UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS e MATEMÁTICA

ANTHONNY EWERTON MARINHO DE VASCONCELOS

UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade

Caruaru

2024

ANTHONNY EWERTON MARINHO DE VASCONCELOS

UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru

2024

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Nasaré Oliveira - CRB/4 - 2309

V331l Vasconcelos, Anthonny Ewerton Marinho de.
Um laboratório na palma das mãos: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. / Anthonny Ewerton Marinho de Vasconcelos. – 2024.
174 f.; il.: 30 cm.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2024.
Inclui Referências.

1. Probabilidades. 2. Jogos de probabilidades (Matemática). 3. GeoGebra. 4. Multimídia interativa – Educação. 5. Orquestração instrumental. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2024-024)

ANTHONNY EWERTON MARINHO DE VASCONCELOS

UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 27/03/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Robson da Silva Eugênio (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco – UPE

Dedico este trabalho a todas e a todos os estudantes que, apesar de toda opressão já vivida, conseguiram se amar. Que apesar de verem suas singularidades virarem pesadelos, foram capazes de torná-las sonhos. Os mais belos sonhos. Que apesar de sofrerem com a angústia da rejeição, aprenderam a apreciar novamente os aromas da vida. Que apesar de já terem rastejado pelo tártaro causado pela incompreensão, não deixaram de compreender. E voltaram a lembrar que a escola é um paraíso. Que lutaram para que toda a pluralidade fosse respeitada. Que não derramaram lágrimas em vão.

A todos os que venceram, apesar das derrotas diárias.

AGRADECIMENTOS

“Eu quero muito agradecer a mim, porque eu não desisti”

– Anitta (Rock In Rio, 2019)

Mas não agradeço apenas a mim. Para ninguém ser esquecido, não citarei nome algum, agradecendo da forma mais genérica que pude: meus colegas mais próximos (do Ensino Médio, Graduação e Pós-Graduação), os lugares em que passei e as pessoas que conheci (escolas nas quais estudei e lecionei, UFPE e demais espaços que ocupei), as professoras e professores com quem convivi (aos bons e ruins), os amigos que fiz (inclusive os que desfiz), a minha família de sangue (mãe, irmã, vó e outros), a família que me daria o próprio sangue (sogra e outros), os meus orientadores (da graduação ao mestrado), a banca que contribuiu com este trabalho, a CAPES (que financiou esta pesquisa) e mais qualquer um que tenha tido um papel indispensável na constituição do meu ser.

Disse que não citaria nenhum nome, mas desde o início eu sabia que estava mentindo. Obrigado Rayssa, minha amiga, namorada e esposa. Você é a melhor pessoa do mundo. E sempre será.

RESUMO

Este estudo aborda o significado frequentista da probabilidade e emerge da inquietação quanto ao ensino e aprendizagem deste tópico na Educação Básica. Dado o caráter altamente experimental da probabilidade frequentista, indagamos sobre quais as possibilidades do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Nesta direção, este estudo tem como objetivo identificar as contribuições e as limitações do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis, inserido numa composição de orquestrações instrumentais, como instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Nessa conjuntura, o estudo se ampara nos pressupostos do marco teórico sobre a epistemologia do conceito de probabilidade e seus diferentes significados a partir da literatura atual. A constituição dos dados se deu por meio da execução de uma composição de orquestrações instrumentais com quatro estudantes do Ensino Médio, elaborada para uma progressiva construção do significado frequentista da probabilidade, à medida em que se mobilizam, também, os seus demais significados. Para tanto, o desenho metodológico contou com três etapas. Na primeira etapa, utilizou-se uma variação do jogo corrida de cavalos com dois dados como ponto de partida para estudar o experimento aleatório de lançar dois dados tetraédricos e calcular a soma dos resultados. Na segunda etapa, utilizando o aplicativo Suíte GeoGebra, realizaram-se simulações computacionais para reproduzir o lançamento dos dados e calcular as frequências relativas de cada resultado, assim como a construção de tabelas e gráficos dinâmicos. Na terceira etapa, conclui-se sobre a convergência das frequências relativas para as probabilidades teóricas. A análise dos dados se deu por meio de uma microanálise interpretativa, fundamentada na análise microgenética. Por meio da análise dos dados, revelou-se que o aplicativo Suíte GeoGebra se tornou um efetivo instrumento para a aprendizagem da probabilidade frequentista, inserido em uma composição de orquestrações instrumentais elaborada para este fim, dispondo de elementos que facilitaram esta aprendizagem, embora dispusesse de outros elementos que a limitaram.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Probabilística, Probabilidade Frequentista, GeoGebra, Dispositivo Móvel, Orquestração Instrumental.

ABSTRACT

This study addresses the frequentist meaning of probability and emerges from concerns regarding the teaching and learning of this topic in Basic Education. Given the highly experimental nature of frequentist probability, we asked about the possibilities of the GeoGebra Suite application for mobile devices as an instrument for learning the frequentist meaning of probability. In this sense, this study aims to identify the contributions and limitations of the GeoGebra Suite application for mobile devices, inserted in a composition of instrumental orchestrations, as an instrument for learning the frequentist meaning of probability. At this juncture, the study is based on the assumptions of the theoretical framework on the epistemology of the concept of probability and its diferente meanings based on current literature. The data was created through the execution of a composition of instrumental orchestrations with four high school students, designed for a progressive construction of the frequentist meaning of probability, as its other meanings are also mobilized. To this end, the methodological design consisted of three stages. In the first stage, a variation of the horse racing game with two dice was used as a starting point to study the random experiment of rolling two tetrahedral dice and calculating the sum of the results. In the second stage, using the GeoGebra Suite application, computer simulations were carried out to reproduce the data entry and calculate the relative frequencies of each result, as well as the construction of dynamic tables and graphs. In the third stage, the conclusion is drawn about the convergence of relative frequencies to theoretical probabilities. Data analysis was carried out through an interpretative microanalysis, based on microgenetic analysis. Through data analysis, it was revealed that the GeoGebra Suite application became an effective instrument for learning frequentist probability, inserted in a composition of instrumental orchestrations designed for this purpose, featuring elements that facilitated this learning, although it had Other elements that limited it.

KEYWORDS: Probabilistic Education, Frequentist Probability, GeoGebra, Mobile Device, Instrumental Orchestration.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	O triângulo aritmético	26
Figura 2 –	Representação geométrica da distribuição normal	27
Figura 3 –	Possibilidades para o lançamento de duas moedas	30
Figura 4 –	Probabilidade geométrica, o alvo da vez	34
Figura 5 –	Estabilização da frequência relativa de caras	35
Figura 6 –	Mais fácil do que encontrar agulha no palheiro	36
Figura 7 –	Espaço amostral do Jogo de Palitinhos	40
Figura 8 –	Elementos constituintes do letramento probabilístico	43
Figura 9 –	Probabilidade de vitória de cada cavalo para trilhas com comprimento de 1 a 10	51
Figura 10 –	Partes de um algoritmo	54
Figura 11 –	Representação do fluxo entre duas etapas em um fluxograma	55
Figura 12 –	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural	56
Figura 13 –	Simulação em algoritmo escrito em Portugol	58
Figura 14 –	Gênese instrumental	60
Figura 15 –	Interface do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis	64
Figura 16 –	O quarteto fantástico	67
Figura 17 –	Modelo geral dos episódios	71
Figura 18 –	Composição das Orquestrações Instrumentais	75
Figura 19 –	Mapa do concerto	76
Figura 20 –	Jogo corrida de cavalos	77
Figura 21 –	O dado tetraédrico	77
Figura 22 –	Espaço amostral da variação do jogo corrida de cavalos com dois dados	78
Figura 23 –	Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_1	79
Figura 24 –	Escala de probabilidades para a Tarefa 2	80
Figura 25 –	Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_2	81
Figura 26 –	Exemplo de preenchimento da Tarefa 2	82
Figura 27 –	Fluxograma 1	84
Figura 28 –	Modelo de tabela de frequências relativas para 50 a 10 000 lançamentos	85

Figura 29 – Modelo de tabela de estimativas da Tarefa 4 86
Figura 30 – Escala de probabilidades para a Tarefa 5 86
Figura 31 – Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_P 87
Figura 32 – Janelas do aplicativo GeoGebra durante a OI_P 89
Figura 33 – Fluxograma 2 90
Figura 34 – Modelo de tabela de estimativas da Tarefa 7 92
Figura 35 – Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_3 93
Figura 36 – Janelas do aplicativo GeoGebra durante a OI_3 94
Figura 37 – Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_4 95
Figura 38 – Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_5 97
Figura 39 – Mapa do Primeiro movimento 105
Figura 40 – Tabuleiro do jogo corrida de cavalos com dois dados 106
Figura 41 – [8] Resposta de Johnny para a Tarefa 2 109
Figura 42 – [11] Resposta de Sue para a Tarefa 2 110
Figura 43 – [14] Resposta de Ben para a Tarefa 2 111
Figura 44 – [17] Resposta de Reed para a Tarefa 2 112
Figura 45 – Mapa do Episódio 2 113
Figura 46 – Registro da simulação manual no quadro branco 113
Figura 47 – Faltou uma vírgula 115
Figura 48 – Código corrigido com a vírgula 115
Figura 49 – Nenhuma soma igual a 8... ainda 117
Figura 50 – [67] Erro de argumento inválido 119
Figura 51 – Trecho do Fluxograma 1 119
Figura 52 – Código corrigido com um argumento válido 120
Figura 53 – [80] Tabela de frequências de Bem 121
Figura 54 – Tabela de frequências de Ben na Atividade Pivot 123
Figura 55 – Espaço amostral descrito por Bem 124
Figura 56 – Resposta de Ben para a Tarefa 5 124
Figura 57 – Tabela de frequências de Reed na Atividade Pivot 125
Figura 58 – Resposta de Reed para a Tarefa 5 126
Figura 59 – Tabela de frequências de Johnny na Atividade Pivot 126
Figura 60 – Resposta de Johnny para a Tarefa 5 127
Figura 61 – Resposta de Sue para a Tarefa 5 128

Figura 62 – Mapa do Episódio 3 130
Figura 63 – Sequência de interrogações 132
Figura 64 – Trecho do quadro de códigos e orientações 132
Figura 65 – Problema da sequência de interrogações corrigido 132
Figura 66 – [142] Gráfico de colunas não ajustado à tela 133
Figura 67 – [146] Gráfico de colunas ajustado à tela 133
Figura 68 – Frames do gráfico 134
Figura 69 – [164] Nem tão perto assim 136
Figura 70 – [172] Um pouco mais perto agora 137
Figura 71 – [212] Espaço amostral construído por Ben 142
Figura 72 – [213] Espaço amostral construído por Sue 142
Figura 73 – Composição das Orquestrações Instrumentais atualizada 143
Figura 74 – Mapa atualizado do concerto 143
Figura 75 – [216] Descrição do espaço amostral de Bem 144

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Representação algébrica da distribuição binomial	27
Quadro 2 –	Representação algébrica da distribuição normal	28
Quadro 3 –	Representação algébrica da distribuição de Poisson	28
Quadro 4 –	Modelo de letramento probabilístico de Gal	42
Quadro 5 –	Habilidades da BNCC correlatas à probabilidade no Ensino Fundamental	47
Quadro 6 –	Habilidades da BNCC correlatas à probabilidade no Ensino Médio	48
Quadro 7 –	Principais símbolos usados na elaboração de fluxogramas	55
Quadro 8 –	Recrutamento dos participantes	67
Quadro 9 –	Recrutamento dos participantes → Execução da composição de orquestrações instrumentais	68
Quadro 10 –	Categorização dos dados	70
Quadro 11 –	Códigos e orientações das simulações da Tarefa 3	84
Quadro 12 –	Códigos e orientações das simulações da Tarefa 6	90
Quadro 13 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_1	99
Quadro 14 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_2	100
Quadro 15 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_P	101
Quadro 16 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_3	102
Quadro 17 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_4	103
Quadro 18 –	Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_5	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	A probabilidade (correta com três casas decimais) de cada cavalo vencer corridas de diferentes comprimentos de trilha	51
Tabela 2 –	Distribuição de probabilidades	78
Tabela 3 –	Resultados da simulação manual	114
Tabela 4 –	Resultados da simulação de Ben na Tarefa 3	123
Tabela 5 –	Estimativas de Ben na Tarefa 4	124
Tabela 6 –	Resultados da simulação de Reed na Tarefa 3	125
Tabela 7 –	Estimativas de Reed na Tarefa 4	125
Tabela 8 –	Resultados da simulação de Johnny na Tarefa 3	126
Tabela 9 –	Estimativas de Johnny na Tarefa 4	127
Tabela 10 –	Resultados da simulação de Sue na Tarefa 3	127
Tabela 11 –	Estimativas de Sue na Tarefa 4	128
Tabela 12 –	[207] Estimativas de Ben na Tarefa 7	140
Tabela 13 –	[208] Estimativas de Johnny na Tarefa 7	140
Tabela 14 –	[209] Estimativas de Reed na Tarefa 7	140
Tabela 15 –	[210] Estimativas de Sue na Tarefa 7	140
Tabela 16 –	[211] Probabilidades teóricas calculadas pelos participantes	141

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

1.2 OBJETIVOS 20

1.2.1 Objetivos gerais 20

1.2.2 Objetivos específicos 20

2 DOS JOGOS DE AZAR À MECÂNICA QUÂNTICA: OS PASSEIOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE 21

2.1 ENTRE CARTAS E INCERTEZAS: UMA HISTÓRIA DE SORTE 21

2.2 ALGUNS SÉCULOS DEPOIS: QUAIS AS CHANCES DE SE FALAR DA PROBABILIDADE NA ESCOLA? 32

2.3 CORRIDA MALUCA 50

3 UMA EXCURSÃO PELOS FUNDAMENTOS DO CONCERTO: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ORQUESTRA E OS INSTRUMENTOS 53

3.1 ABORDAGEM COMPUTACIONAL: POR ONDE É POSSÍVEL IR AINDA MAIS LONGE 53

3.2 D^3: DISPOSIÇÕES X DECISÕES X DESEMPENHO 59

3.3 PARA ALÉM DA *GEO*(METRIA) E DA (ÁL)*GEBRA*: O GEOGEBRA A FAVOR DA PROBABILIDADE 62

4 METODOLOGIA 66

4.1 O RECRUTAMENTO DO QUARTETO FANTÁSTICO 66

4.2 PASSOS PARA A CONSTITUIÇÃO E O REGISTRO DOS DADOS 68

4.3 ESTRATÉGIAS DE TRANSCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE 70

4.4 MÉTODO ANALÍTICO 72

4.5 CONSIDERAÇÕES ÉTICAS 74

5 A PROGRAMAÇÃO DO CONCERTO: UMA COMPOSIÇÃO DE ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS 75

5.1 OI_1: INTRODUÇÃO 77

5.2 OI_2: HORA DO JOGO 80

5.3 OI_P: FREQUÊNCIAS RELATIVAS E O GEOGEBRA 83

5.4 OI_3: GRÁFICOS E O GEOGEBRA 90

5.5 OI_4: CÁLCULO DAS PROBABILIDADES TEÓRICAS 94
5.6 OI_5: SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE 96
6 ANÁLISE DOS DADOS: UM OLHAR SOBRE A PERFORMANCE DIDÁTICA 105
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 147
REFERERÊNCIAS 150
APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 156
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 160
APÊNDICE C – ATIVIDADE 1 164
APÊNDICE D – ATIVIDADE 2 165
APÊNDICE E – ATIVIDADE PIVOT 166
APÊNDICE F – ATIVIDADE 3 170
APÊNDICE G – ATIVIDADE 4 173
APÊNDICE H – ATIVIDADE 5 174

1 INTRODUÇÃO

Um diversificado e amplo espectro de conhecimentos matemáticos é imprescindível para todos os estudantes da Educação Básica, dadas suas aplicações práticas e o seu potencial para o desenvolvimento da criticidade. Entretanto, precisamos estar atentos a não restringir esse espectro apenas a fenômenos determinísticos, uma vez que os fenômenos aleatórios também figuram entre os campos de estudo da Matemática e são igualmente relevantes em aplicação e desenvolvimento crítico (Brasil, 2018). Particularmente, com o campo da Probabilidade, consideramos tal conceito com seu aspecto multifacetado que perpassa pelas definições da probabilidade intuitiva, clássica, frequentista, subjetiva e axiomática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) já alertavam, há mais de duas décadas, que o extenso leque de temas dessa disciplina deveria incluir a probabilidade. Isto se dá, especialmente, pelo fato de que mobilizar noções probabilísticas possibilita muitas contribuições do ponto de vista social, tais como a formação de cidadãos mais críticos ao lidar com dados estatísticos e probabilísticos (Gal, 2005). Os mesmos PCNs indicavam o desenvolvimento das primeiras noções da probabilidade por meio da frequência em que se observava um evento em uma experiência aleatória com grande número de repetições (Brasil, 1997, 1998). Essa indicação já havia sido apresentada por Coutinho (1994), ao sugerir a introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista.

Essa visão está associada ao significado frequentista da probabilidade (Batanero, 2005), também indicado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reforça a importância de simular experimentos aleatórios e, por meio das frequências relativas, confrontar os resultados com a probabilidade teórica (Brasil, 2018). Tal abordagem sobre a probabilidade frequentista, indicada pelos documentos prescritos orienta para acontecer desde o início dos anos finais do Ensino Fundamental, desperta uma inquietação pessoal a respeito de como discutir ideias tão abstratas com crianças e adolescentes, impulsionando a realização de uma pesquisa sobre a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade, assim como o presente estudo.

A apropriação do significado frequentista da probabilidade passa, necessariamente, pela experimentação. É preciso observar como se comportam as frequências relativas de um evento em um experimento aleatório com muitas repetições para que a ideia de convergência para a probabilidade teórica seja assimilada, e não apenas admitida. Simulações manuais são um bom começo para isso (é possível lançar uma moeda 50 vezes com os estudantes e observar a frequência relativa de caras, por exemplo), mas se forem a única via, podem comprometer a compreensão do significado frequentista da probabilidade (lançar uma moeda manualmente 5.000 vezes é exaustivo e dispendioso ao tempo do estudante, não sendo indicado). Por esta razão, uma boa opção são as simulações computacionais, que permitem realizar muitas repetições em pouco tempo e sem a exaustão dos processos manuais.

Gitirana e Lucena (2021) relataram a aplicação de uma oficina sobre probabilidade frequentista, na qual os participantes lançavam um par de dados de seis faces, manualmente, e calculavam a soma dos pontos obtidos. Repetiam esse lançamento várias vezes e, coletivamente, alimentavam uma planilha do Excel construindo gráficos de colunas com as frequências de cada resultado, a fim de observar a convergência das frequências. Tratou-se, neste caso, de uma simulação manual que utilizou a planilha do Excel para otimizar o tratamento dos dados.

Souza (2015) utilizou o simulador *TinkerPlots*, em ambiente computacional, para realizar experimentos aleatórios, com o objetivo de investigar conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre probabilidade com o uso da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots* 2.0. Este *software* é um programa de computador no qual é possível explorar, organizar e analisar dados, além de trabalhar com noções de probabilidade (Souza, 2015). Os resultados da pesquisa de Souza (2015) apresentaram algumas evidências sobre o potencial de simulações computacionais para ampliar as relações entre as frequências relativas de eventos e as suas probabilidades teóricas, fundamental à construção do significado frequentista da probabilidade.

Interessados em meios de proporcionar essa aprendizagem explorando representações visuais e dinâmicas que facilitem a construção do significado frequentista da probabilidade, tornando-o menos abstrato, entre algumas opções disponíveis, partimos da hipótese de que o GeoGebra, um ambiente de matemática dinâmica, pode se configurar como uma promissora possibilidade. Marques (2022) utilizou uma construção no GeoGebra para simular o jogo *Franc Carreau* com estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental, que realizaram várias repetições do experimento e, com os resultados, alimentaram uma planilha do Excel para visualizar a frequência acumulada e analisar a convergência da probabilidade. Coutinho e Figueiredo (2020) realizaram a mesma atividade, mas com professores. Tratou-se, neste caso, de uma simulação computacional no GeoGebra, mas que dependia da necessidade manual de alimentar uma planilha.

Dentre as muitas versões oferecidas pelo ambiente GeoGebra, inclusive para notebook e computador de mesa, optamos por utilizar o aplicativo para *smartphones* Suíte GeoGebra. Diversas evidências apontam que as tecnologias móveis enriquecem oportunidades educacionais e facilitam a aprendizagem (UNESCO, 2013), oportunizando diversos benefícios e diferenciais, tais como expandir o alcance e a equidade da educação e minimizar a interrupção educacional em tempos de crises. Durante a pandemia de covid-19, os *smartphones* tornaram-se a sala de aula de muitos estudantes, garantindo a uma parte destes o acesso ao conhecimento, uma vez que “os aparelhos móveis podem, assim, ajudar a assegurar a continuidade da educação durante tempos de crise” (UNESCO, 2013, p.23). Mas, por que pensar especificamente em tecnologias móveis se os computadores estão à nossa disposição?

A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD Contínua – realizada entre os anos de 2016 e 2019, apontou um crescente aumento do uso do telefone móvel celular em detrimento dos computadores (IBGE, 2018, 2021): o número de domicílios brasileiros que utilizam o telefone móvel celular para acessar a internet cresceu de 94,6% em 2016 para 98,6% em 2019, tendência oposta aos microcomputadores, que decresceram de 63,7% em 2016 para 46,2% em 2019. A pesquisa acredita que um dos fatores que influenciaram nessa realidade foi a implementação de funções nos telefones móveis celulares que antes eram exclusivas dos microcomputadores.

Além disso, também, pode-se pontuar que os *smartphones* estão a apenas alguns cliques de serem utilizados mesmo em sala de aula, sem precisar se deslocar para laboratórios com computadores, muitas vezes escassos ou inexistentes em algumas escolas. Por essas e outras razões, optamos por utilizar o aplicativo Suíte GeoGebra para *smartphones*, e não o *software* para notebooks e computadores de mesa, pois ainda que nem todos os estudantes possuam *smartphones*, este recurso é mais acessível do que o microcomputador.

Bortolossi (2016), ao explanar sobre o uso do GeoGebra para tópicos de probabilidade, menciona a versão para dispositivos móveis, mas não desenvolve nenhuma discussão sobre ela. Giordano e Kian (2021) citam a disciplina Tecnologia e Inovação, itinerário formativo criado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), na qual se utilizam *softwares* (programas de Estatística, como o R) e/ou aplicativos (como o GeoGebra) e argumenta que tais recursos são ótimos para a modelagem de experimentos de probabilidade frequentista. Entretanto, não exemplifica como fazer isso com o aplicativo GeoGebra.

Realizamos uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e no Portal de Periódicos da Capes, entre os anos de 2017 e 2022, a fim de conhecer o estado do conhecimento do objeto em estudo. Utilizando operadores booleanos[1] com o descritor "Probabilidade AND GeoGebra", foram identificadas 6 dissertações no BDTD, 322 resultados no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (dos quais apenas 8 resultados guardavam, de fato, uma relação entre probabilidade e GeoGebra nos seus títulos e resumos, sendo 6 as dissertações já identificadas no BDTD) e 8 artigos no Portal de Periódicos da Capes. Todavia, nenhum destes trabalhos tratava da probabilidade frequentista.

Para investigar as produções que estudavam o GeoGebra para dispositivos móveis, utilizamos o descritor "GeoGebra AND (Smartphones OR "Dispositivos móveis" OR Celular)", encontrando 20 dissertações e 2 teses no BDTD, 5 dissertações no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e 49 artigos no Portal de Periódicos da Capes, mas em nenhum destes trabalhos havia foco na probabilidade (em nenhum dos seus significados). Constatou-se que existem pouquíssimas pesquisas com interseccionalidades entre o GeoGebra e a Probabilidade e entre o GeoGebra e os dispositivos móveis, mas que não existe nenhum trabalho (nas bases investigadas e com os descritores e operadores escolhidos) que estuda o GeoGebra para dispositivos móveis para realizar simulações de probabilidade frequentista.

As simulações computacionais com o GeoGebra voltadas à aprendizagem da probabilidade frequentista costumam utilizar simuladores construídos no GeoGebra, em uma versão para computador. Neste trabalho, propomos outra perspectiva, que é utilizar simulações realizadas no GeoGebra (incorporando habilidades correlatas ao desenvolvimento do pensamento computacional) e utilizando a versão para *smartphones* (na direção de utilizar um artefato mais acessível). Trabalhar com

[1] São utilizados para refinar e direcionar pesquisas em banco de dados.

simuladores construídos no GeoGebra é realizar as simulações com um produto finalizado. Trabalhar com simulações realizadas no GeoGebra é realizar as simulações enquanto o produto é construído, junto com os estudantes. O primeiro caso, ainda que riquíssimo, mantém o estudante um pouco mais passivo e tem pouco a oferecer ao desenvolvimento do pensamento computacional, enquanto o segundo caso faz do estudante parte integrante de todo o processo e possibilita um terreno fértil para plantar as sementes e regar este tipo de pensamento.

Por esta razão, nesta pesquisa, dedicamo-nos também a criar oportunidades de trabalhar com fundamentos básicos da computação, tais como algoritmos, códigos e fluxogramas, lançando bases para o aprimoramento do pensamento computacional dos estudantes, tema em alta dadas as mais recentes orientações da BNCC, que lhe dá um local de destaque na Educação Básica (Brasil, 2018; Brasil, 2022).

Santos e Carvalho (2018) fizeram um levantamento de pesquisas, de 2012 a 2017, que envolvessem o uso de recursos didáticos como metodologia para o ensino de probabilidade na “criação de um ambiente que permita aos discentes a manipulação e verificação experimental quanto a probabilidade de situações aleatórias” (Santos, Carvalho, 2018, p. 48). Nenhum trabalho envolvia o GeoGebra. Santos e Carvalho (2018) apontam ainda uma baixa quantidade de pesquisas, como um todo, com foco na qualidade do processo de ensino e aprendizagem e a “necessidade de novas propostas e recursos para o Ensino de Probabilidade” (Santos, Carvalho, 2018, p. 54).

Essa escassez de trabalhos que utilizem os aplicativos do GeoGebra para simular experimentos aleatórios, sem necessidade de processos manuais, tais como lançar dados físicos e alimentar planilhas externas, justifica a necessidade de uma pesquisa como esta, cujo objeto de estudo é, portanto, o aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Assim, partimos da seguinte questão de pesquisa:

Quais as possibilidades do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade?

Para responder a uma questão como esta, precisávamos de um modelo teórico capaz de orquestrar, além dos sujeitos, os artefatos envolvidos, dado o explícito protagonismo dos nossos artefatos digitais para a aprendizagem da probabilidade frequentista. Trouche (2005) desenvolveu um modelo que possibilita uma configuração sistemática de artefatos e sujeitos num ambiente de aprendizagem cuja intenção é resolver determinada situação pelo intermédio dos artefatos e dos esquemas de ação desses sujeitos. Este modelo, nomeado de Orquestração Instrumental (OI), foi adotado nessa pesquisa para orquestrar toda a proposta, constituída por dez tarefas que, progressivamente, tinham a intenção de fazer evoluir a construção do significado frequentista da probabilidade de quatro estudantes do Ensino Médio, por intermédio do aplicativo para *smartphones* Suíte GeoGebra e de outros artefatos, à medida que também colocava em cena conceitos iniciais voltados ao pensamento computacional.

1.2 OBJETIVOS

Com a finalidade de obter respostas ao problema de pesquisa, propomos os seguintes objetivos:

1.2.1 Objetivo Geral

Identificar as contribuições e as limitações do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis, inserido-o em uma composição de orquestrações instrumentais, como instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral indicado, elencamos os seguintes objetivos específicos:

1 – Mapear a gênese instrumental de um grupo de estudantes quanto ao uso do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade;

2 – Analisar o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade durante a execução de uma composição de orquestrações instrumentais;

3 – Classificar os elementos do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis que facilitaram, dificultaram ou limitaram o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade.

2 DOS JOGOS DE AZAR À MECÂNICA QUÂNTICA: OS PASSEIOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE

São incontáveis os casos em que a aleatoriedade rege processos e resultados. Ao pensar e avaliar sobre as chances de vitória ao apostar em um jogo, numa partida de futebol (e nas “zebras” que, eventualmente, se verificam) ou na roupa escolhida antes de sair de casa, em função da previsão do tempo, pensa-se com o filtro da aleatoriedade (Dantas, 2008). Do contexto dos jogos de azar, emerge os princípios da Teoria das probabilidades, que avança pelos séculos expandindo as suas aplicações e se tornando objeto de estudo nas escolas.

Neste capítulo é apresentada uma síntese do amadurecimento da Teoria das probabilidades, das suas origens ao panorama atual. Contudo, não nos propomos a cobrir toda a vasta história das origens e do desenvolvimento da probabilidade, mas situar o que entendemos ser relevante para as discussões deste trabalho. Este desenvolvimento histórico nos permite conhecer alguns desafios enfrentados ao tratar e retratar a probabilidade, justificando a necessidade de operar com os seus diferentes significados (Batanero, 2005). A expansão dos conceitos e das aplicações da probabilidade aumentam o seu raio de alcance, tornando imperativo o estabelecimento de um perfil de cidadão preparado para ler, interpretar e comunicar ideias probabilísticas, de um sujeito com letramento probabilístico (Gal, 2005).

Com a finalidade de fazer cumprir estas necessidades, apresenta-se também, neste capítulo, uma breve discussão sobre os principais documentos curriculares brasileiros que orientam os processos de ensino e aprendizagem na Educação Básica, das perspectivas sobre a formação inicial e continuada de professores para o ensino e a aprendizagem da probabilidade e a que se propõe, afinal, a Educação estatística e probabilística.

2.1 ENTRE CARTAS E INCERTEZAS: UMA HISTÓRIA DE SORTE

A matemática sempre teve algum “calcanhar de Aquiles” para fragilizar a fortaleza do seu desenvolvimento, a exemplo da inserção do *zero* nos seus sistemas de numeração, com o qual o ser humano lidou com bastante dificuldade. É possível citar, também, o estabelecimento dos números negativos. Mas nenhuma dificuldade foi tão metafísica quanto a que surgiu, historicamente, com a necessidade de lidar com a aleatoriedade e a incerteza. Teria sido a aleatoriedade o novo *zero* da humanidade? Partimos da concepção de que “aleatoriedade e incerteza são abstrações” (Taleb, 2021, p. 181). O ser humano está sujeito a necessidade de contextos para entender abstrações (Taleb, 2021).

Obviamente que isto não exclui a abstração inerente a outros objetos de estudo da matemática e de outras ciências, trata-se aqui de evidenciar o altíssimo nível de abstração da aleatoriedade. Some-se a isso a incessante busca do ser humano por causas (Kahneman, 2012) e o fato de que, para fenômenos aleatórios, não basta voltarmos o olhar para o que aconteceu, é preciso vislumbrar também o que poderia ter acontecido (Kahneman, 2012; Taleb, 2021). Eis que surge o acaso, um acontecimento de um fenômeno selecionado entre as alternativas apresentadas e dado sem nenhuma causa particular (Kahneman, 2012).

Por exemplo, em um experimento, observa-se que a água, até então líquida, está se tornando gasosa. Investigações prévias já nos levaram a concluir que há uma causa para isso ocorrer (variação de temperatura e pressão, por exemplo), de forma que possamos prever com exatidão em que momento e circunstâncias isso ocorrerá novamente. Podemos inclusive manipular as variáveis (temperatura e pressão) para que o fenômeno selecionado ocorra exatamente como se deseja. O experimento pode ser repetido quantas vezes desejarmos que sempre será possível obter o mesmo resultado, caso se queira. Este é um experimento determinístico, dado por causas particulares e identificáveis.

Em um outro experimento, observa-se o lançamento de uma moeda e a obtenção da face cara. Não há investigação alguma que possibilite concluir uma causa particular para a face obtida ter sido cara e não coroa, de forma que nunca podemos prever com exatidão em que momento e circunstâncias isso ocorrerá novamente. O experimento pode ser repetido quantas vezes desejarmos, mas nunca será possível garantir a obtenção de um resultado em específico, ainda que se queira. Este é um experimento aleatório, dado sem nenhuma causa particular para ter ocorrido como ocorreu.

A confusão entre experimentos determinísticos e aleatórios pode se tornar um problema, pois a “nossa predileção pelo pensamento causal nos expõe a graves enganos ao estimar a aleatoriedade de eventos verdadeiramente aleatórios” (Kahneman, 2012, p. 146). Em fenômenos revestidos de aleatoriedade é o acaso quem opera e, portanto, nestes fenômenos não podemos ignorar o que poderia ter acontecido em detrimento do que aconteceu. Voltando ao exemplo da água, no planeta terra, em condições normais de pressão, ao nível do mar, ao atingir 100 °C a água ferve. Não poderia acontecer nada diferente disso. Por outro lado, ao lançar dois dados honestos de seis faces e obter as duas faces voltadas para cima com 1 e 3 pontos, totalizando uma soma 4 para o número dos seus pontos, temos uma descrição do que aconteceu, mas isso não esvazia o fenômeno estudado, uma vez que outras coisas poderiam ter acontecido: outras somas poderiam ter ocorrido, como a soma 5 e 6, e outras configurações para a soma 4 poderiam ter se apresentado, como as duas faces voltadas para cima possuírem, ambas, 2 pontos. É imperativo, não há como a probabilidade se interessar apenas pelo que acontece, faz parte do seu escopo o interesse, também, pelo que poderia ter acontecido, mas não aconteceu.

No filme Homem-Formiga e a Vespa: Quantumania[2], o personagem Scott Lang, o Homem-Formiga, no interior do reino quântico, reino fictício de dimensões subatômicas, precisa recuperar um poderoso artefato preso em uma região tomada pela chamada “tempestade de probabilidades”. Este lugar é perigoso exatamente porque faz existir na realidade muito mais do que o que acontece, mas também tudo o que poderia ter acontecido. Logo que entra, Scott começa a se multiplicar e centenas de versões de si mesmo passam a coexistir nessa região.

> Scott Lang: Quem é esse?
>
> M.O.D.O.K.: Está olhando para a possibilidade de um outro você. É uma tempestade de probabilidades.
>
> Scott Lang: Mas, o que significa isso?
>
> M.O.D.O.K.: É a tempestade de probabilidades. Todas as escolhas que você poderia ter feito, existindo ao mesmo tempo. Está dentro de uma caixa de Schrödinger e você é o gato.

Ao jogar um dado de 6 faces no interior desta “tempestade de probabilidades”, por exemplo, obteríamos seis versões do dado, cada uma com uma das 6 faces voltadas para cima. “O lado escuro da lua é mais difícil de ver; irradiar luz sobre ele tem um alto custo de energia. Da mesma forma, irradiar luz sobre o invisível é dispendioso em termos de esforço computacional e mental” (Taleb, 2021, p. 181). É a este esforço que a probabilidade investe a sua energia: irradiar luz sobre o lado escuro do que poderia ter acontecido, mas não aconteceu. Talvez por esta razão que a probabilidade tenha iniciado o seu desenvolvimento tão tardiamente na história, em comparação com outras áreas, tais como a geometria e a lógica (extremamente

---

[2] *Homem-Formiga e a Vespa: Quantumania* é um filme lançado no cinema pela Marvel Studios em 2023. A cena em questão pode ser consultada no Disney+, serviço de *streaming* da Disney.

determinísticas).

O direito antigo e medieval classificava, de certa forma, probabilidades em evidências judiciais, mas era sobre a lógica silogística, a geometria e a dedução formal, assim como aspectos filosóficos, que despertavam o interesse e o estudo dos grandes pensadores. Assim como, no Renascimento, calculavam-se os valores de seguro de barcos e de prêmios levando em consideração uma estimativa intuitiva de risco (Warsi, 2020). Entretanto, a probabilidade não recebeu nenhum tratamento matemático até por volta do final do século XV (Eves, 2004; Contador, 2008). Foi a partir do final daquele século que surgiram as primeiras chamas de interesse pela aleatoriedade.

Neste período, os chamados jogos de azar (ou jogos de sorte) já eram populares. Um jogo de azar é aquele no qual a sorte é fator preponderante para vencer, mesmo a longo prazo. Um exemplo de jogo de azar é o bingo, no qual nenhuma habilidade é capaz de sobrepujar o peso da sorte, ainda que em muitas rodadas. O dominó, por sua vez, embora conte com a sorte, esta é sobrepujada pela habilidade do jogador a longo prazo, em muitas rodadas. Por isso, dizemos que alguém é bom em dominó, mas não faz sentido dizer o mesmo para o bingo[3].

No contexto dos jogos de azar, o "problema dos pontos", como ficou conhecido, deve ter sido a primeira grande questão da probabilidade para os matemáticos, e diz respeito a como realizar uma divisão justa das apostas em um jogo de azar quando este precisa ser interrompido. Por exemplo, dois amigos A e B apostam, cada um, R$20,00 no seguinte jogo: lançando uma moeda várias vezes, se forem obtidas 6 caras primeiro, A vence e leva toda a grande quantia. Caso contrário, se forem obtidas 6 coroas primeiro, B vence e leva toda a bolada. Mas surge, então, uma inquietação: se, após 8 rodadas, o jogo for interrompido antes da conclusão, com 5 caras e 3 coroas, por exemplo, como deve ser dividida a bolada?

O italiano Luca Pacioli, em 1494, apresentou uma solução a este problema que indicava que o valor total apostado deveria ser dividido em partes diretamente proporcionais ao número de rodadas já vencidas. Portanto, Pacioli teria dado $\frac{5}{8}$ do total para A e $\frac{3}{8}$ do total para B.

---

[3] Para mais discussões sobre jogos de azar, com foco na matemática do poker, conferir Poker, Chance and Skill, de Noga Alon, disponível em https://www.cs.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/skill.pdf.

Em meados do século XVI, Niccolò Tartaglia afirmou que a solução de Pacioli não parecia correta. Para apenas uma rodada, por exemplo, o apostador que a tenha vencido levaria toda a bolada. Tartaglia completou que independente da forma com que o valor das apostas for dividido, sempre haverá controvérsias. O matemático Gerolamo Cardano, que havia realizado profundas análises de lances de dados e escrito *O livro sobre jogos de azar* no século XVI (publicado após a sua morte), primeira obra sobre probabilidades, também se debruçou sobre o "problema dos pontos", questionando também a solução de Pacioli, afirmando haver um erro evidente lá.

Em todos estes casos, os matemáticos trataram o "problema dos pontos" como um problema de proporção. Foi apenas Pascal e Fermat, em 1654, que passaram a pensar o "problema dos pontos" como um problema de probabilidade. As pessoas não eram habituadas com a aleatoriedade, mas com o determinismo, em especial pelo forte pensamento mecanicista que se tinha no período (e que prevaleceria nos séculos seguintes).

Por meio da mecânica newtoniana, por exemplo, era possível prever exatamente o que iria ocorrer no futuro. Dadas certas condições iniciais, é possível determinar a posição exata de um corpo material, sua massa, o tempo de deslocamento etc. A imprevisibilidade de resultados de alguns experimentos ainda não era o foco nesta época. Ainda assim, algumas obras muito pertinentes foram publicadas naqueles séculos, como Galileu que em 1620 publicou sobre dados, calculando as chances sobre os resultados dos lançamentos destes objetos.

Embora tenha sido discutido por Pacioli, Tartaglia e Cardano, foi apenas por meios das cartas trocadas entre Pascal e Fermat, em 1654, que se verificaram avanços efetivos no "problema dos pontos". As cartas discutiam sobre problemas envolvendo jogos de azar. Pascal estudou com profundidade a relação entre as probabilidades e o triângulo aritmético, "um triângulo equilátero construído a partir de um arranjo muito simples de números em linhas cada vez mais largas" (Warsi, 2020, p. 158), sendo, por esta razão, batizado como Triângulo de Pascal pelo ocidente. Entretanto, não lhe pertencendo e nem sendo uma criação sua, é também conhecido como Triângulo de Yang Hui na China, tendo sido estudado lá séculos antes de Pascal; como Triângulo de Khayyam no Irã, assim como referências apontam que textos indianos de 450 a. C. já representavam o triângulo aritmético sob o nome de "Escada do monte Meru" (Warsi, 2020).

Figura 1: O triângulo aritmético.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Fonte: Boyer (1996).

Ainda que o registro do primeiro uso do conceito de eventos “igualmente possíveis” seja atribuído a Galileu na Idade Média (Dantas, 2008) e que algumas ideias de probabilidade tenham sido propostas por Cardano um século antes (Boyer, 1996), a história elegeu a troca de correspondências entre Pascal e Fermat como a inauguração da teoria das probabilidades. Foi Antoine Gombaurd, Cavaleiro de Méré, quem propôs o “problema dos pontos” a Pascal, resultando nas cartas entre este e Fermat. A solução destes matemáticos levava em consideração a probabilidade de que cada jogador vencesse o jogo, não a proporção de rodadas vencidas. No exemplo dado no início, uma possível solução seria a seguinte: são necessárias, no máximo, mais 3 rodadas, para que o jogo se encerre. Dado que são duas possibilidades para cada rodada (cara ou coroa), há um total de 8 possibilidades de resultados, das quais B vence em apenas uma (os 3 lançamentos resultarem em coroas). Portanto, Pascal e Fermat teriam dado $\frac{7}{8}$ do total para A e $\frac{1}{8}$ do total para B.

Experimentos aleatórios são aqueles “que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado” (Dantas, 2008, p. 16) – caso contrário, os experimentos são denominados experimentos determinísticos. A partir das sete cartas trocadas entre Pascal e Fermat em 1654, os experimentos aleatórios foram estudados por, entre outros matemáticos, o holandês Christian Huygens, que escreveu o primeiro tratado formal sobre a probabilidade, o *Sobre o raciocínio em jogos de azar*, publicado em 1657, incorporando as correspondências trocadas por Pascal e Fermat.

A incerteza estava presente em diversos segmentos da sociedade, tais como os negócios de seguros, que passaram por uma explosão no século XVIII, atraindo muitos matemáticos para a teoria das probabilidades (Eves, 2004). Em 1713, foi publicado o tratado *Ars conjectandi*, escrito pelo suíço Jacques Bernoulli e publicado pelo seu sobrinho após a sua morte, sendo este “o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades” (Boyer, 1996, p. 288).

Neste volume, Jacques Bernoulli apresenta uma versão inicial da Lei dos Grandes Números (LGN) – chamada por ele de Teorema dourado. Bernoulli realizou vários estudos considerando um jogo com apenas dois resultados possíveis: vitória ou derrota, sucesso ou fracasso etc., o que ficou conhecido como Ensaio de Bernoulli e lançou a base do que se chama de distribuição binomial (ver Quadro 1).

Quadro 1: Representação algébrica da distribuição binomial.

Se um experimento aleatório está associado a apenas dois resultados, sucesso ou fracasso, diz-se que a variável aleatória X tem distribuição binomial e que a função de probabilidade P de obter x sucessos em n tentativas é

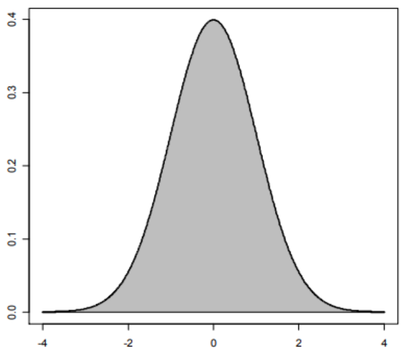
$$P(X = x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^x$$

na qual p é a probabilidade de cada sucesso.

Fonte: O autor (2024).

Alguns anos após o lançamento do *Ars conjectandi*, Abraham de Moivre, baseado na distribuição binomial de Bernoulli – que descreve resultados baseados em uma de duas possibilidades, sucesso ou fracasso, para valores discretos – estudou alguns eventos para valores contínuos e observou que estes se aglomeravam ao redor da média. Geometricamente, em um gráfico, formava uma curva que tinha a aparência de um sino (ver Figura 2).

Figura 2: Representação geométrica da distribuição normal.



Fonte: Ferreira e Oliveira (2020).

De Moivre escreveu essas conclusões em *A doutrina das possibilidades*. Tal fenômeno foi estudado posteriormente por, entre outros matemáticos, Gauss e Galton. Esta distribuição contínua recebeu o nome de distribuição normal ou gaussiana.

No século XVIII, por meio de um ensaio publicado em 1763 (após a sua morte) Thomas Bayes introduziu probabilidades condicionais para resolver problemas sobre probabilidades inversas, que são “problemas que lidam com probabilidades de causas” (Warsi, 2020, p. 199). Bayes desenvolveu um teorema que funciona “como um mecanismo de atualização de opiniões. Ou seja, o indivíduo aprende B e passa a ter opinião $P(B)$ sobre A” (Bussab, Morettin, 2002, p. 121).

O britânico Francis Galton contribuiu para popularizar o termo “normal” para a curva de De Moivre, ao realizar um experimento com o *quincux* (também chamado de Tabuleiro de Galton), um tabuleiro num arranjo triangular de pinos, para estudar a variação aleatória. Galton soltava bolinhas do topo do *quincux* e as coletava no fundo. Ao contar as bolinhas no fundo, descreveu a distribuição obtida como “normal”.

