UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

EDUARDO GOMES LOPES

OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE E DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Caruaru
2023

EDUARDO GOMES LOPES

OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE E DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.
Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida

Caruaru

2023

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Nasaré Oliveira - CRB/4 - 2309

L864n Lopes, Eduardo Gomes.
Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sob a perspectiva da teoria de Van Hiele e da teoria antropológica do didático. / Eduardo Gomes Lopes. – 2023.
121 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2023.
Inclui Referências.

1. Teoria de van Hiele. 2. Triângulo. 3. Modelos geométricos. 4. Matemática (Ensino fundamental). 5. Compreensão. I. Almeida, Fernando Emílio Leite de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2023-091)

EDUARDO GOMES LOPES

OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE E DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.
Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática

Aprovado em: 30/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. FERNANDO EMÍLIO LEITE DE ALMEIDA
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Orientador)

____

Prof. Dr. MARCUS BESSA DE MENEZES
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Examinador Interno)

____

Prof. Dr. JOSÉ LUIZ CAVALCANTE
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB (Examinador Externo)

Dedico este trabalho a minha base, que são minha família e meus amigos, principalmente aos meus pais, Maria Izabel e Izidorio, cujo empenho em me educar sempre veio em primeiro lugar. Gratidão eterna, por tudo que fizeram e fazem por mim

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir vivenciar essa experiência extraordinária e tão importante ao lado de pessoas muito especiais.

Aos meus pais, Izidorio e Maria Izabel, aos meus irmãos, Edson, Maria Edna, Evandro, Elisandro e Maria Eduarda, por todo apoio e aperreio durante todos os momentos da minha vida e a sempre acreditarem nos meus sonhos, principalmente a Maria Eduarda, que me ajudou bastante nos meus devaneios durante a escrita desta dissertação, a vocês gratidão eterna.

Ao meu orientador, Professor Fernando Emílio, palas valiosas orientações, pelo apoio, pela dedicação, pela paciência com as demandas e principalmente pelo ambiente de harmonia e amizade.

Aos professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco – Campus Pesqueira por todas as contribuições em minha formação docente, por todos os incentivos durante e após o período da licenciatura, especialmente a Airlan Lima, Andreza Maria, Bruno Lopes, Carlos Bino, Fernando Emílio, Leonardo Amorim, Kalina Cúrie, Olavo Otávio (in memoriam), entre tantos outros, aos quais me espelho todos os dias na missão de ser docente.

Aos meus professores da educação básica, nas pessoas de Ronaldo Barbosa, Márcia, Cristina, Maria Aparecida, Selmita Costa, Adriana Cavalcanti, Magda Tavares, Iran, Cícera, e aos demais, por terem sido à base de tudo, e por hoje vibrarem pelas minhas conquistas, tudo isso foi possível graças a vocês.

Um agradecimento especial também para os membros da banca avaliadora, pela confiança depositada em mim, e também pelas contribuições valiosas apresentadas desde a qualificação que enriqueceram o escopo desta pesquisa.

Aos meus colegas da turma 2021 do PPGECM, por todos os momentos de aprendizados compartilhados durante esse tempo, em especial a Cicefran, Juliane, Acássio, Ailza, Jader, Natália, Ronaldo, Robson, Luciana, Mary, Rosário e Ernestina, pelo companheirismo e amizade, pela ajuda nos estudos e as boas conversas durante os trabalhos.

Aos professores do PPGCEM por contribuírem significativamente para minha formação, por todas as discussões riquíssimas vivenciadas em todas as disciplinas cursadas.

Aos meus amigos Anderson Rodrigo, Francinette Mendes, Lidiane Alves, Hercílio Honório, Gisele Dourado, Matheus Gomes, Anne Caroline, Allyne Sandra, Emerson Rodrigues, Fernanda Morais, Márcia Neves, Claudivania Macial, Thiago Olímpio, Maria Janiely, entre tantos outros que apesar da distância sempre permaneceram ao meu lado e comemoraram as minhas vitórias, nunca me esquecerei de vocês. Em especial a Anderson Rodrigo e Francinette Mendes, meus companheiros de "guerra", que me ajudaram em momentos sombrios, sem vocês tudo isso teria sido mais difícil e menos alegre! Que Deus os ilumine sempre!

Por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram pra que fosse possível realizar este trabalho, meu muito obrigado!

“Entretanto, qualquer seja o ponto a que chegamos, conservemos o rumo” (BÍBLIA, Felipenses, 3, 16, p. 2051).

RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo geral identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de uma turma do 8º ano do ensino fundamental em relação ao conteúdo de triângulos caracterizados pelas medidas dos comprimentos de seus lados (equilátero, escaleno e isósceles), pelas medidas de seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e pelos casos de congruência. O estudo foi desenvolvido com 31 estudantes de uma escola pública da rede municipal, em uma cidade pertencente ao Agreste do Estado de Pernambuco, Brasil. Nesse sentido, utilizamos como aporte teórico a Teoria de Van Hiele (1957) sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, por se tratar de uma teoria que discute questões relacionadas com ensino e a aprendizagem da Geometria, e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), em especial, as organizações praxeológicas. Para tanto, elaboramos um instrumento de verificação (teste sobre triângulos) a fim de identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da turma a partir da análise das Organizações praxeológicas presentes no livro didático utilizado pela turma e de acordo com a Teoria de Van Hiele. Os principais resultados, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento geométrico da turma, considerando a teoria de Van Hiele (1957), apontam que a turma se encontra no nível 0 (28 estudantes), e que uma parcela desses estudantes está em processo de atingir o nível 1 (17 estudantes), em relação a TAD, encontramos uma dificuldade em correlacionar os tipos de tarefas e técnicas nos níveis de compreensão. Observamos, a partir da análise das Organizações Matemáticas presentes no livro didático da turma, uma tendência do autor para um enfoque maior nas construções geométricas e no ensino de congruência de triângulos envolvendo os casos de congruência. Nós também constatamos que alguns estudantes (3 estudantes) estão em processo de atingir tanto o nível 1 quanto o nível 2, tal fato pode indicar um indício de existência de faixas de transição ou subníveis entre os níveis de Van Hiele, como verificado por Câmara dos Santos (2001), Santos (2016) e Costa (2016).

Palavras-chave: Teoria de Van Hiele; Triângulos; Pensamento Geométrico; Ensino Fundamental II; Níveis de Compreensão.

ABSTRACT

This dissertation aimed to identify the levels of development of geometric thinking in an 8th-grade class of elementary education concerning the content of triangles characterized by the lengths of their sides (equilateral, scalene, and isosceles), the measures of their angles (acute, right, and obtuse), and their cases of congruence. The study was conducted with 31 students from a public school in the municipal network, in a city located in the Agreste region of Pernambuco State, Brazil. In this regard, we used as theoretical frameworks the Van Hiele Theory (1957) on the development of geometric thinking, as it addresses issues related to the teaching and learning of Geometry, and the Anthropological Theory of Didactic (ATD), specifically praxeological organizations. To this end, we developed an assessment tool (triangle test) to identify the level of development of the class's geometric thinking by analyzing the praxeological organizations present in the textbook used by the class and in accordance with the Van Hiele Theory. The main results regarding the class's development of geometric thinking, considering the Van Hiele Theory (1957), indicate that the class is at level 0 (28 students), and that a portion of these students is in the process of reaching level 1 (17 students). Regarding ATD, we encountered difficulty in correlating task types and techniques with levels of understanding. We observed, from the analysis of the Mathematical Organizations present in the class's textbook, a tendency of the author to focus more on geometric constructions and teaching congruence of triangles involving cases of congruence. We also found that some students (3 students) are in the process of reaching both level 1 and level 2, which may indicate the existence of transitional bands or sublevels between the Van Hiele levels, as verified by Câmara dos Santos (2001), Santos (2016), and Costa (2016).

Keywords: Van Hiele Theory; Triangles; Geometric Thinking; Elementary Education; Levels of Understanding.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ALA	–	Ângulo, Lado e Ângulo
BNCC	–	Base Nacional Comum Curricular
FNDE	–	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
LAA_o	–	Lado, Ângulo e Ângulo oposto
LAL	–	Lado, Ângulo e Lado
LLL	–	Lado, Lado e Lado
MEC	–	Ministério da Educação
MMM	–	Movimento da Matemática Moderna
OD	–	Organizações Didáticas
OM	–	Organizações Matemáticas
OPV	–	Ângulos Opostos pelo Vértice
PCN’s	–	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	–	Programa de Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PNBE	–	Programa Nacional Biblioteca da Escola
PNLD	–	Programa Nacional do Livro Didático
PNLD	–	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PRP	–	Programa de Residência Pedagógica
SEB	–	Secretaria de Educação Básica
TAD	–	Teoria Antropológica do Didático
TSD	–	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é umas das três grandes áreas da Ciência Matemática, ao lado do Cálculo e da Álgebra, sendo assim, ela está presente nas propostas curriculares durante toda a Educação Básica, seja em âmbito nacional (BRASIL 1998, 2000, 2018) ou em âmbito regional (PERNAMBUCO, 2012, 2019), fato é que os estudantes convivem com ela constantemente em sua formação escolar/cidadã.

Sobre esse campo de conhecimento, os saberes de referência que devem ser trabalhados no Ensino Fundamental, segundo a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), apresenta um foco maior na percepção visual, na exploração e localização e na identificação de figura geométricas a partir de seus elementos e propriedades, semelhanças e diferenças (BRASIL, 2018).

Nas últimas décadas, várias áreas do ensino de matemática têm avançado bastante através das pesquisas na Educação Matemática. Algumas destas, em termos de quantitativo de pesquisas, se destacam mais que outras, acreditamos que o campo algébrico seria um exemplo. Embora o campo Geométrico não esteja no mesmo patamar das pesquisas algébricas, referente ao quantitativo de pesquisa, vem crescendo a passos largos e demonstrando sua importância para o ensino e aprendizagem de conceitos específicos (LORENZATO, 2015; RÊGO, RÊGO e VIEIRA, 2012).

O nosso interesse por esse campo de conhecimento surgiu na formação inicial, em especial, através do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e do Programa de Residência Pedagógica (PRP), esses programas possibilitaram olhar de forma diferente a sala de aula, as ações didáticas do professor, bem como a relação que os estudantes mantinham com o saber geométrico. Além disso, através da participação nos programas foi possível desenvolver estudos acerca de vários temas, utilizando teorias distintas, tais como a Teorias das Situações Didáticas (TSD), a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a teoria de Van Hiele, entre outras.

De forma complementar, os programas acima permitiram também, perceber que os estudantes apresentavam certa dificuldade com os assuntos relacionados à Geometria, em especial aos triângulos. Era possível perceber nas atividades que tratavam desse conteúdo, um cuidado maior dos estudantes com a linguagem visual, bem como, com a aplicação das técnicas geométricas de cálculo.

Já no final da minha formação inicial, no período do trabalho de conclusão de curso, procurei discutiu a passagem de nível do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele em uma sequência de atividades sobre o triângulo numa turma do 8º ano do Ensino Fundamental II. Esse fato é considerado importante, pois motivou um aprofundamento no tema em tela.

No período de 2020 até metade de 2021, atuei como docente do ensino fundamental numa escola da rede privada, na qual tinha outro público e outra realidade em relação as escolas públicas. Semelhante ao que foi vivenciado na formação inicial, a prática em sala de aula, permitiu observar/confirmar que existia um desconforto por parte dos estudantes, eles pareciam estarem receosos quando os conteúdos de Geometria eram apresentados. Imaginamos que esse comportamento, aponta para indícios de dificuldades ou lacunas conceituais.

A partir dessas reflexões anteriores, surgem algumas questões, como por exemplo, em quais conceitos geométricos dos triângulos os estudantes apresentam mais dificuldades? Tais dificuldades se acentuam ou permanecem, noutro nível de escolaridade? Qual a origem dessas dificuldades por partes dos estudantes? Como também, existem outras metodologias, instrumentos e ferramentas eficazes para o seu ensino?

Ao analisar o currículo de Matemática para o Ensino Fundamental II, os conceitos geométricos abarcam uma parte significativa. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (1998) e a BNCC (2018), é através deles que os estudantes estabelecem e desenvolvem habilidades de observação e representação. Além disso, o trabalho didático possibilita aos estudantes analisar e retratar, de maneira organizada o mundo em que vive.

Na contramão dos documentos oficiais, o ensino de geometria no Brasil enfrentou significativas mudanças influenciadas pelo formalismo lógico dedutivo decorrente do algebrizar geométrico, motivado pelo movimento da matemática moderna (MMM), em especial a partir da década de 60, como apontado por Câmara dos Santos (2009), Caldatto e Pavanello (2015), Pereira (2001), Arbach (2002) e Ávila (2010), ao qual o ensino se tornou praticamente algebrizado, causando assim, de certa forma uma *omissão geométrica*[1], além da ação didática dos professores influenciada principalmente pela promulgação da Lei 5692º/71[2], como apontado por Pavanello (1993), esta lei concedia aos estabelecimentos de ensino uma liberdade quanto á decisão sobre os programas das diferentes disciplinas, o que possibilitou aos professores que se sentiam inseguros em trabalhar com a geometria, deixar de incluí-la em suas programações, e para os que tentavam ensina-la, deixavam para o final do ano letivo, quiçá na tentativa, ainda que inconscientemente, de utilizar a falta de tempo como desculpa principal para não trabalhar a geometria adequadamente, o que por sua vez, pode ser considerado um descaso com a área. As pesquisas de Costa e Câmara dos Santos (2016a, 2016b), Conceição e Oliveira (2014), Lorenzato (1995), Pavanello (2004), Caldatto e Pavanello (2015), Santos e Santos (2016), mostram essa realidade.

Para Tashima e Silva (2015), a quebra de expectativas entre estudantes e professores ao se ensinar Geometria, vem mostrando descompasso no sentido do encantamento pela matemática por parte dos professores e a indiferença por parte dos estudantes. Na mesma linha, Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) salientam que o ensino de Geometria na educação básica por um longo tempo esteve negligenciado durante as aulas de matemática.

Sobre o fato de ser negligenciado, Santos e Sant'Anna (2015) explicam que essa negligencia gira em torno da insegurança do professor que não possui domínio dos conteúdos que deveriam estar ensinado – reflexo da fragilidade na formação docente.

Contudo, essa realidade vem sendo superada, a partir das recomendações dos PCN's (1998, 2000), da BNCC (2018) a nível nacional, dos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012, 2019) a nível estadual, bem como, de algumas pesquisas realizadas no âmbito do ensino e aprendizagem da Geometria. Como, por exemplo, as de Lorenzato (2015), Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), Manoel (2014), Teles (2007), Pachêco et al. (2020), Costa (2016, 2019), Santos (2016), Pértile (2011), Nasser e Sant'anna (2010), Silva (2014) e Campos (2020).

As discussões anteriores mostram a importância do tema e a necessidade em aprofundar as pesquisas com intuito em contribuir para uma aprendizagem mais

[1] Lorenzato (1995).
[2] Lei substituída pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) 9394/96.

efetiva e duradoura. Nesse sentido, a presente pesquisa pretende olhar para os conhecimentos geométricos em relação ao estudo dos triângulos nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa escolha justifica-se pelo que expomos anteriormente, com olhar mais específico, pelo fato de pesquisadores como Pachêco e Santos (2014), Pachêco et al. (2020), Rodrigues (2015), terem através de estudos verificado que alguns estudantes apresentaram limitações em reconhecer e descrever os elementos (propriedades) pertencentes que os compõem, apesar dos estudantes da turma possuírem conhecimentos geométricos referentes ao nível 1 (análise) da teoria de Van Hiele.

Nesse sentido, quando voltamos nosso olhar para o processo de ensino e aprendizagem, surgem teorias e ferramentas que nos auxiliam para chegar a resultados satisfatórios. Assim, escolhemos a teoria de Van Hiele (1957), que trata do pensamento geométrico e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), especialmente, as praxeologias para auxiliar nossa pesquisa na análise das Organizações Matemáticas (OM) presentes no livro didático utilizado pela turma.

Segundo Pachêco et al. (2020), a teoria de Van Hiele, nos possibilita averiguar, verificar, identificar e categorizar os conhecimentos geométricos de indivíduos que estão estudando os saberes relacionados à geometria além de proporcionar o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos, os quais mostram ou não lacunas de saber relacionados à geometria. Silva (2014) destaca que nas experiências educacionais apropriadas, o estudante passa por cinco níveis de raciocínio sequenciais e estruturados. Para tanto, a apropriação de conceitos e propriedades típicas de um nível requerem que o estudante domine o nível anterior.

Atualmente no Brasil, o modelo pode auxiliar como aporte teórico e metodológico para os professores elaborarem suas aulas, como também, conhecerem os conhecimentos geométricos de suas turmas, servindo como um guia para analisar as habilidades geométricas dos estudantes (PACHÊCO, PACHÊCO, 2017).

De acordo com Chevallard (1999), a TAD estuda o homem diante o saber matemático e, especialmente, perante situações matemáticas, partindo do ponto de partida que todo trabalho matemática surgirá como resposta a um tipo de tarefa. Nessa direção, a TAD situa a atividade matemática dentro do conjunto das atividades humanas e de instituições sociais.

Nesse sentido, em especial, as organizações matemática (OM) e didática (OD), são reconhecidas como potentes ferramentas que permitem modelizar, e analisar com maior detalhe as práticas escolares (CHEVALLARD, 1996), uma vez que, a OM é constituída pelos elementos praxeológicos (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria) e está voltada para toda atividade matemática que se desenvolve em sala de aula a partir de uma OD, isto é, na elaboração de uma OM uma OD é fundamental, de forma que toda atividade matemática esteja associada a uma forma de organização.

Nesse sentido, apresentamos abaixo à problemática, o objetivo geral e os específicos de nossa pesquisa.

1.1 Problemática

Diante do exposto, a presente pesquisa pretende responder a seguinte pergunta: Em qual nível de desenvolvimento do pensamento geométrico os estudantes de uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental se enquadram, referente aos triângulos, no que se refere às medidas dos comprimentos de seus lados (equilátero, escaleno e isósceles), de seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e dos casos de congruência, de acordo com a teoria de Van Hiele?

1.2 Objetivo Geral

Identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de uma turma do 8º ano do ensino fundamental em relação ao conteúdo de triângulos caracterizados pelas medidas dos comprimentos de seus lados (equilátero, escaleno e isósceles), pelas medidas de seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e pelos casos de congruência.

1.3 Objetivos Específicos

1) Elaborar um instrumento para verificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes a partir da análise das organizações matemáticas presentes no livro didático utilizado pelos estudantes;

2) Identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.
3) Verificar os avanços de níveis do pensamento geométrico dos estudantes (do nível 0 ao nível 2).

1.4 Estrutura da Pesquisa

Visando uma melhor estruturação da pesquisa, optamos por organiza-la em setes capítulos. O primeiro capítulo, já anunciado, procurou apontar justificativas sobre o tema com respaldo na revisão de literatura. Nesse momento, apresentamos a pergunta norteadora, acompanhada do objetivo geral e objetivos específicos.

No segundo capítulo, contemplamos o objeto de estudo, triângulos, sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem, além de abordá-lo como objeto geométrico constituído por seus elementos e propriedades.

No terceiro e quarto capítulo, apresentamos nosso aporte teórico que serve para a sustentação da análise dos dados, objetivo maior da pesquisa. Assim, temos como principal referência Van Hiele (1957), ao qual apresentamos os níveis de pensamento geométrico, as propriedades de cada nível, além das fases de aprendizagem.

No quinto capítulo, dissertamos sobre a nossa abordagem metodológica. Nela, caracterizamos a pesquisa, os participantes, o campo de pesquisa, e o nosso instrumento de pesquisa, além de discorremos sobre a formulação das questões e a estrutura do instrumento.

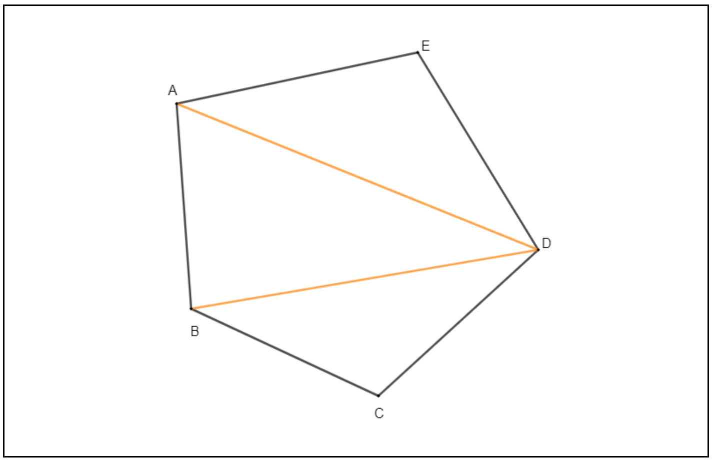
No sexto capítulo, discorremos sobre os dados, discutindo as respostas apresentadas pelos estudantes, a análise e a interpretação das informações, e posteriormente, no sétimo capítulo, contemplamos as nossas considerações finais.

2 TRIÂNGULOS

De acordo com Pitombeira (2013), os triângulos são figuras que fascinam não somente os matemáticos, mas também pessoas em geral.

Assim, o triângulo é uma das figuras geométricas com inúmeras aplicações práticas, uma vez que, encontramos sua presença na arte, na mecânica, na arquitetura e no misticismo e etc. (PITOMBEIRA, 2013), assim, ele é uma das figuras planas mais relevantes dentro da Geometria, além de possuir uma importante característica, que é a sua rigidez, perceptível nas estruturas metálicas de pontes, torres ou no madeiramento dos telhados das casas, por exemplo, o triângulo também é considerado como um elemento básico para a construção de inúmeras outras figuras planas, que integram os estudos Geometria para o ensino básico.

Figura 1 – Pentágono decomposto em triângulos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2 – Presença de triângulos em estruturas.

Fonte: Iezzi, Machado e Dolce (2018, p. 109).

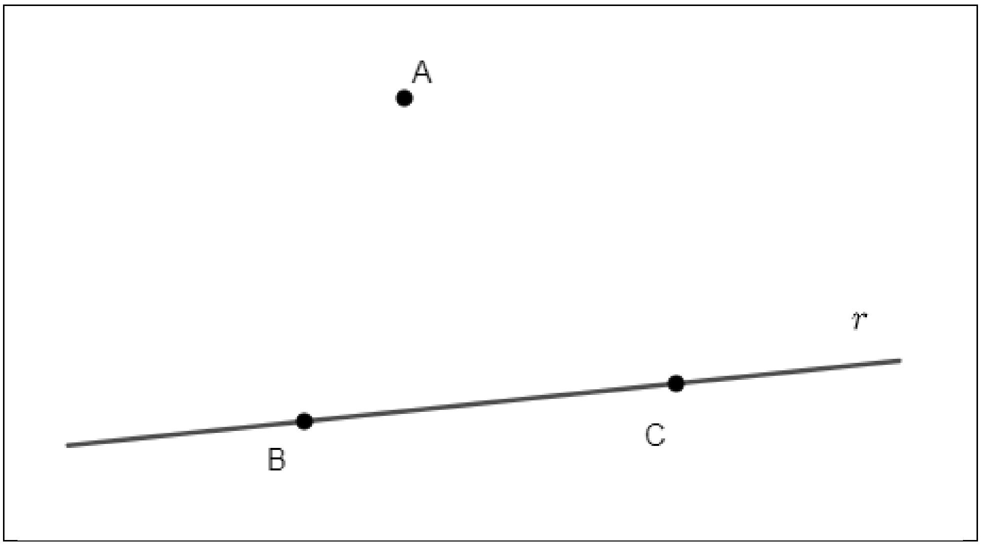
De acordo com Holanda (2013), com o estudo aprofundado do triângulo, os estudantes podem adquirir conhecimentos e apoderar-se de um instrumento poderoso para resolver problemas geométricos, tanto no ponto de vista geral como no específico. Dessa forma, no estudo dos polígonos, o triângulo se torna a grande ferramenta didática, pois é através dele que é possível determinar propriedades específicas, como o número de diagonais, a soma dos ângulos internos e externos e as áreas dos polígonos regulares a partir da área do triângulo equilátero.

A seguir, apresentaremos os principais conceitos relativos aos triângulos baseados nas obras de Neto (2013) e Dolce e Pompeo (2013); à escolha dessas obras se deve ao fato de tratarem os triângulos de forma mais conceitual e que ambas as obras são frequentemente usadas nos cursos de graduação, em especial, na licenciatura em matemática.

2.1 Definição e Elementos

Segundo Neto (2013, p.19), para um triângulo ser construído é preciso considerar três pontos A, B e C no plano. Se todos estiverem sobre uma mesma reta r, diremos que A, B e C são colineares; caso contrário, eles serão denominados não-colineares.

Figura 3 – Três pontos não-colineares.

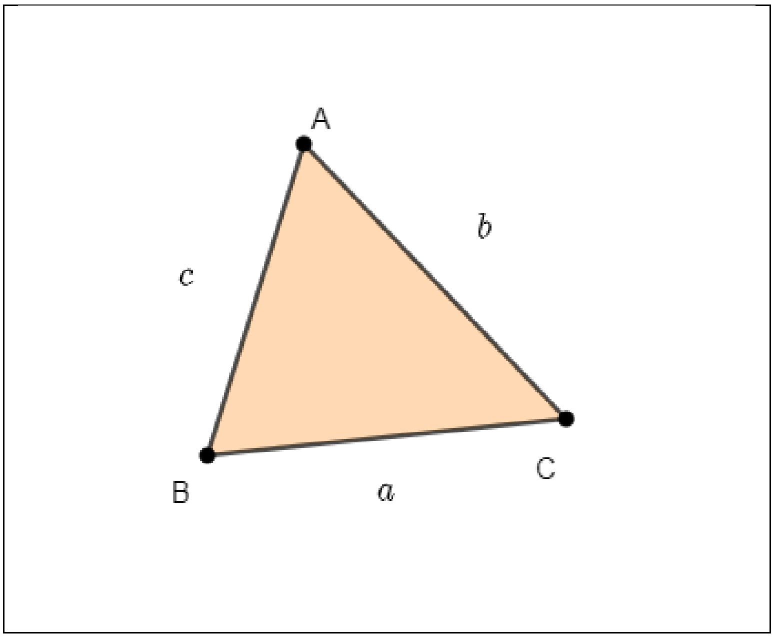


Fonte: Elaboração própria.

Assim, três pontos não-colineares produzem um triângulo (figura 4). A região delimitada pelos segmentos *AB, AC* e *BC*, recebe o nome de região triangular, além do mais, as extremidades *A, B* e *C*, elemento comum que existe entre os três segmentos (*AB, AC* e *BC*) dois a dois, são os vértices do triângulo *ABC* (NETO, 2013, p.19-20).

Ainda de acordo com Neto (2013, p.20), com relação a um triângulo genérico *ABC*, os segmentos *AB, AC* e *BC* serão os lados do triângulo; de modo geral, diremos que *AB* = *c*, *AC* = *b* e *BC* = *a* para representar as medidas dos lados de um triângulo *ABC*. A soma das medidas dos lados de um triângulo qualquer é seu perímetro. Os ângulos internos do triângulo *ABC* são $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$.

Figura 4 – Triângulo *ABC* de vértices *A, B* e *C.*



Fonte: Elaboração própria.

Para Holanda (2013), o fato de o triângulo possuir três pontos não colineares designarem um único plano, é o qual podemos afirmar que um móvel que foi fabricado para ser sustentado com apenas três pernas nunca ficará desequilibrado, fato que pode ou não acontecer com 4 pontos, uma vez que esses pontos podem ou não estarem sobre o mesmo plano.

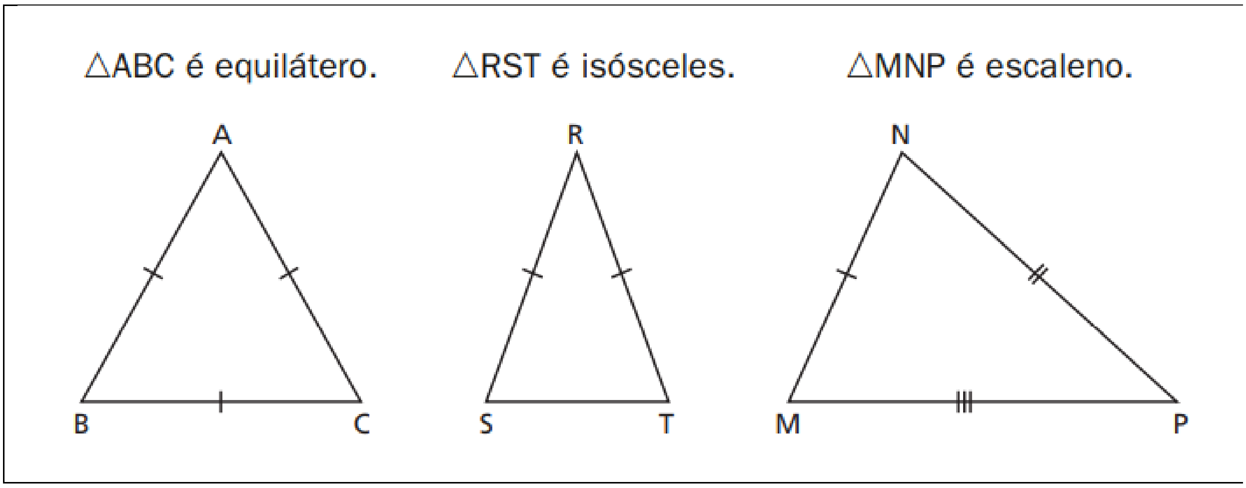
2.2 Classificação

De acordo com Neto (2013, p. 21), podemos classificar triângulos seguindo dois parâmetros básicos: um em relação às medidas de seus lados e o outro em relação à medida de seus ângulos internos.

