UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

WANUZA WIVIANE PEREIRA DE ARAÚJO

ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS POR ESTUDANTES DO 5º ANO DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA E SUAS RELAÇÕES COM AS CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Recife
2023

WANUZA WIVIANE PEREIRA DE ARAÚJO

ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS POR ESTUDANTES DO 5º ANO DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA E SUAS RELAÇÕES COM AS CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestra em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida

Recife

2023

Catalogação na fonte:
Bibliotecária: Leonice Cavalcante, CRB4:2198

A663e Araújo, Wanuza Wiviane Pereira de
Estratégias mobilizadas por estudantes do 5o ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico / Wanuza Wiviane Pereira de Araújo. - Recife, 2023.
105p. : il.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológicas, 2023..
Inclui referências.

1. estratégias de resolução. 2. problemas de partilha. 3. pensamento algébrico. I. Almeida, Jadilson Ramos de. (Orientação). II. Título..

370 CDD (23.ed.) UFPE (CE2024-043)

WANUZA WIVIANE PEREIRA DE ARAÚJO

ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS POR ESTUDANTES DO 5º ANO DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA E SUAS RELAÇÕES COM AS CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 06/09/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida
(Orientador e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
(Examinadora Interna)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
(Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Profa. Dra. Iracema Campos Cusati
(Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco - UPE

AGRADECIMENTOS

Chega o momento ao qual quero colocar aqui meu sentimento de alegria e gratidão por essa conquista.

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram de forma direta e indiretamente para que esse trabalho pudesse ser realizado, e durante todo o processo de construção. Gostaria de agradecer em especial:

A **Deus**, por permitir-me alcançar mais essa conquista. Por ter a oportunidade de estar aqui, de abrir os olhos a cada dia e poder comemorar essa vitória.

À minha mãe, **Rita** (*in memoriam*), pelo amor, cuidado e carinho. Maínha, a senhora não está aqui fisicamente, mais sei que está sempre me acompanhando e ajudando lá de cima.

Ao meu pai, **João**, que mesmo não sendo alfabetizado incentivou tanto eu, quanto minha irmã, a estudar, e acreditou sempre em nós. Obrigada, papai, por tudo.

À minha família, meu esposo **Carlos Eduardo** e meus filhos, **Maria Rita** e **João Lucas**, por ter paciência e compreensão nos tantos momentos de ausência e cansaço, por toda ajuda com nossos filhos nos momentos que estive ausente. Obrigada Carlos por acreditar em mim, pelo incentivo, por escutar meus desabafos e desesperos, por ser amigo, parceiro, esposo e companheiro em todos os momentos.

À minha irmã, **Waneza Waléria**, por estar sempre ao meu lado, presente, ajudando, incentivando e acreditando em mim. Pessoa que sei que posso contar em qualquer momento. Obrigada irmã.

Às minhas **cunhadas, cunhado, primos, tios**, e **sogra**, que sempre acreditaram em mim, e deram apoio. Muito obrigada.

Ao meu orientador, Prof. **Jadilson Almeida**, uma pessoa simples, compreensiva, e acima de tudo um grande amigo. Esteve sempre ao meu lado incentivando e dizendo que eu conseguiria. Quando batia o desespero, lá estava ele me dizendo para ter calma que tudo daria certo. Com toda sua paciência estava ali, orientando, corrigindo e sempre junto para ajudar no que era preciso. Nos momentos que pensava que não iria conseguir e queria desistir, lá estava ele para dizer “nada disso, você vai terminar”. Jadilson, muito obrigada por tudo. Para você toda minha admiração, meu amigo.

Aos colegas da **Escola Maurina Rodrigues**, nas pessoas de Rozângela Moura, Leonor Simões, Yuri de Jesus, Ana Lúcia e as colegas da biblioteca, gratidão pela receptividade e apoio desde a chegada a escola e no decorrer da pesquisa.

À **Maria de Fátima Silva** e **Luís Gustavo Moreira**, pela compreensão nos momentos em que precisei me ausentar. Gratidão.

Aos professores **Marcelo Câmara** e **Iracema Cusati**, por aceitar fazer parte das bancas de qualificação e defesa. Obrigada por todas as contribuições dadas a esse trabalho.

À professora **Paula Baltar**, por aceitar fazer parte da banca de defesa e pelas contribuições dadas. Muito obrigada!

Aos **professores da linha de pesquisa** em Didática da Matemática, nas pessoas de Rosinalda Teles, Marilene Rosa, Jadilson Almeida, Paula Baltar, Iracema Cusati, Iranete Lima e Kátia Medeiros, meus agradecimentos pelas contribuições que enriqueceram esse trabalho.

Aos **amigos do grupo de pesquisa** em História, Epistemologia e Didática da Álgebra, gratidão pelas contribuições através das discussões e sugestões.

Aos **colegas da turma do mestrado** em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, turma 2021, pela acolhida e apoio, que mesmo a distância nos vendo apenas através das telas, contribuíram muito para a ampliação dos meus conhecimentos.

À toda a **coordenação da Pós-Graduação** em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, muito obrigada por estarem sempre a postos para atender nossas solicitações, por estarem sempre prontos a nos ajudar, pela postura profissional e pela simpatia. Em especial, obrigada Professora Gilda Guimarães, Ana Beatriz e Clara, que nos acolheram.

A todos os **professores do programa** que contribuíram para o meu crescimento como pesquisadora. Por proporcionar momentos de troca de experiências, as quais ampliaram consideravelmente meus conhecimentos.

A todos os amigos e amigas que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização dessa conquista. Obrigada pelo incentivo, carinho e por torcer e acreditar em mim.

“Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino” (Freire, 1996, p. 83).

RESUMO

O presente estudo corresponde a uma dissertação de mestrado intitulada Estratégias mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico. O estudo investigou a seguinte pergunta de partida: Quais estratégias são mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de partilha? Buscando responder essa questão de pesquisa, foi estabelecido como objetivo geral identificar as estratégias mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de partilha, relacionando-as com as características do pensamento algébrico. Esse estudo utilizou-se das estratégias de resolução identificadas no estudo de Oliveira e Câmara (2011) e das características do pensamento algébrico propostas por Almeida (2016). Os sujeitos desse estudo foram estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental composta por 28 estudantes, os quais foram organizados em 14 duplas. Os estudantes pertenciam a uma escola a rede municipal de uma cidade localizada no Agreste pernambucano. Para a produção dos dados utilizou-se um teste composto por quatro problemas de partilha com uma relação e a Entrevista Clínica de Piaget. Na análise dos dados, tomou-se como base as estratégias de resolução propostas por Oliveira e Câmara (2011) e as características do pensamento algébrico apresentados por Almeida (2016). A análise dos dados foi realizada em dois momentos. No primeiro, foi realizada análise de todas as respostas registradas pelas duplas no papel, e no segundo momento a análise de algumas das entrevistas realizadas com as duplas. A partir das análises foi possível identificar que os estudantes apresentaram dificuldades na resolução dos problemas de partilha. A maior parte das duplas utilizaram estratégias que privilegiaram o desenvolvimento do pensamento aritmético e não do pensamento algébrico, como era esperado. Não deixando de ressaltar o período complicado enfrentado pelos estudantes e professores devido a pandemia do Covid-19, o que comprometeu o aprendizado dos estudantes nesse período.

Palavras-chave: estratégias de resolução; problemas de partilha; pensamento algébrico.

ABSTRACT

The present study corresponds to a master's dissertation entitled "Strategies mobilized by 5th-grade students in the early years of Elementary Education in solving sharing problems and their relationships with the characteristics of algebraic thinking." The study investigated the following research question: What strategies are mobilized by 5th-grade students in the early years of elementary school when solving sharing problems? Seeking to answer this research question, the general objective was established to identify the strategies mobilized by 5th-grade students in the early years of Elementary Education when solving sharing problems, relating them to the characteristics of algebraic thinking. This study used the resolution strategies identified in the study by Oliveira and Câmara (2011) and the characteristics of algebraic thinking proposed by Almeida (2016). The subjects of this study were students from a 5th-grade class composed of 28 students, who were organized into 14 pairs. The students belonged to a municipal school in a city located in the Pernambuco Agreste region. For data production, a test composed of four sharing problems with a relationship and Piaget's Clinical Interview were used. In data analysis, the resolution strategies proposed by Oliveira and Câmara (2011) and the characteristics of algebraic thinking presented by Almeida (2016) were taken as a basis. Data analysis was carried out in two moments. Initially, an analysis of all responses recorded by the pairs on paper was performed, and then, an analysis of some of the interviews conducted with the pairs was carried out. From the analyses, it was possible to identify that the students had difficulties in solving sharing problems. Most pairs used strategies that favored the development of arithmetic thinking rather than algebraic thinking, as expected. It is worth noting the challenging period faced by students and teachers due to the Covid-19 pandemic, which compromised students' learning during this period.

Keywords: resolution strategies; sharing problems; algebraic thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As necessidades do dia a dia servem como alavanca para o avanço da ciência, e na área da matemática não é diferente. É “indiscutível a importância da Matemática na formação humana, especialmente por vivermos em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia” (Pernambuco, 2019, p. 351).

É importante levar o estudante a perceber o quão relevante é conhecer e aprender matemática, como bem aponta o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019), documento que deve servir como referência para elaborar as orientações que irão direcionar os trabalhos em todas as escolas do estado de Pernambuco. Ao estabelecer competências, as quais os estudantes precisam desenvolver no decorrer de sua vida escolar, elas contribuirão para a formação de cidadãos críticos e capazes de resolver situações de sua vida cotidiana, seja ela pessoal e/ou profissional.

Como a primeira delas, referente ao Ensino Fundamental, é trazido: “reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, além de que é uma ciência viva” (Pernambuco, 2019, p. 354). Assim, a partir do planejamento do professor é possível levar o estudante a perceber a importância dessa área de estudo, bem como fazê-lo ver que esses conhecimentos vêm sendo construídos a partir das necessidades cotidianas não de pouco, mais de muito tempo.

Silva (2021, p. 16) coloca que “a matemática é vista por muitos alunos como uma das disciplinas mais difíceis da educação básica”. A autora também aponta para os elevados índices de resultados insatisfatórios referentes à matemática, apresentados pelos estudantes ao realizarem a Prova Brasil de 2017, em que o resultado desse exame mostra que “[...] 56% dos alunos matriculados no 5° ano não aprenderam o adequado referente à matemática e no 9° ano apenas 15% dos alunos atingiram o esperado” (Silva, 2021, p. 16).

Diante das necessidades e carências para a resolução de problemas cotidianos em que as aritméticas são cansativas ou já não são mais capazes de solucionar, aos poucos vão se desenvolvendo outros ramos dentro da matemática que possibilita solucionar esses problemas, entre eles está a Álgebra. Um campo da matemática de grande importância (Oliveira; Lima; Silva, 2020), que proporciona ao estudante uma nova linguagem e uma forma de pensar com raciocínio lógico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998:

> O estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (Brasil, 1998, p. 115).

Dados apresentados por Câmara e Almeida (2015), trazem indicadores sobre a dificuldade dos estudantes em relação à álgebra. Os resultados das avaliações externas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, mostram que os estudantes têm um baixo índice de acertos. “Nos itens referentes à álgebra nesses instrumentos, raramente os alunos atingem o índice de 40% de acertos” (Câmara; Almeida, 2015, p. 1-2). Quando buscamos dados em relação ao Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco (SAEPE), esses autores trazem que “apenas um em cada cinco estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental consegue, por exemplo, identificar uma equação do 2º grau que expressa um problema” (Câmara; Almeida, 2015, p. 2). Com isso podemos perceber alguns indicativos das dificuldades dos estudantes em relação a esse campo matemático.

Por sua vez, Kuhn e Lima (2021), em um trabalho desenvolvido a partir de reflexões sobre a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, apontam para as dificuldades dos estudantes brasileiros em relação à matemática e principalmente em relação à álgebra, apresentando dados estatísticos da avaliação externa nacional, o SAEB 2019, bem como a avaliação externa internacional, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 2018. Essas avaliações classificam os estudantes a partir de níveis de proficiência. O SAEB tem uma escala que vai do nível 0 ao nível 9, e o PISA tem uma escala que vai de 0 a 7.

Esses autores, Kuhn e Lima (2021), apresentam o resultado preliminar da avaliação externa nacional, o SAEB 2019 (Brasil, 2020) e a avaliação externa internacional, o PISA 2018. Eles trazem, em especial, uma comparação entre o rendimento dos estudantes brasileiros e estudantes dos países que fazem parte da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), em relação ao PISA 2018, em que a álgebra se encontra a partir do nível 4 de proficiência. Em ambas as avaliações, o Brasil apresenta baixo nível de desenvolvimento dos estudantes em relação à avaliação em matemática. Quando nos referimos à álgebra, esse índice é ainda mais precário, como é colocado, “as avaliações externas, como o Pisa, apontam para possíveis déficits na aprendizagem de Matemática, com ênfase para a álgebra” (KUHN; Lima, 2021, p. 5).

No PISA 2018, foi percebido o déficit no aprendizado dos estudantes brasileiros em relação à álgebra, algo que é bastante preocupante. Dentre os níveis de proficiência em relação à álgebra, os estudantes apresentaram apenas 3,4% de rendimento, enquanto que os dos países da OCDE chegaram a um rendimento de 18,4%. Com isso, é perceptível a defasagem da aprendizagem de estudantes brasileiros em relação à álgebra.

Logo, mesmo com as várias reformas educacionais que vêm ocorrendo, o ensino e a aprendizagem da álgebra ainda apresentam dificuldades, como é apresentado pelos trabalhos que vêm se desenvolvendo nessa área. Pesquisas afirmam que ainda prevalece a aprendizagem da álgebra a partir de técnicas operatórias que buscam apenas resolver equações sem sequer contextualizá-las (Barbosa; Borralho, 2009; Aguiar, 2014).