Carl Friedrich Gauss, no início do século XIX, foi pioneiro ao usar a distribuição normal como ferramenta estatística (ver Quadro 2).

Quadro 2: Representação algébrica da distribuição normal.

Diz-se que uma variável aleatória X tem distribuição normal se a função probabilidade P é dada por $$P(X=x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ na qual μ é a média da população e σ é o desvio padrão da população.

Fonte: O autor (2024).

Pierre-Simon Laplace, o matemático a quem, de acordo com Boyer (1996), a teoria das probabilidades mais deve, contribuiu com o clássico *Théorie analytique des probabilités*, em 1812, e *Essai Philosophique sur les Probabilités*, em 1814, ampliando a teoria das probabilidades ao campo da ciência e aplicação na estatística (Warsi, 2020). Em 1837, o francês Siméon Poisson, baseado no trabalho de De Moivre, estudou a probabilidade de que “um número específico de ocorrências aconteça dentro de uma dada unidade de tempo, área ou volume” (Larson, Farber, 2015, p. 203), introduzindo a distribuição de Poisson (ver Quadro 3).

Quadro 3: Representação algébrica da distribuição de Poisson.

Se um experimento aleatório está associado ao número de ocorrências em um intervalo, diz-se que a variável aleatória X tem distribuição de Poisson e que a função de probabilidade P de obter exatamente x ocorrências em um intervalo é $$P(X=x)=\frac{\mu^x\cdot e^{-u}}{x!}$$ na qual μ é a média de ocorrências para cada intervalo unitário de referência.

Fonte: Larson e Farber (2015).

Antes dos trabalhos de Poisson, em 1814, Laplace provocou as concepções do que entendíamos por determinismo e aleatoriedade. Ele imaginou, hipoteticamente, um intelecto capaz de mapear matematicamente todos os movimentos do universo, das rotações das galáxias aos átomos. Havia uma interessante questão filosófica neste experimento mental, chamado posteriormente de "demônio de Laplace": tudo já está predeterminado, não existindo livre-arbítrio sobre os pensamentos e ações das pessoas.

Estudos de termodinâmica, nos anos 1850, colocaram o mundo atômico em evidência e para o qual a mecânica clássica não era suficiente. Para isso, os físicos adotaram a teoria das probabilidades para descrever os movimentos em estudo. "Nos anos 1920, a ideia de um universo probabilístico foi consolidada com o desenvolvimento da física quântica, que tem a incerteza em seu cerne" (Warsi, 2020, p. 219). Anos depois, isso foi chamado de mecânica estatística.

O cientista alemão Werner Heinsenberg formulou, em 1926, o seu famoso princípio da incerteza. Heinsenberg verificou, após alguns experimentos com partículas, que "quanto mais precisamente tentarmos medir a posição da partícula, menos precisamente poderemos medir sua velocidade, e vice-versa" (Hawking, 2015, p. 77)[4]. O princípio da incerteza mudou a forma com que vemos o mundo e

> sinalizou um fim para o sonho de Laplace de uma teoria da ciência, um modelo completamente determinista do universo: ora, ninguém pode prever eventos futuros com exatidão se não é capaz sequer de medir de forma precisa o atual estado do universo! (Hawking, 2015, p. 77).

Essa abordagem levou à formulação da mecânica quântica, baseada no princípio da incerteza. A mecânica quântica é uma teoria fundamentada na probabilidade e tem sido bem-sucedida ao fundamentar quase toda a ciência e tecnologia modernas (Hawking, 2015).

Após a Segunda Guerra, a teoria das probabilidades foi completamente influenciada pela teoria dos conjuntos (Boyer, 1996) e, portanto, para a representação de operações no cálculo das probabilidades de eventos, incorporaram-se todas as operações de conjuntos, tais como a união, intersecção, diferença e complementar. Chamamos de evento "todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento" (Dantas, 2008, p. 19), à medida que o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral (Dantas, 2018).

---

[4] A edição original é de 1942.

Quando o evento é representado “por um conjunto unitário, isto é, contendo somente um ponto do espaço amostral” (Dantas, 2018, p. 19), esse evento é chamado de evento simples.

Um espaço amostral é dito equiprovável quando todos os possíveis resultados têm a mesma probabilidade de ocorrer. Dificuldades envolvendo a equiprobabilidade sempre estiveram presentes na história da teoria das probabilidades. Um exemplo típico disso é o chamado Erro de D’Alembert, ou paradoxo de D’Alembert.

Deseja-se calcular a probabilidade de obter pelo menos uma cara no lançamento de duas moedas honestas. D’Alembert apresentou $\frac{2}{3}$ como solução para este problema, ao propor a seguinte resolução: ao lançar duas moedas, podemos obter (1) nenhuma cara, (2) exatamente uma cara ou (3) duas caras. Ou seja, em duas de três possibilidades obtemos pelo menos uma cara. Entretanto, D’Alembert cometeu um erro ao considerar o espaço amostral como equiprovável. A probabilidade de obter exatamente uma cara é duas vezes maior do que a probabilidade de obter duas caras, por exemplo. Logo, o espaço amostral não é equiprovável. A quantificação do espaço amostral pode ser observada na Figura 3.

Figura 3: Possibilidades para o lançamento de duas moedas.

$$c \rightarrow cara$$

$$k \rightarrow coroa$$

Possibilidade 1	kk	(1) nenhuma cara
Possibilidade 2	kc	(2) exatamente uma cara
Possibilidade 3	ck	(3) exatamente uma cara
Possibilidade 4	cc	(4) duas caras

Fonte: O autor (2024).

Portanto, a probabilidade de obter pelo menos uma cara no lançamento de duas moedas honestas é $\frac{3}{4}$.

Confusões com a ideia de equiprobabilidade acabam justificando, também, uma certa confusão entre os vocábulos possibilidade e probabilidade. Uma cena do seriado *Young Sheldon*[5] envolve um diálogo entre o Pastor Jeff e Sheldon Cooper, durante um sermão do pastor para a igreja, na qual ele profere as seguintes palavras:

[5] *Young Sheldon* é uma série de televisão com origem nos Estados Unidos, exibida pela emissora CBS. A cena mencionada está presente no 3° episódio da 1ª temporada.

> *Pastor Jeff*: Às vezes, as pessoas me dizem "pastor Jeff, como você sabe que Deus existe?"
>
> Eu digo que é uma matemática simples. Ou Deus existe ou não existe. Vamos ser cínicos, na pior das hipóteses, há uma chance[6] de 50%.

A esta colocação, o jovem Sheldon Cooper se pronuncia, adotando ele os seguintes argumentos:

> Sheldon Cooper: Você confundiu possibilidades com probabilidade. Segundo a sua analogia, quando eu for para casa, posso encontrar um milhão de dólares ou não. Onde isso é uma chance de 50%?

O que há de provocativo neste diálogo não são as crenças pessoais envolvidas, mas o fato de haver um confronto entre eventos que, evidentemente, não são equiprováveis. Os dois possíveis resultados não têm a mesma probabilidade de ocorrer e, portanto, a probabilidade para cada um deles não é de 50%.

A teoria das probabilidades continuou recebendo diversas contribuições, ampliando seus campos de aplicação até os dias atuais. Estabelecida a expansão da probabilidade nos últimos séculos, é natural que este tema figure entre os conteúdos ensinados na escola, fazendo parte do currículo. Mais do que isso, uma vez que "a probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza, em consequência, *os modelos probabilísticos são o fundamento da maior parte da teoria da estatística*" (Godino, Batanero, Castellanos, 1991, p. 11, tradução nossa, grifo dos autores), as pesquisas em educação probabilística estão indissociadas da educação estatística. Por esta razão, costumeiramente se utiliza a expressão educação estatística e probabilística.

As pesquisas em educação estatística e probabilística se tornaram indispensáveis, a fim de discutir sobre as dificuldades inerentes aos processos de ensino e aprendizagem da probabilidade, assim como os conhecimentos e habilidades mínimas nesta área. Para melhor compreendermos os desdobramentos do ensino e da aprendizagem da probabilidade, discutiremos alguns dos seus aspectos próprios, tais como os seus significados históricos (Batanero, 2005), o letramento probabilístico (Gal, 2005), alguns termos importantes e algumas perspectivas pedagógicas e curriculares do seu ensino e aprendizagem.

---

[6] O vocábulo chance é utilizado nessa cena, inadvertidamente, como sinônimo de probabilidade, o que não é verdade. Mais à frente, apresentaremos algumas discussões a esse respeito.

2.2 ALGUNS SÉCULOS DEPOIS: QUAIS AS CHANCES DE SE FALAR DA PROBABILIDADE NA ESCOLA?

Do ponto de vista do exercício social, há uma necessidade em compreender e interpretar diversos saberes do cotidiano, o que impulsiona o estudo da probabilidade desde o ensino fundamental (Samá, Silva, 2020). Batanero (2005) destaca uma tendência em renovar o ensino da probabilidade, tornando-a mais experimental. A literatura nos apresenta cinco significados para a probabilidade considerados com base na epistemologia desse conceito, a saber: intuitivo, clássico (ou laplaciano), frequentista (experimental), subjetivo e axiomático (Batanero, 2005).

O significado intuitivo da probabilidade envolve as primeiras ideias intuitivas sobre o acaso, surgindo em situações de aleatoriedade para expressar o grau de crença e quantificar eventos incertos pelo uso de expressões coloquiais (Batanero, 2005), tais como possível, impossível, provável, mais provável e menos provável. Mas o que é exatamente a intuição e o que a caracteriza?

A intuição é muito caracterizada por imediatismo e certeza. Estes atributos resultam, principalmente, da estabilização de padrões que são amplamente verificados pela nossa experiência (Fischbein, 1975). Se, com frequência, seu time vence a partida de futebol quando você joga com a chuteira verde (e perde quando você não a usa), em pouco tempo este padrão se estabiliza e é notado, por você e seus próximos, criando uma intuição de que é melhor colocar a chuteira verde da sorte antes de jogar, a ponto de ser hostilizado pelo time caso a esqueça.

A característica imediatista da intuição revela sua relação com a ação como uma ferramenta adaptativa (Fischbein, 1975). A intuição nos leva a agir, e agir rápido, e muitas vezes isso está ligado diretamente a nossa sobrevivência. Nossa intuição pode nos dizer para não atravessarmos um beco escuro à noite, pois é provável que sejamos assaltados ou violentados. A experiência nos ensinou isso.

Este imediatismo não implica em uma espontaneidade absoluta, mas na existência de mecanismos estabilizados pela experiência, assim como os advindos de padrões hereditários. As ações adquirem o caráter de intuição à medida que se automatizam e estabilizam, adquirindo uma velocidade e fluência necessárias para uma ação eficiente (Fischbein, 1975). A intuição poderia muito bem se chamar intuAÇÃO, na medida em que se constitui em um programa de ação (Fischbein, 1975).

> De acordo com a nossa hipótese, então, a qualidade essencial da intuição consiste no fato de que, através de suas características funcionais, ela mantém contato íntimo com a ação, e serve à ação por articulação direta com ela, atendendo de forma mais eficaz aos seus requisitos de continuidade, fluência e prontidão do que o raciocínio explícito poderia fazer (Fischbein, 1975, p. 7, tradução nossa).

Assim como as emoções, a origem e as propriedades das intuições estão intimamente ligadas à ação. De certa forma, as intuições estão, em diferentes graus, a depender da situação, revestidas de emoção. "A emoção é uma reação" (Possebon, 2017, p. 17). Uma reação, por sua vez “é a resposta a um estímulo, a uma ação provocada por um agente" (Possebon, 2017, p. 18). Logo, as emoções e a intuição se dirigem, ambas, à ação. Por esta razão são ambas imediatistas, pois do ponto de vista adaptativo, aprendemos que a ação tem que ser rápida e eficaz, para nos protegermos.

As intuições compõem processos cognitivos autônomos com singulares funções, importantíssimas, podendo anteceder às operações intelectuais, ocorrer durante estas operações (facilitando a sua continuidade) ou após elas (sintetizando os resultados numa visão global) (Fischbein, 1975). A intuição nos guia na tomada de decisões, na qual avaliamos probabilidades a partir do nosso grau de crença.

O significado clássico da probabilidade, por sua vez, consiste em associar a um evento de um experimento aleatório um número p $(0 \leq p \leq 1)$ que é “a proporção do número de casos favoráveis ao número de casos possíveis, sempre que todas os resultados sejam igualmente ‘prováveis’” (Godino, Batanero, Castellanos, 1991, p. 21, tradução nossa, grifo dos autores).

Seja E um conjunto com todas as possibilidades de ocorrência de um evento, contido em um conjunto S, o espaço amostral, conjunto com todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Se $n(E)$ e $n(S)$ são, respectivamente, o número de elementos dos conjuntos E e S, então a probabilidade de ocorrência do evento E é dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Essa definição foi dada por Laplace e é a partir dela que podemos afirmar que a probabilidade de obtermos cara no lançamento de uma moeda é $p = 0{,}5$, uma vez que este número indica a proporção do número de caras (uma) em relação ao total de casos possíveis (dois). Essa definição, entretanto, é bastante simples e, portanto, bem distante de uma definição rigorosa de probabilidade.

A expressão vista acima também é válida para grandezas contínuas, podendo estabelecer uma razão entre grandezas geométricas de mesmo tipo, como comprimentos, áreas ou volumes. Este caso especial do significado clássico da probabilidade é chamado de probabilidade geométrica.

Domingues (2023) traz o exemplo de um campeonato de arco e flecha em que o competidor deve acertar o alvo da Figura 4.

Figura 4: Probabilidade geométrica, o alvo da vez.

Fonte: Domingues (2023).

O espaço amostral S é toda a superfície do alvo e o evento E é, digamos, acertar o círculo amarelo. Pelo significado clássico da probabilidade, podemos fazer

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{75}{1875} = 0{,}04$$

Assim, pela razão entre as medidas das áreas, obtivemos que a probabilidade de acertar no círculo amarelo é de 4%.

O significado frequentista da probabilidade é uma visão que define a probabilidade como um número ao qual tende a frequência relativa ao estabilizar-se, assumindo que este limite exista (Batanero, 2005). Portanto, "se baseia na estabilidade das frequências relativas e no fato de podermos, hipoteticamente, repetir um experimento várias vezes" (Bussab, Morettin, 2002, p. 121). Assim, se

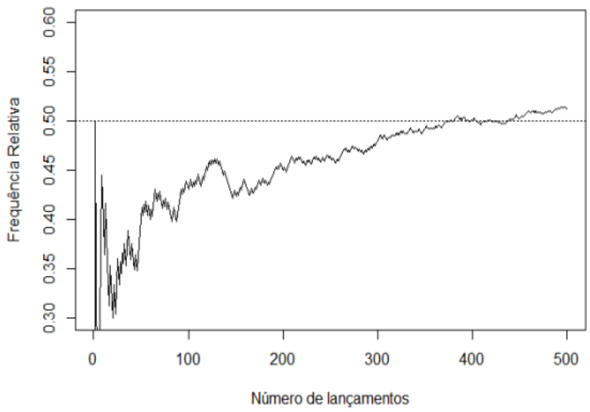
$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

é a frequência relativa do evento A em n repetições, quando $n \to \infty$, f_A "converge" para p (probabilidade teórica de ocorrer o evento A). A partir disso, podemos afirmar que a probabilidade de obtermos cara no lançamento de uma moeda é $p = 0{,}5$, uma vez que lançando uma moeda muitas vezes, a frequência relativa de caras "converge" para esse número.

A Figura 5 traz a plotagem da frequência relativa de caras na simulação computacional de 500 lançamentos de uma moeda honesta realizada em R. O R é uma linguagem de programação e ambiente para computação estatística. Dispõe de um software com “uma grande variedade de métodos estatísticos (modelagem linear e não-linear, testes estatísticos, modelos de séries temporais, classificação, métodos multivariados, etc.) e técnicas gráficas” (Ferreira, Oliveira, 2020, p. 19).

No resultado da simulação, é possível observar que “quanto mais o *n* (número de lançamentos) aumenta, mais a frequência relativa tende a se estabilizar em 50%” (Ferreira, Oliveira, 2020, p. 62).

Figura 5: Estabilização da frequência relativa de caras.



Fonte: Ferreira e Oliveira (2020).

Assim, dado que a probabilidade teórica p de obter a face ‘cara’ ao lançar uma moeda é $p = 0{,}5$, podemos dizer que a frequência relativa de resultados ‘cara’ se aproxima da probabilidade teórica quando o número de lançamentos da moeda cresce indefinidamente (tende ao infinito). Entretanto, não é possível estabelecer um valor mínimo de lançamentos que garanta que tenhamos sempre metade dos resultados igual a ‘cara’.

Meyer (1983) nos alerta ser este um fato empírico, não uma conclusão matemática. Para essa noção se tornar mais precisa, é necessária uma formulação mais rigorosa que não será explorada aqui. Todavia, uma roupagem mais formal para esta ideia pode ser consultada na definição a seguir, na qual a probabilidade é compreendida como um limite das frequências relativas:

> Dizer que a probabilidade de um acontecimento $\propto$, relativo a uma prova P, é um determinado número p, significa que, dado um número positivo ε, tão pequeno quanto se queira, existe sempre um número n bastante grande tal que, numa sequência de n ou mais realizações de P, é praticamente certo que a frequência relativa de $\propto$ estará compreendida entre $p - \varepsilon$ e $p + \varepsilon$ (Silva, 1975, p. 236).

O enfoque frequentista presente na definição do significado frequentista da probabilidade pode ser observado na Lei dos Grandes Números (o teorema dourado de Laplace), que pode ser razoavelmente bem definida da seguinte maneira:

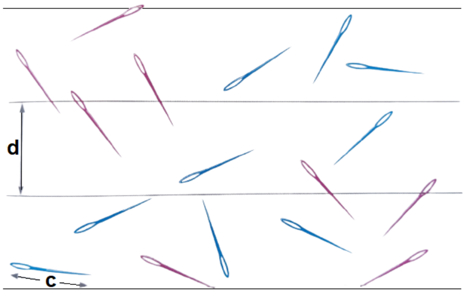
> se p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiências, se e é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $\left|\frac{m}{n} - p\right| < e$ esteja satisfeita, então $P = 1$ (Boyer, 1996, p. 289).

O famoso experimento da agulha de Buffon estabeleceu um foco frequentista para quantificação de probabilidades, à medida que proporcionou uma gênese formal da probabilidade geométrica por meio de um belíssimo experimento cuja cereja do bolo é nada mais, nada menos, do que uma estimativa para o número π.

George-Louis Leclerc, conhecido como conde de Buffon, foi um matemático francês do século XVIII. Buffon propôs o jogo *Franc Carreau*, no qual se lançava uma moeda em um piso com lajotas de qualquer formato, desde que todas as iguais. A brincadeira era acertar se, após o lançamento, ocorreria *Franc Carreau* (a moeda ficar totalmente no interior de uma única lajota) ou se a moeda ficaria no cruzamento entre os limites de duas lajotas diferentes (Queiroz, Coutinho, 2007).

Um outro experimento similar ao *Franc Carreau*, realizado em 1733 por Buffon, utilizava agulhas no lugar de moedas e feixes de retas paralelas no lugar das lajotas. Se uma agulha cair em meio a uma série de linhas paralelas equidistantes, o que se pode afirmar sobre a probabilidade de que ela cruze uma destas linhas? O experimento da agulha de Buffon, como ficou popularizado, foi um dos cálculos inaugurais de probabilidades (Warsi, 2020) e a utilização de elementos geométricos para este cálculo nos estudos de Buffon, configuram-no como pioneiro no desenvolvimento da probabilidade geométrica. No experimento com as agulhas, Buffon obteve uma aproximação para o número real π (pi). Ele deixou cair, muitas vezes, o máximo que conseguisse, uma agulha de comprimento c sobre uma série de retas paralelas equidistantes a uma distância d ($d \geq c$) (ver Figura 6).

Figura 6: Mais fácil do que encontrar agulha no palheiro.



Fonte: Warsi (2020).

Se a frequência relativa de vezes em que a agulha cruzou uma das linhas em relação ao total foi p, então p era uma aproximação para a probabilidade de a agulha cruzar uma das linhas (tão melhor quanto maior o número de tentativas), conforme o significado frequentista da probabilidade, e uma estimativa para π poderia ser dada por

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{c}{dp} = 2 \cdot \frac{comprimento\ da\ agulha}{distância\ entre\ as\ linhas} \cdot \frac{número\ total\ de\ tentativas}{número\ de\ agulhas\ que\ cruzam}$$

A demonstração para esta expressão envolve alguns cálculos geométricos e de integração e não será discutida neste trabalho.

Batanero (2005) pontua que, com o significado frequentista, não obtemos um valor exato para a probabilidade, apenas uma aproximação, e que é difícil saber com certeza qual o número mínimo de repetições de um experimento para aceitar a aproximação de probabilidade como boa. O significado frequentista, que envolve necessariamente a repetição do experimento aleatório sempre nas mesmas condições, não responde a situações nas quais pelo menos um desses elementos não possa ser cumprido (Dantas, 2008).

Quando um experimento não pode ser repetido nas mesmas condições que inicialmente foram realizadas, o significado frequentista encontra os seus limites (com a licença do trocadilho). Eventos que envolvem jogos esportivos, tais como o jogo de futebol entre as seleções do Brasil e da Argentina, ou que envolvem questões médicas, tais como a cura, ou não, de uma criança após uma cirurgia, são alguns dos casos trazidos por Eugênio (2020) para exemplificar o significativo subjetivo da probabilidade. Ainda que existam estatísticas completas sobre todos os jogos entre o Brasil e a Argentina, os times, comissão técnica, os campos, são diferentes. O experimento, portanto, não está se repetindo nas mesmas condições (Eugênio, 2020).

> o que caracteriza a subjetividade é porque ela se baseia em julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento e experiência. Por exemplo, médicos algumas vezes atribuem probabilidades subjetivas à expectativa de vida para pessoas com câncer. Previsão do tempo é outro exemplo de probabilidades subjetivas (Eugênio, 2020, p. 25-26).

O significado subjetivo da probabilidade “considera a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento” (Dantas, 2008, p. 26). O valor atribuído à probabilidade depende, portanto, de cada sujeito (por isso é subjetivo) (Dantas, 2008).

Ao abordar a probabilidade pelo seu significado subjetivo, podemos expressá-la ou quantificá-la numa perspectiva ora mais intuitiva (não confundir com o significado intuitivo da probabilidade) ora mais operacional (em especial, na trilha do bayesianismo, com os estudos do matemático Thomas Bayes sobre probabilidades condicionadas). Na tentativa de estabelecer o que viria a ser, de fato, o significado subjetivo da probabilidade, o primeiro instinto natural é o de identificar a maior interseccionalidade que existe com o significado intuitivo da probabilidade: a dependência do grau de crença do sujeito. As distinções, por sua vez, podem não surgir de imediato. Esta é a razão de nos apropriarmos de algumas ideias advindas da psicologia para distinguir estes dois significados, à medida que os definimos.

A psicologia define dois sistemas de pensamento, Sistema 1 e Sistema 2, conhecidos, respectivamente, como pensamento rápido e devagar. Mas eles são muito mais do que isso. O Sistema 1 é intuitivo e envolve operações automáticas (e rápidas), enquanto o Sistema 2 é associado a experiência subjetiva e envolve operações controladas (e lentas) (Kahneman, 2012).

O Sistema 1 nos permite realizar previsões intuitivas, que são automáticas e sem muito refinamento, fruto das nossas experiências. Entretanto, “previsões intuitivas precisam ser corrigidas porque não são regressivas e desse modo são parciais” (Kahneman, 2012, p. 241). Para tal, o Sistema 2, que também considera as experiências do sujeito, refina essas previsões a partir de novas informações, atualizando tais previsões à medida que elimina alguns vieses.

> As previsões intuitivas corrigidas eliminam esses vieses, de modo que as previsões (tanto altas como baixas) tem mais ou menos igual probabilidade de superestimar e de subestimar o verdadeiro valor. Você ainda comete erros quando suas previsões são imparciais, mas os erros são menores [...] (Kahneman, 2012, p. 241).

Assim, iremos associar o Sistema 1 ao pensamento intuitivo e, portanto, operador do significado intuitivo da probabilidade, à medida que ao Sistema 2 iremos associar o produto da experiência subjetiva (crenças + novas informações) e, portanto, operador do significado subjetivo da probabilidade. Podemos considerar a probabilidade subjetiva como a opinião quantificada (Kahneman, 2012), sendo tal consideração adotada, por exemplo, pela moderna teoria da decisão.

O significado subjetivo da probabilidade envolve a revisão e atualização de probabilidades resultantes de novos pontos de vista. Descreve o grau de crença baseado no conhecimento e na experiência subjetiva. Assim, a probabilidade de um evento incerto pode ser diferente para diferentes pessoas (Batanero, 2005).

Por exemplo, ao precisar atravessar uma ponte de madeira velha e desgastada, o Sistema 1, por meio especialmente do nosso repertório emocional, faz-nos sentir medo (emoção) e automaticamente aciona nossa intuição de que há um risco alto em passar por ali. Concebemos intuitivamente uma probabilidade para o evento da ponte cair.

O Sistema 2 passa a operar com essa intuição e, a partir dos conhecimentos e experiências do sujeito, toma uma decisão: alguém que já tenha visto uma ponte dessas cair pode atribuir uma probabilidade maior para a recorrência e decidir não passar, enquanto uma pessoa que nunca tenha tido essa experiência atribua uma probabilidade menor para a queda e decida passar. Essa concepção subjetiva da probabilidade está presente no nosso cotidiano com grande frequência.

Há uma forte influência dos estudos de Bayes sobre o significado subjetivo da probabilidade, constituindo as ferramentas matemáticas operacionais para atualização de probabilidades subjetivamente (citamos a probabilidade condicional e os teoremas da probabilidade total e de Bayes como algumas dessas ferramentas). Uma vez que “A Inferência Bayesiana [...] toma como uma de suas bases o fato de que todas as probabilidades são subjetivas” (Bussab, Morettin, 2002, p. 121), ela costuma aparecer associada ao significado subjetivo da probabilidade.

Mas, quando, exatamente, uma probabilidade é condicionada? Quando uma nova informação é capaz de modificar esta probabilidade. Por exemplo, “A probabilidade de contrair câncer caso você seja fumante é condicionada” (Dancey, 2006, p. 110), uma vez que a informação “ser fumante” altera a probabilidade de contrair câncer. O conhecimento de probabilidade condicionada, aliás, é muito necessário para a pesquisa em psicologia (Dancey, 2006).

O Jogo de Palitinhos, ou apenas palitinho ou purrinha, é uma brincadeira muito popular entre amigos, com relatos de variações vindas desde a Roma do século IV d.C. e que figuram, até hoje, nos botecos brasileiros. É “jogado com número ilimitado de jogadores, em que cada um deles possui de zero a três palitinhos e arrisca um palpite. O ganhador é aquele que acerta a soma dos palitinhos de todos os participantes” (Lima, 2015, p. 1).

Este jogo é pura probabilidade condicional. Consideremos dois jogadores: a soma pode ser qualquer número de 0 a 6, em um espaço amostral não-equiprovável, conforme a Figura 7.

Figura 7: Espaço amostral do Jogo de Palitinhos.

			3+0			
		2+0	2+1	3+1		
	1+0	1+1	1+2	2+2	3+2	
0+0	0+1	0+2	0+3	1+3	2+3	3+3
Soma 0	**Soma 1**	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**

Fonte: Vasconcelos e Rocha (2023).

Seja o evento $A = \{Obter\ soma\ 0\}$, a probabilidade $P(A)$ de ocorrência deste evento é $1/16\ = 6{,}25\%$. Entretanto, se um dos participantes tem pelo menos um palitinho na mão, para este participante, esta informação $B = \{Possuo\ pelo\ menos\ um\ palitinho\ na\ mão\}$ altera a probabilidade de a soma ser 0, que passa a ser nula (se ele tem pelo menos um palitinho, é impossível a soma resultar em 0). Ou seja, o sujeito conhece B e passa a ter opinião $P(B)$ sobre A. Assim, a probabilidade de obter a soma 0 caso você tenha pelo menos um palitinho na mão é condicionada: a probabilidade de A, dado que ocorreu $B,$ é zero.

$$P(B) = 0.$$

Neste jogo, a informação de quantos palitinhos se tem na própria mão sempre condicionará as probabilidades de obtenção de cada soma.

A probabilidade pode, também, ser compreendida axiomaticamente, quando definida a partir de um conjunto de propriedades. De um ponto de vista formal e axiomático, “a probabilidade é um objeto que satisfaz determinados axiomas, obtendo os resultados teóricos mediante deduções lógicas” (Godino, Batanero, Castellanos, 1991, p. 19, tradução nossa). No significado axiomático da probabilidade, a probabilidade é vista como um modelo matemático constituído sobre um conjunto de axiomas a partir dos quais toda a teoria pode ser desenvolvida e utilizada para descrever e interpretar a realidade dos fenômenos aleatórios (Batanero, 2005).

No século XX, o russo Andrei Nicolaevich Kolmogorov estabeleceu alguns dos principais fundamentos axiomáticos para a teoria das probabilidades. Se por um lado a análise clássica, como tema da Matemática, dedicava-se às funções contínuas, os problemas da probabilidade costumavam se interessar pelos casos envolvendo medidas discretas. Alguns dos mais notáveis avanços da Matemática, a exemplo das extensões do conceito de integração, foram o ponto de virada para o casamento entre a análise com a probabilidade (Boyer, 1996).

Um filho deste casamento é a definição que segue, na qual a probabilidade é estabelecida sobre um conjunto sólido de axiomas, assumindo, assim, um novo significado.

Dizemos que P é uma função que a cada conjunto A associa um número real que se chama Probabilidade de A e se representa por $P(A)$. Esta função satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 1 – A probabilidade de qualquer acontecimento, independente de qual seja o conjunto A, sempre é maior ou igual a zero (não-negativa).

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 2 – A probabilidade do acontecimento certo S, sempre é 1.

$$P(S) = 1$$

Axioma 3 – Dados dois conjuntos A e B disjuntos, a probabilidade de ocorrer A ou B, ou seja, da sua união, sempre é igual à soma das probabilidades de cada um destes eventos.

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

É possível verificar que o Axioma 3 também inclui os casos com mais de dois conjuntos mutuamente exclusivos. Uma versão expandida do Axioma 3, que inclui o caso de S não ser finito, é

Axioma 3* – Se $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são conjuntos disjuntos dois a dois, então

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Estes são os três axiomas para a probabilidade de Kolmogorov (Martins, 2015), que estabelecem a base do significado axiomático da probabilidade. As probabilidades clássica, frequentista e subjetiva satisfazem os três axiomas de Kolmogorov. Vamos verificar esse fato para a probabilidade frequentista:

Seja $f(A)$ a frequência relativa de um evento A. É de fácil conclusão que:

1) $f(A) \geq 0$;

2) Se A é um evento certo, este evento ocorrerá todas as vezes e, portanto, $f(A) = 1$.
3) Se A e B são dois eventos disjuntos, a frequência relativa acumulada de A e B é dada pela frequência da união destes eventos, ou seja,

$$A \cap B = \emptyset \to f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

Logo, de fato, a probabilidade frequentista satisfaz os três axiomas de Kolmogorov.

A partir do exposto, compreendemos que a probabilidade possui, acima de tudo, uma importante função social, uma vez que “está entrelaçada em uma ampla gama de situações do mundo real e processos de forma implícita e explícita” (Gal, 2005, p. 63, tradução nossa). Ainda que o estudante consiga operacionalizar situações que envolvam todos os significados da probabilidade, quais os tipos de conhecimento ele precisa ter para atuar crítica e ativamente na sociedade? Gal (2005) aponta um modelo de letramento probabilístico, sintetizado no Quadro 4, que traz algumas respostas para este questionamento.

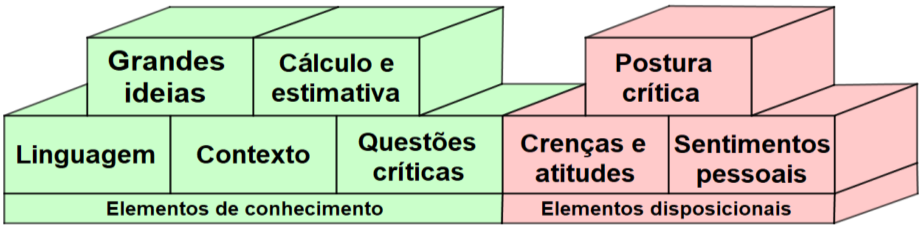
Quadro 4: Modelo de letramento probabilístico de Gal.

Elementos de conhecimento	**Elementos disposicionais**
Grandes ideias Cálculo e estimativa Linguagem Contexto Questões críticas	Postura crítica Crenças e atitudes Sentimentos pessoais
Letramento Probabilístico	

Fonte: Baseado em Gal (2005).

Gal (2005) construiu esse modelo propondo dois grandes blocos de conhecimentos mínimos necessários para que um cidadão esteja alfabetizado probabilisticamente: elementos de conhecimento e elementos disposicionais (ver Figura 8).

Figura 8: Elementos constituintes do letramento probabilístico.



Fonte: Baseado em Gal (2005).

Grandes Ideias é um elemento que envolve o conhecimento e a mobilização de noções probabilísticas gerais, tais como variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza. O conhecimento destas ideias é fundamental para entender, interpretar e comunicar adequadamente informações sobre o acaso.

Cálculo e estimativa é um elemento relacionado com estimar, atribuir e calcular probabilidades. Está particularmente presente aqui os significados clássico, frequentista e subjetivo da probabilidade, quando empregados para expressar uma probabilidade em termos de números reais, seja calculando-a (ou aproximando-a) por métodos matemáticos e por experimentos, seja por atribuições subjetivas baseadas em crenças pessoais.

Linguagem é um elemento que inclui vocábulos, termos e expressões da língua materna que são utilizados, e como são utilizados, para comunicar sobre o acaso. Podemos citar, por exemplo, termos que são tratados como sinônimos, mas que não possuem o mesmo significado e como o emprego da gramática pode alterar o significado de uma mensagem.

O vocábulo chance costuma ser utilizado como sinônimo para oportunidade (“você poderia me dar mais uma chance?”) e para a probabilidade. Embora seja correto afirmar que quanto maior a chance de sucesso de um evento maior será a probabilidade de ocorrência deste evento, não é verdade que estes vocábulos sejam sinônimos. A probabilidade expressa uma expectativa de sucesso de um evento contido em um universo de possibilidades, podendo ser quantificada e expressa por um número real p. Para cada expectativa de sucesso há uma consequente expectativa de fracasso que é, também, uma probabilidade. Se a probabilidade de sucesso é p, então a probabilidade de fracasso é $(1-p)$, como visto nos ensaios de Bernoulli.

A chance, por sua vez, estabelece uma comparação entre estas duas expectativas, de sucesso e de fracasso do evento, podendo ser expressa por uma razão c, tal que

$$c = \frac{p}{1-p}$$

Ao lançar um dado honesto de 4 faces, a probabilidade de obter a face com 1 ponto é uma expectativa de obter essa face em relação ao total de possibilidades, ou seja, $\frac{1}{4}$, "um *em* quatro", 25%. Segue, portanto, que a probabilidade de fracasso (não obter a face com 1 ponto), será $\frac{3}{4}$, "três *em* quatro", 75%. A chance de obter a face com 1 ponto ao lançar um dado honesto de 4 faces, entretanto, expressa a expectativa de sucesso relativa à expectativa de fracasso, ou seja, uma razão entre as probabilidades de sucesso e fracasso, dada por

$$c = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$$

ou seja, "um *para* três".

Em termos práticos, essa razão nos informa que a probabilidade de fracasso é o triplo da probabilidade de sucesso, mas não informa estas probabilidades em si. Razões que expressam chance são mais comuns em apostas do que razões que expressam probabilidade. Isso ocorre porque a chance é uma razão que compara explicitamente as possibilidades de vitória e perda, o que é muito útil para quem aposta. A chance de vitória de "um *para* quatro" descreve em uma linguagem explícita que há uma possibilidade de vitória *para* cada quatro possibilidades de perda, informação que não se dá de maneira tão explícita na probabilidade de vitória de 20% (que é a mesma coisa).

Note o uso das preposições *em* e *para* ao comunicar esses resultados e como elas modificam completamente o significado da informação. É um exemplo de como o bom uso da gramática pode atuar em favor da probabilidade, à medida que o seu mau uso pode comprometê-la. Para comunicar circunstâncias de natureza aleatória, adotam-se termos e jargões próprios. Escolher inadvertidamente estes termos pode comprometer a compreensão da mensagem que se deseja comunicar e até a veracidade dela. Além do exemplo das preposições (em, para etc.), temos adjetivos (possível, previsível, factível, viável etc.), advérbios (pouca, muito, grande etc.), numerais (dois, cinco, um quarto etc.) e demais classes gramaticais empregadas na constituição de uma linguagem probabilística própria para comunicar, mas, se mal-empregada, para confundir ou enganar. Por exemplo, "Os enunciados: <<choverá amanhã>>, <<provavelmente choverá amanhã>>, descrevem a mesma realidade. A diferença está no modo de afirmação: o primeiro é categórico, incondicional e o segundo é gradual e cauteloso” (Godino, Batanero, Castellanos, 1991, p. 20, tradução nossa).

Contexto é um elemento que versa sobre a compreensão e a aplicação das questões probabilísticas nos mais variados contextos (sociais, culturais, econômicos etc.) e discursos (pessoais e públicos). Trata da importância de empregar as grandes ideias conhecidas, os cálculos e as estimativas realizados e a linguagem empregada quanto ferramentas para inferir sobre contextos reais.

Questões críticas, por sua vez, é um elemento também de natureza fundamentalmente social, porém mais interessado na reflexão e ação crítica frente às situações que lidam com a probabilidade nos variados contextos. Aqui não basta compreender e aplicar, é necessário também agir criticamente e com responsabilidade diante das demandas sociais, como os preconceitos e as desigualdades.

Os elementos disposicionais (*Postura crítica*, *Crenças e atitudes* e *Sentimentos pessoais*) envolvem as mudanças nas relações intrapessoais e interpessoais que se operam por meio do conhecimento probabilístico. É o conhecimento que se opera *a partir das* e *para as* relações.

Conclui-se, assim, que para uma boa formação em probabilidade, é imprescindível que os estudantes tenham a oportunidade de operar com todos os significados da probabilidade (intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático) e mobilizar todos os elementos do modelo de letramento probabilístico (elementos de conhecimento e elementos disposicionais), de maneira articulada (relacionando os significados da probabilidade entre si, os elementos do letramento probabilístico entre si e os significados da probabilidade com os elementos do letramento probabilístico) e espiralada (em todos os anos escolares da Educação Básica). Tal perspectiva é adotada neste trabalho. Entretanto, o recorte aqui realizado está interessado em estudar com mais profundidade o significado frequentista da probabilidade.

O ensino e a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade são fruto de, entre outras coisas, a história do desenvolvimento desta área, as dimensões epistemológicas, históricas e sociais apontadas por pesquisadores e as prerrogativas do próprio sistema de ensino adotado. Por esta razão que diferentes países adotam diferentes posicionamentos sobre o que, e como, ensinar probabilidade. No Brasil, os documentos curriculares nacionais em vigência (como, por exemplo, os PCN e a

BNCC) são fundamentais para compreender o panorama do ensino e da aprendizagem da probabilidade, pois são a fonte sobre a qual emergem os currículos estaduais e municipais, estabelecendo as diretrizes para a elaboração de material didático e programas de diversos processos seletivos do país.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que a Matemática também estuda "a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório" (Brasil, 2018, p. 265) e não apenas fenômenos determinísticos. A BNCC enumera um conjunto de ideias fundamentais dos campos que compõem a Matemática, entre as quais é citada a "variação". A BNCC propõe cinco Unidades Temáticas, sendo uma delas a "Probabilidade e estatística", que envolve a incerteza e o tratamento dos dados. Destaca as situações-problema da vida cotidiana e a tomada de decisões adequadas como impulsionadoras para os conhecimentos desta Unidade Temática, assim como sugere o uso de tecnologias, como as planilhas eletrônicas (Brasil, 2018).

Para a etapa do Ensino Fundamental, o principal objetivo das noções de probabilidade nos anos iniciais "é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos" (Brasil, 2018, p. 274).

> No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou *simulações*, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos (BRASIL, 2018, p. 528, grifo nosso).

A BNCC reforça a importância em desenvolver a noção de aleatoriedade, de que há eventos certos, impossíveis e prováveis, complementando que "é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu" (Brasil, 2018, p. 274), em total consonância com as posições de Taleb (2021) e Kahneman (2012) sobre o acaso.

Ainda para a etapa do Ensino Fundamental, o principal objetivo das noções de probabilidade nos anos finais é ampliar e aprofundar as ideias discutidas nos anos iniciais, realizando experimentos envolvendo fenômenos aleatórios e simulações, estabelecendo um explícito destaque a probabilidade frequentista. A BNCC associa a probabilidade, também, aos problemas de contagem, em especial para enumeração dos elementos do espaço amostral (Brasil, 2018).

Uma vez que a BNCC é construída com foco no desenvolvimento de competências, ela estabelece 10 Competências Gerais da Educação Básica. Para cada área do conhecimento (a Matemática é uma das áreas do conhecimento), são propostas competências específicas de área. A área de Matemática (cujo único componente curricular é a própria Matemática) possui 8 Competências Específicas para a etapa do Ensino Fundamental e 5 Competências Específicas para a etapa do Ensino Médio. O Quadro 5 descreve todas as habilidades de Matemática do Ensino Fundamental que estão relacionadas com a aprendizagem da probabilidade.

Quadro 5: Habilidades da BNCC correlatas à probabilidade no Ensino Fundamental.

Código da habilidade	Série	Objetos de conhecimento	Descrição
(EF01MA20)	1° ano	Noção de acaso	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
(EF02MA21)	2° ano	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
(EF03MA25)	3° ano	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
(EF04MA26)	4° ano	Análise de chances de eventos aleatórios	Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
(EF05MA22)	5° ano	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
(EF05MA23)	5° ano	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
(EF06MA30)	6° ano	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
(EF07MA34)	7° ano	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Continua

Código da habilidade	Série	Objetos de conhecimento	Descrição
(EF08MA22)	8° ano	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
(EF09MA20)	9° ano	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Brasil (2018).

Como visto, “para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades” (Brasil, 2018, p. 28). No Ensino Fundamental, as habilidades são dispostas de maneira seriada (do 1° ao 9° ano). No Ensino Fundamental, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico que indica a etapa, o ano, o componente curricular e a numeração sequencial do ano. Por exemplo, EF01MA20 indica a habilidade (20) de Matemática (MA) do 1° ano (01) do Ensino Fundamental (EF) (Brasil, 2018).

Para a etapa do Ensino Médio, a BNCC sugere a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas na etapa do Ensino Fundamental. Cita o uso de noções probabilísticas, entre outras, para interpretar, construir modelos, resolver e elaborar problemas, no âmbito da Competência Específica 3 de Matemática para o Ensino Médio (Brasil, 2018). O Quadro 6 descreve todas as habilidades de Matemática do Ensino Médio que estão relacionadas com a aprendizagem da probabilidade.

Quadro 6: Habilidades da BNCC correlatas à probabilidade no Ensino Médio.

Código da habilidade	Descrição
(EM13MAT310)	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT312)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Brasil (2018).

No Ensino Médio, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico que indica que a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio (código 13), a área ou componente curricular, a competência específica a qual a habilidade está relacionada e a numeração sequencial na competência. Por exemplo, EM13MAT310 indica a 10a habilidade (10) da Competência Específica 3 (3) da área de Matemática (MAT) no Ensino Médio (EM), podendo ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio (13). (Brasil, 2018).

Portanto, é imperativo discutir o ensino e a aprendizagem da probabilidade também com professores na formação inicial e continuada (Carvalho, 2017) para melhores abordagens junto à Educação Básica. Schereiber e Porciúncula (2021) identificaram nas narrativas de um grupo com 18 professoras e professores o discurso coletivo “incompreensões dos discentes e estratégias pedagógica para o ensino dos conceitos estatísticos”, que descreve alguns relatos destes docentes sobre lacunas e dificuldades na estatística e probabilidade. No que tange a probabilidade, procedimentalmente, foram citadas dificuldades no cálculo com frações e fatoriais, assim como a necessidade de conhecimentos prévios em análise combinatória, como elementos que dificultam a aprendizagem em probabilidade pelos estudantes. Didaticamente, transversal a esse discurso coletivo, há uma narrativa de que o docente não conseguir entender qual a dificuldade da probabilidade nesse nível (conceitos introdutórios de estatística e probabilística) complicam as tentativas de tentar ajudar o estudante.