Como o triângulo possui três lados, Neto (2013) afirma que as únicas possibilidades para classificar um triângulo segundo as medidas de seus lados é que haja pelo menos dois lados iguais ou que todos sejam diferentes dois a dois, assim, temos:

- Equilátero, se as medidas dos lados são todas congruentes;
- Isósceles, se ao menos as medidas de dois lados são congruentes;
- Escaleno, todas as medidas dos lados não são congruentes.

Figura 5 – Classificação dos triângulos segundo as medidas de seus lados



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p.37).

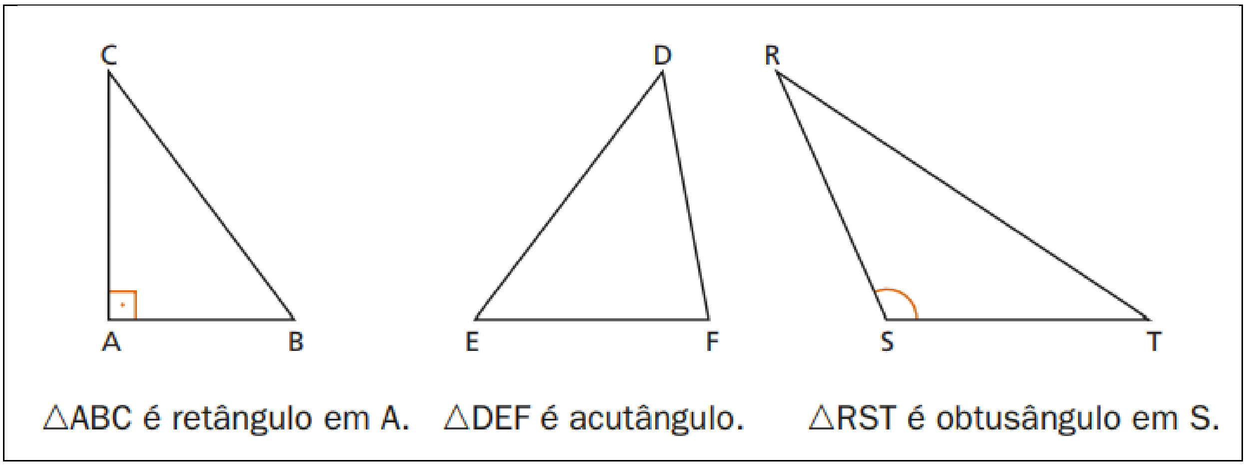
Da definição acima, temos que todo triângulo equilátero é isósceles, porém, a recíproca não é verdadeira (NETO, 2013, p.21).

Segundo Dolce e Pompeo (2013, p. 37), “um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**”. Nesse sentido, Neto (2013, p. 21) alerta que a palavra **base** em geral é reservada para o seu uso em triângulos isósceles que não são equiláteros.

Quanto aos ângulos, um triângulo dispõe de no máximo um ângulo interno maior ou igual a 90º, assim, segundo Neto (2013, p. 52) e Dolce e Pompeo (2013, p.37), podemos classificar um triângulo em:

- Acutângulos, se tem todos os ângulos internos agudos;
- Retângulos, se tiver um ângulo reto;
- Obtusângulos, se possuir um ângulo obtuso;

Figura 6 – Classificação dos triângulos segundo as medidas de seus ângulos internos



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 37).

Segundo Neto (2013, p. 52), em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** do mesmo, e os demais lados são seus **catetos**.

Ainda sobre o triângulo retângulo, ele possui uma particularidade especial em relação aos seus ângulos agudos. Eles são **complementares**, isto é, sua soma é igual a 90°. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°[3], então se um deles mede 90°, obrigatoriamente a soma dos outros dois é 90° (HOLANDA, 2013).

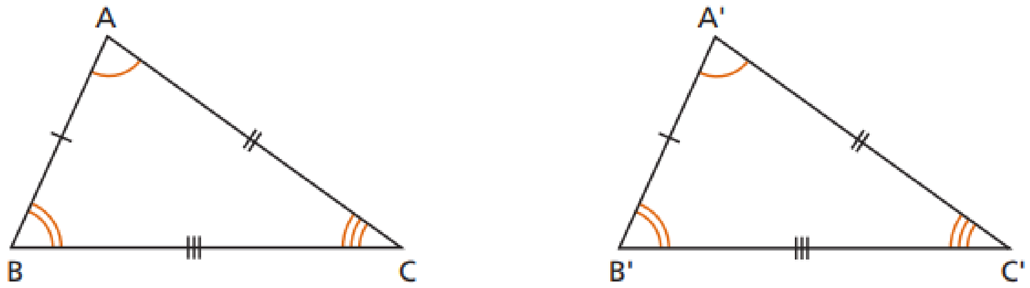
2.3 Congruência de Triângulos

De acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 37-38), um triângulo é congruente a outro se, e somente se, for possível determinar uma relação de correspondência entre seus vértices de forma que:

- Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes;
- Os lados opostos a esses ângulos respectivamente congruentes;

[3] Vê seção 2.4.2.

Figura 7 - Dois triângulos congruentes



$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \text{e} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{pmatrix}$$

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 38).

Além disso, a congruência entre triângulos é **simétrica**, pois se um triângulo *ABC* for congruente a um triângulo *A'B'C'*, então o triângulo *A'B'C'* será congruente ao triângulo *ABC*; é **transitiva**, caso um triângulo *ABC* seja congruente a um triângulo *A'B'C'* e por sua vez o triângulo *A'B'C'* for congruente ao triângulo *A"B"C"*, então o triângulo *ABC* será congruente ao triângulo *A"B"C"*, e **reflexiva**, uma vez que todo triângulo é congruente a si próprio.

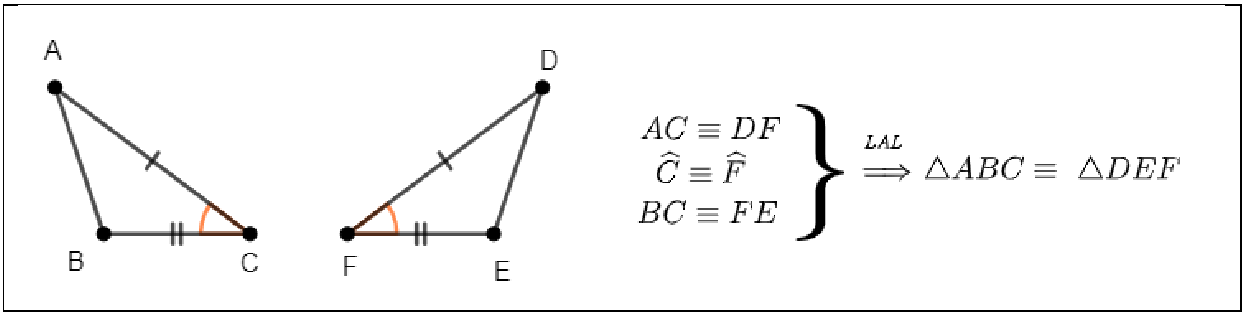
2.3.1 Casos de Congruência

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições para satisfazer que dois triângulos sejam congruentes, essas condições (seis congruências: três ângulos e três lados) são absolutas, entretanto, ao longo de uma verificação o trabalho se torna cansativo, pois teríamos que verificar uma a uma, assim, existem critérios mínimos a fim de facilitar a verificação de congruências, a esses critérios, os chamamos de casos de congruência de triângulos.

2.3.1.1 1º Caso – LAL (Lado – Ângulo – Lado)

De acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 38), se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 8 – Caso de congruência LAL.

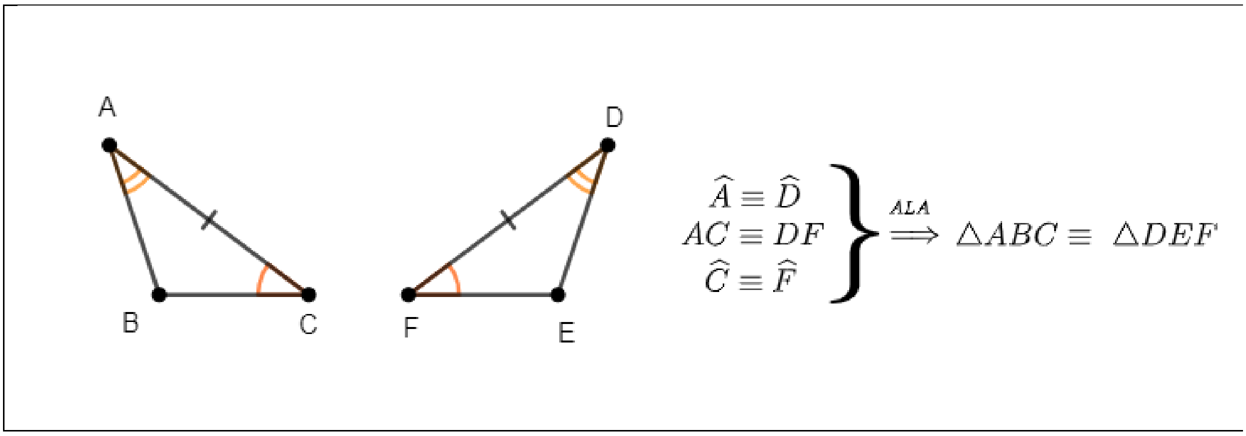


Fonte: Elaboração própria.

2.3.1.2 2º Caso ALA (Ângulo – Lado – Ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado adjacente a eles, respectivamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 39).

Figura 9 – Caso de congruência ALA.

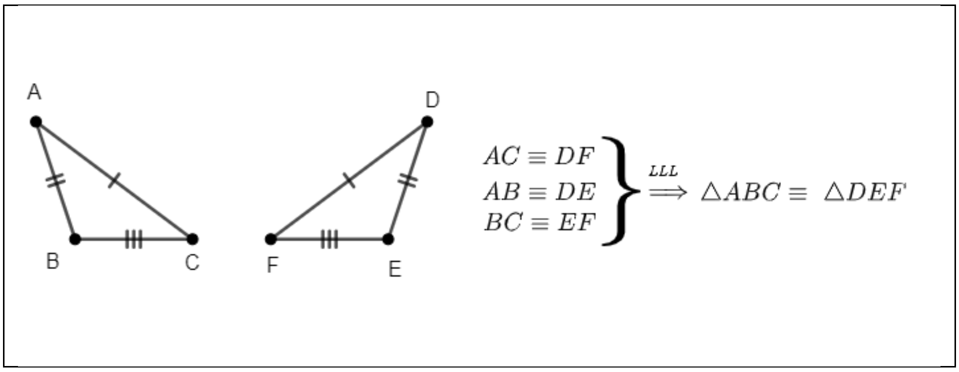


Fonte: Elaboração própria.

2.3.1.3 3º Caso – LLL (Lado – Lado – Lado)

Se dois triângulos possuem os três lados, respectivamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes (NETO, 2013, p. 35).

Figura 10 – Caso de congruência LLL.

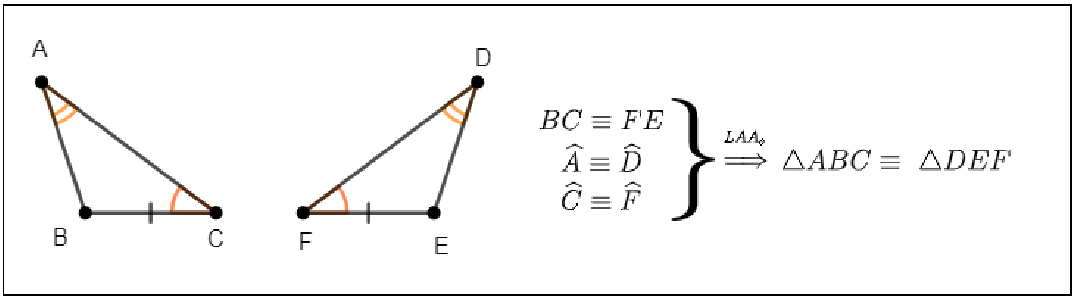


Fonte: Elaboração própria.

2.3.1.4 4º Caso – LAA_O (Lado – Ângulo – Ângulo oposto)

Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 44).

Figura 11 – Caso de congruência LAA_o.

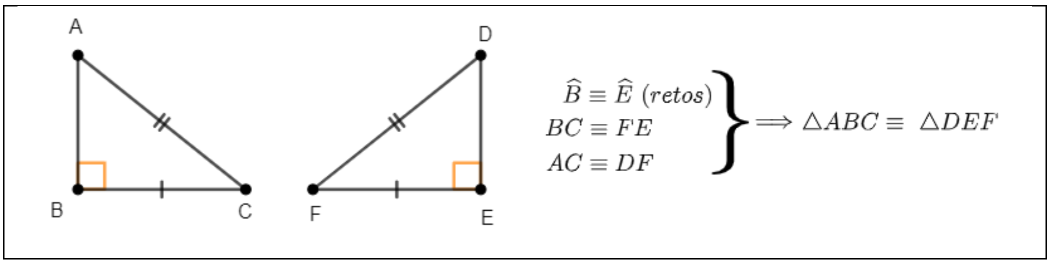


Fonte: Elaboração própria.

2.3.1.5 Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Segundo, Dolce e Pompeo (2013, p. 45), para dois triângulos retângulos serem congruentes, devem possuir um cateto e a hipotenusa, respectivamente congruentes.

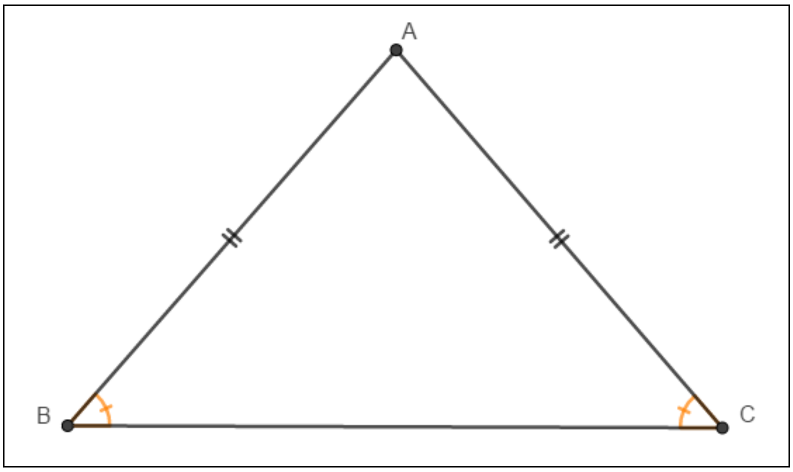
Figura 12 – Caso especial de congruência de triângulos retângulos.



Fonte: Elaboração própria.

Como aplicação direta dos casos de congruência, temos o **teorema do triângulo isósceles**, ao qual é estabelecido que “se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos da base são congruentes” (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 39).

Figura 13 – Triângulo isósceles com os ângulos da base congruentes.



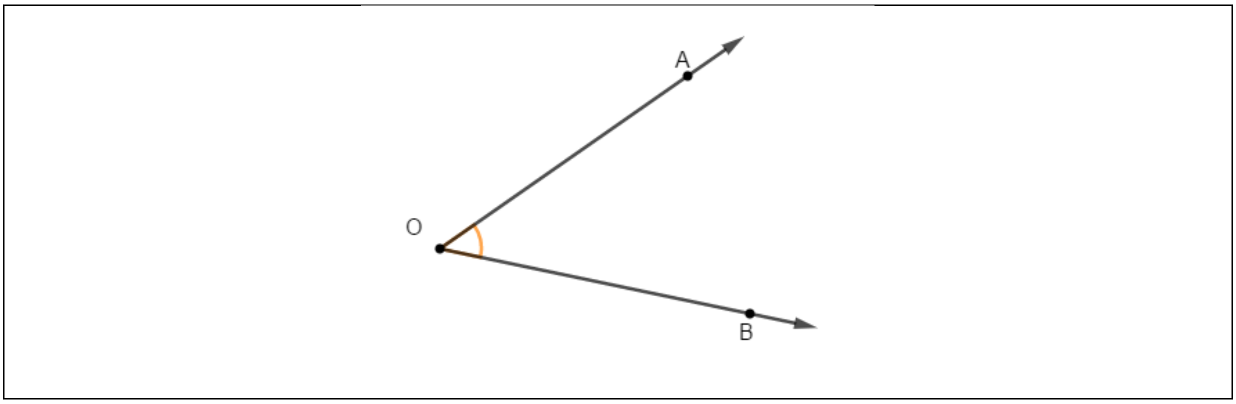
Fonte: Elaboração própria.

2.4 Ângulos

Conforme Dolce e Pompeo (2013, p. 20), um ângulo é o objeto geométrico formado a partir da reunião de duas semirretas de mesma origem, que não estão contidas numa mesma reta, ou seja, não-colineares.

O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo, e sua abertura é $A\hat{O}B$, conforme a figura abaixo.

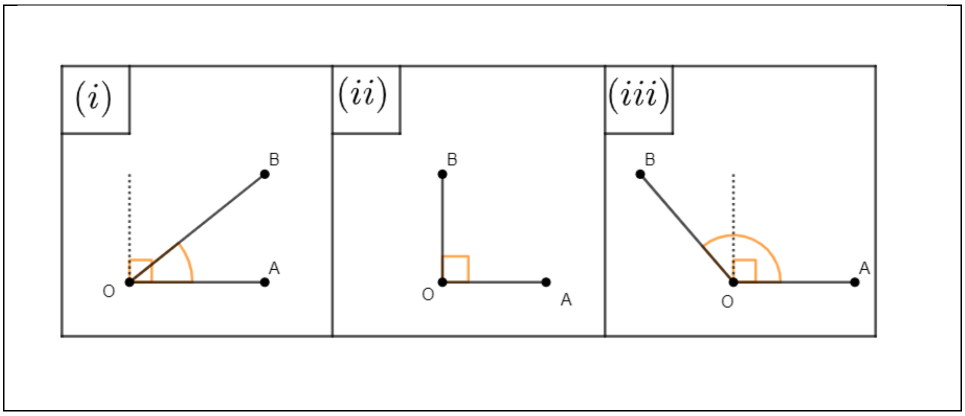
Figura 14 – Definição de ângulo.



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com Neto (2013, p. 16) e Dolce e Pompeo (2013, p. 26), um ângulo *AÔB* qualquer é considerado **agudo** quando 0° < AÔB < 90°, **reto** quando AÔB = 90° e **obtuso** quando 90° < AÔB < 180°.

Figura 15 – Ângulos: (i) agudo, (ii) reto e (iii) obtuso.



Fonte: Elaboração própria.

Segundo Neto (2013, p.16-17) e Dolce e Pompeo (2013, p. 27), em algumas ocasiões, é proveitoso termos um nome especial relacionado a dois ângulos cuja soma de suas medidas seja igual a 90° ou 180°, a essas somas, diremos que são **complementares** ou **suplementares**, respectivamente.

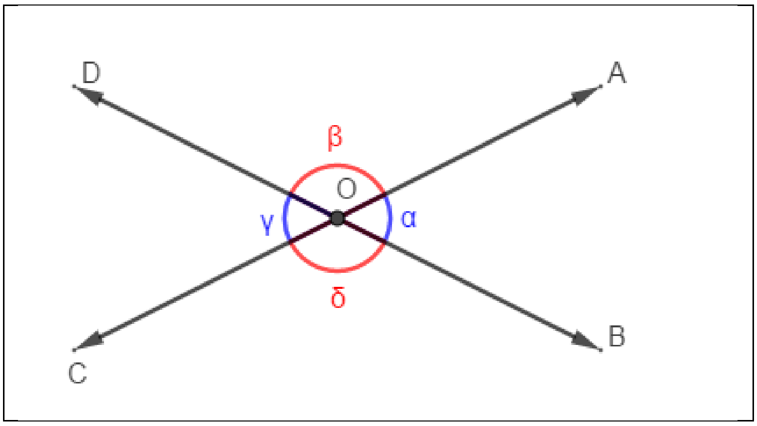
Dolce e Pompeo (2013, p. 28) ressalta que ao expandirmos o conceito de ângulo, obtemos um **ângulo nulo** (cujos lados são coincidentes, e sua medida é 0°) ou teremos um **ângulo raso** (cujos lados são semirretas opostas, e sua medida é 180°), dessa forma, a medida de um ângulo *α* é tal que 0° ≤ α ≤ 180°.

Além do mais, a medida de um ângulo é chamada de **amplitude**, geralmente associada a um número real positivo.

2.4.1 Ângulos Opostos pelo Vértice (OPV)

Ângulos Opostos pelo Vértice (OPV) possuem uma particularidade deveras interessante, como eles são formados por retas concorrentes, assim, de acordo com Neto (2013, p.17) e Dolce e Pompeo (2013, p.22), eles possuem o mesmo vértice e seus lados formam semirretas opostas, deste modo, dois ângulos OPV são congruentes.

Figura 16 – Ângulos opostos pelo vértice (OPV).

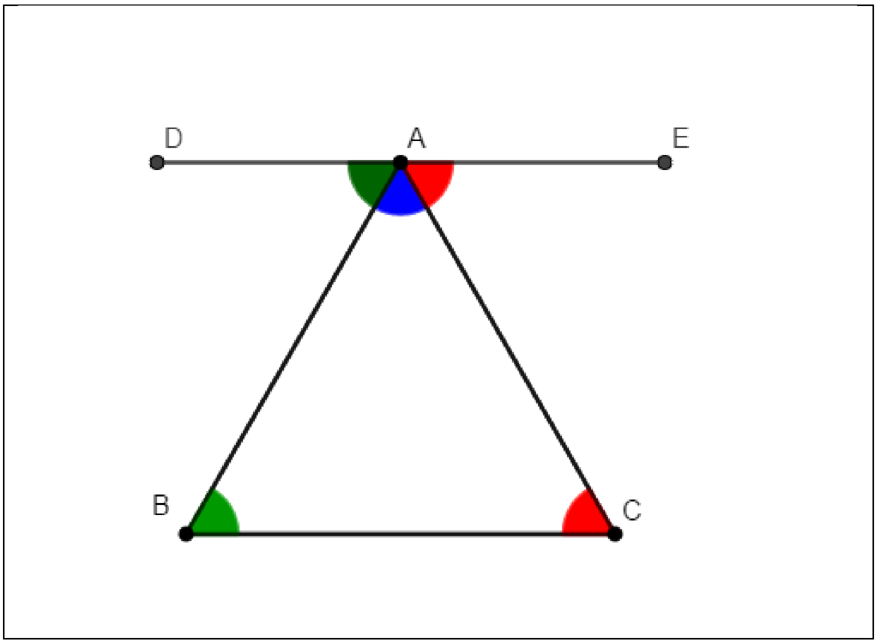


Fonte: Elaboração própria.

2.4.2 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Como um triângulo possui três ângulos, e de acordo com a classificação segundo as medidas de seus ângulos internos (ver a seção 2.2), temos três casos em que os ângulos possuem particularidades diferentes um dos outros, assim, é útil temos um padrão em relação à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, assim, de acordo com Neto (2013, p.50) e Dolce e Pompeo (2013, p.64), a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

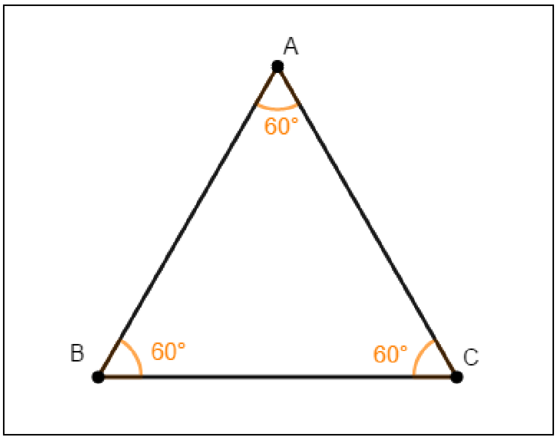
Figura 17 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Elaboração própria.

Como consequência direta da definição descrita acima, todo triângulo equilátero tem três ângulos congruentes, mas, como a soma de tais ângulos é 180°, cada um dos ângulos internos deve medir 60°, assim todo triângulo equilátero é equiângulo. (NETO, 2013, p. 51; DOLCE e POMPEO, 2013, p. 66).

Figura 18 – Triângulo equilátero com ângulos internos medindo 60°.



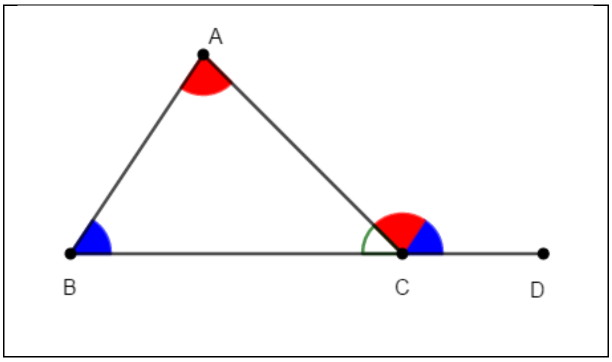
Fonte: Elaboração própria.

2.4.3 Teorema do ângulo externo

Segundo Neto (2013, p. 51), “em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual á soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele”.

A situação descrita acima é fácil de ser verificada, basta ver que (figura 19) $A\hat{C}D = 180° - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Figura 19 – Teorema do ângulo externo



Fonte: Elaboração própria.

2.5 Desigualdade nos Triângulos

Essencialmente os lados de um triângulo guardam uma certa relação, ao qual é importantíssima em suas construções, pois nem sempre é possível construir um triângulo sabendo as medidas de seus lados. Entretanto, antes de anuncia-la, é importante ressaltar que, em todo triângulo temos, segundo Neto (2013, p. 58-60) e Dolce e Pompeo (2013, p. 53-55):

- Ao maior lado é oposto o maior ângulo;
- Ao maior ângulo é oposto o maior lado.

Em particular, no triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa.

A particularidade descrita acima é descrita como **desigualdade triangular**, de acordo com Neto (2013, p. 60), “em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados”.

Assim, se segmentos *a*, *b* e *c* cujas medidas obedecem à desigualdade acima, é sempre possível construir um triângulo tendo tais segmentos como lados (NETO, 2013, p. 61).

3 A TEORIA DE VAN HIELE

A teoria se origina com os trabalhos de doutoramento de Pierre Marie van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, realizados na mesma época na Universidade de Utrecht, Holanda. O trabalho realizado pelo do casal emergiu, respectivamente, um modelo de ensino e aprendizagem de geometria e um exemplo consistente de aplicação desse modelo. Segundo Nasser e Sant'anna (2010), o modelo propõe que os estudantes avancem segundo uma sequência de níveis de compreensão, à medida que eles aprendem geometria, sendo que esse progresso depende mais de uma aprendizagem adequada do que da idade ou maturação do estudante, cabendo ao professor selecionar atividades adequadas que o estudante deve vivenciar para que ele avance para um nível posterior.

Para Walle (2009), a feição mais relevante do modelo é uma hierarquia de cinco níveis dos modos de assimilação de ideias espaciais. Cada um dos cincos níveis descreve os processamentos de pensamento usados no ambiente geométrico.

De acordo com Costa (2016), a teoria de Van Hiele pode ser considerada tanto como uma teoria da aprendizagem como também uma teoria do ensino, isto é, como teoria da aprendizagem, temos a descrição dos níveis de compreensão; e como teoria do ensino, temos uma orientação pedagógica do professor (fases de aprendizagem).

Silva (2018) nos esclarece que a teoria de Van Hiele do pensamento geométrico proporciona avaliar em que nível de aprendizagem o estudante se localiza pelas habilidades demonstradas nas atividades desenvolvidas sobre um determinado assunto.

Dessa forma, apresentamos a seguir, com base em Alves e Sampaio (2010), Costa (2016, 2019), Crowley (1994), Nagata (2016), Nasser e Sant'anna (2010), Rodrigues (2015), Silva (2014), Silva (2018), Pachêco et al. (2020), Silva (2021), Van Hiele (1957) e Walle (2009) os níveis, as propriedades e as fases do modelo.

3.1 Os Níveis do Pensamento Geométrico Segundo Van Hiele

De acordo com Pachêco et al. (2020), os níveis de compreensão nos permite conhecer o saber que o indivíduo possui em relação a algum conteúdo relacionado à geometria, especialmente às figuras geométricas planas.

3.1.1 Nível 0[4]: visualização

Os estudantes compreendem as figuras pelo seu aspecto global, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência (WALLE, 2009).

Assim, nesse primeiro nível, os estudantes identificam e nomeiam as figuras, baseadas em suas características globais e visuais, não por suas partes ou propriedades, ou seja, esse nível é essencialmente visual. Esses estudantes são capazes de conversar sobre as propriedades e até mesmo fazer medidas, porém essas propriedades não são abstratas das formas que eles manipulam. Para esses estudantes neste nível, é a aparência da figura que a define, sem precisar levar em consideração suas propriedades. Uma forma retangular é um retângulo "por que se parece com um retângulo", não reconhecendo que a figura possui ângulos retos ou até mesmo que os lados opostos são paralelos. O fato de a aparência ser o fator dominante neste nível faz com que ela possa prevalecer sobre as propriedades da figura.

3.1.2 Nível 1: análise

Os estudantes entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades, ou melhor, reconhecem suas propriedades, todavia não veem inter-relações entre as propriedades nem entre as figuras (WALLE, 2009).