No entanto, muitos pesquisadores na área da educação matemática, com foco na álgebra escolar, como Kieran (1992, 1996, 2004, 2007), Miguel, Fiorentini e Radford (2009, 2011), dentre outros, defendem que a álgebra é muito mais que uma linguagem. É, essencialmente, uma forma de pensar (Almeida, 2017).

Kieran (2007) coloca que a “álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas, consiste, também, na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade [...]” (Kieran, 2007, p. 5 *apud* Almeida, 2017, p. 2). Com isso, a álgebra passa a ser vista como uma forma de raciocínio e pensamento a partir de situações matemáticas, e não mais como uma mera técnica de resolução.

Contudo, acreditamos que a álgebra se apresenta muito mais na forma como o sujeito está pensando do que propriamente na linguagem utilizada para expressar esse pensamento, o pensamento algébrico.

Por sua vez, o pensamento algébrico é caracterizado por Blanton e Kaput (2005) como “um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação” (Blanton; Kaput, 2005, p. 413 *apud* Oliveira; Paulo, 2019, p. 80).

Logo, é possível perceber a importância da inserção desse campo de conhecimento desde os anos iniciais, pois, de acordo com Carraher *et al*. (2006), o fato de a álgebra ter surgido historicamente como generalização da aritmética, isso não implica que seu estudo seja adiado. Eles acreditam que as dificuldades apresentadas pelos estudantes possam ser devido às oportunidades que foram perdidas de desenvolver um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico, no início da vida escolar dos estudantes, nos anos iniciais.

Autores como Silva, Savioli e Passos (2015) também afirmam a importância da introdução da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de atividades que possibilitem aos estudantes pensar, raciocinar, construir relações, no sentido de preparar para a transição da aritmética para a álgebra, uma vez que o pensar algebricamente se desenvolve a partir destas relações.

Pesquisas como as de Santos e Moreira (2016), Silva e Savioli (2014) e Oliveira e Paulo (2019) vêm também apontando para a importância de iniciar o ensino da álgebra já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois, os estudantes conseguem desenvolver o pensamento algébrico mesmo antes de iniciar o trabalho com a linguagem simbólica algébrica. “Isso é sustentado pelo fato de que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes mesmo de o estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica” (Silva; Savioli; Passos, 2015, p. 106).

Em um estudo realizado com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, Silva, Savioli e Passos (2015) investigaram a manifestação do pensamento algébrico por meio da resolução de tarefas propostas. Após a análise, as pesquisadoras puderam concluir que “os participantes deste estudo evidenciaram por meio de suas produções escritas características de pensamento algébrico” (Savioli; Passos; 2015, p. 128), mostrando que é possível crianças menores desenvolverem o pensamento algébrico.

Vários pesquisadores como Silva, Savioli e Passos (2015), Silva e Savioli (2014), Santos e Moreira (2016), dentre outros que investigam sobre a educação algébrica, relatam o quanto é importante e necessário a introdução do pensamento algébrico nos anos iniciais de escolarização dos estudantes, bem como a relação entre a aritmética e a álgebra. Isso porque o pensamento algébrico pode ser desenvolvido bem antes de o estudante apresentar a linguagem simbólica algébrica (Silva; Savioli; Passos, 2015). Nos anos iniciais, este pensamento pode ser revelado sem fazer o uso de símbolos algébricos, já que os estudantes partem de seus registros intuitivos e com o tempo vão se aprimorando até apresentarem a linguagem simbólica algébrica.

Em uma pesquisa com o objetivo de identificar e analisar características do pensamento algébrico em tarefas aplicadas a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, mais precisamente do 5º ano, Silva e Savioli (2012) perceberam que eles apresentaram indícios do pensamento algébrico. Portanto, esses estudantes têm condições de desenvolverem aspectos do pensamento algébrico, mesmo não apresentando uma linguagem simbólica algébrica.

Pesquisas realizadas por Oliveira e Câmara (2011) mostraram resultados parecidos com os das autoras anteriormente citadas. Ao investigarem as estratégias utilizadas por crianças do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas de partilha de quantidade, os pesquisadores observaram que mesmo não utilizando um registro algébrico, algumas crianças que ainda não tinham tido um contato formal com a álgebra, mobilizaram elementos do pensamento algébrico.

Por sua vez, Oliveira e Paulo (2019, p. 18) apontam que:

> Se, pelo pensamento algébrico é possível promover modos de aprender e ensinar matemática que explorem os conteúdos para além da manipulação, caminhando na direção de uma matemática como atividade, de um pensar que é explícito e leva à compreensão, então defendemos que, nos anos iniciais devem ser exploradas situações do contexto algébrico de modo que o aluno perceba as relações matemáticas nas operações, no sistema de numeração, nas tarefas que realiza.

Nos documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e o Currículo de Pernambuco (CPE) (Pernambuco, 2019), há a orientação para a introdução da álgebra no Ensino Fundamental desde os anos iniciais. A BNCC, por exemplo, indica que, “é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – anos iniciais” (Brasil, 2018, p. 270).

Partindo da importância que é vivenciar o pensamento algébrico desde o início da vida escolar do estudante, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como apontam as pesquisas de Silva e Savioli (2014), Silva e Savioli (2012), Santos e Moreira (2016), Oliveira e Paulo (2019) dentre outros, como também é trazido nas orientações dos documentos oficiais atuais, como a BNCC (Brasil, 2018) em nível nacional, e o CPE (Pernambuco, 2019) em nível estadual, para a inserção da álgebra nos anos iniciais, surgiu o interesse em responder a seguinte questão de pesquisa: quais estratégias são mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos inicias do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico?

Na busca por tentar responder o problema citado acima, foi estabelecido o seguinte objetivo geral para essa pesquisa: identificar as estratégias mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de partilha, relacionando-as com as características do pensamento algébrico. Como objetivos específicos foram estabelecidos: I) Identificar as estratégias adotadas pelos estudantes na resolução de problemas de partilha; e II) Relacionar as estratégias adotadas pelos estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de partilha com as características do pensamento algébrico.

A participação no Grupo de Pesquisa AL Jabr em História, Epistemologia e Didática da Álgebra, vinculado a UFRPE e UFPE, através de estudos e discussão dentro do grupo, despertou o interesse pessoal em estudar e pesquisar sobre o pensamento algébrico mobilizado por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolver problemas de partilha. A presente pesquisa se insere dentro de um coletivo de pesquisas sobre o ensino de álgebra e pensamento algébrico, que veem sendo desenvolvidas no âmbito de pesquisa do grupo AL Jabr.

Para nossa investigação utilizaremos os problemas de partilha, que de acordo com Almeida (2016, p. 28), “se caracteriza por ter um valor desconhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecida”. Esses problemas de partilha podem ser classificados, como afirma Marchand e Berdnaz (1999), a partir das relações que eles apresentam entre as partes. Ou seja, de acordo com o número de relações presentes no problema, eles podem ter uma, duas ou mais relações. No exemplo, “Ana e Carla tem juntas 6 bonecas. Ana tem o dobro da quantidade de bonecas de Carla. Quantas bonecas tem cada uma?” Nessa situação, a relação existente é “Ana tem o dobro da quantidade de bonecas de Carla”. Logo, esse é um exemplo de problema de partilha com uma relação.

Mas, porque problemas de partilha? Os problemas de partilha são os problemas que “historicamente contribuíram para o desenvolvimento da álgebra com a divisão de herança na antiguidade” (Almeida, 2016, p. 36). Algumas pesquisas também vêm apontar para a contribuição que esses problemas têm para o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da educação básica, e como os problemas de partilha “podem ajudar no ensino de álgebra escolar no Ensino Fundamental” (Almeida, 2016, p. 36), desde os anos iniciais, como orientam os documentos oficiais (Brasil 2018; Pernambuco, 2019). Motivos esses, apresentados acima, que nos levaram a utilizar esses tipos de problemas.

Após apresentarmos a nossa questão de pesquisa, o nosso objetivo geral e os específicos organizamos o texto a partir da discussão sobre a álgebra escolar, o que os documentos orientam para os anos iniciais, o percurso metodológico, a análise dos dados e as considerações finais. O capítulo 2 desse estudo se refere à álgebra escolar. Nesse capítulo trazemos um pouco sobre o que pensam alguns autores sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem da álgebra, assim como a importância da aprendizagem da álgebra e a formação pessoal do estudante, pesquisas envolvendo o estudo sobre a álgebra escolar, o que é defendido pela BNCC destacando que o ensino da álgebra seja valorizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a concepção de alguns autores sobre a álgebra escolar e um breve relato sobre a evolução da álgebra e seus estágios. Ainda nesse capítulo adentramos um pouco em problemas de partilhas, estratégias utilizadas na resolução de PP e pensamento algébrico trazendo um pouco sobre as concepções e caracterizações sobre esses temas para possibilitar uma melhor compreensão, uma vez que são elementos importantes do nosso estudo.

No capítulo 3 tratamos sobre o que os documentos orientam para os anos iniciais. Nesse capítulo apresentamos um breve e recorrido histórico sobre os documentos dentro do estudo da álgebra, detalhando os documentos oficiais que estão sendo utilizados atualmente como orientação para o ensino. O percurso metodológico de nosso estudo é detalhado no capítulo 4. Ele foi realizado com 28 estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental e organizado em 14 duplas. Foi realizada a aplicação de teste e entrevista clínica, com gravação de áudio das 14 duplas. A análise desse estudo está descrita no capítulo 5, em que apresentamos os resultados a partir das respostas escritas e da análise da gravação de 6 duplas, realizada no momento da realização do teste. Por fim, no capítulo 6 apresentamos nossas considerações finais e indicação para futuros estudos.

2 ÁLGEBRA ESCOLAR

Autores como Lins e Gimenez (2005) apontam a grande dificuldade que é enfrentada no ensino e na aprendizagem da álgebra. E, essa dificuldade ocorre na percepção da ruptura que existe na passagem da linguagem aritmética para a linguagem algébrica, em que o estudante passa por uma transição a partir da introdução de uma nova linguagem, a alfanumérica.

Para Coelho e Aguiar (2018), se ao invés de vivenciar apenas questões técnicas, fosse dado ênfase ao pensamento algébrico, o ensino da álgebra contribuiria significativamente não apenas para o aprendizado em matemática, como também para o desenvolvimento do pensamento lógico do estudante, pensamento esse, como os próprios autores afirmam, "essencial para o desenvolvimento de um cidadão capaz de viver na sociedade atual" (Coelho; Aguiar, 2018, p. 17).

Por sua vez o CPE vem trazer a importância do desenvolvimento de competências e habilidades pelos estudantes, impulsionadas pelas escolhas didáticas, mas realizadas pelos estudantes de forma que venha "auxiliar o cidadão a ter uma visão crítica da sociedade em que vive e a lidar com as formas usuais de representar indicadores numéricos" (Pernambucano, 2018, p. 354), para possibilitar a interpretação dos diversos fenômenos da vida cotidiana como os econômicos, físicos, sociais etc.

Kuhn e Lima (2021), a partir de alguns estudos, perceberam que os estudantes apresentam dificuldades no aprendizado em matemática, e uma adversidade ainda maior quando se refere à álgebra. Eles acreditam também que "essa deficiência esteja relacionada a uma aprendizagem mecânica, alicerçada em aspectos técnicos e operacionais, e não ao desenvolvimento do pensamento lógico abstrato" (Kuhn; Lima, 2021, p. 5).

Autores como Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) discutem a tendência de que o ensino de álgebra e a manifestação do pensamento algébrico se dão por meio da manipulação de uma linguagem específica. Esses autores defendem que essa é uma abordagem equivocada, pois "essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é pelo menos em princípio, a expressão de um pensamento" (Fiorentini; Miguel; Miorim, 1993, p. 85).

A BNCC também segue essa perspectiva, pois defende no que se refere ao ensino de álgebra, que a proposta desse campo da matemática deveria ser vivenciada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, enfatizando a importância do “desenvolvimento de um tipo especial de pensamento –pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas” (Brasil, 2018, p. 270).

Corroborando com essas ideias, autores como Blanton e Kaput (2005), Kieran (1996), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) entre outros, Almeida (2017, p. 3) não vê à álgebra escolar como uma linguagem simbólica apenas, mas, para esses autores a álgebra vai além de uma linguagem, é uma forma de pensar. “A álgebra se revela muito mais na maneira do sujeito pensar, em detrimento da linguagem utilizada para expressar esse pensamento”.

A evolução da álgebra, por consequência, da álgebra escolar, se deu através da evolução da linguagem algébrica, uma linguagem simbólica “uma linguagem matemática que, liberta das palavras, se volta para expressar o pensamento matemático” (Araújo, 2008, p. 341). Mas essa evolução não aconteceu de um momento para outro, essa linguagem que conhecemos com símbolos, só foi possível ao que se indica, através de esforços da humanidade. (Almeida, 2017)

De acordo com Almeida (2017), a história da álgebra revela que a linguagem algébrica passou por três grandes estágios: o de uma linguagem natural, passando por uma linguagem sincopada até a linguagem algébrica, que conhecemos como simbólica.

O primeiro estágio da linguagem algébrica é chamado, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), como retórico. Nesse estágio a linguagem era expressa por meio da linguagem natural. O segundo estágio denominado de sincopado, o pensamento algébrico deixa de ser expresso por meio de palavras, linguagem natural, ou seja, além da presença dos números é incorporado às letras e as abreviações para representar os valores desconhecidos. Mas como é colocado por Araújo (2008), o aparecimento das letras levou séculos.

O terceiro estágio, o simbólico, tem como representante François de Viéte (1540- 1603). Esse matemático foi o primeiro a utilizar símbolos para representar quantidades desconhecidas. O período de evolução da linguagem algébrica que vai da retórica, passando pela sincopada até chegar à simbólica levou aproximadamente três mil e quatrocentos anos.