Numa pesquisa com 19 profissionais que ensinam matemática, Pinheiro, Silva e Pietropaolo (2018) identificaram a manifestação, predominante, de conhecimentos intuitivos pelos professores, mas pouco aprofundamento no domínio de conhecimentos explícitos ligados à probabilidade. Tal observação está alinhada com o observado em Campos e Pietropaolo (2013), que verificaram que os docentes tinham pouco conhecimento de conteúdo especializado e que guardavam uma compreensão de ensino da probabilidade, principalmente, como a razão entre dois números inteiros positivos. Estas pesquisas apontam para a importância de cursos de formação inicial e continuada que conduzam a uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem de noções probabilísticas e das dificuldades dos estudantes, inclusive desde as fases iniciais de escolarização (Campos, Pietropaolo, 2013; Pinheiro, Silva, Pietropaolo, 2020).

Diante do vasto campo de atuação da probabilidade, com seus muitos significados, desenvolvemos uma proposta com foco na construção do significado frequentista da probabilidade, utilizando como ponto de partida uma corrida que, a princípio, pode parecer comum, mas na verdade é uma corrida bem... maluca.

2.3 CORRIDA MALUCA

A corrida de cavalos com dois dados é um jogo clássico, muito popular em estudos sobre a probabilidade. Lançam-se dois dados e calcula-se a soma da pontuação obtida nos dois para determinar qual cavalo (cuja numeração é esta soma) se moveria um espaço a frente. O processo se repete até que um dos cavalos percorre o comprimento total da trilha e cruze a linha de chegada. Uma trilha de comprimento 2 indica que o cavalo vencedor precisa se mover exatamente 2 espaços a frente, uma trilha de comprimento 3 indica que o cavalo vencedor precisa se mover exatamente 3 espaços a frente, e assim por diante.

Foster e Martin (2016) estudaram a corrida de cavalos com dois dados de 6 faces e cavalos numerados de 1 a 12, o modelo mais clássico do jogo. Com este jogo, espera-se que o estudante perceba, entre outras coisas, que o cavalo 1 nunca sairia da partida, que os cavalos de 2 a 12 não possuem a mesma probabilidade de vencer e que o cavalo 7 tem a vitória mais provável (Foster, Martin, 2016). Embora seja possível notar, até intuitivamente, que o cavalo 7 tem a vitória mais provável, como isso pode ser demonstrado? Qual a chance de um determinado cavalo vencer e como o comprimento da trilha afeta nisso? (Foster, Martin, 2016)

Apenas com os 11 cavalos que podem vencer, mesmo para uma trilha de comprimento 2, calcular a probabilidade de qualquer cavalo em particular é muito complicado, pois temos que considerar o que todos os outros cavalos estão fazendo. Foster e Martin (2016) implementaram uma simulação computacional que rodou a corrida de cavalos 1 milhão de vezes para diferentes comprimentos da trilha e repetiram algumas vezes até que obtiveram resultados consistentes com três casas decimais (Ver Tabela 1).

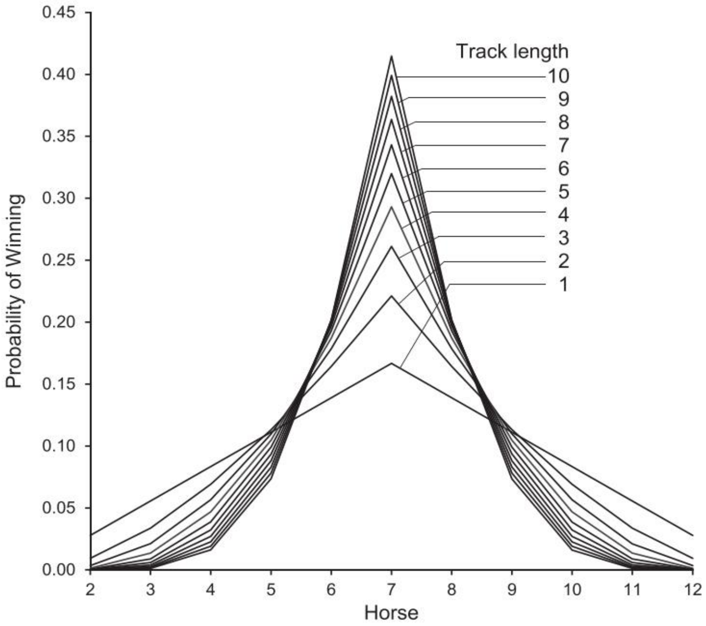
Tabela 1: A probabilidade (correta com três casas decimais) de cada cavalo vencer corridas de diferentes comprimentos de trilha.

	Track length									
Horse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.028	0.009	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.056	0.034	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
4	0.083	0.069	0.057	0.047	0.039	0.032	0.027	0.023	0.019	0.016
5	0.111	0.113	0.110	0.105	0.099	0.093	0.088	0.083	0.078	0.074
6	0.139	0.164	0.179	0.187	0.193	0.197	0.199	0.201	0.201	0.202
7	0.167	0.221	0.261	0.293	0.320	0.343	0.363	0.382	0.399	0.415
8	0.139	0.164	0.179	0.187	0.193	0.197	0.199	0.201	0.201	0.202
9	0.111	0.113	0.110	0.105	0.099	0.094	0.088	0.083	0.078	0.074
10	0.083	0.069	0.057	0.047	0.039	0.032	0.027	0.023	0.019	0.016
11	0.056	0.034	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
12	0.028	0.009	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Fonte: Foster e Martin (2016).

Já sabíamos da vantagem do cavalo 7, mas esta vantagem aumenta consideravelmente com o aumento do comprimento da trilha, conforme podemos notar na Tabela 1 e na Figura 9.

Figura 9: Probabilidade de vitória de cada cavalo para trilhas com comprimento de 1 a 10.



Fonte: Foster e Martin (2016).

Devido às dificuldades em mensurar as probabilidades de vitória de cada cavalo, mesmo para corridas com comprimento da trilha igual a 2, Foster e Martin (2016) apontam que usar este jogo apenas para ilustrar os resultados de um único lançamento de dois dados pode ser inútil. O argumento é coerente e sólido, exatamente por este motivo o apresentamos aqui, e você pode assumir tal posição. Todavia, enxergamos na ludicidade do jogo razões suficientes para a manutenção da sua aplicação em sala de aula, ainda que não nos debrucemos sobre mais do que uma corrida de comprimento da trilha igual a 1 (um único lançamento do par de dados), desde que se diferencie explicitamente a diferença entre a probabilidade de obter cada uma das somas e a probabilidade de vitória de cada cavalo (valor que varia com o comprimento da trilha).

Nesta pesquisa, utilizamos uma variação do jogo corrida de cavalos com dois dados, mas desta vez utilizando dados tetraédricos (com 4 faces) e cavalos numerados de 1 a 9. O jogo serviu como motivação inicial para o estudo de um experimento aleatório envolvendo a soma dos resultados no lançamento de dois dados tetraédricos. A simulação computacional foi realizada no aplicativo para *smartphones* Suíte GeoGebra, inserida no modelo teórico das Orquestrações Instrumentais. O próximo capítulo é um quadro sobre o qual será possível acompanhar a feitura do desenho desta proposta para discutir o significado frequentista da probabilidade na Educação Básica.

3 UMA EXCURSÃO PELOS FUNDAMENTOS DO CONCERTO: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ORQUESTRA E OS INSTRUMENTOS

O tratamento matemático dado ao significado frequentista da probabilidade envolve ideias intimamente relacionadas com a experimentação. Neste capítulo, uma discussão sobre a abordagem computacional que pode ser dada a essas experimentações pretende justificar o desenho proposto nesta pesquisa que agrega, de maneira indispensável, o modelo de Orquestração Instrumental (Trouche, 2005).

Por esta razão, apresentam-se as principais características deste modelo, empregado neste trabalho pelo seu potencial em proporcionar uma gestão eficiente e harmônica dos sujeitos e instrumentos envolvidos em um processo de ensino e aprendizagem. Uma vez que o artefato central da proposta que será apresentada é o GeoGebra, abordam-se neste capítulo alguns dos seus principais elementos.

3.1 ABORDAGEM COMPUTACIONAL: POR ONDE É POSSÍVEL IR AINDA MAIS LONGE

A experimentação é importante, como um todo, na aprendizagem da Matemática (Brasil, 2018), mas é imprescindível ao lidar com o significado frequentista da probabilidade, devido à natureza empírica inerente da sua própria definição. Esta experimentação se dá por meio de simulações, que podem ser manuais (lançar uma moeda repetidas vezes) ou computacionais (utilizar programas de computador para reproduzir o lançamento de uma moeda repetidas vezes). As simulações manuais são muito interessantes, mas possuem de imediato a limitação no número plausível de repetições possíveis de se realizar. Neste sentido, as simulações computacionais oferecem significativos avanços, visto que “a disponibilidade de computadores faz mais do que agilizar certas tarefas repetitivas, mas cria a possibilidade de resolvermos problemas de maneira diferente do que poderíamos sem eles” (Barichello, 2021, p. 3).

Com isso, “estudos de simulação tentam reproduzir num ambiente controlado o que se passa com um problema real” (Bussab, Morettin, 2022, p. 231), constituindo uma “relação simbiótica entre matemática e computadores" (Warsi, 2020, p. 17), o que demanda a construção de um novo tipo de pensamento: o pensamento computacional.

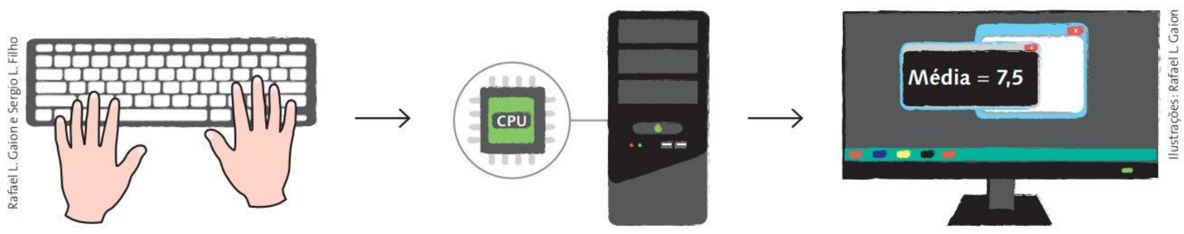
Assim, as simulações computacionais contribuem, também, com o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento computacional, que são aquelas “envolvidas no processo de resolver problemas de maneira que um computador seja capaz de realizar essa solução” (Barichello, 2021, p. 3). A BNCC reforça que as aprendizagens em probabilidade e estatística “podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos” (Brasil, 2018, p. 271).

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma (Brasil, 2018, p. 271).

Em processos, “um algoritmo representa uma sequência finita de passos estruturados para resolver um determinado problema ou automatizar uma tarefa. Geralmente, algoritmos contêm pontos de decisão e de repetição” (Andrade, 2020, p. 125). Uma das principais características de um algoritmo é a decomposição, ou seja, tomar um problema mais amplo e o decompor em partes menores que são mais fáceis de executar. Um algoritmo precisa de três partes: entrada, processamento e saída de dados (ver Figura 10).

Figura 10: Partes de um algoritmo.

ENTRADA →	PROCESSAMENTO →	SAÍDA
As informações necessárias para executar o algoritmo entram por meio de dispositivos de entrada (teclado, mouse, câmera, escâner, microfone, leitor de código de barras, joystick e monitores touch-screen etc).	São avaliadas as expressões algébricas, de relação e lógicas, assim como as estruturas de condição e de repetição.	Os resultados do processamento são enviados para o usuário por meio de um dispositivo de saída (monitores, impressoras e caixas de som etc.).



Fonte: Andrade (2020, p. 125) (adaptado).

Para ser executado, um algoritmo necessita de uma linguagem de programação. “Uma linguagem de programação é um conjunto de regras sintáticas e semânticas utilizadas para transformar um algoritmo em um programa de computador” (Andrade, 2020). Assim, por meio da linguagem de programação, um algoritmo é compilado e compreendido pela máquina.

Um diagrama muito popular para registro visual de algoritmos é o fluxograma. “Os fluxogramas são uma maneira de representar algoritmos que fazem uso de um arranjo visual para deixar claro o fluxo, ou seja, a sequência em que comandos devem ser realizados” (Barichello, 2023, p. 9). Neste arranjo visual, a forma de cada símbolo indica uma função específica dentro do algoritmo (ver Quadro 7).

Quadro 7: Principais símbolos usados na elaboração de fluxogramas.

Símbolo	**Função**
Início/Fim	Indica o início e o fim do fluxograma.
Dados	Indica a entrada (input) e a saída (output) de dados.
Processo	Indica a execução/processamento de uma operação.
Decisão	Uma pergunta é realizada para que a resposta (“Sim” ou “Não”) determine a sequência do fluxo.
→	Setas são usadas para conectar os passos do fluxograma indicando o fluxo da solução do problema.

Fonte: Vieira Júnior (2021) (adaptado).

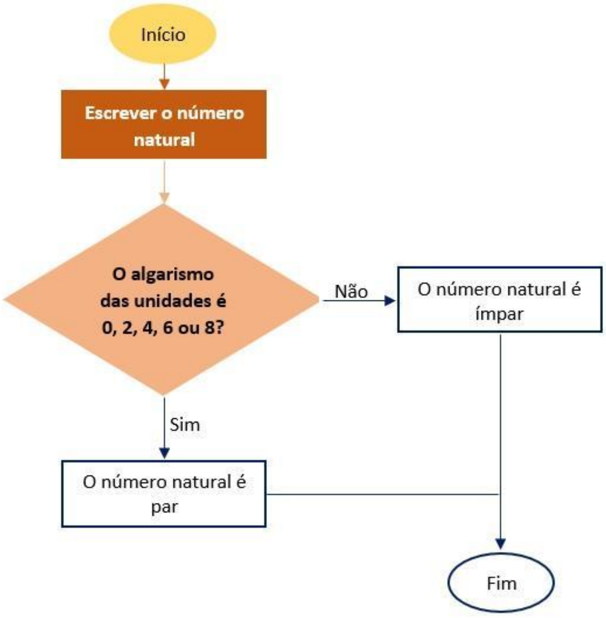
O fluxo (a ordem correta de execução das partes do algoritmo) é indicado por meio de setas (ver Figura 11).

Figura 11: Representação do fluxo entre duas etapas em um fluxograma.

Fonte: Silva (2020).

O fluxograma a seguir apresenta um algoritmo para a determinação da paridade de um número natural (ver Figura 12).

Figura 12: Fluxograma para determinar a paridade de um número natural.



Fonte: Vasconcelos (2022).

Note o sentido do fluxo indicado pelas setas e a forma de cada figura indicando a sua função: a elipse para indicar as terminações (início e Fim), o losango para uma decisão (O algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6, ou 8?) e o retângulo para um processo de uma operação (O número natural é ímpar ou O número natural é par).

Um complemento à BNCC foi aprovado pelo Parecer CNE/CEB nº 2/2022, com normas específicas sobre Computação na Educação Básica (Brasil, 2022). Este complemento dispões de competências e habilidades sugeridas para cada etapa da Educação Básica no que tange ao pensamento computacional. Para o Ensino Médio, são 7 competências sugeridas, que podem ser consultadas a seguir:

> 1. Compreender as possibilidades e os limites da Computação para resolver problemas, tanto em termos de viabilidade quanto de eficiência, propondo e analisando soluções computacionais para diversos domínios do conhecimento, considerando diferentes aspectos.
>
> 2. Analisar criticamente artefatos computacionais, sendo capaz de identificar as vulnerabilidades dos ambientes e das soluções computacionais buscando garantir a integridade, privacidade, sigilo e segurança das informações.
>
> 3. Analisar situações do mundo contemporâneo, selecionando técnicas computacionais apropriadas para a solução de problemas.
>
> 4. Construir conhecimento usando técnicas e tecnologias computacionais, produzindo conteúdos e artefatos de forma criativa, com respeito às questões éticas e legais, que proporcionem experiências para si e os demais.
>
> 5. Desenvolver projetos para investigar desafios do mundo contemporâneo, construir soluções e tomar decisões éticas, democráticas e socialmente responsáveis, articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprias da Computação preferencialmente de maneira colaborativa.

> 6. Expressar e partilhar informações, ideias, sentimentos e soluções computacionais utilizando diferentes plataformas, ferramentas, linguagens e tecnologias da Computação de forma fluente, criativa, crítica, significativa, reflexiva e ética.
>
> 7. Agir pessoal e coletivamente com respeito, autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, identificando e reconhecendo seus direitos e deveres, recorrendo aos conhecimentos da Computação e suas tecnologias frente às questões de diferentes naturezas (Brasil, 2022, p. 61).

Vários elementos destas competências são contemplados na proposta da pesquisa, tais como a compreensão sobre as possibilidades e os limites da Computação na resolução de problemas que, associada a uma análise crítica de artefatos computacionais, permite selecionar técnicas computacionais apropriadas para este fim. Há também a construção de conhecimento usando técnicas e tecnologias computacionais, no caso, construção do significado frequentista da probabilidade.

A fim de propiciar aos estudantes oportunidades para investigar empiricamente o conceito de probabilidade frequentista, já existem algumas ferramentas capazes de simular computacionalmente números pseudoaleatórios (NPA). São chamados de pseudoaleatórios por serem “obtidos por meio de técnicas que usam relações matemáticas recursivas *determinísticas*. Logo, um NPA gerado numa iteração dependerá do número gerado na iteração anterior e, portanto, não será realmente aleatório” (Bussab, Morettin, 2002, p. 233, grifo dos autores). A ciência da computação ainda não resolveu o problema de gerar números que sejam verdadeiramente aleatórios. Entretanto, o uso dos NPA é o suficiente para simular situações reais.

Podemos por meio de uma simulação computacional gerar NPA ao mesmo tempo em que calculamos as frequências relativas de um determinado subconjunto de resultados e observar estas frequências relativas se estabilizarem em torno de uma probabilidade. Para isso, podemos utilizar, entre outras possibilidades, os pacotes estatísticos Minitab e Splus, a planilha Excel (Bussab, Morettin, 2002) e a linguagem R, obtendo diferentes formas de representação para os resultados[7]. Uma boa possibilidade para as simulações é o uso do Portugol. O Portugol é uma linguagem de programação criada especificamente para objetivos didáticos, com todos os

[7] A aula Probabilidades: simulação de experimentos, da professora Flávia Landim, veiculada em janeiro de 2022 no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), do IMPA, apresenta o uso do R para gerar NPA e discutir o significado frequentista da probabilidade. A aula está disponível no *Youtube* pelo link https://youtu.be/73dOQe4EIbo.

comandos criados em português (o que contribui para facilitar a compreensão dos estudantes nas construções dos algoritmos).

Seja a seguinte situação: Nala possui quatro capas para o seu celular, todas com o mesmo design e formato, distinguindo-se apenas pelas suas cores: preto, azul, vermelho e salmão. Ela as guarda numa sacola de veludo que as protege de atritos. Todos os dias ela utiliza uma das capas, mas a escolha é aleatória: com as quatro capas na sacola, ela escolhe uma ao acaso, sem ver, e utiliza durante o dia inteiro.

Podemos realizar uma simulação computacional para esta situação, com a finalidade de obter as frequências relativas de retirada de cada uma das capas e observar para qual valor elas se aproximam quando o número de repetições aumenta.

A Figura 13 apresenta um algoritmo escrito em Portugol para esta situação e o resultado da simulação para 10, 100, 1 000 e 10 000 repetições.

Figura 13: Simulação com algoritmo escrito em Portugol.

```
programa
{
    funcao inicio ()
    {
    inteiro cor, n, i, n1, n2, n3, n4
    real f1, f2, f3, f4
escreva ("Quantas repetições você deseja? \n")
leia (n)
i = 1
n1 = 0
n2 = 0
n3 = 0
n4 = 0
enquanto (i <= n) {
    cor = sorteia(1,4)
    se (cor == 1) {
        n1 = n1+1
    }
    se (cor == 2) {
        n2 = n2+1
    }
    se (cor == 3) {
        n3 = n3+1
    }
    se (cor == 4) {
        n4 = n4+1
    }
i = i + 1
}
f1 = (n1 * 100) / n
f2 = (n2 * 100) / n
f3 = (n3 * 100) / n
f4 = (n4 * 100) / n
escreva ("                    Frequência",
"\nCor          absoluta      ",
"relativa",
"\nPreto          ", n1, "            ", f1,"%",
"\nAzul           ", n2, "            ", f2, "%",
"\nVermelho       ", n3, "            ", f3, "%",
"\nSalmão         ", n4, "            ", f4, "%")
    }
}
```

```
Quantas repetições você deseja?
10
                Frequência
Cor          absoluta      relativa
Preto           4           40.0%
Azul            2           20.0%
Vermelho        2           20.0%
Salmão          2           20.0%

Programa finalizado. Tempo de execução:5157 mili
```

```
Quantas repetições você deseja?
100
                Frequência
Cor          absoluta      relativa
Preto           25           25.0%
Azul            19           19.0%
Vermelho        30           30.0%
Salmão          26           26.0%

Programa finalizado. Tempo de execução:2729 mili
```

```
Quantas repetições você deseja?
1000
                Frequência
Cor          absoluta      relativa
Preto           252           25.0%
Azul            254           25.0%
Vermelho        230           23.0%
Salmão          264           26.0%

Programa finalizado. Tempo de execução:3389 mili
```

```
Quantas repetições você deseja?
10000
                Frequência
Cor          absoluta      relativa
Preto           2509           25.0%
Azul            2547           25.0%
Vermelho        2499           24.0%
Salmão          2445           24.0%

Programa finalizado. Tempo de execução:5351 mili
```

Fonte: O autor (2024).

Note cada frequência relativa “convergindo” para 25%, probabilidade esperada teoricamente para a retirada de cada uma das cores. Imagina realizar esta mesma simulação manualmente? Retirar uma capa de uma sacola de veludo manualmente é interessante, mas não é prático para 1 000 ou 10 000 vezes. Entretanto, é preciso valores com estas magnitudes para observarmos melhor o comportamento das frequências relativas e qual valor elas estão estimando.

O presente trabalho propõe discutir o significado frequentista da probabilidade por meio de experimentações com simulações computacionais. Mas como um artefato digital pode se tornar um instrumento de aprendizagem? Que tipos de esquemas estão envolvidos neste processo? Como planejar um método de ensino e aprendizagem que maximize a gestão destes elementos? O tópico seguinte apresentará o modelo de Orquestração Instrumental como uma possibilidade para isso.

3.2 $\boldsymbol{D^3}$: DISPOSIÇÕES X DECISÕES X DESEMPENHO

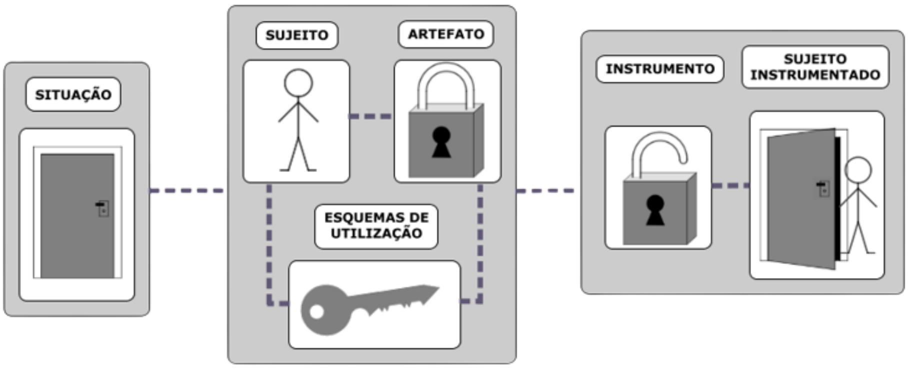
Diversas teorias da aprendizagem consideram os esquemas de ação do indivíduo. Vergnaud (1990) define esquema como “a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações” (p. 136, tradução nossa). Há um conjunto de competências que o sujeito já possui no seu gabarito de ação para resolver uma situação, sendo os esquemas os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito frente a classes de situações que os estudantes não possuem (ainda) todas as habilidades para resolver (Vergnaud, 1990).

Diante de uma situação, o sujeito integra artefatos (sejam eles materiais ou simbólicos) aos esquemas, compondo assim os esquemas de utilização do artefato. Neste processo, em que o artefato é empregado na resolução de uma situação por intermédio de esquemas de utilização, tal artefato é instrumentalizado e, portanto, configura-se como instrumento (Rabardel, 1995). Diz-se que se tem agora um sujeito instrumentado, em condições de utilizar aquele instrumento com a finalidade elaborada para a situação.

“O instrumento é uma entidade mista” (Rabardel, 1995, p. 64, tradução nossa), incluindo o artefato, os esquemas de utilização deste artefato e as representações utilizadas pelo sujeito instrumentado e que são necessárias ao uso do artefato. Por meio do instrumento, o sujeito instrumentado é capaz de resolver a situação e construir significados. A esse processo de instrumentação, dá-se o nome de gênese instrumental.

Observe o seguinte exemplo: um sujeito precisa desenhar uma linha reta (situação) e não dispõe de uma régua, mas possui um lápis (artefato material). Assim, ele cria esquemas de utilização para o lápis, instrumentalizando o lápis como uma régua. A partir deste momento, o artefato lápis torna-se instrumento para construir linhas retas e o sujeito instrumentado passa a utilizar o lápis com este fim. Ocorreu uma gênese instrumental (ver Figura 14).

Figura 14: Gênese instrumental.



Fonte: Baseado em Rabardel (1995).

Os esquemas são as “chaves” que destravam os artefatos, tornando-os instrumentos que permitem ao sujeito “abrir as portas” para a solução da situação. A singularidade dos sujeitos impõe uma interessante particularização para todo este processo: dois sujeitos distintos não destravam o mesmo artefato da mesma maneira e, portanto, não são instrumentados igualmente e não obtêm exatamente os mesmos instrumentos.

Sujeito, esquemas e artefatos são uma simbiose indispensável à resolução dos problemas propostos em uma situação. A chave não tem uso sem o cadeado e o cadeado não se instrumentaliza sem a chave. Com a chave correta, o cadeado se torna instrumento. E com a porta aberta, muitas possibilidades surgem (inclusive, fechá-la novamente, quando necessário).

Para evitar perda de instrumentação e melhor controlar os esquemas de ação instrumentados e as organizações didáticas que auxiliem a gênese instrumental, Trouche (2005) propôs um modelo de Orquestração Instrumental (OI), uma disposição sistemática dos elementos (artefatos e humanos) de um ambiente com a intenção de, por meio da implantação de uma situação, orientar os estudantes na sua gênese instrumental (Trouche, 2005). Uma OI é constituída de um objetivo próprio e uma situação disparadora. Para compor a OI, Trouche (2005) propõe dois elementos: a configuração didática (disposição de artefatos e sujeitos em um ambiente de aprendizagem) e o modo de execução (decisões, a priori, de como a configuração didática será explorada).

A configuração didática detalha como estarão dispostos todos os elementos da OI, indicando a disposição dos sujeitos e dos artefatos durante a sua execução, tanto geograficamente (onde estará posicionado cada sujeito e artefato) quanto em uma sequência de ações bem definida e detalhada. Dentre estas disposições, são consideradas a gestão dos recursos humanos (como se darão as ações de cada sujeito em cada momento), dos artefatos (como e para que cada artefato será utilizado), do tempo (o tempo previsto para cada ação) e dos afetos.

Para a configuração didática, inclinamo-nos a considerar, explicitamente, a gestão dos afetos, uma vez que a aprendizagem é determinada, também, pelas variáveis afetivas (emoção, sentimento e humor), podendo ser potencializada ou limitada pela boa ou má gestão dessas variáveis (Casassus, 2009; Possebon, 2017; Vasconcelos, 2020). A gestão dos afetos se preocupa com "atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao resultado e às opiniões dos colegas" (Brasil, 2018, p. 530), em consonância, inclusive, com as orientações dadas pela BNCC.

O modo de execução indica, a priori, como a configuração didática será explorada. É construído antes da execução da OI e apresenta as decisões do maestro (professor e professora) quanto a mobilização de todos os elementos previstos na configuração didática. Claro, durante a execução da OI, podem (e provavelmente vão) ocorrer alguns imprevistos e variações quanto ao modo de execução planejado.

Drijvers *et al.* (2010) integraram um terceiro elemento à OI, a performance didática (desempenho da OI, refletido a posteriori), uma vez que se "uma OI é parcialmente preparada de antemão e parcialmente no local durante o ensino, sentimos a necessidade de adicionar a performance didática real como um terceiro componente" (Drijvers *et al.*, 2020, n.p). As decisões *ad hoc* do professor são fundamentais nestes momentos, uma vez que "emergem para dar conta das situações imprevistas, e que são tomadas para atender uma necessidade momentânea, a fim de não comprometer o todo já estruturado" (Lucena, 2018, p. 49). As decisões *ad hoc* do professor são parte fundamental da performance didática de uma OI, pois oportunizam um olhar para os imprevistos ocorridos durante a sua execução, inclusive para eventuais ajustes na OI, a posteriori.

Assim, a tríade disposição – decisões – desempenho $\left(D^3\right)$, observada numa OI, permite lidar melhor com ambientes tecnológicos complexos que aumentam a dificuldade de coordenar registros e controlar percepções. Em alguns casos, mais de uma OI pode ser executada, em conjunto, com uma finalidade mais global. Surge assim a composição de orquestrações instrumentais, na qual duas ou mais OI são elaboradas em um único grupo. Em uma composição de orquestrações instrumentais, as OI podem ser sequenciadas (uma após a outra), sejam sequenciadas imediatas (uma ocorrendo imediatamente após a outra) ou sequenciadas com intervalo entre elas (uma ocorrendo horas ou dias após a outra). Podem ser também encaixadas e simultâneas (uma contida na outra).

O presente trabalho propõe uma composição de orquestrações instrumentais para discutir o significado frequentista da probabilidade. O artefato central desta composição é o GeoGebra. A fim de proporcionar uma maior familiaridade com este ambiente, o tópico seguinte apresentará algumas das principais características, elementos e funções do GeoGebra.

3.3 PARA ALÉM DA *GEO*(METRIA) E DA (ÁL)*GEBRA*: O GEOGEBRA A FAVOR DA PROBABILIDADE

Uma das primeiras formas de se referir à probabilidade, historicamente, foi como "a geometria do acaso", expressão utilizada por Pascal (em especial por, entre outras razões, seu trabalho com o triângulo aritmético). Embora, hoje, a expressão "a matemática do acaso" seja mais apropriada (Queiroz, Coutinho, 2007), é inegável que a geometria esteve ligada à probabilidade desde as suas primeiras formulações formais. Assim, apropriar-se do GeoGebra, desenvolvido a princípio para lidar principalmente com tópicos da Geometria (*Geo*) e da Álgebra (*Gebra*), para discutir tópicos da probabilidade, torna-se ainda mais significativo.

A BNCC destaca "a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional" (Brasil, 2018, p. 528), sugerindo o uso de *softwares* de geometria dinâmica e de *smartphones*, ainda que majoritariamente inseridos na Unidade Temática de Geometria. Um exemplo de *software* de geometria dinâmica é o GeoGebra, mas ele não é apenas isso.

O GeoGebra é um ambiente de matemática dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado em 2001. Este ambiente inclui, hoje, *softwares* para computador e aplicativos para *smartphones* e *tablets*, com versões *online* que dispensam o download. Inclui também o site geogebra.org que compõe uma vasta rede de recursos para a sala de aula, com aplicativos matemáticos, materiais didáticos com mais de 1 milhão de atividades, simulações, exercícios, aulas e jogos, todos disponíveis gratuitamente. O GeoGebra Classroom também é uma realidade, no qual atividades podem ser realizadas dinamicamente e em tempo real, por meio de ferramentas matemáticas interativas[8].

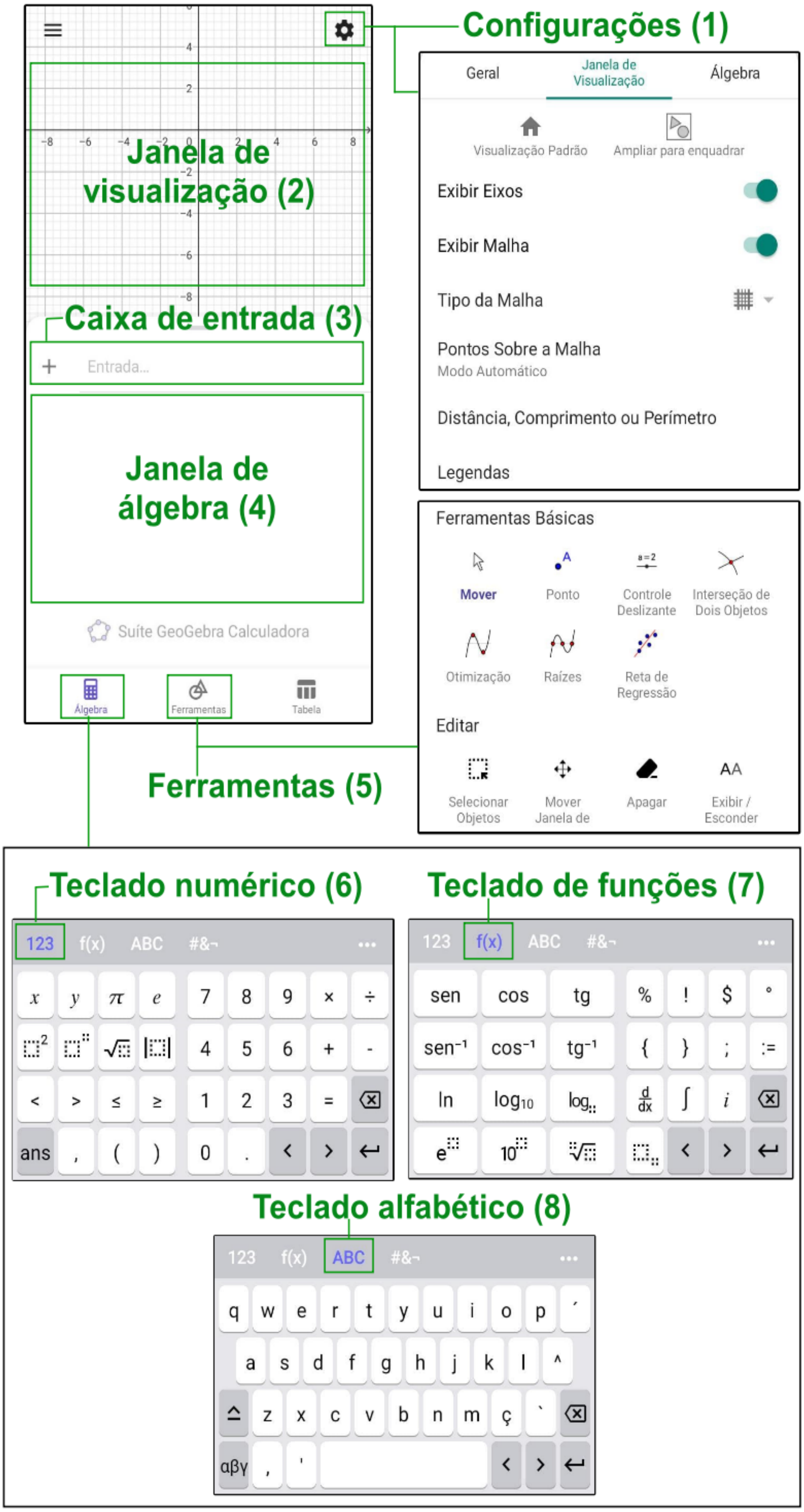
Para a realização de atividades *offline*, há a possibilidade de baixar alguma das versões do aplicativo GeoGebra, gratuitas e disponíveis para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. As versões para dispositivos móveis (*smartphones* e *tablets*) estão disponíveis para *download* na App Store e no Google Play e são de fácil manipulação, possuem um *layout* agradável e lúdico e funcionam offline. Existem vários aplicativos do GeoGebra disponíveis para dispositivos móveis (Calculadora Gráfica, Geometria, CAS Calculator, Scientific Calculator e Suíte). Neste trabalho, optamos por utilizar o aplicativo Suíte GeoGebra, cujas funcionalidades estão mais alinhadas com os nossos interesses.

Na Figura 15 é possível conhecer um pouco da interface do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis. Ao clicar no símbolo da engrenagem no lado superior direito, abrimos a caixa de Configurações (1), na qual é possível optar por exibir ou não os eixos e as malhas na Janela de visualização, escolher o tipo de malha empregada (como aplicar uma malha polar, por exemplo), escolher com quantas casas decimais representar os números decimais etc. A Janela de visualização (2) é uma região composta por um plano cartesiano ortogonal onde são visualizadas as representações geométricas das construções realizadas.

A Caixa de entrada (3) é um local no qual é possível digitar informações utilizando três tipos de teclado: o Teclado numérico (6), que dispõe dos algarismos e de algumas das principais operações matemáticas que podem ser necessárias; o Teclado de funções (7), que dispõe uma variedade de entradas para funções (trigonométricas, logarítmicas e exponenciais), além de ferramentas algébricas para porcentagens, fatorial e derivadas, entre outros; e o Teclado alfabético (8), que dispõe

[8] Disponível em: https://www.geogebra.org/.

Figura 15: Interface do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis.



Fonte: O autor (2024).

de letras do alfabeto latino e grego, com as quais é possível digitar comandos do GeoGebra. Há também outro teclado com algumas ferramentas algébricas adicionais. Para acessar os teclados, é necessário clicar no ícone Álgebra, no lado inferior esquerdo. A Janela de álgebra (4) é uma região onde são visualizados todos os comandos digitados na Caixa de Entrada (3), representações algébricas das construções realizadas.

Ao clicar no ícone Ferramentas (5), no lado inferior, centro, abrimos a caixa de Ferramentas Básicas, que dispõe de um conjunto de ferramentas geométricas. Estas ferramentas incluem, entre outras coisas, a criação de pontos, de controles deslizantes (ferramenta que permite variar dinamicamente uma variável real), de retas e círculos. É possível verificar que o GeoGebra dispõe de múltiplos comandos e ferramentas que podem ser direcionados ao ensino e aprendizagem da probabilidade, assim como um layout agradável e ferramentas de fácil manipulação.

Bettin, Pretto e Leivas (2021) realizaram um levantamento bibliográfico das publicações no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), verificando que são muito poucas as produções que abordem o GeoGebra e a gênese instrumental, e ainda as que abordam esse par o fazem apenas utilizando a versão do GeoGebra para computadores, reforçando a necessidade de abordar o objeto de estudo do presente trabalho ainda mais em novas pesquisas.

Portanto, com o objetivo de investigar as contribuições e limitações do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis, inserido numa composição de orquestrações instrumentais, como instrumento para a aprendizagem da probabilidade frequentista, construímos e executamos uma composição de orquestrações instrumentais que se realizou com um grupo de quatro estudantes do Ensino Médio de uma escola do agreste pernambucano. O próximo capítulo descreve a metodologia do trabalho, com o desenho desta composição e a descrição de como serão analisados os dados constituídos durante a sua execução.

4 METODOLOGIA

Apresentamos neste capítulo a sequência de procedimentos executados na realização da pesquisa, discutindo sobre os critérios de recrutamento dos participantes, as estratégias para transcrição dos dados constituídos e organização em episódios interativos, o método de análise dos dados empregado, a análise microgenética e as considerações éticas da pesquisa.

4.1 O RECRUTAMENTO DO QUARTETO FANTÁSTICO

A pesquisa foi realizada na Educação Básica, em uma Escola de Referência em Ensino Médio de uma cidade do agreste do estado de Pernambuco. A escolha por esse tipo de escola se deu pelo fato de os alunos estudarem em tempo integral, o que possibilitou um tempo maior para a constituição dos dados.

Os participantes desse estudo foram quatro estudantes dessa escola, todos voluntários. O número de quatro estudantes foi escolhido por se mostrar uma quantidade razoavelmente ideal para realizar uma análise minuciosa dos dados constituídos, que dispensa uma quantidade maior de participantes, mas não o detalhamento das observações (em especial por adotarmos, nesta pesquisa, os pressupostos da análise microgenética, que serão explorados no tópico 4.4). O estudante precisava estar matriculado na escola em que foi realizada a pesquisa, possuir *smartphone* e se voluntariar para poder participar do estudo

Caso um número maior de estudantes se interessasse em participar da pesquisa e cumprisse os critérios de participação, novos grupos seriam formados para a aplicação, mas sempre de até 4 estudantes, mas apenas um desses grupos teria o seu material analisado para este trabalho. Todavia, isto não foi necessário, visto que um grupo com quatro estudantes foi sugerido por uma professora de Matemática da escola. Ela apresentou a proposta para os seus estudantes e após os quatro primeiros se apresentarem interessados, parece ter ficado estabelecido que o limite havia sido atingido e mais ninguém demonstrou interesse (ver Quadro 8). Os quatro estudantes selecionados foram três meninos (um do 2° ano e dois de turmas distintas do 3° ano) e uma menina (de uma turma distinta do 3° ano). Ou seja, nenhum dos quatro estudava na mesma turma.

Quadro 8: Recrutamento dos participantes.

Etapa	**Finalidade**	**Tempo previsto**	**Tipo de interação**	**Forma de registro**	**Data**
a)	Apresentar a pesquisa aos estudantes da escola e identificar os voluntários.	20 min	Em grupo	-	Primeira semana maio/2023
b)	Selecionar quatro voluntários como participantes	10 min	Em grupo	-	

Fonte: Os autores (2024).

A fim de manter o anonimato dos participantes, na busca pelos nomes fictícios, optamos por homenagear o célebre grupo de super-heróis *Quarteto Fantástico*, da Marvel Comics, que já possuiu várias configurações, mas a clássica é constituída por três homens e uma mulher, assim como os nossos participantes. São eles Reed Richards (O senhor fantástico), Sue Storm (A mulher invisível), Johnny Storm (O Tocha humana) e Ben Grimm (O Coisa) (ver Figura 16).

Figura 16: O quarteto fantástico.

Fonte: Guia dos quadrinhos (2024)[9].

[9] Disponível em http://www.guiadosquadrinhos.com/personagem/quarteto-fantastico/13. Acesso em: 13 jan. 2024.

Logo, nossos participantes respondem nessa pesquisa por Reed, Sue, Johnny e Ben.

4.2 PASSOS PARA A CONSTITUIÇÃO E O REGISTRO DOS DADOS

A pesquisa foi realizada no mês de maio do ano de 2023, após a aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa, conforme especificações dadas no Quadro 9, com o cronograma que indica todas as etapas que compuseram a constituição dos dados, por meio de uma composição de seis orquestrações instrumentais (OI_1, OI_2, OI_P, OI_3, OI_4 e OI_5), na qual OI_P é a Orquestração Instrumental *Pivot* (a OI central).

Quadro 9: Recrutamento dos participantes → Execução da composição de orquestrações instrumentais.

Etapa	**Finalidade**	**Tempo previsto**	**Tipo de interação**	**Forma de registro**	**Data**
a)	Apresentar a pesquisa aos estudantes da escola e identificar os voluntários.	20 min	Em grupo	-	Primeira semana maio/2023
b)	Selecionar quatro voluntários como participantes	10 min	Em grupo	-	
c)	Executar a OI_1	20 min	Individual	-	Segunda semana maio/2023
d)	Executar a OI_2	40 min	Em grupo	-	
e)	Executar a OI_P	2h 30min	Individual / Em grupo	Gravação em vídeo e da tela do celular	Terceira semana maio/2023
f)	Executar a OI_3	1h	Em grupo	Gravação em vídeo e da tela do celular	
g)	Executar a OI_4	30 min	Em grupo	-	Quarta semana maio/2023
h)	Executar a OI_5	30 min	Individual	-	

Fonte: Os autores (2024).

Para o registro dos dados, os participantes comunicaram as principais informações de interesse para a pesquisa por meio de suas falas/percepções oralizadas (durante as OI_P e OI_3), da escrita (durantes todas as OI) e das construções, e não-construções, realizadas no aplicativo GeoGebra (durante as OI_P e OI_3). As configurações didáticas e modos de execução de todas as OI estão descritos no capítulo 5.

Todas as etapas foram presenciais. As gravações em vídeo nas etapas e) e f) foram um registro videográfico do ambiente da sala de aula, realizado por um Notebook. As gravações da tela do celular dos estudantes nas etapas e) e f) foram realizadas por meio de aplicativos de celular específicos. Os estudantes que possuem celular com sistema operacional android fizeram o *download* do aplicativo Gravador de tela – Xrecorder e os estudantes que possuem celular com sistema operacional iOs fizeram o *download* do aplicativo Gravador de tela – V Recorder. Ambos os aplicativos são gratuitos para *download*.

Por meio das gravações em vídeo realizadas nas etapas e) e f) (OI_P e OI_3) avaliamos a instrumentação ocorrida quanto ao sujeito, ou seja, se temos um *estudante instrumentado* pelo GeoGebra (caso em que conseguiu utilizar as ferramentas e comandos do aplicativo para atribuir significados aos objetos e conceitos trabalhados) ou se temos um *estudante não instrumentado* pelo GeoGebra (caso em que não conseguiu utilizar as ferramentas e comandos do aplicativo para atribuir significados aos objetos e conceitos trabalhados), a fim de alcançar o objetivo específico 1, de mapear a gênese instrumental de um grupo de estudantes quanto ao uso do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade.