Segundo Van Hiele (1957), um estudante alcança o nível 1 quando ele consegue manipular as características conhecidas de uma figura. Desse modo, os estudantes são capazes de considerar todas as formas dentro de uma mesma classe, bem mais do que analisar apenas uma única forma, isto é, conseguem reconhecer que as figuras têm partes e elas podem ser reconhecidas por tal. Em vez

[4] Na literatura encontramos diversas maneiras de enumerar os níveis de compreensão. Os Van Hiele se referenciavam aos níveis iniciando com o nível básico (nível 0 – visualização), e terminavam com o nível 4 (rigor), sendo assim, optamos por também utilizar essa numeração.

de conversar sobre um retângulo, por exemplo, é possível conversar sobre todos os retângulos, fazendo uma generalização dessa classe. Focando sobre uma classe específica de formas, como por exemplo, o paralelogramo, os estudantes são capazes de pensar sobre o que torna um paralelogramo um paralelogramo (quatro lados, lados opostos paralelos, lados opostos congruentes, diagonais congruentes, diagonais se cortam na metade, ângulos opostos congruentes, etc.). As características irrelevantes (por exemplo, tamanho ou orientação) desaparecem em segundo plano. Nesse nível os estudantes entendem que uma coleção de formas é possível devido às suas propriedades. As ideias sobre uma forma individual podem ser agora generalizadas a todas as formas possíveis daquela figura naquela classe.

Essas propriedades estavam implícitas no nível 0. Operando no nível 1, os estudantes podem ser capazes de listar todas as propriedades de uma determinada classe de figura, como por exemplo, o triângulo isósceles e o triângulo equilátero, mas não percebem que essas são subclasses de outra classe, que todo triângulo equilátero também é isósceles, sendo assim, eles ainda não são capazes de fazer inter-relações entre propriedades e nem entre figuras de uma mesma classe

3.1.3 Nível 2: dedução informal

Neste nível os estudantes estudam as propriedades das figuras, além do mais, conseguem estabelecer inter-relações entre as formas de uma mesma classe (WALLE, 2009).

Para Van Hiele (1957), um estudante terá alcançado este nível quando ele for capaz de manipular as inter-relações das características de uma mesma classe de figuras, isto é, quando ele manipula as ferramentas generalizadoras dos teoremas geométricos tais quais o de congruência, para deduzir congruência/igualdade de ângulos ou de segmentos.

Neste aspecto o estudante é capaz de entender as demonstrações simples a um determinado conteúdo e efetuar demonstrações informais relacionadas a ele. Dessa forma, eles são instruídos a pensar sobre as propriedades de um determinado objeto geométrico sem ter nenhuma restrição particular, sendo capazes de descreverem relações entre essas propriedades. “Se todos os quatro lados são iguais, a forma deve ser um quadrado ou um losango”. “Se isso é um triângulo equilátero, ele tem todos os ângulos medindo 60º”. “Um quadrado é um retângulo, porque, tem todas as propriedades de um retângulo". Com maiores habilidades geométricas para se envolver em raciocínios do tipo "se – então", eles estão aptos a classificarem as figuras usando uma quantidade mínima de característica, por exemplo, "quatro lados, sendo os lados opostos paralelos" condição mais que suficiente para definir um paralelogramo. Assim, as provas podem ser mais intuitivas do que necessariamente sofisticadas seguindo um rigor matemático geométrico. Doravante, a definição já tem significado; entretanto, o estudante ainda não entende o papel dos axiomas e teoremas nas provas formais.

3.1.4 Nível 3: dedução formal

Os estudantes são capazes de estudar e trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas, estão aptos a desenvolverem e construírem demonstrações e provas de forma formal, como um modo de estabelecer as teorias geométricas no contexto axiomático (WALLE, 2009).

De acordo com Van Hiele (1957), irá alcançar este nível um estudante que começa a manipular as características intrínsecas das relações, ou seja, quando ele pode distinguir entre uma preposição e sua recíproca. Dessa forma, os estudantes são capazes de inspecionar mais do que apenas as propriedades das figuras. Os estudantes que se encontram no nível 3 têm um bom conhecimento das propriedades das figuras, além de fazerem relações e operarem facilmente com elas. Assim, eles conseguem fazer distinção entre axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados. São capazes de efetuarem demonstrações e provas sem decorá-las. Deduzem que podem chegar ao mesmo resultado por diferentes maneiras de demonstrações. Utilizam-se de uma linguagem matemática geométrica precisa.

3.1.5 Nível 4: rigor

Os estudantes trabalham com vários sistemas axiomáticos, melhor dizendo, podem estudar geometrias não euclidianas e comparar os sistemas axiomáticos (WALLE, 2009).

Na hierarquia mais alta da teoria de Van Hiele, o objeto de estudo são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções incluídas de um sistema, com relação a isto, os estudantes estão aptos a estudar os sistemas axiomáticos diferentes do usual (geometria euclidiana), são capazes de investigar e compreender as geometrias não euclidianas.

Crowley (1994) destaca que este nível é o menos desenvolvido nos trabalhos originais (as teses de doutoramento do casal Van Hiele) e também recebe pouca atenção dos pesquisadores.

3.2 Propriedades do Modelo

Além de fornecer detalhadamente uma compreensão das características de cada nível de pensamento geométrico, os Van Hiele identificaram a existência de algumas propriedades que caracterizam o modelo.

Segundo Crowley (1994) tais propriedades são significativas e muito importantes para que os professores possam organizar as decisões quanto ao ensino, ou seja, elaborar intervenções pedagógicas que serão desenvolvidas em sala de aula.

A propriedade ***sequencial***, discute que para chegar a um determinado nível acima do nível 0, é necessário que o estudante tenha percorrido todos os níveis anteriores, isto é, não há como o estudante está no nível 3 sem ter assimilado as estratégias do nível 2. Os estudantes podem estar em níveis distintos em assuntos distintos.

A propriedade ***avanço***, trata que a passagem de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de ensino adotados do que da idade, ou melhor, os níveis não dependem da idade dos estudantes no sentido dos estágios de desenvolvimento de Piaget. Um estudante do 6º ano do Ensino Fundamental ou um estudante no 1º ano do Ensino Médio podem estar no mesmo nível. Nenhum método de ensino possibilita que o estudante pule níveis; alguns métodos reforçam o progresso, enquanto outros retardam ou até mesmo impedem o avanço de um nível para o outro.

A propriedade ***intrínseco e extrínseco***, os objetos matemáticos assumem diferentes *posições* em cada nível, em outras palavras, os objetos inerentes a um nível que se se transformam em objetos de ensino no nível posterior. A experiência geométrica adquirida é o fator de maior influência sobre a passagem de um nível para o outro. Por exemplo, no nível 0, o estudante identifica um triângulo pelo seu formato, apenas a aparência da figura é percebida. A figura é, evidentemente, determinada por suas propriedades, entretanto, só no nível 1 ele analisará a figura, dessa forma, ele descobrirá seus elementos e suas propriedades, como, por exemplo, possuir três ângulos internos e que sua soma é igual a 180º.

A propriedade que fala sobre a ***linguagem***, aponta que cada nível tem um conjunto específico de símbolos linguísticos e também seus próprios sistemas e relações que fazem as ligações entre esses símbolos. Por exemplo, classificar triângulos equiláteros e triângulos isósceles como figuras diferentes em certo nível é correto, enquanto noutro nível há a necessidade do estudante identificar um triângulo equilátero como isósceles, assim, um vínculo “correto” em certo nível pode ser modificado em outro nível.

A propriedade que trata da ***combinação inadequada***, aponta que a instrução (professor, material didático, linguagem, etc.) deve estar no mesmo nível do estudante, melhor dizendo, o estudante, o professor, o assunto e nível devem estar em concordância para que haja aprendizado, caso contrário, o aprendizado pode não ocorrer.

3.3 Fases de Aprendizagem

De acordo com Van Hiele (1957) o progresso ao longo dos níveis ocorrerá perante situações educacionais apropriadas e não da idade ou da maturidade do estudante. Portanto, o método e a organização do ensino, bem como o assunto e o material didático usado são importantes áreas de interesse pedagógico. Assim sendo, os Van Hiele propuseram cinco fazes de aprendizagem, se a instrução desenvolvida estiver de acordo, possibilitará o avanço de um nível para o outro.

Para Pachêco et al. (2020), por meio de atividades aplicadas e etc., através da interação entre estudante e professor, as fases de aprendizagem, propiciam um maior detalhamento e evolução do raciocínio geométrico.

Na ***fase 1, familiarização***, o professor e os estudantes dialogam sobre o assunto (objeto de estudo) e desenvolvem tarefas que exploram os objetos de interesse do respectivo nível. Nessa fase é introduzida à linguagem específica do nível, são feitas observações e questionamentos, assim como as atividades que serão desenvolvidas e quanto aos objetivos que se deseja alcançar. É comum dessa fase os seguintes questionamentos: “O que é um paralelogramo? Um quadrado? Um retângulo? Um losango? O que têm de diferente? O que têm de semelhante? É possível um quadrado ser um paralelogramo? Um paralelogramo poderia ser um quadrado? Por quê?”. Com esses questionamentos o professor fica ciente dos conhecimentos prévios dos estudantes e os estudantes sabendo da direção em que os estudos irão avançar.

Na ***fase 2, orientação dirigida***, são realizadas atividades que objetivam explorar o assunto através das características de um determinado nível, essas atividades são desenvolvidas de forma sequencial, isto é, tendo um aumento gradativo de dificuldade. Assim, os estudantes iram constatar as propriedades, conceitos e definições que o professor quer alvejar.

A ***fase 3, explicação***, é feita uma discussão entre os estudantes sobre o assunto e é promovida pelo professor com base nas experiências vividas anteriormente. A função do professor aqui é de observador e orientador, ou seja, ele direciona esse diálogo de forma a corrigir se necessário à linguagem do estudante, aplicando nessa etapa uma linguagem específica do nível em que os estudantes se encontram. É observado nessa fase o processo de relações de níveis. Não se introduzem conceitos novos, há apenas a troca de experiências.

Na ***fase 4, orientação livre***, são realizadas atividades que possam ser respondidas de várias maneiras, isto é, os problemas propostos apresentam um grau de dificuldade maior que os encontrados na fase 2. Os estudantes devem utilizar os conhecimentos obtidos nas fases anteriores para responderem os problemas, a fim de adquirirem experiência e autonomia. Nesta fase, o professor deve interferir o mínimo possível, assim, deixando a tarefa de formalização do conceito para o próprio estudante.

Já na ***fase 5, integração***, os estudantes realizam uma análise e síntese sobre as experiências adquiridas, formalizando uma visão geral do que foi aprendido. O professor auxilia e oferta condições para que o estudante desenvolva essa perspectiva global, sem apresentar novos conceitos. Assim, o estudante desenvolve um novo nível de pensamento geométrico.

4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

Os primeiros passos dessa teoria foram traçados por Yves Chavellard na década de 80, tendo a Transposição Didática e a noção de Organizações Praxeológicas como principais bases, como apontado por Almeida (2016). A primeira vai tratar dos saberes e as instituições, enquanto a segunda, o foco são as praxeologias matemáticas e didáticas.

4.1 Noção de Transposição Didática

A noção de transposição didática foi proposta por Chevallard (1991, 2001), visando estudar o processo evolutivo que sofre os saberes (saber escolar, saber científico), por meio de uma rede de influencias, envolvendo distintas partes do sistema educacional (PAIS, 2008).

Na década de 90, essa ideia surgia como um embrião para a definição formal da transposição didática como disserta Chevallard (1997, p. 45),

> Um conteúdo de conhecimento que foi designado como saber a ensinar, passa a partir de então por um conjunto de transformações adaptativas que o tornarão adequado para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um objeto de conhecimento em objeto de ensino em objeto de ensino é chamado de transposição didática[5].

Esse conjunto de influencias que sofre os saberes é denominado por Chevallard (1991) de *noosfera*, na qual fazem parte cientistas, professores, especialistas, pesquisadores, autores de livros e outros agentes educacionais. O trabalho da noosfera é apontando por Pais (2008), como sendo o responsável pela determinação dos conteúdos, bem como também a influencia na estruturação dos valores, dos objetivos e dos métodos que guiam a prática docente. Apontada assim pelo mesmo autor, como sendo a ideia inicial da transposição didática.

A seleção dos conteúdos escolares, assim como dos recursos didáticos para o ensino, ocorrem sob certa influência, das quais estão à prática realizada pelos

---

[5] Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a harcelo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*.

professores, os programas escolares, como a BNCC (2018) e os PCN's (1998, 2000), o Currículo de Pernambuco (2019) e também os livros didáticos, caracterizando a transposição didática externa. Apesar de que muitas dessas fontes serem preexistentes à escolha do professor, alguns conteúdos e recursos didáticos são apontados por Chevallard (2001) como criações didáticas, as quais são incorporadas à lista oficial dos conteúdos escolares avaliados pela instituição escolar (PAIS, 2008).

No ambiente escolar, em especial o *sistema*[6], os saberes sofrem adaptações pelos professores, passando por um processo de *transformação* para se tornarem aptos/adequados ao ser ensinado, e isto está diretamente relacionado à relação do professor com o saber (BESSA DE MENEZES, 2010).

Assim, é o conjunto das criações didáticas que vai mostrar a distinção entre o saber científico e o saber ensinado, pois antes do saber científico chegar ao sistema didático ele vai sofrendo deformações para se tornar apto a ser ensinado, dessa forma, Chevallard (1991) aponta que o saber a ensinar e o saber ensinado são diferentes do saber científico.

4.1.1 Do saber científico ao saber ensinado

É das deformações que certos elementos do saber sofrem, que os torna aptos para o ensino, assim, as distintas instituições produtoras de saberes geram distintas atividades matemáticas, dessa forma, Chevallard (1991) utiliza-se do uso do plural "saberes", designando-se o *saber científico* para identificar aqueles gerados pelos matemáticos, pelos pesquisadores; o *saber a ensinar*, tal qual denominado pela noosfera; e o saber ensinado, para nomear o fruto da atividade didática dos professores em sala de aula.

Segundo Bessa de Menezes (2010, pág. 31), a próxima etapa de transformação do saber científico é dentro da sala de aula, cujos protagonistas são, o professor e o estudante, e cabe ao professor o papel humano responsável por tal transposição.

Dessa forma, o objetivo do *saber científico* está mais relacionado à academia, isto é, a produção de saberes. Refere-se a um saber que é desenvolvido em

[6] De acordo com Brousseau (1996), o sistema didático é composto por pelo menos três elementos, a saber: professor, estudante e saber.

universidades ou institutos de pesquisas que irão chegar ao ensino básico, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico (PAIS, 2008).

Nesse sentido, para a viabilização da passagem do saber científico ao saber escolar, é importante ter um trabalho didático efetivo voltado para a prática educativa, emergindo assim, práticas metodológicas fundamentadas numa proposta didática visando à transformação do saber científico em saber a ensinar, conforme aponta Chevallard (1991).

Sobre o *saber a ensinar*, este estar mais ligado a uma forma didática que serve para expor o saber ao estudante. Na passagem do saber científico ao saber a ensinado, emergem os materiais de apoio pedagógico, que oferecem o essencial da intenção de ensino (PAIS, 2008).

É diante dessa perspectiva, como aponta Pais (2008), que a ciência está mais diretamente ligada ao saber acadêmico, enquanto o trabalho do professor envolve mais uma simulação de descoberta do saber. Dessa forma, o saber científico é divulgado à comunidade acadêmica por meio de artigos, teses e etc., enquanto o saber a ensinar limita-se quase sempre aos livros didáticos, programas e outros materiais de apoio à prática do professor (PAIS, 2008).

No que se refere ao *saber ensinado*, seu objetivo estar no produto resultante do processo de ensino, ou seja, são os registros do que pode ocorrer durante a aula no plano de aula do professor que, não necessariamente, coincide com as intenções previstas de antemão. (PAIS, 2008)

Não há nenhuma garantia, como aponta Pais (2008), que o resultado pretendido da aprendizagem corresponda ao conteúdo ensinado, uma vez que, os estudantes aprendem em etapas diferentes. Assim, as informações podem divergir das do saber científico, e em alguns casos, permanecer vestígios do significado original.

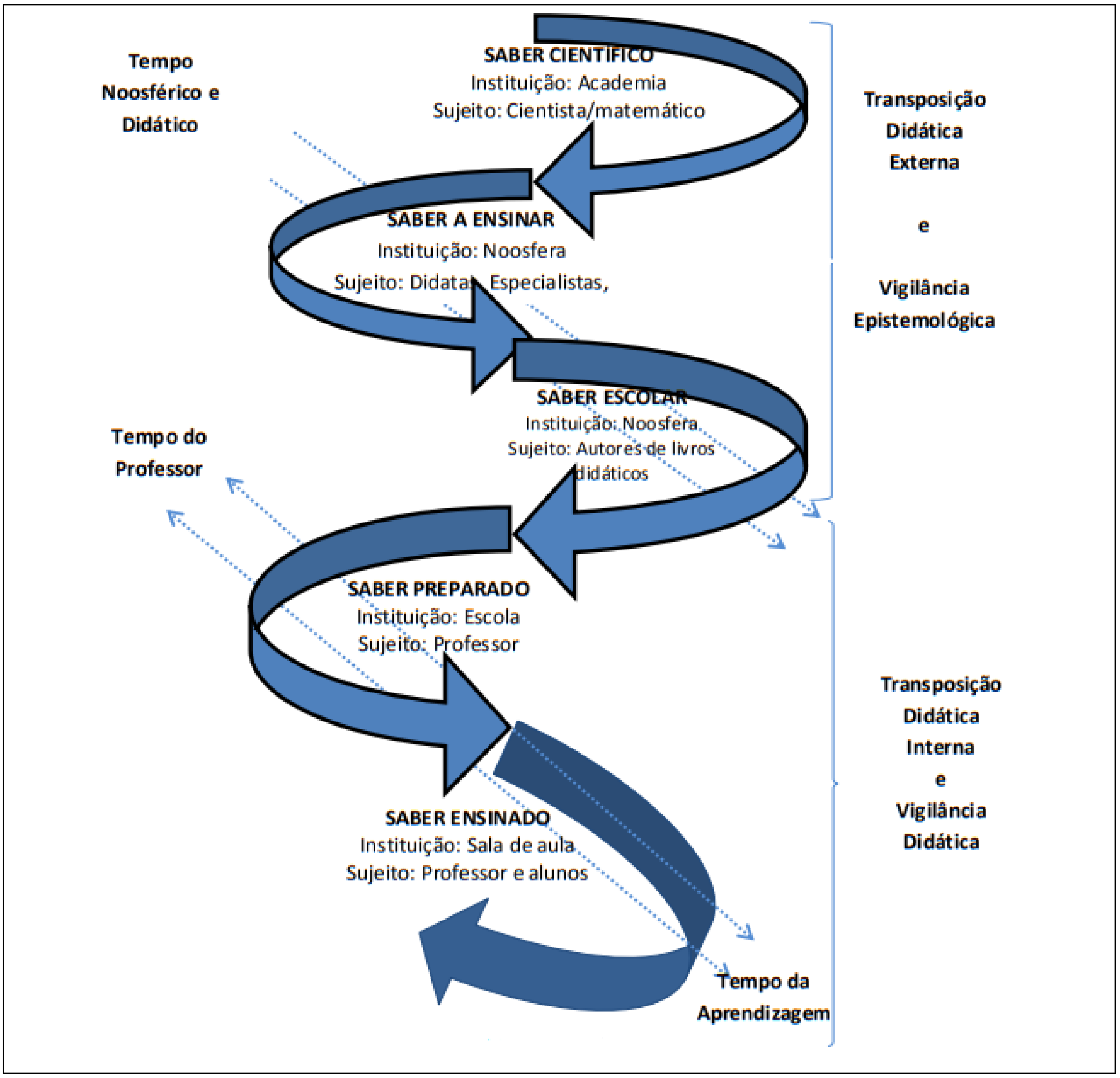
Dessa forma, Chevallard (1991) indica que na transformação dos saberes – *saber científico → saber a ensinar → saber ensinado* –, os dois primeiros vão sendo deixados de lado no percurso.

De acordo com Pais (2008, p. 25), "enquanto o *saber científico* é validado pelos seus paradigmas, o *saber ensinado* está mais diretamente sob o controle de um *contrato didático*[7] que rege as relações entre professor, aluno e saber".

---

[7] Para Brousseau (1986), o contrato didático é o conjunto das ações do professor esperadas pelos estudantes e as ações dos estudantes esperadas pelo professor, estabelecendo assim,

Figura 20 – Representação da trajetória dos saberes na Transposição Didática



Fonte: Santos (2015, p. 38)

De acordo com Almeida (2016), a transposição didática se estabelece por meio de uma série de ações em que é necessário conhecer o papel de cada um dos saberes no processo, além de ser necessário refletir sobre as diversas etapas que marcam o caminho percorrido pela referida transformação.

Assim, em suas primeiras teorizações, Chevallard (1997) desenvolveu a transposição didática para olhar o saber do ponto de vista didático, em termos de

frequentemente implícito, um conjunto de regras que determinam quais as responsabilidades de cada individuo na relação didática, responsabilidades estas que irão gerir a negociação dos significados e posteriormente, a apropriação do saber, sendo revelas principalmente quando infringidas por uma das partes.

objetos de saber. Desse modo, o autor investigava a relação entre o saber científico construído e aquele saber efetivamente ensinado aos estudantes, além de buscar esclarecimentos sobre a distância entre esses saberes (SANTOS, 2015).

No final dos anos 90, Chevallard expandiu a Teoria da Transposição Didática. A partir daí, o foco de interesse passam a serem situações em que se pretende modificar a relação ao saber de uma pessoa ou de um grupo de pessoas, numa perspectiva antropológica, o que corresponde a situar a atividade de estudo em matemática no conjunto das atividades humanas, assim, surge a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (SANTOS, 2015; ALMOULOUD, 2007).

4.2 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Segundo Almouloud (2007) esta teoria tem uma importante colaboração no campo da didática da matemática, visto que, além de tornar-se uma evolução do conceito de transposição didática, coloca a didática no campo da antropologia, enfatizando o estudo das organizações praxeológicas didáticas, conjecturas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

Chevallard (1999) assenta que para começar sua teorização são necessários três conceitos primitivos iniciais: os *objetos*, as *pessoas* e as *instituições.*

O *objeto (O)* tomará uma posição privilegiada, em relação aos demais conceitos primitivos, uma vez que, considera-o a base de toda sua construção teórica. Tudo pode ser considerado um objeto, isto é, ele existirá desde que pelo menos um individuo ou uma *instituição (I)* o reconheça. (CHEVALLARD, 1999).

Outro conceito primitivo apresentado na TAD é a *instituição (I),* que Chevallard (2003) refere-se como um dispositivo social “total” ou “parcial”, que determina – e impõe – aos seus *sujeitos* maneiras de fazer e de pensar, que são particulares de cada instituição.

No que se refere ao termo primitivo *pessoa (X),* a TAD o compreende como sendo o par formado pelo individuo *(X)* e pelo sistema de relações pessoais estabelecida com o *objeto (O),* definida por R (X, O) em algum período da vida de *(X)* (Chevallard, 2003).

4.2.1 A Organização Praxeológia ou A Noção de Praxeologia

Almouloud (2007) descreve que na TAD, as noções de tipos de tarefa (T), as técnicas (τ) e por último, a teoria (Θ), que justifica a tecnologia (θ), nos permite modelar as praticas sociais em geral e, em especial, as atividades matemáticas, baseando-se em três postulados: (i) Toda prática institucional pode ser examinada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes formas, em um sistema de tarefas mais ou menos bem esboçado; (ii) A realização de toda tarefa perpassa pelo prosseguimento/desenvolvimento de uma técnica e; (iii) A ecologia das tarefas, em outras palavras, as condições e restrições que permitem sua construção/concepção/produção e sua utilização nas instituições.

Esse mesmo autor, chama a atenção para o item 2, especificamente ao sentido da palavra *técnica,* que a mesma está apenas como uma “maneira de fazer” a tarefa, mas não necessariamente entrelaçada com o sentido metódico estruturado e algorítmico de execução de certos tipos de tarefas.

Nesse aspecto, as tarefas são reconhecidas por um verbo de ação, que caracteriza um gênero de tarefa, por exemplo*: calcular, resolver, decompor, somar, construir, determinar,* que por sua vez, não definem um assunto em estudo. Em contrapartida, *construir um triângulo equilátero utilizando régua e compasso ou até mesmo determinar o ângulo externo à α sabendo que os outros ângulos medem 87º e 15º* caracterizam tipos de tarefas.

Os dois primeiros postulados formam o bloco prático-técnico [T, τ], composto por um tipo de tarefa (T), e por uma técnica (τ) que juntas são identificadas como um *saber-fazer* (CHAVALLARD, 2002).

O terceiro postulado implica que toda tecnologia (θ) necessita de uma justificativa, chamada de teoria (Θ). Por isso, a junção entre tecnologia e teoria compõe o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] caracterizando um saber *(bloco do saber)* (BOSCH e CHEVALLARD, 1999).

Nesse aspecto, a organização praxeológia [T/τ/θ/Θ], ou praxeologias [T/τ/θ/Θ], é formada em torno de quatro elementos, são eles: tipos de tarefa (T), as técnicas (τ) e por último, a teoria (Θ), que justifica a tecnologia (θ); designando um *saber-fazer (práxis)* constituído pelo bloco prático-técnico [T, τ] que corresponde à junção entre um tipo de tarefa e uma determinada técnica, e um *saber (logos)* constituído pelo bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] produto do vínculo entre tecnologia e teoria.

4.2.1.1 Tipos de tarefa

Para Chevallard (1999), as noções de tarefa (t) e tipo de tarefa (T) é a gênese da praxeológia. A noção de tarefa (t) de acordo com a TAD é compreendida como todo e qualquer objeto que não encontramos sua existência diretamente ligada na natureza, ou seja, isto significa que será necessário executar mecanismos próprios para realizar procedimentos próprios, no caso, a execução das técnicas (τ).

Dentro da TAD, a noção de tipo de tarefa (T), ou tarefa (t), diz respeito na maioria dos casos a um conteúdo relativamente claro e preciso. Embora, as noções de tarefa (t) e tipo de tarefa (T) estejam fortemente ligadas, elas são diferentes. A tarefa (t) é a forma mais ampla, já o tipo de tarefa (T) têm sua ligação mais estrita e especifica, isto é, a ação que se pretende executar, por exemplo, solucionar um problema ou uma questão, é chamado de tarefa, ao solucionar questões propostas pelas tarefas, podemos encontrar soluções para um mesmo grupo de questões, ou melhor, tipos de tarefas.

4.2.1.2 Técnicas

A técnica (τ) é a “maneira” ou “modo” de se fazer uma tarefa (t) (CHEVALLARD, 1999), isto é, para se realizar uma tarefa (t) ou um tipo de tarefa (T) são executados certos procedimentos para resolvê-la.

Para resolver uma tarefa ou um tipo de tarefa existe pelo menos uma técnica para sua solução, contudo, cada técnica possui um certo limite, ou seja, pode funcionar para uma parte P(τ) dos tipos de tarefas (T) e não funcionar na outra parte. Dessa maneira, poderemos ter técnicas (τ) superiores a outras, no que diz respeito à quantidade realizações de certos tipos de tarefas.

4.2.1.3 Tecnologia

Para a utilização das técnicas (τ) pressupõe a existência de um discurso racional (logos) que justifique sua aplicabilidade e nos forneça elementos necessários para assegurar sua validação. A esse discurso sobre a técnica, surge a noção de tecnologia (θ), que nada mais é que uma justificativa “racionalmente”. Segundo Chevallard (1998), a tecnologia (θ) vem descrever, justificar e assegurar o uso da técnica (τ) como maneira de cumprimento de uma tarefa (t) corretamente.

A noção de tecnologia (θ) apresenta três funções, a primeira é a justificativa racional da técnica (τ) para o bom cumprimento da tarefa (t). A segunda é explicar e esclarecer o porquê do bom funcionamento da técnica (τ), e sua terceira função é produzir novas técnicas (τ) mais eficientes ou não para o cumprimento de uma determinada tarefa (t).

4.2.1.4 Teoria

Por fim, para assegurar o uso da tecnologia (θ) vem à teoria (Θ), que têm um papel similar ao da tecnologia (θ) sobre a técnica (τ), em outros termos, a teoria (Θ) têm o objetivo de justificar e explicar a tecnologia (θ), dessa forma, ela busca uma justificativa matemática com um sentido mais amplo.

Chevallard (1998) argumenta que não é necessário justificar a teoria (Θ) para analisar um determinado tipo de tarefa (T) é suficiente a descrição formada por [técnicas (τ)/tecnologia (θ)/teoria (Θ)], se não entraríamos em uma regressão, na qual iriamos justificar uma coisa atrás da outra.

4.2.2 Organização Matemática (OM) e Organização Didática (OD)

A Organização Matemática (OM) é construída pelos elementos praxeológicos (tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ)) e está voltada para toda atividade matemática que é desenvolvida na sala de aula a partir de uma Organização Didática (OD), isto é, na elaboração de uma OM é crucial uma OD, assim, toda atividade matemática se associa com uma forma de organização.

Uma Organização Didática (OD) é formada no momento em que há uma OM sendo colocada em prática, isto é, sua ação está voltada para a maneira da execução da OM, da realidade matemática (ALMEIDA, 2016).

"Por organização didática, entendemos, a priori, todos os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias, etc., acionadas para o estudo concreto em uma instituição concreta[8]" (CHEVALLARD, 1999, p. 246).

As praxeologias didáticas são construídas para responder questionamentos do tipo "como ensinar a encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo?" ou

[8] Par organisation didactique, on entendra donc a priori 1' ensemble des types de tâches, des techniques, des Technologies, etc., *appelés par l'étude concrète en une instituion concréte.*

“como estudar um livro apropriadamente?” que são inerentes as praxeologias matemáticas.

De acordo com Chevallard (1999, p. 250), essas situações são chamadas de momentos de estudos ou momentos didáticos, uma vez que, “qualquer que seja o caminho seguido, há de haver um momento em que tal ou qual gesto de estudo deverá ser realizado[9]”.