Logo, constatamos que a linguagem simbólica algébrica que fazemos uso hoje levou bastante tempo para ser desenvolvida. Assim percebemos que é uma linguagem não tão simples de compreensão, mas que muitas das vezes acabamos não levando em consideração essa informação quando nos remetemos à educação básica, e esperamos que o estudante compreenda completamente essa linguagem rapidamente, em um curto espaço de tempo.

Entretanto, pesquisas apontam que a supervalorização dessa linguagem simbólica não garante uma compreensão por parte dos estudantes. Essa forma de trabalhar a álgebra a torna mecânica, descontextualizada e sem sentido (Kieran, 1992).

2.1 PROBLEMAS DE PARTILHA

Da Rocha Falcão (1997) e Radford (2011) vêm caracterizar os problemas de estrutura algébrica como sendo aqueles problemas que são cansativos e demorados, quando se tenta resolvê-los utilizando procedimentos aritméticos. E esses procedimentos até se tornam mesmo insuficientes, quando se busca usá-los para solucionar esse tipo de problema.

De acordo com Marchand e Bednarz (1999) o que diferencia um problema de estrutura aritmética de um problema de estrutura algébrica é que, para o primeiro o estudante partirá de valores conhecidos para determinar valores desconhecidos. Já no segundo, o estudante é levado a partir de "relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético" (Câmara; Oliveira, 2010, p. 3).

Podemos salientar que, diferentemente do problema de estrutura aritmética, em que o estudante parte de um valor conhecido para solucionar o problema, em um problema de estrutura algébrica o estudante parte de valores desconhecidos para se chegar à solução do problema. Como podemos observar nos exemplos a seguir:

Exemplo 1: "Monalisa tem 15 livros, Samantha tem o triplo de livros da quantidade de livros que Monalisa tem e Anderson tem o quádruplo de livros do total que Monalisa possui. Quantos livros Monalisa, Samantha e Anderson têm ao todo?" (Santos Jr., 2013, p. 37). Nesse exemplo percebemos que um dos personagens do problema tem valor conhecido, Monalisa com 15 livros. E que é partindo desse valor que se encontram os demais valores, ou seja, os valores desconhecidos.

Exemplo 2: “Monalisa, Samantha e Anderson têm, juntos, 240 livros. Samantha tem o dobro de livros da quantidade que Monalisa têm e Anderson tem o triplo de livros da quantidade de livros que Monalisa tem. Quantos livros possui cada um?” (Santos Jr., 2013, p. 38). Já nesse segundo exemplo, percebemos que os personagens do problema não apresentam valor conhecido. O valor conhecido que é trazido pelo problema é o valor total, 240 livros. Nessa situação o estudante terá que fazer as relações apresentadas no problema para conseguir encontrar os valores desconhecidos.

Contudo, essas pesquisadoras, Marchand e Bednarz (1999), em uma pesquisa realizada na província de Québec, no Canadá, buscaram analisar problemas propostos para o ensino de álgebra presentes em duas coleções de livros didáticos para o ensino secundário. Elas conseguiram identificar três categorias desses problemas: os problemas de transformação, os problemas de taxa e os problemas de partilha. Mas elas também perceberam que havia problemas algébricos propostos nos livros canadenses que não seguiam as classificações propostas, por isso as classificaram como “falsos problemas”. Assim, os falsos problemas são, segundo essas autoras, aqueles que no momento da resolução a conversão é direta, isto é, do registro da linguagem natural para a simbólica algébrica, sem a necessidade de estabelecer relação entre os dados apresentados no enunciado (Almeida, 2016).

Logo, os problemas de transformação são caracterizados pela transformação sofrida pelo valor inicial. Por sua vez, não é apresentado explicitamente no enunciado do problema, em que tanto o valor inicial quanto o final são desconhecidos.

“Ao ser perguntado sobre sua idade Paulo respondeu: o dobra da minha idade quatro anos atrás é igual à minha idade atual mais dezoito anos. Qual é a idade de Paulo?” (Almeida, 2016, p. 27, **grifo nosso**).

Nesse exemplo acima, a idade de Paulo corresponde ao valor desconhecido. Para solucionar o problema considera-se o valor da idade de Paulo como sendo o valor inicial e serão realizadas três transformações em que duas são aditivas sendo representadas pelos termos “quatro anos atrás” e “mais dezoito anos”, e uma multiplicativa representada pelo termo “dobro”. Para solucionar o problema se faz necessário estabelecer as relações presentes no enunciado, caracterizando-o como problema de estrutura algébrica.

Já os problemas de taxa são caracterizados por existir relação entre grandezas não homogêneas. Nesse tipo de problema o estudante além de mobilizar conhecimentos matemáticos se faz necessário outros conhecimentos como da física, por exemplo (Marchand; Bednarz, 1999).

> **Sejam duas cidades A e B. Um homem viaja de automóvel a uma velocidade média de 80 km/h na ida. Ele volta pela mesma estrada a uma velocidade média de 60 km/h. Se ele faz toda a viagem de ida e volta entre as cidades A e B em 7 horas, qual a distância entre essas duas cidades?** (Almeida, 2016, p. 28, **grifo nosso**).

No exemplo citado acima, é necessário estabelecer as relações presente entre as grandezas (não-homogêneas) velocidade média, tempo e distância para obter a solução do problema. Ao estabelecer essas relações, caracteriza-se como um problema de estrutura algébrico.

Por sua vez, os problemas de partilha (PP), de acordo com Almeida (2011), podem ser caracterizados por ter "um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas, ou seja, nesse tipo de problema, tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em outras partes desiguais e desconhecidas" (Almeida, 2011, p. 39).

Marchand e Bednarz (1999) destacam que os problemas de partilha podem ser classificados de acordo com as relações existentes entre as partes, ou seja, as relações entre as informações apresentadas no enunciado do problema. Um exemplo desse tipo de problema é encontrado logo abaixo:

"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas tem cada um?" (Almeida; Santos, 2019, p. 168-169, **grifo nosso**).

Com relação ao número de relações, os problemas de partilha podem apresentar uma, duas, ou mais relações. O exemplo acima é classificado como um problema de partilha com duas relações "Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan" corresponde à primeira relação, e "Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan" a segunda relação.

Quanto à natureza, esse tipo de problema pode apresentar a natureza aditiva, quando apresenta adições ou subtrações, multiplicativa, quando apresenta multiplicações ou divisões e naturezas diferentes, quando apresenta pelo menos uma natureza aditiva e uma multiplicativa. O exemplo citado anteriormente é um problema de natureza diferente por apresentar na primeira relação à natureza multiplicativa, “Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan”, e na segunda relação à natureza aditiva, “Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan”.

E com relação ao encadeamento, os problemas de partilha podem ser de três tipos: fonte, poço e composição. No encadeamento tipo fonte, as grandezas têm origem em apenas uma grandeza. O exemplo citado anteriormente é do tipo fonte, pois, a fonte é a quantidade de figurinhas de Alan. É a partir da quantidade de figuras de Alan que se originam as demais grandezas, ou seja, as quantidades de figurinhas de Bruno e de Carlos.

No encadeamento do tipo composição, as relações estabelecidas seguem uma sequência.

“Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?” (Almeida, 2016, p. 30, **grifo nosso**).

No problema acima exemplifica o encadeamento do tipo composição, em que as relações seguem uma sequência. Diferente dos problemas de partilha do tipo fonte, os problemas do tipo composição as grandezas são originadas a partir de fontes diferentes. Para solucionar esse problema podemos adotar como fonte inicial a quantidade de figurinhas de Paulo, que será utilizada para encontrar a quantidade de figurinhas de Beto. Para encontrar a quantidade de figurinhas de Mário utilizamos a quantidade de figurinhas de Beto, e não mais a quantidade de Paulo como nos problemas do tipo fonte. Assim Beto passa a ser a outra fonte do problema, a fonte para encontrar a quantidade de figurinhas de Mário.

E no encadeamento do tipo poço as relações convergem para um dos personagens presentes no problema.

“João, Carla e Maria vão repartir entre eles 50 chaveiros de modo que João receba metade dos chaveiros de Carla e 10 chaveiros a mais que Maria. Quantos chaveiros cada um vai receber?” (Almeida, 2016, p. 31).

Nesse problema, as relações presentes no enunciado convergem para o mesmo personagem, João. Percebemos na primeira relação em que “João recebe metade dos chaveiros de Carla” e na segunda relação “10 chaveiros a mais que Maria”. Nessa segunda relação, ela também se refere ao mesmo personagem, João.

O nosso trabalho foi desenvolvido a partir dos problemas de partilha com uma relação e o encadeamento do tipo fonte, logo demos ênfase a esse tipo de problema. Para possibilitar uma melhor compreensão com relação à classificação dos problemas de partilha em relação à natureza das relações, segue os exemplos apresentados no quadro abaixo.

Quadro 1 – Quadro referente à exemplificação de PP com uma relação

Problemas	Encadeamento das relações	Número de relações	Natureza das relações
Ana e Paula ganharam de sua mãe um total de 12 lápis coloridos. Ana tem 4 lápis **a mais** que Paula. Quantos lápis tem cada uma?	Fonte	Uma	Natureza aditiva
Ricardo e Pedro têm, juntos, um total de R$18,00. Pedro tem o **dobro** do valor que tem Ricardo. Qual o valor que tem cada um?	Fonte	Uma	Natureza multiplicativa

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O quadro acima traz dois exemplos envolvendo os problemas algébricos do tipo partilha com o encadeamento das relações do tipo fonte, com uma relação como os que utilizamos em nosso estudo. Em relação à natureza, temos um problema de natureza aditiva e outro multiplicativo.

No nosso estudo fizemos o uso da natureza multiplicativa, uma vez que para o 5º ano do Ensino Fundamental, os documentos oficiais orientam para o estudo desse tipo de problema algébrico.

O primeiro PP encontrado no Quadro 1 é um problema que apresenta como número de relações, uma só relação. O trecho “Ana tem 4 lápis a mais que Paula”, corresponde a relação presente nesse problema. Para resolvê-lo é necessário se remeter a Ana, em que ela passa a ser a fonte.

Ao lermos a relação temos o termo “a mais” que dá a ideia de adição, o que corresponde à natureza do problema, aditiva. Entretanto, os problemas de natureza aditiva envolvem a adição como no exemplo do quadro, como também envolve a subtração.

No segundo PP, também encontrado no quadro 1, nos deparamos com um problema que também apresenta o encadeamento do tipo fonte, com uma relação, mas de natureza multiplicativa. A relação “Pedro tem o dobro do valor que tem Ricardo”, a fonte nesse problema é Ricardo, pois é necessário olhar para Ricardo para encontrar o valor de Pedro. O termo em destaque nos remete à operação de multiplicação. Contudo, os problemas de natureza multiplicativa envolvem tanto a multiplicação quanto a divisão.

A seguir detalhamos as estratégias de resolução propostas por Oliveira e Câmara (2011) que foram utilizadas para a análise desse estudo.

2.2 ESTRATÉGIAS UTILIZADAS NA RESOLUÇÃO DOS PP

Ao tentar resolver problemas propostos, estudantes buscam meios ou estratégias para solucioná-los. Em matemática, de acordo com Oliveira e Câmara (2011) as estratégias mobilizadas pelos estudantes podem ser classificadas em: aritméticas e algébricas.

De acordo com Marchand e Bednarz (2000), na estratégia aritmética o estudante parte de valores conhecidos tentando criar pontes para chegar a valores desconhecidos, através de raciocínio sintético. Já na estratégia algébrica o estudante parte dos valores desconhecidos estabelecendo relações através de um raciocínio analítico (Oliveira; Câmara, 2011).

Oliveira e Câmara (2011), ao investigarem estudantes brasileiros e canadenses do 6º ano do Ensino Fundamental sobre a resolução de problemas algébricos do tipo de partilha, conseguiram identificar que esses estudantes mobilizavam estratégias de base ao resolver esse tipo de problema. Com isso esses pesquisadores classificaram as estratégias identificadas no estudo em: “total como fonte”, “dividir por 3”, “cálculo qualquer”, “atribuir valor”, “algébrica” e para as que não conseguiram identificar a estratégia eles a classificaram como “não identificada”. Essas estratégias estão mais esclarecidas logo a seguir, e exemplificadas para possibilitar uma melhor compreensão, uma vez que elas foram utilizadas como base de nossa análise.

(i) "Total como Fonte (TF)”, nessa estratégia o estudante associa o valor total do problema a um dos valores desconhecidos, na resolução do problema. Ex.:

> Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte? (Santos Jr., 2013, p. 50).

Ao resolver esse problema, o estudante adota o valor total como sendo uma das incógnitas, relaciona as informações trazidas no enunciado e encontra os valores das demais incógnitas. Uma primeira solução é o estudante dividir o total 180 por 3, e depois dividir novamente por 2. Assim o estudante encontraria os valores de 60 e 90 respectivamente, daí faria a relação para encontrar o valor restante que no caso seria 30.

(ii) “Dividir por 3 (D3)”, quando o estudante inicia o problema dividindo o valor total conhecido para os três valores desconhecidos, como se a partilha fosse em partes iguais. Já no nosso caso, será a estratégia dividir por 2 (D2). Ex.:

> Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte? (Santos Jr., 2013, p. 50).

Nessa estratégia, o estudante considera o valor 180 como o total e divide por 3, obtendo 60. Na sequência ele adota o valor encontrado (60), como sendo o valor de uma incógnita, e estabelece relações encontrando os demais valores desconhecidos. Considera Basquete = 60, e como o número de estudantes que jogam basquete é o dobro dos que jogam vôlei, então vôlei é a metade, nesse caso vôlei=30. E como o número de estudantes que jogam futebol é o triplo do número que vôlei, então futebol = 90. Logo, 30 estudantes jogam vôlei, 60 estudantes jogam basquete e 90 estudantes jogam futebol.