Por meio das respostas escritas nas atividades aplicadas durante todas as OI, e das gravações em vídeo realizadas nas etapas e) e f), pretendemos reconhecer se ocorreram mudanças/transições nos significados atribuídos à probabilidade, reconhecendo se estes significados foram submetidos a uma *evolução* (quando forem corrigidos conceitualmente, parcial ou totalmente, e/ou forem aprofundados), por *preservação* (quando não se verificar nenhuma mudança na atribuição de significados) ou por *involução* (quando percepções corretas tornarem-se incorretas ou quando os erros conceituais já apresentados forem aprofundados), a fim de alcançar o objetivo específico 2, de analisar o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade durante a execução de uma composição de orquestrações instrumentais.

Por meio das gravações em vídeo realizadas nas etapas e) e f) (OI_P e OI_3) iremos identificar quais elementos do aplicativo GeoGebra, quanto à aprendizagem do significado frequentista da probabilidade, foram *facilitadores* (facilitaram ou contribuíram para a compreensão dos significados desejados), *dificultadores* (dificultaram ou atrapalharam a compreensão dos significados desejados) ou *limitantes* (não dificultaram a compreensão, mas limitaram o participante no seu processo de construção dos significados), a fim de alcançar o objetivo específico 3, de classificar os elementos do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis que facilitaram, dificultaram ou limitaram o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade. Uma síntese das categorias utilizadas está esquematizada no Quadro 10.

Quadro 10: Categorização dos dados.

Objeto específico	Categorias preliminares	Técnicas e instrumentos
Mapear a gênese instrumental de um grupo de estudantes quanto ao uso do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis como instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade;	Categorizar o estudante como... 1. Instrumentando. 2. Não instrumentado.	Coleta do material escrito pelos estudantes e gravação em vídeo.
Analisar o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade durante a execução de uma composição de orquestrações instrumentais;	Caracterizar se a compreensão do estudante passou por uma... 1. Evolução. 2. Preservação. 3. Involução.	Coleta do material escrito pelos estudantes e gravação em vídeo.
Classificar os elementos do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis que facilitaram, dificultaram ou limitaram o progresso da construção do significado frequentista da probabilidade.	Identificar quais elementos do aplicativo GeoGebra foram... 1. Facilitadores. 2. Dificultadores. 3. Limitantes.	Gravação em vídeo.

Fonte: Os autores (2024).

Assim, a fim de responder ao problema de pesquisa, alinhados com o perfil e o escopo deste trabalho, podemos caracterizar essa pesquisa como tendo uma abordagem qualitativa, uma vez que o interesse reside em aprofundar a compreensão sobre o objeto da pesquisa, não na representatividade numérica do grupo pesquisado. Quanto a sua finalidade, ela é aplicada, devido ao seu caráter prático. Quanto aos objetivos, ela está no nível exploratório.

4.3 ESTRATÉGIAS DE TRANSCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE

Após a transcrição de todos os dados construídos (nos registros escritos e nas gravações em vídeo, do ambiente e das telas dos *smartphones*), estes foram organizados em turnos. Os turnos são falas (verbais ou não) e as construções advindas das interações estudante/estudante (intersubjetivas e intrassubjetivas), estudante/professor e estudante/artefato, registradas em vídeo, áudio ou por escrito, que apontam para uma postura diante do objeto de estudo.

Uma interação verbal é muito mais ampla do que a mera conversação entre duas ou mais pessoas. Há interação verbal, por exemplo, de um sujeito consigo mesmo (intrassubjetiva), quando ele está formulando ou reformulando ideias por meio dos próprios pensamentos e formalizando-as por escrito. Alguns estudantes podem ficar mais calados nas interações verbais orais e oferecer uma vasta contribuição nos registros por escrito (como é o caso de um dos participantes dessa pesquisa). Cada indivíduo tem sua própria personalidade e é importante que isso seja respeitado para que o melhor de cada um possa ser aproveitado. Por esta razão, não hierarquizamos neste trabalho os tipos de interação verbal, sejam orais ou escritas, sejam texto, imagem, tabela ou gráfico.

Os turnos, por sua vez, foram organizados em segmentos. Um agrupamento de turnos é um segmento. Um segmento é marcado por indícios de mudança de significado, tais como primeiras percepções, avanços ou retrocessos. Um conjunto de segmentos, enfim, compõe um episódio. O episódio indica um fechamento mais bem marcado na trilha da aprendizagem, no qual conquistas são consolidadas diante do objeto de estudo.

A seguir, está apresentado um modelo geral de como serão organizados cada um dos episódios (ver Figura 17).

Figura 17: Modelo geral dos episódios.

Episódio X

Segmento Y

#título do Segmento Y

Turnos [a – c]

[a] Professor – [...] #os turnos são numerados sequencialmente entre colchetes. Indicam, após a numeração sequencial, quem o elaborou e, em seguida, o que está sendo expresso.

[b] Reed – [...]

[c] Sue – [...]

Fechamento do Episódio X

#últimos considerações sobre o Episódio

Fonte: O autor (2024).

Não há, entre os turnos, uma explícita diferenciação entre aqueles advindos do registro escrito que os estudantes fizeram das suas próprias ideias e aqueles advindos das falas registradas em áudio. Nas respostas por escrito, os participantes foram orientados a, caso errassem, realizar um tachado (risco traçando uma linha no meio da palavra ou da expressão) no que desejassem excluir e após isso seguissem com a sua resposta definitiva. Esta marcação se manteve na transcrição e na apresentação dos turnos.

Nas falas registradas em áudio, as pausas são representadas com reticências. Inserções realizadas no interior dos turnos, não ditas pelo sujeito, mas com caráter explicativo, são feitas entre colchetes, assim como a numeração sequencial dos turnos. Os parênteses, quando presentes, foram inseridos pelos próprios estudantes em respostas escritas. Toda a transcrição respeitou rigorosamente a forma com que os participantes colocaram as suas falas (escritas ou orais), mantendo, inclusive, os vícios de linguagem e eventuais erros gramaticais.

Após a transcrição e organização, analisamos os dados constituídos, no que foi possível contemplar os objetivos elencados e responder ao problema de pesquisa. Para isso, iremos realizar uma microanálise interpretativa destes dados, fundamentada na análise microgenética, que será mais bem detalhada no tópico seguinte.

4.4 MÉTODO ANALÍTICO

A psicologia histórico-cultural, fundamentada nos estudos de Vygotsky, compreende que o gatilho da aprendizagem é a motivação com a atenção dirigida, e isso ocorre desde quando a criança brinca pela primeira vez, disparando a gênese do pensamento abstrato, ao instrumentalizar objetos atribuindo novos significados a eles (fazer de um cabo de vassoura um cavalo, por exemplo). O significado passa a subordinar tanto o objeto quanto à ação.

Isto pode ser observado em uma simulação computacional, como a que iremos realizar. Com o tempo, não se enxergam mais números sorteados, cálculos e gráficos. Enxergam-se significados. O estudante instrumentaliza o artefato na brincadeira da aprendizagem, construindo novos significados para o que obtêm. Este é o nosso objetivo, e há muitas possibilidades para isso. A análise microgenética funciona como uma lente para ver estas possibilidades.

A composição de orquestrações instrumentais provocou essas ondas de verbalização que demonstram a postura dos estudantes diante dos objetos e das mudanças dos significados. Uma análise microgenética estuda as mudanças dos estados de consciência e os indícios dessa aprendizagem.

A análise microgenética está interessada em compreender o domínio microgenético do desenvolvimento cognitivo. Tal análise leva em consideração a formação de processos psicológicos no curso de alguns minutos ou segundos, tendo a videografia, “registro em vídeo de atividades humanas” (Meira, 1994, p. 61) e transcrições como ferramenta para a investigação microgenética. Nesta pesquisa, os registros escritos dos estudantes também são ferramenta para a investigação microgenética.

À medida que Piaget assumia um enfoque psicogenético, trabalhando com respostas “espontâneas”, sem intervenção, Vygotsky adotava um enfoque sociogenético, introduzindo a intervenção, com pistas e auxílios. As atividades deste trabalho, por exemplo, foram elaboradas com vários auxílios no próprio texto, como fluxogramas e quadros de códigos, exemplificando para os participantes as etapas a serem cumpridas. Além do suporte do pesquisador durante toda a execução da composição de orquestrações instrumentais.

Para Vygotsky, “os processos humanos têm gênese nas relações com o outro e com a cultura, e são essas relações que devem ser investigadas ao se examinar o curso de ação do sujeito” (Góes, 2000, p. 11). Logo, o foco está no processo, e não nos produtos. As investigações de Vygotsky, que incluíam “a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar sua gênese social e as transformações do curso de eventos” (Góes, 2000, p. 11) foram o terreno sobre o qual foram plantadas, posteriormente, as sementes da abordagem microgenética de matriz histórico-cultural.

A análise microgenética resulta em um “relato minucioso dos acontecimentos” (Góes, 2000, p. 9) e “requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos” (p. 9). Detalham-se as ações dos sujeitos e as relações interpessoais num curto espaço de tempo. Para tal, examinam-se os processos interativos e as pistas de internalização, identificando as transições genéticas ocorridas, que se referem “a transformação nas ações dos sujeitos e a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intra-subjetivo” (Góes, 2000, p. 15).

Assim como a química estuda com profundidade o átomo (micro) para melhor compreender a matéria (macro), a análise microgenética busca respostas para suas questões a partir de pequenas mudanças observadas nas ações do sujeito e nas suas interações com os artefatos e outros sujeitos, com um olhar para os ecos causados por essas mudanças na teia de significados em que está inserido o sujeito e no próprio sujeito. Um olhar aos pequenos detalhes. Logo, “essa análise não é *micro* porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais” (Góes, 2000, p. 15).

Aqui, a análise microgenética é adotada como referencial analítico para investigar as contribuições e limitações do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis, inserido numa composição de orquestrações instrumentais, como instrumento para a aprendizagem da probabilidade frequentista.

4.5 CONSIDERAÇÕES ÉTICAS

Como esta pesquisa envolve a participação de seres humanos, a sua realização obedeceu aos preceitos éticos das Resoluções 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. A pesquisa pode representar potenciais riscos aos participantes, como constrangimento e desconforto durante a resolução das atividades, cansaço físico ou mental e quebra de sigilo.

Para minimizar esses possíveis riscos algumas medidas foram tomadas, como a realização de todas as atividades em local reservado onde os participantes se sentissem confortáveis e seguros, além de flexibilidade no tempo para realização das atividades, permitindo pausas a qualquer momento caso o participante precisasse descansar. Durante toda a pesquisa, nenhum comentário negativo sobre o desempenho do participante foi feito com ele, com os colegas, professores, coordenadores ou qualquer outra pessoa na escola. Além do próprio estudante, apenas os pesquisadores têm acesso ao conteúdo das atividades impressas e das gravações em vídeo.

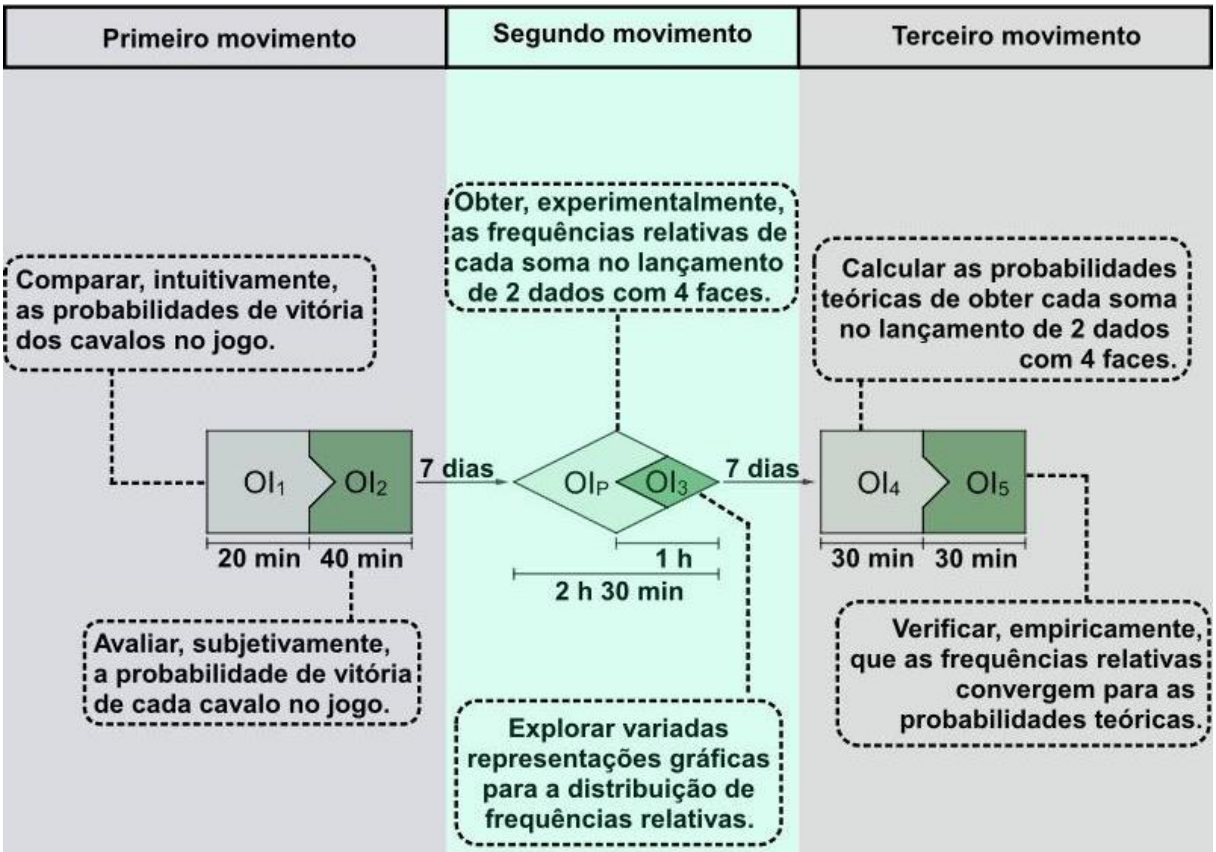
Os dados constituídos nesta pesquisa, por meio das atividades impressas e das gravações em vídeo, ficarão armazenados em pastas de arquivo físicas (para as atividades impressas) e em um pen-drive (para as gravações em vídeo), sob a responsabilidade do pesquisador pelo período de no mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

O próximo capítulo apresentará os detalhes das OI que foram elaboradas para esta pesquisa.

5 A PROGRAMAÇÃO DO CONCERTO: UMA COMPOSIÇÃO DE ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS

Um concerto é uma peça musical que pode ser acompanhada por uma orquestra. Normalmente, é constituído por três movimentos: o primeiro, rápido; o segundo, lento; e o terceiro, novamente rápido. Os movimentos são partes independentes de uma composição (podem ser executados separadamente) mas, para que a composição esteja completa, todos os movimentos devem ser executados em uma ordem específica. Nesta pesquisa, aplicamos uma Composição de Orquestrações Instrumentais em forma de concerto: três movimentos (cada um deles com duas OI), totalizando seis OI. Este concerto foi desenhado de forma a possibilitar um progressivo aprofundamento e sistematização do significado frequentista da probabilidade, passando também pelos outros significados. A síntese do concerto elaborado a priori pode ser consultada na Figura 18.

Figura 18: Composição das Orquestrações Instrumentais.



Fonte: O autor (2024).

A OI_P é a Orquestração Instrumental *Pivot*. Isso indica que ela é a OI principal, estando no centro de todas as demais. O primeiro movimento é constituído pelas OI_1

e OI$_2$, que são sequenciadas imediatas, ocorrendo uma após a outra no mesmo dia. Tem uma duração estimada de, respectivamente, 20 min e 40 min. As respostas escritas nas atividades impressas durante as OI$_1$ e OI$_2$ constituíram os dados referentes a estas OI que foram tratados, organizados e analisados posteriormente.

As OI$_2$ e OI$_P$ são sequenciadas com intervalo entre elas, com a OI$_P$ ocorrendo apenas 7 dias depois. O segundo movimento é constituído pelas OI$_P$ e OI$_3$, que são encaixadas e simultâneas, com a OI$_3$ estando contida na OI$_P$. A OI$_P$ tem uma duração estimada de 2h30min (sendo 1h referente a OI$_3$). As respostas escritas nas atividades impressas durante as OI$_P$ e OI$_3$, assim como a gravação em vídeo (tanto do ambiente da sala de aula quanto da tela dos celulares dos estudantes) constituíram os dados referentes a estas OI que foram tratados, organizados e analisados posteriormente.

As OI$_3$ e OI$_4$ são sequenciadas com intervalo entre elas, com a OI$_4$ ocorrendo apenas 7 dias depois. O terceiro movimento é constituído pelas OI$_4$ e OI$_5$, que são sequenciadas imediatas, ocorrendo uma após a outra no mesmo dia e tem uma duração estimada de 30 min, cada uma. As respostas escritas nas atividades impressas durante as OI$_4$ e OI$_5$ constituíram os dados referentes a estas OI que foram tratados, organizados e analisados posteriormente.

O concerto é constituído por três movimentos, seis OI, cinco atividades e dez tarefas, ao todo. Para facilitar a compreensão de como todos estes elementos se distribuem no concerto, segue um diagrama no qual o “mapa” do concerto pode ser visualizado (ver Figura 19).

Figura 19: Mapa do concerto

<table>
<tr><th colspan="10">Concerto: composição de Orquestrações Instrumentais</th></tr>
<tr><th colspan="2">Primeiro movimento</th><th colspan="5">Segundo movimento</th><th colspan="3">Terceiro movimento</th></tr>
<tr><td>OI$_1$</td><td>OI$_2$</td><td colspan="3">OI$_{pivot}$</td><td colspan="2">OI$_3$</td><td colspan="2">OI$_4$</td><td>OI$_5$</td></tr>
<tr><td>AT 1</td><td>AT 2</td><td colspan="3">AT Pivot</td><td colspan="2">AT3</td><td colspan="2">AT4</td><td>AT 5</td></tr>
<tr><td>T1</td><td>T2</td><td>T 3</td><td>T 4</td><td>T5</td><td>T6</td><td>T7</td><td>T 8</td><td>T9</td><td>T10</td></tr>
</table>

AT: Atividade T: Tarefa

Fonte: O autor (2024).

No mapa, podemos verificar, por exemplo, que a Atividade 3 (AT3) possui duas tarefas, a Tarefa 6 (T6) e a Tarefa 7 (T7) e que a Tarefa 4 (T4) faz parte da Atividade Pivot (AT Pivot). A seguir serão apresentadas, detalhadamente, cada uma das OI.

5.1 OI_1: INTRODUÇÃO.

O objetivo da OI_1 é comparar, intuitivamente, as probabilidades de vitória dos cavalos no jogo.

<u>Situação:</u> Um jogo de corrida conta com 9 cavalos, cada um deles numerado de 1 a 9. Lançam-se dois dados honestos de 4 faces, numeradas de 1 a 4, e calcula-se a soma dos resultados obtidos em cada dado. O cavalo cuja numeração é essa soma, avança uma casa. Vence o cavalo que alcançar primeiro a linha de chegada. A figura abaixo representa uma corrida na qual é necessário avançar seis casas para alcançar a linha de chegada (ver Figura 20).

Figura 20: Jogo corrida de cavalos.

Fonte: O autor (2024).

Tarefa 1: Para você, todos os cavalos têm a mesma chance de vencer a corrida? Justifique.

O jogo proposto é uma variação do jogo corrida de cavalos com dois dados. Neste caso, utilizamos um dado tetraédrico, com 4 faces (ver Figura 21) e cavalos numerados de 1 a 9. A escolha pelo dado tetraédrico se deu pelo interesse em contribuir com a popularização de outros dados, além do tradicional de 6 faces. Muitos estudantes nem se quer sabem que existem outros tipos de dados.

Figura 21: O dado tetraédrico.

Fonte: O autor (2024).

O dado tetraédrico, ao ser lançado, sempre terá no seu topo um número de 1 a 4. Na configuração presente na Figura 10, o resultado do lançamento é 1.

Ao lançar dois destes dados e calcular a soma dos resultados obtidos, nós temos como possibilidades as somas 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Mas estas somas não possuem a mesma probabilidade de ocorrência, o que traz uma discussão sobre a não-equiprobabilidade deste espaço amostral (ver Figura 22).

Figura 22: Espaço amostral da variação do jogo corrida de cavalos com dois dados.

			1+4			
		1+3	2+3	2+4		
	1+2	2+2	3+2	3+3	3+4	
1+1	2+1	3+1	4+1	4+2	4+3	4+4
Soma 2	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**

Fonte: O autor (2024).

Pela enumeração do espaço amostral, verificamos que a soma 5 é a mais provável, com quatro configurações distintas para obter esta soma (1+4, 2+3, 3+2 e 4+1). Podemos, portanto, pelo significado clássico da probabilidade, calcular as proporções de cada soma em relação ao total de possibilidades e, assim, obter as probabilidades teóricas de obter cada uma das somas.

Chamando de $P(X)$ a probabilidade de obter a soma X, temos (ver Tabela 2):

Tabela 2: Distribuição de probabilidades.

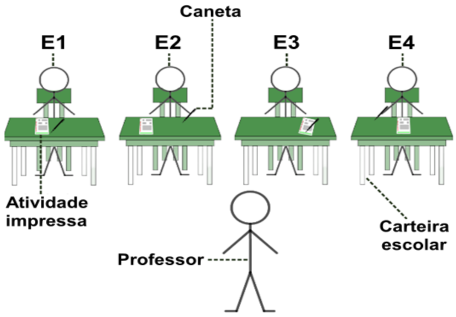
X	$P(X)$
1	$P(1) = \frac{0}{16} = 0\%$
2	$P(2) = \frac{1}{16} = 6{,}25\%$
3	$P(3) = \frac{2}{16} = 12{,}5\%$
4	$P(4) = \frac{3}{16} = 18{,}75\%$
5	$P(5) = \frac{4}{16} = 25\%$
6	$P(6) = \frac{3}{16} = 18{,}75\%$
7	$P(7) = \frac{2}{16} = 12{,}5\%$
8	$P(8) = \frac{1}{16} = 6{,}25\%$
9	$P(9) = \frac{0}{16} = 0\%$

Fonte: O autor (2024).

Todavia, estes cálculos apenas são realizados na Tarefa 8, após os estudantes realizarem diversas simulações a fim de obter essas proporções por meio de frequências relativas, para assim construírem, gradativamente, o significado frequentista da probabilidade. Cabe recordar que discutimos e calculamos as probabilidades de obter cada soma no lançamento de dois dados, não a probabilidade de vitória de cada cavalo. Como comentado anteriormente, estas últimas probabilidades são muito mais confusas e não estão no objetivo deste trabalho. Nesta Tarefa 1, estamos tratando das probabilidades de vitória de cada cavalo, mas apenas pela intuição dos estudantes. Aqui, estamos interessados em perceber o que a intuição deles dirá sobre a chance que cada cavalo tem de vencer.

Configuração didática da OI_1: Para esta OI, após acomodar os estudantes (representados graficamente como E1, E2, E3 e E4) em carteiras individuais e com todos os artefatos disponíveis (atividade impressa e caneta), as condições da atividade serão explicadas (responder individualmente, com caneta, a Tarefa 1, em um tempo estimado de 10 minutos) (ver Figura 23).

Figura 23: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_1



Fonte: O autor (2024).

1. Gestão dos recursos humanos: Os quatro estudantes permanecerão na sua carteira até a conclusão da Tarefa 1, ocasião em que entregarão a atividade impressa ao professor. A resposta deverá ser registrada de caneta. Para erros na escrita ou mudanças de ideia sobre o que escreveram, os estudantes serão orientados previamente a sobrepor com uma linha reta o trecho que deseja desconsiderar e reescrever com sua nova ideia, de tal forma que a anterior permaneça visível para posterior análise das respostas. É possível que algum estudante não apresente uma justificativa para a sua resposta ou que apenas indique “não saber”. Nesses casos, será importante provocá-los, inserindo novos elementos e exemplos à situação, para que respondam à tarefa e apresentem uma justificativa.

2. Gestão dos artefatos: Na atividade impressa constará a situação, por escrito, com as regras do jogo (artefato simbólico) e um espaço para a resposta da Tarefa 1. Os estudantes receberão canetas para responder.

3. Gestão do tempo: O tempo estimado para a resolução da situação é de 10 minutos. Entretanto, caso os estudantes precisem de mais tempo, este será estendido conforme a necessidade.
4. Gestão dos afetos: Após concluírem a Tarefa 1, os estudantes receberão um feedback do professor sobre a sua participação (não sobre a sua resposta), motivando-os a exercitar sua curiosidade sobre a situação apresentada nas próximas OI. Caso algum estudante apresente alguma resistência em realizar a atividade, suas questões serão ouvidas com atenção, em particular, e se necessário, serão feitas adaptações, tal como uma pausa na atividade e posterior retomada.

Modo de execução da OI_1: Espera-se que os estudantes consigam perceber que os cavalos 1 e 9 nunca poderão ganhar, pois é impossível obter as somas 1 e 9 no lançamento dos dois dados. É esperado também que eles percebam que o espaço amostral deste experimento é não-equiprovável. Não há a expectativa de que utilizem um vocabulário muito específico para indicar isso, mas expressões como “tem mais chance” e “tem menos chance” são esperadas.

5.2 OI_2: HORA DO JOGO

O objetivo da OI_2 é avaliar, subjetivamente, a probabilidade de vitória de cada cavalo no jogo.

Situação: Aposte no seu cavalo preferido e vamos jogar algumas partidas!

Após algumas rodadas jogadas, faça o que se pede:

Tarefa 2: Numa escala que vai de impossível a certo, como você avalia a probabilidade de vitória para cada um dos cavalos na corrida? (ver Figura 24).

Figura 24: Escala de probabilidades para a Tarefa 2.

Certo	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Legenda:
Muito provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C1 – Cavalo 1
Provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C2 – Cavalo 2 C3 – Cavalo 3
Pouco provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C4 – Cavalo 4
Impossível	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C5 – Cavalo 5 C6 – Cavalo 6
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C7 – Cavalo 7 C8 – Cavalo 8 C9 – Cavalo 9

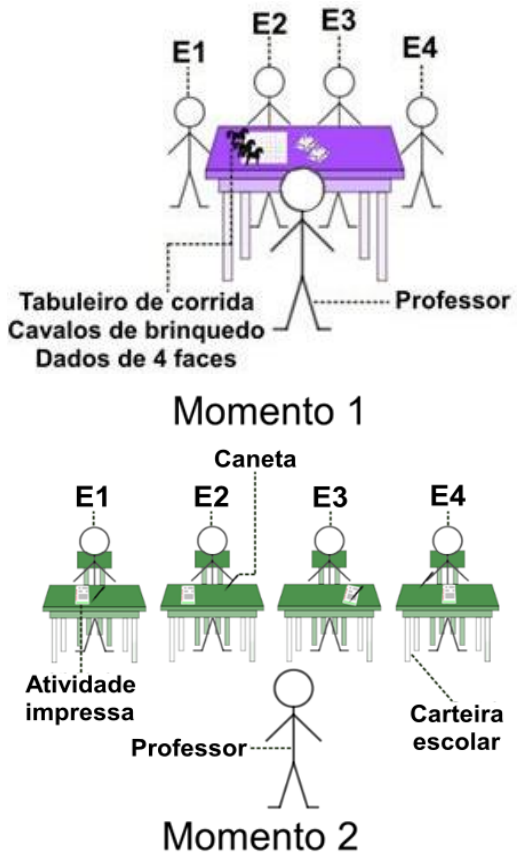
Fonte: O autor (2024).

Aqui, ainda estamos tratando da probabilidade de vitória de cada cavalo, mas sem quantificar estes valores (o que não conseguiríamos fazer), guiados pela intuição e pela atualização de probabilidades, decorrentes da realização do jogo. O significado subjetivo da probabilidade também possui um papel na Tarefa 2, visto que a experiência obtida com a realização do jogo em si é um elemento capaz de atualizar as probabilidades avaliadas na Tarefa 1.

Como os estudantes não irão quantificar as probabilidades, utilizamos uma escala qualitativa que vai de impossível a certo, passando por pouco provável, provável e muito provável, para que eles avaliassem as probabilidades.

Configuração didática da OI_2: Para esta OI, haverá dois momentos bem delimitados. Momento 1 – todos os estudantes se sentarão ao redor de uma mesma mesa (maior do que as individuais) junto com o professor, que aplicará o jogo corrida de cavalos com dois dados (os artefatos serão um tabuleiro para a corrida, os cavalos de brinquedo e dois dados de 4 faces), durante um tempo estimado de 20 minutos.
Momento 2 – os estudantes serão acomodados em suas carteiras individuais e responderão a Tarefa 2 em uma atividade impressa que lhes será entregue juntamente com uma caneta, durante um tempo estimado de 10 minutos (ver Figura 25).

Figura 25: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_2.



Fonte: O autor (2024).

1. Gestão dos recursos humanos:

Momento 1 – Todos os estudantes irão participar do jogo, fazendo os seus palpites sobre o cavalo que sairá vencedor e realizando o lançamento dos dados. O professor mediará as partidas e garantirá o cumprimento das regras do jogo.

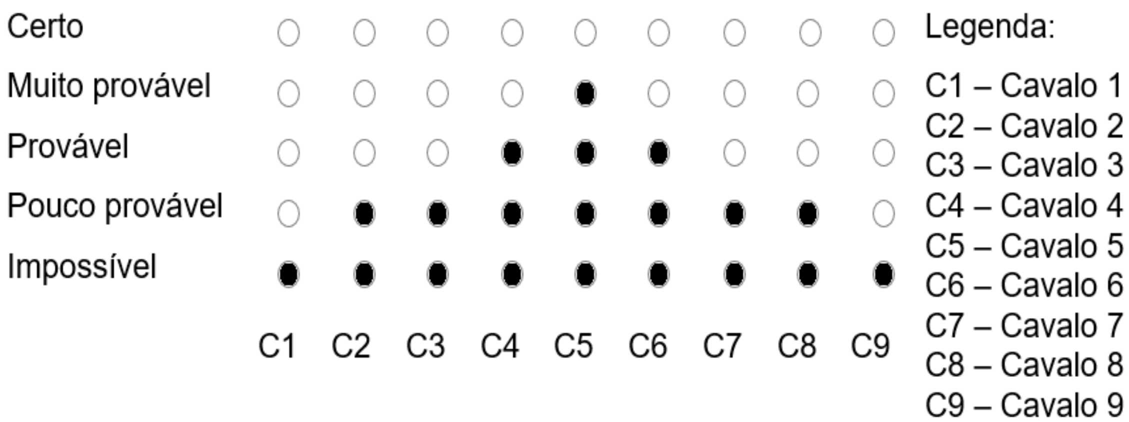
Momento 2 – Após a realização de algumas partidas do jogo, a partir da atualização que farão das suas crenças sobre a probabilidade de vitória de cada cavalo, os estudantes responderão individualmente a Tarefa 2 em uma atividade impressa e com caneta, cada um em uma carteira escolar. O professor explicará como se dará o preenchimento do material referente à Tarefa 2.

2. Gestão dos artefatos:

Momento 1 – O tabuleiro de corrida (com as casas que cada cavalo irá avançar até alcançar a linha de chegada), os cavalos de brinquedo (9 ao todo, cada um deles numerado com um número inteiro de 1 a 9) e os dados de 4 faces (2 unidades) servirão para realizar as partidas do jogo, conforme suas regras (artefato simbólico). Tanto o professor quanto os estudantes irão manipular esses artefatos.

Momento 2 – Na atividade impressa constará a situação, por escrito, e um quadro personalizado para a resposta da Tarefa 2. Os estudantes receberão canetas para responder. Para cada cavalo (C1 a C9), o estudante pintará todas as bolinhas até a altura correspondente à sua resposta. Na Figura 26 é possível observar um exemplo de preenchimento.

Figura 26: Exemplo de preenchimento da Tarefa 2



Fonte: O autor (2024).

3. Gestão do tempo:

Momento 1 – Tempo estimado de 20 minutos para a realização de algumas partidas do jogo.

Momento 2 – Tempo estimado de 10 minutos para o preenchimento do quadro personalizado da Tarefa 2. Se necessário, os tempos poderão ser estendidos.

4. Gestão dos afetos:

Por se tratar de um jogo, muitas emoções estão envolvidas e é importante estar atento a isso. A competitividade emerge naturalmente em situações assim e o desejo de vitória é fundamental para atividades com jogo. Entretanto, é importante reforçar com os estudantes que há muitos ganhos além da vitória do seu cavalo, destacando, inclusive, que é um jogo que envolve sorte e aleatoriedade, sendo uma oportunidade para discutir importantes ideias probabilísticas.

Modo de execução da OI_2: Após o jogo, os estudantes já devem ter internalizado melhor a não-equiprobabilidade do espaço amostral, o que deve ser apresentado ao atribuir diferentes probabilidades de vitórias para os cavalos. É possível que eles já verifiquem uma simetria na distribuição destas probabilidades. É esperado que as probabilidades avaliadas sejam as seguintes: impossível, para os cavalos 1 e 9; pouco provável para os cavalos 2 e 8; provável para os cavalos 3, 4, 6 e 7; e muito provável para o cavalo 5.

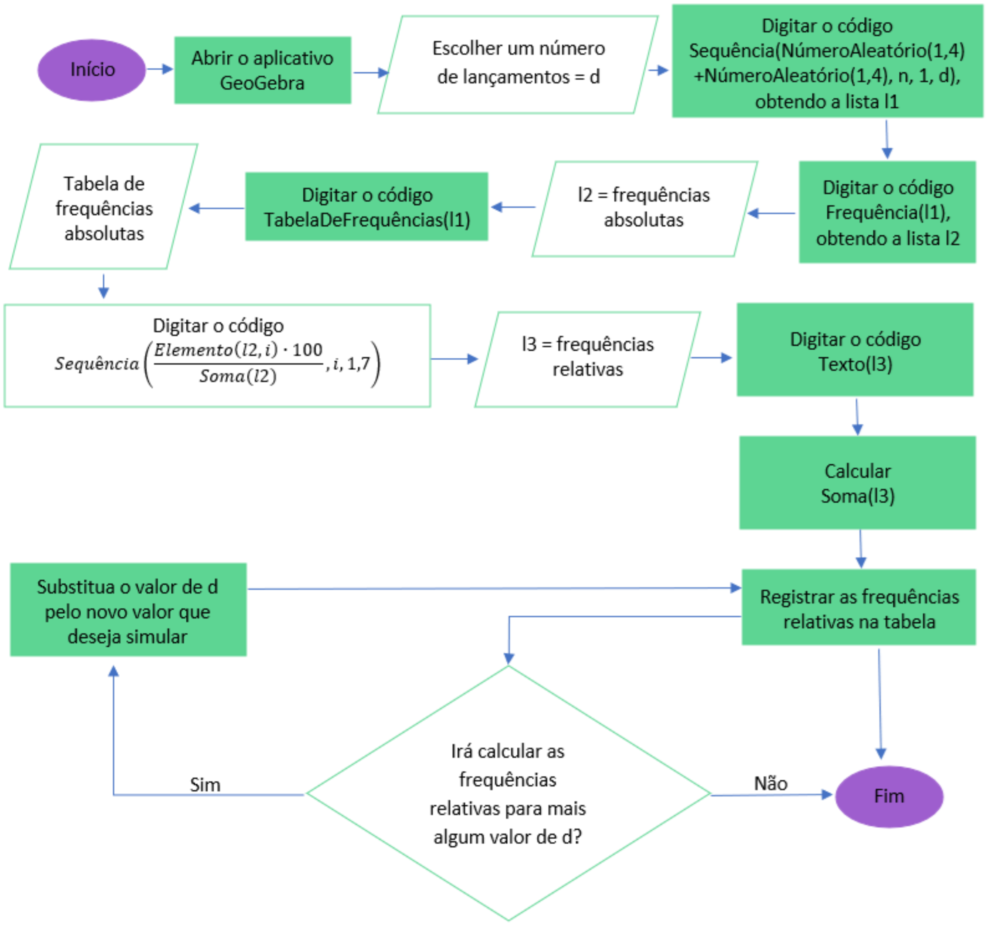
5.3 OI_P: FREQUÊNCIAS RELATIVAS E O GEOGEBRA

O objetivo da OI_P é obter, experimentalmente, as frequências relativas de cada soma no lançamento de 2 dados com 4 faces.

Situação: Como você percebeu, o jogo corrida de cavalos está baseado no lançamento de dois dados honestos com 4 faces. Por essa razão, vamos estudar com mais profundidade esse experimento aleatório: lançar dois dados honestos com 4 faces e calcular a soma dos resultados obtidos.

Tarefa 3: Utilize o aplicativo GeoGebra, o Fluxograma 1 (ver Figura 27) e o Quadro 11 para realizar algumas simulações para esse experimento. À medida que for realizando as simulações, preencha a tabela com os resultados da sua simulação.

Figura 27: Fluxograma 1.



Fonte: O autor (2024).

Quadro 11: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 3.

Finalidade	Códigos e orientações
Simular a soma dos resultados no lançamento de dois dados de 4 faces:	Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão Pesquise pelo comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))** Você vai precisar do comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))** duas vezes. Não escreva a letra **d** no código. Ao invés disso, você deve utilizar o valor numérico de **d** que deseja simular. Preencha as lacunas obtendo o seguinte código: **Sequência(NúmeroAleatório(1,4)+ NúmeroAleatório(1,4), n, 1, d)**
Obter a lista de frequências absolutas:	Pesquise pelo comando Frequência(Lista de Dados Brutos) Preencha a lacuna com l1 obtendo o seguinte código: Frequência(l1)

Continua

Quadro 11: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 3 (continuação).

Finalidade	Códigos e orientações
Construir a tabela de frequências absolutas:	Vá em Configurações e desabilite as opções de exibir eixos e exibir malha. Pesquise pelo comando **TabelaDeFrequências(Lista de Dados Brutos, Fator de Escala/opcional)** Preencha a lacuna de Lista de Dados Brutos com l1 e apague a lacuna de Fator de Escala/opcional, obtendo o seguinte código: **TabelaDeFrequências(l1)**
Obter a lista de frequências relativas (em termos percentuais):	Vá em Configurações → Geral → Arredondamento e coloque apenas 2 casas decimais. Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão e pesquise pelo comando **Elemento(Lista, Posição do Elemento)** e preencha as lacunas com l2 e i, obtendo o seguinte código parcial: $Sequência(Elemento(l2, i)$ Em seguida, Multiplique por 100 - Clique no botão de multiplicação e depois digite 100 Divida por **Soma(l2)** - Clique no botão de divisão e digite o código abaixo: **Soma(l2)** Depois digite o restante do código: $, i, 1, 7)$ Obtendo o seguinte código: $Sequência\left(\frac{Elemento(l2, i) \cdot 100}{Soma(l2)}, i, 1,7\right)$ Se aparecerem símbolos de ? na lista de frequências, você precisa aumentar o valor de **d**.

Fonte: O autor (2024).

Registre na tabela abaixo (ver Figura 28) as frequências relativas que você obtiver nas simulações com o GeoGebra, assim como a soma das frequências relativas em cada caso, no total.

Figura 28: Modelo de tabela de frequências relativas para 50 a 10 000 lançamentos.

	Número de lançamentos								
	50	100	200	500	1000	2000	4000	5000	10 000
Soma 1									
Soma 2									
Soma 3									
Soma 4									
Soma 5									
Soma 6									
Soma 7									
Soma 8									
Soma 9									
Total									

Fonte: O autor (2024).

Tarefa 4: À medida que o número de lançamentos aumenta (de 50 até 10 000), a frequência relativa para cada soma vai se aproximando de um determinado valor. Indique uma estimativa (uma aproximação) para cada um destes valores (ver Figura 29).

Figura 29: Modelo de tabela de estimativas da Tarefa 4.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa									

Fonte: O autor (2024).

Tarefa 5: Numa escala que vai de impossível a certo, como você avalia a probabilidade de obter cada uma das somas abaixo? (ver Figura 30).

Figura 30: Escala de probabilidades para a Tarefa 5.

Certo	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Legenda:
Muito provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	S1 – Soma 1 S2 – Soma 2
Provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	S3 – Soma 3
Pouco provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	S4 – Soma 4 S5 – Soma 5
Impossível	○	○	○	○	○	○	○	○	○	S6 – Soma 6
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S7 – Soma 7 S8 – Soma 8 S9 – Soma 9

Fonte: O autor (2024).

Neste momento, os estudantes iniciam o uso do aplicativo GeoGebra para realizar as simulações do experimento. Agora, o jogo corrida de cavalos com dois dados, que motivou as discussões iniciais, é deixado de lado. O foco está apenas nos resultados do lançamento do par de dados (o equivalente a simples corrida de comprimento da trilha igual a 1).

Para as simulações, os estudantes recebem um grande reforço com artefatos simbólicos que guiarão o experimento: um fluxograma, com o algoritmo que será utilizado na simulação, indicando o quê e em que ordem será feito; e um quadro com códigos e orientações detalhadas para executar cada uma das partes do algoritmo. Os estudantes fizeram simulações para números de lançamentos que foram de 50 a 10 mil, registrando os resultados em uma única tabela. Esperou-se que, com isso, por meio da comparação dos resultados na tabela, os estudantes já conseguissem avançar na construção do significado frequentista da probabilidade.

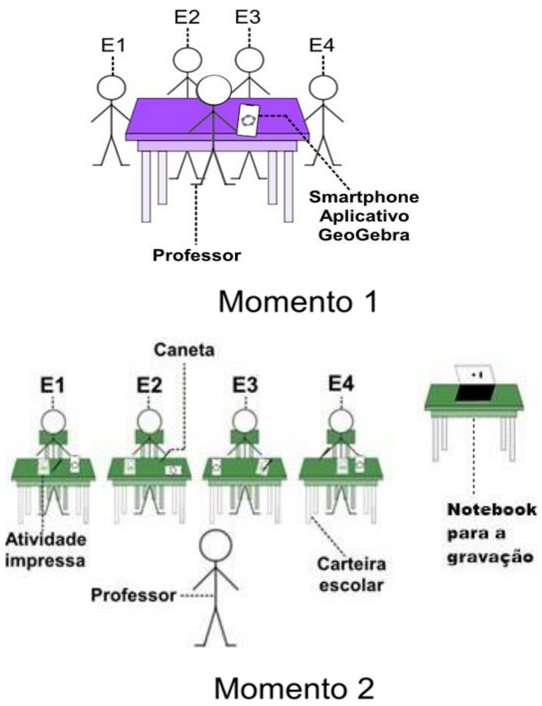
Na Tarefa 4, a partir dos resultados das simulações, os estudantes fizeram as próprias estimativas de para qual valor a frequência relativa de cada soma estava convergindo.

<u>Configuração didática da OI_P</u>: Esta OI se dará em dois momentos, antes do início da OI_3.

Momento 1 – O professor partirá do seguinte exemplo para realizar uma excursão pelos principais elementos (comandos e ferramentas) do GeoGebra que serão necessários a esta OI: ao lançar uma moeda, qual a probabilidade de obtermos como resultado a face cara? Utilizando o aplicativo GeoGebra no seu *smartphone*, o professor irá explorar estes elementos, apresentando-os aos estudantes, mas sem realizar nenhuma análise dos resultados, com todo o discurso voltado à parte técnica da simulação.

Momento 2 – Diante da situação apresentada na OI_P (presente na atividade impressa que será entregue), os estudantes irão realizar, individualmente, simulações computacionais em seus próprios *smartphones* a fim de realizar as Tarefas 3, 4 e 5. Durante todo o Momento 2, a OI será filmada por um notebook em um ponto fixo da sala de aula. As telas dos *smartphones* dos estudantes também serão gravadas por um aplicativo de captura de tela enquanto eles estiverem utilizando o aplicativo Suíte GeoGebra (ver Figura 31).

Figura 31: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_P.



Fonte: O autor (2024).

1. Gestão dos recursos humanos:

Momento 1 – Os estudantes irão, em grupo, acompanhar as explicações do professor e tirar todas as dúvidas que eventualmente surjam. O professor precisa estar atento se as suas orientações estão sendo compreendidas pelos estudantes e que estes, posteriormente, conseguirão utilizar os elementos do aplicativo GeoGebra com o máximo de autonomia possível.

Momento 2 – Os estudantes, munidos da atividade impressa, de caneta, do *smartphone* e do aplicativo GeoGebra, irão realizar as simulações indicadas, individualmente. Eventuais dúvidas ou dificuldades deverão ser informadas ao professor, que irá intervir, mas oferecendo o mínimo de ajuda possível, sobre a qual o estudante possa seguir sozinho.

2. Gestão dos artefatos:

Momento 1 – O *smartphone* e o aplicativo GeoGebra serão instrumentos para o ensino do professor.

Momento 2 – O *smartphone* e o aplicativo GeoGebra são artefatos com os quais o estudante realizará algumas simulações. Os resultados e observações realizadas pelo estudante serão registrados na atividade impressa, conforme solicitações das Tarefas 3, 4 e 5. Alguns artefatos simbólicos presentes na atividade impressa, um fluxograma e um quadro de orientações, são disponibilizados a fim de melhor direcionar os procedimentos que deverão ser empregados pelos estudantes.

