-se que as professoras entenderam a importância de utilizar-se da generalização, embora não tenham conseguido explicitar claramente essa ideia.

Durante a discussão, a pesquisadora explicou que podem ser utilizadas várias representações simbólicas para resolução de problemas combinatórios, no entanto, destacou que quando é organizada de forma sistematiza, as chances de listar todas as possibilidades é maior.

O próximo questionamento feito às duplas foi referente as possibilidades de trabalhar com os estudantes do 4º e 5º ano sobre as propriedades dos invariantes dos problemas combinatórios. As respostas das duplas foram as seguintes (Quadro 34):

Quadro 34 – Transcrição 25: compreensão dos estudantes referente aos invariantes combinatórios

Pesquisadora	**Como trabalhar com essas questões na sala de aula a fim de que os estudantes possam enxergar as propriedades dos invariantes de cada problema?**
G1:P1	"Acredito que utilizando o material manipulável seria excelente, né? Como fizemos na semana passada [referindo-se ao encontro 1]. Sempre questionando a eles sobre a ordem, os conjuntos e listar todas as possibilidades e eles vendo ali, no concreto".
G1:P6	"Concordo com P1. O material manipulado é uma boa opção para trabalhar na sala de aula e fazer com que os alunos enxerguem as propriedades, né! E também fazer com que eles reflitam... Aí vêm os questionamentos sobre essas propriedades...".
G2:P3	"Eu penso que se levarmos para a sala de aula aquelas fichas dos problemas [referindo-se ao material manipulado trabalhado no encontro 1], e interrogando aos alunos sobre as suas propriedades, faz com eles possam enxergar...".
G2:P5	"Trazendo questionamentos para os próprios alunos. Perguntando "qual é o conjunto desse problema?", 'podemos utilizar todos os elementos?', 'a ordem importa?' Acho que é fundamental para eles compreenderem, né!?".
G3:P2	"Fazer com que os alunos pensam e reflitam. Então perguntar sobre cada propriedade dos problemas. Perguntar sobre os grupos, se vamos ou não utilizar todos os elementos, a ordem deles e estimulá-los para que eles façam todas duplinhas, trios... como a questão solicitar".
G3:P4	"Para os alunos enxergarem as propriedades invariantes nos problemas, precisamos fazer com que eles pensem sobre elas. Então, fazer perguntas sobre a ordem e os conjuntos e determinar as possibilidades possíveis".

Fonte: A autora (2023).

Em suas respostas, P1, P3 e P6 enfatizaram a importância do material manipulável como recurso para trabalhar e fazer com que os estudantes compreendam os invariantes das situações Combinatórias. De maneira semelhante, as demais professoras (P2, P4 e P5) também destacaram a necessidade de questionar e incentivar os estudantes identificarem os invariantes nas situações combinatórias. Isso inclui o esgotamento de possibilidades, número de elementos utilizados em cada possibilidade e a influência da ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades.

P3 e P5 relataram que quando ministravam aulas de Combinatória não questionavam os estudantes se a ordem dos elementos indicava ou não possibilidades distintas, se todas as possibilidades haviam sido levantadas, se haviam possibilidades repetidas e qual era o número total de possibilidades.

Ao serem questionadas sobre o que poderia ser antecipado para que os estudantes compreendessem melhor os invariantes das situações Combinatórias e assim apresentassem uma resposta adequada, as respostas das duplas foram as seguintes (Quadro 35):

Quadro 35 – Transcrição 26: antecipação das propriedades invariantes da Combinatória

Pesquisadora	**O que poderia ser antecipado para que os estudantes compreendessem melhor os invariantes das situações combinatórias?**
G1: P1	“Penso que trabalhar com esses problemas antes, assim... desde cedo, seria uma alternativa boa. Porque ele já ia construindo todas essas ideias”.
G1: P6	“Se eles vissem isso nos anos anteriores, com certeza seria muito melhor, porque tem alunos que não sabem nem interpretar um problema. Então, se fossem trabalhados nos anos anteriores, os alunos compreenderiam melhor”.
G3: P3	“Acho que se fosse trabalho desde antes, desde do início do ensino fundamental faria mais sentido e eles construiriam todos esses conhecimentos de forma mais fácil”.
G2: P5	“Assim, como já te falei [no momento da entrevista], como esses assuntos vêm no final do livro, sempre deixamos para o ano seguinte e assim vai. Se fosse trabalhado por mais tempo e desde do início do ensino fundamental, eles compreenderiam melhor, não tenho dúvidas disso”.
G3: P2	“Tenho sempre comigo que a aprendizagem é uma construção, não é?! Então, na Combinatória acredito que não seja diferente. Se pensarmos assim, se trabalharmos tudo desse conteúdo sem ser apenas no 5º ano, se trabalhamos antes, eles teriam uma ideia mais construída”.
G3: P4	“Faço as palavras de P2 as minhas. Tenho certeza que compreenderiam melhor se fosse trabalho nos anos anteriores”.

Fonte: A autora (2023).

Em suas respostas, as participantes indicam a importância de se trabalhar a Combinatória desde os anos iniciais, pois essas experiências devem ser aproveitadas. Tais considerações sãs indicativos de que o **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte** está sendo apresentados pelas professoras. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), **o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte** se refere à percepção do professor sobre a interconexão entre os elementos do conteúdo matemático e a amplitude matemática incorporada nos currículos, incluindo o reconhecimento da importância de abordar a Combinatória desde os anos iniciais. Nesse sentido, Pessoa e Borba (2010) afirmam, a partir de resultados empíricos, que desde dos anos iniciais os estudantes já mostram compreensão sobre problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Os questionamentos efetuados no segundo encontro levaram as professoras participantes a refletirem sobre as características centrais dos problemas combinatórios e sobre as representações simbólicas. Ao analisar e discutir os protocolos de respostas dos estudantes, as participantes observaram diferenças entre os significados e invariantes das situações combinatórias apresentadas e diferentes formas de representação usadas por estudantes. Tais representações indicam expressões de compreensão e conhecimento em relação aos problemas combinatórios, seus significados e invariantes. Essa observação ressoa com a ideia de Vergnaud (1996), que destaca que as representações simbólicas têm a vantagem de facilitar a resolução quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas. Isso enfatiza que o uso de diferentes representações pode impulsionar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

As estratégias de representação simbólica utilizadas pelos estudantes, como listagem, desenhos, adição e árvores de possibilidades, também foram consideradas pelas professoras. Elas perceberam que a escolha das estratégias por parte dos estudantes pode estar relacionada ao seu nível de compreensão e habilidades matemáticas. Essa percepção indica a importância de permitir aos estudantes a liberdade de escolherem a forma como desejam expressar seus conhecimentos, promovendo uma maior autonomia na aprendizagem, discussão sobre a antecipação das propriedades dos problemas combinatórios e reflexões sobre a importância de se trabalhar a Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Essa reflexão conjunta possibilitou que as duplas mobilizassem o **Conhecimento da Combinatória e Estudantes**, apontando e descrevendo as dificuldades dos estudantes; a familiaridade com erros comuns cometidos por eles; e a previsão de facilidades e/ou dificuldades deles na resolução de problemas combinatórios, buscando antecipar o que eles poderiam considerar interessante e motivador para a sua aprendizagem. Ademais, observou-se como as duplas mobilizavam o **Conhecimento da Combinatória e Estudantes** para entender a resolução dos estudantes nos problemas combinatórios.

No processo de ensino da Combinatória surgem desafios relacionados à distinção entre diferentes tipos de problemas, compreensão das estratégias de resoluções adequadas, múltiplas etapas de escolha, entre outros. Neste processo o professor precisa busca estratégias que favoreça a compreensão de seus estudantes. No caso especifico da Combinatória, Rocha (2011) sugere que quando se trata de uma situação envolvendo a Combinatória, o professor que não insiste em abordagens específicas, como a utilização de fórmulas, mas, em vez disso, procura compreender outras estratégias de resolução por parte dos estudantes, está mobilizando o **Conhecimento do Conteúdo e Estudante**.

Este encontro evidenciou que a compreensão dos invariantes e a diversidade de representações simbólicas são elementos fundamentais para o **Conhecimento do Conteúdo e do Estudante** das professoras fossem mobilizados. Além disso, reforçou a importância de trabalhar a Combinatória desde os anos iniciais, para que os estudantes possam construir gradativamente seu conhecimento nessa área e desenvolver suas habilidades de resolução de problemas de forma mais autônoma e eficiente.

Na próxima seção, o enfoque consiste em observar como as professoras mobilizaram o **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes** e o **Conhecimento do Conteúdo e do Ensino**, discutindo e refletindo sobre como deve ser trabalhada, em sala de aula, a Combinatória.

8.5 TERCEIRO ENCONTRO: CONHECIMENTO DOCENTE – SITUAÇÕES, INVARIANTES E REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS

Nesta seção, apresentamos os dados do terceiro encontro do processo formativo desenvolvido com as seis participantes, como mencionado na metodologia. O processo formativo foi realizado coletivamente em uma sala no Google Meet. O encontro foi dividido em três momentos: (1) as situações e os invariantes combinatórios, (2) o trabalho com a Combinatória na sala de aula e (3) reflexões sobre o processo formativo. Nos momentos buscamos analisar os conhecimentos em relação às situações combinatórias, aos invariantes e às representações simbólicas, conforme proposto por Vergnaud (1986). Também buscamos identificar conhecimentos apresentados pelas participantes de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008).

8.5.1 As situações e os invariantes combinatórios

Nessa etapa inicial, foram destacadas as semelhanças e as diferenças que existem entre os invariantes de ordem e de escolha. Para facilitar a compreensão, foram apresentados às professoras oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. Destes, quatro já haviam sido trabalhados e discutidos no primeiro encontro. As situações apresentadas para as participantes foram as seguintes (Quadro 36):

Quadro 36 – Problemas combinatórios: terceiro encontro

Problema 1	**Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?**
Problema 2	“Na lanchonete *Oba-oba* há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?”.
Problema 3	“Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?”.
Problema 4	“Na loja *Quero Mais* estão disponíveis três tipos de botas (marrons, pretas e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?”.
Problema 5	“Na barraca *Espaço Drinks* há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?”.
Problema 6	“– Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?”.
Problema 7	“Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugares?”.
Problema 8	“Dona Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque. No brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes podem as três crianças brincarem juntas por vez no pula-pula?”.

Fonte: A autora (2023).

Após a apresentação dos problemas do quadro anterior, as professoras foram questionadas sobre as semelhanças e diferenças dos invariantes dos problemas combinatórios (Quadro 37).

Quadro 37 – Transcrição 27: semelhanças e diferenças das situações combinatórias

Pesquisadora	Dentre os problemas aqui apresentados, quais exigem o mesmo raciocínio? Por quê?
P1	"O primeiro problema com o sétimo [referindo-se aos problemas de arranjos], o segundo com o quarto [referindo-se aos problemas de produto de medidas], o terceiro com o sexto [referindo-se aos problemas de permutação] e o quinto com o último [referindo-se aos problemas de combinação], porque eles têm ideias em comum, como se a ordem interfere, não é? E também pelos conjuntos, se tem um ou mais... essas coisas".
P2	"O problema dois com o quarto [referindo-se aos problemas de produto de medidas], porque eles têm dois conjuntos! E, também acho que o três com oito [referindo-se aos problemas de permutação], pois eles utilizam todos os elementos do único conjunto, não é?".
P3	"Assim... eu penso que os problemas um, três, cinco, seis, sete e o oito [referindo-se aos problemas de arranjo, permutação e combinação] têm o mesmo raciocínio já que todos eles só têm um conjunto. Enquanto o dois e quatro tem dois [referindo-se aos problemas de produto de medidas]".
P4	"O problema dois e quatro tem o mesmo raciocínio [referindo-se aos problemas de produto de medidas] é ... porque nelas, para selecionar as possibilidades, utilizamos todos os termos que o problema dá [referindo-se aos elementos dos problemas]".
P5	"Acho que o problema um é parecido com o sete [referindo-se aos problemas de arranjos], porque veja, no problema um, de quatros alunos serão selecionados dois, não é? O sétimo também, de três amigos serão selecionados dois deles... e também a ordem de possibilidades interfere! Eu penso assim...".
P6	"Concordo com P5. Acredito que o problema um com o sete têm o mesmo raciocínio [referindo-se aos problemas de arranjos], porque a ordem interfere no resultado final..., mas tem o problema três com o sexto, a ordem interfere também [referindo-se aos problemas de permutação]. Mas, o que difere deles é que utilizam todos os elementos do problema, não é?".