(iii) "Cálculo Qualquer (CQ)”, quando o estudante não consegue encontrar o significado do problema, e efetua um cálculo qualquer na tentativa de encontrar a solução. Ex.: “Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?” (Santos Jr., 2013, p. 49).

Nessa estratégia o estudante tenta responder de uma forma qualquer, em que não se consegue identificar qual a estratégia foi adotada. Como 55 – 15 = 30, ele apenas realiza um cálculo qualquer sem relacionar as informações apresentadas no problema.

(iv) “Atribuir valor (AV)”, quando o estudante atribui valor ao desconhecido, utilizando relações para determinar os demais valores também desconhecidos. Ex.: “Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?” (Santos Jr., 2013, p. 49). Para esse problema o estudante atribui valor a Frederico, encontrando os valores de Lúcia e Rogério. Considerando que Frederico = 10, Lúcia tem 15 revistas a mais, então Lúcia = 25 revistas. Como Rogério tem o dobro das revistas de Frederico, e Frederico tem 10 revistas, então Rogério tem 20 revistas.

Logo, Frederico tem 10 revistas, Lúcia tem 25 revistas e Rogério tem 20 revistas.

(v) “Estratégia Algébrica (AL)”, quando o estudante parte do total para determinar o valor desconhecido, identificando as relações existentes no problema. Ex.: “Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?” (Santos Jr., 2013, p. 50).

Aqui o estudante estabelece as relações, reduzindo a uma única incógnita para encontrar os demais valores desconhecidos. Considera M + R + A = 270, como R= 2M, A = 3R, assim considerando Marta com 30 chaveiros teremos, M = 30. Substituindo R=2.30, R= 60 e para A=3R, teremos A=3.60 e A=180. Logo, Marta tem 30 chaveiros, Rafael tem 60 chaveiros e Ana tem 180 chaveiros.

(vi) “Não foi possível identificar (NI)”, quando não foi possível identificar a estratégia adotada.

Além das estratégias descritas acima, também utilizaremos em nossa análise as características do pensamento algébrico propostas por Almeida (2016). Essas características estão definidas no texto a seguir.

2.3 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Pesquisas vêm sendo realizadas com o intuito de entender como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças. Essas pesquisas mostram a importância de propor aos estudantes atividades que possibilite a eles desenvolverem esse tipo de pensamento (Silva; Savioli, 2012; Silva; Savioli; Passos, 2015; Borralho; Barbosa, 2011).

Autores tentam diferenciar o pensamento algébrico do pensamento aritmético, entre eles tem-se Kieran (1992). Para esta autora, o pensamento aritmético está voltado para o cálculo e a resolução de operações buscando apenas uma solução para essas operações, já o pensamento algébrico está relacionado à estrutura e o uso de representações que possibilita lidar com situações quantitativas fazendo relações.

Assim como Kieran (1992), Radford (2011) tenta diferenciar esses dois tipos de pensamentos. Ele afirma que no pensamento aritmético o estudante lida com quantidades conhecidas, em busca de solucionar um problema, já no pensamento algébrico, o estudante irá lidar com quantidades desconhecidas de forma analítica, tratando esses valores desconhecidos como se fossem conhecidos e realizar cálculos com eles.

Pesquisas como as de Lins (1992), Kaput (1999, 2008), Radford (2009, 2011), indicam que não é simples caracterizar o pensamento algébrico. Isso talvez seja pelo fato de o "extenso campo em que essa forma de pensar se insere, a álgebra, ter um número grande de objetos de estudos como equações, inequações, sistema de equações" (Almeida; Câmara, 2018, p. 549).

Alguns pesquisadores têm uma linha de pensamento próxima a de Kieran (1992), como Kaput (1999, 2008), Lins (1992, 1994), Arcavi (2005), Blanton e Kaput (2005), Radford (2006, 2009), dentre outros. Esses estudiosos entendem que o pensamento algébrico está voltado ou não para situações quantitativas, assim percebendo a generalização das informações trazidas nos problemas. Eles também defendem a ideia de que o pensamento algébrico se revela por meio de diferentes linguagens, seja por meio de gestos, símbolos, pictórica ou natural.

Lins (1992) afirma que quando o estudante constrói significado para objetos algébricos ele está pensando algebricamente. Portanto, para ele, pensar algebricamente é construir significado para a álgebra, ou seja, o estudante busca fazer relações entre as informações propostas nos enunciados dos problemas construindo significados. Quando o estudante consegue perceber regularidades entre as operações, quando o "X" representa uma incógnita ou uma variável.

Diante da complexidade que é essa forma de pensar, Lins (1992) aponta para três formas de pensar algebricamente: o aritmeticismo, nessa vertente o objeto de trabalho é exclusivamente operações aritméticas e a relação de igualdade. O internalismo, nessa os números são tratados como objetos de estudo. E a analiticidade, que vem caracterizar essa forma de pensar como um método de procura de verdades, no qual o desconhecido é tratado como se fosse conhecido.

Assim como Lins (1992), Kaput (2008) vem classificar o pensamento algébrico como uma atividade humana, ou seja, o conhecimento está presente no sujeito e não no objeto. Portanto, não é o fato de o estudante visualizar uma equação que ele está percebendo como um objeto algébrico.

Seguindo o sentido da ideia de Lins (1992) e Kaput (2008) sobre pensamento algébrico, Almeida e Câmara (2017) trazem que,

> Um sujeito está visualizando ou respondendo uma equação como um objeto algébrico quando ele está pensando algebricamente, quando entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membro e para respondê-la deve encontrar um valor para o ‘X’ que torne a igualdade verdadeira (Almeida; Câmara, 2017, p. 40).

De acordo com Kaput (2008), o pensamento algébrico apresenta dois aspectos centrais: a generalização, que está relacionada como pensamento representacional, e o raciocínio, que está relacionado ao pensamento simbólico. Para ele esses aspectos originam três formas de pensar: a aritmética generalizada, essa vertente do pensamento algébrico tem por base o caráter algébrico da aritmética, que deve ser explorado de forma sistemática revelando sua generalidade (Almeida; Câmara, 2017). Por sua vez, Blanton e Kaput (2005) traz outros aspectos que podem fazer parte dessa vertente como: explorar propriedades e relações de números inteiros, explorar as propriedades das operações com números inteiros, tratar o número algebricamente, resolver expressões numéricas com número desconhecidos (equações simples) (Almeida; Câmara, 2017).

O pensamento funcional que é caracterizado pela generalização de padrões numéricos buscando descrever relações funcionais. É possível destacar diversos aspectos como elencados por Blanton e Kaput (2005): simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas, representar dados graficamente, descobrir relações funcionais, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos, identificar e descrever padrões numéricos e geométricos (Almeida; Câmara, 2017).

Por fim a modelação, que considerada o domínio “para expressar e formalizar generalizações” (Almeida; Câmara, 2017, p. 45). Essa vertente do pensamento algébrico está relacionada com as outras duas, em que “modelar é utilizar o pensamento sintático da álgebra para representar diversas situações” (Almeida; Câmara, 2017, p. 45). Modelar uma situação não significa utilizar necessariamente a linguagem simbólica, mas como é trazido por Kaput (2008), é possível utilizar a linguagem gestual, natural, pictórica, numérica ou simbólica algébrica para representar um problema algébrico (Almeida; Câmara, 2017).

Radford (2006, p. 2) vem caracterizar o pensamento algébrico como uma “forma particular de refletir matematicamente”. Ele considera três elementos inter-relacionais: a indeterminação que é o objeto algébrico, os objetos desconhecidos que são manipulados analiticamente e a forma particular simbólica de determinar o objeto.

Tomando como base os estudos de Lins (1992), Kaput (1999, 2008), Radford (2009, 2011), Almeida e Câmara (2017) defendem que o pensamento algébrico é "uma ação exclusivamente humana que surge da necessidade de trabalhar com o geral e de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica" (Almeida; Câmara, 2018, p. 549).

Para Almeida (2017, p. 12), o ensino da álgebra deve ter como centro o pensamento algébrico. Ele afirma que "os alunos constroem significado para os objetos algébricos quando são levados a desenvolverem essa forma especial de pensar". Para ele o estudante não desenvolve o pensamento algébrico para depois construir significado, isso ocorre simultaneamente, o estudante "desenvolve o pensar algebricamente e, consequentemente, constrói significado para álgebra e sua linguagem e, quanto mais significado da álgebra e de sua linguagem é construído pelo aluno, mais ele desenvolve o pensamento algébrico" (Almeida, 2017, p.12).

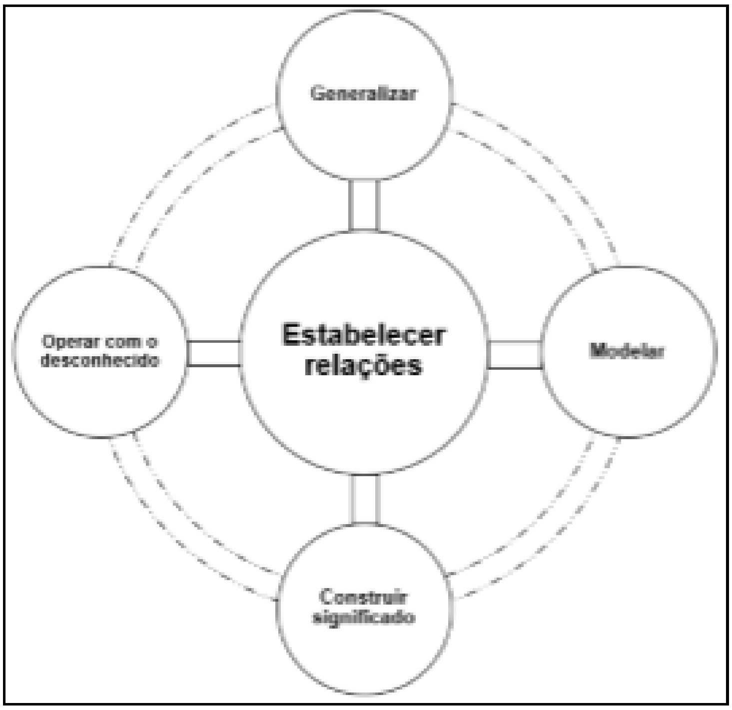
Para a resolução de situações propostas, os estudantes buscam estratégias para resolvê-las. Com os problemas de estrutura algébrica não é diferente, os estudantes buscam meios e estratégias para solucioná-los. Oliveira e Câmara (2011) vêm classificar as possíveis estratégias adotadas pelos estudantes na resolução de problemas algébricos em estratégias aritméticas e algébricas. Para as Estratégias aritméticas, os estudantes partem de valores conhecidos tentando criar pontes (Marchand; Bednarz, 2000), para encontrar o valor desconhecido, em um raciocínio sintético. Já nas estratégias algébricas os estudantes partem de valores desconhecidos estabelecendo relações, em um raciocínio analítico (Oliveira; Câmara, 2011).

Em um estudo realizado com estudantes brasileiros e do Québec (Canadá), Oliveira e Câmara (2011) buscaram investigar as estratégias mobilizadas por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas algébricos de partilha. A análise dos dados foi realizada a partir do rendimento e da estratégia inicial privilegiada, adotada pelo estudante. Como estratégias mobilizadas, os autores conseguiram identificar cinco: "Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Algébrica (AL), considerar o Total como Fonte (TF) e realizar um Cálculo Qualquer (CQ), além dos casos em que não foi possível identificar a estratégia mobilizada pelo sujeito jku(NI)" (Oliveira; Câmara, 2011, p. 5). Estratégias essas que foram utilizadas como base para análise deste estudo.

Por sua vez, Almeida e Câmara (2018) afirmam que o pensamento algébrico se dá a partir de cinco características: estabelecer relações, generalizar, modelar, construir significado e operar com o desconhecido. Eles acreditam que no centro de todas as características está a capacidade de estabelecer relações, e a partir dela estão as demais. Porém, isso não quer dizer que as outras características são menos importantes que a primeira, mas é essa a característica que primeiro é desenvolvida e revelada pelo estudante.

Para melhorar o entendimento sobre o pensamento algébrico e como essas características se relacionam, os autores apresentaram o esquema a seguir:

Figura 1 – Esquema de características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida (2016, p. 80).

Para o estudante resolver um problema de estrutura algébrica, ele primeiro precisa estabelecer relações entre as informações propostas no enunciado, daí ele revela a "capacidade de estabelecer relações" (Almeida; Câmara, 2017).

A partir das relações estabelecidas, o estudante tenta elaborar um modelo matemático para representar o problema proposto em linguagem natural, e dependendo do nível em que ele se encontra, esse modelo poderá ter uma linguagem algébrica mais ou menos formal (Radford, 2008). É nesse momento que ele revela outra característica do pensamento algébrico, “a capacidade de modelar”.

Juntamente à capacidade de modelar, surge à terceira característica do pensamento algébrico, a “capacidade de generalizar”. Em que o estudante representa as quantidades apresentadas no problema de uma forma geral, por meio da conversão do problema.

Após generalizar o problema, o estudante busca resolvê-lo, encontrando o valor desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. Quando o estudante busca resolver a equação tentando encontrar o valor desconhecido, de acordo com Almeida e Câmara (2017), ele está mobilizando a quarta característica do pensamento algébrico: a "capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido”. Essa característica é revelada quando o estudante trabalha com o desconhecido, a incógnita, em que ele realiza operações com a equação inicial com o intuito de encontrar equações equivalentes e encontrar o valor da incógnita.

Almeida e Câmara (2017) destacam que ao mesmo tempo em que o estudante mobiliza as características do pensamento algébrico citadas acima, ou alguma delas, esse estudante já revela também a quinta característica que é a “capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos”. Isso ocorre quando o estudante entende o problema proposto como uma equação e “que existe a relação de igualdade entre as quantidades” (Almeida; Câmara, 2018, p. 551). Assim, a construção do significado da linguagem algébrica é revelada pelo estudante quando ele consegue encontrar o valor desconhecido, a incógnita da questão indicando o que ele está representando.