Dessa forma, Chevallard (1999) discerne seis momentos de estudo ou didáticos, que levam em consideração fatores essenciais da dimensão em um espaço multidimensional e do desenvolvimento da atividade matemática, como também permitem o detalhamento da organização didática: (1) o primeiro encontro com a organização matemática (OM); (2) a exploração dos tipos de tarefas e o desenvolvimento de técnicas; (3) a construção do ambiente tecnológico-teórico; (4) o trabalho com a técnica; (5) a institucionalização e (6) a avaliação (ALMEIDA, 2016).

O primeiro momento de estudo é o primeiro contato com o tipo de tarefa em relacionada a uma questão, isto é, o contato com a OM que está em jogo ambiente didático. Esse primeiro encontro pode ocorrer de diversas formas, entretanto, uma dessas formas é partir do encontro ou reencontro com pelo menos um tipo de tarefa, que constitui a OM proposta. Segundo Chevallard (1999, p. 250), se pode “redescobrir um tipo de tarefa da mesma maneira que redescobre uma pessoa que se acreditava conhecer[10]”.

O segundo momento é o da exploração dos tipos de tarefas e o do desenvolvimento de técnicas relativas a estes tipos de tarefas. É o momento no qual são explorados os tipos de problemas para que se construam técnicas que os resolva quase de maneira rotineira.

No terceiro momento de estudo ocorre à construção do ambiente tecnológico-teórico relativo ao topo de tarefa e a técnica proposto pela OM. Esse momento mantém uma ligação com os anteriores, uma vez que, ao escolhermos uma determinada técnica empregada para a resolução de um tipo de tarefa, estará diretamente conectada ao bloco tecnológico-teórico, para que seja justificada, e assim, a justificativa poderá ser aplicada a outros tipos de tarefas. Geralmente, para

---

[9] De tels types de situations seront appelés ici *moments* de *l’étude* ou *moments didactiques* parce qu’on peut dire que, quel que soit le cheminement suivi, *il arrive forcément um momento ù* tel ou tel « geste d’étude » devre être accompli.

[10] *Redécouvrir* un type de tâches comme on redécouvre une personne l’on croyait connaître.

alguns professores, esse momento é usado para se torna a primeira etapa de estudo de uma OM.

O quarto momento de estudo é o trabalho da técnica. É o momento que as técnicas são colocadas em prática para que possam ser aprimoradas, quando possível, e assim, tornando-se mais eficazes e mais confiáveis, para resolver um tipo particular de tarefas adequadas, o que de acordo com Chevallard (1999) faz com que a tecnologia construída até então seja ajustada, ou seja, uma mesma técnica pode ter o seu alcance aumentado para resolver outras tarefas do mesmo tipo.

O quinto momento é o da institucionalização, que tem como objetivo especificar o que é com exatidão uma OM, melhor dizendo, estabelecer os elementos da OM, distinguindo os elementos que fizeram parte da organização matemática daqueles que se integraram ao equipamento praxeológico[11] (ALMEIDA, 2016).

O sexto momento de estudo é o da avaliação, que está diretamente ligado com o momento da institucionalização, ao qual é verificado o que foi aprendido sobre a OM. Esse é o momento de fazer análises sobre o estudo feito, verificando se houve uma boa aplicação dos tipos de tarefas, das técnicas e dos elementos tecnológicos-teóricos (MADURO, 2015).

Apesar das possibilidades da TAD não se esgotarem diante do que foi apresentando nesta seção, esta pesquisa se conteve em utilizar somente o que foi descrito aqui como aporte teórico para olharmos o livro didático, e assim, verificarmos as organizações praxeológicas presentes no mesmo, para auxiliar na construção do instrumento de pesquisa voltado para a verificação dos níveis de compreensão de Van Hiele.

[11] "Para Bosch e Gascón (2009), o "equipamento praxeológico" corresponde ao conhecimento, à capacidade ou à competência de cada pessoa X e é identificado por EP(X)." (apud ALMEIDA, 2016, p. 115).

5 ABORDAGEM METODOLOGICA

Para Minayo,

> [...] a metodologia inclui simultaneamente a teoria da abordagem (o método), os instrumentos de operacionalização (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (sua experiência, sua capacidade pessoal e sua sensibilidade) (MINAYO, 2009, p. 14).

Convém salientar que metodologia e método são entes diferentes, a metodologia vem a tratar sobre o caminho definido pelo pesquisador para que a pesquisa chegue ao seu fim, já o método vem a tratar sobre os procedimentos adotados na metodologia, Gerhartd e Silveira (2009, p. 13) apontam que “a metodologia vai além da descrição dos procedimentos (métodos e técnicas a serem utilizados na pesquisa), indicando a escolha teórica realizada pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo”, já o método, segundo Lakatos e Marconi (2009, p. 83) “[...] é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo [...]”.

Dessa forma, o presente capítulo apresentará os aspectos metodológicos utilizados no desenvolvimento desta pesquisa. Apresentaremos a natureza desta pesquisa, o campo de pesquisa, o tipo de pesquisa, os participantes envolvidos, a ferramenta didática desenvolvida, bem como o instrumento utilizado para a coleta de dados e como foi analisado.

5.1 Natureza da Pesquisa

Para Fonseca (2002, p. 20), uma pesquisa qualitativa “se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais.” Assim, no seu processo, se busca examinar os fenômenos e atribuir valores aos seus significados. Sua coleta de dados é feita no próprio ambiente natural e não é aplicado técnicas estatísticas. O autor sinaliza também que a utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa possibilita recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente.

Minayo (2009, p. 21) aponta que a pesquisa qualitativa “trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes”, ou seja, fenômenos que não podem ser reduzidos à mera operacionalização de variáveis. Então, esses fenômenos não se aplicam a situações desenvolvidas no âmbito quantitativo, isto é, em situações simuladas geralmente realizadas em laboratórios. Dado que, sua finalidade não é apenas baseada em testar hipóteses, mas também fazer novas descobertas.

Dessa forma, podemos enquadrar nossa pesquisa nos conceitos da pesquisa qualitativa, visto que temos como ambiente natural a sala de aula e o pesquisador assume papel significativo na produção das informações em suas analises.

5.2 Tipo de Pesquisa

A presente pesquisa tem caráter de Pesquisa de Campo, em que o pesquisador interage com seu campo de pesquisa em busca de uma resposta para sua questão problema, como salienta Lakatos e Marconi,

> Pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 186).

No que se refere aos objetivos e a abordagem do problema, cuja resposta se pretende alcançar, a referida pesquisa tem caráter exploratório, cujo objetivo é “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a constatar hipóteses” (GIL, 2007, p. 41), em que se têm frequentemente descrições tanto qualitativas quanto quantitativas do objeto de estudo, e o pesquisador tem que conceitualizar às inter-relações entre as características do fenômeno, acontecimento (fato) ou ambiente observado (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 188).

Cabe salientar que essa investigação foi de modo exploratório e não se deteve em explicar o conteúdo ou salientar o modo operacional para a realização das questões contempladas no teste.

5.3 Campo de Pesquisa e Sujeitos Participantes

Nesse contexto, escolhemos estudantes do 8º ano por vivenciarem nesta etapa de escolarização o ensino dos triângulos, sob o ponto de vista, do comprimento dos seus lados (equilátero, escaleno e isósceles), do comprimento dos seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e dos casos de congruência como apontado em PERNAMBUCO (2019), além de pesquisas como a de Rodrigues (2015) apontar que os conhecimentos dos estudantes é muito abaixo para esse tópico, apesar deles demostrarem interesse em resolver questões desse conteúdo.

Entretanto, estudantes de outro nível de escolaridade, como os do ensino médio, também apresentam dificuldades em relação aos conteúdos geométricos, como constatou Costa e Câmara dos Santos (2015), ao averiguarem que dois terços dos estudantes ao qual passaram por um pré-teste e pós-teste não reconheceram o quadrado como um retângulo, uma vez que nesta etapa de escolaridade, de acordo com BRASIL (1998), os estudantes que saem dos anos finais do ensino fundamental devem ter formalizado esse conteúdo.

Nesse sentido, a presente pesquisa teve um total de 31 participantes, em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma Escola da Rede Municipal de Belo Jardim, no estado de Pernambuco, que por questões de ética, não iremos identifica-la. A escolha por esta escola se deu em função do pesquisador ter mais acesso a ela do que as demais, por outro lado, optamos pelo 8º ano, pois é nesta etapa de escolarização que os estudantes têm contato mais frequente com o objeto de estudo (triângulos).

É relevante destacar que os estudantes participantes nessa pesquisa, na análise de suas produções, preservamos suas identidades ao representarmos cada estudante por um código, formado pela letra E, em referência à palavra estudante, seguida de uma numeração indo-arábica (1, 2, 3, ...), assim, tivemos E1, E2, ..., E31.

5.4 Instrumento de Pesquisa

Para a elaboração do instrumento de pesquisa (Teste sobre triângulos - Apêndice A) utilizamos o que foi apresentado na seção 4 como aspectos teóricos para olharmos o livro didático utilizado pelos estudantes, assim, realizamos uma análise praxeológica no mesmo, para contemplar o objetivo específico 1, uma vez que, esse material é o objeto que os estudantes mais estão em contato.

Também, utilizamos como inspiração o instrumento adaptado por Lilian Nasser e Sant'anna (2010), ao qual contém 15 questões que verificam o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes em relação aos três primeiros níveis (nível 0, 1 e 2) da teoria de Van Hiele, contendo cinco questões para avaliar cada nível. Vale destacar que elas contém cinco questão para avaliar cada nível.

É importante destacar também que esta dissertação focou nos níveis 0 (visualização), 1 (análise) e 2 (dedução informal) de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a teoria de Van Hiele, uma vez que, várias pesquisas fundamentadas pela teoria mostram que por meio de inúmeros testes sobre os níveis de compreensão, os estudantes e parte dos professores de matemática encontram-se até os dois primeiros níveis do modelo, apresentando diversas dificuldades de aprendizagem em Geometria (COSTA, 2016, 2019; COSTA, CÂMARA DOS SANTOS, 2015, 2016a, 2016b; CÂMARA DOS SANTOS, 2001, 2009; SANTOS, CÂMARA DOS SANTOS, 2016; RODRIGUES, 2016; NAGATA, 2016; CONCEIÇÃO, OLIVEIRA, 2014).

5.4.1 Análise do livro didático

Para contemplar o objetivo específico 1, primeiro, verificamos as organizações praxeológicas presentes no livro didático sobre o estudo das medidas dos comprimentos dos lados (equilátero, escaleno e isósceles), dos ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e os casos de congruências dos triângulos, depois, elaboramos o instrumento (seção 5.4.2) baseados nas organizações praxeológicas pertencentes ao livro didático.

Para organizarmos os tipos de tarefas identificados e analisados, atribuímos a cada tipo de tarefa um índice T_n sendo n um número natural que indica a quantidade de tipos de tarefa identificados.

Antes de apresentarmos os tipos de tarefas identificados, se faz necessário, apresentar o que significa, mesma que de maneira simples, o livro didático para o professor e também para o estudante, nesse sentido, o livro didático representa atualmente um dos mais importantes instrumentos didáticos que estão à disposição do professor e do estudante, relacionados ao ensino e a aprendizagem da matemática. Além disso, é uma das principais fontes de informação em relação aos conteúdos que fazem parte dos documentos oficiais (BRASIL, 1998, 2000, 2018; PERNAMBUCO, 2012, 2019), em especial, e em alguns casos, a única fonte disponível para os estudantes.

Os livros didáticos utilizados nas escolas brasileiras são aqueles que foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que teve seu primeiro esboço em 1996, quando era chamado de Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), a fim de analisar e catalogar, adquirir e distribuir livros para as escolas públicas de todo o país.

Em 2017, através do Decreto nº 9.099, transformou-se dois programas (Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE)) em um só sob a responsabilidade do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), passando a ser chamado de Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), tendo com finalidade, avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, além de ampliar o seu escopo, passando a incluir obras literárias, e a previsão de outros matérias de apoio à prática educativa, como softwares e jogos educacionais, obras literárias, matérias de reforço, matérias de formação entre outros.

Cabe a Secretaria de Educação Básica (SEB), do Ministério da Educação (MEC), a coordenação da avaliação pedagógica dos livros didáticos, esse processo é realizado em conjunto com instituições e especialistas, cabendo aos especialistas à elaboração das resenhas dos livros aprovados, que assim, passam a compor o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2019). Em 2004, foi implantando o PNLD para o ensino médio, que analisa e distribui livros didáticos para escolas públicas de ensino médio de todo país.

O Guia do PNLD 2020 de Matemática (BRASIL, 2019) tem como objetivo auxiliar o professor na escolha do livro didático, para tanto, o guia dispõe de resenhas para cada obra na qual foram divididas nas seções: *Visão Geral das obras*, em que são apresentadas as características gerais da obra, os princípios, a abordagem didático-pedagógica e etc.; *Descrição da Obra* na qual é apresentada de forma detalhada a estrutura e organização dos volumes; *Análise da Obra* em que são apontadas as qualidades, ressalvas, competências e habilidades segundo a

BNCC e por fim a parte *Em Sala de Aula* na qual são indicadas as potencialidades pedagógicas das obras.

No Guia do PNLD 2020 (BRASIL, 2019), são apresentadas onze coleções aprovadas, às quais foram submetidas ao processo de escolha pelos professores. No quadro a seguir, é apresentado as coleções aprovadas de acordo com os dados do FNDE.

Quadro 1 – Coleções aprovadas pelo PNLD 2020

Listagem de livros	**Autor**	**Editora**	**Quantidade de exemplares**
Matemática Essencial	Patricia Rosana Moreno Potaro e Rodrigo Dias Balestri	Scipione	519.449
Convergências Matemática	Eduardo Rodrigues Chavante	SM	196.517
Araribá Mais	Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva et al.	Moderna	645.195
Apoema – Matemática	Adilson Longen	Editora do Brasil	352.759
A Conquista da Matemática	Jose Ruy Giovanni Junior	FTD	5.135.712
Matemática – Bianchi	Edwaldo Roque Bianchi	Moderna	819.862
Matemática Realidade & Tecnologia	Joamir Roberto de Souza	FTD	531.370
Matemática – Compreensão e Prática	Enio Ney de Menezes Silveira	Moderna	526.833
Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	1.045.677
Geração Alpha Matemática	Felipe Fugita, Andrezza Guersoni Rocha e Carlos Nely Clementino de Oliveira	SM	228.537
Trilhas da Matemática	Fautos Arnaud Sampaio	Saraiva	224.286

Fonte: Elaboração própria.

Para a escolha de uma das coleções a serem utilizados no triênio é importante que a equipe pedagógica juntamente com os professores façam a leitura das resenhas que estão incluídas no Guia do PNLD 2020 (BRASIL, 2019), como ressalva o MEC[12], "é importante o conhecimento do Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). É tarefa de professores e equipe pedagógica analisar as

[12] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/pnld/indexphpoptioncomcontentaviewarticleaidindexphpoptioncomcontentaviewarticleaid13658>. Acesso em 01 dez 2022.

resenhas contidas no guia para escolher adequadamente os livros a serem utilizados no triênio".

Em função do tempo disponível para a realização desta pesquisa, não seria viável analisar os livros (8º ano) de todas as coleções aprovadas para o triênio 2020-2023, o que nos conduziu a análise do livro escolhido pela a escola[13] na qual aplicamos o nosso teste sobre triângulos, sendo a Coleção Matemática – Compreensão e Prática selecionada de acordo com os critérios estabelecidos pelo MEC e pelo Guia do PNLD 2020 (BRASIL, 2019), assim, investigamos o livro pertencente ao 8º ano desta coleção. Devido ao fato dos participantes serem estudantes do 8º ano, o livro didático da turma é o material com o qual eles têm mais contanto, os tipos de tarefas que o livro possui é fonte de consulta com a qual eles estão mais habituados a trabalhar.

A análise do livro didático apresentada a seguir não se trata de uma análise praxeológica completa, isto é, não é o foco da pesquisa realizar uma análise praxeológica no livro didático seguindo os moldes apresentados por Bittar (2017). Assim, optamos por apresentar uma descrição analítica do livro didático utilizado pela turma, baseado no processo de construção da análise do livro didático realizado por Almeida (2016).

- **Matemática – Compreensão e Prática**

Essa coleção foi a sexta mais vendida, o estudo dos triângulos é apresentado na Unidade 3, capítulo 7, nas páginas 128 a 138. De acordo com o Guia do livro didático (BRASIL, 2019), a abordagem dos conteúdos geométricos na coleção é feita a partir da apresentação dos sólidos geométricos articulados com as figuras geométricas planas. Consideramos algo positivo, uma vez que os estudantes podem associar as figuras geométricas planas com as espaciais. Entretanto, é restrito o uso de softwares, como o GeoGebra, e as construções geométricas são trabalhadas com maior foco na descrição de etapas a serem seguidas.

O livro analisado apresenta uma articulação com as demais Unidades Temáticas, em especial, as operações numéricas com as medidas, algo bastante positivo, uma vez que, o estudante pode calcular as medidas a partir de expressões

[13] Vê seção 4.3.

algébricas ou resolver o problema mentalmente, fortalecendo o seu pensamento geométrico.

Em relação ao quantitativo de questões a serem trabalhadas pelos professores e resolvidas pelos estudantes, o livro apresenta problemas envolvendo os conteúdos trabalhados em cada capítulo em forma de seções, que são: *atividades*, *resolvendo em equipe*, *trabalhando os conhecimentos adquiridos* e *é hora de extrapolar*.

No quadro a seguir, exibimos as seções apresentadas anteriormente juntamente com seu objetivo didático-metodológico.

Quadro 2 – Seções de atividades do livro didático: Matemática – Compreensão e Prática

Seção	Objetivo didático-metodológico
Atividades	- É apresentada ao fim de cada conteúdo estudado, tendo objetivo de incrementar a aprendizagem do estudante, uma vez que, segundo o autor (SILVEIRA, 2018), elas possuem nível crescente de dificuldade, abordando o cálculo mental, o uso da calculadora e em alguns momentos é proposta a resolução de questões em duplas estimulando a discussão entre os estudantes e também o professor.
Resolvendo em equipe	- É apresentada em alguns capítulos, tem como objetivo incentivar a participação coletiva dos estudantes na resolução de situações-problemas.
Trabalhando os conhecimentos adquiridos	- É apresentada ao final de cada capítulo, nela as atividades abordam todo conteúdo trabalhado no capítulo, tendo como objetivo retomar conceitos e procedimentos vistos anteriormente pelo estudante, incentivando a revisão, a autoavaliação e a criatividade na resolução de problemas, sendo composta por três grupos distintos de atividades: (i) *revisitando*: formada por atividades que faram os estudantes verificarem os conhecimentos consolidados e adquiridos; (ii) *aplicando*: que explora o conteúdo por meio de atividades com diferentes níveis de dificuldade, trazendo desafios e questões de concursos e exames, e por fim, (iii) *elaborando*: cujo objetivo é estimular a criatividade e a elaboração de problemas dos estudantes;
É hora de extrapolar	- É apresentada ao final de cada unidade, sendo uma atividade em grupo proposta como fechamento da unidade temática, tendo finalidade a exploração do trabalho colaborativo envolvendo a pesquisa e a comunicação para a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma.

Fonte: Elaboração própria.

Além dessas seções (*atividades*, *resolvendo em equipe*, *trabalhando os conhecimentos adquiridos* e *é hora de extrapolar*), temos o manual do professor, que contribui para a atuação docente quanto ao uso do livro durante as aulas, uma vez que, são observadas sugestões de diversas naturezas, como comentários específicos dos conteúdos e conceitos que serão trabalhos ou estão sendo trabalhados, sugestões de atividades extras, indicações de leituras para os estudantes e também para os professores, além de que ao longo da obra, é feita indicações que relacionam os trechos da obra com as propostas estabelecidas da BNCC (BRASIL, 2018).

Entretanto, Pértile (2011), ressalva que embora o livro didático traga sugestões para a abordagem dos conteúdos é necessário que o professor adapte sua aula ao contexto do estudante, isto é, inserindo exemplos e atividades pertinentes com a sua realidade.

Para Almeida (2015), as atividades podem fazer menção a um ou mais tipos de tarefas, sendo, os exercícios, propostos ou resolvidos, apresentados no Livro Didático, como verificado a seguir.

Figura 21 – Exemplo de atividade.

4 Desenhe, no caderno, um triângulo cujos lados meçam 6 cm, 7 cm e 8 cm e depois:

a) trace as mediatrizes dos seus lados, determinando o circuncentro do triângulo. Depois, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência que circunscreve esse triângulo;

b) trace as bissetrizes dos seus ângulos, determinando o incentro do triângulo. Então, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência inscrita nesse triângulo.

Fonte: Silveira (2018, pág. 134)

Nesse exemplo, a atividade é composta pelos tipos de tarefas: T_1*: Construir um triângulo com as medidas dos lados indicadas*, T_2*: construir as mediatrizes dos lados de um triângulo*, T_3*: construir uma circunferência que circunscreve o triângulo a partir do circuncentro*, T_4*: construir as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo* e T_5*: construir uma circunferência inscrita a um triângulo*.

Dessa forma, a análise das atividades propostas no livro do 8º ano da coleção **Matemática – Compreensão e Prática** nos permitiu evidenciar os gêneros de tarefas: *relacionar, calcular, determinar* e *construir*. Cada atividade foi analisada buscando identificar e analisar os tipos de tarefas e as técnicas propostas para sua resolução para então classificar elas de acordo com os níveis de Van Hiele (1957), como apresentado na tabela 1.

Dessa forma, no quadro 3 a seguir, apresentamos todos os tipos de tarefas identificadas e analisadas e o quantitativo no livro didático da turma.

Quadro 3 – Quantitativo de tipos de tarefas encontradas.

Tipo de tarefa	**Quantidade**
T_1: Construir um triângulo com as medidas dos lados indicadas	2
T_2: Construir as mediatrizes dos lados de um triângulo	3
T_3: Construir uma circunferência que circunscreve o triângulo a partir do circuncentro	1
T_4: Construir as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo	2
T_5: Construir uma circunferência inscrita a um triângulo	1
T_6: Classificar os triângulos quanto às medidas de seus lados e ângulos	1
T_7: Construir um triângulo com as medidas dos ângulos indicadas	1
T_8: Construir as medianas de um triângulo	1
T_9: Construir as alturas de um triângulo	2
T_{10}: Construir o baricentro de um triângulo	1
T_{11}: Construir o incentro de um triângulo	1
T_{12}: Construir o circuncentro de um triângulo	1
T_{13}: Determinar se os triângulos indicados são congruentes	16
T_{14}: Relacionar cada ponto notável à ceviana correspondente.	1
T_{15}: Relacionar o incentro com a sua respectiva ceviana.	1
T_{16}: Calcular a medida de um ângulo indicado	2

Fonte: Elaboração própria.

Pela análise dos tipos de tarefas, pode-se perceber a preocupação do autor com a congruência de triângulos, assim, observamos que isso pode indicar uma estratégia do autor para a compreensão do conteúdo congruências de triângulos, como apontado por Ramalho (2016), como também, proporcionar ao estudante uma gama de tipos de tarefas deste conteúdo.

Dessa maneira, pudermos enquadrar esse quantitativo de tipos de tarefas nos níveis de compreensão de Van Hiele (1957), convém salientar que as questões enquadradas, apresentadas na tabela 1, passaram pelo processo de transcrição segundo o olhar do autor, isto é, de acordo com Bauer e Gaskell (2008), nunca haverá uma análise 100% fiel que capture uma única verdade.

Tabela 1 – Quantitativo de questões classificadas em relação aos níveis de Van Hiele.

Nível	**Quantidade**	**%**
0	1	3,84
1	7	26,92
2	14	53,84
3	4	15,40
4	0	0%
Total	26	100%

Fonte: Elaboração própria.

Como podemos verificar na tabela 1, encontramos apenas uma questão que envolveu a mobilização do nível 0 (visualização), como apresentado na figura 21, apesar dessa questão não mobilizar algum tipo de técnica algoritmizada, motivo pelo qual não pudemos enquadra-la num tipo de tarefa, já que para resolve-la o estudante têm que apenas reconhecer o triângulo nos objetos definidos com o seu formado, algo que requer apenas habilidades visuais sem necessitar de habilidade mecânicas, dessa forma, a técnica estaria sendo construída pelas as ideias, ou seja, algo que acontece acompanhado do pensamento lógico-dedutivo, assim, tanto o tipo de tarefa quanto a técnica não possuem elementos tecnológicos teóricos matemáticos, para Ramalho (2016) esse tipo de tarefa e técnica são advinda da chamada matemática escolar[14], entretanto, não conseguimos verificar e classificar mais questões que envolvessem esse nível.

Durante alguns trechos o autor escreve ao estudante, dizendo que este já estudou algumas propriedades dos triângulos, como a soma dos ângulos internos, apresentado no livro do 7º ano da coleção, por exemplo; indicando que o nível visual compete às turmas anteriores (6º e 7º ano), assim, pressupomos que os estudantes nesta fase escolar devem ter, pelo menos, intuitivamente, conhecimentos básicos sobre o triângulo.

[14] Para a autora, a *matemática escolar*, "é aquela matemática ensinada na escola que, não apenas proporciona o desenvolvimento de técnicas algoritmizáveis, conceitos e fórmulas, como também propiciam a criatividade e o desenvolvimento abstrato, favorecendo novas descobertas" (RAMALHO, 2016, p. 28).

Figura 22 – Questão classificada como nível 0.

4 O triângulo é a única figura geométrica rígida. Por esse motivo, é bastante usada na engenharia civil e na arquitetura. Observe ao seu redor e escreva exemplos de estruturas compostas de triângulos.

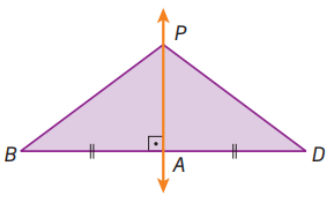
Fonte: Silveira (2018, p. 152)

O nível 1 (análise) e o 2 (dedução informal), foram os quais encontramos mais questões que o envolvessem, juntamente com o nível 0 (visualização), são os níveis mais básicos da teoria de Van Hiele, os quais são pesquisados frequentemente, e de acordo com Pachêco (2019), os estudantes nesta fase de escolarização (8º ano) possuem conhecimentos que os enquadram no nível de compreensão da análise mediante a teoria de Van Hiele, assim, eles podem progredir dentro do próprio nível ou além.

Quanto ao nível 3, encontramos alguns problemas que o envolviam, possibilitando a dedução de informações a partir de informações dadas, é o caso do problema (figura 21) que envolvia demonstrar que todos os pontos pertencentes à mediatriz de um segmento é equidistante de seus extremos, para resolvê-lo o estudante teria que provar a congruência dos triângulos *ABP* e *ADP* e a partir dessa conclusão, generalizar para todos os possíveis triângulos formados a partir de um ponto pertencente a mediatriz AP; esse tipo de problema é algo bom, pois faz com que o estudante generalize possíveis soluções, entretanto, são raros as questões que exercem ao estudante a mobilização de tais conhecimentos dedutivos, nesta fase de escolaridade.

Figura 23 – Questão classificada como nível 3.

8 Mostre que todo ponto pertencente à mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento.



Fonte: Silveira (2018, p. 153).

Já o nível 4, apontado por alguns autores, como o mais complexo da teoria de Van Hiele, tendo em vista que muitos estudantes não chegam a atingir tal nível, não encontramos problemas que o envolvessem, uma vez que, o nível 4 exige que o estudante compreenda, manipule e compare teoremas e axiomas, como apontando por Pértile (2011).

Por mais que tenhamos tentado categorizar e enquadrar todas as tarefas analisadas, identificamos algumas que não se encaixam em nenhuma categoria definida por nós, essas tarefas são identificadas no livro pela demandada de verdadeiro ou falso, e para resolvê-las é preciso que os estudantes indiquem as opções verdadeiras, falsas ou as duas ao mesmo, um exemplo é apresentado a seguir.

Figura 24 – Exemplo de questão que não foi possível enquadrar em um tipo de tarefa.

3 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

a) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.
b) Todo triângulo equilátero é também isósceles.
c) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são suplementares.
d) Existem 3 casos de congruência de triângulos: LAL, ALA e LLL.

Fonte: Silveira (2018, p. 152).

Verificamos que esse tipo de problema possui elementos tecnológicos matemáticos sem necessitar de uma técnica algoritmizada/mecânica, apenas que o estudante tenha ciência das definições ou teoremas exigidos pelo problema para sua resolução, para Bittar (2017) nem sempre uma técnica irá parecer com o que habitualmente chamamos de técnica matemática, para Chevallard (1998) essa técnica pode ser considerada autotecnológica[15], assim, não irá necessitar de justificativas.

As tarefas analisadas são solucionadas mediante a mobilização de uma ou mais técnicas, visto que, as atividades como apontado por Almeida (2015) podem possuir um ou mais tipos de tarefas, motivo ao qual optamos por não incluir um item no quadro 3 que indicasse a quantidade de tipos de tarefas identificadas no livro didático. Consideramos como técnica, aquela que resolve o problema,

[15] De acordo com Chevallard (1998) "existe uma naturalidade institucionalmente aceita em praticar tal técnica, tornando sua justificativa desnecessária, por essa ser a "boa maneira" de fazer" (apud BITTAR, 2017, p. 377).

consequentemente determinada tarefa, pautada de acordo com o que é apresentado no livro didático, isto é, em exemplos que antecedem as atividades e na própria resolução apresentada no manual do professor, como ressalva Ramalho (2016, p. 49).

Assim, no quadro 4 a seguir, apresentamos as técnicas mobilizadas para a resolução dos tipos de tarefas identificadas no quadro 3.