Fonte: A autora (2023).

A partir dos fragmentos das falas das participantes, percebemos que todas as professoras identificaram o invariante de escolha. Em relação ao invariante de ordem, as professoras P1, P5 e P6 conseguiram identificar essa característica. No entanto, as professoras P2, P3 e P4 não fizeram nenhuma referência de tal característica nas situações semelhantes.

Sobre o exposto, Vergnaud (1996) destaca a importância de abordar uma diversidade de situações e compreender as propriedades dessas situações como elementos fundamentais na construção conceitual. Para Vergnaud (1996, p. 166), "analisar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante o processo de aprendizado ou em sua aplicação implica necessariamente considerá-los".

Em seguida, prosseguimos com à discussão e, apesar de algumas das professoras já destacarem os invariantes nos problemas combinatórios, as questionamos a respeito (Quadro 38).

Quadro 38 – Transcrição 28: invariantes das situações combinatórias

Pesquisadora	**Dos problemas que vocês agruparam por possuírem o mesmo raciocínio, seus elementos partem de um único conjunto ou de mais de um conjunto? Qual é ele, ou quais são eles?**
P1	"O primeiro com o sétimo [referindo-se aos problemas de arranjos], o terceiro com o sexto [referindo-se aos problemas de permutação] e o quinto com o último [referindo-se aos problemas de combinação] partem de um único conjunto. Deixa-me ver os problemas de novo, tá... é... os conjuntos são os alunos, os amigos, os objetos, os irmãos, os filhos e as frutas. Então já observo que esses três tipos de problemas que são... [alguns segundos depois] os de arranjos, permutações e combinações tem essas... como posso falar... particularidades em comum, não é? Aí, os outros, que são o terceiro com o sexto, é o de produto de medidas. Tem dois conjuntos cada um deles, no problema 2 seriam os sabores de sucos e os tamanhos de copos, enquanto no problema 4 seriam os tipos de botas e de gorros".
P2	"Olha só... No problema 2 seriam os sucos e os tamanhos de copos.... No problema 4 seriam as botas e os gorros... Aí seriam dois conjuntos cada um tem [referindo-se aos problemas de produto de medidas]. Já no problema 3 tem o conjunto dos objetos e no 8, o conjunto das frutas...Eles só têm um conjunto cada um [referindo-se aos problemas de permutação]".
P3	"Quem tem um único conjunto é o problema 1, que é o dos alunos; o 3, que é dos objetos; o 5, que acho que é dos filhos; o 6, o dos irmãos e o 7 [referindo-se respectivamente aos problemas de arranjo, permutação e combinação] e, quem tem dois conjuntos são os problemas 2, que são sabores e tamanhos, e o problema é... os conjuntos dos tipos de botas e de gorros [referindo-se aos problemas de produto de medidas]".
P4	"Assim, utilizamos alguns elementos, porque no problema 2, por exemplo, a questão pede um tipo de suco e um tipo de tamanho do copo. Mas tem outras situações, como o problema 3 [referindo-se ao problema de permutação], que utilizamos todos os elementos para formar o que é pedido".
P5	"Nos problemas 1 e 7, pelo menos, eu entendo que precisam ser utilizados alguns, não é? Se no problema 1, que é de arranjo, ele tem um conjunto de quatro alunos, eu não vou usar quatro alunos, vou precisar só de um para representante e outro para ser vice dele".

P6	“Nos problemas 1 e 7 utilizamos alguns elementos, porque de um conjunto de alunos vou utilizar dois para fazer as combinações e dos amigos vou utilizar também dois deles...É o que acho! Esses problemas seriam o de arranjo, né?”.
Pesquisadora	“Os elementos geram ou não novas possibilidades de respostas? Explique”.
P1	“Hoje isso é mais claro para mim. Aí eu noto que, como a gente já discutiu, nos problemas como o primeiro e o terceiro [referindo-se aos problemas de arranjo e permutação], a ordem importa sim. Já no segundo e quarto [referindo-se aos problemas de produto de medidas e combinação], a ordem não interfere”.
P2	“Nos problemas 2 e 4 [referindo-se aos problemas de produto de medidas], a ordem não interfere, não é? Nesse problema 4 aí, se eu escolho um gorro marrom com uma bota preta ou uma bota preta com um gorro marrom, pra mim é a mesma coisa...”.
P3	“Eu acho que é assim, nos problemas 1 e 7 [referindo-se aos problemas de arranjo] a ordem não interfere, e nos problemas 5 e 6 [referindo-se aos problemas de arranjo] a ordem interfere sim. Que são os problemas de arranjos e combinações, não é? Assim, eu não sei explicar direito, mas é isso que acho”.
P4	“Nos problemas 2 e 4 [referindo-se aos problemas de produto de medidas], eu tenho certeza que a ordem não interfere... Eu penso assim, se você escolher um tipo de suco e um tamanho de copo e mudar a ordem, não vai gerar uma outra possibilidade. Mas, nos outros problemas, eu me confundo [risos]... quando penso que interfere, ele não interfere e assim vai”.
P5	“A ordem interfere sim... Se eu tenho um aluno como representante e outro como vice, são posições diferentes, aí é só pensar...”.
P6	“Veja bem, essa pergunta ainda não é fácil para mim [risos]. Nos problemas 1 e 7 [referindo-se aos problemas de arranjos], eu penso que não interfere. Eu lembro de como a gente discutiu isso [referindo-se ao encontro 1] e não mudava a ordem, eu acho. Aí, nos problemas 3 e 6 [referindo-se aos problemas de permutação] interfere sim, porque temos variedades de combinações. Mudando cada elemento já gera outra possibilidade”.

Fonte: A autora (2023).

Nas respostas das professoras, observa-se que de maneira geral as participantes enfatizaram as características das situações Combinatórias reconhecendo seus invariantes, o que indica desenvolvimento do **Conhecimento Especializado da Combinatória**. Embora as professoras P2, P4 e P5 não nomearam explicitamente os problemas combinatórios, percebe-se, em suas falas, um reconhecimento explícito das características das situações. No caso específico de P5, observa-se aprimoramento quanto ao conhecimento dos diferentes tipos de situações combinatórias, pois ela os desconhecia no início do processo formativo.

É importante ressaltar que o reconhecimento das nomenclaturas usadas para distinguir os diferentes tipos de situações Combinatória, não é o mais importante, mas, sim, a percepção das características dessas situações, conhecimento esse que as participantes demonstraram ter construído durante o processo formativo. Segundo Borba (2010), o foco reside não apenas na mera memorização de termos técnicos, mas na capacidade de analisar, decompor e abordar problemas combinatórias de maneira fundamentada e inovadora, enriquecendo sua compreensão matemática e habilidades de resolução de problemas.

Quanto aos invariantes nos problemas apresentados no Quadro 38, como já mencionado neste estudo, houve apreensão por parte das participantes da pesquisa em relação ao invariante da escolha. Contudo, o invariante de ordenação ainda não havia sido totalmente compreendido por P2, P4 e P5, uma vez que elas demonstraram e enfatizaram dificuldade em diferenciar os problemas de arranjo e combinação quanto à sua ordem. Nos estudos de Rocha (2011) e Vega (2014) também foi observado tal dificuldade, com professores e estudantes.

As respostas das professoras aos questionamentos, ou seja, ao explicarem de forma segura as invariantes de escolha e de ordem nos problemas, indicam compreensão de conceitos abordados no processo formativo. Tal indicativo nos remete a mobilização do **Conhecimento Especializado da Combinatória**. Dessa maneira, reforça-se as considerações de Borba (2010), que afirma que o raciocínio combinatório - como um dos elementos do pensamento formal - possui uma natureza essencialmente hipotético-dedutiva. Isso se manifesta ao incentivar a formulação de hipóteses e conclusões à medida que os participantes se empenham em suas tentativas de resolução.

Contudo, também ficou evidente a persistência de desafios em relação ao invariante de ordenação, especialmente para algumas professoras P2, P4 e P5. Elas sentiram dificuldade em diferenciar os problemas de arranjo e combinação quanto a sua ordem. Assis (2014), nesse contexto, destaca que o trabalho com a diferenciação entre os problemas durante a formação inicial de professores pode aprimorar sua compreensão dos invariantes envolvidos.

Assim, esse primeiro momento, as participantes enfatizaram a importância de identificar os invariantes para a percepção e a resolução das diferentes situações combinatórias.

8.5.1.1 Os invariantes das situações de arranjos e combinações

Segundo Rocha (2011), os professores enfrentam dificuldades em diferenciar problemas de arranjo e combinação, o que revela um desconhecimento das situações nas quais os invariantes do conceito de ordenação implicam ou não em novas possibilidades. Diante desse cenário e das observações no primeiro encontro da pesquisa, que indicaram dificuldades semelhantes as apontadas pelas autoras, sentimos a necessidade da retomada da discussão dos invariantes das situações de arranjo e combinação. Assim, foram apresentados, em slides*,* os protocolos 5 e 6 respondidos por um estudante no estudo de Pessoa (2009) (Quadro 39).

Quadro 39 – Protocolos de um estudante em situações de arranjos e combinações

Protocolo 5

Para representante de turma de uma sala se candidataram três pessoas: Joana, Mário e Vitória. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?

Protocolo 6

Três alunos, Mário, Raul e Júnior, irão participar de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas idênticas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Fonte: Pessoa (2009).

Fonte: A autora (2023).

Observa-se nos protocolos 5 e 6 que o estudante resolveu do mesmo modo a situação de arranjo e combinação, sem levar em consideração, ou não, da ordem dos invariantes dos diferentes problemas. Assim, as participantes da pesquisa foram questionadas sobre a ordem dos elementos dos subconjuntos, já que isso é um fator crucial que deve ser considerado no momento da resolução dessas situações. A considerações das participantes foram as seguintes (Quadro 40):

Quadro 40 – Transcrição 29: protocolos 5 e 6 das situações de arranjo e combinação

Pesquisadora	**O estudante compreendeu os problemas? Qual foi a lógica utilizada?**
P1:	“Não compreendeu, né? No segundo protocolo [referindo-se ao protocolo 6], o aluno não prestou atenção na ordem. Ele listou JM e MJ. Aí naquele outro protocolo [referindo-se ao protocolo 5], ele repetiu as mesmas duplas... ele colou JM e JM”.
P2	“Acho que o aluno não compreendeu em nenhum dos protocolos. São dois problemas com ideias diferentes. Ele não considera a ordem no protocolo 6, por exemplo”.
P3	“Eu acredito que o aluno não compreendeu nenhum dos protocolos [referindo-se aos protocolos 5 e 6]. Ele respondeu como se não considerassem a ordem, olha aí a segunda foto [referindo-se ao protocolo 6] ... ele repetiu, mas a questão diz que as bicicletas são iguais, então para que repetir?”.
P4	“O aluno não prestou atenção que são problemas diferentes, não é? Ele não prestou atenção nisso. Aí, não compreendeu”.
P5	“Penso que no primeiro protocolo [referindo-se ao protocolo 5], não, mas no outro [referindo-se ao protocolo 5] sim, porque no primeiro ele repetiu possibilidades iguais... no segundo eu noto que listou as iniciais e fez as combinações tudo certinho”.
P6	“É nítido que o aluno não compreendeu os problemas. Primeiro, no protocolo 6, o aluno lista combinações repetidas mesmo, como JM e JM, MV e MV, e no problema de combinação, que é o protocolo 6, ele não presta atenção na ordem”.
Pesquisadora	“As estratégias estão adequadas para as duas situações? Por quê?”.
P1	“Não, primeiro que no protocolo 5 ele repetiu possibilidades! Colocou MV e JM repetidos, ou seja, ele não compreende, não é? Já no protocolo 6, ele não se ligou que escolher ‘Mário e Raul’ é a mesma coisa de escolher ‘Raul e Mario’”.
P2	“Analisando, eu acho que não. Assim, no protocolo 5, ele precisaria considerar a ordem..., mas, apesar disso, ele coloca possibilidades repetidas... No protocolo 6 ele considera a ordem, mas quem ganhar a bicicleta em primeiro ou em segundo não faz diferença, já que são idênticas... Eu penso assim, não sei se estou certa”.
P3	“É... não estão. O aluno, no protocolo 5, repetiu possibilidades considerando Mário como representante e Vitória como vice e depois coloca de novo Mário como representante e Vitória como vice, aí ele erra aí, faltou colocar “Joana e Vitória” e “Maria e Joana”. Aí, no protocolo 6, ele não presta atenção que a ordem não gera combinações diferentes”.
P4	“Não estão. Sabe por quê? Porque ele deveria responder a primeira situação [referindo-se ao protocolo 5] assim: JM, JV e MV, ele passou das possibilidades, até repetindo as mesmas. Na segunda situação [referindo-se ao protocolo 6], ele já acerta, porque ele lista todas as possibilidades”.
P5	“No primeiro protocolo [referindo-se ao protocolo 5], a estratégia dele está incorreta, ele repetiu possibilidades que não devia e o resultado seria só três possibilidades e não seis... No outro

	[referindo-se ao protocolo 5], ele levou em consideração a ordem das possibilidades e chegou em um resultado certo”.
P6	“Olha, não sei, mas penso que o aluno deveria ter levado em consideração a ordem no problema das bicicletas [referindo-se ao protocolo 6] ... Na verdade, nesse problema, a ordem não gera combinações diferentes”.