3. Gestão do tempo:

O tempo estimado para a apresentação dos elementos do GeoGebra pelo professor é de 20 minutos, enquanto o tempo estimado para as simulações realizadas pelos estudantes e resolução das Tarefas 3, 4 e 5 é de 1 hora, que pode ser estendido caso eles não tenham concluído tudo.

4. Gestão dos afetos:

Por estar lidando com processos que podem ser novos para ele (o aplicativo, uso de códigos em algoritmos, fluxogramas), o estudante pode não se sentir confiante o bastante para realizar as simulações. É importante acolher esta dificuldade, dando-lhe visibilidade, mas com uma visão otimista. Expressões como “também foi difícil para mim quando eu estava aprendendo, mas agora eu consigo” podem ser aplicadas em situações como essa.

<u>Modo de execução da OIP</u>:

Momento 1 – Nesta etapa, é esperado que o uso das ferramentas e códigos seja compreendido pelos estudantes, mas que não se façam, ainda, considerações sobre os resultados obtidos, deslocando esse tipo de reflexão para o Momento 2.

Momento 2 – Quando os estudantes tiverem eventuais dificuldades no experimento, espera-se que o principal caminho tomado por eles seja consultar o fluxograma e o código de orientações, encontrando no próprio material as respostas para estas dificuldades. Entretanto, ainda assim, quando o material não responder às necessidades, algumas dúvidas só deverão ser sanadas, de fato, pelo professor, que estará sempre atento para caso seja requisitado. Quando isso ocorrer, oferecerá com brevidade as soluções necessárias para que o estudante continue o experimento, sempre privilegiando o máximo de autonomia do estudante no processo. Uma visão esperada da interface do aplicativo GeoGebra, na Janela de Álgebra e de Visualização, pode ser observada na Figura 32.

Figura 32: Janelas do aplicativo GeoGebra durante a OIP

Fonte: O autor (2024).

É importante destacar que cada estudante vai obter resultados numéricos diferentes nas suas simulações. Entretanto, a tendência observada será a mesma. Os estudantes podem ter dificuldade em realizar a leitura do fluxograma. É importante ficar atento a isso e, caso ocorra, auxiliá-los nesse sentido. Caso saia do aplicativo, ao retornar, pode acontecer do estudante ter perdido toda a construção que já realizou. Por esse motivo, é útil orientá-los a não sair do GeoGebra enquanto não concluir a atividade. Por fim, por se tratar de códigos, qualquer alteração pode inviabilizar toda a construção desejada. Caso algum estudante indique que não está dando certo, a primeira coisa a observar é a escrita dos códigos.

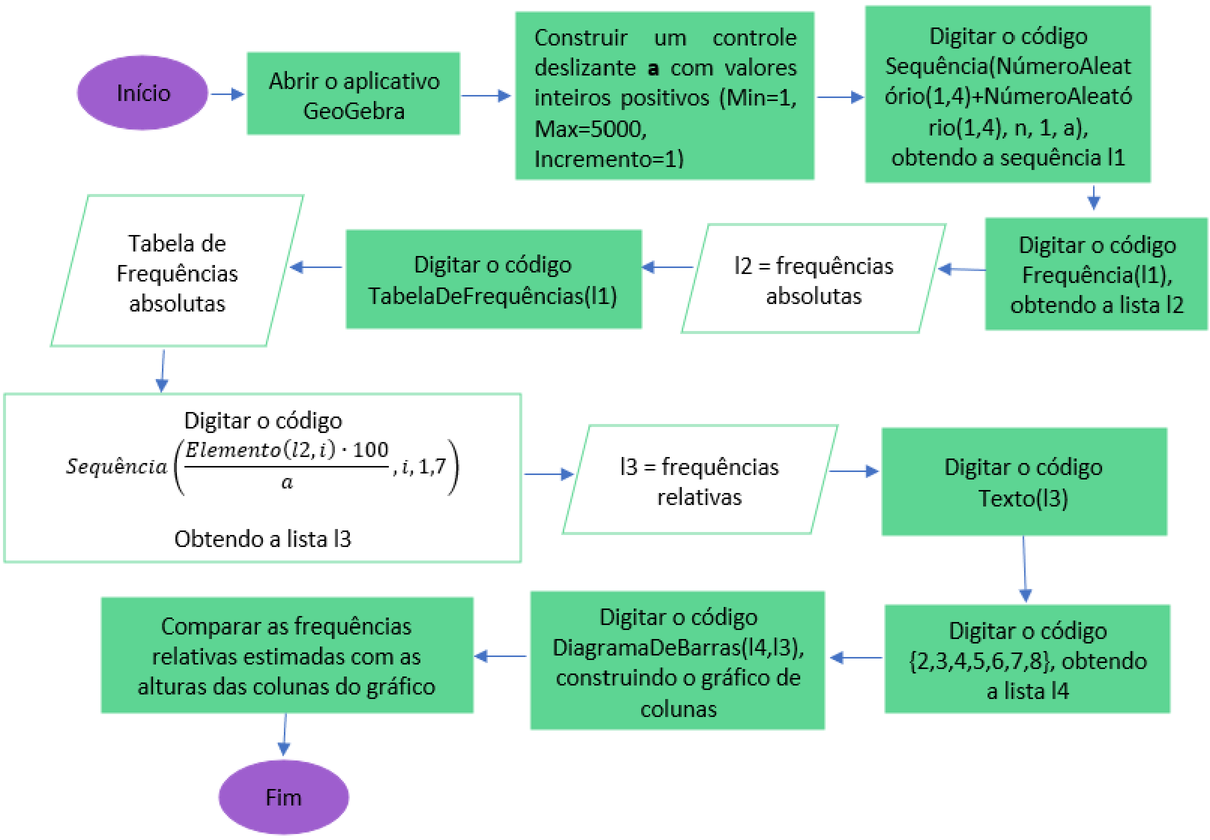
5.4 OI_3: GRÁFICOS E O GEOGEBRA

O objetivo da OI_3 é explorar variadas representações gráficas para a distribuição de frequências relativas, uma vez que “na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade”. (Brasil, 2018, p. 529).

Situação: Vamos melhorar um pouco mais as suas estimativas na Tarefa 4 utilizando gráficos dinâmicos.

Tarefa 6: Utilize o aplicativo GeoGebra, o Fluxograma 2 (ver Figura 33) e o Quadro 12, para construir um gráfico de colunas dinâmico.

Figura 33: Fluxograma 2.



Fonte: O autor (2024).

Quadro 12: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 6.

Finalidade	Códigos e orientações
Construir o controle deslizante **a**	Digitar a letra **a** no Campo de Entrada
Configurar o controle deslizante **a**	Configure o controle deslizante para Min = 1, Max = 5000, Incremento = 1

Continua

Quadro 12: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 6 (continuação).

Finalidade	Códigos e orientações
Simular a soma dos resultados no lançamento de dois dados de 4 faces:	Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão Pesquise pelo comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))** Você vai precisar do comando NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro)) duas vezes. Preencha as lacunas obtendo o seguinte código: **Sequência(NúmeroAleatório(1,4)+ NúmeroAleatório(1,4), n, 1, a)**
Obter a lista de frequências absolutas:	Pesquise pelo comando **Frequência(Lista de Dados Brutos)** Preencha a lacuna com l1 obtendo o seguinte código: **Frequência(l1)**
Construir a tabela de frequências absolutas:	Vá em Configurações e desabilite as opções de exibir eixos e exibir malha. Pesquise pelo comando **TabelaDeFrequências(Lista de Dados Brutos, Fator de Escala/opcional)** Preencha a lacuna de Lista de Dados Brutos com l1 e apague a lacuna de Fator de Escala/opcional, obtendo o seguinte código: **TabelaDeFrequências(l1)**
Obter a lista de frequências relativas (em termos percentuais):	Vá em Configurações → Geral → Arredondamento e coloque apenas 2 casas decimais. Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão e pesquise pelo comando **Elemento(Lista, Posição do Elemento)** e preencha as lacunas com l2 e i, obtendo o seguinte código parcial: $Sequência(Elemento(l2, i)$ Em seguida, Multiplique por 100 - Clique no botão de multiplicação e depois digite 100 Divida por **a** - Clique no botão de divisão e digite a letra **a** Depois digite o restante do código: $, i, 1, 7)$ Obtendo o seguinte código: $Sequência\left(\frac{Elemento(l2, i) \cdot 100}{a}, i, 1{,}7\right)$ Se aparecerem símbolos de ? na lista de frequências, você precisa aumentar o valor de **a**.

Continua

Quadro 12: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 6 (continuação).

Finalidade	Códigos e orientações
Exibir a lista de frequências relativas na Janela de visualização:	Pesquise o comando **Texto(Objeto)** e preencha a lacuna com l3 obtendo o seguinte código: **Texto(l3)** Reposicione a lista na Janela de Visualização, se necessário. Talvez seja necessário realizar um movimento de pinçar com os dedos para que apareça.
Construir a lista {2,3,4,5,6,7,8}	Vá no teclado de funções – f(x) –, insira as chaves e digite os elementos no seu interior.
Construir o gráfico de colunas	Vá em Configurações e habilite a opção de exibir eixos, mas mantenha desabilitada a opção de exibir malha. Digitar o código **DiagramaDeBarras(l4,l3)** Obtendo a construção do gráfico. Realize um movimento de pinça no eixo x para modificar a escala.

Fonte: O autor (2024).

Tarefa 7: Após a análise dos gráficos, atualize sua tabela com as estimativas (aproximações) para cada soma (ver Figura 34). Você pode manter as estimativas da Tarefa 4 ou pode fazer mudanças.

Figura 34: Modelo de tabela de estimativas da Tarefa 7.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa									

Fonte: O autor (2024).

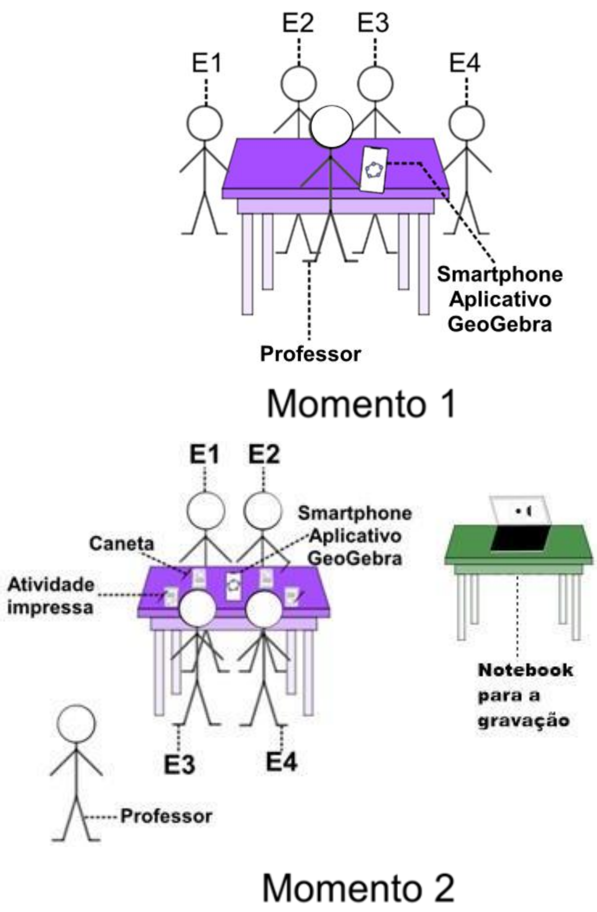
Nesta OI, a atividade foi em grupo e explorou uma nova forma de representação: um gráfico de colunas. Mais uma vez, há um fluxograma e um quadro de orientações, como suporte ao experimento do grupo.

Configuração didática da OI_3: Nesta OI, os estudantes irão construir um gráfico de colunas dinâmico, além de uma tabela de frequências que varia dinamicamente também. Esse processo se dará em dois momentos bem delimitados.

Momento 1 – O professor retomará o exemplo do lançamento das moedas para construir um gráfico de colunas dinâmico utilizando um controle deslizante.

Momento 2 – Os estudantes irão, em grupo, responder às Tarefas 6 e 7. Durante todo o Momento 2, a OI será filmada por um notebook em um ponto fixo da sala de aula. A tela do *smartphone* único que será utilizado pelos estudantes também será gravada por um aplicativo com esta finalidade enquanto eles estiverem utilizando o aplicativo Suíte GeoGebra (ver Figura 35).

Figura 35: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_3.

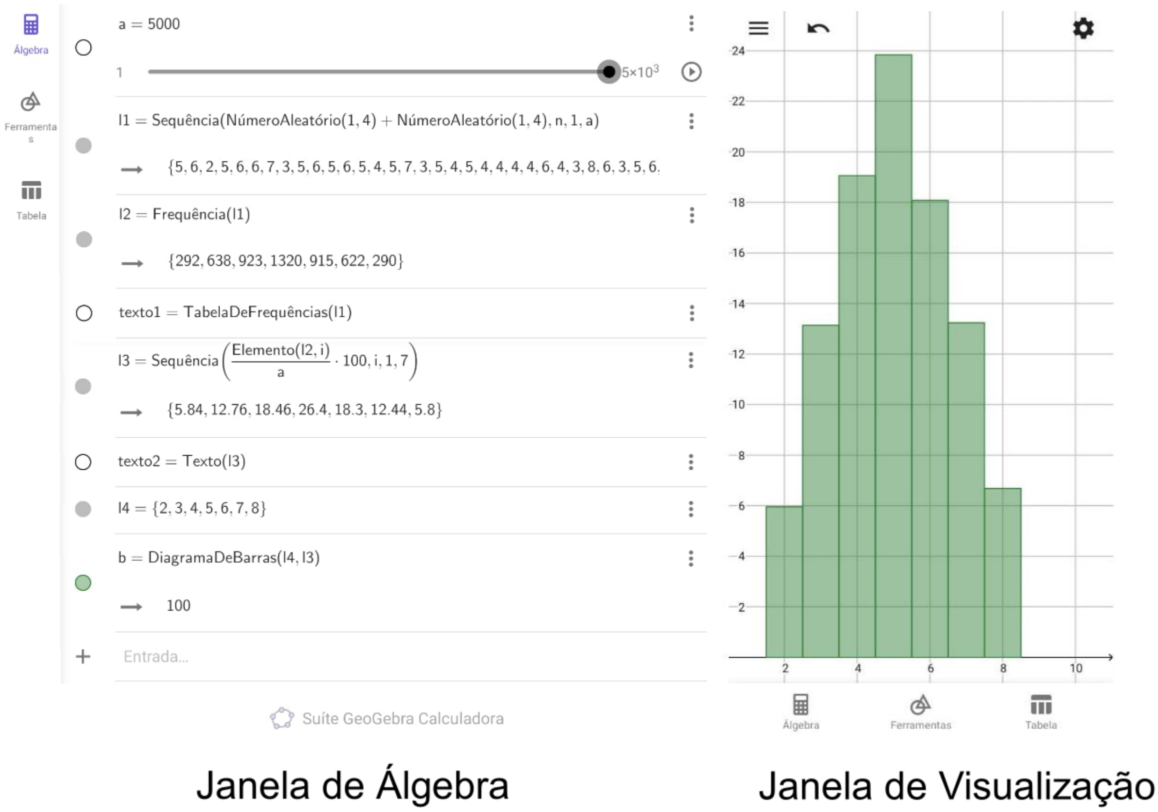


Fonte: O autor (2024).

A gestão dos recursos humanos, dos artefatos e do tempo segue as mesmas diretrizes apontadas para a OI_P. Quanto à gestão dos afetos, é importante um olhar especial ao fato de que, agora, as simulações são feitas coletivamente. Do grupo, podem emergir discordâncias (que precisam ser trabalhadas em prol do melhor resultado e não de conflitos), lideranças naturais (que não podem concentrar todas as decisões nas mãos de apenas um integrante, comprometendo a aprendizagem dos demais) ou, o oposto, participantes indiferentes ao experimento (que precisam ser impulsionados a participar ativamente da atividade).

Modo de execução da OI_3: Espera-se que os estudantes já estejam mais familiarizados com o uso dos códigos e, com isso, transcrevam com agilidade o algoritmo para o aplicativo. Após a construção do gráfico de colunas, os estudantes devem optar por utilizar exaustivamente o controle deslizante, verificando a variação das frequências relativas até obterem uma estimativa mais fiel para a convergência dessas frequências relativas. Uma visão esperada da interface do aplicativo GeoGebra, na Janela de Álgebra e de Visualização, com os códigos e o gráfico de colunas, pode ser observada na Figura 36.

Figura 36: Janelas do aplicativo GeoGebra durante a OI3.



Fonte: O autor (2024).

É perceptível como o gráfico caminha para uma simetria, o que já é esperado pelas probabilidades teóricas. É interessante notar, também, as similaridades do gráfico obtido com a curva normal, embora o gráfico esteja representando valores discretos. É preciso verificar se os estudantes configuraram o controle deslizante conforme as orientações. Os estudantes podem ter dificuldade também em encontrar o melhor enquadramento para o gráfico na Janela de Visualização, sendo necessária uma intervenção, ainda que mínima.

5.5 OI4: CÁLCULO DAS PROBABILIDADES TEÓRICAS

O objetivo da OI4 é calcular as probabilidades teóricas de obter cada soma no lançamento de dois dados honestos com 4 faces.

Situação: Lançaram-se dois dados honestos com 4 faces, calculando-se a soma dos pontos obtidos em cada dado.

Tarefa 8: Qual a probabilidade de obtermos cada uma das somas a seguir?

a) Soma igual a 1

b) Soma igual a 2

c) Soma igual a 3

d) Soma igual a 4

e) Soma igual a 5

f) Soma igual a 6

g) Soma igual a 7

h) Soma igual a 8

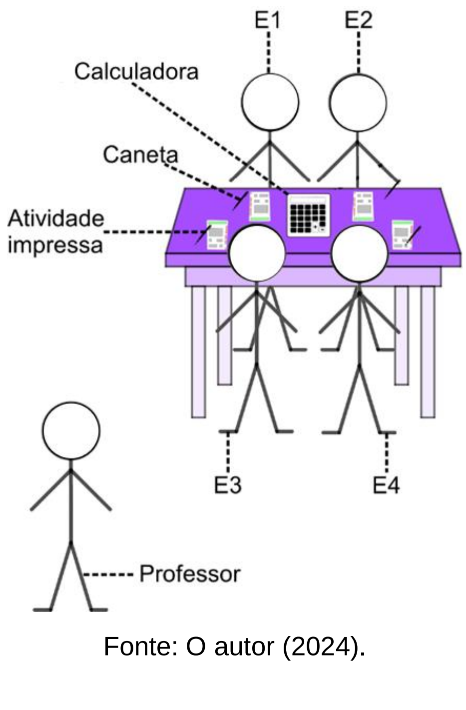
i) Soma igual a 9

Tarefa 9: Qual a soma de todas as probabilidades calculadas na Tarefa 8?

Na Tarefa 8, o significado clássico da probabilidade é central, visto que os estudantes calcularam as probabilidades exatas de cada soma pela definição laplaciana, obtendo assim as chamadas probabilidades teóricas. Na Tarefa 9, o reforço sobre o fato de que a soma das probabilidades é 100%, ponto já tocado em tarefas anteriores com as frequências relativas, aborda o axioma 2 de Kolmogorov, trazendo ao palco, também, o significado axiomático da probabilidade.

Configuração didática da OI_4: Para esta OI, os estudantes irão trabalhar colaborativamente com o intuito de obter as probabilidades teóricas para cada uma das somas indicadas. Eles farão toda a atividade juntos, mas cada um terá a sua própria atividade impressa na qual registrará as respostas obtidas (ver Figura 37).

Figura 37: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI_4.



Fonte: O autor (2024).

1. Gestão dos recursos humanos: Os estudantes se organizarão em grupo e responderão, juntos, às Tarefas 8 e 9. Elas irão resolver de maneira autônoma desde o início, apenas se apresentarem dificuldades é que o professor dará pequenas dicas, gradualmente.
2. Gestão dos artefatos: Além das já recorrentes atividades impressas e canetas para registrar as respostas, os estudantes terão a sua disposição uma calculadora, para obter as probabilidades em termos percentuais, caso desejem.
3. Gestão do tempo: O tempo estimado para esta OI é de 30 minutos.
4. Gestão dos afetos: Pela primeira vez os estudantes precisarão realizar, eles próprios, algumas operações matemáticas. Ainda que possam utilizar a calculadora, este momento poderá resgatar inseguranças.

Os estudantes podem não recordar como converter as probabilidades obtidas da representação fracionária para a representação percentual. Se isso ocorrer, o professor utilizará os próprios códigos dos fluxogramas para sugerir o caminho (dividir e multiplicar por 100) e, se isso não for o suficiente, novas dicas serão dadas, mas sem entregar tudo de uma vez. Se, ainda assim, os estudantes não conseguirem desenvolver, então o professor deverá realizar a atividade junto com eles, pois é importante que ao final da OI estas probabilidades teóricas tenham sido calculadas.

Modo de execução da OI_4: Os estudantes irão enumerar todas as possibilidades que compõem o espaço amostral deste experimento e, em seguida, pelo método clássico, muito utilizado na Educação Básica e que, provavelmente, eles conhecem bem, calcular as proporções para cada um dos eventos, obtendo as probabilidades teóricas.

5.6 OI_5: SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE

O objetivo da OI_5 é verificar, empiricamente, que as frequências relativas convergem para as probabilidades teóricas.

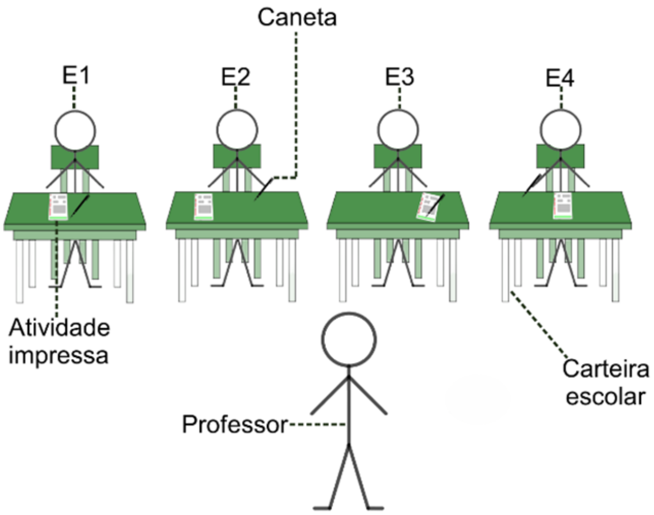
Situação: Compare as probabilidades teóricas calculadas na Tarefa 8 com as frequências relativas obtidas por você na Tarefa 3 e com as estimativas dadas por você na Tarefa 7.

Tarefa 10: Qual relação você consegue perceber entre as probabilidades teóricas calculadas e as frequências relativas obtidas?

Este é o ato final do concerto, no qual os estudantes colocaram as relações de significado que construíram durante a composição de orquestrações instrumentais.

<u>Configuração didática da OI$_5$</u>: Nesta OI, os estudantes irão sistematizar as principais conclusões que obtiveram a partir de todas as OI. A finalidade é que eles percebam que as frequências relativas obtidas nas simulações são estimativas para as probabilidades teóricas calculadas e registrar essas ideias por escrito. Eles cumprirão esta Tarefa 10 individualmente (ver Figura 38).

Figura 38: Disposição geográfica dos sujeitos e dos artefatos na OI$_5$.



Fonte: O autor (2024).

1. Gestão dos recursos humanos: Os estudantes responderão a atividade individualmente e o professor os provocará a partir dos dados que eles construíram, sempre que necessário.

2. Gestão dos artefatos: Além da atividade impressa com a Tarefa 10 e da caneta, cada estudante receberá três quadros, cada um deles com as frequências relativas que obtiveram na Tarefa 3, as estimativas que deram na Tarefa 7 e as probabilidades teóricas que calcularam na Tarefa 8. Esses dados, construídos por eles próprios anteriormente, serão artefatos fundamentais para a resolução da Tarefa 10.

3. Gestão do tempo: Estima-se um tempo de 30 minutos para a conclusão da atividade. Se necessário, o tempo poderá ser estendido.

4. Gestão dos afetos: Este é um momento em que o estudante precisará sistematizar as suas ideias em uma resposta discursiva. Dificuldades na escrita podem surgir e desencadear mal-estar. Nesse caso, o professor estimulará o estudante a se expressar verbalmente primeiro e, a partir daí, registrar essas ideias por escrito, no seu tempo. Elogiar boas ideias pode servir de motivação para novas boas ideias e para estimular o aumento da confiança para registrá-las por escrito.

Modo de execução da OI_5: É esperado que os estudantes retomem pontos levantados por eles próprios nas tarefas anteriores, para costurar a conclusão de que as frequências relativas convergem para as probabilidades teóricas à medida que o número de repetições aumenta. Espera-se respostas como “As frequências relativas para cada soma vão ficando cada vez mais próximas de um valor, à medida que o número de lançamentos aumenta. Esse valor parece estar bem próximo da probabilidade teórica de se obter aquela soma”.

O estudante pode não conseguir perceber relações entre os dados. Nesse caso, mais uma vez, o professor intervém com dicas mínimas, mas que impulsionem o estudante a evoluir na solução. É possível consultar nas próximas páginas os quadros detalhados com a disposição dos sujeitos e dos artefatos em todas as OI.

Um panorama detalhado das disposições dos sujeitos e dos artefatos em cada uma das OI pode ser acompanhado nos Quadros de 13 a 18.

Quadro 13: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_1.

Ações	Papel do professor	Papel do estudante	Tipo de interação entre os estudantes	Tempo estimado	Artefatos	Uso dos artefatos	
Entrega da Atividade 1 (impressa) aos estudantes.	Entregar a atividade e uma caneta.	Receber a atividade e a caneta.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Leitura coletiva do texto.	Direcionar a leitura coletiva do texto.	Acompanhar a leitura coletiva do texto.	Em grupo.	3 min	Atividade impressa, texto e imagens.	Para o professor: Para o estudante:	Realizar a leitura coletiva. Acompanhar a leitura coletiva.
Registro individual das respostas	Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado)	Registrar, por escrito, com caneta, sua resposta a Tarefa 1	Individual.	10 min	Atividade impressa e caneta	Para o professor: Para o estudante:	Sem uso de artefatos. Registrar a resposta da Tarefa 1
Devolução da Atividade 1 ao professor.	Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.	Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Discussão coletiva da Tarefa 1.	Mediar a discussão dos estudantes.	Socializar suas respostas e discuti-las com os colegas.	Em grupo.	3 min	Regras do jogo.	Para o professor: Para o estudante:	Provocar reflexões sobre as probabilidades de vitória. Refletir sobre as probabilidades de vitória.

Fonte: O autor (2024).

Quadro 14: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_2.

Ações	**Papel do professor**	**Papel do estudante**	**Tipo de interação entre os estudantes**	**Tempo estimado**	**Artefatos**	**Usos dos artefatos**	
Realização do jogo corrida de cavalos.	Coordenar a realização do jogo.	Jogar.	Em grupo.	20 min	Tabuleiro de corrida, cavalos de brinquedo e dados de 4 faces.	Para o professor:	Coordenar as partidas do jogo.
						Para o estudante:	Realizar as partidas do jogo.
Entrega da Atividade 2 (impressa) aos estudantes.	Entregar a atividade e uma caneta.	Receber a atividade e uma caneta.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Registro individual das respostas da Tarefa 2.	Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado).	Registrar, por escrito, com caneta, sua resposta à Tarefa 1.	Individual.	10 min	Atividade impressa e caneta.	Para o professor:	Sem uso de artefatos.
						Para o estudante:	Registrar as respostas da Tarefa 2.
Devolução da Atividade 2 ao professor.	Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.	Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Discutir, a partir da observação do jogo, se todos os cavalos têm a mesma probabilidade de vitória.	Provocar reflexões e mediar a discussão dos estudantes.	Refletir e discutir com os colegas sobre a probabilidade de vitória de cada cavalo.	Em grupo.	6 min	Tabuleiro de corrida, cavalos de brinquedo e dados de 4 faces.	Para o professor:	Provocar novas discussões.
						Para o estudante:	Testar hipóteses.

Fonte: O autor (2024).

Quadro 15: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_P.

Ações	Papel do professor	Papel do estudante	Tipo de interação entre os estudantes	Tempo estimado	Artefatos	Usos dos artefatos	
Familiarizar-se com os elementos do aplicativo GeoGebra que serão utilizadas.	Apresentar os elementos.	Conhecer os elementos.	Em grupo.	20 min	Celular e aplicativo GeoGebra.	Para o professor: Para o estudante:	Apresentar os elementos. Conhecer os elementos.
Entrega da Atividade Pivot (impressa) aos estudantes.	Entregar a atividade e uma caneta.	Receber a atividade e uma caneta.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Realizar as simulações e registrar os resultados na Atividade Pivot.	Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado).	Realizar as simulações e registrar, por escrito, com caneta, seus resultados na Atividade Pivot.	Individual.	1 h	Celular, aplicativo GeoGebra, atividade impressa e caneta.	Para o professor: Para o estudante:	Auxiliar nas simulações dos estudantes. Realizar as simulações e registrar os resultados.
Devolução da Atividade Pivot ao professor.	Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.	Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.	Sem interação.	2 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Discutir, a partir do observado nas simulações, algumas das relações observadas.	Provocar reflexões e mediar a discussão dos estudantes.	Refletir e discutir com os colegas sobre os resultados observados durante as simulações.	Em grupo.	6 min	Sem artefatos.	Sem uso de artefatos.	
Realizar a OI_3.	Aplicar a OI_3.	Responder a Atividade 3.	Em grupo.	1 h	Celular e aplicativo GeoGebra.	Para o professor: Para o estudante:	Auxiliar nas simulações dos estudantes. Realizar as simulações.

Fonte: O autor (2024).

Quadro 16: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_3.

<table>
<tr><th>Ações</th><th>Papel do professor</th><th>Papel do estudante</th><th>Tipo de interação entre os estudantes</th><th>Tempo estimado</th><th>Artefatos</th><th colspan="2">Usos dos artefatos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Familiarizar-se com os elementos do aplicativo GeoGebra que serão utilizados.</td><td rowspan="2">Apresentar os elementos.</td><td rowspan="2">Conhecer os elementos.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">20 min</td><td rowspan="2">Celular e aplicativo GeoGebra.</td><td>Para o professor:</td><td>Apresentar os elementos.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Conhecer os elementos.</td></tr>
<tr><td>Entrega da Atividade 3 (impressa) aos estudantes.</td><td>Entregar a atividade e uma caneta.</td><td>Receber a atividade e a caneta.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Realizar as simulações e registrar as estimativas na Atividade 3.</td><td rowspan="4">Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado).</td><td rowspan="4">Realizar as simulações e registrar, por escrito, com caneta, suas estimativas atualizadas na Atividade 3.</td><td rowspan="4">Em grupo.</td><td rowspan="4">30 min</td><td rowspan="2">Celular e aplicativo GeoGebra.</td><td>Para o professor:</td><td>Auxiliar nas simulações dos estudantes.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Realizar as simulações.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Atividade impressa e caneta.</td><td>Para o professor:</td><td>Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Registrar, por escrito, as estimativas atualizadas na Atividade 3.</td></tr>
<tr><td>Devolução da Atividade 3 ao professor.</td><td>Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.</td><td>Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td>Discutir, a partir do observado nas simulações, alguns dos padrões observados.</td><td>Provocar reflexões e mediar a discussão dos estudantes.</td><td>Refletir e discutir com os colegas sobre os resultados observados durante as simulações.</td><td>Em grupo.</td><td>6 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2024).

Quadro 17: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI_4.

<table>
<tr><th>Ações</th><th>Papel do professor</th><th>Papel do estudante</th><th>Tipo de interação entre os estudantes</th><th>Tempo estimado</th><th>Artefatos</th><th colspan="2">Usos dos artefatos</th></tr>
<tr><td>Entrega da Atividade 4 (impressa) aos estudantes.</td><td>Entregar a atividade e uma caneta.</td><td>Receber a atividade e a caneta.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Direcionar a leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Acompanhar a leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">2 min</td><td rowspan="2">Atividade impressa e texto.</td><td>Para o professor:</td><td>Realizar a leitura coletiva.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Acompanhar a leitura coletiva.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Resolução das Tarefas 8 e 9.</td><td rowspan="2">Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado).</td><td rowspan="2">Resolver, em grupo, as Tarefas 8 e 9.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">20 min</td><td rowspan="2">Atividade impressa, caneta e calculadora</td><td>Para o professor:</td><td>Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Resolver e registrar as respostas das Tarefas 8 e 9.</td></tr>
<tr><td>Devolução da Atividade 4 ao professor.</td><td>Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.</td><td>Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Discussão coletiva da Atividade 4.</td><td rowspan="2">Mediar a discussão dos estudantes.</td><td rowspan="2">Socializar as respostas obtidas e discuti-las.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">4 min</td><td rowspan="2">Respostas dos estudantes.</td><td>Para o professor:</td><td>Provocar reflexões sobre as probabilidades calculadas.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Refletir sobre as probabilidades calculadas.</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2024).

Quadro 18: Disposição dos sujeitos e dos artefatos na OI$_5$.

<table>
<tr><th>Ações</th><th>Papel do professor</th><th>Papel do estudante</th><th>Tipo de interação entre os estudantes</th><th>Tempo estimado</th><th>Artefatos</th><th colspan="2">Usos dos artefatos</th></tr>
<tr><td>Entrega da Atividade 5 (impressa) aos estudantes.</td><td>Entregar a atividade e uma caneta.</td><td>Receber a atividade e a caneta.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Direcionar a leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Acompanhar a leitura coletiva da atividade.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">2 min</td><td rowspan="2">Atividade impressa e texto.</td><td>Para o professor:</td><td>Realizar a leitura coletiva.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Acompanhar a leitura coletiva.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Responder a Tarefa 10.</td><td rowspan="2">Sanar dúvidas dos estudantes (apenas se requisitado).</td><td rowspan="2">Registrar, por escrito, uma resposta para a Tarefa 10.</td><td rowspan="2">Individual.</td><td rowspan="2">20 min</td><td rowspan="2">Atividade impressa e caneta.</td><td>Para o professor:</td><td>Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante:</td><td>Resolver e registrar a respostas da Tarefa 10</td></tr>
<tr><td>Devolução da Atividade 5 ao professor.</td><td>Receber as atividades dos estudantes e verificar se estão respondidas.</td><td>Entregar a atividade ao professor, devidamente respondida.</td><td>Sem interação.</td><td>2 min</td><td>Sem artefatos.</td><td colspan="2">Sem uso de artefatos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Discussão coletiva das respostas dadas a Tarefa 10.</td><td rowspan="2">Mediar a discussão dos estudantes.</td><td rowspan="2">Socializar as respostas apresentadas e discuti-las.</td><td rowspan="2">Em grupo.</td><td rowspan="2">4 min</td><td rowspan="2">Respostas dos estudantes.</td><td>Para o professor</td><td>Provocar reflexões sobre as considerações finais.</td></tr>
<tr><td>Para o estudante</td><td>Refletir sobre as considerações finais.</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2024).

6 ANÁLISE DOS DADOS: UM OLHAR SOBRE A PERFORMANCE DIDÁTICA

Para a análise da performance didática das orquestrações instrumentais, dividimos os processos interacionais resultantes do concerto em 3 episódios, em um total de 17 segmentos e 222 turnos. Os turnos selecionados para a análise e aqui dispostos caracterizam falas dos quatro participantes (apontados como Reed, Sue, Johnny e Ben) e do pesquisador (apontado como Professor). Estas falas foram registradas em áudio, por meio da gravação do ambiente (realizada por um notebook por meio de um aplicativo próprio do aparelho) e das telas dos celulares dos participantes (realizada por aplicativos de gravação de tela), de registros escritos nas atividades impressas e de construções realizadas no GeoGebra, desde que estas apontassem para uma postura do participante diante do objeto de estudo.

Cada segmento possui uma temática central, que começa e termina dentro de um mesmo segmento, apresentada por meio dos turnos. A análise dos dados foi microgenética, dada pontual e qualitativamente, à medida que os fatos são apresentados no interior dos episódios.

Episódio 1

O Episódio 1 apresenta um movimento rápido do concerto, o Primeiro movimento (com as orquestrações instrumentais OI_1 e OI_2, Atividades 1 e 2 e Tarefas 1 e 2) (ver Figura 39) que conferiu expressivos avanços nos conhecimentos probabilísticos dos participantes, ainda que neste movimento as simulações para os experimentos aleatórios e o uso do aplicativo GeoGebra ainda não tenham se iniciado.

Figura 39: Mapa do Primeiro movimento.

Primeiro movimento	
OI_1	OI_2
AT1	AT2
T1	T2

AT: Atividade T: Tarefa

Fonte: O autor (2024).

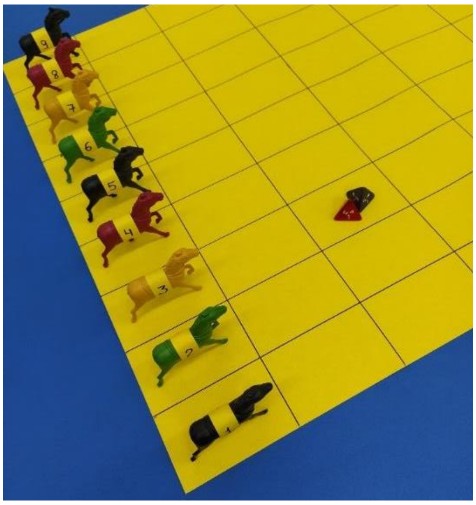
A Atividade 1 foi entregue a cada um dos participantes. As regras e os objetivos do jogo foram apresentados. A princípio, a intenção foi provocar a reflexão sobre as regras do jogo, sem que este fosse executado, a fim de avaliar as primeiras percepções intuitivas dos estudantes sobre os mecanismos probabilísticos envolvidos. Nenhum deles conhecia o jogo. Reed, ao ouvir sobre qual a “chance” de vitória de cada cavalo, instantaneamente esboçou um leve sorriso, o que pareceu indicar que ele havia entendido “o segredo” do jogo e estava pronto para utilizar isso.

Ben não conhecia o dado tetraédrico (de 4 faces), inclusive questionando se, de fato, o maior valor de cada dado era 4. O estranhamento se deve ao fato, provavelmente, de ele estar acostumado ao tradicional dado hexaédrico (de 6 faces). Os demais já conheciam o dado tetraédrico, pois a professora da escola já havia lhes mostrado, mas nunca tinham o utilizado. O tradicional dado hexaédrico (de 6 faces), por outro lado, era muito conhecido e já havia sido utilizado, exaustivamente, pelos quatro.

Durante toda a Atividade 1, os estudantes mantiveram-se concentrados e sempre escrevendo algo (pouquíssimo tempo pensando e muito tempo escrevendo). Ao concluírem suas respostas, revisaram as suas anotações com atenção e, enquanto todos não haviam terminado, quem já havia concluído continuou revisando sua escrita. Todos entregaram ao mesmo tempo. Em seguida, recolhi a Atividade 1 e conversamos sobre o jogo.

Todos gostaram do jogo. É perceptível que dominavam os conceitos de “impossível” e “certo” em eventos aleatórios. Reed comentou sobre o fato do cavalo 5 ter mais chance de vitória, pois há mais possibilidades para se obter a soma 5. Sue e Johnny foram surpreendidos, não haviam pensado sobre isso, mas compreenderam sem muita dificuldade. Ben já tinha essa percepção, ela só foi validada. Em seguida, ocorreu a realização do jogo em si. A Figura 40 apresenta o tabuleiro utilizado.

Figura 40: Tabuleiro do jogo corrida de cavalos com dois dados.



Fonte: O autor (2024).

Os estudantes se divertiram muito com o jogo, fazendo questão de jogar os dados, de movimentar os cavalos, e de apostar, é claro. Foram percebendo que, de fato, alguns cavalos costumavam andar mais casas do que outros, mas que não era o mesmo quem ganhava toda vez. Em seguida, eles responderam a Atividade 2 e a devolveram.

Segmento 1

...sobre quem não tinha chance alguma de vencer.

Turnos [1 – 5]

Quando a mera descrição das regras do jogo era o único artefato acumulado até então, na Atividade 1, já havia a percepção intuitiva sobre a impossibilidade dos cavalos 1 e 9 vencerem a corrida. Com exceção de Sue, que percebeu este fato para o cavalo 9, mas não percebeu para o cavalo 1. Os turnos [1 – 4] são respostas dadas na Atividade 1, antes de realizar o jogo.

> [1] Ben – Em todos os dois dados ideais, cavalos de numeração 1 e 9 ficam incapacitados de participarem. Dado como soma mínima: “2” e soma máxima: “8”. [...] Consequentemente, na parte do enunciado generalizando “todos” os cavalos, até os de numeração 1 e 9, a resposta é não. Nem todos os cavalos possuem chance de vitória, visto que possuem numerações impossíveis de serem atingidas em uma soma de 1 – 4 (dois dados de 1 – 4).

> [2] Johnny – Não, apenas os cavalos de número 2 a 8 possuem chance de vitória. Isso acontece porque a menor soma possível dos dados de 4 faces é 2 (obtido ~~po~~ pela soma de dois lados 1) e a maior soma possível dos dados de 4 faces é 8 (obtido pela soma de duas faces 4 do dado). Logo, os cavalos 1 e 9 não podem ganhar o jogo por não se encaixar no intervalo de resultados favoráveis da soma das faces do dado.

> [3] Reed – Não, pois percebe-se que os números que estão na periferia, ou seja, o maior e o menor possuem 0% de chance de andar uma casa, pois como os dois dados possuem números de 1 a 4, a menor soma será 2 e a maior soma será 8, assim, impossibilitando que os cavalos numerados de 1 a 9 andem ~~se~~ nenhuma casa.

> [4] Sue – Não, pois como o dado tem quatro faces mesmo jogando dois, não irá completar o número 9, ou seja, 4+4=8. 8 é o valor máximo que pode chegar, sendo assim o cavalo 9 tem 0% de conseguir chegar e vencer a corrida.

O fato de o jogo envolver a manipulação de geradores aleatórios, como os dados, e o emprego de linguagem cotidiana para expressar ideias probabilísticas, conforme Batanero (2005), caracteriza-se a mobilização explícita do significado intuitivo da probabilidade nesta etapa.

Após a rodada de jogos e a interação com as percepções dos demais participantes, Sue conseguiu notar que a vitória também era impossível para o cavalo 1, apresentando a seguinte conclusão na Atividade 2:

> [5] Sue – E o número 1 e 9 seria impossível por conta do dado de 4 faces, no caso, não teria como já que o número mínimo da soma seria 2 do 1+1=2 e o máximo seria 8 do 4+4=8. 0% de chance.

É possível verificar que por meio da realização do jogo e da socialização com os demais participantes, Sue conseguiu avançar na sua compreensão sobre o espaço amostral do experimento aleatório, refinando sua análise sobre a situação. Este é um atributo da probabilidade, poder ser revisável com a experiência.

Segmento 2

... sobre a não-equiprobabilidade do espaço amostral.

Turnos [6 – 17]

Apesar de os participantes terem tido uma boa intuição sobre a impossibilidade de ocorrência de determinados eventos (vitória dos cavalos 1 e 9), não se pode falar o mesmo sobre a questão da não-equiprobabilidade do espaço amostral, uma vez que dois participantes (Johnny e Sue) cometeram equívocos quanto a isso, um participante (Ben) teve a intuição de que as probabilidades não eram as mesmas, mas isso lhe pareceu tão absurdo que ele não admitiu tal fato e apenas um participante (Reed) foi assertivo quanto às probabilidades serem diferentes.

> [6] Johnny – Tendo em vista que apenas 7 cavalos podem ganhar o jogo, a probabilidade, em cada rodada, de um cavalo avançar fica sendo $\frac{1}{7}$.

É perceptível que Johnny admitiu o espaço amostral como equiprovável e conferiu, para cada um dos sete cavalos que possuíam chance de vitória, a mesma probabilidade de $\frac{1}{7}$, o que não está correto. Reforça-se, assim, que o conceito de não-equiprobabilidade precisa ser mais inserido na Educação Básica, "dado que as interpretações dos estudantes revelaram que o pensamento equiprovável está impregnado e é aceito como verdade absoluta, sem se questionar sobre os eventos não equiprováveis" (Souza, 2015, p. 34).

A experiência massiva dos estudantes com espaços amostrais equiprováveis na escola pode resultar num treinamento falho das suas próprias intuições. Essas experiências estabilizam a ideia de que, em eventos aleatórios, todos os casos possuem a mesma probabilidade de ocorrência, o que provoca o imediatismo e a certeza de quantificar em $\frac{1}{7}$ as probabilidades, sem pensar com profundidade sobre isso. É o ciclo de constituição da intuição, conforme Fischbein (1975), indicando que a depender de como se forma, a intuição pode falhar.