Quadro 4 – Técnicas mobilizadas para a resolução dos tipos de tarefas

Tipo de Tarefa	**Descrição da Técnica**
T_1	1. Verificar se as medidas dos lados indicados passam pela desigualdade triangular (a + b > c, a + c > b e b + c < a); 2. Construir um segmento de reta AB com uma das medidas indicadas; 3. Na extremidade A construir um círculo com raio sendo uma das outras medidas; 4. Na extremidade B construir um círculo com a outra medida, obtendo o ponto P como a interseção dos círculos; 5. Construir os segmentos PA e PB, e assim, com o segmento AB, construímos o triângulo solicitado.
T_2	1. Traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B; 2. Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos; 3. A reta PQ é mediatriz do segmento AB. 4. Para traçar as outras mediatrizes, relativas aos lados BC e AC, procede-se de maneira análoga.
T_3	1. Traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B; 2. Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos; 3. A reta PQ é mediatriz do segmento AB. 4. Para traçar as outras mediatrizes, relativas aos lados BC e AC, procede-se de maneira análoga. 5. Seja o ponto D a interseção das mediatrizes, portanto, é o circuncentro; 6. Seja o ponto N a interseção da reta PQ com o lado AB; 7. Traça-se o círculo com centro em D e raio DN.
T_4	1. Traça-se um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo; 2. Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção; 3. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo; 4. Para traçar as outras bissetrizes, relativa aos ângulos B e C, procede-se de maneira análoga..
T_5	1. Traça-se um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo; 2. Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção; 3. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo; 4. Para traçar as outras bissetrizes, relativa aos ângulos B e C, procede-

	se de maneira análoga.; 5. A interseção I das bissetrizes é o incentro do triângulo; 6. Seja o ponto L interseção de uma das bissetrizes do triângulo com um de seus lados; 7. Traça-se o círculo com centro em I e raio IO
T_6	1. Analisar se as medidas dos lados do triângulo são: (i) todas diferentes, (iii) todas iguais ou (iii) dois lados iguais e um diferente; 2. Classificar em escaleno, equilátero e isósceles; 3. Analisar se as medidas dos ângulos internos são: (i) todas menores que um ângulo reto, (ii) um ângulo é reto ou (iii) um ângulo é maior que um ângulo reto; 4. Classificar em acutângulo, retângulo e obtusângulo.
T_7	1. Verificar se a soma dos ângulos é 180º ($\alpha + \beta + \theta = 180º$); 2. Se a soma for 180º é possível. 3. Se a soma for maior que 180º não é possível.
T_8	1. Traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B; 2. Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos; 3. A reta PQ é mediatriz do segmento AB, portanto sua interseção com AB forma o ponto médio M; 4. Traça-se o segmento de reta MC; 5. Para traçar as outras medianas, relativa aos vértices B e C, procede-se de maneira análoga.
T_9	1. Prolongar o segmento BC; 2. Traça a partir de A um círculo que corte a reta BC em dois pontos D e E; 3. Traça um círculo com o reio maior que a metade do arco DE, com centros em D e E, obtendo a interseção dos círculos F; 4. A reta AF é perpendicular e passa pelo vértice A, portanto, é altura; 5. Para traçar as outras alturas, relativas aos vértices B e C, procede-se de maneira análoga.
T_{10}	1. Prolongar o segmento BC; 2. Traça a partir de A um círculo que corte a reta BC em dois pontos D e E; 3. Traça um círculo com o reio maior que a metade do arco DE, com centros em D e E, obtendo a interseção dos círculos F; 4. A reta AF é perpendicular e passa pelo vértice A, portanto, é altura; 5. Para traçar as outras alturas, relativas aos vértices B e C, procede-se de maneira análoga; 6. A interseção G das alturas é o baricentro.
T_{11}	1. Traça-se um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo; 2. Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção; 3. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo; 4. Para traçar as outras bissetrizes, relativa aos ângulos B e C, procede-se de maneira análoga.; 5. A interseção I das bissetrizes é o incentro do triângulo.
T_{12}	1. Traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B; 2. Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos; 3. A reta PQ é mediatriz do segmento AB.

	4. Para traçar as outras mediatrizes, relativas aos lados BC e AC, procede-se de maneira análoga. 5. Seja o ponto D a interseção das mediatrizes, portanto, é o circuncentro.
T_{13}	1. Analisar as medidas dos lados dos triângulos; 2. Analisar as medidas dos ângulos internos dos triângulos; 3. Aplicar o caso de congruência correspondente com as analises nas etapas 1 e 2.
T_{14}	1. Incentro é o encontro das bissetrizes de um triângulo; 2. Baricentro é o encontro das medianas de um triângulo; 3. Circuncentro é o encontro das mediatrizes de um triângulo; 4. Ortocentro é o encontro das alturas de um triângulo.
T_{15}	1. Incentro é o encontro das bissetrizes de um triângulo.
T_{16}	1. Representar os dados fornecidos em escrita algébrica; 2. Resolver equações, sistemas de equações ou inequações.

Fonte: Elaboração própria.

Mediante as tarefas e técnicas analisadas no livro didático da turma, observamos que o ensino proposto dos triângulos, sob o ponto de vista do comprimento dos seus lados (escaleno, equilátero e isósceles), do comprimento dos seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e os casos de congruência, traz em cena a construção das figuras propostas por régua e compasso. Se tratando de um conteúdo que exige mais tempo didático e cuidado com o seu ensino por se trata da utilização de ferramentas didáticas não muito usuais em sala de aula, além do autor já ter trabalhado com esse assunto noutro trabalho[16], optamos por não oferecer questões em nosso instrumento que envolvesse a construção do triângulo ou suas cevianas[17] por régua e compasso.

De maneira geral, são explorados vários tipos de tarefas, as quais envolveram tanto um contexto puramente matemático como extraescolar[18].

5.4.2 Elaboração do Instrumento de Pesquisa (Teste sobre triângulos)

Levando em consideração o que discutimos na seção anterior e o que foi apresentado na seção 3, elaboramos o teste sobre triângulos com 15 questões, visando a melhor maneira de analisar os dados, dividimos as 15 questões em 3 blocos, nos quais constará 5 questões em cada, cada bloco corresponderá aos

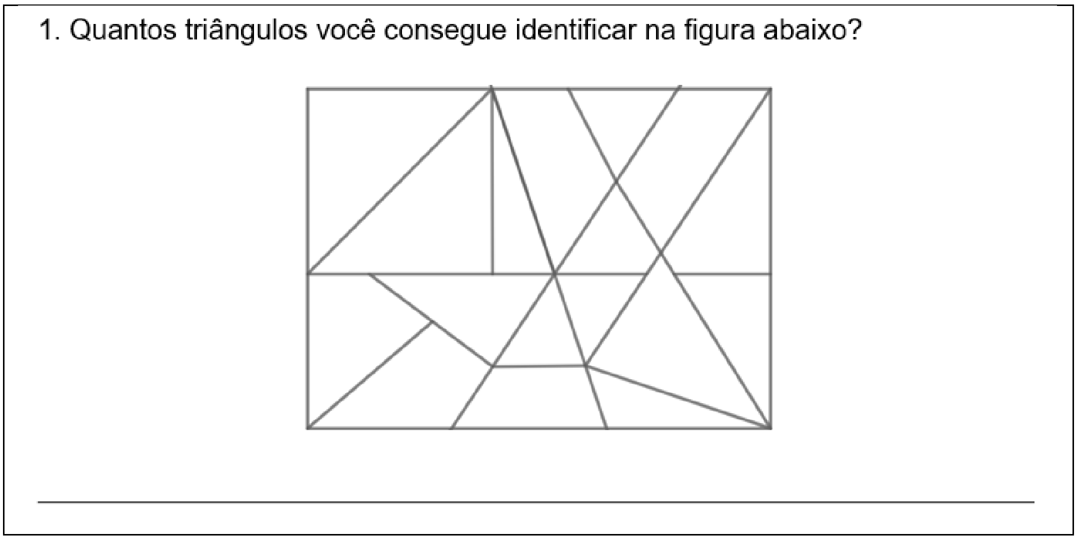
[16] Vê Lopes (2018).
[17] Ceviana é qualquer segmento de reta que tem umas das extremidades num dos vértices e a outra sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado. O nome Ceviana decorre do nome do matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734), o qual formulou o teorema que leva seu nome.
[18] Situações matemáticas que envolvem elementos do cotidiano do ser humano.

níveis 0 (visualização), 1 (análise), e 2 (dedução informal), assim, o bloco (i) responsável pelo nível 0 (visualização) terá as questões 1 a 5; o bloco (ii) responsável pelo nível 1 (análise) terá as questões 6 a 10 e o bloco (iii) responsável pelo nível 2 (dedução informal) terá as questões 11 a 15.

5.4.2.1 Questões do nível 0 (visualização)

Na primeira questão, o objetivo é verificar o conhecimento do estudante no que diz respeito ao reconhecimento do triângulo como uma figura geométrica fechada que possui três lados.

Figura 25 – Questão 1.

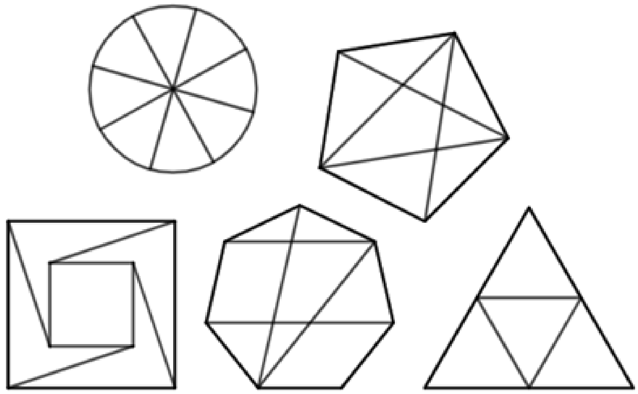


Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão, o objetivo novamente é o mesmo da questão anterior, porém, com um diferencial, o enunciado não faz menção à figura do triângulo, então, os estudantes terão que observar dentre as figuras formadas e determinar que a predominante de fato seja o triângulo.

Figura 26 – Questão 2.

2. Que forma geométrica é predominante nas figuras abaixo?



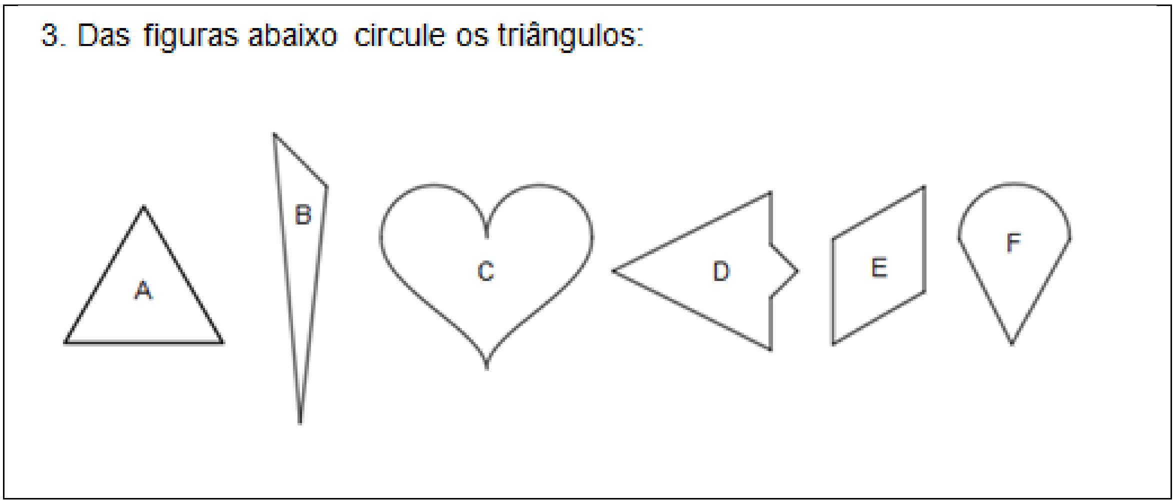
Fonte: Elaboração própria.

Na questão 3, o objetivo é avaliar se os estudantes conhecem o triângulo e conseguem diferenciá-lo doutras figuras *pontiagudas* com aparência triangular.

Como resposta correta para esta questão, espera-se que os estudantes marquem as figuras A e B como sendo triângulos. Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), sugere que nessa etapa de escolaridade os estudantes devem saber identificar e nomear polígonos levando em consideração o seu número de lados.

Deste modo, a figura C e F não são polígonos, pois são figuras que possuem partes *curvadas*. Além de que, as figuras D e E serem polígonos com aparência triangular, pois a figura D é um hexágono e a figura E um quadrilátero, ambas, não se enquadram na resposta correta da questão. Como nos anos iniciais o estudo das figuras é designado, incialmente, pelo reconhecimento/verificação de suas formas, e em seguida é por suas propriedades, posteriormente no 6º e 7º ano o estudo das figuras geométricas é aprofundado dando uma visão mais global dos elementos e propriedades das figuras geométricas, assim, acredita-se as figuras C, D, E e F não sejam marcadas pelos estudantes.

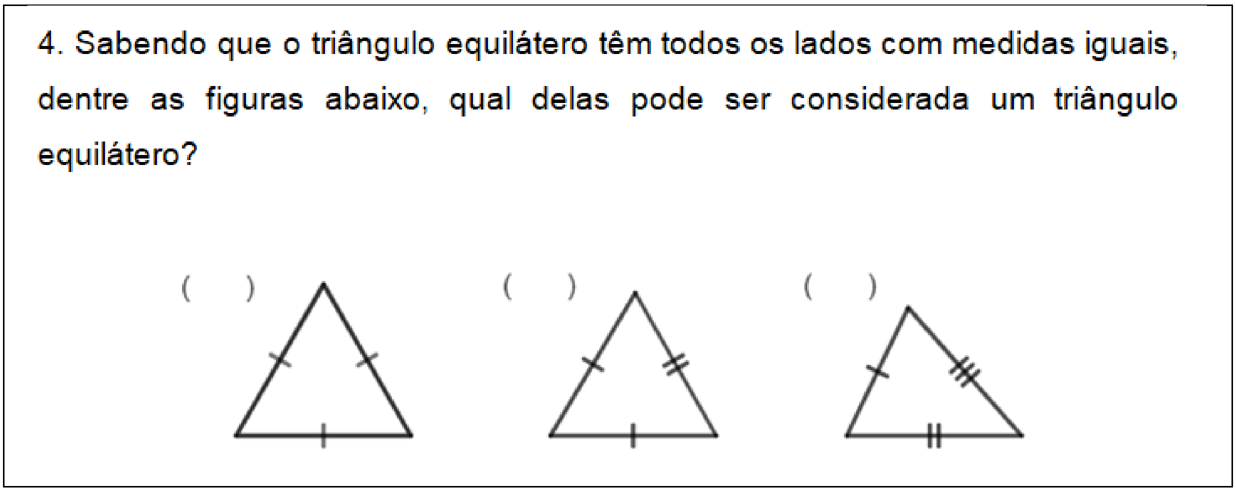
Figura 27 – Questão 3.



Fonte: Elaboração própria.

No quarto quesito, sabendo do fato que o triângulo equilátero tem todos os lados com a mesma medida, o estudante é convidado a verificar qual das figuras é de fato um triângulo equilátero, observando a indicação dos traços[19] nos lados de cada triângulo apresentado na figura, para Pernambuco (2012), as figuras geométricas são qualificadas por seus elementos e propriedades.

Figura 28 – Questão 4.



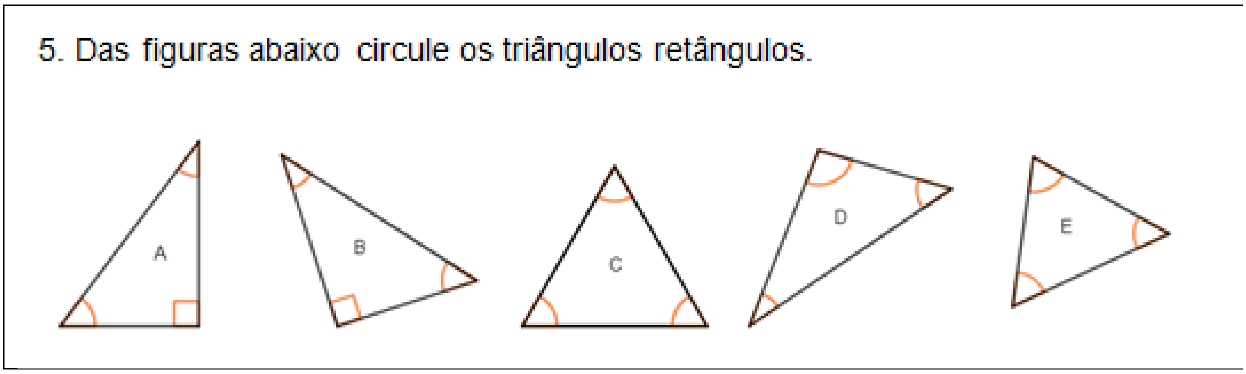
Fonte: Elaboração própria.

[19] Tanto na bibliografia de base (NETO, 2015; DOLCE E POMPEO, 2013) para as definições do triângulo no capítulo 2, como no livro analisado (SILVEIRA, 2018), não encontramos uma definição propriamente dita para o uso dos traços para demarcar segmentos congruentes, apenas uma indicação dos autores para tal uso.

A quinta questão tem como propósito verificar se os estudantes já conhecem o triângulo retângulo pela sua aparência global, ou seja, que o fator que determina que ele seja retângulo é o seu ângulo de 90º, sendo também um dos triângulos mais conhecidos, quiçá o mais conhecido pelos estudantes. Além disso, a questão traz em destaque os ângulos em cada triângulo, esse fato é interessante, pois a forma mais conhecida de verificarmos se um triângulo é retângulo é identificando visualmente se o ângulo reto vem representado por um “quadrado”.

Assim, se espera que os estudantes marquem as figuras A e B, pois elas contemplam o enunciado, além delas possuírem os ângulos em destaque na forma de um “quadrado”.

Figura 29 – Questão 5.



Fonte: Elaboração própria.

As questões 1 a 5 foram pensadas seguindo a descrição da seção 3.1.1, em que a ênfase está no que o estudante vê e entende, pois a percepção visual dos objetos geométricos é predominante e é o fator de maior domínio e influência, por isso foram elaboradas com a utilização de figuras para que as análises fossem simples.

5.4.2.2 Questões do nível 1 (análise)

A questão 6 a retiramos de Nasser e Sant’Anna (2010) e a modificamos, pois ela tem como objetivo que o estudante faça a associação dos lados com os ângulos em um triângulo isósceles, isto é, se o triângulo é isósceles, consequentemente ele tem dois lados congruentes e dois ângulos congruentes, dessa forma, buscamos essa questão para evidenciar essa propriedade, além de trazermos os *traços* nos lados do triângulo como objeto representativo de igualdade para indicar há uma congruência de medidas nos lados que possuem a mesma quantidade de *traços*.

Deste modo, se espera que os estudantes marquem à alternativa C, pois ela atende as propriedades do triângulo isósceles. Já as alternativas A e B, fazem menção às propriedades do triângulo equilátero, apesar do triângulo equilátero também ser isósceles, mas o contrário não ser verdadeiro, não se espera que os estudantes marquem essas alternativas.

Figura 30 – Questão 6.

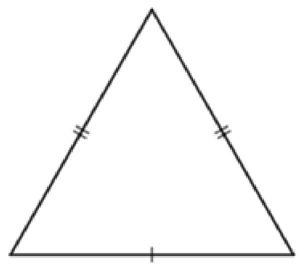
6. O triângulo isósceles têm dois lados com medidas iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos desse triângulo:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.

b) Os três ângulos têm as medidas iguais.

c) Dois ângulos têm as medidas iguais.

d) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, pág. 86), modificada pelo autor.

A questão 7 tem como proposito saber se o estudante tem conhecimento dos dois elementos que determinam a classificação dos triângulos, o lado (escaleno, isósceles e equilátero) e o ângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo), assim, é pedido para que eles expliquem porque usamos os lados e os ângulos para fazer tais classificações.

Nesse sentido, a questão foi pensada de forma aberta, pois o elemento da solução mais importante é a justificativa que o estudante irá trazer, como possíveis justificativas, elas têm que girar em torno de algo como "os triângulos possuem três lados, que podem ter tamanhos variados, e também possuem três ângulos internos que possuem medidas variadas, então, as possíveis classificações envolvendo os lados são escaleno (todos os lados com medidas diferentes), isósceles (pelo menos dois lados com medidas iguais) e equilátero (todos os lados com mesma medida; já a classificação que envolve os ângulo tem que obedecer a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo (soma igual a 180º), na qual temos o acutângulo (todos os ângulos agudos), o retângulo (um ângulo reto) e o obtusângulo (um ângulo maior que 90º e menor que 180º)”.

Segundo Brasil (2018), nessa etapa de escolaridade (Ensino Fundamental – Anos Finais), os estudantes concebem conhecimentos geométricos referentes aos elementos e propriedades das figuras geométricas que irão fomentar o seu pensamento geométrico.

Figura 31 – Questão 7.

7. Quais elementos consideramos para classificar os triângulos? E por quê?

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo da questão 8 é verificar se o estudante reconhece que o triângulo equilátero tem os ângulos internos medindo 60º cada, assim o quesito foi pensado para que o estudante mostre esse fato e justifique-o, ou melhor, ao responder o primeiro questionamento corretamente (que a medida é 60º), a justificativa que ele terá que desenvolver será algo parecido com “*se o triângulo isósceles tem dois lados congruentes/iguais e dois ângulos internos congruentes/iguais, então, o triângulo equilátero que tem três lados congruentes/iguais terá três ângulos internos congruentes/iguais, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, logo, 180º dividido por três dá 60º*” ou “*como o triângulo equilátero tem três lados congruentes/iguais, consequentemente tem três ângulos internos congruentes/iguais, como a soma dos ângulos internos é 180º, logo, 180º dividido por três é 60º”*.

Uma vez que, de acordo Pernambuco (2012), os estudantes nessa etapa de escolaridade são capazes de identificar e classificar os triângulos quanto às medidas de seus lados e de seus ângulos.

Figura 32 – Questão 8.

8. Qual é a medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero? E por que eles têm essa medida?

Fonte: Elaboração própria.

A questão 9, retiramos ela de Dolce e Pompeo (2013, p. 46 e 47), e a modificamos com proposito de correlacionar as classificações dos triângulos e verificar o entendimento de congruência por parte dos estudantes pedindo uma justificativa para os casos em que o estudante marcou falso, assim, seu objetivo é verificar se o estudante consegue identificar que um triângulo pode ser classificado tanto pelo lado e quanto pelo ângulo ao mesmo tempo e porque ele pode ter essa classificação dupla, além de verificar a definição de congruência emitida pelos estudantes e outras propriedades dos triângulos, como por exemplo, que todos os triângulos equiláteros são semelhantes, não congruentes. Dessa maneira, elaboramos esse quesito para que a justificativa dos casos que ele marcou como falso seja o “grande tesouro”, isto é, ao justificar, por exemplo, que todo triângulo equilátero é semelhante e não congruente, o argumento que o estudante dará é o que vai determinar se ele esta no nível de Van Hiele correspondente ao que o quesito pede e assim, indicará que ele domina as características desse nível.

Figura 33 – Questão 9.

9. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) Todos os triângulos são congruentes.

( ) Todo triângulo isósceles é equilátero.

( ) Todo triângulo equilátero é isósceles.

( ) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

( ) Um triângulo escaleno pode ser retângulo.

( ) Um triângulo acutângulo ou é equilátero ou escaleno.

( ) Um triângulo equilátero ou é obtusângulo ou retângulo.

( ) Um triângulo equilátero sempre é acutângulo.

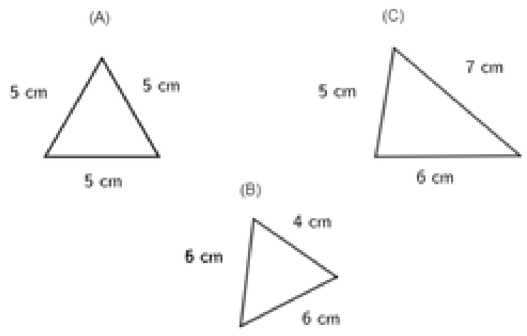
Justifique os casos em que você marcou F abaixo.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p 46 e 47), modificada pelo autor.

Para a questão 10, nos baseamos em Nagata (2016) para elaboração da questão, a questão em si objetiva-se que o estudante marque a opção corresponde à nomenclatura dos triângulos segundo a classificação por lados, com isso, ao verificar as medidas dos lados em cada triângulo o estudante irá associar a nomenclatura correspondente, passando assim, a diferenciar os tipos de triângulos. Assim, espera-se que os estudantes assinalem a alternativa C como resposta correta. Uma vez que a classificação por lados é a mais trabalhada em sala de aula pelo professor, como aponta Pachêco et al. (2020).

Figura 34 – Questão 10.

10. Observe os triângulos abaixo.



Qual opção apresenta corretamente a nomenclatura?

a) (A) – Escaleno, (B) – Equilátero e (C) Isósceles.

b) (A) – Isósceles, (B) – Equilátero e (C) Escaleno.

c) (A) – Equilátero, (B) – Isósceles e (C) Escaleno.

d) (A) – Isósceles, (B) – Escaleno e (C) Equilátero.

Fonte: Nagata (2016, p. 66) modificada pelo autor.

As questões 6 a 10 foram pensadas levando em consideração o que foi descrito na seção 3.1.2, na qual a ênfase está nas propriedades e características de cada figura geométrica.

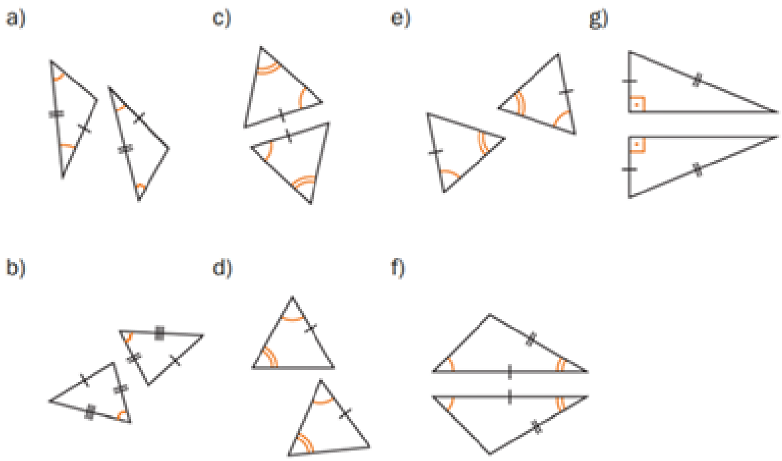
5.4.2.3 Questões do nível 2 (dedução informal)

As últimas cinco questões, 11 a 15, foram pensadas seguindo os detalhamentos da seção 3.1.3, em que a ênfase está nas inter-relações de propriedades e características tanto dentro de um figura (no triângulo, o maior lado está oposto ao maior ângulo) quanto entre figuras (um triângulo equilátero é também isósceles porque tem todas as propriedades de um triângulo isósceles)

A questão 11 a retiramos de Dolce e Pompeo (2013, p. 49), e modificamos dois itens, com o objetivo de que eles sejam respondidos com mais de um caso de congruência, assim, a questão solicita que o estudante identifique os possíveis casos de congruência nos itens, podendo o estudante responder de maneira geral indicando todos os casos de congruência envolvidos no enunciado ou indicar os casos de congruência item por item.

Figura 35 – Questão 11.

11. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique os possíveis casos de congruência.

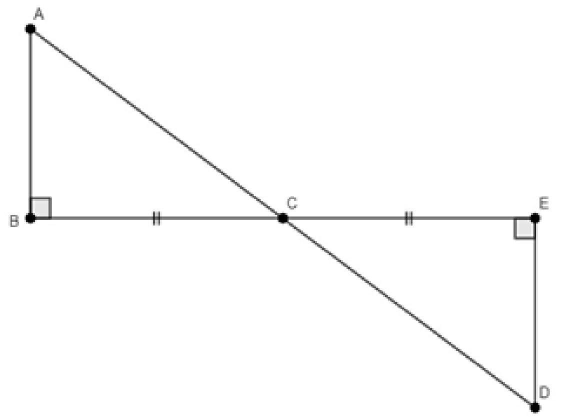


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 49), modificada pelo autor.

A questão 12 foi elaborada a fim de verificar se os estudantes conseguem resolver o problema proposto a partir da identificação da congruência dos triângulos *ABC* e *CDE* (caso ALA) partindo da identificação dos ângulos opostos pelo vértice $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$, para que ele possa estabelecer as igualdades 2x – 1 = 15 e 2y + 3 = 9. Assim, espera-se que os estudantes marquem a alternativa C como resposta correta para esta questão.

Figura 36 – Questão 12.

12. Na figura abaixo, AB = 9 cm, DC = 15 cm, AC = 2x – 1 cm e DE = 2y + 3 cm, quantos centímetros tem o valor de x + y:



a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

Fonte: Elaboração própria.

A questão 13 foi elaborada a fim de verificar se os estudantes entendem os casos de congruência (ALA, LAL, LLL, LAAo e Caso especial dos triângulos retângulos) e também aspectos relacionados ao triângulo equilátero, uma vez que todos os triângulos equiláteros são semelhantes e não congruentes

O item I, não se trata de um caso de congruência, apesar de que em certos casos específicos o caso mencionado LLA dê conta, ele não pode ser generalizado, pois ele não é um postulado/critério de congruência, pois ele gera ambiguidades de interpretação, isto é, LLA trata-se de um ângulo com um lado adjacente a ele e o outro oposto, assim, essa informação não garante semelhança, porque, se o lado oposto ao ângulo for o menor, o triângulo pode ter LLA (ou ALL) congruentes e um deles ser um triângulo obtusângulo e o outro acutângulo.

Os itens II e III estão corretos, em relação ao item II dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes, eles seriam semelhantes; já o item III faz menção ao caso de congruência LAL. Assim, como solução para a questão, espera-se que os estudantes marquem a alternativa E.

Figura 37 – Questão 13.