Fonte: A autora (2023).

Nas respostas das participantes P2, P4 e P5 observa-se que elas enfrentaram inicialmente dificuldades em distinguir o invariante de ordenação, tanto no enunciado quanto na etapa de correção da resolução das situações pelo estudante. Observamos que P2, ao se deparar com os protocolos, considerou que eles representavam problemas de natureza diferentes, algo que não tinha feito anteriormente nas atividades anteriores.

P4, no primeiro momento, identificou os dois problemas de arranjo e combinação, porém quando solicitada a explicar a resposta do estudante na situação, considerou a presença de ordenação, analisando-a como um problema de arranjo. Essa explicação parece apontar, mais uma vez, que possui dificuldades em compreender as diferenças entre os dois tipos de problemas.

Na sequência a pesquisadora direcionou a atenção das participantes para a questão da ordem dos invariantes nas situações de arranjo e combinação (Quadro 41):

Quadro 41 – Transcrição 30: protocolos 5 e 6 dos invariantes das situações de arranjo e combinação

Pesquisadora	**P4 e P5, no protocolo 5 se eu escolher Mário como representante e Joana como vice representante, ou Joana como representante e Mário como vice, seriam as mesmas duplas para essa situação? [nenhuma professora respondeu].**
Pesquisadora	“São cargos diferentes?”
P5	[Interrompe a pesquisadora] “Como são cargos diferentes, quem é representante não tem o mesmo cargo de vice, então a ordem interfere sim... já vi que errei quando você me perguntou antes [risos]”.
P4	“Pensando agora dessa forma, nessa situação, a ordem interfere. Então, o aluno errou. Faltou ele colocar ‘Mário e Joana’ e ‘Joana e Vitória’”.
Pesquisadora	“Mas, deixa perguntar outra coisa a vocês...”.
P4	“[Interrompe a pesquisadora]. Então, no outro protocolo-situação [referindo-se ao protocolo 6] o aluno também errou, porque a ordem não interfere, porque são as mesmas bicicletas. Eu sempre me confundo nesses dois problemas, por isso que troquei. Aí, eu olhando os protocolos desse estudante agora, eu vejo o quanto é

	preocupante, não é? O aluno precisa reconhecer os invariantes nos problemas”.
Pesquisadora	“Isso mesmo, P4! Era isso que já ia perguntar, mas vi que você já identificou. Então, no protocolo 6, a ordem não interfere? Se eu escolher “Mário e Raul” ou “Raul e Mário” seriam duplas diferentes?”.
P5	“Não”.
Pesquisadora	“Por quê?”.
P5	“Porque se eu escolher “Mário e Raul” ou “Raul e Mário” será a mesma dupla que vai ganhar a bicicleta, que a questão deixa bem clara que são idênticas. Preciso prestar mais atenção nisso”.
P4	“Esse problema é uma combinação, né, que a ordem não interfere, e no primeiro [referindo-se ao problema de arranjo] a ordem interfere”.
Pesquisadora	“Isso mesmo, meninas!”.

Fonte: A autora (2023).

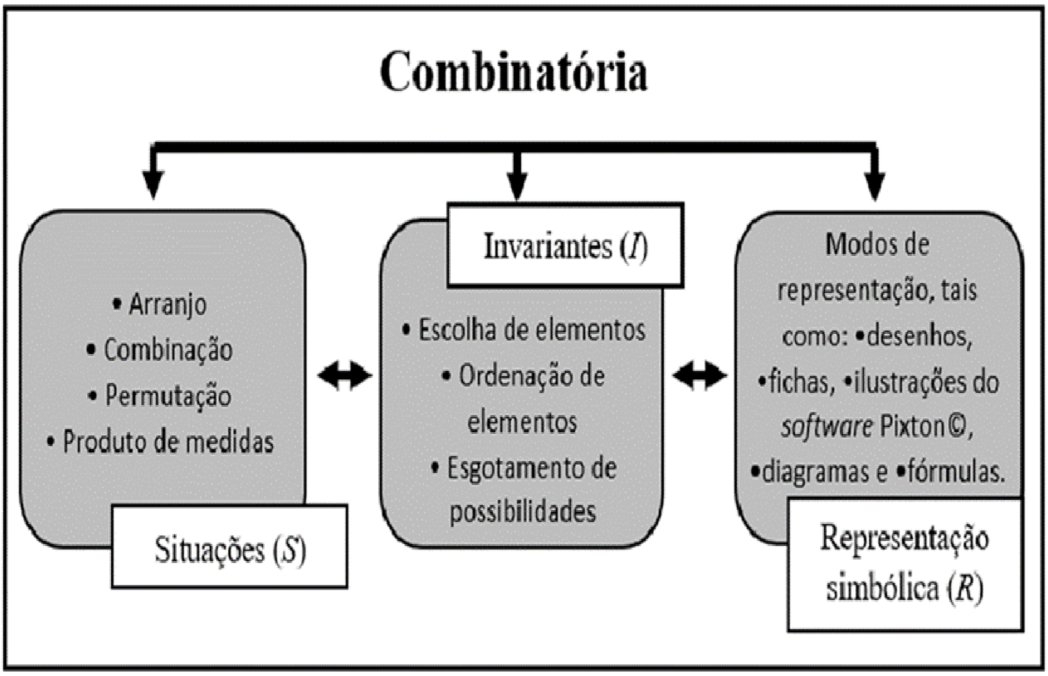
Após a pesquisadora questionar P4 e P5 quanto ao invariante de ordem, observa-se preocupação das professoras com a propriedade de ordenação no tratamento dos problemas de arranjo e combinação durante o processo de listagem do estudante. Dessa forma, quando as professoras possuem dificuldades com as situações de arranjo e combinação, elas podem não ser bem trabalhada gerando também interferência na compreensão dos estudantes (Vega, 2014).

Em um ambiente de aprendizado, é comum que cada aluno apresente uma abordagem única para um mesmo problema. Nesse contexto da Combinatória, é incumbência do professor, munido do entendimento dos invariantes e dos significados contextuais, refletir sobre a maneira precisa de compreender e representar o problema. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008) é fundamental que o professor possua o **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, pois lhe permitirá abordar diferentes interpretações em sala de aula.

8.6 O TRABALHO COM A COMBINATÓRIA NA SALA DE AULA

No segundo momento, buscamos que as participantes, a partir de protocolos e questionamentos, refletissem sobre o processo de ensino e aprendizagem da Combinatórias pelos estudantes. Além disso, que refletissem sobre o processo de aprendizagem proposto ao longo do processo formativo. Dessa forma, foram apresentados e discutidos com as participantes a Figura 18 e o Quadro 42, que seguem:

Figura 18 – Situações, invariantes e representação simbólica



Fonte: Gadelha, Borba e Montenegro (2020).

Quadro 42 – Situações e invariantes da Combinatória

Produto de Medidas	1) Dois (ou mais) conjuntos diferentes serão combinados para construir um novo grupo; (2) Diferentemente dos demais tipos de problema, a ordem dos elementos poderá ou não gerar novas possibilidades.
Arranjo	1) Um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não são utilizados todos os elementos do grupo maior; (2) A ordem e a escolha dos elementos irão gerar novas possibilidades.
Permutação	1) Todos os elementos serão utilizados, cada um apenas uma vez; (2) A ordem dos elementos do conjunto irá gerar novas possibilidades.
Combinação	1) De um conjunto maior serão selecionados objetos ou situações que constituirão subgrupos; (2) A ordem dos objetos escolhidos não gerará novas possibilidades.

Fonte: Pessoa e Borba (2010).

A partir da figura e quadro apresentados anteriormente, a pesquisadora propôs as participantes discussão relacionada aos conceitos envolvidos no raciocínio combinatório. Para isso, foram abordadas as singularidades de cada situação, as quais são determinadas por seus invariantes de ordem, escolha e esgotamento das possibilidades e também, pelas representações simbólicas, mais ou menos formais. A seguir, apresentamos os fragmentos das falas das participantes e da pesquisadora (Quadro 43):

Quadro 43 – Transcrição 31: situações e invariantes combinatórios

Pesquisadora	**Meninas, depois de toda as nossas discussões, quais erros vocês acreditam que os seus estudantes poderiam cometer nos problemas de combinatória que trabalhamos?**
P1	"Tudo que a gente cometeu aqui [risos]. Vê só, eu penso que o aluno precisa identificar no problema quem é o conjunto dele, se são utilizados todos os itens e se a ordem interfere ou não".
P2	"Vou concordar com P1, pois eu noto que meus alunos podem cometer esses erros também, se a ordem vai interferir ou não, a questão dos conjuntos, eu acho que é isso".
P3	"Olha, é difícil responder isso, porque eu vejo que eu também tinha dificuldades e ainda preciso estudar muito mais. Mas, eu concordo com as meninas, porque nos problemas de Combinatória, se o aluno não tiver uma visão clara sobre as características, como P1 e P2 já falaram, se a ordem gera novas combinações ou não geram, se vai utilizar tudo do conjunto, se não souber, fica difícil, porque ele vai sempre errar. E, respondendo à pergunta, os meus estudantes erram nisso que estamos aqui discutindo. Hoje eu consigo perceber o que preciso fazer para que eles identifiquem também".
P4	"Em identificar quem é o conjunto ou quantos, se vai ou não utilizar todos que fazem parte do conjunto e o principal, a ordem. Vou falar a verdade, é muito comum isso acontecer, de o aluno não saber, infelizmente".
P5	"Acho que seria isso de ordem mesmo. Também isso dos conjuntos. Mas, principalmente a ordem. Nos problemas de... aí me esqueci agora".
Pesquisadora	"Arranjo?".
P5	"Sim, e o outro o que a gente acabou de discutir?".
Pesquisadora	"Combinação?".
P5	"Isso! E de permutação também, não é? Os alunos se complicam todos, porque tem que interpretar bem".
P6	"E eu percebo que os alunos comentem erros em listar todas as possiblidades. Que isso se dá por não entender se os grupos e se a ordem vai importar ou não. Mas, também, o aluno tem que trazer uma estratégia certa, como uma árvore de possibilidades como a gente viu semana passada [encontro 2] ... Se não organizar os dados, ele não vai listar tudo".