Almeida (2016, p. 84) acredita que “as características subjacentes à central surgem, e se desenvolvem de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento de outras”.

Por sua vez, Almeida e Câmara (2017, p. 58) defendem que,

> Pensar algebricamente requer a mobilização dessas cinco características, ou seja, a ‘capacidade de estabelecer relações’; a ‘capacidade de modelar’; a ‘capacidade de generalizar’; a ‘capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido’ e a ‘capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica’. Porém, ressaltamos que a característica central do pensamento algébrico é imprescindível, isto é, um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações, enquanto as demais vão surgindo com o tempo (Almeida; Câmara, 2017, p. 58).

Portanto, as características do pensamento algébrico, estabelecidas e utilizadas por Almeida (2016) em sua tese, também foram utilizadas em nosso estudo servindo como base para nossa análise. Estas estão descritas a seguir:

(i) “capacidade de estabelecer relações”, quando o estudante precisa estabelecer relações entre as informações propostas no enunciado.

(ii) “a capacidade de modelar”, quando o estudante tenta elaborar um modelo matemático para representar o problema proposto em linguagem natural, esse modelo poderá ter uma linguagem algébrica mais ou menos formal (Radford, 2008).

(iii) “capacidade de generalizar”, quando o estudante representa as quantidades apresentadas no problema de uma forma geral, através da conversão do problema.

(iv) “capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido”, quando o estudante trabalha com o desconhecido, em que ele realiza operações com a equação inicial com o intuito de encontrar equações equivalentes e encontrar o valor desconhecido.

(v) “capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos” quando o estudante entende o problema proposto como uma equação e “[...] que existem uma relação de igualdade entre quantidades” (Almeida; Câmara, 2017, p. 57).

Logo, tomaremos essas características do pensamento algébrico proposto por Almeida (2016) como referência para nosso estudo.

3 O QUE OS DOCUMENTOS ORIENTAM PARA OS ANOS INICIAIS

O Ensino Fundamental brasileiro, até o final de 1996, esteve estruturado nos termos previstos pela lei federal de nº 5.692/71, lei que trata da modificação da estrutura de ensino do país, na qual o curso primário e o antigo ginásio se tornaram um só curso de 1º grau. Essa lei estabeleceu como objetivo geral, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio da época, proporcionar aos estudantes a formação necessária para o desenvolvimento de indivíduos preparados para o mundo do trabalho, conscientes da cidadania e da auto realização. Ficando aos estados a responsabilidade de formular propostas curriculares que seriam utilizadas como base nas escolas estaduais, municipais e particulares.

Em 1990, o Brasil participa da Conferência Mundial de Educação para Todos, que resultou no consenso das necessidades básicas de aprendizagem para todos, ampliando as oportunidades de aprendizagem para crianças, jovens e adultos tornando universal a educação fundamental (Brasil, 1997).

Frente à situação em que se encontrava a educação no Brasil e os compromissos assumidos na Conferência Mundial, o Ministério da Educação coordenou a elaboração do Plano Decenal de Educação (1993- 2003), um conjunto de diretrizes políticas voltadas para a recuperação da escola de nível fundamental. O Plano Decenal em conjunto com a Constituição Federal de 1988, leva o estado a elaborar parâmetros curriculares servindo de orientação para ações educativas para a melhoria do ensino nas escolas do Brasil (Brasil, 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tiveram sua elaboração a partir do "estudo de propostas curriculares de Estados e Municípios brasileiros, da análise realizada pela Fundação Carlos Chagas sobre os currículos oficiais e do contato com informações relativas a experiências de outros países" (Brasil, 1997, p. 15).

Tendo em vista que todo brasileiro deve ter a garantia de uma educação de qualidade que possibilite a formação do indivíduo que possa exercer sua cidadania, ter uma visão crítica, ser autônomo e atuante, bem como inserir no mundo do trabalho dentre tantas outras exigências que o mundo contemporâneo impõe.

Para que tenhamos crianças, jovens e adultos capazes de desenvolver tantas capacidades, como a citada anteriormente se faz necessário um ambiente que propicie o desenvolvimento de tais capacidades. Nesse caso, cabe à escola "a necessidade de assumir-se como espaço social de construção de significados éticos necessários e constitutivos de toda e qualquer ação de cidadania" (Brasil, 1997, p. 27).

As crianças e jovens que residem nas regiões, estados e cidades brasileiras apresentam culturas locais bastante diversificadas, que diferenciam uma região da outra. Independentemente da infraestrutura, condições socioeconômicas e a diversidade cultural, esses indivíduos devem ter acesso a conhecimentos reconhecidos e necessários para o exercício da cidadania. Mesmo diante das diferenças existentes entre as culturas de nosso país, existem conhecimentos que é comum a todos independentemente da localização geográfica. Diante disso, é necessário "o estabelecimento de um referencial comum para a formação escolar no Brasil, capaz de indicar aquilo que deve ser garantido a todos" (Brasil, 1997, p. 28).

Os PCN foram estruturados de forma a buscar contribuir para a superação das contradições existentes nas propostas curriculares, referente aos objetivos e o que é proposto para alcançá-los. Contudo, buscou apontar "questões de tratamento didático por área e por ciclo, procurando garantir coerência entre os pressupostos teóricos, os objetivos e os conteúdos, mediante sua operacionalização em orientações didáticas e critérios de avaliação" (Brasil, 1997, p.41).

Nos estados, as propostas curriculares eram organizadas por área e/ou disciplinas, já em alguns municípios utilizavam princípios norteadores, eixos ou temas. Com relação aos conteúdos, eles eram considerados os meios pelos quais ocorreria o desenvolvimento do estudante. Esses conteúdos eram apresentados de tal forma que possibilita os estados e municípios fazer a adequação às suas especificidades e são apresentados nos blocos de conteúdos e/ou organizações temáticas.

Os PCN têm como proposta a estruturação por ciclo de dois anos, isso devido à limitação de conjuntura, reconhecendo que essa proposta "permite compensar a pressão do tempo que é inerente à instituição escolar, tornando possível distribuir os conteúdos de forma mais adequada à natureza do processo de aprendizagem" (Brasil, 1997, p. 42).

Esses documentos nacionais foram organizados por área de conhecimento. Os documentos, dentro de cada área, apresentam um formato comum com relação à estrutura, apresenta a concepção da área para o Ensino Fundamental, defini a fundamentação teórica da área de conhecimento nos PCN.

Ao observar os PCN de Matemática, percebemos que ele está organizado em quatro grandes blocos de conteúdos distribuídos da seguinte maneira: números e operações, em que se encontram os campos voltados para a aritmética e álgebra; espaço e forma, envolvendo o campo da geometria; grandezas e medidas, campo que possibilita a inter-relação entre os campos da geometria, aritmética e a álgebra, e por fim, o tratamento da informação, um campo novo que foi evidenciado para mostrar a importância e seu uso na sociedade atual.

Com relação ao bloco números e operações, em que está localizado o campo da álgebra, é perceptível que em relação à álgebra o foco era voltado para os anos finais do Ensino Fundamental, não querendo dizer que não proponha o trabalho com os anos iniciais, mas que a ênfase era dada aos anos finais, como o próprio documento aponta:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 1997, p.39).

Ao observar os conteúdos a serem vivenciados no primeiro e segundo ciclos, que correspondem hoje aos anos iniciais do Ensino Fundamental, foi possível perceber que em relação ao primeiro ciclo que correspondia a primeira e segunda série, não encontramos indícios para o trabalho com a álgebra. Ao olhar o segundo ciclo, que envolvia a terceira e quarta séries do Ensino Fundamental, faz referência à vivência da introdução ao cálculo mental, um indício do início do estudo com a álgebra quando coloca que os recursos para usar o cálculo “são ampliados neste ciclo pelo fato de o aluno ter uma compreensão mais ampla do sistema de numeração decimal, além de uma flexibilidade do pensamento para construção do seu cálculo mental” (Brasil, 1997, p. 57).

Após fazer um breve estudo frente aos PCN de Matemática, no primeiro e segundo ciclo, foi possível perceber que a álgebra não aparece de forma explícita, apenas alguns indícios de início do estudo da álgebra nos anos iniciais. A álgebra só vem aparecer mesmo nos anos finais, algo que precisava ser revisto nos documentos, uma vez que é de grande importância esse campo de conhecimento.

Buscando uma melhoria na educação do estado de Pernambuco, procurando ampliar a qualidade do ensino, adequação da idade-série e levar as crianças e jovens à escola, foi elaborado uma Base Curricular Comum para o estado (BCC-PE), tendo como objetivo “contribuir e orientar os sistemas de ensino, na formação e atuação dos professores da Educação Básica” (Pernambuco, 2008, p.12).

Os documentos da BCC-PE, foram iniciados os estudos a partir de 2004, contou com a participação de gestores municipais, estadual, coordenação de projetos e comissão de elaboração, além da participação de diversos setores para debater temas relevantes e sugestão de modificação dos documentos através de reuniões e seminários. A BCC-PE foi resultado de um processo democrático e participativo e teve sua publicação em 2008.

A BCC-PE traz a princípio, a orientação para os componentes curriculares de língua portuguesa e matemática, esse processo está se dando a partir desses componentes porque se “têm reivindicado uma maior participação da escola na formação para o uso social da linguagem e dos saberes matemático” (Pernambuco, 2008, p. 13-14). No entanto, foi imprescindível a inclusão das demais áreas de conhecimento do currículo da Educação Básica, que também fazem parte do sistema de ensino a se incorporar à BCC-PE.

Na BCC-PE, os conteúdos estão organizados por blocos de conhecimento. Em matemática, que é o nosso grande campo de estudo, os conteúdos vêm organizados desde o Ensino Fundamental anos iniciais até ao Ensino Médio em cinco grandes blocos: 1) números e operações; 2) geometria; 3) álgebra e funções; 4) grandezas e medidas; 5) estatística probabilidade e combinatória. É importante ressaltar aqui que, a análise dos documentos sinaliza o reconhecimento oficial da importância desse campo de conhecimento.

Entretanto, a álgebra não é mais vista como um bloco de conteúdo apenas, mas sim “como uma forma de pensar matematicamente, caracterizada, entre outros aspectos, pela busca de generalizações e de regularidades” (Pernambuco, 2008, p. 85). E assim, é recomendado que o ensino da álgebra fosse iniciado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando para esse ensino não se reduzir a simples manipulação de símbolos. É importante destacar que nessa etapa do ensino com álgebra, o trabalho a ser desenvolvido leve o estudante a “identificar regularidades em sequências [...], à determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática” (Pernambuco, 2008, p.85).

Buscando aperfeiçoar e dar melhores condições para o planejamento escolar docente do estado de Pernambuco, foi elaborado os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCPE), visando “contribuir para o fortalecimento da educação Básica do estado de Pernambuco, a partir de um currículo sintonizado com as mudanças advindas de uma sociedade em permanente transformação” (Pernambuco, 2012, p. 13).

Os PCPE-2012 vem ampliar os componentes curriculares para além da língua portuguesa e matemática, como foi trazido pela BBC-2008. Esse documento contempla todos os componentes curriculares para a Educação Básica, e apresenta cadernos específicos para cada área de conhecimento, busca proporcionar ao professor uma “reflexão e o desenvolvimento de caminhos para a qualificação do processo de ensino e aprendizagem” (Pernambuco, 2012, p. 16).

Os Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco 2012 (PCMPE-2012) vêm trazer a importância do componente curricular de matemática para a vida cotidiana dos estudantes, não considerando a aprendizagem matemática como um simples acúmulo de conteúdos, mas sim levar o estudante a fazer matemática. Assim é importante que o professor estabeleça atividades para que os estudantes encontrem situações para que consigam "fazer" matemática, e esse documento tenta possibilitar ao professor esses caminhos.

O componente curricular de matemática trazida nos PCMPE-2012 vem organizado a partir de expectativas de aprendizagem por ano de escolaridade e por blocos de conteúdos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental ao ensino médio, anos que compõem a Educação Básica. Os blocos de conteúdos são organizados em cinco grandes blocos como proposta da BCC-PE: geometria, estatística e probabilidade, álgebra e funções, números e operações e grandezas e medidas.

Nos anos iniciais do ensino fundamentos o PCMPE- 2012, com relação a álgebra que é o nosso campo de estudo, o presente documento continua a reforçar a importância e recomendação que “o ensino de álgebra seja desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com o cuidado de não o reduzir a simples manipulação simbólica” (Pernambuco, 2012, p. 63). O documento propõe o ensino de álgebra desde os anos iniciais, já a partir do primeiro ano do Ensino Fundamental.

O professor pode fazer articulação entre os blocos de conteúdo para não os tornar estanques. Uma articulação que pode ser realizada é entre a álgebra e os números e operações em que o estudante pode ser levado, de acordo com o PCMPE “à determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática” (Pernambuco, 2012, p. 63). Contudo, se deve ter um cuidado com a utilização de símbolos/ linguagem simbólica, pois nos anos iniciais do Ensino Fundamental se deve ter uma atenção às representações próprias dos estudantes.

Para cada ano do Ensino Fundamental, desde o 1º ano, o documento (Pernambuco, 2012, p. 65) traz as expectativas de aprendizagem em relação à álgebra. Ao observarmos essas expectativas foi possível perceber que no terceiro ano é proposta a expectativa de “determinar um elemento desconhecido em uma igualdade envolvendo números até 20 (por exemplo: determinar o número que multiplicado por 3 resulta em 12)”, que já possibilita iniciar o trabalho com os valores desconhecidos.