13. Sobre a congruência de triângulos, julgue as afirmações a seguir:

I – Ao comparar dois triângulos, se a medida de dois lados e um ângulo, todos consecutivos for congruentes, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Lado, Lado e Ângulo.

II – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

III – Ao comparar dois triângulos, se a medida de dois lados consecutivos e o ângulo interno compreendido entre eles for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Lado, Ângulo e Lado.

a) Somente a I é verdadeira.

b) Somente a II é verdadeira.

c) Somente a III é verdadeira.

d) Somente a I e a II são verdadeiras.

e) Somente a II e a III são verdadeiras.

Fonte: Elaboração própria.

Na questão 14 é pedido que os estudantes dessem uma justificativa do “por que” todo triângulo equilátero é também isósceles, sendo assim, seu objetivo é verificar se a justificativa que os estudantes emitiram condizem com os aspectos do triângulo isósceles, vale ressaltar também, que as justificativas não precisam serem exatamente formais como a definição do triângulo isósceles, mas que elas contenham o essencial dele, que é *“para um triângulo ser classificado como isósceles, ele precisa ter pelo menos dois lados congruentes, e consequentemente, dois ângulos congruentes*”.

Dessa forma, espera-se que as justificativas fornecidas pelos estudantes girem em torno da justificativa apresentada pelo autor anteriormente.

Figura 38 – Questão 14.

14. Pode-se afirmar que todo triângulo equilátero é também isósceles? Por quê?

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, a questão 15 foi retirada integralmente de Dolce e Pompeo (2013, p. 51), pois ela é extremamente interessante ao trazer casos de congruência que funcionam em alguns casos específicos, mas não na maioria, além de um desses casos (LLA) já ter sido mencionado na questão 13, sendo assim, seu objetivo é verificar se os estudantes conseguem identificar que esses casos são falhos na maioria dos triângulos, assim, sua resolução pode vim de algumas formas possíveis, sendo uma delas uma justificativa, na qual o estudante vai descrever um argumento explicando o “por que” eles não são casos de congruências fazendo menção aos tipos de triângulos envolvidos na situação como apresentado pelo autor no quesito 13, item I; outra pode ser na forma de um contraexemplo, em que, eles irão pensar num *triângulo visual*[20] que sirva de resposta para o problema proposto e etc.

Figura 39 – Questão 15.

15. Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 51).

5.5 Etapas da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em três momentos, o **primeiro** consistiu em: (i) analisar o livro didático da turma, baseado nas organizações praxeológicas segundo Chevallard (1999, 2002, 2003), na qual, é composta por *tipos de tarefa (T)*, *técnicas (τ)*, *tecnologia (θ)* e *teoria (Θ)* e (ii) elaborar o instrumento de pesquisa (teste sobre triângulos) baseado nas organizações praxeológicas identificadas no livro didático, a fim de contemplarmos o objetivo específico 1.

O **segundo** consistiu na aplicação do instrumento de pesquisa, a fim de coletar os dados para a análise, e por fim, o **terceiro** constituiu-se na análise dos dados para contemplarmos os objetivos específicos 2 e 3.

[20] Nos referimos como *triângulo visual* aquele que o estudante irá desenhar para representar a situação desejada.

Dessa forma, o quadro 5, sintetiza de maneira simples, os momentos realizados durante a pesquisa.

Quadro 5 – Cronograma das etapas da pesquisa.

Data	**Etapa**
01/07/2022 a 30/11/2022	Análise praxeológica e elaboração do teste sobre triângulos.
16/12/2022	Aplicação do teste sobre triângulos.
20/12/2022 a 31/01/2023	Análise dos dados obtidos.

Fonte: Elaboração própria.

A investigação deu-se a partir das informações coletadas no período de julho do ano de 2022 a janeiro do ano de 2023.

6 RESULTADOS E DISCUSS

Como o foco dessa pesquisa é verificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes participantes por meio de um instrumento de verificação (teste de triângulos) com 15 questões, usaram-se apenas os níveis de compreensão como método de discutir e categorizar os dados obtidos, e não as fases[21] de aprendizagens.

6.1 Critérios de Análise

Para análise dos dados produzidos pelos estudantes foram utilizados dados quantitativos, entretanto, como o nosso objetivo é verificar em qual nível de desenvolvimento do pensamento geométrico os estudantes se encontram, portanto os resultados numéricos obtidos sevem apenas para subsidiar o método avaliativo.

As análises dos dados estão expostas em dois momentos, (i) no primeiro momento voltamos nosso olhar para o teste por completo, a fim de contemplarmos o objetivo específico 2, isto é, analisamos a produção da turma identificando o quantitativo de erros, acertos parciais e totais e identificamos o nível de compreensão da turma; (ii) no segundo momento, para contemplarmos o objetivo específico 3, analisamos as questões individualmente, dando assim, um olhar mais aprofundado sobre as respostas encontradas em cada uma delas em relação ao nível correspondente. Em ambos os momentos utilizamos dados quantitativos para elencar o total de estudantes que se enquadravam nos níveis 0 (visualização), 1 (análise) e 2 (dedução informal) da teoria de Van Hiele, em relação ao estudo com triângulos de acordo com os métodos utilizados.

Nesse sentido, no primeiro momento, ao qual realizamos a identificação dos níveis de compreensão de maneira geral, utilizamos as categorias estabelecidas por Pachêco et al. (2020) e a adequamos ao nosso teste, da seguinte forma:

- Acertaram completamente – estudantes que responderam todas as questões de maneira correta;

---

[21] Para Pachêco et al. (2020), a utilização das fases de aprendizagem, como método para discutir e categorizar os dados, é necessário uma vivência (minicurso, sequência didática, oficina, etc.) com os estudantes, por exemplo.

- Acertaram parcialmente – estudantes que não acertaram completamente todas as questões, isto é, se enquadram nessa categoria estudantes que tenham acertado 1, 2, 3 ou 4 questões correspondente aos blocos de questões relacionada com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico;
- Erraram complemente – estudantes que não tenham acertado nenhuma questão;
- Não responderam – estudantes que deixaram o teste sem resposta.

Para um olhar mais detalhado em relação ao quantitativo de questões na categoria acertaram parcialmente o teste, e também para analisarmos as justificativas apresentadas pelos estudantes no segundo momento de análise, utilizamos as categorias apresentadas por Nagata (2016) para o enquadramento dos estudantes nos níveis de compreensão de Van Hiele e adequamos ao nosso teste, uma vez que, o nosso objetivo geral é construir um instrumente para verificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes naquele momento.

Dessa maneira, temos atingiram (para os estudantes que acertaram 3, 4 ou 5 questões em relação ao bloco 1 de questões ; 4 ou 5 questões em relação ao bloco 2 de questões e 4 ou 5 questões em relação ao bloco 3 de questões referentes aos níveis de Van Hiele), em processo (para os estudantes que acertarem 2 questões em relação ao bloco 1 de questões; 3 questões em relação ao bloco 2 de questões e 3 questões em relação ao bloco 3 de questões) e não atingiram (para os estudantes que acertarem 1 ou errarem todas as questões em relação ao bloco 1 de questões; 0, 1 ou 2 em relação ao bloco 2 de questões e 0, 1 ou 2 em relação ao bloco 3 questões).

Tabela 2 – Número de questões certas em adequação aos Níveis.

Nível	Atingiram	Em processo	Não atingiram
0	3, 4 ou 5	2	0 ou 1
1	4 ou 5	3	0, 1 ou 2
2	4 ou 5	3	0, 1 ou 2

Fonte: Nagata (2016, p. 64), modificada pelo autor.

6.2 Desempenho da Turma

Conforme o que apresentamos anteriormente, a tabela à abaixo apresenta os dados de forma geral sobre o desempenho da turma.

Tabela 3 – Dados obtidos de maneira geral.

	Acertaram completamente	**Acertaram parcialmente**	**Erraram completamente**	**Não responderam**
Quantitativo de estudantes	1	30	0	0
Percentual de estudantes	3,23%	96,77%	0%	0%

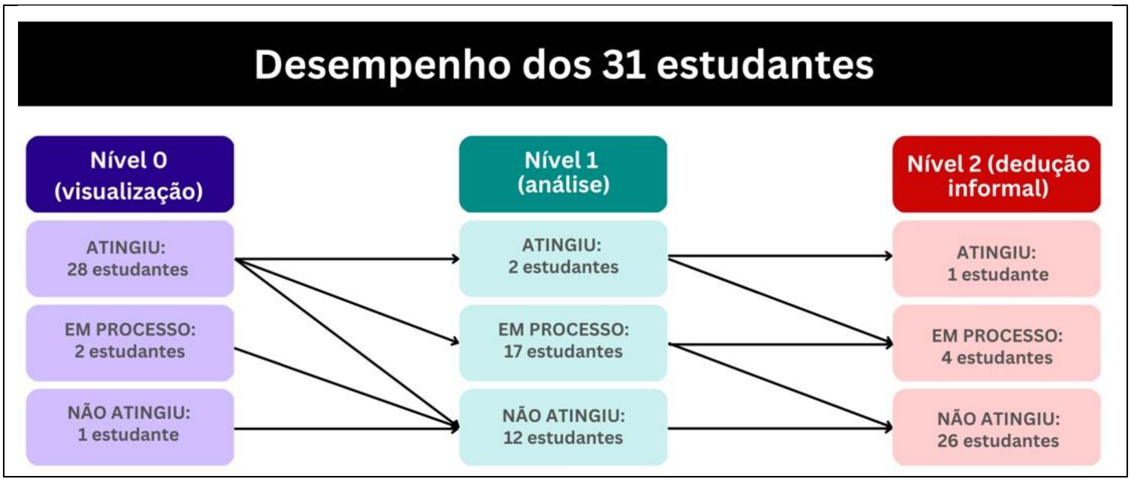
Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com os dados expostos na tabela 2, não houve indícios de questões que apresentassem erros totais, entretanto, foram encontradas algumas questões que não tiveram respostas.

Ainda de acordo com os resultados da tabela 2, têm-se que apenas 1 estudante (3,23%) acertou completamente o teste, dessa forma, ele se enquadra no nível 2 (análise) de compreensão da teoria de Van Hiele, pelo menos, no que se refere as figuras triangulares.

Em relação à produção da turma, ao quantitativo de estudantes que se enquadram em cada nível de compreensão, os dados estão expostos a seguir.

Figura 40 – Níveis de compreensão dos estudantes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar a partir da figura 40, que a turma se encontra em sua maioria no nível 0 (visualização), concluindo-se que eles apresentaram maiores facilidades nas questões que envolvem características visuais sobre o reconhecimento das figuras triangulares pela sua aparência, assim, eles dominam as características desse nível. Como apontado por Walle (2009), neste nível de compreensão as figuras são entendidas pelo seu aspecto global, ou seja, por sua aparência.

Os resultados evidenciaram que uma parcela dos participantes (17 estudantes) está em processo de atingir o nível 1 (análise), dessa forma, estão progredindo seus conhecimentos geométricos, como apontado por Pachêco et al. (2020).

De acordo com os resultados expostos na figura 40, pudemos observar que os estudantes tiveram mais dificuldades nas questões dos blocos 2 e 3, que contém os níveis 1 (análise) e 2 (dedução informal), respectivamente, evidenciando que possuem fragilidades de conhecimentos quanto as questões que envolvem as propriedades intrínseca e extrínseca dos triângulos, fato também observado por Pachêco et al (2020) e Pachêco e Santos (2014).

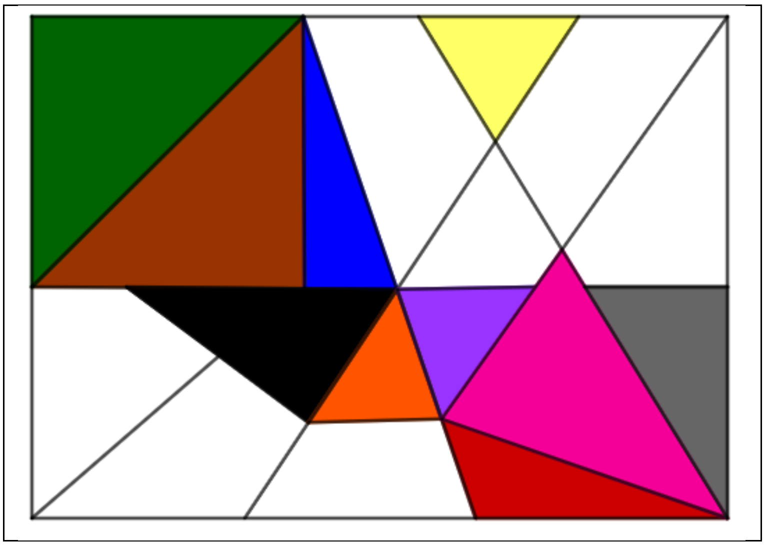
Em relação à análise por questão, analisamos as respostas apresentadas pelos estudantes de acordo com que propomos na seção 5.4.2, categorizando os estudantes nos níveis de compreensão de acordo com a tabela 2, dessa forma, é apresentada, a seguir, a análise das respostas dos estudantes para cada questão.

6.3 Questões do Nível 0 (visualização)

Questão 1

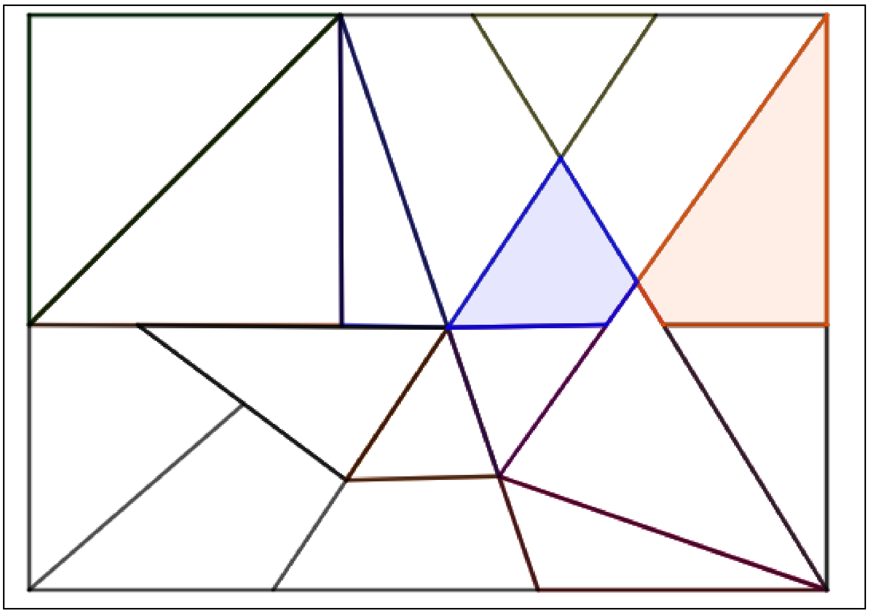
Dos trinta e um estudantes, apenas oito acertaram completamente a questão, identificando os triângulos como apresentado na figura 41 como sendo a resposta correta da questão. Dezoito estudantes considerarão 12 triângulos como resposta, considerando os quadriláteros apresentados na figura 42 como triângulos, possivelmente, eles tenham considerado apenas a aparência global dessas figuras, e assim, foram levados a incluí-las em suas respostas, esses quadriláteros apresentam nitidamente uma aparência triangular. Os demais estudantes considerarão menos de 10 triângulos como resposta, alguns fizeram menção à quantidade escolhida enumerando os triângulos escolhidos como resposta como apresentado na figura 43, outros apenas anotaram a quantidade sem fazer algum tipo de justificativa para os triângulos escolhidos como resposta.

Figura 41 – Resposta correta da questão 1.



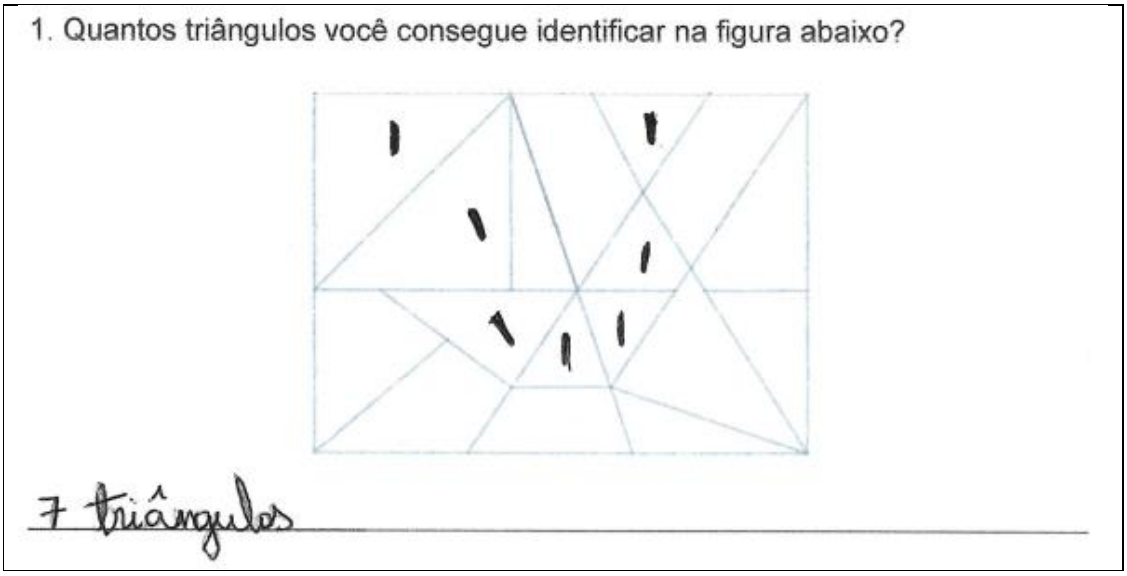
Fonte: Elaboração própria

Figura 42 – Quadriláteros com aparência triangular considerados pelos estudantes.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 43 – Resposta do Estudante E2 para a questão 1.

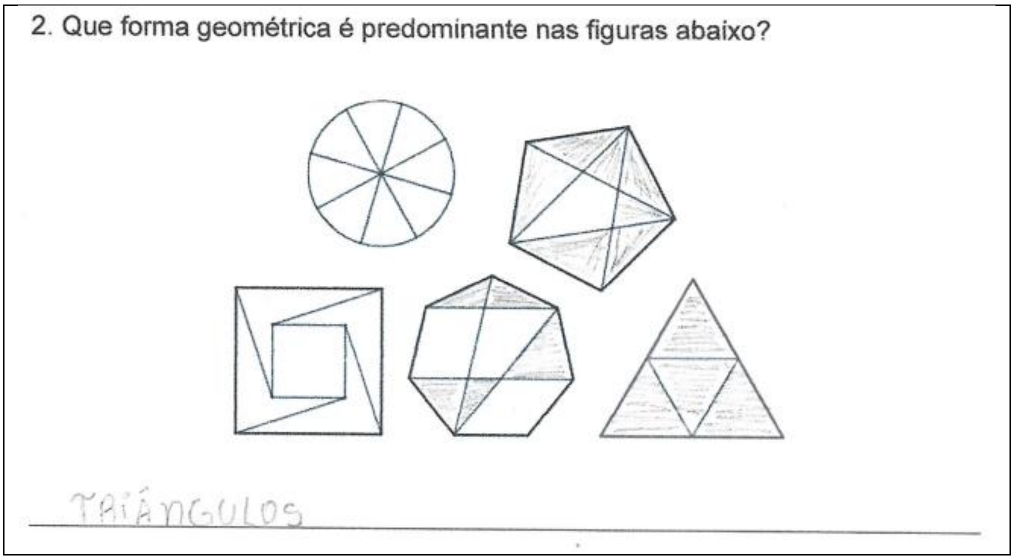


Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 2

Vinte e oito estudantes acertaram a questão, os outros três estudantes que não acertaram a deixaram em “branco”, sendo assim, classificadas como erradas para a nossa análise. Uma das estratégias usadas pelos estudantes foi colorir os triângulos para conta-los, como na figura 44.

Figura 44 – Resposta do Estudante E1 para a questão 2.



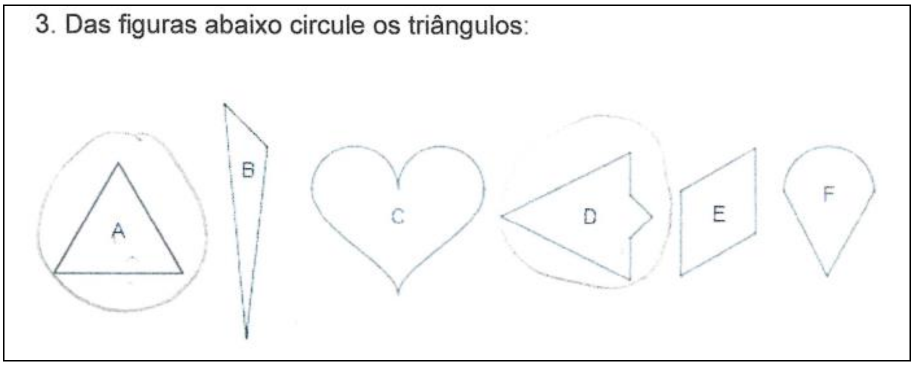
Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 3

Apenas dezesseis estudantes marcaram as figuras A e B como as que representavam corretamente um triângulo. Outros dez estudantes marcaram as figuras A e D como as corretas, possivelmente, motivados pela aparência global dessas figuras foram levados a considerar figura D em vez da B, talvez pelo fato da figura B não estar em numa posição prototípica[22]. Dois estudantes consideraram três ou mais figuras como corretas, incluindo as figuras A e B em suas respostas. Apenas um estudante considerou a figura C como correta, talvez isso tenha ocorrido por tal figura não figurar nos exemplos usualmente utilizados pelo professor para apontar figuras geométricas que não são polígonos, e também, motivado por sua aparência "quase" triangular.

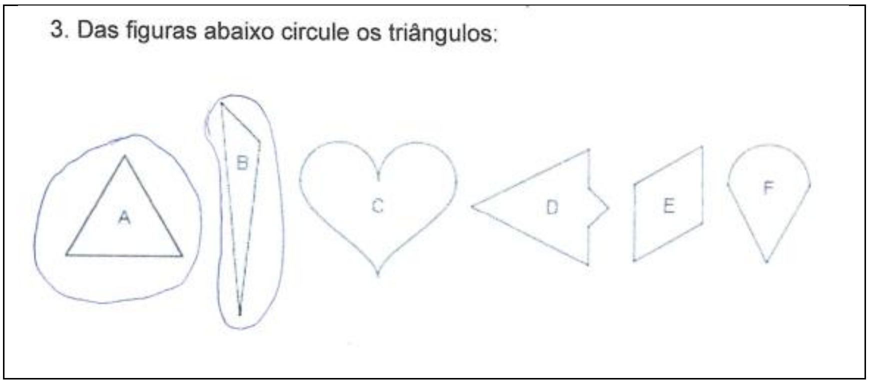
É válido destacar que nenhum dos estudantes incluiu em suas respostas o losango da figura E.

Figura 45 – Resposta do Estudante E14 para a questão 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 46 – Resposta do Estudante E5 para a questão 3.



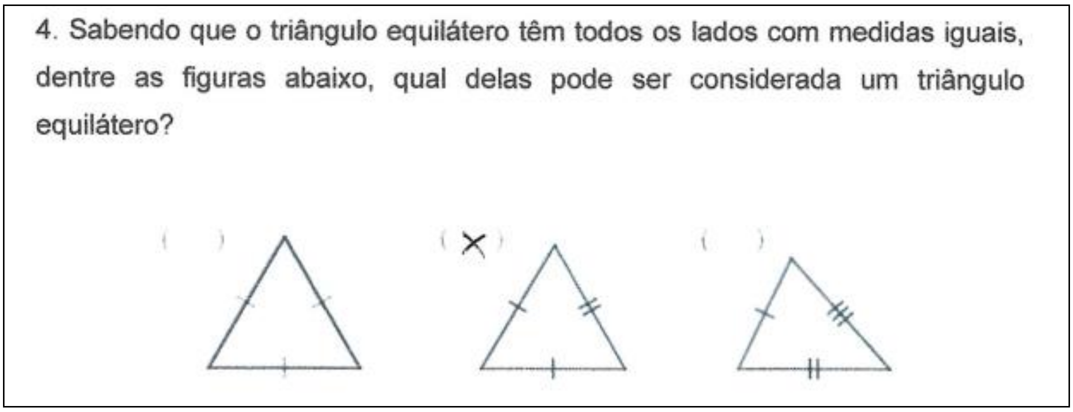
Fonte: Dados da pesquisa.

[22] Posição prototípica: figuras geométricas representadas usualmente com um dos lados paralelo às bordas horizontais da folha de papel.

Questão 4

Vinte e nove estudantes assinalaram o primeiro triângulo da esquerda para a direita como sendo o triângulo equilátero, assim, acertaram a questão, este fato, possivelmente, se deve a identificação dos mesmos *traços* nos lados do triângulo como objeto representativo de igualdade, neste caso, os lados com as mesmas medidas. Os outros dois estudantes assinalaram o triângulo que ocupa a posição central como triângulo equilátero (figura 47), o que está incorreto devido à figura tratar-se de um triângulo isósceles, pois os mesmos objetos representativos estão expostos nos lados com uma quantidade diferente (dois lados com um traço e um com dois), fazendo referência que aqueles lados possuem medidas diferentes.

Figura 47 – Resposta do Estudante E8 para a questão 4.


4. Sabendo que o triângulo equilátero têm todos os lados com medidas iguais, dentre as figuras abaixo, qual delas pode ser considerada um triângulo equilátero?

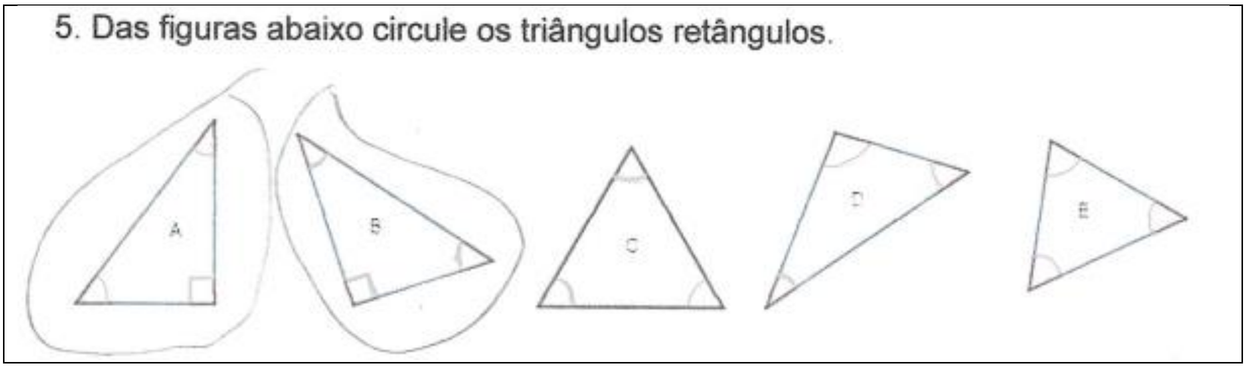
( ) (X) ( )

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 5

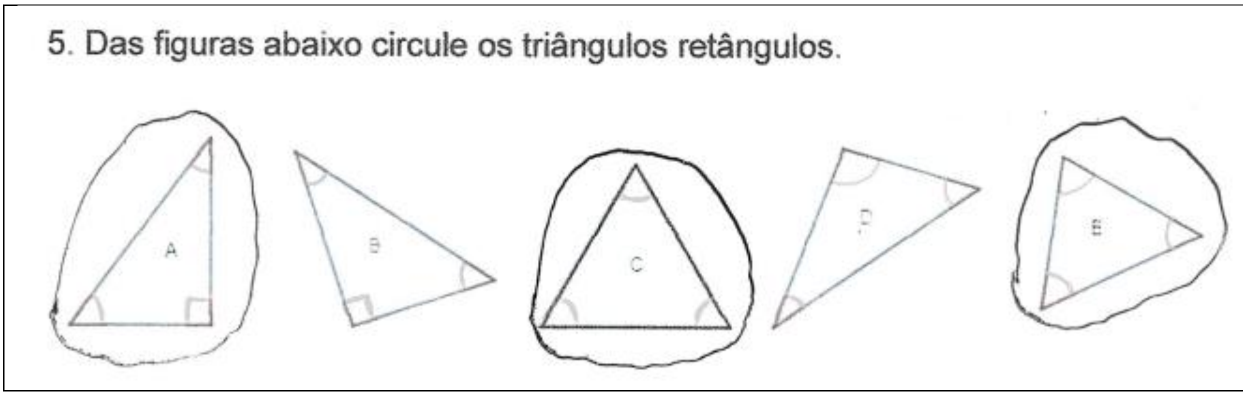
Dos trinta e um estudantes, vinte e cinco acertaram a questão marcando os triângulos A e B, possivelmente motivados, pelo fato do ângulo reto ter a forma de um quadrado, sendo assim, um ângulo de fácil identificação em relação aos demais. Nas demais respostas, os estudantes consideração três ou mais triângulos como retângulo, marcando as figuras C, D ou E como complementar as figuras A e B, levando apenas em consideração a aparência global do triângulo e como ele está posicionado na folha de papel, sem considerar a representação visual dos ângulos internos que as compõem conforme a figura 48.

Figura 48 – Resposta do Estudante E6 para a questão 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 49 – Resposta do Estudante E21 para a questão 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Todos os estudantes participantes poderiam ter alcançado esse nível com facilidade, uma vez que sua exigência é menor comparada com os níveis posteriores, apesar disso, podemos verificar na Tabela 4 que o número de estudantes que atingiram esse nível é grande, porém, é um dado preocupante encontrar um estudante que ainda não atingiu esse nível, visto que esse nível é o mais básico, e segundo Pernambuco (2012), nesta etapa de escolarização[23] os estudantes são capazes de identificar e classificar os triângulos quanto às medidas de seus lados e ângulos, uma vez que já passaram pelo 6º ano e 7º ano.