Pesquisadora	“Como trabalhar com essas situações combinatórias na sala de aula a fim de que os estudantes possam perceber as propriedades dos invariantes de cada problema?”.
P1	“Eita, deixa eu pensar direitinho... eu acho que se a gente, professoras, levar para a sala de aula questionamentos como esses que fizemos aqui, fazendo com que os alunos reflitam sobre todos os elementos da Combinatória, acho que eles enxergariam, sabe?”.
P2	“Eu acho que se a gente apresentar os problemas combinatórios, que são os quatro e trazer perguntas, ajudaria nisso”.
P3	“Eu já ia falar isso. Se por acaso eu levar os problemas e trabalhar com eles ao mesmo tempo, ele vai ter logo essa dificuldade, não é? Mas aí, fazendo perguntas, como você fez aqui com a gente [referindo-se a pesquisadora], ele com certeza vai enxergar”.
P4	“Penso dessa forma também e ainda, acrescento que se trabalhar com fichas é melhor ainda”.
P5	“Eu juro que já ia falar das fichas que trabalhamos aqui. Acho que seria uma maneira de fazer com que os alunos percebam, mas sempre questionando, trabalhando com os problemas, perguntando o que tem em um e o que não tem no outro”.
P6	“Estava aqui, caladinha e pensando. Vê, eu acredito que se trabalhar com os problemas, como P5 acabou de falar, perguntando o que tem em um e o que no outro não é essencial, porque o aluno vai analisar e notar que nem todos os problemas são iguais, como pensei”.

Fonte: A autora (2023).

As falas das participantes indicam possíveis erros que os estudantes podem cometer nas situações combinatórias. As professoras ressaltam que eles precisam levar em consideração se todos os elementos do conjunto serão usados ou não e se a ordem dos elementos gera ou não novas possibilidades. Também ressaltam erros ao listar as possibilidades e sugerem o uso de estratégias para minimizar possíveis dificuldades.

Como observado por Borba (2013, 2016) a característica principal dos problemas combinatórios é determinar o número total de combinações possíveis, ou seja, é preciso chegar ao esgotamento das possibilidades.

Quanto ao trabalho com as situações combinatórias as professoras destacam que é importante lembrar o que diferencia cada significado com seus invariantes para que se possa refletir sobre as dificuldades próprias de cada um. Segundo Borba (2010), situações combinatórias precisam ser trabalhas simultaneamente, comparações e questionamentos precisam ser feitos de modo que os estudantes possam refletir e identificar as propriedades dos invariantes de cada problema.

Em consonância com o exposto, Borba (2010) indica que o estudo de situações combinatórias e discussões relacionadas aos seus conceitos, quando ocorre desde o início do processo de escolarização até a conclusão da Educação Básica, tem o potencial de impulsionar o aprimoramento do raciocínio combinatório dos estudantes.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), uma série de atividades matemáticas demandará do professor um entendimento aprofundado das instruções empregadas. Assim sendo, o docente precisa avaliar cuidadosamente os prós e contras das orientações e das representações adotadas no processo de ensino de um conteúdo específico, bem como utilizar métodos e abordagens variadas.

As professoras P4 e P5 ainda destacam que o uso do material manipulável também é uma forma para que os estudantes possam identifiquem os invariantes nas situações combinatórias. Segundo Gadelha (2020), material manipulável concreto (fichas) auxiliam significativamente na compreensão combinatória. Pessoa e Santos (2015), Florencio e Guimarães (2017) também ressaltam a importância das fichas como um recurso valioso para abordar questões combinatórias, englobando as diversas categorias de cenários. No entanto, esse sucesso depende substancialmente de uma orientação adequada por parte dos professores.

Assim como há influência de invariantes e de significados no desempenho dos estudantes, como proposto por Vergnaud (1998), as representações simbólicas também desempenham um papel fundamental na organização do pensamento combinatório. Portanto, durante o processo formativo também foram realizados questionamentos sobre as representações simbólicas (Quadro 44).

Quadro 44 – Transcrição 32: situações e invariantes combinatórios

Pesquisadora	**Como já foi discutido nos encontros anteriores, as diferentes representações simbólicas para resolver as situações-problema podem ser desenhos, listagem, árvore de possibilidades, quadros, diagramas, princípio multiplicativo, dentre outros. Você acha que há uma representação mais adequada do que a outra para resolver os problemas de Combinatória? Por quê?**
P1	“Na minha visão, acho que todas são adequadas, mas acredito que a árvore de possibilidades é, para mim, melhor, porque o aluno vai ver as possibilidades”.
P2	“Acho que não tem isso de melhor do que a outra, não. Porque vê, o que o meu aluno apresentar, eu vou ter que considerar, quer dizer, eu vou analisar o que ele fez. Mas, para responder à pergunta, eu acho que por listagem ou até mesmo a árvore de possiblidades são boas, porque se tiver faltando alguma

	possibilidade, o aluno consegue identificar melhor e até mesmo para gente, não é?”.
P3	“Eu posso falar que o desenho para mim é mais adequado, porque analisem comigo... Temos alunos que não sabem, mas que até têm uma ideia, aí eles podem apresentá-la por desenho”.
P4	“Espera aí, eu acho que a listagem é uma das formas mais adequadas... na verdade, todas são, não é? Mas pela listagem você consegue visualizar as combinações feitas, eu acho. E outra, como já falei, as fichas são uma das formas de representação também. O que eu aprendi aqui, na verdade, tudo me ajudou a compreender os invariantes combinatórios, mas principalmente com as fichas que trabalhamos”.
P5	“Isso, P4. Eu noto que a utilização das fichas foi muito boa para compreender mesmo tudo que já discutimos. Mas, respondendo o que você reperguntou [referindo-se à pesquisadora], acredito que é listagem, seja com iniciais com os nomes dos itens ou de qualquer outra forma, eu acho uma das melhores maneiras, porque a pessoa vê com mais clareza as possibilidades”.
P6	“Acho que a árvore de possibilidades e a listagem são opções boas, não que as outras representações não sejam... elas são consideráveis também, mas eu penso que a árvore e a listagem trazem mais evidência daquilo que está se fazendo”.

Fonte: A autora (2023).

Conforme apresentado nas declarações das participantes, há um reconhecimento compartilhado por elas sobre a importância das diferentes representações na abordagem Combinatória. No entanto, P3 acredita que o desenho é a forma mais viável, pois considera que mesmo que não haja domínio de leitura ou conhecimentos formalizados, o aluno consegue responder o problema.

Entre P1, P2, P4, P5 e P6 a árvore de possibilidades e a listagem ganharam, pois consideram que os estudantes podem “enxergar “com mais clareza as possibilidades das situações combinatórias. De acordo com Vergnaud (1996, p. 184) "as representações simbólicas têm a vantagem de auxiliar a resolução de problemas quando os dados são numerosos e a resposta à questão envolve várias etapas”.

As professoras P4 e P5 enfatizaram mais de uma vez a importância do material manipulável como uma ferramenta para ajudar no processo da aprendizagem da Combinatória. Elas destacam que a utilização das fichas foi fundamental para a resolução dos problemas combinatórios no primeiro encontro. Para Silva e Bôas (2019) o uso de fichas com ilustrações dos elementos dos enunciados, permitem ampliar a compreensão dos contextos dos invariantes, bem como auxilia no levantamento das possibilidades, tornando viável a mudança na enumeração das possibilidades quando necessário.

As representações simbólicas possibilitam que os estudantes explicitem o seu entendimento em relação aos problemas, seus significados e invariantes, ampliando seu conhecimento (Rocha, 2011). Consequentemente, as estratégias e tipos de respostas utilizadas possibilitam a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes.

De acordo com Assis (2014), é importante destacar que o professor desempenha um importante papel no estímulo à busca de estratégias e soluções Combinatórias, além de orientar a sistematização das estratégias e das soluções dos problemas. Consequentemente, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a utilizar estratégias espontâneas na resolução de problemas.

Em seguida, as participantes foram questionadas se poderiam ajudar os estudantes a progredirem na aprendizagem da Combinatória (Quadro 45).

Quadro 45 – Transcrição 33: progressão na aprendizagem de Combinatória

Pesquisadora	**Considerando-se os seus estudantes que têm dificuldade em Combinatória, como vocês relataram em nossa entrevista no início desta pesquisa, como vocês, agora, depois desta formação, poderiam ajudá-los a progredirem?**
P1	“Fazer como você fez com a gente [referindo-se à pesquisadora]. Fazer questionamentos sobre a Combinatória é perfeito para que os alunos se desenvolvam e supram suas dificuldades. Sabemos que cada problema tem suas características”.
P2	“Eu vou falar a mesma coisa que P4 e P5 já falaram... Eu acho que aquelas fichas que trabalhamos na semana retrasada [referindo-se ao primeiro encontro] seriam ideais para ajudar os alunos a melhorarem mesmo e fazer perguntas sobre qual é o conjunto, tudo o que você fez [referindo-se à pesquisadora]. Acho que seria uma maneira para os alunos entenderem as características dos problemas e entender a Combinatória”.
P3	“Fazer os alunos refletirem sobre a Combinatória. Aí, como fazer isso? Eu penso que com questionamentos sobre as características dos problemas mesmo. Assim ‘ó’, a gente tem um problema de combinação, tá? Pensa comigo... será que nesse problema a ordem importa? Por quê? E a gente precisa de todos os elementos desse conjunto? Enfim, acho que fazer com que os alunos reflitam sobre isso é necessário”.
P4	“Trazer reflexões acerca dos termos combinatórios, principalmente nos problemas de arranjo e combinação, a ordem, na verdade. Aí, hoje eu levaria as fichas, como já falei. Já usei essas fichinhas, mas não nos problemas de Matemática. Aí, né, eu faria perguntas”.
P5	“Se o aluno tem dificuldade, eu penso em fazer com que ele perceba, quer dizer, com que identifique as ideias de cada problema. Aí, eu traria perguntas sobre elas produzindo reflexões

	nele. E também usar as fichas, porque é algo concreto, que ele vai olhar ali. Acredito que assim ajudará os alunos a compreender”.
P6	“Olha só, hoje eu traria questionamentos, até porque agora entendi e sei as características dos problemas combinatórios... se colocar um problema aí, eu vou saber quem é conjunto, se utiliza todos os elementos ou não, a coisa da ordem... Então, eu trabalharia da mesma forma com os meus alunos com dificuldades, porque mostrando isso, perguntando, eles vão refletir e identificar essas características, seja elas comuns ou não, não é? Estou falando de uma comparação de um problema com os outros”.

Fonte: A autora (2023).

Em suas falas, as professoras ressaltam a importância de conduzir as aulas por questionamentos, pois podem levar os estudantes a refletirem sobre os invariantes. As abordagens por meio de questionamentos feitos pela pesquisadora desencadearam reflexões e compreensão da Combinatória pelas professoras, dessa forma, acreditam que também são importantes para o processo de ensino dos estudantes. Cabe destacar que as professoras também apontam a importância de empregar material manipulável como estratégia para ajudar os estudantes a perceberem diferentes relações e propriedades das situações Combinatórias.

No segundo momento, as participantes refletiram sobre o processo de ensino e aprendizagem de estudantes sobre a Combinatórias. Ao apresentar suas percepções sobre eles, as professoras resgataram estratégias e intervenções promovidas no processo formativo, o que indica que a formação proposta contribuiu para que as participantes aprimorassem seus conhecimentos de Combinatória e apontasse possibilidades para o seu ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

As considerações das participantes ao longo do processo formativo têm indicado a mobilização do **Conhecimento do Conteúdo e do Ensino** e também, do **Conhecimento do Estudante**.