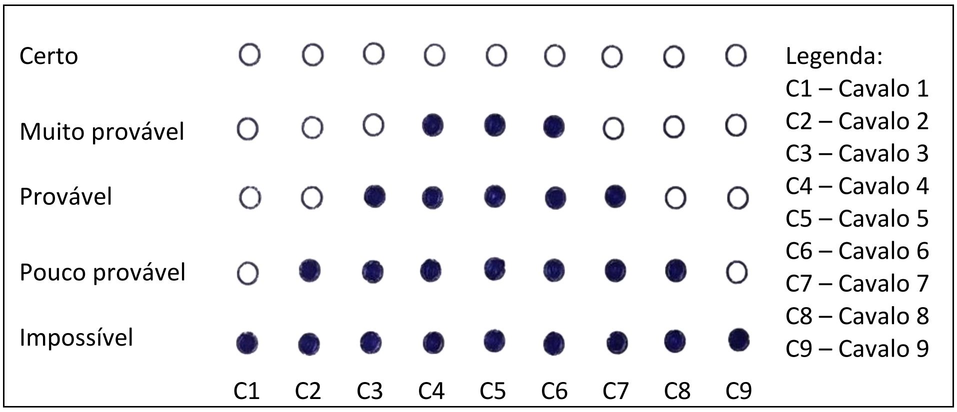
Após o jogo, no qual notou certa vantagem de alguns cavalos, Johnny reformulou a sua conclusão na Atividade 2.

> [7] Johnny – O cavalo central [cavalo 5] possui mais possibilidades de soma do que os cavalos dos extremos, portanto, possui mais chances de ganhar do que os outros cavalos.

Johnny compreende, agora, que as probabilidades não são iguais, mas não arriscou, desta vez, em quantificar estas probabilidades, assim como o fez na Atividade 1. Esta seria uma tarefa bem difícil, como sabemos, mas Johnny não sabia disso. O experimento de realizar o jogo, a partir da observação dos seus resultados, permitiu uma atualização das probabilidades atribuídas.

A Figura 41 traz o gráfico construído com as atribuições subjetivas de probabilidade dadas por Johnny. Já é possível notar uma simetria na distribuição das probabilidades, com os cavalos 4, 5 e 6 ocupando a mesma posição nas chances de vitória.

Figura 41: [8] Resposta de Johnny para a Tarefa 2.



Fonte: O autor (2024).

Sue também apresentou incompreensões sobre não-equiprobabilidade, conforme sua explanação feita na Atividade 1, presente no turno [9].

> [9] Sue – Já os outros [cavalos, excluindo o 9] teriam 50% de chance de ganhar e os outros teriam 50% de perder, no caso $\frac{1}{2}$ de probabilidade.

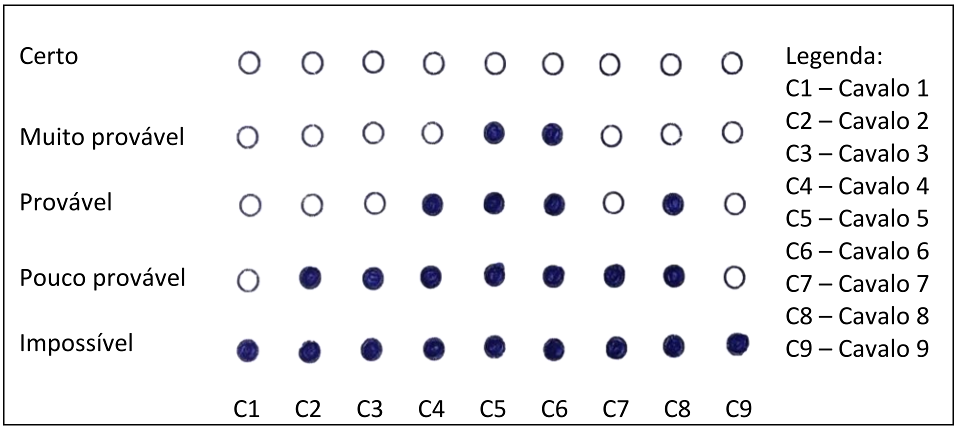
Nesse caso, Sue apresentou uma confusão muito comum entre possibilidade e probabilidade: como, para cada cavalo, há a possibilidade de ganhar e a possibilidade de perder, ela atribuiu 50% de probabilidade de vitória para cada cavalo. Este erro também está ligado a não-equiprobabilidade do espaço amostral. Caso Sue reconhecesse que o número de possibilidades que levam a ganhar não é o mesmo número de possibilidades que levam a perder, essa probabilidade poderia ser diferente. Após a realização do jogo, na Atividade 2, Sue modificou a sua conclusão, atualizando as probabilidades.

> [10] Sue – Eu acho que não teria nenhum [cavalo] que fosse certo já que equivale a 100% de certeza, pois no jogo o [cavalo] 5 venceu três vezes mas o [cavalo] 6 venceu duas. E se fosse certo, em todas as partidas eles ele tinha ganhado (o [cavalo] n° 5). [...] Já o

> [cavalo] 5 e o [cavalo] 6 poderia contar uma probabilidade de 85% e 90% mas não teria aqueles 100% de certeza.

Sue compreende agora que alguns cavalos têm probabilidade maior de vitória, ainda que estabeleça valores altos, e arbitrários, para as probabilidades de vitória dos cavalos 5 e 6. Apesar disso, é importante notar que o jogo possibilitou a conclusão de que não era possível garantir a vitória de nenhum cavalo, uma vez que até os cavalos que mais venciam, em alguns momentos também perdiam. Na Figura 42, notamos que Sue atribuiu ao cavalo 7 uma probabilidade menor de vitória, em comparação com o cavalo 8. Isso porque o cavalo 7 venceu menos partidas do que o cavalo 8 na jogatina.

Figura 42: [11] Resposta de Sue para a Tarefa 2.



Fonte: O autor (2024).

Ben sabia que as probabilidades de vitória não eram as mesmas, mas esta ideia lhe pareceu estar incorreta matematicamente.

> [12] Ben – Partindo deste meio [de que os cavalos 1 e 9 não possuem chance alguma de vencer], os cavalos restantes possuem uma chance semelhante para avançarem cada casa. Partindo em termos de possibilidade (e não probabilidade, pois os cavalos possuem a mesma probabilidade em soma), há a chance de maiores cavalos, no eixo de ideias, não matemático, de cavalos no meio se movimentarem mais.

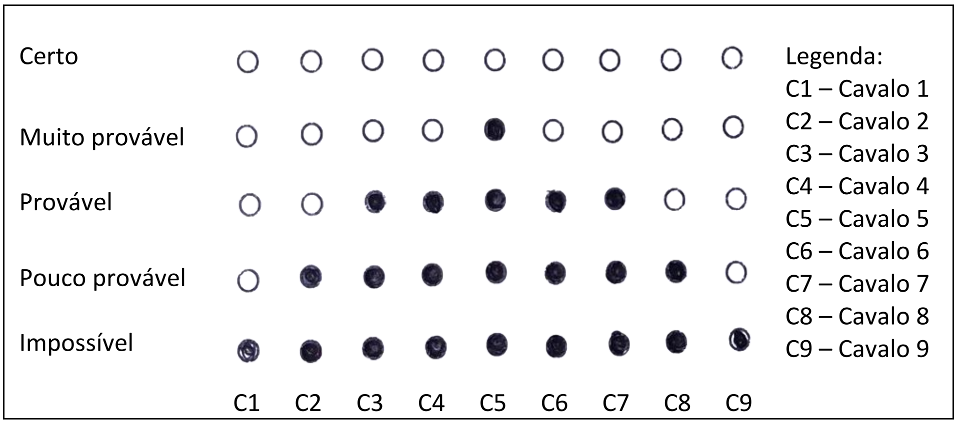
As intuições de Ben são muito conflitantes aqui. Ele diz que há uma chance maior de vitória para alguns cavalos, mas no “eixo de ideias”, não no matemático. De acordo com ele, para a Matemática isso não fazia sentido, mas na prática era o que realmente acontecia. Pelo jeito, os cavalos de Ben não sabem para onde ir. Isso pode ter ocorrido porque algumas das suas experiências, provavelmente as escolares nas aulas de Matemática, lhe dizem que todos os cavalos devem ter a mesma chance de vitória, enquanto outras experiências, provavelmente não-escolares, lhe dizem que alguns cavalos têm sim mais chance de vencer.

Por esta razão, Ben colocou as duas conclusões juntas, mas em caixas separadas, afirmando que para a Matemática (campo de experiências que lhe ensinou a equiprobabilidade universal) todos tinham a mesma chance, e para o “eixo das ideias” (campo de experiências que lhe ensinou sobre a não-equiprobabilidade), situado aparentemente fora da Matemática, alguns tinham mais chance de vencer. Após a realização do jogo, Ben pareceu quebrar a caixas e iniciar a criação de uma simbiose entre as duas bases de intuição.

> [13] Ben – A existência de maiores fatores de soma para o C5 permite, estatisticamente, uma maior chance de vitória, que sobe ~~em relação ao cavalo C1 e C9~~, (que começa dos cavalos C1 e C9), e sobe a medida que chega ao cavalo central [cavalo 5]. Como dado em minha perspectiva, chances especiais para os cavalos centrais (ou próximos) dado que existem mais opções de soma.

Podemos notar que a maior chance de vitória de alguns cavalos, antes presente apenas no “eixo das ideias”, agora é justificada estatisticamente, um indicativo da iminente incursão entre o eixo das ideias e a Matemática. A Figura 43 traz o gráfico construído com as atribuições subjetivas de probabilidade dadas por Ben. Já é possível notar uma simetria na distribuição das probabilidades, mas diferente de Johnny, o cavalo 5 ocupa sozinho a posição de Muito provável, com os cavalos 4 e 6 ocupando uma posição a menos nas chances de vitória.

Figura 43: [14] Resposta de Ben para a Tarefa 2.



Fonte: O autor (2024).

O único participante que estava, de fato, seguro quanto a não-equiprobabilidade do espaço amostral foi Reed.

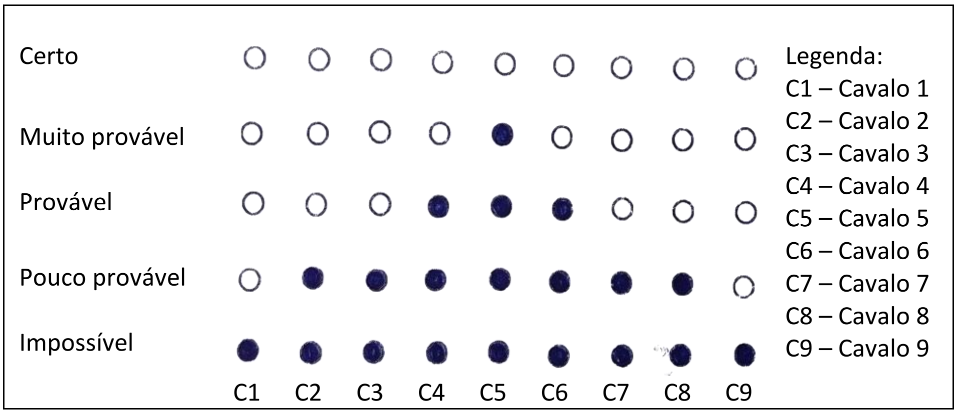
> [15] Reed – Além disso, o cavalo que possuir o número com maior possibilidade de soma será o que mais irá andar, que seria o 5, na qual possui quatro maneiras diferentes em chegar neste resultado, que seriam: (4+1); (1+4); (3+2) e (2+3).

Notamos que Reed é assertivo ao afirmar que a soma 5 possui mais possibilidades de ser obtida do que as demais, mas não compreende ainda que ser mais provável não garante que será o cavalo 5 que mais irá andar. Por exemplo, é possível que em 100 lançamentos o cavalo 5 permaneça no ponto de partida, ainda que pouco provável. Estudar esta probabilidade a partir das frequências dos resultados pode contribuir para que Reed refine seus argumentos. Após o jogo, na Atividade 2, Reed apenas consolidou sua posição.

> [16] Reed – Obs: Mesmo sabendo que os cavalos ~~C2 e~~ C3 e C7 ~~terem~~ têm uma maior chance que os cavalos C2 e C8, deixei eles nos mesmos níveis, pois eles possuem uma chance menor comparado aos cavalos C4 e C6, já que estes possuem uma ~~chance~~ soma a mais para chegar nestes números.

A Figura 44 traz o gráfico construído com as atribuições qualitativas de probabilidade dadas por Reed. Já é possível notar uma simetria na distribuição das probabilidades, e assim como Ben, o cavalo 5 ocupa sozinho a posição de Muito provável, com os cavalos 4 e 6 ocupando uma posição a menos nas chances de vitória.

Figura 44: [17] Resposta de Reed para a Tarefa 2.



Fonte: O autor (2024).

Fechamento do Episódio 1

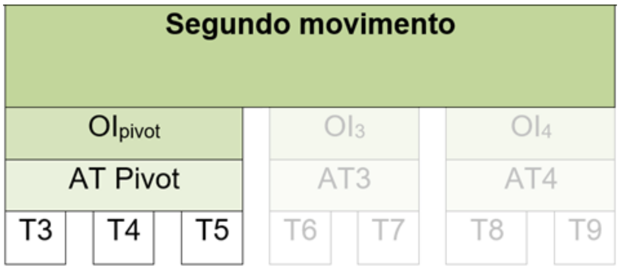
As primeiras ideias intuitivas de probabilidade envolvem o uso de “frases e expressões coloquiais para quantificar eventos incertos e expressar seu grau de crença neles” (Batanero, 2005, p. 253, tradução nossa). Estas primeiras ideias, que surgem ligadas a, entre outras coisas, jogos (Batanero, 2005), como nas Atividades 1 e 2, foram empregadas pelos participantes, indicando que o significado intuitivo da probabilidade foi explorado nestas atividades.

Após a realização do jogo, um experimento aleatório, os participantes puderam revisar as probabilidades atribuídas. “As probabilidades de tais causas poderiam então ser revistas – passar de probabilidades a priori para probabilidades a posteriori” (Batanero, 2005, p, 255, tradução nossa).

Episódio 2

Uma semana após os eventos do Episódio 1, deu-se a execução do Segundo movimento do concerto, um movimento lento (com as orquestrações instrumentais OI_{pivot}, OI_3 e OI_4, Atividades Pivot, 3 e 4 e Tarefas de 3 a 9). Por ser um movimento mais lento, o Segundo movimento foi dividido em dois episódios. O Episódio 2 discute apenas fatos oriundos da OI_{pivot}, com a Atividade Pivot e as Tarefas de 3 a 5 (ver Figura 45).

Figura 45: Mapa do Episódio 2.



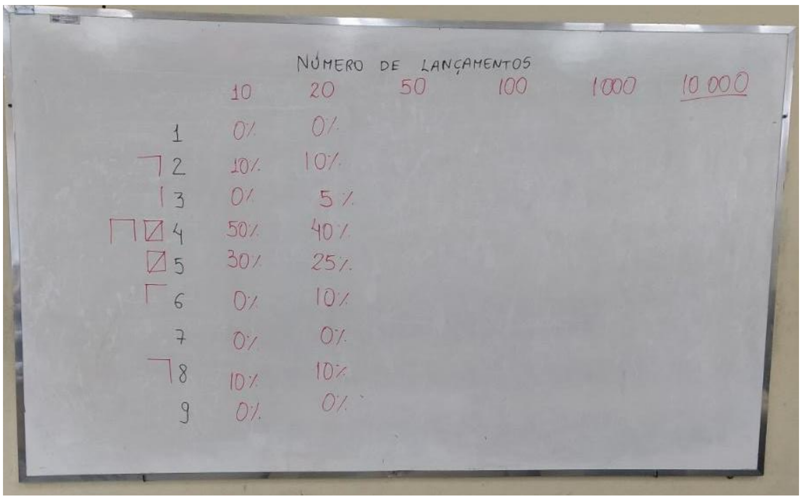
AT: Atividade T: Tarefa

Fonte: O autor (2024).

Conversou-se sobre as dificuldades em se mensurar as probabilidades de vitória de cada cavalo no jogo da semana anterior. Para isso, estabeleceu-se que estudaríamos o experimento aleatório de lançar dois dados tetraédricos e calcular a soma dos pontos obtidos, fundamento do jogo, mas sem considerar o jogo em si e as probabilidades de vitória dos cavalos.

Partindo de uma simulação manual, construiu-se, em um quadro branco disponível na parede da sala de aula, uma tabela na qual foram inseridas as somas de 1 a 9 (ver Figura 46).

Figura 46: Registro da simulação manual no quadro branco.



Fonte: O autor (2024).

Realizou-se o efetivo lançamento dos dois dados tetraédricos, registrando as frequências absolutas de cada uma das somas possíveis, de 1 a 9, e calculando as respectivas frequências relativas. Primeiro, fizemos 10 lançamentos, em seguida, mais 10 lançamentos, totalizando 20 lançamentos. Todos sabiam diferenciar bem a frequência absoluta da frequência relativa, assim como sabiam calcular esta últimas. Johnny pediu para utilizar uma calculadora para calcular as frequências relativas para 20 lançamentos.

A realização de simulação, como apontado por Batanero (2005), é uma característica do significado frequentista da probabilidade, que já começa a ser efetivamente plantado a partir daqui. Os resultados da simulação manual com 20 lançamentos podem ser consultados na Tabela 3.

Tabela 3: Resultados da simulação manual.

	Número de lançamentos			
	10		**20**	
Soma	**Frequência absoluta**	**Frequência Relativa (%)**	**Frequência absoluta**	**Frequência Relativa (%)**
1	0	0	0	0
2	1	10	2	10
3	0	0	1	5
4	5	50	8	40
5	3	30	5	25
6	0	0	2	10
7	0	0	0	0
8	1	10	2	10
9	0	0	0	0
TOTAL	**10**	**100**	**20**	**100**

Fonte: O autor (2024).

Sue chegou a acreditar, por um momento, que a soma 7 era impossível, pois manteve uma frequência igual a 0 mesmo com 20 lançamentos. Avaliou também que a soma 4 era mais provável do que as demais, pois manteve uma frequência maior tanto com 10 quanto com 20 lançamentos. Reed não hesitou e afirmou que, para obter melhores conclusões, “precisa de mais lançamentos”. Informei então que, de fato, precisávamos de mais lançamentos para ter melhores conclusões. Então faríamos para 50, 100, 1 000 e até 10 000 lançamentos.

Reagiram com risos a esta informação, pois todos tinham a noção do quão trabalhoso seria, talvez até inviável. Foi neste momento em que apresentei o GeoGebra como uma estratégia para conseguirmos fazer isso de uma maneira viável e menos trabalhosa. Apresentei ao grupo, brevemente, os principais recursos do aplicativo GeoGebra que seriam necessários para a execução da próxima atividade.

Entreguei a Atividade pivot. Solicitei que todos colocassem as telas dos seus celulares para gravar, como combinado previamente e, em seguida, coloquei o ambiente para gravar, utilizando um notebook. No primeiro minuto já estavam todos utilizando o celular, muito concentrados, demonstrando calma e atenção. Utilizaram bastante a tabela de códigos e orientações, pois a consultavam mais do que me requisitavam.

Segmento 3

... sobre Ben e a vírgula.

Turnos [18 – 27]

Ben questionou a função da variável n no algoritmo. Na verdade, a função da variável n não era o real interesse de Ben, mas ocorreu um problema e ele julgou que havia sido causado pela variável n.

[18] Ben – É... no caso n é só uma incógnita ou tem um valor definido?

[19] Professor – Não, ele está aí só como um acessório, ele funciona como uma variável, mas que a gente não quer fazer variar aqui.

[20] Ben – Certo. Mas, então...

[21] Professor – Tem... é, a questão é uma vírgula [ver Figura 47].

[22] Ben – Ah, ok.

Figura 47: Faltou uma vírgula.

Fonte: O autor (2024).

[23] Professor – Coloca uma vírgula separando ele. Então, isso...

[24] Ben – Nessa parte?

[25] Professor – Isso [ver Figura 48].

[26] Ben – Aí agora eu coloco o d.

[27] Professor – Coloca o valor.

Figura 48: Código corrigido com a vírgula.

Fonte: O autor (2024)

O problema foi uma vírgula que Ben esqueceu de colocar. Após o problema ser identificado, tudo funcionou bem. Algumas dificuldades podem surgir apenas por desatenção, o que é natural. Na posição de professor, é importante estar atento, em primeiro lugar, a essas questões, quando os estudantes expressarem alguma dificuldade.

Segmento 4

... sobre os *bugs* no aplicativo de Sue.

Turnos [28 – 63]

Ocorreram alguns problemas no aplicativo de Sue durante a Atividade Pivot. A tabela de frequências não estava sendo gerada na Janela de Visualização, ainda que o algoritmo estivesse correto. A princípio, Sue digitou os códigos incorretamente, diferentes do que foi indicado no fluxograma. Quando viu que não deu certo, ela voltou aos códigos e os corrigiu, mas alguns controles deslizantes haviam sido criados e agora faziam parte da programação.

Quando digitou o primeiro código corretamente, ela deveria ter clicado no botão Enter para concluir e a Caixa de Entrada aparecer novamente. Ela não fez e sentiu dificuldade para retomar à Caixa de Entrada. Após alguns segundos, ela clicou na Janela de visualização e a Caixa de Entrada apareceu, demonstrando uma nova estratégia eficiente, elaborada por ela própria, para alcançar o objetivo desejado.

Quando ela pediu ajuda, apagamos os controles deslizantes e deixamos só o que precisava. Buscamos pela tabela de frequências na Janela de Visualização e não a encontramos. Ela pareceu ter se animado com o fato de mesmo o professor não ter conseguido resolver, o que parecia isentá-la de um eventual fracasso.

> [28] Professor – Ainda não apareceu. Realmente era pra ter aparecido. Eu acredito que possa ser um *bug* do aplicativo. O que é que a gente vai fazer. Recomeçar. Pode ser?
>
> [29] Sue – Pode ser.
>
> [30] Professor – Então vou vir aqui. Limpar tudo. Tenta fazer de novo para ver se agora a gente consegue.
>
> [31] Sue – Certo. Aí aqui, esse negócio aqui, que é de soma, aí bota um “maisinho” [diminutivo de mais, referência ao símbolo + para adição], né?
>
> [32] Professor – Isso, é realmente um mais.
>
> [33] Sue – Certo.

Na segunda tentativa ela se saiu melhor com os códigos. Passou a utilizar o Enter para concluir a digitação de um código e retornar à Caixa de Entrada. Após alguns instantes, solicitou ajuda novamente.

> [34] Sue – Tá aparecendo não.
>
> [35] Professor – Não se preocupa, que às vezes é coisa do próprio aplicativo. Tu já tinha desabilitado aqui, não foi?

[36] Sue – Foi.

[37] Professor – Número aleatório... tudo certinho [...] tabela de frequências que está dando um trabalhinho de a gente conseguir construir, né?

[38] Sue – Isso.

[39] Professor – Aqui ó, é como se ela [a tabela] estivesse perdida, né?

[40] Sue – Isso.

[41] Professor – Estou puxando [movimentando pelo plano cartesiano da janela de visualização] para procurar e eu não... não a encontro. Não tem problema. [...] Aí o que é que eu vou pedir. Como a tabela é um recurso visual, ou seja, as frequências, de toda forma, você tem aqui, você consegue continuar com as outras etapas. Então eu vou pedir para que tu continue com as outras, ignorando a tabela. Porque as frequências absolutas tu tens, vamos agora calcular as frequências relativas, tudo bem? A tabela é importantíssima, ajuda né...

[42] Sue – Isso.

[43] Professor – Mas ela pode ser dispensada.

[44] Sue – Perfeito.

[45] Professor – Depois a gente ver se aparece.

[46] Sue – Tá certo, obrigada.

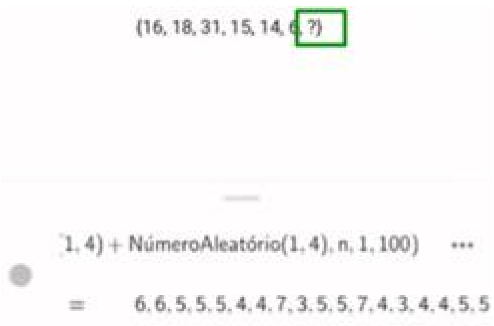
Novamente, após alguns instantes.

[47] Sue – Agora, o de 100 [lançamentos] não apareceu, tava dizendo como se fosse... que o número era pequeno

[48] Professor – Foi?

[49] Sue – Foi [ver Figura 49].

Figura 49: Nenhuma soma igual a 8... ainda.



Fonte: O autor (2024).

[50] Professor – A gente pode tentar de novo. Às vezes não pega uma vez com um número, mas às vezes pega quando a gente tenta de novo.

[51] Sue – Sim.

[52] Professor – Na verdade, coloca logo os de 200 [lançamentos] e depois a gente tenta 100 [lançamentos] de novo.

[53] Sue – Pronto.

[54] Professor – A ordem não importa não, nesse caso.

Alguns minutos depois, Sue chamou com um ar nitidamente constrangido e “cansado” das coisas darem errado, esfregando a mão na testa e rindo (provavelmente, nervosa).

[55] Professor – Pegou o de 100?

[56] Sue – Não [rindo], ele saiu.

[57] Professor – Ham?

[58] Sue – Saiu.

[59] Professor – Saiu.

[60] Sue – Vou ter que começar de novo.

[61] Sue – Mas falta só o último.

[62] Professor – Então a gente deixa tanto o de 100 como o de 10 000 fora. 5 000 já dá para ter uma boa noção, tudo bem?

[63] Sue – Certo.

A sequência de problemas técnicos ocorridos com Sue nos recorda que, apesar de todo o seu potencial, o aplicativo para *smartphones* Suíte GeoGebra possui limitações, como a ocorrência de alguns *bugs*, ainda que todas as ferramentas sejam utilizadas corretamente. Estar preparado para estes eventuais problemas é fundamental para o bom andamento da atividade. Ainda com os vários problemas ocorridos, Sue conseguiu concluir o experimento com um número suficiente de dados e em tempo hábil. Muitas decisões *ad hoc* foram tomadas pelo professor, como em [28], na direção de recomeçar, uma vez que ainda estava no início, e em [41] e [62], na direção de seguir em frente apesar dos problemas, uma vez que o impacto destes problemas não causaria grandes perdas na aprendizagem.

No que tange à gestão afetiva, é nítido que Sue ficou desconfortável que tenham ocorrido problemas desta natureza apenas com ela. Por esta razão que a todo momento o pesquisador destacava que é natural isso acontecer, inclusive já havia acontecido com ele próprio.

Este segmento tratou mais especificamente sobre uma análise crítica do artefato tecnológico aplicativo Suíte GeoGebra para *smartphones*, mas ainda a partir das dificuldades foi possível discutir com Sue pontos relevantes para a construção do significado frequentista da probabilidade, como o fato de que a ausência dos resultados para 100 e para 10 000 lançamentos não impactava muito na realização das tarefas, uma vez que era a progressão dos resultados das simulações que mais importavam, não os resultados isolados. Que os 10 000 lançamentos teriam impacto positivo na análise, assim como 1 milhão e 10 milhões lançamentos teriam, mas que a comparação até os 5 000 lançamentos já propiciaria uma excelente visão global. E propiciou, pois Sue fez ótimas estimativas com os resultados que obteve.

Segmento 5

... sobre Reed pulando etapas.

Turnos [64 – 78]

Aqui, a questão central não está nem na probabilidade nem no artefato digital GeoGebra. O algoritmo foi decomposto em várias partes menores, a fim de facilitar a sua execução. Mas estas partes precisam ser executadas na ordem indicada sem excluir nenhuma etapa e, provavelmente, por um descuido, Reed ignorou uma delas, o que fez com que não fosse mais possível seguir em frente.

[64] Reed – Aqui eu fiz esta parte, esse código.

[65] Professor – Isso.

[66] Reed – Aí quando eu confirmo, ele cita isso [Ver Figura 50].

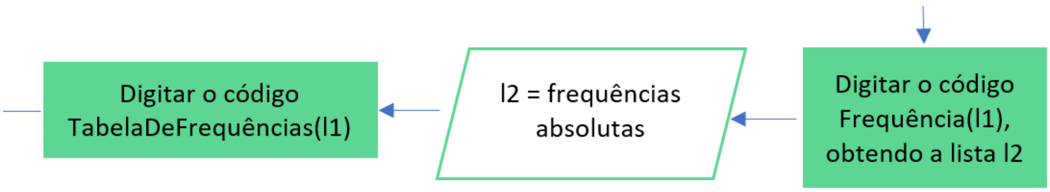
Figura 50: [67] Erro de argumento inválido.

Fonte: O autor (2024).

[68] Professor – Vou ver se ele tá todo ok, visse?

[69] Professor – Faltou tu fazer esse daqui. Esse, o da frequência em si [Digitar o código Frequência(l1), obtendo a lista l2]. Tu já foi direto para a tabela de frequências [Digitar o código TabelaDeFrequências(l1)] [ver Figura 51].

Figura 51: Trecho do Fluxograma 1.



Fonte: O autor (2024).

Reed não executou a etapa Digitar o código Frequência(l1), obtendo a lista l2 e, portanto, não construiu a lista l2. Assim, ao tentar construir a sequência de frequências relativas, que tem como uma de suas entradas a lista l2, o programa automaticamente interpreta l2 como um controle deslizante (um número real, não uma lista), identificando um argumento inválido em l2.

> [70] Reed – Ah.
>
> [71] Professor – Aí o que é que eu vou fazer. Como tinha botado esse, ele gerou o controle deslizante l2, eu vou apagar, tudo bem?

Era imprescindível apagar o controle deslizante l2 criado automaticamente, mas foi importante pedir licença ao participante para fazer isso, pois era um experimento dele e ali, na função de professor, o pesquisador deveria respeitar aquele espaço que é dele.

> [72] Reed – Isso.
>
> [73] Professor – Esse aqui vai ter que apagar, depois faz de novo.
>
> [74] Reed – Apaga, de boa.
>
> [75] Professor – E tu vai fazer esse agora, do frequência, aí depois dele tu pode fazer aquele.
>
> [76] Reed – Certo, obrigado.
>
> [77] Professor – Se der errado, tu me chama de novo.

No turno [77], o professor demonstra disponibilidade, já que um erro, por mais simples que possa parecer, pode gerar ao seu redor um grande raio de insegurança.

> [78] Reed – Certo [ver Figura 52].

Figura 52: Código corrigido com um argumento válido.

$$\mathrm{l3} = \mathrm{Sequência}\left(\mathrm{Elemento}(\mathrm{l2}, i)\ \frac{100}{\mathrm{Soma}(\mathrm{l2})}, i\right.$$

$$= \{8, 12, 18, 22, 24, 10, 6\}$$

Fonte: O autor (2024).

Reed consertou com agilidade o problema, obtendo o desejado.

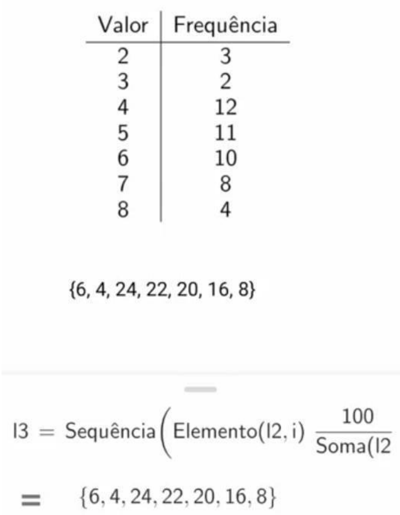
Segmento 6

... sobre Ben e as porcentagens.

Turnos [79 – 84]

> [79] Ben – Aqui, não está mostrando a porcentagem. Mas eu escrevi todos os códigos...

Figura 53: [80] Tabela de frequências de Ben.



Fonte: O autor (2024).

[81] Professor – O símbolo, né? Ele não mostra mesmo não, aí são esses números aqui. Então é 6%, 4%.

[82] Ben – Certo.

[83] Professor – Ele só realmente não coloca o símbolo de porcentagem não.

[84] Ben – Ok.

Ben sentiu falta dos símbolos de porcentagem acompanhando as frequências relativas, o que é coerente, indicando-nos que seria interessante ajustar as orientações escritas, a priori, trazendo essa informação.

Segmento 7

... sobre a indisposição de Johnny em operações básicas.

Turnos [85 – 86]

Johnny questionou se a soma das estimativas na Tarefa 4 precisava ser 100% ou não. Ele percebeu o padrão na Tarefa 3 e pareceu convicto de que isso era necessário, mas talvez não estivesse com disposição em estimar valores tais que a sua soma fosse 100%.

[85] Johnny – A soma das estimativas precisa, necessariamente, dar 100%? Ou...

[86] Professor – Como você achar que fica melhor.

Cabe recordar que foi Johnny quem pediu para utilizar uma calculadora no cálculo das frequências relativas dos 20 lançamentos na simulação manual, o que pode indicar, de fato, uma indisposição para a realização de operações básicas. Este aspecto deve ser considerado em atividades que utilizam com tanto protagonismo artefatos digitais, nas quais os significados envolvidos nos procedimentos subordinam as operações (que são realizadas, inclusive, pela máquina), para que o estudante não tente excluir totalmente o clássico papel e caneta. Os novos recursos servem para agregar, não substituir.

Segmento 8

... sobre a porcentagem pode ser um número decimal.

Turnos [87 – 89]

Reed questionou se as porcentagens obtidas nas simulações podiam ser números decimais

> [87] Reed – A porcentagem pode dar em decimal, né?
>
> [88] Professor – Pode, pode dar.
>
> [89] Reed – Ah, primeira.

Neste momento, Reed assume uma postura de confrontamento diante do objeto de estudo, a partir dos resultados da simulação, na medida que questiona, em menor ou maior grau, a validade dos resultados, a partir da sua forma (de número não inteiro). Foi algo simples, mas revela que os mínimos detalhes são dignos de atenção dos estudantes se, de alguma forma, gerar perturbação na sua compreensão. Ao observar as estimativas de Reed na Tarefa 4, todas com números inteiros, é possível conjecturar também que ele, de fato, esperava apenas valores inteiros.

Segmento 9

... sobre os meios termos de Ben.

Turnos [90 – 93]

Na Tarefa 5, Ben perguntou se não havia opções intermediárias entre as bolinhas, para detalhar com mais exatidão os dados que ele obteve na simulação.

> [90] Ben – Teria como colocar, por exemplo, nesse meio termo aqui, um...
>
> [91] Professor – Não, seria interessante, mas nesse caso você realmente vai buscar o que representaria melhor o que você percebeu.
>
> [92] Ben – Certo.
>
> [93] Professor – Mesmo que não fique uma coisa muito exata. E realmente não fica não.

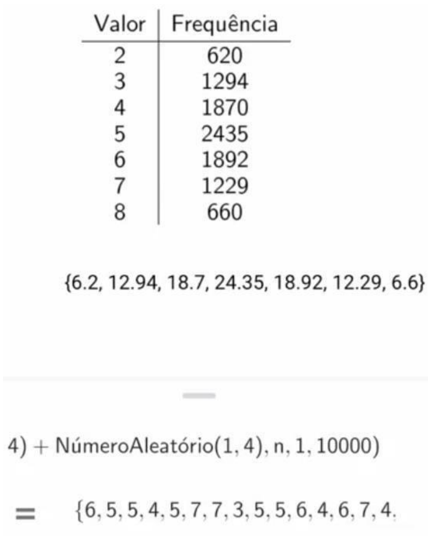
Isso mostra que Ben já tinha refinado as suas estimativas a ponto de ter a necessidade de diferenciar melhor as medidas das frequências relativas de cada soma.

Fechamento do Episódio 2

É perceptível que a gestão do tempo não é coletiva, considerando que o tempo de término de cada participante foi muito espaçado: Ben aos 27min, Johnny aos 35min, Reed aos 38min e Sue aos 50min. Mas isso já era esperado.

A OI_{pivot} representou um grande avanço na aprendizagem da probabilidade frequentista, ao notarmos que todos os participantes fizeram estimativas muito coerentes com os resultados das suas simulações, indicando que, de alguma forma, já compreendiam, mesmo que minimamente, a ideia de as frequências relativas convergirem. Apresentamos agora todos os resultados das simulações, com as tabelas de frequências absolutas gerada pelo GeoGebra, as tabelas de frequências relativas construídas pelo registro dos participantes na Tarefa 3, as tabelas com as estimativas deles na Tarefa 4 e os gráficos construídos com as atribuições subjetivas de probabilidade.

Figura 54: Tabela de frequências de Ben na Atividade Pivot.



Valor	Frequência
2	620
3	1294
4	1870
5	2435
6	1892
7	1229
8	660

{6.2, 12.94, 18.7, 24.35, 18.92, 12.29, 6.6}

4) + NúmeroAleatório(1, 4), n, 1, 10000)

= {6, 5, 5, 4, 5, 7, 7, 3, 5, 5, 6, 4, 6, 7, 4.

Fonte: O autor (2024).

Tabela 4: Resultados da simulação de Ben na Tarefa 3.

	Número de lançamentos								
	50	**100**	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**	**5000**	**10 000**
Soma 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Soma 2	6	7	6	6	7	5,85	6,38	6,28	6,2
Soma 3	4	7	13	14,2	12,6	12,4	12,2	12,36	12,94
Soma 4	24	19	14,5	20,2	18,4	19,95	18,78	18,6	18,7
Soma 5	22	32	22,5	25	25,4	24,85	25,25	24,7	24,35
Soma 6	20	20	25	15,8	16,2	19	19,2	18,14	18,92
Soma 7	16	8	13	12,6	14,1	12,1	12,08	13,26	12,29
Soma 8	8	7	6	6,2	6,3	5,85	6,13	6,66	6,6
Soma 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Fonte: O autor (2024).

O tratamento de tabelas de números aleatórios e o uso de tabelas estatísticas, presentes nesta etapa, são uma característica do significado frequentista da probabilidade (Batanero, 2005).

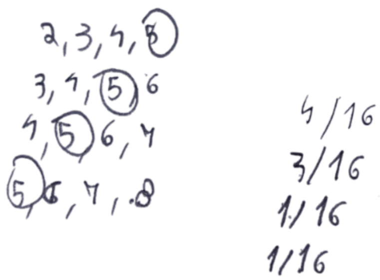
Tabela 5: Estimativas de Ben na Tarefa 4.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa	0	6,25	12,5	18,75	25	18,75	12,5	6,25	0

Fonte: O autor (2024).

Na Tarefa 4, como auxílio às suas estimativas, Ben descreveu em detalhes o espaço amostral para o fenômeno aleatório em estudo e calculou as probabilidades de cada soma (ver Figura 55). Ben já havia assimilado que as frequências relativas convergiam para as probabilidades teóricas. Já não eram mais estimativas apenas, eram os valores exatos.

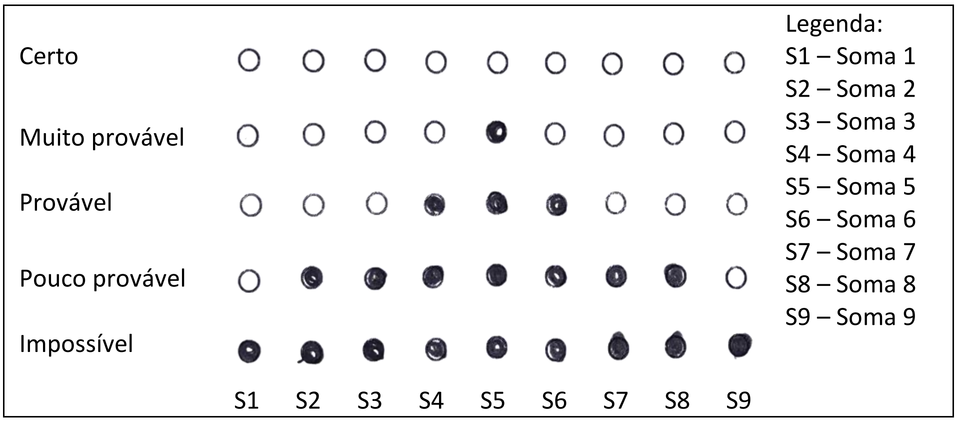
Figura 55: Espaço amostral descrito por Ben.



Fonte: O autor (2024).

O uso de ideias de combinatória para descrever o espaço amostral e a noção de probabilidade como o quociente de casos favoráveis e possíveis, empregadas por Ben, indicam a mobilização do significado clássico da probabilidade, de acordo com Batanero (2005). De fato, ainda que a definição clássica seja restritiva e não responda ao que realmente é probabilidade, oferece um método prático para calcular probabilidades de alguns eventos simples (Batanero, 2005).

Figura 56: Resposta de Ben para a Tarefa 5.



Fonte: O autor (2024).

Mais uma vez, Ben apresenta uma distribuição de probabilidades simétrica, com a soma 5 como mais provável do que as demais.

Figura 57: Tabela de frequências de Reed na Atividade Pivot.

Valor	Frequência
2	618
3	1230
4	1923
5	2455
6	1949
7	1229
8	596

{6.18, 12.3, 19.23, 24.55, 19.49, 12.29, 5.96}

Fonte: O autor (2024).

Tabela 6: Resultados da simulação de Reed na Tarefa 3.

	Número de lançamentos								
	50	**100**	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**	**5000**	**10 000**
Soma 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Soma 2	8	12	7,5	4,6	6,5	5,8	5,88	5,56	6,18
Soma 3	12	13	13,5	15	12,9	12,6	12,38	12,88	12,3
Soma 4	18	17	16,5	20,6	18,9	19	18,75	17,8	19,23
Soma 5	22	24	22,5	23	23,8	25,75	25,1	25,58	24,55
Soma 6	24	19	20,5	17	18,5	18,35	18,75	19,38	19,49
Soma 7	10	9	14,5	11,6	12,1	12,6	13,45	12,48	12,29
Soma 8	6	6	5	8,2	7,3	5,9	6,3	6,32	5,96
Soma 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Fonte: O autor (2024).

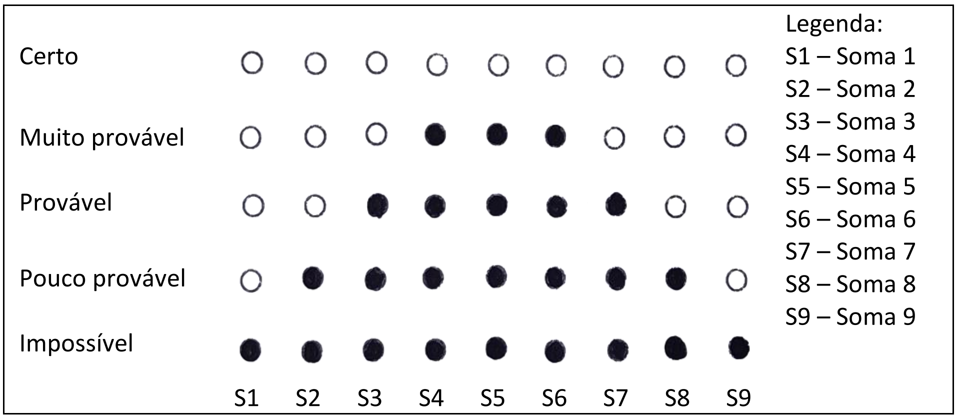
Tabela 7: Estimativas de Reed na Tarefa 4.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	6	12	20	25	20	12	6	0

Fonte: O autor (2024)

Assim como comentado no Segmento 8, todas as estimativas de Reed são números inteiros, o que pode indicar que ele esperava que as frequências relativas convergiriam para valores inteiros. A soma das estimativas de Johnny resultou em 101%. Ou ele se equivocou quando as ajustava para totalizar 100% ou nem se lembrou de fazer isso. Apesar disso, a distribuição das estimativas de Reed foi simétrica. As estimativas para as somas 2 e 8 foram iguais, assim como para as somas 3 e 7 e para as somas 4 e 6.

Figura 58: Resposta de Reed para a Tarefa 5.



Fonte: O autor (2024).

Reed apresenta uma distribuição de probabilidades simétrica, mas coloca as somas 4, 5 e 6 no mesmo nível, talvez porque entre as suas estimativas, a frequência relativa das somas 4 e 6 esteja mais próxima da frequência relativa da soma 5 do que da frequência relativa das somas 3 e 7.

Figura 59: Tabela de frequências de Johnny na Atividade Pivot

Valor	Frequência
2	633
3	1231
4	1900
5	2442
6	1926
7	1227
8	641

{6.33, 12.31, 19, 24.42, 19.26, 12.27, 6.41}

l1 = Sequência(NúmeroAleatório(1, 4) + Nú

= {2, 4, 6, 4, 4, 5, 4, 2, 7, 2, 3, 5, 3, 6, 5, 7,

Fonte: O autor (2024).

Tabela 8: Resultados da simulação de Johnny na Tarefa 3.

	Número de lançamentos								
	50	**100**	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**	**5000**	**10 000**
Soma 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Soma 2	10	5	9	7,4	6,8	6,55	6,03	6,04	6,33
Soma 3	16	19	9	11,4	12,6	11,6	13,65	12,54	12,31
Soma 4	8	18	20	20,4	18,3	17,65	18,3	18,88	19,24
Soma 5	20	19	25	25,2	21,9	26,05	24,1	25,12	24,42
Soma 6	28	21	19	18,4	19,6	18,05	19,1	19,28	19,26
Soma 7	8	12	12	11,8	13,7	13,35	11,9	11,56	12,27
Soma 8	10	6	6	5,4	7,1	6,75	6,93	6,52	6,41
Soma 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Fonte: O autor (2024).