Tabela 4 – Situação dos estudantes em relação ao nível 0 (visualização).

Nível	Atingiram	Em processo	Não atingiram
0	28 estudantes	2 estudantes	1 estudante
Geral (31)	90,32%	6,45%	3,23%

Fonte: Dados da pesquisa.

[23] 8º ano do ensino fundamental.

6.4 Questões do Nível 1 (análise)

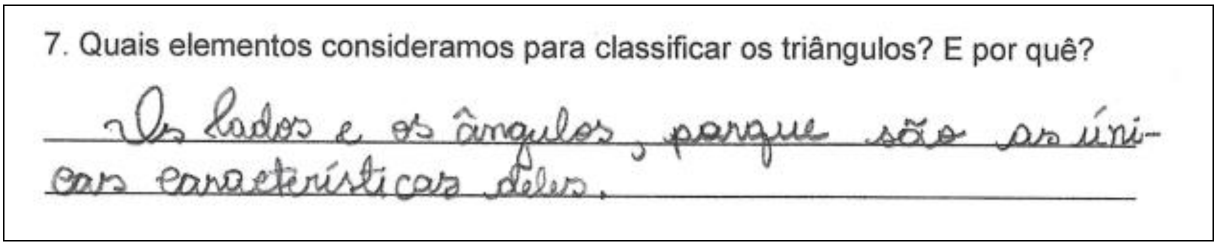
Questão 6

Dos trinta e um participantes da pesquisa, vinte e cinco acertaram a questão. Entre os que erraram, oscilaram entre as alternativas A e B, possivelmente induzidos pela imagem do triângulo, ao escolherem propriedades pertencentes ao triângulo acutângulo e equilátero, respectivamente.

Questão 7

Apenas dois estudantes acertaram completamente a questão, dando uma justificativa para o triângulo ser classificado tanto pelos lados quanto pelos ângulos como visto da figura 50. Doze estudantes acertaram parcialmente a questão, dando apenas um dos elementos, lado ou ângulo, como resposta e apresentando uma justificativa para a escolha conforme a figura 51. Os demais estudantes deixaram a questão em branco.

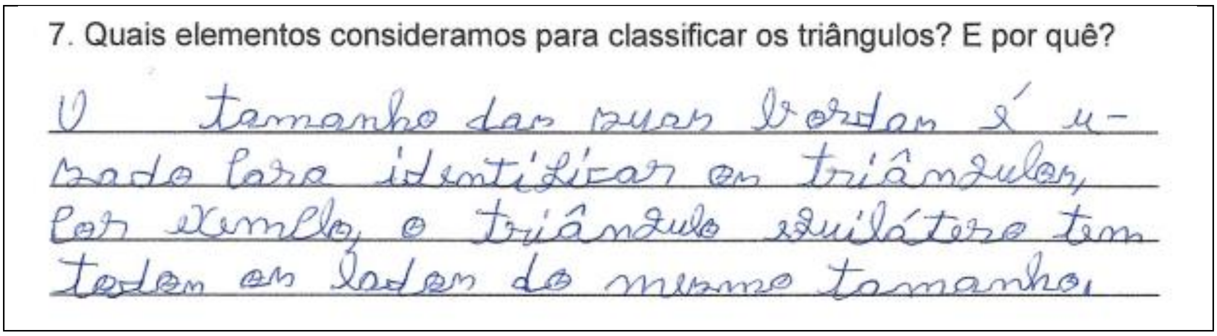
Figura 50 – Resposta do Estudante E15 para a questão 7.


7. Quais elementos consideramos para classificar os triângulos? E por quê?

Os lados e os ângulos, porque são as úni-
cas características deles.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 51 – Resposta do Estudante E5 para questão 7.


7. Quais elementos consideramos para classificar os triângulos? E por quê?

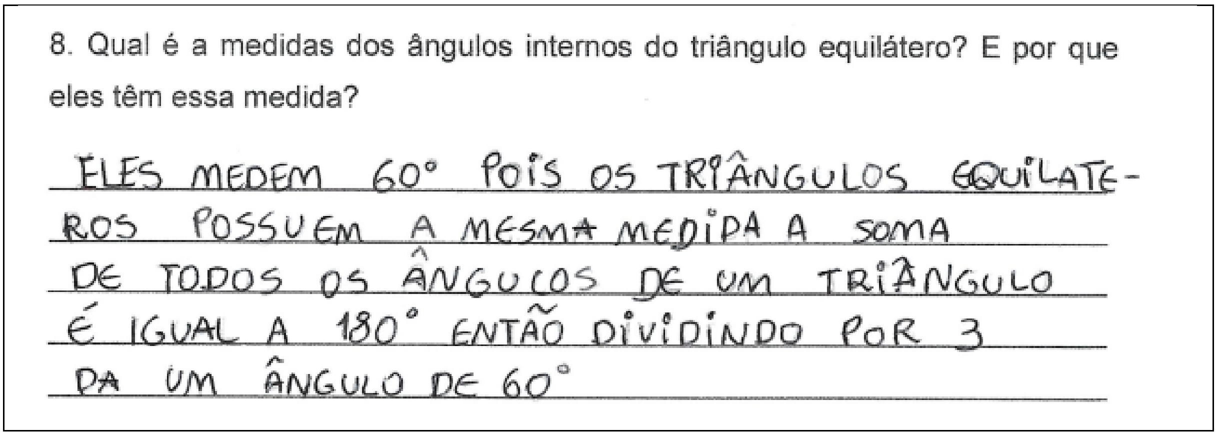
O tamanho das suas bordas é u-
sado para identificar os triângulos,
por exemplo, o triângulo equilátero tem
todos os lados do mesmo tamanho.

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 8

Apenas cinco estudantes acertaram completamente a questão, apresentado uma justificativa plausível na forma escrita e outros na forma algébrica para o triângulo equilátero possuir três ângulos de 60º como nas figuras 52 e 53. Sete estudantes responderam a questão de forma incompleta, apresentado apenas à medida do ângulo sem ser acompanhada por uma justificativa. Outros deixaram a questão em branco, e os que erraram, fizeram menção ao ângulo reto em vez do ângulo de 60º, apesar de apontarem os lados com mesma medida como justificativa como visto na figura 54.

Figura 52 – Resposta do Estudante E1 para a questão 8.

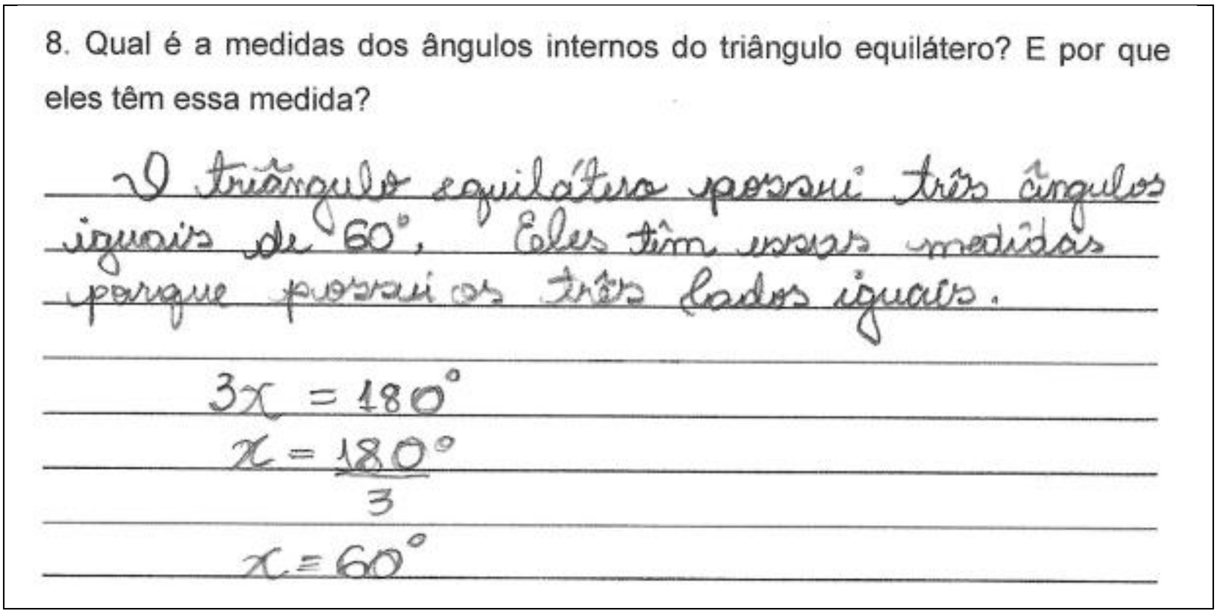


8. Qual é a medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero? E por que eles têm essa medida?

ELES MEDEM 60° POIS OS TRIÂNGULOS EQUILATE-ROS POSSUEM A MESMA MEDIDA A SOMA DE TODOS OS ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO É IGUAL A 180° ENTÃO DIVIDINDO POR 3 DA UM ÂNGULO DE 60°

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 53 – Resposta do Estudante E15 para a questão 8.



8. Qual é a medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero? E por que eles têm essa medida?

O triângulo equilátero possui três ângulos iguais de 60°. Eles têm essas medidas porque possui os três lados iguais.

$$3x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{3}$$
$$x = 60°$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 54 – Resposta do Estudante E26 para a questão 8.

8. Qual é a medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero? E por que eles têm essa medida?

90°. por que Todos os lados são iguais.

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 9

Dos trinte e um participantes da pesquisa, apenas um acertou completamente a questão, apresentado justificativas plausíveis para os itens classificados como falso, como se pode observar na figura 55. Muitos estudantes apenas classificaram os itens em verdadeiro e falso de maneira incorreta além de não apresentarem as justificativas para os itens falsos escolhidos, dos que apresentaram justificativas para os itens falsos, tanto a escolha de um dos itens como falso ou verdadeiro como também as justificativas apresentadas estão incorretas ou parcialmente corretas, como apresentado na figura 56, dos estudantes que tentara justificar os casos falsos escolhidos, observou-se que os mesmo possuem um vocabulário geométrico restrito.

Figura 55 – Resposta do Estudante E15 para a questão 9.

9. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

1º (F) Todos os triângulos são congruentes.

2º (F) Todo triângulo isósceles é equilátero.

(V) Todo triângulo equilátero é isósceles.

3º (F) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

(V) Um triângulo escaleno pode ser retângulo.

4º (F) Um triângulo acutângulo ou é equilátero ou escaleno.

5º (F) Um triângulo equilátero ou é obtusângulo ou retângulo.

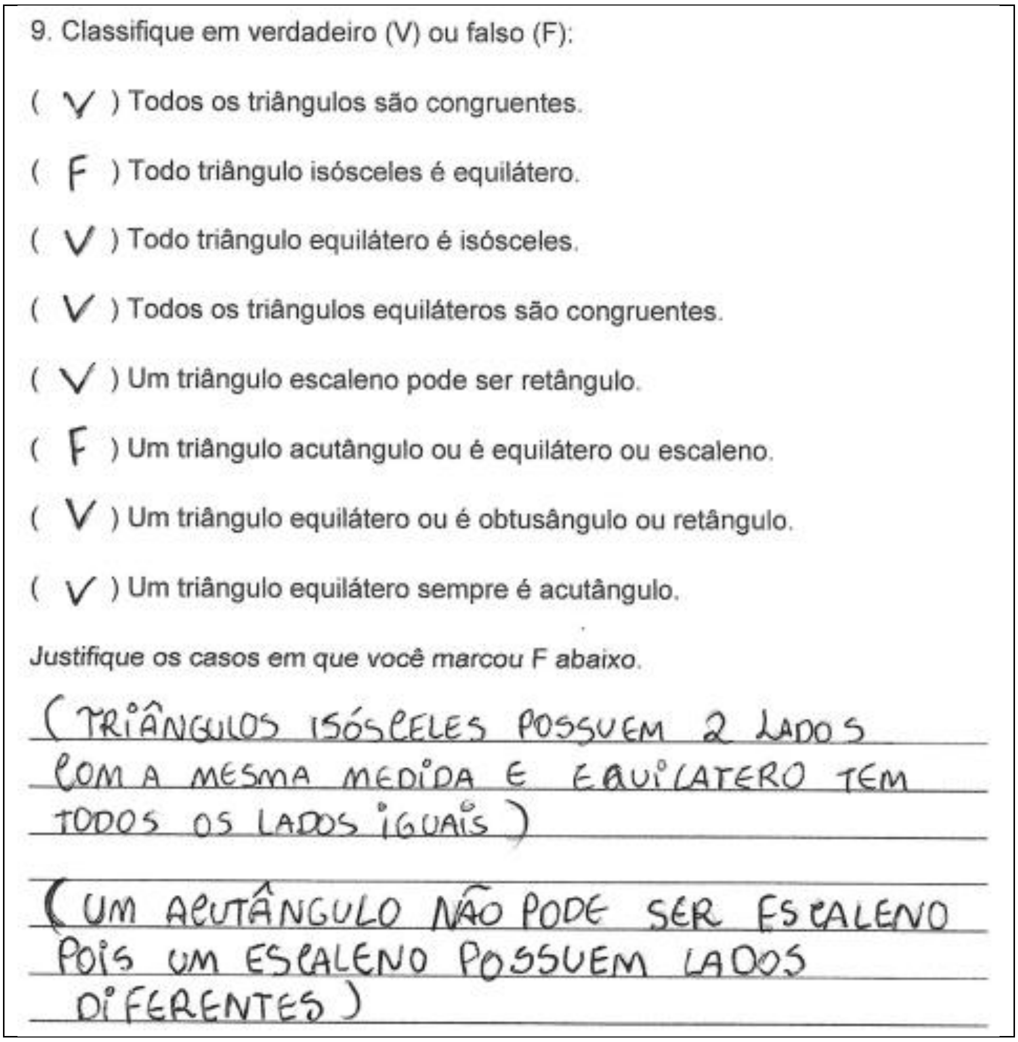
(V) Um triângulo equilátero sempre é acutângulo.

Justifique os casos em que você marcou F abaixo.

1º → Todos os triângulos não são congruentes porque pre-
cisariam ter todas as propriedades congruentes, o que não
acontece;
2º → Falso, porque um triângulo isósceles possui dois lados
iguais, não os três; 3º → Porque nem todo triân-
gulo equilátero possuem os lados com mesma medida.
4º → Falso, um triângulo acutângulo pode ser
qualquer um dos três, 5º → Porque um triângulo equilátero
é acutângulo, apenas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 56 – Resposta do Estudante E1 para a questão 9.


9. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

(V) Todos os triângulos são congruentes.

(F) Todo triângulo isósceles é equilátero.

(V) Todo triângulo equilátero é isósceles.

(V) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

(V) Um triângulo escaleno pode ser retângulo.

(F) Um triângulo acutângulo ou é equilátero ou escaleno.

(V) Um triângulo equilátero ou é obtusângulo ou retângulo.

(V) Um triângulo equilátero sempre é acutângulo.

Justifique os casos em que você marcou F abaixo.

(TRIÂNGULOS ISÓSCELES POSSUEM 2 LADOS COM A MESMA MEDIDA E EQUILATERO TEM TODOS OS LADOS IGUAIS)

(UM ACUTÂNGULO NÃO PODE SER ESCALENO POIS UM ESCALENO POSSUEM LADOS DIFERENTES)

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 10

Vinte e sete estudantes acertaram a questão ao assinalarem a alternativa C como correta. Dos quatro estudantes que erraram a questão, um assinalou duas alternativas, a letra A e D, os outros três assinalaram as alternativas D, A e B, aparentemente confundindo as propriedades e características de cada tipo de triângulo[24]. Nenhum estudante deixou a questão em branco.

Esse bloco de questões (nível 1), foi ao qual mais encontramos respostas dos estudantes dentro da classificação *acertaram parcialmente*, assim, se o estudante tiver acertado duas ou três questões e parcialmente outra, iremos classifica-lo na categoria *em processo* de acordo com a Tabela 2, dessa forma, consideramos a

[24] Vê seção 2.2.

produção parcialmente correta do estudante como *processo parcial* de atingir a resposta da questão. Assim, podemos observar na Tabela 5 que o quantitativo de estudantes que estão *em processo* ou *atingiram* é muito abaixo do desejado.

Tabela 5 – Situação dos estudantes em relação ao nível 1 (análise).

Nível	**Atingiram**	**Em processo**	**Não atingiram**
1	2 estudantes	17 estudantes	12 estudantes
Geral (31)	6,45%	54,84%	38,71%

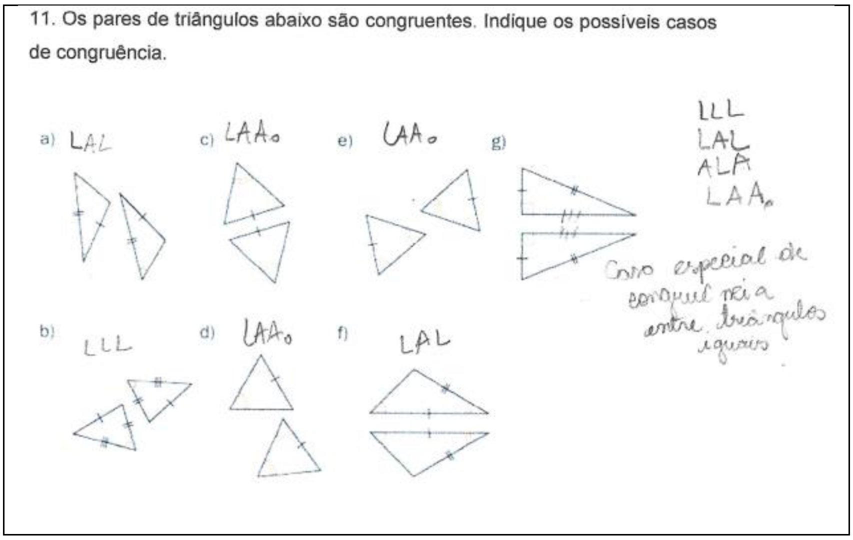
Fonte: Dados da pesquisa.

6.5 Questões do Nível 2 (dedução informal)

Questão 11

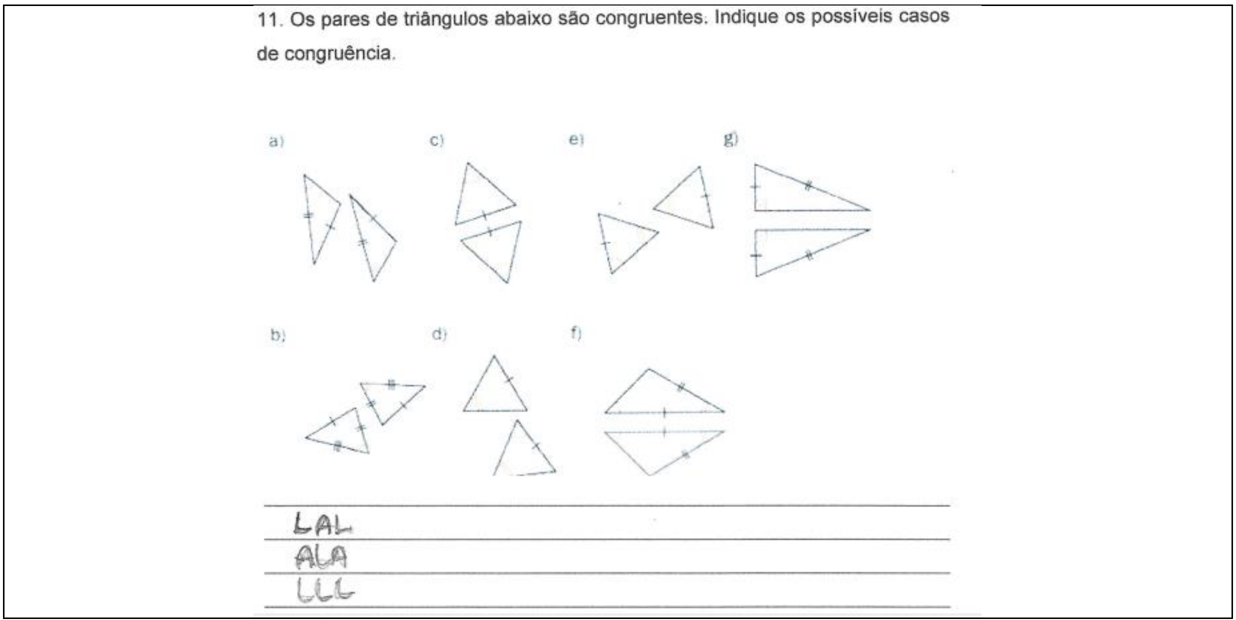
Apenas um estudante acertou completamente a questão, ao apontar todos os casos de congruência, como podemos verificar na figura 57. Onze estudantes acertaram parcialmente a questão, faltando mencionar um caso de congruência, oscilando entre o caso especial dos triângulos retângulos e o casso LAA_o, ou até mesmo os dois ao mesmo tempo, como verificado na figura 58, aparentemente esse "esquecimento" seja motivado pelo casos de congruência citados serem menos usuais pelos professores em suas aulas Entre os que erraram, alguns assinalaram algumas alternativas, porém o enunciado é bem claro ao pedir para "indicarem os possíveis casos de congruência", outros, deixaram a questão em branco.

Figura 57 – Resposta do Estudante E15 para a questão 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 58 – Resposta do Estudante E26 para a questão 12.

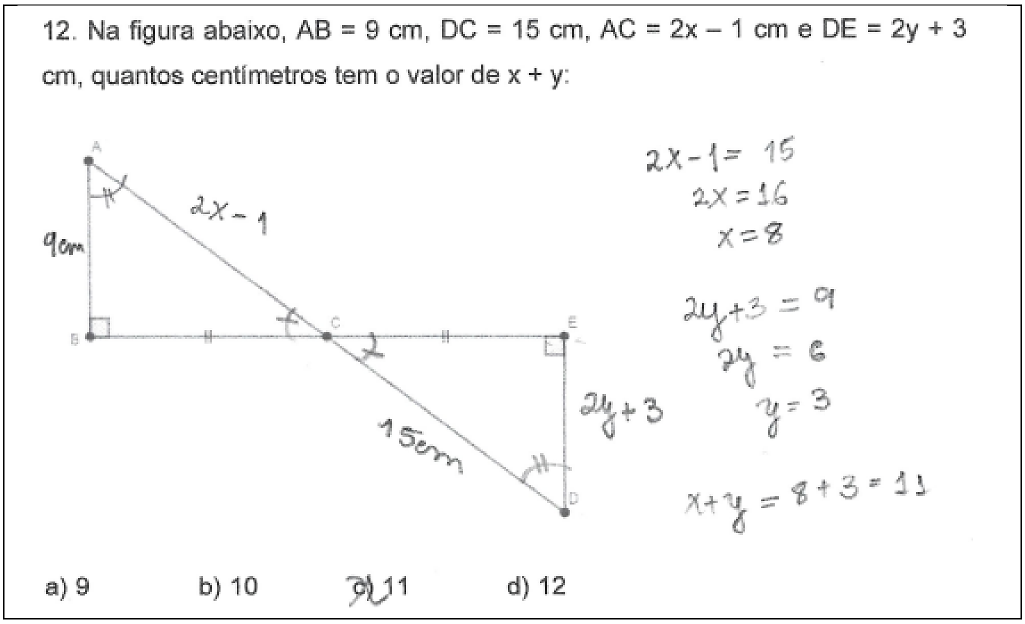


Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 12

Dos trinta e um estudantes participantes da pesquisa, apenas sete deles acertaram completamente a questão, a resolvendo-a a partir da constatação dos ângulos OPV, $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$, e assim, constatando que os triângulos *ABC* e *CDE* são congruentes pelo caso ALA, conforme a figura 59. Quinze estudantes assinalaram a alternativa A como correta, não sendo acompanhada de um argumento convincente para essa escolha, como no caso de uma expressão algébrica para encontrar os valores de *x* e *y*, aparentemente, essa escolha tenha sido motivada pelo fato do enunciado mencionar que o segmento *AB = 9 cm*, indicando assim, que não analisaram a figura. Alguns deixaram essa questão em branco, outros marcaram de forma aleatória qualquer uma das alternativas apenas para que o quesito não ficasse em branco.

Figura 59 – Resposta do Estudante E15 para a questão 12.



Fonte: Dados da pesquisa.

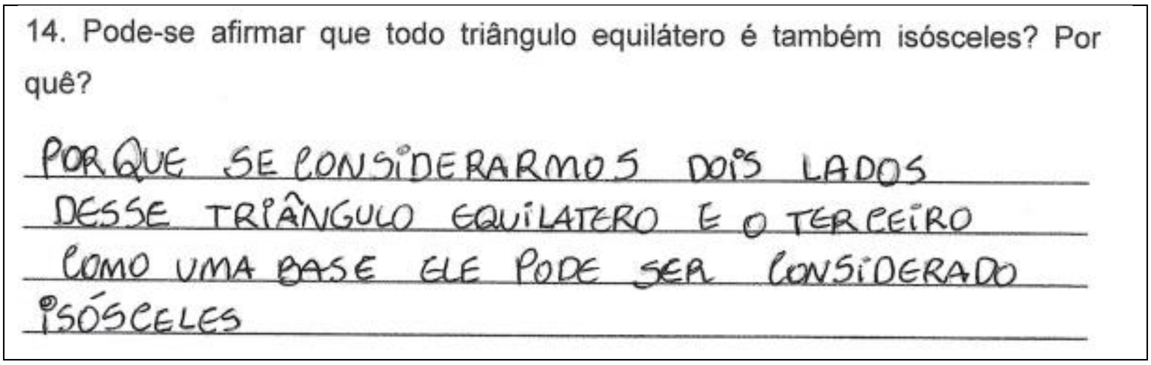
Questão 13

Sete estudantes acertaram a questão ao assinalarem a alternativa E como correta. Dos vinte e quatro estudantes que erraram a questão, dezesseis acertaram parcialmente ao considerarem apenas como correto o item II e assim, assinalaram a alternativa A.

Questão 14

Apenas três estudantes acertaram completamente a questão, ao afirmarem que “sim” e apresentarem uma justificativa para tal, conforme a figura 60. Muitos deixaram a questão em branco e entre os que tentaram responder a questão, oscilaram em apenas “sim” ou “não”, dos que apresentaram justificativas para suas escolhas, três mencionaram como justificativa a congruência dos triângulos em suas afirmativas, como o Estudante E17 “Sim. Porque todos são congruentes.”, outro mencionou os ângulos como motivo, dos que negaram a questão, o Estudante E26 afirma que as medidas dos lados é o motivo para o triângulo equilátero não ser isósceles, entretanto, podemos verificar na figura 61 que o mesmo não levou em consideração as propriedades do triângulo isósceles, apenas as medidas dos lados como fator absoluto. Assim, como constatado no quesito 9, os estudantes apresentaram um vocabulário geométrico restrito em relação as justificativas apresentadas, principalmente, quando é necessário apresentar alguma propriedade ou característica das figuras geométricas em questão.

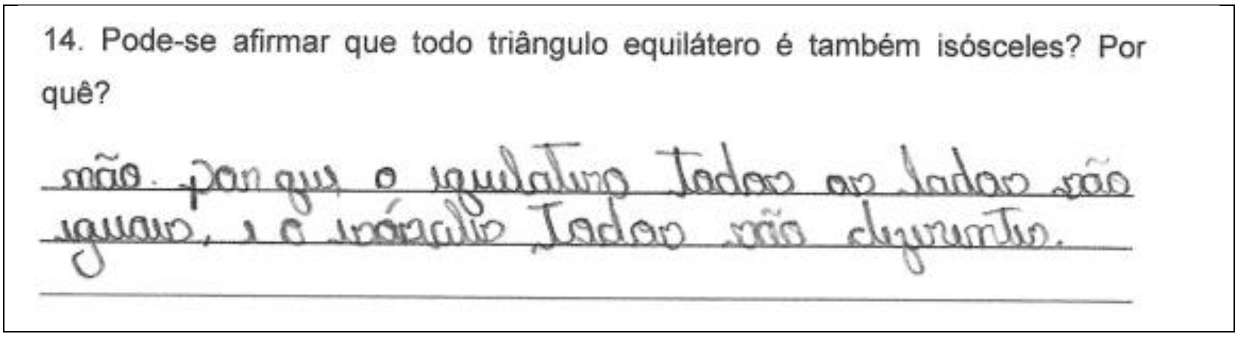
Figura 60 – Resposta do Estudante E1 para a questão 14.


14. Pode-se afirmar que todo triângulo equilátero é também isósceles? Por quê?

PORQUE SE CONSIDERARMOS DOIS LADOS DESSE TRIÂNGULO EQUILATERO E O TERCEIRO COMO UMA BASE ELE PODE SER CONSIDERADO ISÓSCELES

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 61 – Resposta do Estudante E26 para a questão 14.