8.7 REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO FORMATIVO

No terceiro momento, as professoras participantes foram indagadas sobre possíveis contribuições do processo formativo em seus conhecimentos. As respostas das professoras foram as seguintes (Quadro 46):

Quadro 46 – Transcrição 34: situações e invariantes combinatórios

Pesquisadora	**Você acredita que o processo formativo te ajudou a desenvolver conhecimentos sobre a Combinatória?**
P1	“Sim, e muito. Como já falei aqui, apesar de já ter visto na minha faculdade sobre a Combinatória, eu ainda trocava os invariantes de ordem dos problemas! Aí, não tenho dúvidas que os encontros me ajudaram. Não só a entender as características de cada problema, mas também as maneiras de respostas dos alunos, como eles representam. Compreender na prática que o trabalho com os problemas desde os alunos pequeninos, bem pequeninos, é possível sim, porque aí tem todo esse desenvolvimento deles”.
P2	“Não tenho dúvidas que tudo que discutimos aqui ajudou nos meus conhecimentos. Eu estava essa semana refletindo...Como um curso, em tão pouco tempo, me ensinou tanta coisa. Hoje, se você me perguntar, eu vou saber os nomes dos problemas, as características de cada um deles e ainda analisar as representações que os nossos alunos podem apresentar, que ele organize direitinho os elementos, para não se confundir”.
P3	“Com certeza. Faço das minhas palavras as palavras das meninas, porque hoje sei das características de cada problema combinatório, como também sei ajudar os meus alunos na resolução... sei como organizar, sabe? Só tenho a dizer, que foi incrível!”.
P4	“Ajudou e muito. Em conhecer os problemas combinatórios, as estratégias deles. Lembro que nem sabia como era identificar o conjunto nos problemas. Está vendo? Me fez quebrar muito a cabeça [risos], mas noto o quanto foi importante para mim”.
P5	“Preciso estudar muito ainda, mas essa formação está sendo muito necessária, principalmente para a gente que é de Pedagogia, que não vimos nada disso na graduação. Apendi muito! Aprendi sobre cada elemento nos problemas [referindo-se aos invariantes de escolha e ordem] e pude sentar, analisar e ajudar nas resoluções dos alunos, principalmente em ordenar os elementos”.
P6	“’Oxe’, e como ajudou, viu!? Em identificar os conjuntos, se selecionamos tudo ou alguns dos elementos, se a ordem interfere ou não nas soluções que os alunos podem trazer e como analisar, não é? Tudo isso e mais um pouco [risos]”.
Pesquisadora	“Se sentem mais seguras?”.
P1	“Hoje me sinto mais segura. Claro que depois daqui vou ter que fazer outros cursos! É bom sempre aprender. Mas, me sinto segura sim”.

P2	“Sinto sim. Melhor do que eu entrei. E, vou dizer ainda, que depois daqui, vou procurar estudar mais e ter um olhar mais atrativo para a Matemática [risos]”.
P3	“Sim, sim. Hoje sim, me sinto segura em ajudar os meus alunos”.
P4	“Me sinto mais segura e preparada”.
P5	“Preciso estudar mais, mas me sinto segura, sim”.
P6	“Muito segura. Hoje sei de coisas que eu achava que sabia, sei lá..., mas, vou estudar mais sobre a Combinatória. Vou te aperrear muito ainda”.

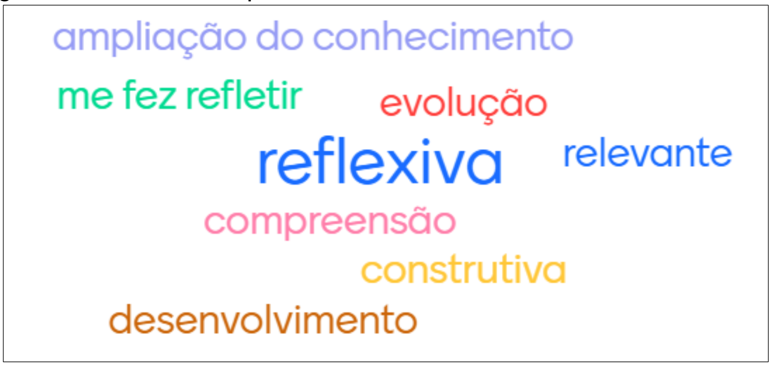
Fonte: A autora (2023).

Observamos nas falas das participantes, que de modo geral, o processo formativo lhe proporcionou reflexões acerca das situações Combinatórias, dos invariantes e, ainda, das distintas representações utilizadas pelos estudantes. Dentre as considerações das professoras, destacamos a de P1, que enfatizou que o processo formativo a ajudou em um conteúdo que havia estudado na graduação, mas que ainda tinha dificuldades. Também ressaltou que é possível trabalhar com a Combinatória desde o início do processo de escolarização e que o uso do material manipulável é um bom recurso para o levantamento das possibilidades. As considerações das professoras indicam **Conhecimento Especializado do Conteúdo**. No entanto, quando P1 defende que o ensino da Combinatória desde os primeiros anos da escolaridade pode ocorrer e que este envolve a apresentação gradual de problemas com níveis crescentes de dificuldade, ela também apresenta **Conhecimento do Conteúdo no Horizonte**.

As professoras indicaram segurança quanto aos conhecimentos adquiridos, no entanto, elas também apontam a necessidade de aprofundar ainda mais seus conhecimentos. A conscientização dessa necessidade de aprimoramento denota um compromisso genuíno com o desenvolvimento contínuo de suas competências pedagógicas e matemáticas.

Para concluir o processo formativo, questionamos as professoras: “Em uma palavra, como vocês definiriam esta formação para o seu conhecimento sobre Combinatória e ensino?” Em seguida, receberam um *link* gerado pelo Mentimeter e criaram uma nuvem de palavras colaborativa (Figura 19).

Figura 19 – Nuvem de palavras – conhecimentos sobre Combinatória



Fonte: A autora (2023).

Na Figura 19, observa-se palavras que indicam que a formação foi significativa e possibilitou que ampliassem os seus conhecimentos. Na sequência, as participantes foram convidadas a compartilhar de forma concisa o motivo por trás da indicação das palavras (Quadro 47).

Quadro 47 – Transcrição 35: processo formativo das participantes sobre Combinatória e seu ensino

Pesquisadora	**Vocês poderiam falar brevemente sobre a escolha de sua palavra que definiria esta formação para o seu conhecimento sobre a Combinatória e o ensino?**
P1	“Eu escolhi a palavra ‘evolução’, pois não tenho dúvida da minha evolução nesta formação. Mesmo eu tendo visto sobre a Combinatória na faculdade, aqui me fez compreender melhor... Em tudo... Com certeza isso vai refletir na minha prática...”.
P2	“Na verdade, coloquei mais de uma palavra [risos], as minhas foram ‘relevante’, ‘reflexiva’ e ‘construtiva’, porque a formação para mim, para todas nós, né?!... Foi tudo isso. Eu saio hoje sabendo de muitas coisas. Sei que nos problemas de combinatória, cada um tem suas particularidades... Então, ela foi super relevante, reflexiva e construtiva”.
P3	“A minha na verdade foi uma frase. Entendi errado então, mas foi eu que escolhi ‘me fez refletir’, e foi isso que a formação nos proporcionou. Me fez refletir sobre os problemas, os...esqueci o nome [risos]... invariantes, né? E a maneira... a representação das soluções dos alunos”.
P4	“Para mim, a formação foi desenvolvimento, porque eu acredito que foi isso que ela fez com a gente. Poxa, eu não tinha noção sobre nada de Combinatória. Sei que preciso continuar estudando e é isso que vou fazer depois daqui, mas hoje eu sei, por exemplo, saber quem são os conjuntos dos problemas, se a ordem importa ou não, essas coisas...”.
P5	“Para ser sincera, uma palavra não foi suficiente. Escolhi a palavra ‘compreensão’, mas existem outras, como as meninas já destacaram aqui. Mas escolhi a palavra ‘compreensão’, porque tudo que fizemos aqui foi isso. Compreendi que na Combinatória tem os problemas de combinação, permutação, produto de

	medidas e tem outro, que me esqueci agora [referindo-se ao problema de arranjo]. Compreendi as questões de ordem neles”.
P6	“Foi ‘ampliação de conhecimento’, porque foi isso que nos ofereceu. Eu não sabia de quase nada antes... Hoje compreendo os termos da Combinatória melhor”.

Fonte: A autora (2023).

Ao compararmos a entrevista inicial com o desenrolar de todo processo formativo das professoras e os questionamentos finais, percebe-se que houve considerável avanço. As participantes passaram a perceber que há diferentes tipos de problemas, discutiram sobre as diferentes representações simbólicas e entenderam sua relevância, reconheceram o uso de material manipulável como importante para auxiliar o estudante na resolução das situações e também, o uso da estratégia de sistematização das respostas para o esgotamento das possibilidades. Dessa forma, consideramos que o processo formativo proposto contribuiu para o desenvolvimento e mobilização de **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e Estudante** e **Conhecimento do Conteúdo e Ensino**.

Os resultados corroboram com Vergnaud (1996) ao ressaltar que trabalhar com as situações Combinatórias, suas propriedades e representações simbólicas são fundamentais para a conceitualização. Conforme expresso pelo referido autor “estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decurso de aprendizagem ou quando da sua utilização, é necessariamente considerar estes três planos ao mesmo tempo” (Vergnaud, 1996, p. 166).

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve início com um mapeamento das experiências e conhecimentos sobre Combinatória de professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso foi realizado por meio de entrevistas individuais semiestruturadas. Posteriormente, foi proposto um processo formativo organizado em três encontros.

Durante as entrevistas, as participantes destacaram a falta de compreensão da Combinatória entre os professores na Educação Básica, uma vez que o conteúdo não é estudado nos cursos de Pedagogia. Na Educação Básica a abordagem é focada em fórmulas e na ausência de integração entre os diversos problemas combinatórios. Quanto aos processos formativos, mencionaram a necessidade de recursos externos, como a internet, mas informaram que os processos formativos na área da Matemática/Combinatória não são muito procurados e nem oferecidos.

No primeiro encontro do processo formativo, na avaliação dos protocolos dos problemas combinatórios, foi evidenciado dificuldades iniciais, notadamente com equívocos relacionados as situações de arranjo e combinação. A interação entre as duplas e os questionamentos realizados pela pesquisadora foram fundamentais para minimizar tais equívocos.

A intervenção realizada pela pesquisadora, em conjunto com o trabalho em duplas, teve um papel fundamental no aprofundamento da compreensão das situações combinatórias. A dinâmica proposta no processo formativo promoveu uma abordagem reflexiva e colaborativa. Assim, por meio das discussões entre as duplas e a partir dos questionamentos feitos pela pesquisadora, as participantes passaram a refletir sobre os invariantes de escolha e de ordem e o esgotamento das possibilidades.

As professoras destacaram a importância de questionar e incentivar os estudantes a identificarem os invariantes, como o esgotamento de possibilidades, o número de elementos utilizados em cada situação e a influência da ordem dos elementos na formação de novas possibilidades. Além disso, reconheceram a relevância do material manipulável como um recurso para o ensino e a aprendizagem da Combinatória.

Por meio da análise dos protocolos dos estudantes, as professoras identificaram que a escolha das estratégias para a resolução de problemas combinatórios está relacionada aos níveis de compreensão e habilidades matemáticas dos estudantes. Desse modo, destacaram a necessidade de explorar diferentes estratégias, como o diagrama de árvores, desenhos, listagem e outras no ensino de Combinatória.

No decorrer do processo formativo, observou-se o desenvolvimento de conhecimentos sobre Combinatória pelas participantes. Inicialmente, algumas professoras tinham uma compreensão limitada sobre a diversidade de situações combinatórias existentes. No entanto, no final do processo formativo, demonstraram um amplo entendimento dos diferentes tipos. Embora algumas não nomeassem explicitamente, suas falas revelaram reconhecimento das características das situações Combinatórias.

A formação não se restringiu ao aprendizado de terminologias específicas, mas também focou na percepção das particularidades das situações, o que se mostrou essencial para o aprimoramento do **Conhecimento Especializado da Combinatória**. Além disso, as professoras apresentaram um progresso no reconhecimento dos invariantes relacionados à escolha e ordem dos problemas apresentados, evidenciando a contribuição do processo formativo na identificação dos invariantes das situações.

Uma análise comparativa entre a entrevista inicial e o processo formativo revelou o desenvolvimento e a mobilização dos **Conhecimentos Especializados do Conteúdo**, **do Conteúdo e Ensino**, e **do Conteúdo e Estudante**. Ao longo do processo, as participantes passaram a identificar e discutir com segurança as características dos problemas combinatórios, especialmente em arranjo e combinação. Também demonstraram habilidade em refletir sobre as diferentes representações usadas pelos estudantes, mesmo que não conseguissem defini-las explicitamente, e reconheceram a sistematização como uma boa estratégia para auxiliá-los na resolução das situações Combinatórias. Diante do exposto, consideramos que o processo formativo contribuiu com o aprimoramento do conhecimento das professoras, podendo também fortalecer o ensino da Combinatória em sala de aula.