Quando seguimos mais um pouco e observamos o 4º e 5º ano desse nível de ensino, EF, pudemos perceber dentre as expectativas de aprendizagem a presença dos problemas de partilha que é o nosso escopo de pesquisa. Para o 4º ano é proposto “’Resolver’, utilizando representação própria, problemas de partilha de quantidades envolvendo uma relação (por exemplo: João e Maria têm, juntos, 30 figurinhas, sendo que João tem 10 a mais que Maria. Quantas figurinhas tem cada um?)” (Pernambuco, 2012, p. 66). No 5º ano, que é o nosso ano de estudo, é colocado como expectativa:

> Resolver, utilizando representação própria, problemas de partilha de quantidades envolvendo duas relações multiplicativas (por exemplo: João, Maria e José têm, juntos, 30 figurinhas, sendo que Maria tem o dobro de figurinhas de João, e José tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas tem cada um? (Pernambuco, 2012, p. 67).

É possível perceber dentre as orientações para o ensino de álgebra, dos anos iniciais do EF, trazidas pelos PCMPE-2012, a inserção do trabalho com os problemas de partilha no 5º ano, reforçando a importância de nosso trabalho.

Quando partimos para nos apropriar do que indica a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), documento que vem nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino, ela estabelece quais os conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada ano escolar. Esse documento traz em sua organização as áreas de conhecimento, em que a matemática é uma delas. Nesta área de conhecimento encontram-se as unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade e Grandezas e Medidas.

A BNCC orienta que “a unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico”, sendo, então, “imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais” (Brasil, 2018, p. 272).

Não diferente, o Currículo de Pernambuco (CPE) (Pernambuco, 2019) que também orienta a inserção do trabalho com álgebra já nos anos iniciais, norteia que a álgebra se encontra presente como uma forma de pensar matematicamente e não mais como um bloco de conteúdos, e se caracteriza pela busca de generalizações e regularidades. Esse documento, assim como a BNCC, propõe que o ensino de álgebra seja desenvolvido a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, “com o cuidado de não o reduzir a simples manipulação simbólica, mas estimulando o desenvolvimento do pensamento algébrico” (Pernambuco, 2019, p. 365)

Quando falamos nas habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, na unidade temática álgebra, tanto a BNCC como o CPE têm uma habilidade específica sobre os problemas de partilha, foco do nosso trabalho, a habilidade EF05MA13 da BNCC e a EF05MA13PE do CPE, que propõe “resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo” (Brasil, 2018, p. 95; Pernambuco, 2019, p. 404).

4 PERCURSO METODOLÓGICO

O presente estudo envolve uma pesquisa qualitativa que buscou identificar as estratégias mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao resolverem problemas algébricos do tipo partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico.

Com o objetivo de identificar essas características realizamos a aplicação de um teste como instrumento para produção dos dados e a aplicação de uma entrevista clínica. Tanto a aplicação do teste quanto a entrevista, ambas foram realizadas pela pesquisadora.

Os percursos que foram realizados para o desenvolvimento deste trabalho, os sujeitos da pesquisa, bem como a produção dos dados estão detalhados nos subitens a seguir.

4.1 SUJEITOS DA PESQUISA

Como sujeitos de nossa pesquisa, temos os estudantes de uma turma do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, pertencente a uma escola da rede municipal de ensino da cidade de Passira, no agreste pernambucano. A escola atende estudantes da educação infantil aos anos finais do Ensino Fundamental. Contempla quatro (4) turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, duas (2) turmas no turno matutino e duas no turno vespertino.

As turmas do 5º ano dessa escola têm dois professores que dividem entre si os componentes curriculares. Uma professora que leciona os componentes curriculares de ciências humanas e linguagens, e um professor que ensina os componentes de ciências exatas e naturais.

As tarefas foram aplicadas a uma das duas turmas do 5º ano do EF do turno matutino, composta por 30 estudantes. No início de seleção da turma foi informado que ela era formada por 28 estudantes, mas a turma era composta por trinta (30) estudantes dos quais um (01) estudante foi transferido, e um segundo estudante não apresentou interesse em participar da pesquisa, ficando um total de vinte e oito (28) estudantes que apresentaram interesse em participar do estudo. A turma investigada é composta por estudantes com idades entre 9 e 11 anos.

Com os vinte e oito (28) estudantes foi possível organizar quatorze (14) duplas para a aplicação do teste e a realização da entrevista clínica. A composição das duplas foi realizada de forma aleatória, e organizada pelo professor da turma.

No quadro abaixo (Quadro 2) estão as quatorze (14) duplas e os nomes fictícios que atribuímos aos estudantes que compõem cada dupla.

Quadro 2 – Duplas de estudantes e seus respectivos nomes fictícios

Duplas	Estudantes
Dupla A (DA)	Paula e Ana
Dupla B (DB)	Manuela e Carlos
Dupla C (DC)	Felipe e Lêda
Dupla D (DD)	Túlio e Andreza
Dupla E (DE)	Rafaela e João
Dupla F (DF)	Daniela e Olga
Dupla G (DG)	Luís e Lucas
Dupla H (DH)	Thalia e Fernando
Dupla I (DI)	Germania e Nita
Dupla J (DJ)	Raul e Otávio
Dupla K (DK)	Eduarda e Igor
Dupla L (DL)	Fátima e Neide
Dupla M (DM)	Gustavo e Marta
Dupla N (DN)	Patrícia e Sérgio

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Como a intenção era identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes do 5º ano dos anos iniciais e as relações dessas estratégias com as características do pensamento algébrico, era interessante ter presente dentre os participantes da pesquisa também aqueles que apresentavam melhor desempenho. Isso porque, ao fazer uma seleção aleatória e os estudantes que se destacam em termos de conhecimentos não participarem da pesquisa, é possível que fique alguma característica sem ser identificada, visto que estudantes que não tenham uma afinidade com a matemática possam apresentar alguma dificuldade na resolução dos problemas do tipo algébrico. Portanto, pode não mobilizar o máximo de características a serem desenvolvidas nesse nível de ensino.

Entretanto, ao selecionar estudantes que tenham uma maior afinidade com a matemática apresentando um maior interesse por esse campo de estudo, e tendo um maior nível de desenvolvimento, possivelmente mobilizariam características do pensamento algébrico com o nível mais elevado.

Como critério de escolha dos estudantes, adotou-se a turma que apresenta o melhor desempenho na escola, e consequentemente dentre os estudantes participantes, estavam presentes os que apresentavam o melhor desenvolvimento nesse campo de estudo. Para a seleção da turma houve uma conversa com a coordenação da escola, esclarecendo sobre a nossa necessidade, e ela indicou a turma em que os estudantes se enquadravam nesse critério de escolha.

Para a aplicação do teste os estudantes foram organizados em duplas, para tentar garantir o máximo de diálogo entre eles no momento de resolução do teste. Para iniciar nosso estudo foi preciso que a escola tivesse conhecimento sobre a temática do estudo e que, tanto a escola quanto os responsáveis pelos estudantes, permitissem a participação deles. O detalhamento desse passo está descrito logo a seguir.

É muito importante ressaltar e enfatizar aqui que esse estudo foi realizado após um período bastante complicado para nós e principalmente para nossos estudantes, o período da pandemia do novo coronavírus, a Covid-19. Esta, é uma variante do coronavírus, uma doença causada pelo SARS-CoV-2, que atingiu o mundo causando uma sensação de medo, insegurança e levando milhares de pessoas à morte, e contaminando milhões de pessoas.

A Covid-19, como ficou conhecida mundialmente, foi caracterizada como uma pandemia pela Organização das Nações Unidas (ONU) em 2020, pois havia sido reconhecido surto do vírus em diversos países do mundo. Rapidamente, os países buscavam uma forma de conter o vírus e evitar o contagio.

Pesquisadores então concluíram que a forma mais eficaz de conter a transmissão do vírus, que era feita por meio do contato com gotículas de saliva contaminada, era o isolamento social. Nesse momento, era imprescindível que nos reservássemos em nossas casas para nos protegermos. Era momento de as pessoas manterem o distanciamento social, ficando em casa e se reinventando, uma readaptação no seu modo de vida.

Nesse momento, as instituições de ensino também precisaram manter o distanciamento social e se adaptar a essa nova situação para que o processo educacional fosse possível (Cardoso; Soares; Gonçalves, 2022). Por sua vez, o Ministério da Educação autoriza o ensino remoto emergencial.

Contudo “diversas condições de ensino nas instituições escolares do país, somadas às múltiplas realidades das famílias brasileiras, dificultaram tal processo em muitas escolas, sobretudo nas públicas” (Cardoso; Soares; Goçalves, 2022, p. 3). As escolas públicas já enfrentavam dificuldades no que diz respeito às condições financeiras, de incentivo a formação, além da ausência de grande parte dos pais na formação dos filhos. Com a pandemia essas dificuldades se intensificaram.

Foi necessária a reorganização da rotina educacional, o que impactou não apenas os estudantes, mas também os professores e a relação entre ambos. O contato presencial entre professor e estudante ficou restrito as telas.

Nas diversas escolas públicas brasileiras, a dificuldade de acesso à internet enfrentada pelos estudantes, assim como parte dos professores, é realidade. Muitos estudantes não tinham computador, *smartphone* ou mesmo uma internet de qualidade que permitisse acompanhar as videoaulas e as atividades.

Assim como os estudantes, professores também enfrentaram dificuldades, pois precisaram aprender ou aprimorar o trabalho com as plataformas digitais, somadas a falta de tempo para a preparação de materiais para ser postado ou entregue aos estudantes. Os professores precisaram se reinventar.

Com a escola estudada não foi diferente. Em conversa com a coordenação pedagógica da escola, a coordenadora nos informou que a escola buscou de alguma forma atender o estudante. Foram vivenciadas aulas por meio de plataforma digital, em que os professores postavam videoaulas e atividades. Para os estudantes que não tinham acesso à internet ou dispositivo para acompanhar as aulas, como computador ou *smartphone*, era deixado na escola material impresso para que os pais levassem para os filhos realizar as atividades em suas residências.

Portanto, diante do que foi enfrentado por estudantes e professores no período da pandemia de Covid-19, grandes prejuízos foram causados ao aprendizado dos estudantes, o que acreditamos que levará algum tempo para esses danos serem minimizados ou sanados.

4.2 CHEGADA À ESCOLA E O CONSENTIMENTO PARA REALIZAÇÃO DO TESTE

Para a realização da pesquisa na escola já citada, ocorreu uma conversa com a gestão para apresentação da pesquisa, que se deu por meio da exposição da temática do trabalho, dos objetivos e como se daria o processo para a produção dos dados.

Para a produção dos nossos dados foi necessário à elaboração de um teste a ser aplicado aos sujeitos participantes do estudo, bem como os possíveis questionamentos a serem feitos aos estudantes para estimular a fala e a explicitação do que estava sendo pensado no momento da aplicação do teste, momento que foi registrado por meio de gravação de áudio.

No momento da conversa com a gestão da escola também foi comunicado sobre a gravação em áudio durante a aplicação do teste, com o objetivo de captar a fala dos estudantes em todo o momento de discussão e resolução dos problemas, buscando evitar a perda de informações importantes. Com a concordância da gestão da escola, foi entregue o termo de consentimento para a gestora assinar, permitindo a realização da pesquisa.

Em seguida, foi realizada uma conversa com os estudantes para esclarecimento sobre a realização da pesquisa e da importância da participação deles. Eles aceitaram. Foi entregue o termo de consentimento a ser assinado pelos responsáveis, permitindo a participação, bem como a autorização para a gravação da fala no momento da realização do teste, elemento de grande importância que contribuiu para a coleta e análise dos dados.

Para deixar os pais ou responsáveis pelos estudantes cientes sobre a pesquisa, foi descrito e bem detalhado na carta de consentimento sobre a importância, objetivo da pesquisa e principalmente, como se daria o processo de produção de dados, o qual os estudantes levaram para casa.

Tentando deixar o mais claro possível para os pais ou responsáveis, sobre a participação de seu filho nessa pesquisa. Também foi colocado à disposição, o contato da pesquisadora para a necessidade de tirar qualquer dúvida.

Após a conversa com os estudantes ficou agendado o dia da aplicação do teste, assim como a devolução do termo de consentimento assinado pelo responsável, que pode ser até o dia da aplicação. O documento deveria estar assinado pelos pais ou responsáveis autorizando a participação no estudo. Documentos esses, termo de consentimento da escola e dos responsáveis, que se encontram nos apêndices da pesquisa.

Na próxima seção é apresentado como foi elaborado o instrumento de produção de dados, o teste, bem como os possíveis questionamentos a serem realizados pela entrevista clínica.

4.3 INSTRUMENTO DE PRODUÇÃO DE DADOS

Para a elaboração do teste foi realizada uma busca nos documentos oficiais atuais, BNCC (Brasil, 2018) e no CPE (Pernambuco, 2019), para identificar a habilidade a ser desenvolvida pelos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental com relação à álgebra e os problemas de partilha, e foi identificada a habilidade

> (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (Brasil, 2018, p. 295).

Esta, inclusive, é comum tanto à BNCC quanto ao CPE.

O trabalho com pensamento algébrico já vem sendo orientado pelos documentos oficiais, BNCC (Brasil, 2018) e CPE (Pernambuco, 2019), o que nos motivou a trabalhar com os estudantes dos anos iniciais, bem como as pesquisas que também estão sendo desenvolvidas envolvendo essa temática.

Nos documentos oficiais já apresentados, o 5º ano do Ensino Fundamental apresenta a habilidade (EF05MA13), a qual busca trabalhar com os problemas de partilha, que é o nosso objeto de estudo, o que contribuiu para optarmos por esse ano do EF. Uma vez que esse ano escolar apresenta essa habilidade, isso nos leva a acreditar que esses estudantes poderiam responder o tipo de tarefa proposta, uma vez que já vem sendo trabalhado nas salas de aula do 5º ano, como é apresentado nas orientações dos documentos.