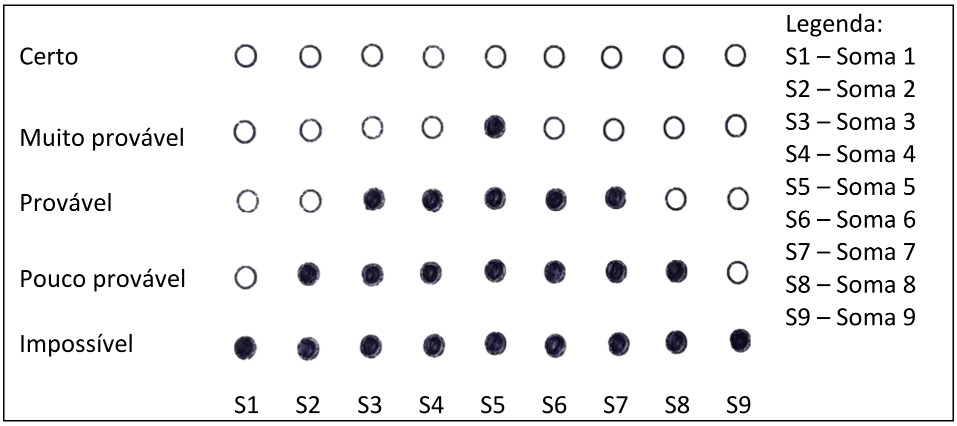
Tabela 9: Estimativas de Johnny na Tarefa 4.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa	0	6,15	12,2	19,13	24,22	19,2	12,05	6,3	0

Fonte: O autor (2024).

A soma das estimativas de Johnny resultou em 99,25%. Diferente de Reed, sobre o qual não temos certeza, Johnny definitivamente pensou sobre a questão de a soma das estimativas precisar ser 100%, uma vez que questionou esse fato no turno [85], assim como comentado no Segmento 7. A resposta do professor no turno [86], mais evasiva, realmente o deixou à vontade para fazer como achasse que fica melhor. Diferente de Ben e Reed, a distribuição das estimativas de Johnny não foi simétrica. As estimativas para as somas 2 e 8 não foram iguais, assim como para as somas 3 e 7 e para as somas 4 e 6. Ainda assim, elas estavam muito próximas.

Figura 60: Resposta de Johnny para a Tarefa 5.



Fonte: O autor (2024).

Lembramos que não foi gerada uma tabela de frequências absolutas pelo GeoGebra para Sue, por esta razão ela não está apresentada a seguir.

Tabela 10: Resultados da simulação de Sue na Tarefa 3.

	Número de lançamentos								
	50	**100**	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**	**5000**	**10 000**
Soma 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Soma 2	6	-	7,5	6,4	5,5	6,6	6,55	5,96	-
Soma 3	10	-	19	13,2	11,6	12,7	12,58	13,02	-
Soma 4	26	-	18	19	19,8	18,45	18,3	18,74	-
Soma 5	28	-	22,5	23,6	25,5	25,4	25,6	25,42	-
Soma 6	16	-	18	20,4	19,2	18,4	18,6	19,06	-
Soma 7	10	-	12,5	11,4	12,1	12,15	12,6	12,3	-
Soma 8	4	-	2,5	6	6,3	6,3	5,78	5,5	-
Soma 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Fonte: O autor (2024).

Na tabela de frequências relativas de Sue não constam resultados nem para 100 nem para 10 000 lançamentos, como discutido no Segmento 4. Ainda assim, os resultados da simulação para os outros números de lançamentos permitiram um bom comparativo e proporcionou boas estimativas por Sue.

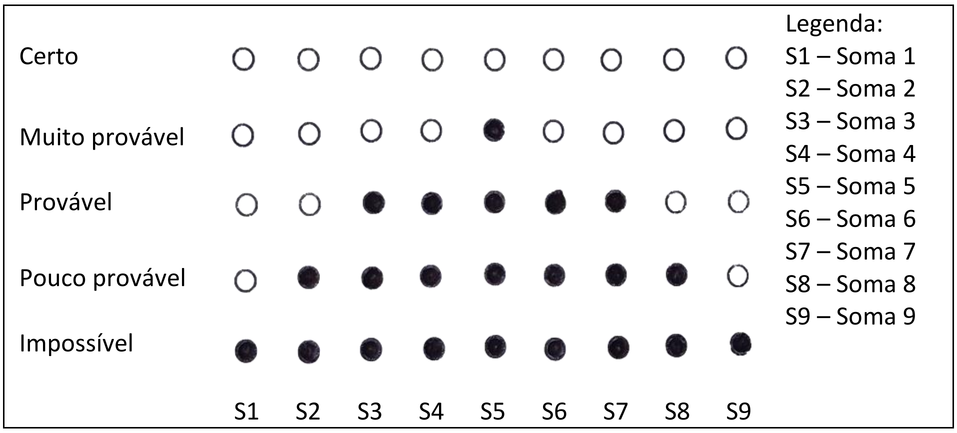
Tabela 11: Estimativas de Sue na Tarefa 4.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	5,9	13,5	19,2	25,55	18,76	12,1	5,5	0

Fonte: O autor (2024).

A soma das estimativas de Sue resultou em 100,51%, não cumprindo, também, o requisito de totalizar exatamente 100%. Assim como Johnny, a distribuição das estimativas de Sue não foi simétrica. As estimativas para as somas 2 e 8 não foram iguais, assim como para as somas 3 e 7 e para as somas 4 e 6. Ainda assim, elas estavam muito próximas.

Figura 61: Resposta de Sue para a Tarefa 5.



Fonte: O autor (2024).

Segmento 10

... sobre o fechamento do Episódio 2.

Turnos [94 – 104]

Após a finalização do experimento com o GeoGebra, discutimos sobre as principais percepções que ficaram após a simulação.

> [94] Johnny – “Eu gostei, muito bom. [inaudível] errar uma besteirinha, aí eu pensei meu Deus, vai dar um trabalho, mas depois eu vi o erro.
>
> [95] Professor – Na hora dos códigos?
>
> [96] Johnny – Na hora dos códigos. Mas eu consegui.
>
> [97] Ben – Foi, eu também tive essa dificuldade no começo. Eu errei algumas vír... algumas partes eram depois da vírgula.
>
> [98] Professor – Mas, no caso, vocês dois, demorou muito pra identificar o erro e corrigir ou foi tranquilo?
>
> [99] Johnny – Foi tranquilo.

> [100] Ben – Foi... foi tranquilo.
>
> [101] Reed – Eu achei interessante, porque é uma maneira diferente de... probabilidade, do que a gente tá vendo agora [em referência ao que estão estudando na escola]. A pessoa pode achar que é meio difícil no começo, mas é nada de mais, é como se tivesse aprendendo algo novo, alguns têm suas dificuldades mas depois você aprende e ver que é bem mais fácil do que usar, por exemplo, lápis e caneta.

Reed entende o experimento como um método de calcular probabilidade, comparando-o com o método já conhecido e empregado nas aulas de Matemática. Aqui, Reed confronta os significados clássico e frequentista da probabilidade, o já conhecido e a novidade, e o faz com empolgação em conhecer uma via diferente, chegando a afirmar que o método frequentista é mais fácil do que, nas palavras dele, usar lápis e caneta.

> [102] Professor – E tu, Sue? Tivesse mais dor de cabeça, não foi? [rindo] Deixa eu já te garantir um negócio, todas as coisas que aconteceram contigo, já aconteceram comigo várias vezes, então eu já montei e ele não gerou a tabela, e eu procurei ele, procurei, busquei, não gerava a tabela [...] Então não tem nenhuma relação com o teu desempenho. [...] mas com exceção desses probleminhas, o que mais tu achou do processo como um todo?
>
> [103] Sue – Eu gostei.

Sue se ateve a uma curta resposta. Apesar das intervenções, ela pareceu permanecer um pouco constrangida, então as poucas palavras dela foram respeitadas sem imposição de mais detalhes, para não potencializar o já aparente desconforto.

> [104] Professor – [...] Vocês entenderam que à medida que o número de lançamentos aumentava, os valores iam ficando cada vez mais próximos? Eles já não divergiam mais? A gente diz que eles estavam convergindo para um valor. Então estas frequências relativas estão se aproximando de um número em específico, cada um deu a sua estimativa, mas a gente não sabe ainda qual é.

Episódio 3

O Episódio 3 conclui a análise do Segundo movimento iniciada no Episódio 2 (agora com as orquestrações instrumentais OI_3 e OI_4, Atividades 3 e 4 e Tarefas de 6 a 9) e apresenta as discussões sobre o Terceiro movimento, um movimento extremamente rápido (com a orquestração instrumental OI_5, Atividade 5 e Tarefa 10) (ver Figura 62).

Figura 62: Mapa do Episódio 3.

<table>
<tr><th colspan="7">Segundo movimento</th><th>Terceiro movimento</th></tr>
<tr><td colspan="3">OI_{pivot}</td><td colspan="2">OI_3</td><td colspan="2">OI_4</td><td>OI_5</td></tr>
<tr><td colspan="3">AT Pivot</td><td colspan="2">AT3</td><td colspan="2">AT4</td><td>AT5</td></tr>
<tr><td>T3</td><td>T4</td><td>T5</td><td>T6</td><td>T7</td><td>T8</td><td>T9</td><td>T10</td></tr>
</table>

AT: Atividade T: Tarefa

Fonte: O autor (2024).

Os estudantes se reuniram em um único grupo, com o celular do professor, para realizar a Atividade 3. Reed, Johnny e Sue participaram ativamente, Ben teve uma participação mais tímida, em geral, mantendo-se mais observador, mas ainda assim muito atento.

Johnny e Sue estiveram mais à frente no quesito de manipular o celular, embora os demais tenham tido a oportunidade de o manipular também. Sue assume um papel forte de liderança aqui ao indicar as etapas com mais precisão.

Segmento 11

... sobre a escrita dos códigos.

Turnos [105 – 146]

Neste momento inicial, eles estão trabalhando coletivamente na passagem dos códigos para o GeoGebra.

[105] Ben – É melhor... é bom já garantir o controle deslizante.

[106] Johnny – O mínimo é quanto?

[107] Reed – 1 e 5 000 o máximo.

[108] Sue – Isso.

[109] Johnny – E o incremento?

[110] Ben, Reed, Sue – É 1.

[111] Reed – Inteiro.

[112] Ben – Agora a sequência.

[113] Reed – Agora a sequência.

Neste estágio, os estudantes já demonstram bastante familiaridade com as ferramentas e a linguagem própria do aplicativo GeoGebra. No momento de construir a sequência para a lista de frequências absolutas, tiveram dificuldade em retornar à Caixa de Entrada. Como Sue havia tido esta dificuldade, ela ficou logo em alerta.

[114] Sue – Complicou?

Mas, logo em seguida, conseguiram acessar a Caixa de Entrada sem dificuldades.

[115] Johnny – Agora sequência.
[116] Sue – Sequência e... número aleatório.
[117] Johnny – Sequência... número aleatório.
[118] Reed – Expressão, variável.
[119] Johnny – Expressão, variável, valor inicial, valor final, isso.
[120] Reed – Isso.
[121] Sue – Isso.
[122] Johnny – Mínimo inteiro .
[123] Reed, Johnny – e máximo inteiro.
[124] Sue – Bota 1,4.
[125] Johnny – 1.
[126] Sue – Aqui ó, tem que apagar ali.

Sue indicou um caminho diferente na escrita do código, que ela seguiu quando fez o experimento sozinha na Atividade Pivot, mas Johnny já havia feito de outra forma antes dela concluir a sugestão. É perceptível que Sue tinha alguns *insights* diferentes, por ter tido uma experiência diferente. E eram bons *insights*, aplicáveis. Mesmo que não fossem seguidos, em momento algum ela se intimidou na atividade em grupo, e sua participação foi constante do início ao fim.

[127] Johnny – Oi?
[128] Sue – Não, já foi.

Assim que concluíram a escrita do código para o cálculo das frequências relativas, surgiu uma sequência de interrogações na lista de frequências relativas, quando o valor do controle deslizante era $a = 1$.

[129] Johnny – Agora apareceu um monte de interrogação [ver Figura 63].
[130] Sue – Quando aparecer interrogação...
[131] Reed – Quer dizer que...
[132] Sue – Precisa aumentar o valor de a.
[133] Reed – Aumentar o a

Figura 63: Sequência de interrogações.

Fonte: O autor (2024).

Esse caso foi previsto a priori e esta orientação estava no quadro de códigos e orientações, onde os participantes a consultaram.

Figura 64: Trecho do quadro de códigos e orientações.

Se aparecerem símbolos de ? na lista de frequências, você precisa aumentar o valor de **a**.

Fonte: O autor (2024).

[134] Johnny – Mudar lá em cima.

[135] Sue – E só aumenta.

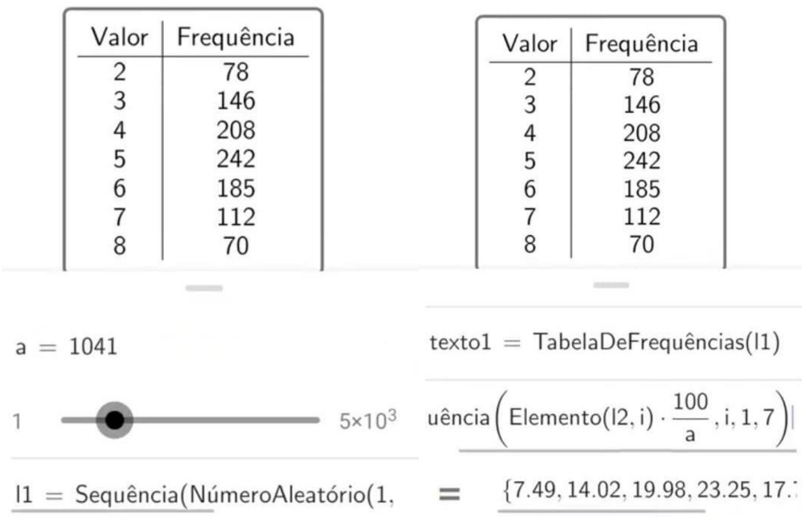
[136] Johnny – Puxa mais um pouquinho.

[137] Sue – Isso.

[138] Johnny – Ah, ok.

[139] Sue – Pronto.

Figura 65: Problema da sequência de interrogações corrigido.

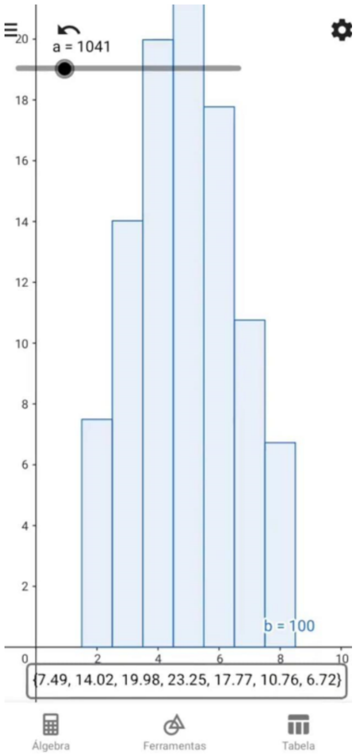


Fonte: O autor (2024).

[140] Sue – Agora é só, diminuir [alterar a escala dois eixos], eu acho, um pouquinho. Melhor de visualizar.

[141] Johnny – Que não está aparecendo o resto, daqui de cima [ver Figura 66].

Figura 66: [142] Gráfico de colunas não ajustado à tela.



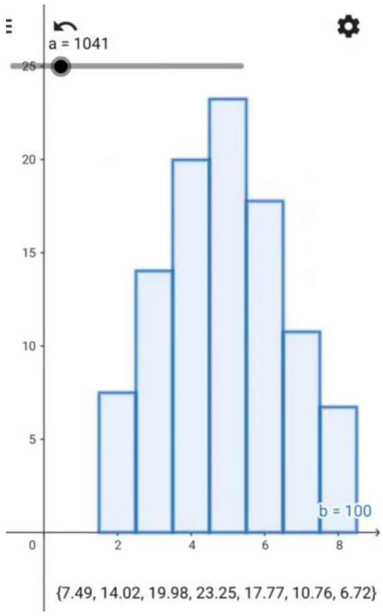
Fonte: O autor (2024).

[143] Reed – Tem como diminuir o y?

[144] Reed – Pronto.

[145] Johnny – Assim [ver Figura 67].

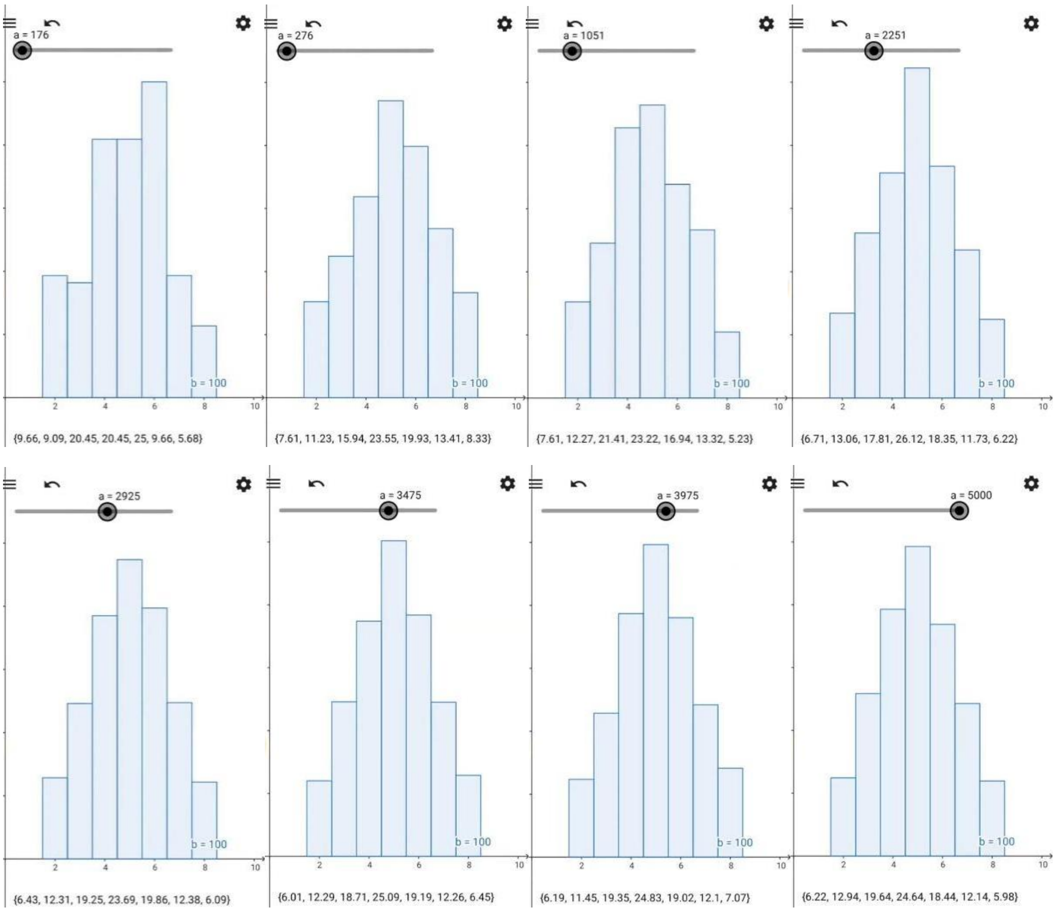
Figura 67: [146] Gráfico de colunas ajustado à tela.



Fonte: O autor (2024).

Após a construção do gráfico de colunas, o grupo fez variar o controle deslizante dos menores para os maiores valores, a fim de verificar como se comportava o gráfico dinâmico. A Figura 68 apresenta uma sequência de frames do gráfico nesse momento, que mostram a variação das alturas das colunas do gráfico quando se fez variar o controle deslizante.

Figura 68: Frames do gráfico.



Fonte: O autor (2024).

A interação entre os estudantes na passagem dos códigos para o GeoGebra foi muito ativa e dinâmica. Rapidamente eles cumpriram esta etapa, lidando bem com as dificuldades que surgiram, sem requisitar, em nenhum momento, ajuda do professor. Aqui, o pensamento computacional foi protagonista.

A nível dos objetivos esperados para este campo na Educação Básica, os estudantes demonstraram capacidade de ler e executar fluxogramas, trabalhar com códigos em uma linguagem não-convencional e empregar adequadamente os recursos do artefato tecnológico.

Segmento 12

... sobre um nítido limite para o aplicativo.

Turnos [147 – 151]

Agora, com o algoritmo completamente implementado no aplicativo, os estudantes partem para o experimento.

> [147] Ben – Então o máximo [valor máximo do controle deslizante] vai ter que colocar até 10 mil, né? Ou até 5 [mil]?
>
> [148] Reed – Até o 5 000, né.
>
> [149] Professor – Não precisa, pode ser até qualquer valor. 10 000 ele dá uma estimativa mais refinada, mas eu não gosto de colocar 10 000 quando tem gráfico...
>
> [150] Reed – Se não trava muito.
>
> [151] Professor – Para não travar.

Aqui é colocada em pauta uma limitação do aplicativo, que é não suportar um experimento para n de ordens superiores. Este não é um elemento dificultador do aplicativo, pois é possível alcançar excelentes conclusões com o intervalo de valores para n que o aplicativo suporta, mas definitivamente é um elemento limitante, pois os estudantes podiam se interessar em fazer mais simulações com valores cada vez maiores.

Segmento 13

... sobre a simetria nas probabilidades.

Turnos [152 – 161]

> [152] Reed – A soma 1 e a soma 9 já é...
>
> [153] Johnny – zero.
>
> [154] Reed – Não precisa se preocupar.
>
> [155] Sue – Isso.
>
> [156] Reed – Aí, como a gente sabe, a soma 2 e a soma 8 vai ser pa... iguais. Só é saber a soma 2, vai saber a soma 8, porque é a quantidade de somas que tem o 2 e pra o 8 são as mesmas.
>
> [157] Reed – Para dar a [soma] 2 só tem um um, 1 mais 1, e a soma 8 só 4 mais 4, logo os dois têm a mesma chance.
>
> [158] Sue – Verdade.
>
> [159] Reed – O mesmo vale pro 3 [soma 3] e pro 7 [soma 7], pro 4 [soma 4] e pro 6 [soma 6].
>
> [160] Johnny – E o 5 [soma 5] é o isolado.
>
> [161] Reed – O 5 [soma 5] é o diferentão.

Os estudantes já começam a dar os primeiros passos na construção do espaço amostral, ao apontar que para obter a soma 2, a única possibilidade é conseguir um e um nos dados, e para obter a soma 8, a única possibilidade é conseguir quatro e quatro nos dados. O conceito de não-equiprobabilidade já foi totalmente admitido e está sendo empregado com rigor matemático. Eles já admitem a simetria na distribuição das probabilidades, que as probabilidades das somas 2 e 8 são iguais, assim como das somas 3 e 7 e das somas 4 e 6, e já concluíram que a soma 5 é a mais provável. Um grande passo até aqui. A ideia de distribuição de probabilidades, de acordo com Batanero (2005), caracteriza a mobilização do significado frequentista da probabilidade.

Segmento 14

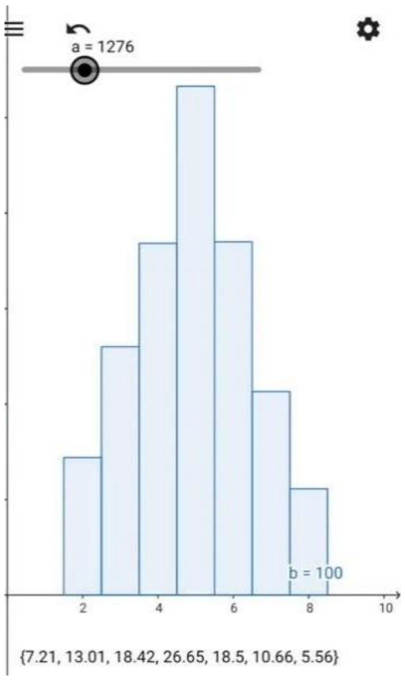
... sobre quanto mais melhor.

Turnos [162 – 174]

[162] Professor – Essa ideia que tu colocou de [soma] 2 e [soma] 8 serem iguais, e tal, o gráfico ele meio que ajuda a perceber isso também?

[163] Sue – Mas ele fica só um pouquinho menor [ver Figura 69].

Figura 69: [164] Nem tão perto assim.



Fonte: O autor (2024).

[165] Johnny – Só um pouco...

[166] Reed – Mas porque aqui tá muito no... muito pouca... muito pouco lançamento. Se botar lá pro final com certeza vai tá muito próximo.

[167] Johnny – Muito próximo.

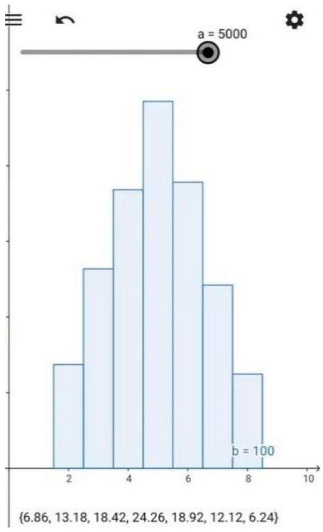
[168] Professor – Vai se aproximando, né?

[169] Sue – É.

[170] Reed – Vai se aproximando.

[171] Sue – Aqui, nesse aqui [ver Figura 70].

Figura 70: [172] Um pouco mais perto agora.



Fonte: O autor (2024).

[173] Reed – Tende a equilibrar. Se tivesse feito, sei lá, um milhão, ia cada vez tá... quase perfeito.

[174] Sue – Hum.

Ao trazer a questão da simetria para o gráfico, há um confronto com o fato de que as alturas das colunas não estão exatamente iguais. Surge aqui de maneira natural entre os participantes o coração do significado frequentista da probabilidade: ainda eram poucos lançamentos (e já eram mais de mil). O gráfico de colunas surge como um elemento facilitador do aplicativo GeoGebra pois, em menos de um segundo, com um leve correr do controle deslizante, o gráfico representava visualmente 5 000 lançamentos e as alturas das colunas para as somas 2 e 8 se aproximaram, assim como as suas frequências relativas representadas percentualmente abaixo do gráfico.

Se tivesse como fazer para 1 milhão de lançamentos, como Reed sugeriu no turno [173], a ideia ficaria ainda mais bem construída para os estudantes. Mas, como discutido anteriormente, não ser possível fazer isso com o aplicativo GeoGebra é um elemento limitante. O uso de gráficos estatísticos, nesse caso um gráfico de colunas, caracteriza o significado frequentista da probabilidade (Batanero, 2005).

Segmento 15

... sobre fazer estimativas.

Turnos [175 – 206]

[175] Reed – Agora a soma 3, a soma 7. Eles variaram quanto? Dá pra ver que ele tava entre o 12 e o 13.

[176] Sue – Foi.

[177] Reed – A soma total tem que dar necessariamente 100?

[178] Professor – O que tu acha?

[179] Reed – É, o certo é, mas...

[180] Ben – Aqui dá 100 eu acho.

[181] Sue – A soma 3 geralmente fica entre o 12 e o 13.

[182] Reed – É, mas ele fica mais próximo do 12 ou mais próximo do 13?

[183] Sue – Mais próximo do 13, né? Tem algumas vezes que vai para o 14.

[184] Reed – Então pode ser 13, ou 12 e meio.

[185] Sue – Acho que 12 e meio.

[186] Reed – Botar 12 e meio.

A simulação realizada no aplicativo está sendo utilizada ativamente, e com os recursos corretos, para uma análise coerente e refinada dos estudantes para as estimativas. É possível concluir que, para estes estudantes, o artefato digital aplicativo GeoGebra subiu de patente, é agora mais do que um artefato, é um instrumento para a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Os estudantes instrumentalizaram o artefato e foram instrumentados por ele.

[187] Reed – Aí a soma 4 e a soma 6.

[188] Reed – A soma 5, indo logo pra ele, eu acho que já posso dizer que é 25. Ele nunca... se ele passa do 25 é bem pouquinho e se...

[189] Sue – Ele...

[190] Reed – Fica abaixo de 25 é um pouco.

[191] Sue – É.

[192] Reed – Eu acho que ele tende, se fossem mais jogadas, ele ia pra 25 fixo. Eu acredito.

Reed coloca a usa crença como elemento útil para a análise. Gal (2005), insere as crenças do sujeito, quanto elemento disposicional, lado a lado com a habilidade de realizar cálculos e estimativas, quanto elemento de conhecimento, para se considerar um sujeito letrado probabilisticamente. Aqui, Reed une esses dois elementos no exato momento em que faz uma estimativa que coincide exatamente com o valor teórico esperado.

[193] Sue – É... deixa eu ver uma coisa.

[...]

[194] Reed – Pode usar a calculadora?

[195] Professor – Pode, pode usar.

[196] Sue – É, o 25 fica quase fixo. No caso, do 5 [soma 5].

Após Sue voltar a movimentar o controle deslizante, dos menores aos maiores valores de a, expressa com empolgação a sua concordância com a estimativa de Reed para a soma 5.

> [197] Reed – Quer dizer que a soma 4 e a soma 6 vai ficar tendendo ao 18 e ao 19. O que eu fiz. Calculei tudo esses e subtra... peguei 100 subtraí por isso [pela soma das frequências relativas já estimadas], aí depois eu dividi por dois, porque só falta duas casas.

Agora, Reed colocou em cena uma estratégia para estimar as somas 4 e 6 que passa pelo significado axiomático da probabilidade. Essa constante presença do fato da soma das estimativas resultar em 100% em consequência do Axioma 2 de Kolmogorov. Na Atividade Pivot, Reed não considerou esses 100% ou, no mínimo, não teve o mesmo cuidado em respeitá-lo. Aqui, os 100% foram mais que respeitados, tornaram-se critério para as estimativas.

[198] Professor – Ótimo.

> [199] Reed – Aí como as duas casas vão estar iguais, aí deu 19 no meu. Aí eu acredito que vai tender a 19, 18 e meio, por aí.
>
> [200] Sue – Ficou entre 18 e 19, 18 e 19.

Reed está, nesta atividade, mais disponível a estimativas decimais, e não apenas inteiras.

> [201] Johnny – Eu botei uns 18,27, foi que eu tinha visto ali, que teve um momento que ele ficou igual entre o... a [soma] 4 e a [soma] 6, que tu tinha parado assim rapidinho, aí como tava igual, bati o olho e vi aí eu botei, porque eu achei que seria.
>
> [202] Sue – 18 ponto...
>
> [203] Johnny – 27.
>
> [204] Reed – Mas a gente tem que pensar que isso é só uma estimativa, porque só tem 5 000 lançamentos. Aqui tá, como ele disse, ainda é pouco 5 000, o certo era a base do infinito, né?
>
> [205] Sue – É
>
> [206] Reed – Aí quer dizer que pode variar muito, mesmo dando igual aqui, pode ser um acaso, aí a gente tem que ver onde tá tendendo a ir. Aí como eu... ele está tendendo a ir a 19, eu marquei 19 logo, porque assim a minha soma aqui vai dar 100, aí bate. Mas como vocês colocaram diferente.

Johnny apresenta como argumento para estimar 18,27% para as somas 4 e 6 o fato de ter percebido, em um determinado momento, esse valor coincidir para as frequências relativas para as somas 4 e 6. Reed rebate o argumento, apontando que, para o baixo número de lançamentos, isto ocorreu muito mais por acaso, como uma coincidência, do que por um fato matemático, e acaba optando por estimar em 19%. É interessante que ambos aplicam ideias construídas até então para tomar uma decisão sobre a estimativa, mas Reed está num plano de ideias mais avançado do que Johnny.

Quando Reed menciona o conceito de infinito, primeira vez comentado no concerto, expressa que, de fato, ele já construiu uma compreensão sobre o significado frequentista da probabilidade que já está longe de ser rasa.

Segmento 16

... sobre os resultados.

Turnos [207 – 213]

As estimativas finais de cada um dos participantes estão presentes a seguir. As tabelas de estimativas são marcadas como turnos porque comunicam a decisão final que cada um deles tomou individualmente após as discussões em grupo.

Tabela 12: [207] Estimativas de Ben na Tarefa 7.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	6,25	12,5	18,75	25	18,75	12,5	6,25	0

Fonte: O autor (2024).

Ben já colocou nas estimativas os valores esperados, pois ele já havia calculado pelo significado clássico desde a Atividade Pivot.

Tabela 13: [208] Estimativas de Johnny na Tarefa 7.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	6,3	12,85	18,27	25,16	18,27	12,85	6,3	0

Fonte: O autor (2024).

Johnny manteve a estimativa 18,27% para as somas 4 e 6, apesar da discussão trazida por Reed. Todavia, ele teve o cuidado de a soma das estimativas ser 100%.

Tabela 14: [209] Estimativas de Reed na Tarefa 7.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	6	12,5	19	25	19	12,5	6	0

Fonte: O autor (2024).

Reed seguiu com a sua proposta, e estimou 19% para as somas 4 e 6. Desta vez, a soma das suas estimativas resultou em 100%, o que já era esperado, a partir das suas colocações.

Tabela 15: [210] Estimativas de Sue na Tarefa 7.

	Soma 1	**Soma 2**	**Soma 3**	**Soma 4**	**Soma 5**	**Soma 6**	**Soma 7**	**Soma 8**	**Soma 9**
Estimativa	0	6,3	12,5	18,27	25	18,27	12,5	6,3	0

Fonte: O autor (2024).

Em meio aos argumentos de Reed e Johnny quanto a estimativa para as somas 4 e 6, Sue parece ter preferido seguir Johnny. Apesar disso, a soma das estimativas de Sue foi a única que seguiu diferente de 100% (dessa vez, resultou em 99,14%). As estimativas dos quatro participantes estão diferentes, mas muito próximas e, desta vez, todos já aplicam a simetria na sua distribuição.

A princípio, na configuração didática previamente elaborada, a OI_4, com a Atividade 4 e as Tarefas 8 e 9, seria apenas uma semana depois, junto com a OI_5, no Terceiro movimento. Entretanto, durante a OI_3, os estudantes, de maneira independente, começaram a discutir sobre as probabilidades de obter cada soma, a construir o espaço amostral completo e a fazer os cálculos. Isso foi totalmente inesperado.

A decisão *ad hoc* do professor foi, uma vez que a composição de orquestrações instrumentais é um modelo orgânico, em contínua construção e reconstrução, integrar a OI_4 ao Segundo movimento, como orquestração instrumental sequenciada imediata a OI_3. O professor entregou a Atividade 4 e os estudantes responderam, em grupo, as Tarefas 8 e 9, que já haviam iniciado de forma independente. Não solicitaram ajuda do professor, e a resposta de todos está sintetizada na Tabela 16.

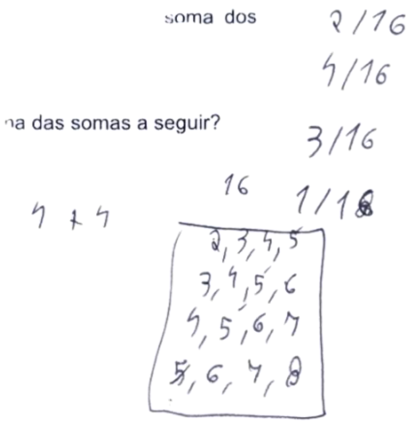
Tabela 16: [211] Probabilidades teóricas calculadas pelos participantes.

Soma	**Representação fracionária**	**Representação percentual**
Soma igual a 1	0	0
Soma igual a 2	1/16	6,25%
Soma igual a 3	2/16	12,5%
Soma igual a 4	3/16	18,75%
Soma igual a 5	4/16	25%
Soma igual a 6	3/16	18,75%
Soma igual a 7	2/16	12,5%
Soma igual a 8	1/16	6,25%
Soma igual a 9	0	0
TOTAL	**1**	**100%**

Fonte: O autor (2024).

Na Atividade 4, Ben trouxe o seguinte diagrama, no qual descreve sinteticamente, mais uma vez, o espaço amostral (ver Figura 71).

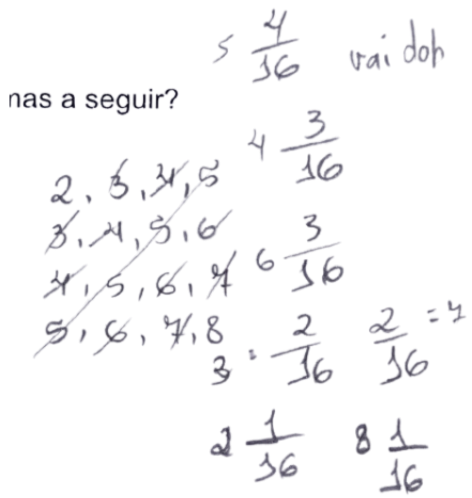
Figura 71: [212] Espaço amostral construído por Ben.



Fonte: O autor (2024).

Também na Atividade 4, Sue trouxe a sua própria organização do espaço amostral (ver Figura 72).

Figura 72: [213] Espaço amostral construído por Sue.

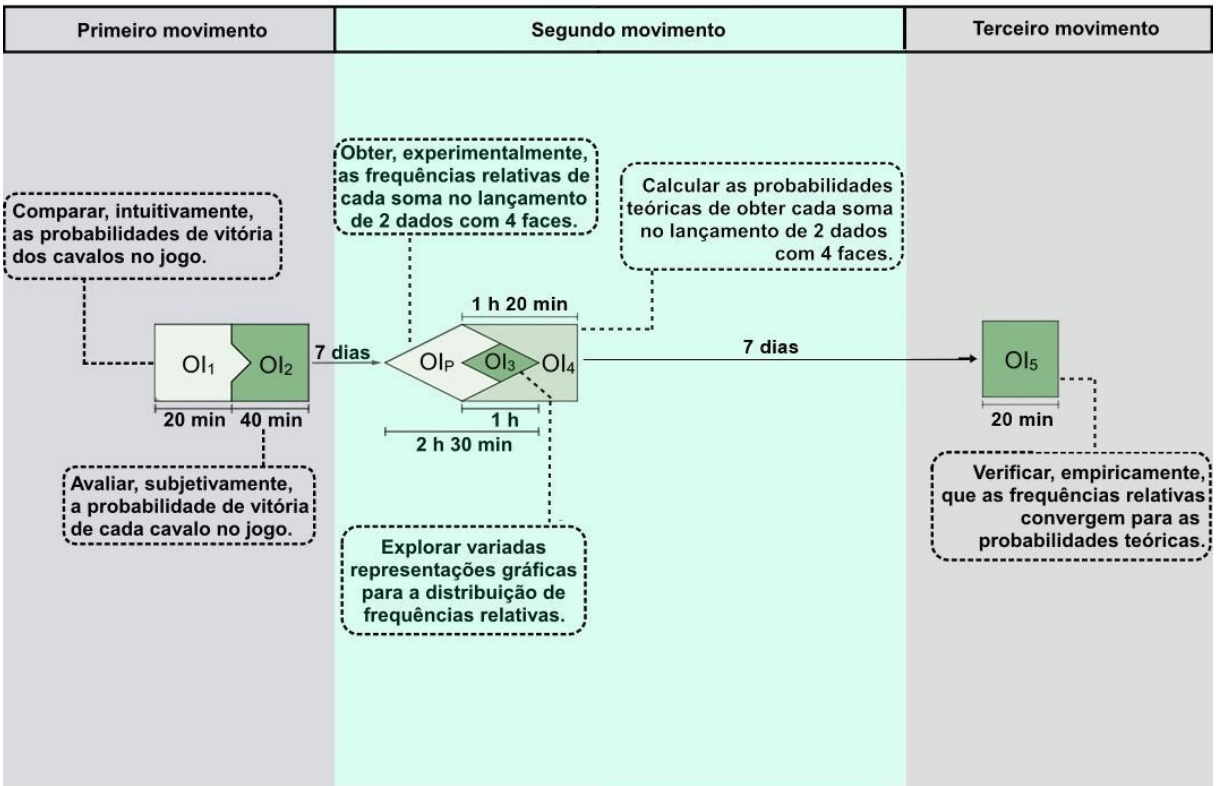


Fonte: O autor (2024).

Sue faz, à esquerda, uma matriz 4x4 com os resultados das somas, ordenadamente. À direita, ela associa a cada soma uma fração que indica a probabilidade de obter aquela soma: para a soma 5, probabilidade $\frac{4}{16}$, para a soma 4, probabilidade $\frac{3}{16}$, para a soma 6, probabilidade $\frac{3}{16}$, e assim por diante.

Este novo caminho, fruto de uma ação espontânea dos participantes, modificou a organização do concerto, trazendo a OI_4 para o Segundo movimento. Desta forma, a Composição das Orquestrações Instrumentais ficou com a seguinte forma final (ver Figura 73).

Figura 73: Composição das Orquestrações Instrumentais atualizada.



Fonte: O autor (2024).

Também atualizamos o mapa do concerto, conforme pode ser consultado a seguir (ver Figura 74).

Figura 74: Mapa atualizado do concerto.

Concerto: composição de Orquestrações Instrumentais									
Primeiro movimento		**Segundo movimento**							**Terceiro movimento**
OI_1	OI_2	OI_{pivot}			OI_3		OI_4		OI_5
AT 1	AT 2	AT Pivot			AT3		AT4		AT5
T1	T2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T8	T 9	T10

AT: Atividade T: Tarefa

Fonte: O autor (2024).

Após uma semana, os estudantes realizaram a OI_5, com a Atividade 5 e a Tarefa 10. Essa única tarefa, que solicitava que os estudantes escrevessem as relações que notaram entre as frequências relativas e as probabilidades teóricas e o que concluíam dessas relações, trouxeram o desfecho do concerto.

Fechamento do Episódio 3

Os estudantes foram capazes de dar significado à relação percebida entre as frequências relativas simuladas e as probabilidades teóricas calculadas, compreendendo que, de fato, por meio da experimentação, era possível obter aproximações para a probabilidade, que são tão melhores quanto mais repetições puderem ser realizadas.

Segmento 17

... sobre o fechamento do Episódio 3.

Turnos [214 – 222]

> [214] Ben – Dados os valores obtidos pela frequência relativa, temos uma aproximação de valores em relação a probabilidades teóricas obtidas.

Ben parecia já ter chegado a essa conclusão desde a Atividade Pivot, isso pode justificar a sua pequena participação na Atividade 3, em grupo.

> [215] Ben – Como probabilidade teórica, temos que em 2 (dois) dados de 4 lados, é dado um número total de possibilidades igual à 16. Dentro deste meio, o cavalo de número 5 (C5) possui 4 possibilidades para obter soma de valor 5 [ver Figura 75]. Em fração, temos 4/16 jogadas voltadas para o C5. Consequentemente, temos um valor de 0,25 (25%).

Figura 75: [216] Descrição do espaço amostral de Ben.

Fonte: O autor (2024).

Ben distingue corretamente os termos possibilidade e probabilidade. Laplace “indica a necessidade em reduzir os eventos de um certo tipo para um certo número de casos igualmente possíveis” (Batanero, 2005, p. 254), exatamente o que Ben realiza aqui, mobilizando ideias do significado clássico da probabilidade, a fim de confrontar as probabilidades teóricas com as frequências relativas. Chama de probabilidade teórica o resultado obtido pelo método laplaciano e enumera todas as possibilidades para a soma 5.

[217] Ben – Com os outros cavalos, temos:

C1: 0/16 = 0%

C2: 1/16 = 0,0625 = 6,25%

C3: 2/16 = 0,125 = 12,5%

C4: 3/16 = 0,1875 = 18,75%

C6: 3/16 = 0,1875 = 18,75%

C7: 2/16 = 0,125 = 12,5%

C8: 1/16 = 0,0625 = 6,25%

C9: 0/16 = 0%

Notamos que Ben ainda confunde as probabilidades de obter cada soma com as probabilidades de vitória dos cavalos (que não são a mesma coisa).

[218] Ben – Em suma, os valores obtidos em experimentos se aproximam do valor teórico/ideal.

A frase final de Ben indica que ele construiu o significado frequentista da probabilidade, agregando essa visão ao seu repertório de conhecimentos. A probabilidade é enxergada como um número hipotético para o qual tende a frequência relativa ao se estabilizar, característica fundamental da probabilidade frequentista, a partir de Batanero (2005).

[219] Johnny – A relação entre as probabilidades teóricas calculadas e as frequências relativas obtidas é a proximidade entre os resultados.

Johnny também apontou adequadamente a relação pedida, ao tratar das aproximações.

[220] Johnny – Enquanto que, quando calculada, as respostas para as probabilidades dos cavalos vão ser exatas, as frequências relativas são baseadas no método empírico (na rolagem de dados que a própria plataforma realiza para evitar o trabalho manual). A diferença é que, já que a última é baseada no método empírico, haverá desvios e incertezas quanto ao resultado do jogo, enquanto que a probabilidade teórica nos oferece um resultado preciso e objetivo.

Johnny disserta com maestria sobre a base empírica do trabalho com as frequências relativas, sem a desqualificar, indica que as simulações apresentam desvios em relação ao valor esperado, à medida que o método laplaciano oferece um resultado preciso. Estas conclusões estão em conformidade com Batanero (2005), que nos apresenta o fato de que no significado frequentista nunca obtemos o valor exato da probabilidade, apenas uma estimativa (Batanero, 2005), caracterizando a probabilidade frequentista como de caráter objetivo baseado na evidência empírica.