É de conhecimento da comunidade acadêmica que a formação inicial e continuada dos professores desempenha um papel fundamental no aprofundamento dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula e na qualidade do ensino. É possível que muitos conceitos sejam negligenciados, como a Combinatória, se não forem propostas formações adequadas.

Diante do exposto, nosso estudo indica que uma formação sobre Combinatória, como a que propomos, permitirá que os professores se sintam mais seguros e preparados desenvolver práticas educativas. Isso, por sua vez, contribuirá para que os estudantes compreendam melhor os conteúdos propostos, bem como a aplicabilidade da Matemática em suas vidas.

Almejamos com essa pesquisa contribuir com a compreensão acerca da interação entre os domínios dos conhecimentos docentes no processo formativo, com um foco especial nos professores que ensinam Matemática e, mais especificamente, na preparação desses professores para o ensino da Combinatória. O estudo realizado pode trazer elementos para que outros pesquisadores investiguem propostas de formações e suas implicações na sala de aula. Por fim, a análise dos conhecimentos docentes dos professores de Matemática em outras etapas de ensino, juntamente com a proposição de formações envolvendo situações, invariantes e representações simbólicas, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriana Luziê de. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática**: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio. 166 f. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) − Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/2522. Acesso em: 13 fev. 2023.

ASSIS, Adryanne Maria Rodrigues Barreto de. **Conhecimentos de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada**: reflexões e prática de uma professora. 173 f. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/12550. Acesso em: 12 fev. 2023.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades**: é melhor no papel ou no computador? 127 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/13237/1/Dissertacao%20Juliana%20Azevedo.pdf. Acesso em: 5 nov. 2022.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O uso de árvores de possibilidades – com e sem recurso tecnológico – no ensino da combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Matemática, 15, Campina Grande, 2011. *In:* **Anais do [...]**. Campina Grande, 2011.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, [*s. l.*], vol. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special. Acesso em: 21 nov. 2022.

BARRETO, Fernando Lopes Sá; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Salvador, 2010. *In*: **Anais DO [...]**. Salvador, 2010. Disponível: https:/-drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U/view?resourcekey=0-XF-iEMLPoRSRK-87Y6vg5w. Acesso em: 15 nov. 2022.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan D. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], vol. 32, n. 2, p. 181-199, 1997. Disponível em: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Implicitmodel.pdf. Acesso em: 12 dez. 2022.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da Combinatória no início da escolarização. Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade nos Anos Iniciais, 7, Recife, 2016. *In:* **Anais do [...]**. Recife, 2016.

Disponível em: http://anaisencepai.edumatec.net/index.php/2016-02-24-19-44-28/2016-02-25-18-07-54/item/antes-cedo-do-que-tarde-o-aprendizado-da-combinatoria-no-inicio-da-escolarizacao. Acesso em: 14 nov. 2022.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O raciocínio combinatório na educação básica. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Salvador, 2010. *In*: **Anais do [...]**. Salvador, 2010. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhaHd2YVBKVllRVm8/view?resourcekey=0-LaQF_U7G_4n-JPxm7W014g. Acesso em: 2 fev. 2023.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, Curitiba, 2013. *In*: **Anais do [...]**, Curitiba, 2013. Disponível em: https://docs.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhcTdyNERuQ2s3NEE/edit?resourcekey=0-OzcoxWAELIBpsXGZ73HodQ. Acesso em: 3 dez. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 5 nov. 2022.

BRASIL. **Resolução CNE/CP nº 1, de 15 de maio de 2006**. Institui diretrizes curriculares nacionais para o curso de graduação em Pedagogia, licenciatura. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 16 maio 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_06.pdf. Acesso em: 22 nov. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 1 fev. 2023.

FLORENCIO, R; GUIMARÃES G. A resolução de problemas de Produto Cartesiano na Educação Infantil. **Caderno de Trabalho de Conclusão de Curso de Pedagogia – UFPE - 2017**. Recife, 2017.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários a prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GADELHA, Dacymere da Silva. **Resolução de problemas combinatórios nos anos iniciais**: uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©). 168 f. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação em Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/37951/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Dacymere%20da%20Silva%20Gadelha.pdf. Acesso em: 20 nov. 2022.

GADELHA, Dacymere da Silva; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; MONTENEGRO. Juliana Azevedo. O uso de recursos didáticos na resolução de problemas combinatórios. **Revista Paraense de Educação Matemática**, [*s. l.*], vol. 9, n.18, p. 419-441, 2020. Disponível em:

http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/664. Acesso em: 21 fev. 2023.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tania Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 111 f. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

LAZZARIN, Luís Fernando. **Bases epistemológicas da pesquisa em Educação**. Santa Maria: UFSM, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15808/Bases_epistemologicas_Educao_Especial.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 5 nov. 2022.

LIMA, Ana Paula Barbosa de. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. 139 f; 2020. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/18810. Acesso em: 11 nov. 2022.

LIMA, Ewellen Tenorio de. **Raciocínios combinatórios e probabilísticos na EJA**: investigando relações. 142 f. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29717. Acesso em: 5 nov. 2022.

LIMA, Iranete Maria da Silva. Prática Docente: conhecimentos que influenciam as decisões didáticas tomadas por professores. *In*: DIAS, Adelaide Alves; MACHADO, Charliton José dos Santos; NUNES, Maria Lúcia da Silva (Orgs.). **Educação, Direitos Humanos e Inclusão Social**: currículo, formação docente e diversidades socioculturais. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2009.

LIMA, Itatiane Borges. **Aulas de Combinatória no Ensino Médio**: como estão ocorrendo. 115 f. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17751/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20Itatiane%20Borges%20Lima.pdf. Acesso em: 18 jan. 2023.

LOCKWOOD, Elise; WASSERMAN, Nicholas H.; TILLEMA, Erik S. A case for combinatorics: A research commentary. **The Journal of Mathematical Behavior**, vol. 59, p. 1-15, 2020.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, S. **(RE)Significar as Estruturas Multiplicativas a partir da formação ‘Ação -Reflexão -Planejamento -Ação do professor**. Edital Universal, Projeto nº 471247/2008 -1. CNPq, 2008.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTOS, Aparecido dos. MERLINI, Vera Lucia. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**, vol. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera Lúcia; SANTOS, Aparecido dos. A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, 2012. *In*: **Anais do [...]**, Recife, 2012. Disponível: https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/mesas/3/3.pdf. Acesso em: 2 fev. 2023.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MERAYO, Felix García. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo, 2001.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 248 f. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/32446/4/TESE%20Juliana%20Azevedo%20Montenegro.pdf. Acesso em: 5 nov. 2022.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco P.; CARVALHO, Paulo Cesar P.; FERNADEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tania Maria M.; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação matemática**: números operações. São Paulo: Cortez, 2005.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife: Undime PE, 2012.

PESSOA, C.; SANTOS, L. Resolução de problemas combinatórios a partir de material manipulativo e de lápis e papel: intervenções no 5º ano do ensino fundamental. **Revista Educação Online**, n. 18, 2015.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.267 f. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Salvador, 2010. *In:* **Anais do [...]**. Salvador, 2010. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhY29xeTcxbGpENzA/view?resourcekey=0-nAt9Apwzay1TpMY5jc_qEA. Acesso em: 11 dez. 2022.

ROCHA, C. A**. Estudo de combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico**: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas? 381 f. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Ensino de Combinatória: expectativas de professores que atuam no ensino fundamental. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5, Petrópolis, 2012. *In*: **Anais do [...]**. Petrópolis: SIPEM, 2012

ROCHA, Cristiane de Arimatéa. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 192 f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3774. Acesso em: 17 fev. 2023.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; FERRAZ, Martha Cornélio. **Conhecimentos de professores de Pedagogia e Matemática sobre problemas combinatórios**. 2010. Relatório (Tópicos em educação Matemática) - Programa de Pós-graduação de Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2010. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1681/836. Acesso em: 21 jul. 2021.

ROSA, Maria Virgínia de Figueiredo Pereira do Couto; ARNOLDI, Marlene Aparecida Gonzalez Colombo. **A entrevista na pesquisa qualitativa**: mecanismos para validação dos resultados. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes docentes**: a análise combinatória no Ensino Médio. 2010 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/11440. Acesso em: 15 dez. 2022.

SANTOS, Aparecido dos. **Processos de formação colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo**: um caminho possível com professoras polivalentes. 340 f. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/10904. Acesso em: 5 nov. 2022.

SANTOS, Mariana Oliveira; MERLINI, Vera Lucia. A Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais em Relação à Comparação Multiplicativa. **Perspectivas da Educação Matemática**, [*s. l.*], vol. 11, n. 25, p. 175-195, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2322/4618. Acesso em: 3 dez. 2022.

SANTOS, Ronaldo Floreano dos. **A formação do pedagogo e o ensino da matemática**. 2021. 171 f. Dissertação (Mestre em Educação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://bdtd.ucb.br:8443/jspui/bitstream/tede/2927/2/RonaldoFloreanodosSantosDissertacao2021.pdf. Acesso em: 5 nov. 2022.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, [*s. l.*], vol. 57, n. 1, feb. 1987. Disponível em: https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf. Acesso em: 12 dez. 2022.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: in knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, [*s. l.*], vol. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, Luciane Ribeiro; BÔAS, Jamille Vilas. Contribuições do Uso de Manipuláveis como Estratégia na Resolução de Problemas sobre o Princípio Multiplicativo. **Revista Ensino em Foco**, [*s. l.*], v. 2, n. 4, p. 85-98, 2019. Disponível em: http://publicacoes.ifba.edu.br/ensinoemfoco/article/view/473. Acesso em: 6 jan. 2023.

SOUZA, A.; MARASCA, L. Ensino Aprendizagem - Avaliação de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010. *In:* **Anais do [...]**, Salvador, 2010.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. Ensino Aprendizagem - Avaliação de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Salvador, 2010. *In*: **Anais do [...]**, Salvador, 2010. Disponível em: https://docplayer.com.br/53907113-Ensino-aprendizagem-avaliacao-de-analise-combinatoria-atraves-da-resolucao-de-problemas.html. Acesso em: 18 dez. 2022.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

TARDIF, Maurice; RAYMOND, Danielle. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, [*s. l.*], ano 21, n. 73, dez. 2009. Disponível em: https://www.scielo.br/j/es/a/Ks666mx7qLpbLThJQmXL7CB/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 20 jan. 2023.

TEIXEIRA, Paulo Jorge. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao Professor de matemática para a Exploração de problemas de contagem no ensino Fundamental**. 459 f. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3494/1/PAULO%20JORGE%20MAGALH%C3%83ES%20TEIXEIRA.pdf. Acesso em: 16 nov. 2022.

TRIPP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, vol. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27989/29770. Acesso em: 5 nov. 2022.

VEGA, Danielle Avanço. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha**: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação. 115 f. 2014.

Dissertação (Mestrado em Educação em Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VERGNAUD, Gérard. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, [*s. l.*], vol. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora da UFPR, 2014.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos campos conceituais. *In*: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. **El Niño, las Matemáticas y la Realidad.México**: Editorial Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Conceptual Field What and Why?. *In*: HAREL, Guershon; CONFREY, Jere (Orgs.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Nova York: Eric, 1994. p. 41-59. Disponível: https://eric.ed.gov/?id=ED379161. Acesso em: 2 fev. 2023.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, [*s. l.*], n. 1, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 1 fev. 2023.

VERGNAUD, Gérard. Qu'est-ce qu'apprendre. Colloque IUFM du Pole Nord-Est IUFM, Besançon, 2007. *In:* **Anais do [...]**, Besançon: IUFM, 2007.

APÊNDICE A – PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

<table>
<tr><td>
Carlos começou a trabalhar em uma rede de supermercados e acabou de receber o seu fardamento: 4 camisetas em cores diferentes com o logo da empresa e 2 calças. Quantos conjuntos de uniforme diferentes Carlos pode formar com as peças recebidas?


</td></tr>
<tr><td>
Sara tem 5 primos e quer escolher 3 deles para acompanhá-la no aniversário de uma amiga. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer essa escolha?