14. Pode-se afirmar que todo triângulo equilátero é também isósceles? Por quê?

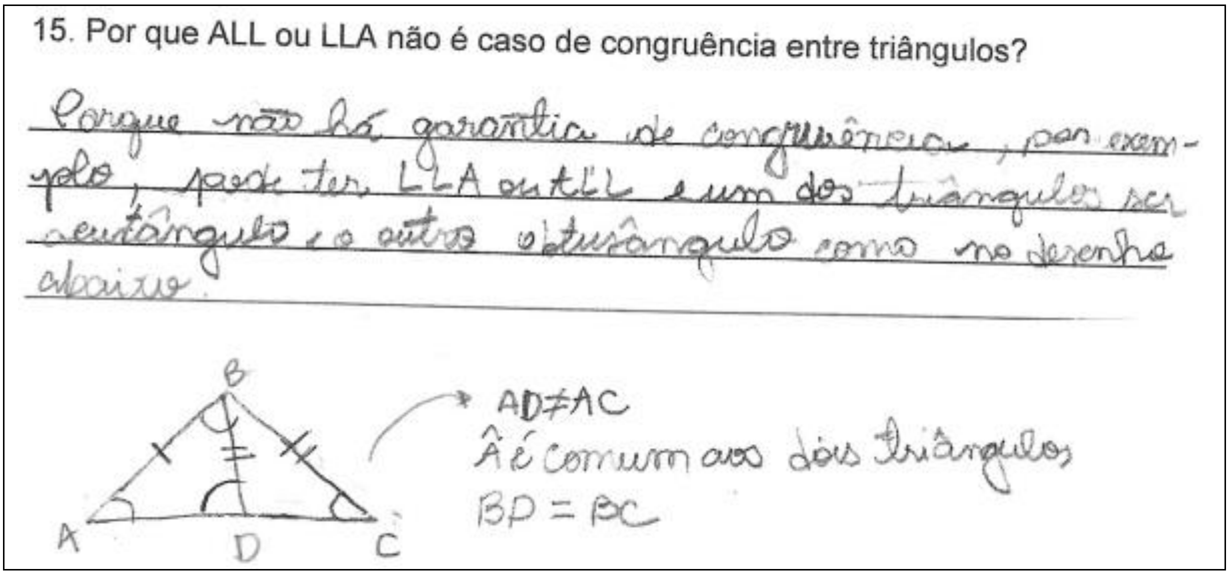
não. porque o equilatero todos os lados são iguais, e o isósceles todos são diferentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 15

Cinco estudantes responderam a questão, dentre eles, apenas um estudante apresentou argumento coerente, e assim, acertou corretamente a questão, mostrando um exemplo de tal situação, o que se pode ser observado na figura 62; três estudantes se limitaram a respostas do tipo “Porque existem triângulos que tem ALL (ou LLA) e não são congruentes”, apesar de estarem certos parcialmente, faltou um argumento mais coerente para contemplar o enunciado, podendo fazer menção aos tipos de triângulos envolvidos na situação, e assim, podendo ou não trazer na resposta um exemplo da situação; o estudante E1 respondeu “Porque ALL ou LLA trata-se de um ângulo adjacente a ele e um oposto a ele”, inferimos que o estudante interpretou do enunciado que os casos são aplicados da forma mencionada, isto é, primeiro analisa o ALL em um dos triângulos e no outro o LLA, para então determinar a congruência, entretanto, a congruência é aplicada somente a partir da escolha de um dos casos para análise, assim, faltou um cuidado maior com a informação do enunciado e a elaboração de um argumento mais coerente por parte do estudante. Os demais estudantes deixaram a questão em branco.

Figura 62 – Resposta do Estudante E15 para a questão 15.


15. Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?

Porque não há garantia de congruência, por exemplo, pode ter LLA ou ALL e um dos triângulos ser acutângulo e o outro obtusângulo como no desenho abaixo.

Fonte: Dados da resposta.

Assim, como no bloco 2 de questões, encontramos algumas questões parcialmente corretas, dessa forma, se o estudante tiver acertado duas ou três questões e parcialmente outra, iremos classifica-lo na categoria *em processo* de acordo com a Tabela 2, seguindo os mesmos critérios apresentados na seção 6.1. Dessa forma, podemos perceber na Tabela 6, que apenas um estudante atingiu o nível 2 (dedução), fato já conhecido, uma vez que já realizamos a análise geral sobre o teste, e quatro estão *em processo* de atingi-lo.

Tabela 6 – Situação dos estudantes em relação ao nível 2 (dedução informal).

Nível	Atingiram	Em processo	Não atingiram
2	1 estudante	4 estudantes	26 estudantes
Geral (31)	3,23%	12,90%	83,87%

Fonte: Dados da pesquisa.

6.6 Análise Geral dos Dados

Diante dos dados expostos nas seções anteriores, mediante o estudo dos triângulos, constatou-se sob a ótica da teoria de Van Hiele que os estudantes participantes não apresentaram dificuldades quanto ao reconhecimento dos triângulos visualmente, com base no nível 0 (visualização). Entretanto, em relação ao estudo das propriedades dos triângulos, apenas um estudante acertou todas as questões, e os demais, ora parcialmente e em alguns casos erraram totalmente, dessa maneira, conforme os níveis 1 (análise) e 2 (dedução informal) da teoria de Van Hiele (1957), eles estão progredindo dentro das características desses níveis, isto é, estão se aperfeiçoando para atingir tal nível, principalmente no que diz respeito ao nível 1 (análise),

Um dado curioso, foi que detectamos que três estudantes estão *em processo* de atingir tanto o nível 1 (análise) quanto o nível 2 (dedução informal). Esse caso seria digno de ser explorado com a reaplicação do instrumento aliado com uma entrevista individual após a resolução das questões, para confrontarmos os resultados e analisarmos as possíveis estratégias utilizadas.

Os resultados dessa pesquisa se assemelham aos de Pachêco e Santos (2014), Pachêco et al. (2020), Rodrigues (2015) e Silva (2021), que constataram que os estudantes participantes de suas pesquisas apresentaram maiores fragilidades para resolverem questões que envolvessem as propriedades das figuras triangulares relacionadas, fato não constatado nas questões que envolviam o reconhecimento por meio da aparência da figura.

Os estudantes dessa etapa de escolarização estão em contato com a Geometria desde o 6º ano e ainda assim possuem diversas fragilidades em identificar e descrever figuras geométricas, entretanto, segundo Pernambuco (2012), é no 6º ano que os estudantes aprendem a reconhecer e identificar as figuras geométricas pelo número de lados, e em especial, os triângulos pela medida dos lados e pela medida dos ângulos, e no 7º ano, reconhecer e compreender as propriedades dos quadriláteros e triângulos, no caso dos triângulos, propriedades tais quais: a soma dos ângulos internos ou a desigualdade triangular. Esse baixo rendimento pode ser explicado pelo tipo de abordagem adotado pelo material didático, sem a devida promoção de experiências para o desenvolvimento do conhecimento. Portanto, um possível caminho seja a elaboração de atividades que promovam a unificação dos níveis, isto é, uma sequência didática elaborada de acordo com os níveis de compreensão dos estudantes para que eles possam progredir de acordo com os seus níveis de compreensão.

A análise dos dados coletados por esta pesquisa representa uma contribuição para novos conhecimentos acerca do processo de ensino-aprendizagem de Geometria, uma vez que, é importante para o processo que o professor conheça os conhecimentos geométricos de seus estudantes, para que assim, busquem métodos eficazes de ensino a fim de facilitar a aprendizagem dos estudantes.

Dessa forma, espera-se que esta pesquisa possibilite aos professores uma reflexão sobre os prováveis erros cometidos pelos estudantes nas aulas de Geometria, para que sirvam de ponto de partida para a construção e execução de sequências didáticas que se propõem em diminuir as fragilidades dos estudantes frente ao conteúdo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa de mestrado buscou analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma turma do 8º ano do ensino fundamental, para tanto, o estudo foi aplicado com 31 estudantes de uma escola pública da cidade de Belo Jardim, cidade localizada no estado de Pernambuco, Brasil.

A sustentação teórica utilizada na realização de nosso estudo considerou os trabalhos de Van Hiele (1957), Alves e Sampaio (2010), Pachêco et al. (2020), Pachêco, Pachêco e Silva (2019), Walle (2009), Nasser e Sant'anna (2010), Rodrigues (2016), Câmara dos Santos (2001, 2009), Campos (2020), Costa (2016, 2019), Nagata (2016), Crowley (1994), Silva (2014), Silva (2018), Almeida (2015), Almouloud (2007), Teles (2007), Bessa de Menezes (2010), Chevallard (1996, 1998, 1999, 2002, 2003), Maduro (2015), Pavanello (1993, 2004), Lorenzato (1995, 2015), entre outros, sobre a TAD e a teoria de Van Hiele.

Dessa forma, para alcançarmos nosso objetivo, esta pesquisa foi realizada em três etapas, a **primeira** contemplou a análise das OM presentes no livro didático da turma baseado nas organizações praxeológicas de acordo com Chevallard (1996, 1998, 1999, 2002, 2003), a **segunda** contemplou a construção de um instrumento de verificação (Apêndice A) dos níveis de compreensão segundo a teoria de Van Hiele, levando em consideração as OM do livro didático utilizado pela turma para a coleta dos dados e a sua aplicação mediante a turma pesquisa, e por fim, a **terceira** contemplou a verificação dos níveis de compreensão segundo a teoria de Van Hiele.

A elaboração do instrumento de verificação foi de grande auxílio na compreensão mais detalhada dos níveis de compreensão e das OM a partir da análise do livro didático utilizado pela turma. Diante da análise das OM, percebemos uma dificuldade em classificar uma determinada atividade em seu nível de Van Hiele, visto que, algumas características de um determinado nível se aproximam de outro nível.

A partir dos dados coletados, analisamos as respostas dos estudantes referentes às questões apresentadas no instrumento de verificação, em dois momentos, um de maneira geral, para identificarmos o nível de compreensão da turma e outra, individualmente, para verificarmos os níveis de compreensão dos estudantes ou se eles estariam em processo de atingir algum nível ou não, dessa forma, constatamos que a turma esta situada no nível 0 (26 estudantes), e uma parcela dos estudantes (17 estudantes) está em processo de atingir o nível 1.

Um resultado interessante obtido, foi que constatamos que três estudantes estão *em processo* de atingir tanto o nível 1 (análise) quanto o nível 2 (dedução informal). Esse caso poderia ser explorado numa futura pesquisa, em que poderíamos utilizar a reaplicação do instrumento aliado com uma entrevista individual com os estudantes para confrontarmos os resultados e analisarmos as possíveis estratégias utilizadas para que possamos enquadrá-los em determinado nível de compreensão, podendo também, fazer um comparativo com as técnicas analisadas no livro didático e as apresentadas pelos estudantes em suas produções, fazendo assim, um possível enquadramento dos níveis de compreensão nos tipos de tarefas e técnicas.

Os resultados da presente pesquisa evidenciam que a temática deve ser fonte de novas investigações para diminuir as lacunas existentes no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, diante disso, sugere-se para estudos futuros que abordem os triângulos em seus diversos aspectos, a construção de uma sequência didática de acordo com os níveis de compreensão identificados a partir da aplicação do instrumento de verificação na turma, para que assim, os estudantes possam progredir nos níveis e aprofundar seus conhecimentos geométricos, recomendamos, também, o possível uso de *softwares* educativos, a exemplo do GeoGebra, Cabri-Géomètre, Régua e Compasso, como também instrumentos didáticos, como a régua e o compasso, além do uso de possíveis jogos matemáticos, para auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem durante a execução da sequência didática, nas variadas etapas de escolaridade, uma vez que, a passagem de um nível para outro depende mais dos métodos de ensino adotados pelo professor do que da maturação do estudante; além da realização de entrevistas com os estudantes participantes para uma análise mais detalhada das justificativas e estratégias atribuídas pelos mesmos. Já em relação à TAD, sugere-se para estudos futuros, investigar quais tipos de tarefa e quais técnicas se enquadram em determinado nível de compreensão de Van Hiele, investigar mais livros didáticos para uma elaboração mais detalhada de um instrumento de verificação, visto que, pelo pouco tempo disponível, investigamos apenas as OM presentes em apenas um livro didático, além de uma investigação mais detalhada dos tipos de tarefas que envolvem elementos tecnológicos como na figura 24, para termos um mapeamento do seu quantitativo e seu uso no livro didático, para que possamos explorar esse tipo de tarefa.

Nessa pesquisa, entendemos que o instrumento de verificação elaborado e aplicado na turma, se tornou de certa forma limitado, por não nos permitir explorar mais conhecimentos acerca do objeto matemático, como por exemplo, a desigualdade triangular. Por ser um teste que conteve questões com múltipla escolha além de uma questão com verdadeiro e falso, não nos propiciou maior reflexão sobre as escolhas e estratégias atribuídas pelos estudantes, assim, em próximos estudos sugerimos o uso de atividades abertas nas quais os participantes possam explicar suas justificativas e estratégias de resolução adotadas. Com isso percebermos que ficaram muitas questões em aberto e que merecem serem estudadas futuramente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. E. L. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas:** analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 304 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ALMEIDA, M. S. M. **A articulação entre o ensino de polígonos e poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.** 114 f. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

ALMOULOUD, Ag S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2007.

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 5, 2010, p. 69-76.

ARBACH, N. **O ensino da geometria plana:** o saber do aluno e o saber escolar. 2001. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação) **-** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

ÁVILA, G. Reflexões sobre o ensino de geometria. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 71, ano 28, 1º quadrimestre/2010. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/71/1.html. Acesso em: 08 ago. 2022.

BESSA DE MENEZES, M. **Praxeologia do Professor e do Aluno:** uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. Tese de Doutorado, UFPE, 2010.

BÍBLIA. **Bíblia de Jerusalém**. Tradução de Euclides Martins Balancin *et al*. 1ª edição. São Paulo: PAULUS.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640. Acesso em: 10 dez. 2022.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l’activité mathématique. In: **Recherchers en Didactique des Mathématiques**, 1999. p. 77-124

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Presidência da República, [1996]. Disponível em: << https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm >>. Acesso em: 01 jan. 2022.

BRASIL. S. E. F. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018. Disponível em: << http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base >>. Acesso em 01 jan. 2022.

______. S. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. S. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. IN: BRUN, J. (Org.). **Didática da Matemática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 35-113.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. **Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil:** de 1500 até os dias atuais. Revista: Quadrante, Lisboa, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/index.php/quadrante/article/view/22913

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpemenet de la pensée géométrique. **Annales...** 2 Congres International Cabri Géomètre, Montreal, 2001.

CAMPOS, A. V. R. **Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele.** 2020. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.** Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **L'UNIVERSITE D'ETE**, 1998. p. 91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle, IREM, Clermont-Ferrand, France, 1998.

______. Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 41-56, 2002.

______. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.** In: Maury, S. & Caillot, M. (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

______. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.

______. **Organiser l'étude Ecologie et Regulation**. Atlas da 11ª Escola de Verão de Didática da Matemática, Grenoble, La Pensée Sauvage, 2002.

______. **La transposición didáctiva:** del saber sabio al saber enseñado. Tradução: Claudia Gilman. 1ª ed. Buenos Aires: Aique, 1997. Título original (La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. (Original de 1991)).

CONCEIÇÃO, D. A.; OLIVEIRA, K. P. **Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer**. 2014. 53 f. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade de Pernambuco, Nazaré da Mata, 2014.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 242 f. 2016. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

______. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. **EM TEIA:** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. Recife, v. 7, n. 3, 2016a. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/issue/view/141>. Acesso em: 15 jan. 2022.

______. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. **Educação Online Rio de Janeiro**, n. 22, p. 108-126, 2016b.

______. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. **Anais...** 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9:** geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa.** 1ª Ed. Porto Alegre, RS. Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

HOLANDA, A. J. M. **Os mistérios da mais bela forma geométrica:** o trângulo. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2013.

IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. **Matemática e realidade 8º ano**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2018.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LOPES, E. G.; SILVA, A. R. O.; SILVA, T. O. **Construções geométricas utilizando régua e compasso:** uma proposta em resolução de problemas de geometria plana. Anais X EPBEM e V ECMAT... Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/45149>. Acesso em: 01 out 2021.

LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, anos III, n. 4º, 1995, p. 3-13.

______. (Org.). **Aprender e ensinar geometria.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015.

MADURO, V. P. S. **Um estudo da prática docente no tema função quadrática com base na teoria antropológica do didático.** 2015. 57 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém.

MANOEL, W. A. **A importância do ensino de geometria nos iniciais do ensino fundamental:** razões apresentadas em pesquisas brasileiras. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2014.

MINAYO, M. C. S; DESLANDES, S. F. (Org.). **Pesquisa social: teoria**, método e criatividade. 28. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2009.

NAGATA, R. S. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva da teoria de Van Hiele. 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 101 p, 2010.

NETO, A. C M. **Tópicos de matemática elementar, v. 2:** geometria euclidiana plana. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Professor de Matemática)

PACHÊCO, F. F. F. et al. **Identificando o conhecimento geométrico de alunos do 6º ano do ensino fundamental sobre triângulos.** Revista REAMEC, Cuiabá (MT), v. 8, n. 1, p. 343-359, janeiro/abril, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/9362>.

PACHÊCO, F. F. F.; PACHÊCO, G. F.; SILVA, A. D. P. R. **Construções geométricas utilizando a régua e o compasso no ambiente papel e lápis:** um estudo à luz da Teoria de Van Hiele. Revista REMAT, v. 16, n. 22, p. 284-298, maio/ago, 2019. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/30418/>.

PACHÊCO, F. F. F.; SANTOS, M. R. Modelo de van Hiele: um estudo acerca dos triângulos com alunos do 7º ano do ensino fundamental. **Anais...** XII Congresso Internacional de Tecnologia na Educação. Recife, 2014.

PAIS, L. C. Transposição didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. Revista. São Paulo: EDUC, 2008.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender geometria**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004.

______. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, Campinas: Editora UNICAMP, 1993, p. 7-17.

PEREIRA, M. R. **A geometria escolar:** uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino. 2001. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco.** Recife: SEDUC, 2012.

______. Secretária de Educação. **Currículo de Pernambuco.** Ensino Fundamental. Área de Matemática. Recife: SE, 2019.

PÉRTILE, K. **A teoria de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico:** uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio. 2011. 85 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, Porto Alegre.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, C. M. **Laboratório de ensino de geometria**. 1. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

RODRIGUES, S.S.A. **A teoria de van Hiele aplicada aos triângulos:** uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental. 2015. 125 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro.

SANTOS, F. T. M. **Efeitos da utilização do software Régua & Compasso no avanço dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.** 2016. 162 f.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

SANTOS, F. T. M.; CÂMARA DOS SANTOS, M. **Níveis do pensamento geométrico de Van-Hiele com alunos do 6º ano do ensino fundamental.** Anais IX EPBEM... Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26458>. Acesso em: 11 out. 2022.

SANTOS, M. S.; SANT'ANNA, N. F. P. **O ensino de geometria e a teoria de van hiele:** uma abordagem através do laboratório de ensino de matemática no 8º ano da educação básica. XIX EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Juiz de Fora/MG, 2015.

SANTOS, M. R. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental:** um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. 2015. 281 f Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife.

SILVA, T. A. F. **Área de figuras planas:** Uma abordagem segundo a teoria de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico no 7º ano do ensino fundamental. 2018. 89 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém.

SILVA, L. **Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele**. 2014, Disponível em: <<https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1236228>>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SILVA, P. C. N. **Aprendizagem significativa de geometria no 8º ano do ensino fundamental:** uma experiência além do material institucional. 2021. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

TASHIMA, M. M.; SILVA, A. L. **As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria.** Disponível em: <<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massaco_tashima.pdf>>. Acesso em 10 set. 2021.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar:** um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 297 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

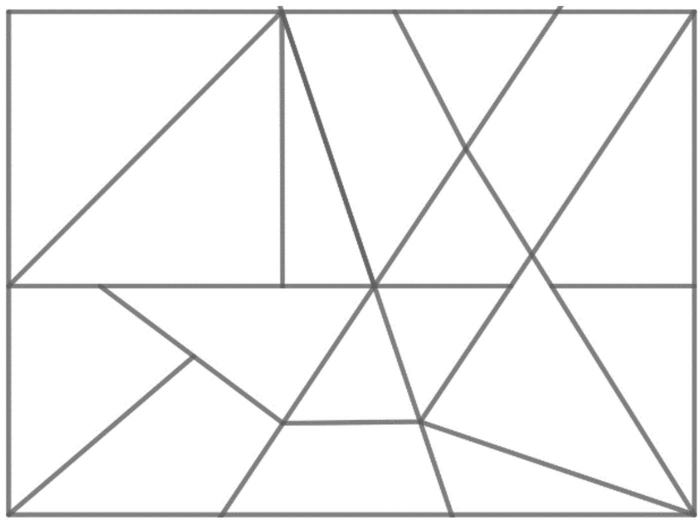
VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión:** En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tese (Doutorado) – Universidad Real de Utrecht, 1957. Disponível em: <<www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf>>. Acesso em: 11 out. 2021

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

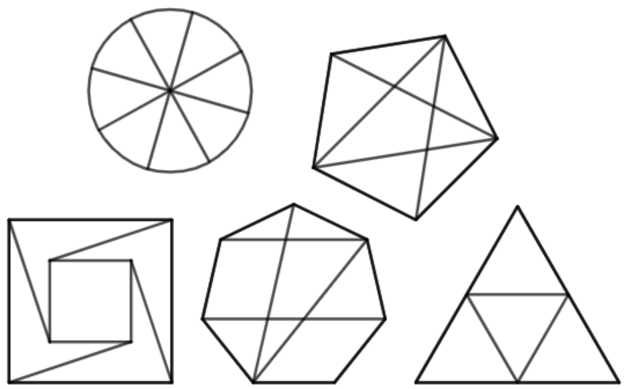
APÊNDICE A - TESTE SOBRE TRIÂNGULOS

Nome:_________________________________ Turma:________

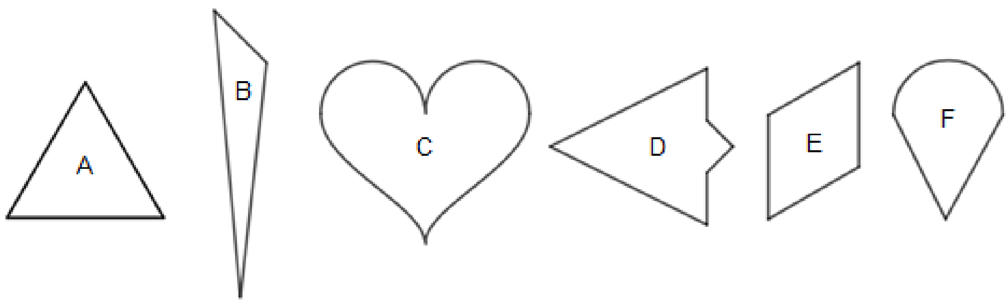
1. Quantos triângulos você consegue identificar na figura abaixo?



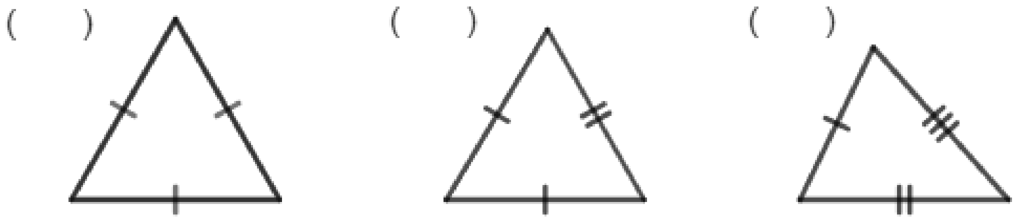
2. Que forma geométrica é predominante nas figuras abaixo?



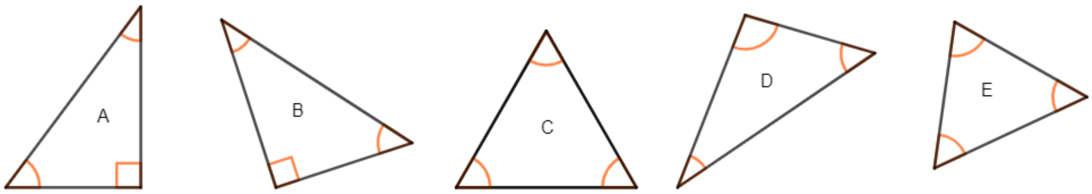
3. Das figuras abaixo circule os triângulos:



4. Sabendo que o triângulo equilátero têm todos os lados com medidas iguais, dentre as figuras abaixo, qual delas pode ser considerada um triângulo equilátero?



5. Das figuras abaixo circule os triângulos retângulos.



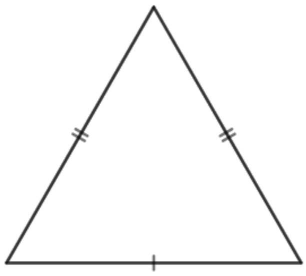
6. O triângulo isósceles têm dois lados com medidas iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos desse triângulo:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.

b) Os três ângulos têm as medidas iguais.

c) Dois ângulos têm as medidas iguais.

d) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



7. Quais elementos consideramos para classificar os triângulos? E por quê?

____

____

____

____

____

____

____

8. Qual é a medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero? E por que eles têm essa medida?

____
____
____
____
____
____
____

9. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

(   ) Todos os triângulos são congruentes.

(   ) Todo triângulo isósceles é equilátero.

(   ) Todo triângulo equilátero é isósceles.

(   ) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

(   ) Um triângulo escaleno pode ser retângulo.

(   ) Um triângulo acutângulo ou é equilátero ou escaleno.

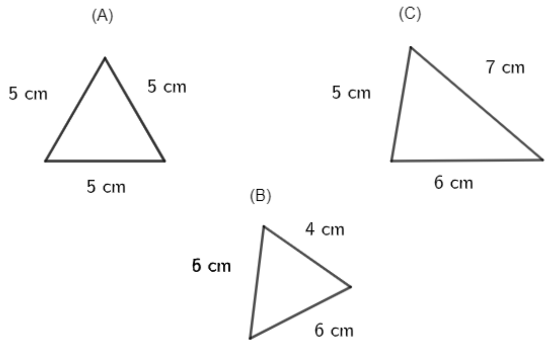
(   ) Um triângulo equilátero ou é obtusângulo ou retângulo.

(   ) Um triângulo equilátero sempre é acutângulo.

Justifique os casos em que você marcou F abaixo.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

10. Observe os triângulos abaixo.



Qual opção apresenta corretamente a nomenclatura?

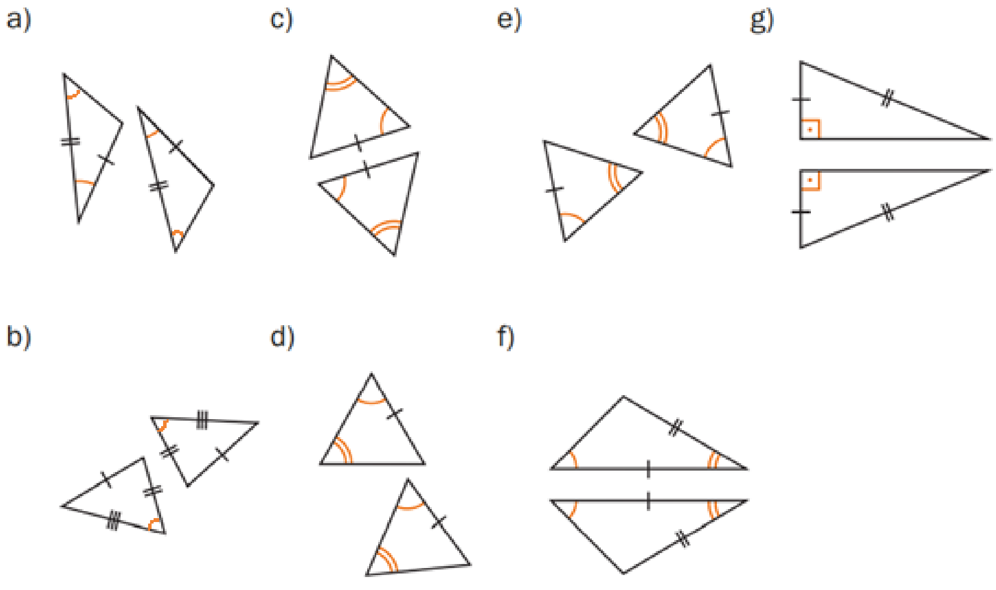
a) (A) – Escaleno, (B) – Equilátero e (C) Isósceles.

b) (A) – Isósceles, (B) – Equilátero e (C) Escaleno.

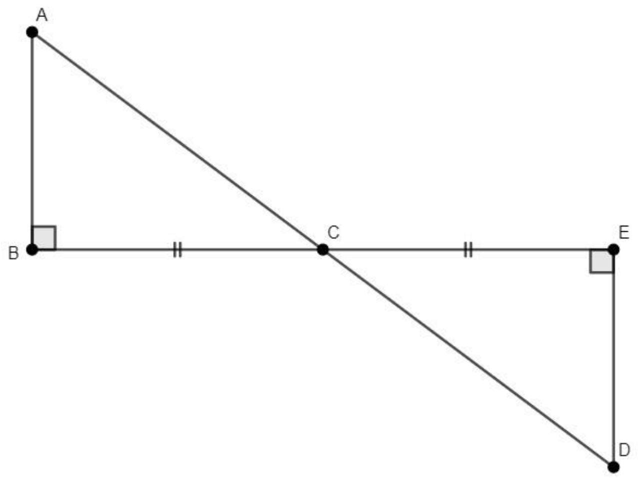
c) (A) – Equilátero, (B) – Isósceles e (C) Escaleno.

d) (A) – Isósceles, (B) – Escaleno e (C) Equilátero.

11. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique os possíveis casos de congruência.



12. Na figura abaixo, AB = 9 cm, DC = 15 cm, AC = 2x – 1 cm e DE = 2y + 3 cm, quantos centímetros tem o valor de x + y:



a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

13. Sobre a congruência de triângulos, julgue as afirmações a seguir:

I – Ao comparar dois triângulos, se a medida de dois lados e um ângulo, todos consecutivos for congruentes, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Lado, Lado e Ângulo.

II – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

III – Ao comparar dois triângulos, se a medida de dois lados consecutivos e o ângulo interno compreendido entre eles for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Lado, Ângulo e Lado.

a) Somente a I é verdadeira.

b) Somente a II é verdadeira.

c) Somente a III é verdadeira.

d) Somente a I e a II são verdadeiras.

e) Somente a II e a III são verdadeiras.

14. Pode-se afirmar que todo triângulo equilátero é também isósceles? Por quê?

15. Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?