Com a observação dos documentos foi possível perceber que nesse ano de escolaridade os estudantes vivenciam os problemas algébricos do tipo partilha, de natureza multiplicativa e com uma relação, uma vez que nos documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018) e CPE (Pernambuco, 2019), é proposta na unidade temática de álgebra. Com essa informação e se baseando em pesquisas com a de Oliveira e Câmara (2011), foi possível definir o tipo de problema que constou no teste para produção dos dados para nosso estudo.

O teste aplicado aos estudantes foi elaborado pela pesquisadora tomando como base as orientações apresentadas na BNCC (Brasil, 2018) para o 5º ano do EF, a partir da habilidade (EF05MA13) que orienta o trabalho com problemas de partilha do tipo multiplicativo.

O teste foi composto por quatro problemas algébricos, do tipo partilha com uma relação e de natureza multiplicativa, sendo dois PP envolvendo a operação de multiplicação e dois com a operação de divisão. Os problemas um e três são de multiplicação e envolvem o termo dobro. Os problemas dois e quatro são de divisão e envolve o termo metade das quantidades.

O teste foi impresso em papel ofício A4, em um total de quatro laudas, isso porque cada problema foi entregue separadamente, um problema por vez, para possibilitar um melhor acompanhamento do diálogo entre os estudantes na resolução de cada problema.

O teste apresentou como comando geral: “Resolva cada um dos problemas propostos”, os quais se encontram no quadro a seguir.

Quadro 3 – Referente aos PP que se encontram no teste

Problemas	Encadeamento das relações	Número de relações	Natureza das relações
1) Paulo e Carlos têm juntos 36 carrinhos. Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo. Quantos carrinhos tem cada um?	Fonte	Uma	Natureza multiplicativa (multiplicação)
2) Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?	Fonte	Uma	Natureza multiplicativa (divisão)
3) Rute e Manuel tem juntos um total de 45 lápis de cor para ser dividido entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manuel. Com quantos lápis ficou cada um?	Fonte	Uma	Natureza multiplicativa (multiplicação)
4) Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?	Fonte	Uma	Natureza multiplicativa (divisão)

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Na organização dos problemas, foi pensado em objetos que fossem de conhecimento dos estudantes, algo que grande parte deles tivesse em casa para tentar se familiarizar com os problemas. Quanto à ordem, pensamos em organizar de forma alternada, os problemas que envolviam multiplicação e divisão. O objetivo dessa organização foi tentar evitar que os estudantes aplicassem a estratégia adotada para um problema que envolvesse multiplicação, e essa mesma estratégia para o outro também de multiplicação. Acreditamos que quando resolvesse o problema envolvendo multiplicação e depois percebesse que o próximo era uma divisão, eles iriam precisar pensar em outras estratégias de resolução. Ao iniciar o próximo problema de multiplicação eles não tentariam repetir o que fizeram no problema anterior, mas que voltassem a pensar e buscar estratégias de resolução.

É importante ressaltar que mesmo os problemas de partilha possibilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico no momento de sua resolução (Almeida, 2016), não quer dizer que todos os estudantes conseguiram apresentar características do pensamento algébrico. Mesmo que eles tenham vivenciado em sala aula esse tipo de problema, como foi falado pelo professor em conversa com a pesquisadora e reafirmado pelos estudantes no momento de realização do teste. É possível que eles também não consigam apresentar as estratégias de resolução que foram tomadas como base de análise, as estratégias identificadas por Oliveira e Câmara (2011), para resolver os problemas.

No decorrer da resolução do problema a pesquisadora interagiu com os estudantes, buscando compreender como eles estavam pensando para resolver o problema, para isso ela fazia alguns questionamentos se utilizando da entrevista clínica de Piaget.

Com relação aos questionamentos para a entrevista, foram pensados de forma que impulsionaram os estudantes a falarem e tentarem deixar claro como eles estavam fazendo, e como estavam pensando para determinada situação.

Os questionamentos estão localizados no quadro, a seguir.

Quadro 4 – Referente às questões que compõem a entrevista clínica

Ordem	Texto
01	Porque você está fazendo dessa maneira?
02	Você acha que tem outra maneira de responder? Qual?
03	Qual estratégia você está adotando para fazer isso?
04	Como você pensou nessa resposta?

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essas questões foram tomadas como base para iniciar a entrevista clínica com os estudantes. No decorrer do processo outros questionamentos foram surgindo, a partir do que era falado pelos estudantes. Pelo fato de a entrevista clínica ser aberta, deve conter uma parte básica que seja utilizada com todos os entrevistados, para possibilitar a comparação entre os sujeitos envolvidos, como é colocado por Delval (2002).

Essas questões provocaram os estudantes a se colocarem falando como pensaram determinada resposta, e assim tentamos buscar elementos que muitas vezes estavam no pensamento e não ficaram registrados no papel.

Em relação à entrevista clínica, fizemos esse tipo de entrevista, porque tentamos compreender as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas de partilha, pois, talvez os estudantes não conseguissem nos revelar com clareza, através dos registros no papel, o que eles estavam pensando no momento em que estivessem discutindo e buscando resolver os problemas.

Contudo, o estudo a ser realizado com crianças nos permite compreender não apenas as características apresentadas pelos indivíduos de uma determinada idade, mas também o processo pelo qual ele passa ao chegar à fase adulta, busca não apenas se ocupar do conteúdo estudado, mas em compreender ou descobrir como se compõe a mente humana (Delval, 2002). Dentro da psicologia tem-se o método concreto de pesquisa, método clínico, que “consiste em uma forma de obter dados em interação direta com o sujeito” (Delval, 2002, p. 35).

O método clínico de Piaget veio contribuir significativamente com os estudos com crianças, ele buscou estudar a gênese do pensamento científico nas crianças. Esse método tem em sua essência a busca pela “intervenção constante do experimentado em resposta à atuação do sujeito, com a finalidade de descobrir os caminhos que segue seu pensamento, dos quais o sujeito não tem consciência” (Delval, 2002, p. 53).

Por sua vez, Scarparo e Marques (2017, p. 828) traz que,

> O método clínico pode ser definido como um procedimento de coleta e análise de dados, que tem como propósito estudar como o sujeito pensa, percebe, sente e age diante de uma determina atividade, tarefa, situação e/ou questionamento ao longo de uma entrevista (Scarparo; Marques, 2017, p. 828).

Segundo Queiroz e Lima (2010, p. 113), “a entrevista clínica consiste em uma conversa aberta com o sujeito, na qual se procuram seguir suas ideias e explicações sobre um determinado tema”. Em nossa pesquisa, fazemos o uso da entrevista clínica conversando com os estudantes no momento da realização do teste, buscando compreender como o estudante pensou em determinadas estratégias para responder o problema. O que nos possibilitou tentar compreender as estratégias mobilizadas por eles, que muitas das vezes não ficou clara nos registos feitos no papel, ou até mesmo os que não foram registrados.

Na entrevista clínica existem as perguntas que são básicas e comuns aos sujeitos da pesquisa, como as apresentadas no quadro acima e utilizadas nesse estudo, mas dependendo da resposta dada pelos estudantes, as perguntas poderão ser ampliadas ou complementadas (Queiroz, Lima, 2010). Isso possibilita a ampliação dos nossos questionamentos para além do roteiro, dependendo da resposta que nos será dada pelos estudantes.

Esses autores vêm afirmar que esse tipo de pesquisa tem uma riqueza de situações a serem agregadas e que é bastante vasta, pois se “faz deste método um instrumento de avaliação dinâmico, interessante, revelador, criativo e reflexivo tanto para o entrevistador, como para o entrevistado” (Queiroz; Lima, 2010, p. 113).

A aplicação do teste e a entrevista foram realizadas conjuntamente, em um único momento. A duração da realização da aplicação de todo o teste juntamente com a entrevista variou aproximadamente entre vinte e cinco (25) minutos e uma (1) hora.

Para a gravação do diálogo dos estudantes com a pesquisadora e dos estudantes entre si, foi utilizado o smartphone da pesquisadora. Como foi realizada a aplicação com cada dupla individualmente, foi possível realizar a gravação das quatorze (14) duplas.

Foi disponibilizada para todos os estudantes caneta esferográfica, para que os registros que fossem feitos, ficassem na folha e não corresse o risco de serem apagados, e com isso perdermos algum dado importante.

Na seção seguinte, produção dos dados, está detalhada cada etapa seguida para a análise dos dados desse estudo.

4.4 PRODUÇÃO DOS DADOS

Para realizar a investigação se fez necessário, a produção dos dados, que ocorreu a partir das etapas descritas a seguir:

No primeiro momento, os estudantes, em duplaS, foram conduzidos à biblioteca da escola, para possibilitar uma melhor aplicação do teste, isto porque é um lugar mais tranquilo e os estudantes puderam discutir como resolver os problemas sem distrações. Foi levada à biblioteca uma dupla por vez, junto à dupla de estudantes estava à pesquisadora, pessoa responsável pela aplicação do instrumento de produção de dados. Nesse momento, foi recolhido dos estudantes o termo de autorização para participação da pesquisa, devidamente assinado pelo pai ou responsável pela criança.

No ambiente da biblioteca, quando todos estavam acomodados, a pesquisadora disponibilizou para a dupla a primeira lauda contendo o primeiro problema do teste, e para cada estudante uma caneta esferográfica para o registro das respostas.

A pesquisadora explicou para os estudantes que eles iriam discutir e responder os problemas, que tudo o que pudessem registar era interessante e que seria disponibilizada apenas uma lauda para a dupla. Cada problema foi entregue um por vez, ou seja, ao concluir o primeiro e devolver recebeu o segundo. Ela também esclareceu que alguns minutos depois de iniciado os trabalhos, iria interagir com eles, dialogando no momento da realização do teste, e que ao iniciar a resolução seria iniciada a gravação das falas através de seu *smartphone*.

A pesquisadora deu o comando para que a dupla iniciasse a resolução, e ao iniciar as conversas ela já iniciou também a gravação.

Quando os estudantes começaram os registros e as conversas, a pesquisadora deu certo tempo e começou também a interagir e fazer os questionamentos sobre cada registro no papel e a fala dos estudantes, utilizando os princípios da entrevista clínica.

Após a conclusão da primeira lauda, a pesquisadora recolheu a folha e disponibilizou a próxima, contendo o segundo problema do teste, que seguiu os mesmos comandos do primeiro problema. O mesmo aconteceu com os demais.

Após a finalização da quarta lauda, consequentemente o último problema, a pesquisadora recolheu a folha respondida, finalizou a gravação e agradeceu à participação dos estudantes, que foram conduzidos de volta a sala de aula.

Nesse momento foi convidada a segunda dupla a vir à biblioteca para a realização do teste. Ao chegar à biblioteca a pesquisadora conduziu os trabalhos no mesmo formato e condição que foi realizada com a primeira dupla.

O mesmo comando da primeira dupla seguiu para as demais, até a finalização da aplicação do teste com toda a turma.

4.5 ANÁLISE

4.5.1 Percurso para análise

A análise foi desenvolvida a partir dos dados produzidos, que envolveram os testes respondidos pelas duplas na folha, e as gravações das falas no momento da realização do teste. Como essa pesquisa possui abordagem qualitativa, nos interessa não apenas a que resposta a dupla chegou, mas como eles fizeram e pensaram para alcançar a resposta.

Buscamos identificar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas com base nas estratégias propostas por Oliveira e Câmara (2011), e também identificar se as duplas conseguiram mobilizar características do pensamento algébrico, com base nas características propostas por Almeida (2016).

Primeiro foram analisadas as estratégias mobilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas, a partir dos testes respondidos por eles. As categorias de análise de base foram determinadas a priori, a partir das estratégias definidas por Câmara e Oliveira (2011), que foram: “total como fonte”, “dividir por 2”, “algébrica”, “cálculo qualquer”, “atribuir valor” e “não identificada”. Queremos enfatizar que o que diferenciou as estratégias propostas pelos autores em relação a nossa análise foi a estratégia “dividir por 3”, que em nosso estudo utilizamos “dividir por 2”.

Em seguida foi realizada a transcrição e análise da gravação envolvendo a fala dos estudantes. Não foi possível realizar a análise com todas as duplas, devido ao período de tempo que seria necessário para a transcrição de todas as duplas. Uma vez que totalizaram 56 gravações e necessitariam de um longo período de tempo para toda a análise.

Logo, foram selecionadas as duplas DB e DM, nomeados de Manuela e Carlos, e Gustavo e Marta respectivamente. Tomando como critério de escolha às duplas que apresentaram indicação de pensamento algébrico no momento da resolução do teste. Foram também selecionadas as duplas tomando como critério de escolha DF, DI, DJ e DN, as duplas que apresentaram interação no momento de realização do teste. Isso porque as duplas que foram selecionadas e foi adotado como critério para a seleção, a indicação do pensamento algébrico, não utilizaram em suas resoluções todas as estratégias de base para a resolução. Como um dos objetivos tínhamos à análise de todas as estratégias utilizadas nas resoluções, se fez necessário selecionar outras duplas. Uma vez que não foi possível fazer a análise com todas as duplas como já afirmado. Das demais duplas, foram analisadas apenas as respostas dadas nas laudas.

Na sequência foram analisadas as características do pensamento algébrico que foram mobilizadas pelos estudantes. Para essa categorização foram selecionadas a priori e utilizadas, as características do pensamento algébrico proposto por Almeida (2016), que são: “capacidade de estabelecer relações”, “a capacidade de modelar”, “capacidade de generalizar”, “capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido” e “capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos”.

5 ANÁLISE GERAL

No primeiro momento, foram analisadas as respostas dadas pelos estudantes no papel, observando as estratégias de base de acordo com as observadas por Oliveira e Câmara (2011), adotadas para a resolução dos problemas, como se apresenta no quadro 5 a seguir.