</td></tr>
<tr><td>
Maria gosta muito de literatura brasileira e seu autor favorito é José de Alencar. Ela ganhou 3 livros desse autor de presente de aniversário e ainda não decidiu em que ordem irá lê-los. Quantas ordens de leitura diferentes são possíveis?

</td></tr>
<tr><td>
Quatro rapazes desejam participar de uma “pelada” com seus amigos e querem definir um atacante e um goleiro. De quantas formas diferentes os rapazes podem se organizar para ocupar as posições citadas?

</td></tr>
</table>

Fonte: Lima (2018).

APÊNDICE B – ESTRUTURA DO CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

A formação foi composta por três encontros realizados semanalmente, em dias diferentes, de forma síncrona pela plataforma Google Meet, com duração entre 1h e 1h30. No primeiro e no segundo encontros foram desenvolvidos trabalhos separadamente em pequenos grupos (GTs) com três duplas; no terceiro encontro, as atividades foram desenvolvidas coletivamente.

Inicialmente, a pesquisadora foi à escola em que cada participante trabalhava e entregou um kit com os materiais que foram utilizados em cada encontro, como a ficha com os problemas, os protocolos dos problemas, as respostas dos estudantes, as fichas do material manipulável, lápis e borracha. A seguir, descrevemos os encontros realizados.

Primeiro encontro:

MOMENTO 1 (10min):

Objetivo*:* Propor uma interação entre as participantes da pesquisa e a pesquisadora. Nesse encontro, a intenção foi realizar uma breve apresentação da formação, de forma coletiva, abrindo momentos para que as participantes pudessem esclarecer possíveis dúvidas. Além disso, a pesquisadora se apresentou enquanto mestranda e professora, falando um pouco da sua trajetória acadêmica e profissional. Com isso, propôs que as participantes fizessem o mesmo para se conhecerem mutualmente, visando a uma boa relação entre elas nos encontros seguintes.

MOMENTO 2 (1h-1h20min):

Objetivo*:* Analisar e discutir o **Conhecimento Especializado do Conteúdo das professoras** sobre as diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios e explorar as suas propriedades invariantes e como elas se apresentam em cada situação.

Para esse momento, o intuito foi observar como as professoras: a) mobilizam o conhecimento especializado de Combinatória; b) reconhecem e diferenciam os tipos de problemas; e c) apontam as características próprias, sejam elas de ordem de elementos ou de uso, ou não, de todos os elementos de um dado conjunto.

Materiais utilizados: materiais manipuláveis e folha impressa com situações-problemas (entregues previamente).

1. Foram apresentados, em slides, quatro problemas combinatórios – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas;

2. Em seguida, em dupla, com o uso dos materiais manipuláveis, foi solucionado um problema de cada tipo – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. Com a presença da pesquisadora, as duplas formadas discutiram e responderam, com o material manipulável, os problemas apresentados;

3. Logo após, a pesquisadora solicitou às participantes que fotografassem a resolução dos problemas com o material manipulável e enviassem as fotos para seu WhatsApp para ser discutido coletivamente;

4. Por fim, a pesquisadora solicitou às participantes que respondessem ao Protocolo dos Problemas.

Após a resolução das situações, as duplas eram confrontadas e interrogadas pela pesquisadora sobre suas soluções para que refletissem sobre suas respostas e expusessem seus raciocínios.

Os problemas combinatórios que foram trabalhados nesse momento foram retirados da pesquisa de Gadelha (2020), com adaptação no nome de seus elementos. O material manipulável foi composto por figuras representando os elementos das situações, com fichas repetidas para cada elemento; assim, o quantitativo extrapolava o necessário para o esgotamento das possibilidades.

Os problemas e questionamentos feitos nesse encontro foram:

Arranjo:

1 – Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante? (Gadelha, 2020).

Questionamentos feitos pela pesquisadora às professoras participantes:

a) Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles? / Qual é ele?

b) De quantas maneiras diferentes pode ser escolhido um representante e um vice-representante? Por quê?

c) Todos os elementos do conjunto alunos serão utilizados?

d) A ordem da colocação dos cargos gera novas possibilidades? Por quê?

e) Escolher os alunos César e Bete é a mesma coisa que escolher os alunos Bete e César? Isso gera novas possibilidades?

Combinação:

2 – Na barraca **Espaço Drinks** há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?

Questionamentos feitos pela pesquisadora às professoras participantes:

a) Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles /Qual é ele?

b) Poderão ser constituídos subconjuntos de frutas a partir deste conjunto maior de frutas?

c) Quantos subconjuntos diferentes podemos ter nesta situação?

d) A ordem sabores das frutas da barraca poderá escolher gera novas possibilidades? Por quê?

e) Escolher acerola e laranja é a mesma coisa que escolher laranja e acerola?

Permutação:

3 – Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?

Questionamentos feitos pela pesquisadora às professoras participantes:

a) Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles? / Qual é ele?

b) Todos os objetos são utilizados lado a lado na prateleira?

c) De quantas formas diferentes pode-se organizar os três objetos na prateleira?

d) A ordem da organização gera novas possibilidades? Por quê? Escolher, nesta ordem, bola, troféu e porta-retrato, é a mesma coisa que escolher porta-retrato, troféu e bola?

Produtos de medidas:

4 – Na lanchonete *Oba-oba* há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?

Questionamentos feitos pela pesquisadora às professoras participantes:

a) Neste problema há quantos conjuntos? Quais são eles? / Qual é ele?

b) Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos dos copos são diferentes?

c) Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos de copos, ao serem combinados, podem construir um novo conjunto? Quais seriam as possibilidades?

d) A ordem dos sabores dos sucos e de tamanhos dos copos gera novas possibilidades de combinação? Por quê?

Ainda nesse encontro, a pesquisadora solicitou um protocolo a ser preenchido. Os problemas foram deixados em uma página do slide e as professoras solicitadas a responder o protocolo dos problemas que haviam lhes sido entregues. Veja o modelo a seguir.

Protocolo dos problemas

Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**
1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos. 2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados. 3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos. 2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados. 3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos. 2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados. 3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos. 2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados. 3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.

Fonte: Autora (2023)

Segundo encontro: (realizado com as mesmas duplas formadas no encontro anterior).

Objetivo: Tratar das variadas representações simbólicas possíveis para a resolução dos problemas combinatórios e da ideia de organização dos procedimentos de resolução e generalização.

Para esse encontro, o intuito foi observar como as professoras mobilizam o conhecimento da Combinatória com seus estudantes. Dessa forma, as professoras precisariam: 1) apontar e descrever as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem problemas combinatórios; 2) mostrar familiaridade com erros comuns cometidos pelos estudantes; 3) prever facilidades e/ou dificuldades de seus estudantes na resolução de diferentes situações combinatórias; e 4) antecipar o que os estudantes poderiam considerar interessante e motivador para a estratégia de resolução de situações combinatórias.

Materiais utilizados: folha impressa com os protocolos de respostas dos estudantes (entregues previamente).

Inicialmente, foi feita uma retomada do encontro anterior, refletindo sobre as propriedades invariantes dos problemas combinatórios. A seguir, apresentou-se, em slides, o quadro seguinte às professoras, o qual foi também discutido. Foi então destacada a importância dos invariantes e apontadas as características de cada problema.

	Exemplos de Situações-Problema	**Invariantes**
Produto de Medidas	Na lanchonete *Oba-oba* há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?	- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com *n* e com *p* elementos), eles serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Permutação	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?	Todos os *n* elementos do conjunto serão usados. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

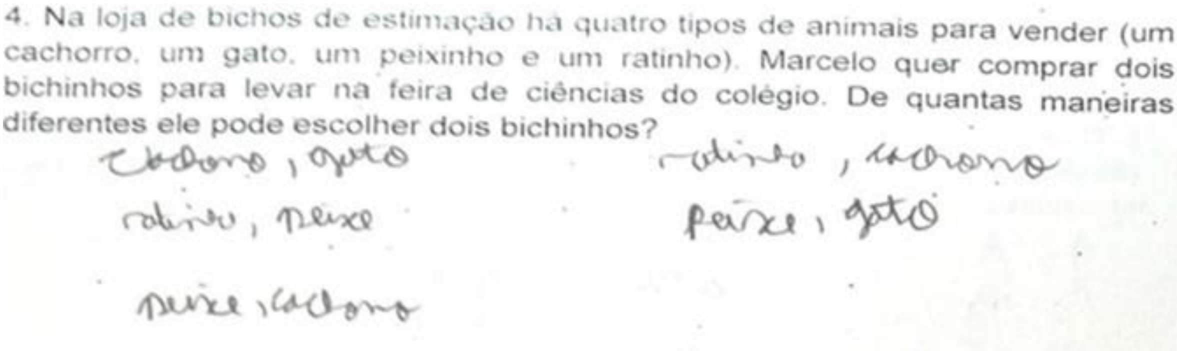
Arranjo	Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?	- Tendo *n* elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... *p* elementos com < *p* < *n*. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades
Combinação	Na barraca *Espaço Drinks* há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?	- Tendo *n* elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... *p* elementos com < *p* < *n*. - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades

Fonte: Autora (2023).

Logo em seguida, com os protocolos relativos ao desempenho dos estudantes em relação aos problemas de Combinatória apresentados, as professoras puderam apontar e descrever as dificuldades apresentadas pelos estudantes. Dessa forma, foram apresentados, em *slides*, alguns protocolos (que as professoras já tinham recebido previamente) para serem analisados e discutidos.

Protocolos - respostas de estudantes

Protocolo 1

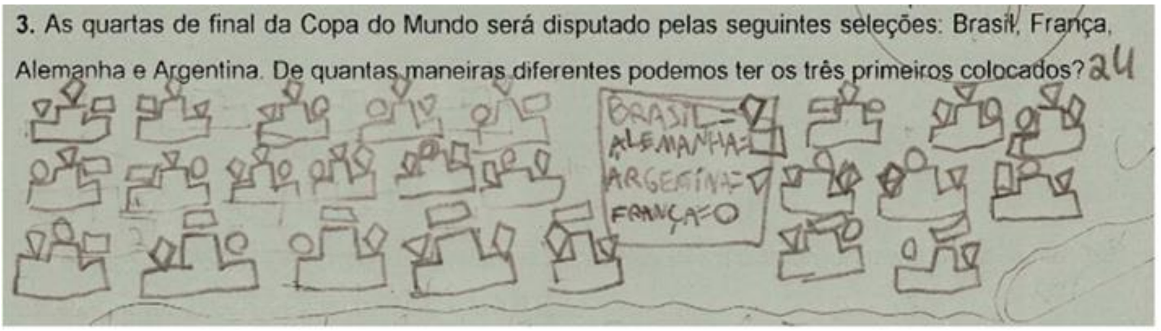


4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

cachorro, gato
ratinho, cachorro
ratinho, peixe
peixe, gato
peixe, cachorro

Fonte: Vega (2014).

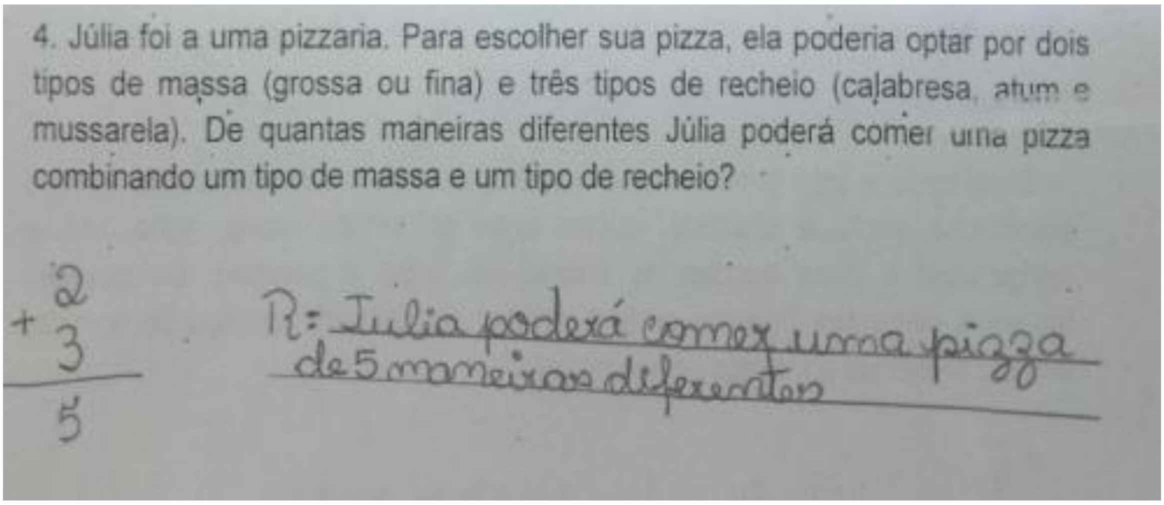
Protocolo 2



3. As quartas de final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? 24

Fonte: Pessoa e Borba (2009, p. 33).