A precisão citada por Johnny consiste, claro, na atribuição quantitativa das probabilidades. Por ser um experimento aleatório, não haverá precisão quanto aos resultados para a soma ou para o jogo. Entretanto, Johnny parece ter sido isso que

Johnny quis expressar, pelo contexto geral, apesar da sua escrita parecer misturar um pouco estas duas questões. Um vocabulário probabilístico mais rebuscado, que não se espera de um estudante do Ensino Médio, poderia ter sido mais assertivo.

Johnny também confunde as probabilidades de obter cada soma com as probabilidades de vitória dos cavalos.

> [221] Reed – Após eu ter entrado em contato com esse novo modo de enxergar a probabilidade por meio do aplicativo "geogebra" utilizado na dinâmica de calcular a probabilidade de cada soma por meio do lançamento de dois dados de quatro faces fez eu perceber que é possível alcançar o mesmo resultado por diferentes tipos de resoluções, como por exemplo da dinâmica na qual testamos de maneira prática no início para saber qual "cavalo" ganharia a corrida, e ampliamos isso no aplicativo para deixar o resultado bem mais preciso, pois pelo aplicativo foi possível fazer diversas jogadas em segundos, algo que seria impossível no mundo real.

O que Reed chamou de "novo modo de enxergar a probabilidade", nada mais é do que entender a probabilidade pelo seu significado frequentista. E o que são os significados da probabilidade se não modos distintos de a enxergar? Para Reed, é novo. Não houve uma última cartada de Reed que estabelecesse explicitamente as relações em estudo, mas isso já não era necessário deste a OI_3, na qual ele demonstrou ter construído o significado frequentista da probabilidade e, mais do que isso, foi uma importante engrenagem para a construção deste significado para os demais participantes. Reed não pareceu confundir, afinal, a probabilidade das somas com a probabilidade de vitória dos cavalos, pelo uso das aspas ao citar "cavalo".

> [222] Sue – Os resultados exatos que são adquiridos. O valor que possui maior probabilidade de ser sorteado dentro do conjunto, assim pode-se calcular a probabilidade exata com o valor mais frequente e menos frequente, para achar a maior probabilidade e a menor de ocorrer.

Apesar das dificuldades técnicas enfrentadas por Sue, ela conseguiu chegar, ao menos minimamente, na conclusão esperada. Em especial durante o processo.

A partir da análise dos três episódios, verificou-se que o progresso na aprendizagem do significado frequentista da probabilidade esteve entrelaçado ao uso do aplicativo GeoGebra. Mais do que isso, os principais indícios de aprendizagem foram observados por meio da dinâmica com este aplicativo, apontando que o uso do artefato teve, de fato, um impacto fundamental na aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenhar uma proposta metodológica é como o movimento artístico de pintar um quadro. Porém, nesse caso, nunca o fazemos a partir de um painel em branco. Os nossos traços são marcados sobre outros quadros. E, a partir do nosso quadro, novos traços serão estilizados por outros artistas. Neste trabalho, pintamos um quadro sobre, e a partir de, ideias bem consolidadas sobre a probabilidade e os seus diferentes significados. Com o quadro sobre o tripé das Orquestrações Instrumentais, os movimentos do pincel, ora rápidos ora lentos, descreveram caminhos para a consolidação de algumas importantes ideias para o campo da probabilidade.

O jogo corrida de cavalos com dois dados mostrou-se promissor à introdução e aprofundamento de importantes conceitos da probabilidade, tais como de eventos certos, eventos impossíveis e não-equiprobabilidade de espaços amostrais. Dada a complexidade que os cálculos probabilísticos assumem neste jogo, reconhecemos que é difícil cruzar a linha de chegada com ele. Todavia, diante das diversas evidências percebidas, conclui-se que é útil o ter como um ponto de partida.

A simulação computacional, de fato, conseguiu superar as barreiras encontradas nas simulações manuais. Os estudantes exploraram diversas ideias da Computação à medida que realizavam o experimento aleatório de lançar dois dados tetraédricos e calcular a soma dos resultados no aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis. O aplicativo ofereceu muitas possibilidades para este tipo de simulação computacional, em especial na construção do significado frequentista da probabilidade.

Os esquemas de utilização do GeoGebra empregados pelos estudantes e as representações adotadas por eles próprios foram determinantes no uso deste artefato para responder às situações apresentadas. Por meio do instrumento de aprendizagem GeoGebra, os estudantes foram capazes de resolver a todas as situações e construíram novos significados nesse processo, propiciando a sua gênese instrumental. Todos os estudantes conseguiram instrumentalizar o artefato GeoGebra com o objetivo de, a partir dele, responder aos problemas criados pelas situações apresentadas. Assim, todos os estudantes foram instrumentados pelo artefato GeoGebra. Diante de problemas apresentados na trilha de construção do significado frequentista da probabilidade, o aplicativo Suíte GeoGebra ser instrumentalizado para a resolução destes problemas, indica que há possibilidades de aprendizagem deste tópico da probabilidade a partir deste artefato tecnológico. Mas estas possibilidades propiciaram que tipo de progresso?

Foi possível concluir que, em todos os estudantes, houve evolução na compreensão do significado frequentista da probabilidade. Tal significado, assumido como novidade e até reconhecido como um método diferenciado de calcular probabilidades, progrediu bastante durante as atividades, a ponto de sofisticadas ideias associadas, como a ideia de infinito e o fato de o processo ser empírico, ser apresentada pelos estudantes. Outras definições presentes no raio de alcance das atividades, tais como a não-equiprobabilidade de espaços amostrais e uma distribuição simétrica das probabilidades, também passaram por evolução na compreensão dos estudantes, refinando as compreensões dos estudantes. Mas quais elementos do GeoGebra mais diretamente se relacionaram com este progresso?

Poder realizar o experimento quantas vezes desejar permitiu aos estudantes testarem hipóteses e realizarem comparações em um intervalo curto de tempo, o que foi especialmente útil para verificarem a convergência das frequências relativas de maneira muito natural. Essa possibilidade se configurou como um elemento do aplicativo facilitador do progresso da construção do significado frequentista da probabilidade.

As representações geométricas construídas, tais como a tabela de frequências absolutas e o gráfico de colunas dinâmicos, permitiu um panorama visual da variação das frequências relativas, muito relevante para destacar a não-equiprobabilidade do espaço amostral e a simetria na distribuição das probabilidades, pontos percebidos pelos estudantes, e que também são elementos facilitadores.

Entretanto, o aplicativo para dispositivos móveis não suporta experimentos com um número de repetições muito alto. Para números a partir da ordem das dezenas de milhar, o aplicativo já começa a travar e pode parar de funcionar. Ainda que com números na ordem das unidades de milhar já seja possível obter excelentes aproximações, em termos de compreensão, este fato é um elemento do aplicativo limitante ao progresso da construção do significado frequentista da probabilidade (não atrapalha o progresso, mas o limita), em especial porque o estudante pode desejar, de maneira autônoma, realizar mais repetições e não conseguir no aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis. Cabe refletir que esse pode ser, também, um elemento limitante do *smartphone* da estudante, não apenas do aplicativo.

O aplicativo também pode apresentar dificuldades na construção de alguns objetos, tais como na representação da tabela de frequências absolutas na Janela de Visualização, entre outros casos semelhantes, ou até mesmo apagar todo o progresso realizado caso o estudante saia dele. Este é, também, um elemento limitante, uma vez que pode desmotivar o estudante a prosseguir. Não foi identificado nenhum elemento dificultador no aplicativo, ou seja, nenhum elemento próprio que contribuísse no sentido de dificultar à construção do significado frequentista da probabilidade.

O modelo de Orquestrações Instrumentais adotado nesta pesquisa para sistematizar a proposta metodológica esteve em total sintonia com os objetivos, permitindo que as idealizações fossem executadas da melhor maneira possível.

A presente pesquisa representa consideráveis avanços à Educação Probabilística ao propor uma nova possibilidade metodológica para discutir o significado frequentista da probabilidade, por meio do aplicativo Suíte GeoGebra para dispositivos móveis, destacando algumas das principais contribuições e limitações deste recurso para esse fim. Para futuras pesquisas, almeja-se ampliar o uso do aplicativo Suíte GeoGebra para o ensino e a aprendizagem do significado frequentista da probabilidade por meio de outras representações, além das apresentadas, assim como uma exploração mais profunda dos demais significados da probabilidade.

Não havia forma melhor de concluir esta pesquisa do que com os agradecimentos ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – código de financiamento 001. O financiamento deste trabalho foi indispensável ao desenvolvimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, T. M. Matemática interligada: trigonometria, fenômenos periódicos e programação. Obra coletiva, editora responsável Thais Marcelle de Andrade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BARICHELLO, L. **Introdução ao Pensamento Computacional**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2021. Disponível em: https://umlivroaberto.org/producao/pensamento-computacional/. Acesso em: 03 set. 2022.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Relime**, México, v. 8, n. 3, p. 247 – 263, jul./set. 2005. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096616. Acesso em: 26 out. 2021.

BETTIN, A. D. H.; PRETTO, V.; LEIVAS, J. C. P. GeoGebra e a Gêneses Instrumental: Trabalhos Publicados No Catálogo De Teses e Dissertações Da CAPES. In: Simpósio De Ensino, Pesquisa E Extensão, 25., 2021, Santa Maria. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03436505/document. Acesso em: 03 set 2022.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429 – 440, jul./dez., 2016. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804/1749. Acesso em: 26 out. 2021.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2.ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 03 set 2022.

___________. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 03 set 2022.

___________. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 out. 2021.

___________. **Computação Complemento à BNCC**, DF: MEC, 2022. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file. Acesso em 12 jan. 2024.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

CAMPOS, T. M. M.; PIETROPAOLO, R. C. Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. **Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática**, p. 55-91, 2013.

CARVALHO, J. I. F. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/12168/1/JOS%C3%89%20IVANILDO%20FELISBERTO%20DE%20CARVALHO.pdf. Acesso em: 26 out. 2021.

CASASSUS, J. **Fundamentos da educação emocional**. Tradução de Liz Zats. Brasília: UNESCO, Liber Livro Editora, 2009.

CNE. Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC. Parecer CNE/CEB nº 2/2022. DF: MEC, 2022. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=235511-pceb002-22&category_slug=fevereiro-2022-pdf&Itemid=30192. Acesso em 12 jan. 2024.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 3. ed. São Paulo: Liv. da Física, 2008.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista:** Estudo epistemológico e didático. 1994. 151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11159. Acesso em: 03 set 2022.

COUTINHO, C. Q.; FIGUEIREDO, A. C. Simulação Computacional: Aspectos do Ensino da Probabilidade Frequentista. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 28, p. 1 – 18, 2020. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656869/22436. Acesso em: 03 set 2022.

DANCEY, C. P. **Estatística sem matemática para psicologia**. Tradução Lorí Viali. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade:** Um Curso Introdutório. 3.ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

DOMINGUES, R. **Probabilidade no Ensino Básico: possibilidades para uma abordagem axiomática**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K. The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin Hidelberg, v. 75, n. 2, p. 213-234, Springer Netherlands, 2010.

EUGÊNIO, R. S. **Letramento probabilístico nos anos finais do ensino fundamental: um processo de formação dialógica com professores de matemática.** 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

FERREIRA, E.B; OLIVEIRA, M. S. **Introdução à Estatística com R**. Alfenas – MG: Editora Universidade Federal de Alfenas, 2020.

FISCHBEIN, H. The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Springer Science & Business Media, 1975.

FOSTER, C.; MARTIN, D. Two-dice horse race. **Teaching Statistics**, v. 38, n. 3, p. 98-101, 2016.

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p.43-71. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/227065116_Towards_Probability_Literacy_for_all_Citizens_Building_Blocks_and_Instructional_Dilemmas. Acesso em: 03 set. 2022.

GIORDANO, C. C.; KIAN, F. A. O Ensino de Probabilidade e o Novo Ensino Médio: reflexões a partir da BNCC e do Currículo Paulista. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 11, n. 1, p. 59-78, 2021. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/ripem/article/view/2569. Acesso em: 03 set. 2022.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 3, p. 362-398, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/56700. Acesso em: 03 set. 2022.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CASTELLANOS, J. C. **Azar y probabilidad**: fundamentos didacticos y propuestas curriculares. Madri: Síntese, 1991.

GÓES, M. C. R. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**, v. 20, p. 9-25, 2000.

HAWKING, S. W. **Uma breve história do tempo**. Tradução Cássio de Arantes Leite. 1. ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Acesso à internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2017.** Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD Contínua). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101631_informativo.pdf. Acesso em 03 set 2022.

__________ – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Acesso à internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2019.** Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD Contínua). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Rio de Janeiro: IBGE, 2021. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101794_informativo.pdf. Acesso em 03 set 2022.

KAHNEMAN, D. **Rápido e devagar**: duas formas de pensar. Tradução Cássio de Arantes Leite. 1. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012.

LARSON, R.; FARBER, B. **Estatística Aplicada**. Tradução José Fernando Pereira Gonçalves. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

LIMA, P. N. G. **Um estudo de probabilidade por meio do jogo de palitinho com aplicações para o Ensino Médio**. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado) –

Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Feira de Santana, 2015. Disponível em: http://profmat.uefs.br/arquivos/File/PEDRO_NIVALDO_GOMES_LIMA.pdf. Acesso em: 18 jan. 2024.

LUCENA, R. **Metaorquestração instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. 2018. 382 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32844. Acesso em: 15 jan. 2024.

MARQUES, A. B. F. A. **Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo Franc Carreau:** uma abordagem pelo enfoque frequentista. 2022. 62 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/26108. Acesso em: 03 set 2022.

MARTINS, E. G. M. Axiomática da Probabilidade (Axiomática de Kolmogorov), **Rev. Ciência Elem.**, v. 3, n. 1, 2015. DOI: http://doi.org/10.24927/rce2015.077

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. **Temas de Psicologia**, Ribeirão Preto-SP, v. 2, n. 3, p. 59-71, 1994.

MEYER, P. L. **Probabilidade:** aplicações à estatística. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

PINHEIRO, M. G. C.; SILVA, A. F. G.; PIETROPAOLO, R. C. Probabilidade e o seu ensino nos anos iniciais do ensino fundamental revelados em um curso de formação continuada. In: **Congresso Nacional de Educação Matemática da Grande Dourados**. 2018.

__________. Conhecimento Profissional de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental Sobre Espaço Amostral e Quantificação de Probabilidades. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 4, p. 410-419, 2020.

POSSEBON, E. G. **O universo das emoções**: uma introdução. João Pessoa: Libellus, 2017.

QUEIROZ, C.; COUTINHO, S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2.3, p. 50 – 67, UFSC, 2007.

RABARDEL, P. Qu'est-ce qu'un instrument? appropriation, conceptualisation, mises en situation. **Le mathématicien, le physicien et le psychologue**, p. 61-65, 1995. Disponível em: https://edunum.unige.ch//articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf. Acesso em: 03 set. 2022.

SAMÁ, S.; SILVA, R. C. S. Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir da Base Nacional Comum Curricular. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 28, p. 1 – 22, 2020. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656990/22244. Acesso em: 26 out. 2021.

SANTOS, I. P.; CARVALHO, J. I. F. Uma revisão sistemática sobre o ensino de probabilidade na educação básica. **Revista Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v. 7, n. 3, p. 34 – 57, set./dez. 2018. Disponível em: https://revista.uepb.edu.br/REM/article/download/1249/953/3947. Acesso em: 26 out. 2021.

SCHREIBER, K. P.; PORCIÚNCULA, M. Conhecimentos docentes para ensinar Estatística: olhar do professor sobre os estudantes e as estratégias pedagógicas. **Zetetike**, v. 29, 2021. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661814.

SILVA, A. F. U. Fluxogramas: Uma nova linguagem para trabalhar divisibilidade no Ensino Básico. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, p. 200. 2020. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/202257/silva_afu_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acessado em jan. de 2024.

SILVA, J. S. Compêndio de Matemática. Edição Gabinete de estudos e planejamento do Ministério da Educação e Cultura, Lisboa, 1975. Disponível em: https://ciencias.ulisboa.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/obras_selecionadas/sebastiao_e_silva/compendios_de_matematica/CompendiodeMatematica-1Volume-2Tomo-fev13.pdf. Acesso em: 12 jan. 2024.

SOUZA, G. O. Explorações de Estudantes do 9º ANO sobre o Conceito de Probabilidade com o Softeware TINKERPLOTS 2.0. 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17379. Acesso em: 12 jan. 2024.

TALEB, N. N. **A lógica do cisne negro**: o impacto do altamente improvável. Tradução Renato Marques de Oliveira. 1. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2021.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 25, p. 91-138, 2005.

UNESCO. Diretrizes de políticas da UNESCO para a aprendizagem móvel. 2013. Disponível em: http://www.bibl.ita.br/UNESCO-Diretrizes.pdf. Acesso em: 26 out. 2021.

VASCONCELOS, A. E. M. **Variáveis afetivas nas aulas de matemática**: encurtando a distância entre o sentir e o pensar. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2020.

__________. SEGUE O FLUXO: CONSTRUÇÃO DE FLUXOGRAMAS PARA ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA. In: Anais do Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Anais...Caruaru (PE) Webconferência, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/VIIIEPEM/462688-SEGUE-O-FLUXO--CONSTRUCAO-DE-FLUXOGRAMAS-PARA-ENSINAR-E-APRENDER-MATEMATICA. Acessado em jan. de 2024.

VASCONCELOS, A. E. M.; ROCHA, C. A. Com a sorte na palma das mãos: o tradicional jogo de palitinhos em simulações no GeoGebra para o ensino da probabilidade frequentista. In: Encontro de Matemática do IFPE Campus Pesqueira, 3., 2023. Anais...Pesqueira, 2023. Disponível em: https://sites.google.com/pesqueira.ifpe.edu.br/anaisemip/edi%C3%A7%C3%B5es-anteriores/anais-do-emip-2023-vol-3-2023. Acesso em: 18 jan. 2024.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990. Disponível em: https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf. Acesso em: 03 set. 2022.

VIEIRA JÚNIOR, J. E. Fluxogramas: análise da proposta de uma coleção de livros didáticos de matemática. TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) – UFPE/CCEN. João Pessoa, p. 44. 2021. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/21676/1/JEVJ21122021.pdf. Acessado em jan. de 2024.

WARSI, K. (ed.). **O livro da matemática**. 1.ed. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos você ______________________________________, após autorização dos seus responsáveis legais, para participar como voluntário (a) da pesquisa UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador Anthonny Ewerton Marinho de Vasconcelos, residente na rua Rosa Maria de Oliveira Monteiro, n° 82, bairro Santo Antônio, no município de Bezerros, estado de Pernambuco, CEP: 55660-000, telefone: (81) 97900-7081, e-mail: anthonnyemarinho@gmail.com, sob a orientação de José Ivanildo Felisberto de Carvalho, e-mail: ivanfcar@hotmail.com

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via deste termo lhe será entregue para que seus pais ou responsáveis possam guardá-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, um responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo.

Esta pesquisa tem o objetivo de investigar as contribuições e limitações do aplicativo Suíte GeoGebra à aprendizagem da probabilidade frequentista, com a intenção de pensar maneiras diferenciadas para aprender o conteúdo de probabilidade frequentista, o que possibilitará tanto benefícios pessoais a você, que aprofundará seus conhecimentos sobre o tema, quanto para a sociedade, que terá acesso a detalhes sobre essa metodologia de ensino.

A pesquisa ocorrerá em quatro encontros presenciais, todos em dias diferentes, em uma sala reservada na sua própria escola, presencialmente e em horário normal de aula, durante o mês de maio de 2023. No quadro abaixo é possível conferir, para cada um dos encontros, o que será feito e o tempo previsto para a sua duração.

Encontro	O que será feito?	Tempo previsto	Data	Formas de registro
1	Explicação sobre o funcionamento da pesquisa	30min	Primeira semana de maio/2023	Nenhum
2	Resolução de duas atividades e aplicação de um jogo	1h	Segunda semana de maio/2023	Respostas nas atividades impressas
3	Resolução de duas atividades utilizando o aplicativo GeoGebra no celular (uma será individual e outra será em grupo)	2h 30min	Terceira semana de maio/2023	Gravação da aula, das telas dos celulares e respostas nas atividades impressas
4	Resolução de duas atividades	1h	Quarta semana de maio/2023	Respostas nas atividades impressas

O uso das gravações em vídeo (da aula e das telas dos celulares) se dará apenas nesta pesquisa e em nenhum momento será identificado o participante. Nenhum registro de imagem dos participantes será realizado durante a pesquisa.

Durante a sua participação, podem ocorrer potenciais riscos, como constrangimento e desconforto durante a resolução das atividades, cansaço físico ou mental e quebra de sigilo. Para minimizar estes possíveis riscos algumas medidas serão tomadas, como a realização de todas as atividades em local reservado onde você se sinta confortável e seguro, além de flexibilidade no tempo para realizar as atividades, permitindo pausas a qualquer momento caso você precise descansar. Durante toda a pesquisa nenhum comentário sobre o seu desempenho será feito com você, com os seus colegas, professores, coordenadores ou qualquer outra pessoa na sua escola. Além do próprio estudante, apenas os pesquisadores irão ver o conteúdo das gravações em vídeo e das atividades impressas.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados constituídos nesta pesquisa por meio das atividades impressas e gravações em vídeo ficarão armazenados em pastas de arquivo físicas (para as atividades impressas) e em um pen-drive (para as gravações em vídeo), sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de no mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

Nem você e nem seus responsáveis legais pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação e de seus responsáveis legais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE que está no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cephumanos.ufpe@ufpe.br).**

____

Anthonny Ewerton Marinho de Vasconcelos

ASSENTIMENTO DO(DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, ______________________________________, portador (a) do documento de Identidade ____________________, abaixo assinado, concordo em participar da pesquisa UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus responsáveis legais precise pagar nada.

Bezerros, _____ de ____________ de _______

Assinatura do (da) menor: ____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Solicitamos a sua autorização para convidar o (a) seu/sua filho (a)_________________________ para participar, como voluntário (a), da pesquisa UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade. Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador Anthonny Ewerton Marinho de Vasconcelos, residente na rua Rosa Maria de Oliveira Monteiro, n° 82, bairro Santo Antônio, no município de Bezerros, estado de Pernambuco, CEP: 55660-000, telefone: (81) 97900-7081, e-mail: anthonnyemarinho@gmail.com, sob a orientação de José Ivanildo Felisberto de Carvalho, e-mail: ivanfcar@hotmail.com

O/a Senhor/a será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida a respeito da participação dele/a na pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e o/a Senhor/a concordar que o (a) menor faça parte do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias.

Uma via deste termo de consentimento lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável. O/a Senhor/a estará livre para decidir que ele/a participe ou não desta pesquisa. Caso não aceite que ele/a participe, não haverá nenhum problema, pois desistir que seu filho/a participe é um direito seu. Caso não concorde, não haverá penalização para ele/a, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

Esta pesquisa tem o objetivo de investigar as contribuições e limitações do aplicativo Suíte GeoGebra à aprendizagem da probabilidade frequentista, com a intenção de pensar maneiras diferenciadas para aprender o conteúdo de probabilidade frequentista, o que possibilitará tanto benefícios pessoais ao participante, que aprofundará seus conhecimentos sobre o tema, quanto para a sociedade, que terá acesso a detalhes sobre essa metodologia de ensino.

A pesquisa ocorrerá em quatro encontros presenciais, todos em dias diferentes, em uma sala reservada na própria escola do participante, presencialmente e em horário normal de aula, durante o mês de maio de 2023. No quadro abaixo é possível conferir, para cada um dos encontros, o que será feito e o tempo previsto para a sua duração.

Encontro	O que será feito?	Tempo previsto	Data	Formas de registro
1	Explicação sobre o funcionamento da pesquisa	30min	Primeira semana de maio/2023	Nenhum
2	Resolução de duas atividades e aplicação de um jogo	1h	Segunda semana de maio/2023	Respostas nas atividades impressas
3	Resolução de duas atividades utilizando o aplicativo GeoGebra no celular (uma será individual e outra será em grupo)	2h 30min	Terceira semana de maio/2023	Gravação da aula, das telas dos celulares e respostas nas atividades impressas
4	Resolução de duas atividades	1h	Quarta semana de maio/2023	Respostas nas atividades impressas

O uso das gravações em vídeo (da aula e das telas dos celulares) se dará apenas nesta pesquisa e em nenhum momento será identificado o participante. Nenhum registro de imagem dos participantes será realizado durante a pesquisa.

Durante a participação do seu(sua) filho(a), podem ocorrer potenciais riscos, como constrangimento e desconforto durante a resolução das atividades, cansaço físico ou mental e quebra de sigilo. Para minimizar estes possíveis riscos algumas medidas serão tomadas, como a realização de todas as atividades em local reservado onde seu(sua) filho(a) se sinta confortável e seguro(a), além de flexibilidade no tempo para realizar as atividades, permitindo pausas a qualquer momento caso ele (ela) precise descansar. Durante toda a pesquisa nenhum comentário sobre o desempenho do seu(sua) filho(a) será feito com ele(a), com os colegas, professores, coordenadores ou qualquer outra pessoa na escola. Além do próprio estudante, apenas os pesquisadores irão ver o conteúdo das gravações em vídeo e das atividades impressas.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados constituídos nesta pesquisa por meio das atividades impressas e gravações em vídeo ficarão armazenados em pastas de arquivo físicas (para as atividades impressas) e em um pen-drive (para as gravações em vídeo), sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de no mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

Nem o(a) senhor(a) nem seu (sua) filho(a) pagarão nada para ele(a) participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento pela participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas para a participação do seu(sua) filho(a) serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, o (a) senhor (a) poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cephumanos.ufpe@ufpe.br).**

____

Anthonny Ewerton Marinho de Vasconcelos

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO/A VOLUNTÁRIO

Eu, ______________________________________, CPF__________________, abaixo assinado, responsável por ________________________________, autorizo a sua participação no estudo UM LABORATÓRIO NA PALMA DAS MÃOS: o aplicativo Suíte GeoGebra como instrumento de aprendizagem do significado frequentista da probabilidade, como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade para mim ou para o (a) menor em questão.

Bezerros, _____ de _____________ de _______

Assinatura do (da) responsável: ____

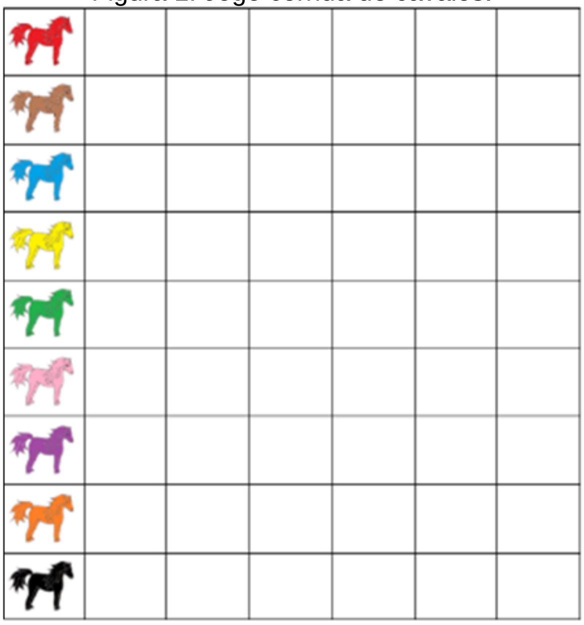
Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE C – ATIVIDADE 1

Um jogo de corrida conta com 9 cavalos, cada um deles numerado de 1 a 9. Lançam-se dois dados honestos de 4 faces, numeradas de 1 a 4, e calcula-se a soma dos resultados obtidos em cada dado. O cavalo cuja numeração é essa soma, avança uma casa. Vence o cavalo que alcançar primeiro a linha de chegada. A figura abaixo representa uma corrida na qual é necessário avançar seis casas para alcançar a linha de chegada.

Figura 1: Jogo corrida de cavalos.



Fonte: O autor (2023)

Tarefa 1: Para você, todos os cavalos têm a mesma chance de vencer a corrida? Justifique.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 2

Aposte no seu cavalo preferido e vamos jogar algumas partidas!

Após algumas rodadas jogadas, faça o que se pede:

Tarefa 2: Numa escala que vai de impossível a certo, como você avalia a probabilidade de vitória para cada um dos cavalos na corrida?

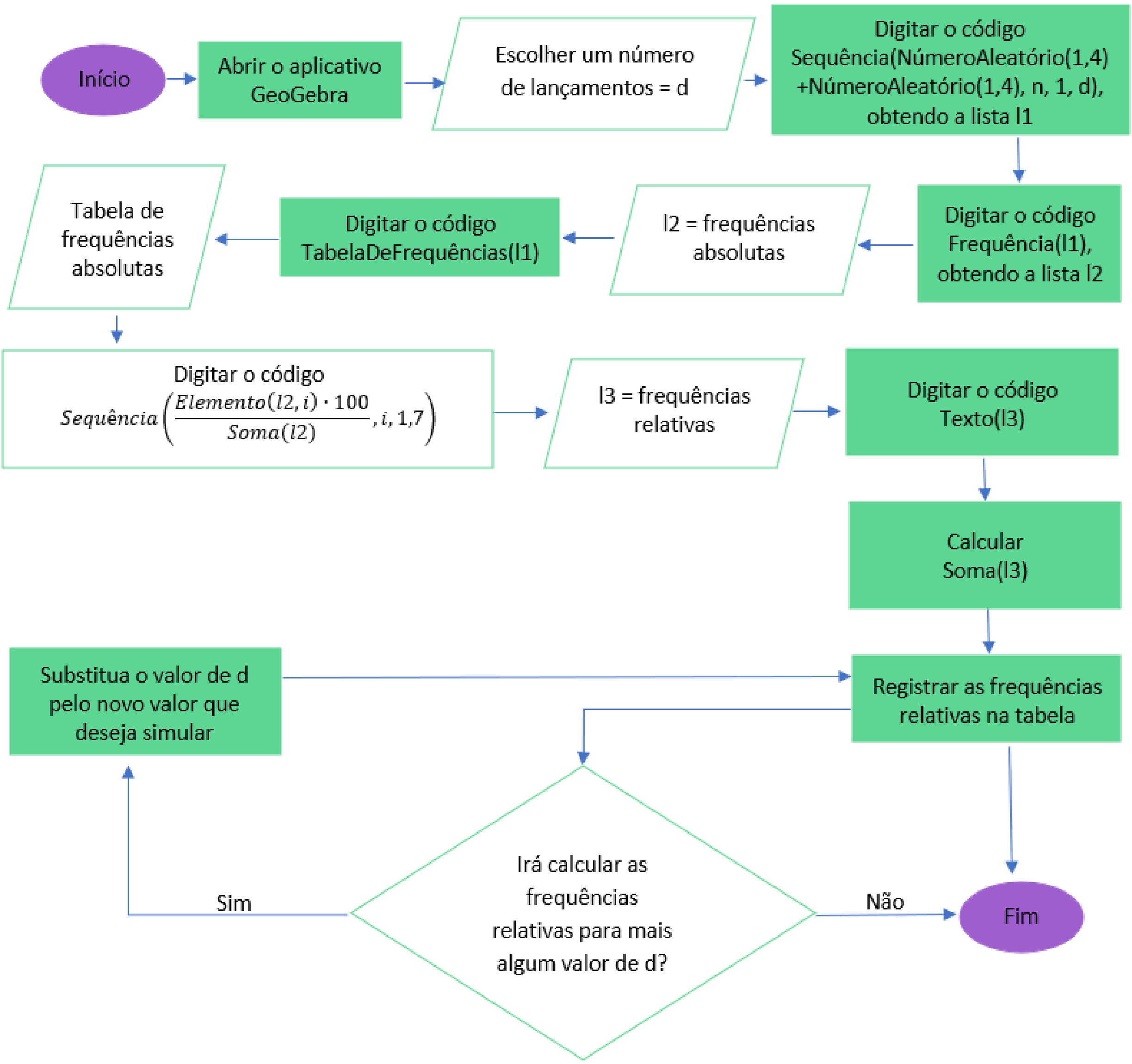
Certo	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Legenda:
Muito provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C1 – Cavalo 1
Provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C2 – Cavalo 2 C3 – Cavalo 3
Pouco provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C4 – Cavalo 4
Impossível	○	○	○	○	○	○	○	○	○	C5 – Cavalo 5 C6 – Cavalo 6
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C7 – Cavalo 7 C8 – Cavalo 8 C9 – Cavalo 9

APÊNDICE E – ATIVIDADE PIVOT

Como você percebeu, o jogo corrida de cavalos está baseado no lançamento de dois dados honestos com 4 faces. Por essa razão, vamos estudar com mais profundidade esse experimento aleatório: lançar dois dados honestos com 4 faces e calcular a soma dos resultados obtidos.

Tarefa 3: Utilize o aplicativo GeoGebra, o Fluxograma 1 (Figura 2) e o Quadro 1 para realizar algumas simulações para esse experimento. À medida que for realizando as simulações, preencha a tabela com os resultados da sua simulação.

Figura 2: Fluxograma 1.



Fonte: O autor (2024).

Quadro 1: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 3.

Finalidade	Códigos e orientações
Simular a soma dos resultados no lançamento de dois dados de 4 faces:	Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão Pesquise pelo comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))** Você vai precisar do comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))** duas vezes. Não escreva a letra **d** no código. Ao invés disso, você deve utilizar o valor numérico de d que deseja simular. Preencha as lacunas obtendo o seguinte código: **Sequência(NúmeroAleatório(1,4)+ NúmeroAleatório(1,4), n, 1, d)**
Obter a lista de frequências absolutas:	Pesquise pelo comando **Frequência(Lista de Dados Brutos)** Preencha a lacuna com l1 obtendo o seguinte código: **Frequência(l1)**
Construir a tabela de frequências absolutas:	Vá em Configurações e desabilite as opções de exibir eixos e exibir malha. Pesquise pelo comando **TabelaDeFrequências(Lista de Dados Brutos, Fator de Escala/opcional)** Preencha a lacuna de Lista de Dados Brutos com l1 e apague a lacuna de Fator de Escala/opcional, obtendo o seguinte código: **TabelaDeFrequências(l1)**
Obter a lista de frequências relativas (em termos percentuais):	Vá em Configurações → Geral → Arredondamento e coloque apenas 2 casas decimais. Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)**

	Clique em Expressão e pesquise pelo comando **Elemento(Lista, Posição do Elemento)** e preencha as lacunas com l2 e i, obtendo o seguinte código parcial: $Sequência(Elemento(l2, i)$ Em seguida, Multiplique por 100 - Clique no botão de multiplicação e depois digite 100 Divida por **Soma(l2)** - Clique no botão de divisão e digite o código abaixo: **Soma(l2)** Depois digite o restante do código: $, i, 1, 7)$ Obtendo o seguinte código: $$Sequência\left(\frac{Elemento(l2, i)\cdot 100}{Soma(l2)}, i, 1,7\right)$$ Se aparecerem símbolos de ? na lista de frequências, você precisa aumentar o valor de **d**.
Exibir a lista de frequências relativas na Janela de visualização:	Pesquise o comando **Texto(Objeto)** e preencha a lacuna com l3 obtendo o seguinte código: **Texto(l3)** Reposicione a lista na Janela de Visualização, se necessário. Talvez seja necessário realizar um movimento de pinçar com os dedos para que apareça.
Calcular a soma das frequências relativas:	Pesquise o comando **Soma(Lista)** e preencha a lacuna com l3, obtendo o seguinte código: **Soma(l3)**
Realizar novas simulações para outros valores de d:	Vá até a lista l1 e, por meio do comando Sequência que você utilizou no início, clique no comando e substitua o valor de d para o novo valor que deseja simular. Todos os demais comandos serão atualizados para esse novo valor automaticamente.

Fonte: O autor (2023).

Registre na tabela abaixo as frequências relativas que você obtiver nas simulações com o GeoGebra, assim como a soma das frequências relativas em cada caso, no total.

	Número de lançamentos								
	50	100	200	500	1000	2000	4000	5000	10 000
Soma 1									
Soma 2									
Soma 3									
Soma 4									
Soma 5									
Soma 6									
Soma 7									
Soma 8									
Soma 9									
Total									

Tarefa 4: À medida que o número de lançamentos aumenta (de 50 até 10 000), a frequência relativa para cada soma vai se aproximando de um determinado valor. Indique uma estimativa (uma aproximação) para cada um destes valores.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa									

Tarefa 5: Numa escala que vai de impossível a certo, como você avalia a probabilidade de obter cada uma das somas abaixo?

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Certo	○	○	○	○	○	○	○	○	○
Muito provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○
Provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○
Pouco provável	○	○	○	○	○	○	○	○	○
Impossível	○	○	○	○	○	○	○	○	○

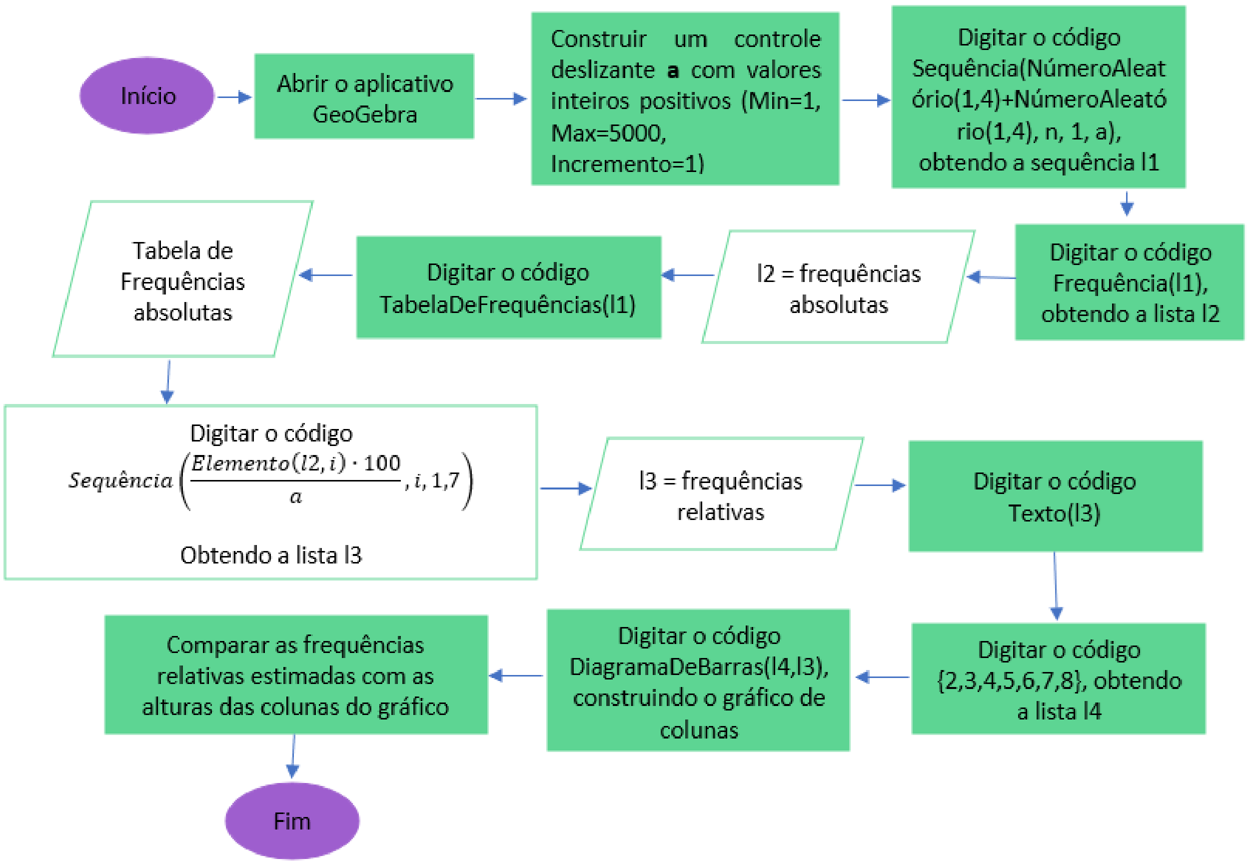
Legenda:
S1 – Soma 1
S2 – Soma 2
S3 – Soma 3
S4 – Soma 4
S5 – Soma 5
S6 – Soma 6
S7 – Soma 7
S8 – Soma 8
S9 – Soma 9

APÊNDICE F – ATIVIDADE 3

Vamos melhorar um pouco mais as suas estimativas na Tarefa 4 utilizando gráficos dinâmicos.

Tarefa 6: Utilize o aplicativo GeoGebra, o Fluxograma 2 (Figura 3) e o Quadro 2, para construir um gráfico de colunas dinâmico.

Figura 2: Fluxograma 2.



Fonte: O autor (2023).

Quadro 2: Códigos e orientações das simulações da Tarefa 6.

Finalidade	Códigos e orientações
Construir o controle deslizante **a**	Digitar a letra **a** no Campo de Entrada
Configurar o controle deslizante **a**	Configure o controle deslizante para Min = 1, Max = 5000, Incremento = 1
Simular a soma dos resultados no lançamento de dois dados de 4 faces:	Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão Pesquise pelo comando **NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro))**

	Você vai precisar do comando NúmeroAleatório(Mínimo (Inteiro), Máximo (Inteiro)) duas vezes. Preencha as lacunas obtendo o seguinte código: **Sequência(NúmeroAleatório(1,4)+ NúmeroAleatório(1,4), n, 1, a)**
Obter a lista de frequências absolutas:	Pesquise pelo comando **Frequência(Lista de Dados Brutos)** Preencha a lacuna com l1 obtendo o seguinte código: **Frequência(l1)**
Construir a tabela de frequências absolutas:	Vá em Configurações e desabilite as opções de exibir eixos e exibir malha. Pesquise pelo comando **TabelaDeFrequências(Lista de Dados Brutos, Fator de Escala/opcional)** Preencha a lacuna de Lista de Dados Brutos com l1 e apague a lacuna de Fator de Escala/opcional, obtendo o seguinte código: **TabelaDeFrequências(l1)**
Obter a lista de frequências relativas (em termos percentuais):	Vá em Configurações → Geral → Arredondamento e coloque apenas 2 casas decimais. Pesquise pelo comando **Sequência(Expressão, variável, valor inicial, valor final)** Clique em Expressão e pesquise pelo comando **Elemento(Lista, Posição do Elemento)** e preencha as lacunas com l2 e i, obtendo o seguinte código parcial: $Sequência(Elemento(l2, i)$ Em seguida, Multiplique por 100 - Clique no botão de multiplicação e depois digite 100 Divida por **a** - Clique no botão de divisão e digite a letra **a** Depois digite o restante do código:

	$, i, 1, 7)$ Obtendo o seguinte código: $Sequência\left(\frac{Elemento(l2, i) \cdot 100}{a}, i, 1,7\right)$ Se aparecerem símbolos de ? na lista de frequências, você precisa aumentar o valor de **a**.
Exibir a lista de frequências relativas na Janela de visualização:	Pesquise o comando **Texto(Objeto)** e preencha a lacuna com l3 obtendo o seguinte código: **Texto(l3)** Reposicione a lista na Janela de Visualização, se necessário. Talvez seja necessário realizar um movimento de pinçar com os dedos para que apareça.
Construir a lista {2,3,4,5,6,7,8}	Vá no teclado de funções – f(x) –, insira as chaves e digite os elementos no seu interior.
Construir o gráfico de colunas	Vá em Configurações e habilite a opção de exibir eixos, mas mantenha desabilitada a opção de exibir malha. Digitar o código **DiagramaDeBarras(l4,l3)** Obtendo a construção do gráfico. Realize um movimento de pinça no eixo x para modificar a escala.

Fonte: O autor (2023).

Tarefa 7: Após a análise dos gráficos, atualize sua tabela com as estimativas (aproximações) para cada soma. Você pode manter as estimativas da Tarefa 4 ou pode fazer mudanças.

	Soma 1	Soma 2	Soma 3	Soma 4	Soma 5	Soma 6	Soma 7	Soma 8	Soma 9
Estimativa									

APÊNDICE G – ATIVIDADE 4

Lançaram-se dois dados honestos com 4 faces, calculando-se a soma dos pontos obtidos em cada dado.

Tarefa 8: Qual a probabilidade de obtermos cada uma das somas a seguir?

a) Soma igual a 1

b) Soma igual a 2

c) Soma igual a 3

d) Soma igual a 4

e) Soma igual a 5

f) Soma igual a 6

g) Soma igual a 7

h) Soma igual a 8

i) Soma igual a 9

Tarefa 9: Qual a soma de todas as probabilidades calculadas na Tarefa 8?

APÊNDICE H – ATIVIDADE 5

Compare as probabilidades teóricas calculadas na Tarefa 8 com as frequências relativas obtidas por você na Tarefa 3 e com as estimativas dadas por você na Tarefa 7.

Tarefa 10: Qual relação você consegue perceber entre as probabilidades teóricas calculadas e as frequências relativas obtidas?