Protocolo 3



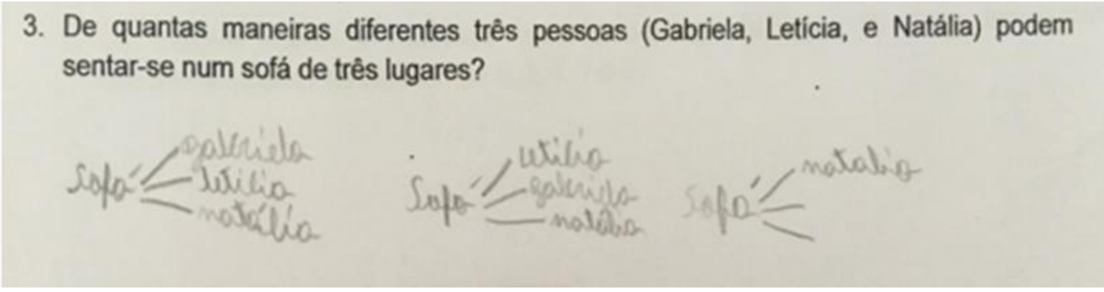
4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

R: Julia poderá comer uma pizza de 5 maneiras diferentes

Fonte: Vega (2014).

Protocolo 4


3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Gabriela, Letícia, e Natália) podem sentar-se num sofá de três lugares?

Fonte: Montenegro (2018).

Com o intuito de observar como as duplas de professoras mobilizam **Conhecimento da Combinatória e Estudantes** e **Conhecimento da Combinatória e Ensino**, foram feitos alguns questionamentos referentes aos protocolos de respostas dos estudantes.

Roteiro de questões para análise dos protocolos

Estes questionamentos (1-3) foram feitos para cada problema apresentado:

1 – O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?
2 – A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Caso não, qual seria a resposta correta?
3 –Foram esgotadas todas as possibilidades de combinações? Ou seja, foram enumerados ou contados todos os casos que atendem ao solicitado no problema?

Estes questionamentos (4-7) foram feitos após a apresentação das quatro situações:

4 – Qual dos estudantes apresentou mais dificuldades? Qual foi a dificuldade? Por que isso aconteceu?
5 – De que maneira os estudantes resolveram os problemas (listagem, diagramas de possibilidades ou desenhos)? O que você pode dizer sobre as estratégias escolhidas por eles?
6 – Como trabalhar com essas questões na sala de aula a fim de que os estudantes possam enxergar as propriedades dos invariantes de cada problema?
7 – O que poderia ser antecipado para que os estudantes considerassem interessante e motivador na estratégia de resolução de situações combinatórias?

Terceiro encontro:

Objetivos: Discutir e refletir sobre como deve ser trabalhada, em sala de aula, a Combinatória. E, verificar as possíveis mudanças nos conhecimentos das participantes ao longo do desenvolvimento do processo formativo.

Este encontro foi realizado coletivamente com as seis professoras em uma sala no Google Meet. Para isso, verificamos os conhecimentos das professoras acerca do **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, **Conhecimento do Conteúdo e Estudante** e **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** quanto às situações, aos invariantes e às representações simbólicas das situações combinatórias segundo a perspectiva de Vergnaud (1986).

Foi questionado as professoras (por meio de roteiro 1 de questionamentos) sobre as semelhanças e as diferenças que existem entre os problemas de Combinatória – os invariantes de ordem e de escolha. Dessa maneira, foram apresentados, para as professoras, oitos problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. Destes, quatro já haviam sido trabalhados e discutidos nos encontros anteriores, especificamente no primeiro encontro. As situações apresentadas para as participantes foram as seguintes:

Problemas combinatórios

Problema 1 – Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?
Problema 2 – Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?
Problema 3 – Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?
Problema 4 – Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrons, pretas e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

Problema 5 – Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?
Problema 6 – Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?
Problema 7 –Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugares?
Problema 8 – Dona Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque. No brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes podem as três crianças brincarem juntas por vez no pula-pula?

Roteiro 1 de questionamentos feitos às professoras:

1. Dentre os problemas aqui apresentados, quais exigem o mesmo raciocínio? Por quê? 2. Dos problemas que vocês agruparam por possuírem o mesmo raciocínio, seus elementos partem de um único conjunto ou de mais de um conjunto? Qual é? / Quais são? 3. Esses elementos são todos utilizados ou somente alguns são? Explique. 4. Os elementos geram ou não novas possibilidades de respostas? Explique.

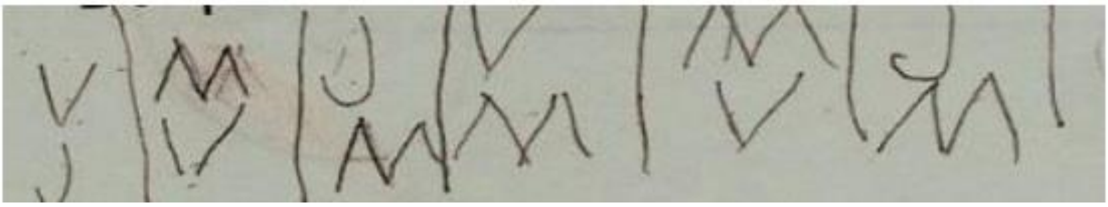
Em seguida, discutimos com as professoras sobre as situações de arranjo e combinação, identificando a presença ou não de ordenação nas situações propostas. Diante disso, foram apresentados, em slides, os protocolos 5 e 6 respondidos por um estudante, retirados do estudo de Pessoa (2009), para as participantes analisá-los e discuti-los. O roteiro de questionamentos foi o seguinte:

Roteiro 2 de questionamentos feitos às professoras:

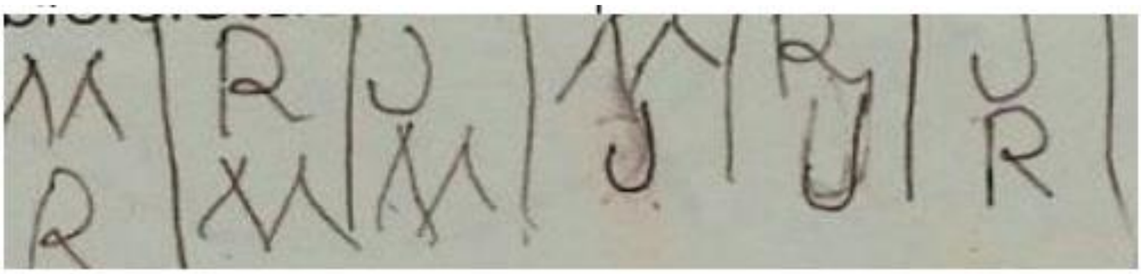
Observe as seguintes estratégias dos estudante:[20].

[20] As imagens seguintes foram projetadas em slides.

Para representante de turma de uma sala se candidataram três pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



Três alunos (Mário, Raul e Júnior) irão participar de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?



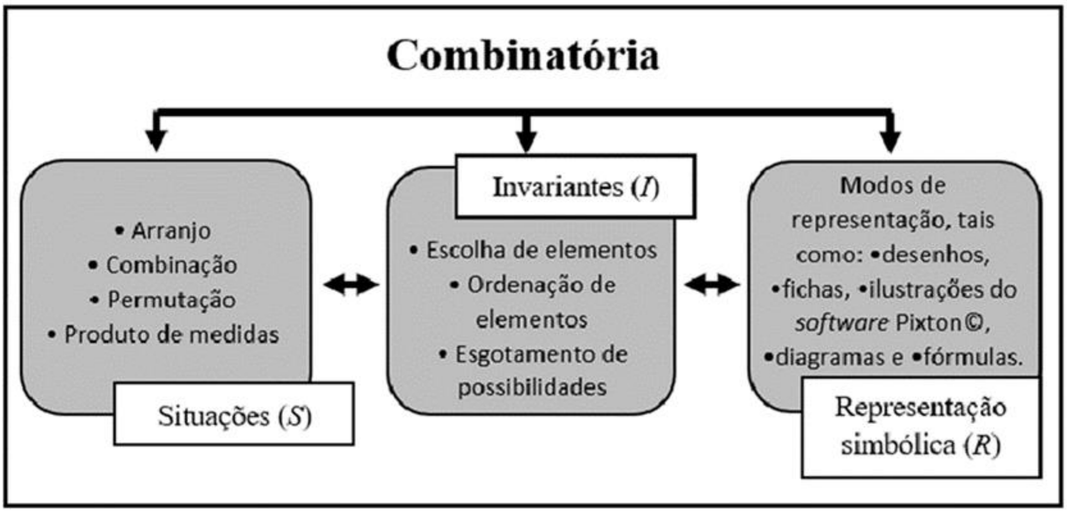
1.O estudante compreendeu os problemas?

2. Qual foi a lógica utilizada?

3. As estratégias estão adequadas para as duas situações? Por quê

E, seguida, foram discutidas, brevemente, as diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios e as suas propriedades invariantes, e como essas propriedades se apresentam em cada situação. Dessa maneira, foram apresentados os seguintes slides para discussão:

Situações, invariantes e representação simbólica



Vergnaud (1986, p. 198).

Situações e invariantes da combinatória

Produto de medidas: (1) dois (ou mais) conjuntos diferentes serão combinados para construir um novo grupo; (2) diferentemente dos demais tipos de problema, a ordem dos elementos poderá ou não gerar novas possibilidades. **Arranjo:** (1) um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não são utilizados todos os elementos do grupo maior; (2) a ordem e a escolha dos elementos irão gerar novas possibilidades. **Permutação:** (1) todos os elementos serão utilizados, cada um apenas uma vez; (2) a ordem dos elementos do conjunto irá gerar novas possibilidades. **Combinação:** (1) de um conjunto maior, serão selecionados objetos ou situações que constituirão subgrupos; (2) a ordem dos objetos escolhidos não gerará novas possibilidades.

Fonte: Pessoa e Borba (2009)

Logo após, a pesquisadora trouxe alguns questionamentos a respeito dos termos da Combinatória a fim de que as participantes refletissem sobre eles e o seu desenvolvimento durante o processo formativo. A seguir, apresentamos o roteiro de questionamentos:

Roteiro 3 de questionamentos feitos às professoras:

1.Depois de toda as nossas discussões até aqui, quais erros vocês acreditam que os seus estudantes poderiam cometer nos problemas de combinatória que trabalhamos? 2. Como trabalhar com essas situações combinatórias na sala de aula a fim de que os estudantes possam enxergar as propriedades dos invariantes de cada problema? 3. Como já foi discutido nos encontros anteriores, as diferentes representações simbólicas para resolver as situações-problema podem ser desenhos, listagem, árvore de possibilidades, quadros, diagramas, princípio multiplicativo, dentre outras. Você acha que há uma representação mais adequada do que a outra para resolver os problemas de Combinatória? Por quê? 4. Considerando-se os seus estudantes que têm dificuldade em Combinatória, como vocês relataram em nossa entrevista no início desta pesquisa, como vocês, agora, depois desta formação, poderiam ajudá-los a progredirem? 5. Você acredita que o processo formativo ajudou a desenvolver os seus conhecimentos sobre a Combinatória? Se sentem seguras?

Por fim, questionamos as professoras: “Em uma palavra, como vocês definiriam esta formação para o seu conhecimento sobre Combinatória e ensino?” Em seguida receberam um link gerado pelo Mentimeter e criaram uma nuvem de palavras colaborativa alimentando-a de maneira simultânea.