Quadro 5 – Dados referentes às estratégias adotadas pelos estudantes

Questões/ Estratégias	**Questão 1**	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**	**Total**	**Porcentagem (%)**
D2	5	8	6	9	28	50%
TF	7	3	3	1	14	25%
NI	0	1	3	3	7	12,5%
CQ	1	1	1	1	4	7,1%
AV	0	1	1	0	2	3,6%
AL	0	0	0	0	0	0%
Não respondeu	1	0	0	0	1	1,8%

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Ao observarmos os dados apresentados no quadro 5, percebemos que de modo geral a estratégia mais adotada pelos estudantes para resolver os problemas algébricos do tipo partilha propostos no teste, foi a estratégia “Dividir por 2” (D2). Para os quatro problemas apresentados, 50%, ou seja, metade dos estudantes utilizou essa estratégia de base para a resolução dos problemas. Percebemos também que dentre os quatro problemas propostos, os problemas 2 e 4 apresentaram uma maior adesão pelo uso dessa estratégia “dividir por 2 (D2)”.

Inferimos que o termo “metade” presente nesses problemas impulsionou um número maior de estudantes a optar por essa estratégia, uma vez que leva a ideia de repartir como é trazido pelo problema 2 a relação “Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João”, e no problema 4 em que “Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe”.

Como segunda estratégia de resolução mais utilizada pelos estudantes foi à estratégia “Total como Fonte (TF)”. Para a resolução dos problemas propostos no teste, 7 duplas optaram por utilizar essa estratégia resultando em um percentual de 25%. Vimos que a maior parte das respostas dadas, utilizando essa estratégia como base, foi referente ao problema 1. Acreditamos que a relação presente no problema em que “Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo”, o termo “Carlos tem o dobro" levou os estudantes a associarem o valor total do problema, os 36 carrinhos, como sendo de Paulo. Isso porque o valor de Carlos seria o dobro de Paulo, e aí seria apenas dobrar a quantidade de carrinhos. Pensamos que isso induziu as duplas a realizarem essa relação.

Também tivemos respostas dadas aos problemas em que não conseguimos identificar qual estratégia foi utilizada pela dupla para tentar resolvê-lo, nesses casos classificamos como "não identificada (NI)", como uma das classificações apresentadas por Oliveira e Câmara (2011). Vimos que os estudantes que optaram por essa forma de resolução atingiram um percentual de 12,5%, em um total de 7 duplas. Os problemas 3 e 4 apresentaram o maior número de adesão correspondente a essa estratégia de base. Acreditamos que pelo fato dos problemas 3 e 4 apresentarem seu valor total composto por números ímpares, isso dificultou a resolução por partes dos estudantes. Contudo, percebemos que na tentativa de resolver o problema e não conseguir eles fazem qualquer registro.

Duas duplas utilizaram a estratégia "atribuir valores" para resolver o problema 2 e o problema 3, correspondendo a 3,6% das respostas. Para os problemas 1 e 4 nenhuma das duplas optou por utilizar essa estratégia. Percebemos que foi pouco a utilização dessa estratégia de resolução. Nessa estratégia os estudantes atribuem valor a uma das quantidades desconhecidas, da incógnita fazem as relações estabelecidas no problema e buscam encontrar a outra quantidade também desconhecida. Os estudantes que adotam essa estratégia de resolução para problemas de partilha conseguem mobilizar três das cinco características do pensamento algébrico: estabelecer relações, modelar e construir significado, como aponta Almeida (2016).

Nenhuma dupla utilizou a estratégia "algébrica" na tentativa de resolver os problemas. Essa estratégia requer um pouco mais de compreensão por parte do estudante com relação à resolução do problema de partilha, pois ele precisa pensar no problema como uma equação, mesmo que ainda não consiga registrar o problema em uma linguagem alfanumérica (Almeida, 2016).

Tivemos uma dupla que não respondeu o problema 1, fez algumas tentativas de cálculos, mas não chegou a um resultado e não tentou dar resposta ao problema proposto.

Em relação ao rendimento apenas duas duplas conseguiram responder corretamente dois dos quatro problemas propostos. Uma dupla resolveu com êxito o problema 2, e outra dupla chegou à resposta correta do problema 3, ambas fazendo o uso da estratégia de base “atribuir valor (AV)”. Como é levantado por Oliveira e Câmara (2011) em seu estudo, mais de 50% dos estudantes que fez uso dessa estratégia de base para responder os problemas do tipo fonte resolveu corretamente o problema. Foi o mesmo tipo de problema que utilizamos, e também observamos que as duplas que utilizaram essa estratégia obtiveram êxito na resolução.

A seguir faremos uma análise mais detalhada de cada estratégia de resolução adotadas pelas duplas, analisando tanto as respostas registradas no papel bem como as entrevistas gravadas.

5.1 ANÁLISES POR ESTRATÉGIA

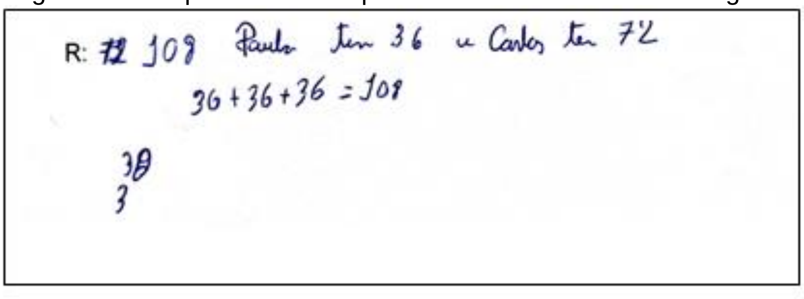
5.1.1 Estratégia “Total como Fonte (TF)” – Registro no papel e Entrevista

Na estratégia “TF” o estudante adota o valor correspondente ao valor total do problema e o considera como sendo o valor de uma das incógnitas. Assim ele considera o valor total como sendo a quantidade de um dos personagens do problema e busca encontrar a quantidade do outro personagem. Nessa seção trazemos respostas de duas duplas que tomaram a estratégia “TF” para tentar resolver algum dos problemas de partilha propostos.

A figura a seguir apresenta a imagem correspondente à resposta dada ao problema 1, e registrada no papel pela dupla DI, a qual tomou a estratégia “total como fonte (TF)” para solucionar o problema 1.

Problema 1: Paulo e Carlos têm juntos 36 carrinhos. Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo. Quantos carrinhos tem cada um?

Figura 2 – Resposta dada ao problema 1 utilizando a estratégia TF


R: ~~72~~ 108 Paulo tem 36 e Carlos tem 72
36+36+36 = 108
38
3

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao analisarmos a resposta dada pela dupla DI ao problema 1, observamos que a dupla DI composta pelas estudantes Germania e Nita, nomes dados às estudantes. Elas realizam alguns cálculos tentando resolver o problema e adotam, por fim, a estratégia total como fonte. Podemos perceber que as estudantes compreendem a ideia de dobro indicada no enunciado, porém, de forma equivocada, elas somam a quantidade 36 com 36 e obtém 72, obtendo, de acordo com elas, a quantidade de carrinhos de Carlos. Nesse caso, elas assumem o 36 como sendo a quantidade de carrinhos de Paulo, indicando que a estratégia assumida por elas é a total como fonte, uma vez que assumem o total de carrinhos indicado no enunciado como a fonte das grandezas (Oliveira, Câmara, 2011).

Continuando, elas também somam novamente a quantidade 36, obtendo o número 108, c

É possível entender que o número 36 está sendo tomado como fonte das grandezas quando a estudante Germania responde ao ser questionada sobre o porquê de Carlos ter 72 carrinhos.

A seguir temos o extrato da entrevista realizada com a dupla DI em resposta ao problema 1.

> **P**: Está pensando no número 72? Por que 72?
> **Germania**: Porque o dobro é 36 mais 36, é 72. É o que eu acho
> **P**: Ok.
> **Germania:** Entendi agora, Paulo e Carlos tem juntos 36 carrinhos, Carlos tem o dobro , então quer dizer 72 mais 36, eu acho.
> **P**: Germania explica para Nita como você pensou?
> **Germania**: olha aqui, Paulo tem 36 carrinhos e Carlos tem o dobro, Então quer dizer que ele tem 36 mais 36 carrinhos, então quer dizer que ele tem 72 carrinhos, e Paulo só tem 36 carrinhos. Entendeu agora? E é só somar tudo.
> **Nita**: Já sei. Então Paulo tem 36 carrinhos e Carlos tem o dobro, então quer dizer que ele tem 72. Então 72 mais 36 dá 108.
> **P**: Entendi. Quanto tem cada um?
> **Germania**: Paulo tem 36 e Carlos tem 72[1].

Nesse extrato da entrevista realizada com a dupla, vemos que as estudantes consideraram a quantidade 36 como sendo a quantidade correspondente a Paulo, ou seja, a quantidade total está sendo considerada como o valor de uma das incógnitas do problema. Isso fica explícito no extrato da fala de Germania, quando ela afirma que Paulo tem 36 carrinhos e Carlos tem 72. Ela tenta explicar a Nita

[1] Para os extratos de entrevistas se utiliza o nome fictício e o "P" representando "Pesquisadora". Além disso, buscou-se manter a integridade das entrevistas empregando o mínimo de ajustes possíveis.

como encontrar o valor da segunda incógnita, no caso, a quantidade de carrinhos de Carlos, explicando que Carlos tem o dobro de carrinhos de Paulo. Nesse momento a estudante nos mostra que compreendeu uma relação apresentada no problema de partilha, que um valor desconhecido corresponde ao dobro do outro. Quando Nita relata em sua fala “Paulo tem 36 carrinhos e Carlos tem o dobro, então quer dizer que ele tem 72 carrinhos”, ela também está reafirmando a compreensão com relação à ideia de dobro. Mesmo a dupla compreendendo a ideia de dobro não conseguiu estabelecer as relações necessárias do problema, logo não concluiu com êxito.

A dupla não considera o número 36 como sendo o total de carrinhos do problema, e busca encontrar a quantidade total de carrinhos como mostra o extrato a seguir.

> **Germania:** 108?
> **P**: Por que 108?
> **Germania**: Só somei.
> **P**: Somou quem?
> **Germania**: 36 mais 36 mais 36, porque um tem o dobro e o outro só tem 36 carrinhos.
> **P**: E aí Nita?
> **Nita**: Também entendi assim.

Nesse extrato a estudante Germania explica que fez a soma da quantidade 36 três vezes, pois, corresponde à quantidade de carrinhos de Paulo que seria 36, e a quantidade de carrinhos de Carlos que corresponde a 72, ao somar encontra o total de 108 carrinhos.

Corroborando com o que foi realizado em nosso estudo temos o que foi desenvolvido no trabalho de Almeida (2016) em que em um dos problemas apresentado, o Q3b, em que o estudante toma o valor total 240 como sendo o valor correspondente a uma das incógnitas e a partir daí busca encontrar os outros valores desconhecidos realizando apenas os cálculos sem estabelecer as relações presentes, como dobrar o valor 240 para encontrar o valor da segunda incógnita e acrescentar 40 ao valor considerado total, os 240, para encontrar a terceira incógnita. Em nenhum momento ele estabelece as relações presentes no problema. O mesmo ocorreu com a dupla de nosso estudo, eles adotaram a quantidade 36 como sendo o valor correspondente à incógnita e dobra essa quantidade na intenção de encontrar o outro valor desconhecido, a quantidade 72, sem estabelecer a relação apresentado no problema.

Nesse caso, os estudantes em ambos os estudos consideraram o valor total como sendo o valor correspondente a uma das incógnitas, e a partir daí encontraram o outro ou os outros valores desconhecidos. Esse pensamento como apresentado por Almeida (2016) é considerado aritmético, pois, entendem o problema como um problema aritmético, em que se tem uma quantidade conhecida e que se opera sobre ela, e por isso não mobiliza característica do pensamento algébrico. Logo, a dupla não mobilizou nenhuma das características do pensamento algébrico.

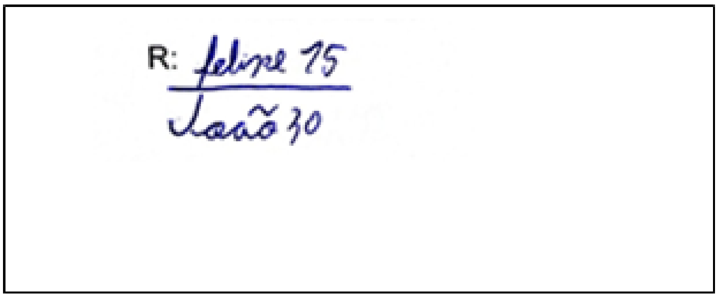
Portanto ao responder um problema de estrutura algébrica fazendo uso da estratégia de base “total como fonte” de acordo com Oliveira e Câmara (2011), essa estratégia de base é uma estratégia essencialmente aritmética, pois, o estudante responde o problema entendendo-o como se fosse de estrutura aritmética, em que ele realiza apenas cálculos sem estabelecer as relações presentes no problema.

Como apontado por Almeida (2016) em seu estudo, os estudantes que utilizam essa estratégia de base não mobilizam elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Isto é ao resolver problemas do tipo partilha como os presentes em nosso estudo “eles mobilizam essencialmente elementos caracterizadores do pensamento aritmético” (Almeida, 2016, p. 111).

Logo a seguir temos o problema 2, respondido pela dupla DJ que também fez uso da estratégia total como fonte, como sendo a estratégia de base para tentar resolver o problema.

Problema 2: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?

Figura 3 – Resposta dada ao problema 2 utilizando a estratégia TF



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Com relação à segunda dupla, DJ, composta pelos estudantes Raul e Otávio. Ao observar o escrito realizado pelos estudantes, eles realizaram cálculo mental, não apresentaram nenhuma outra forma de registro, que trouxesse algo que nos desse a ideia de como eles tentaram solucionar o problema. A dupla apenas registrou a quantidade de bolinhas que cada menino deveria ficar, ou seja, registrou apenas o valor correspondente a cada valor desconhecido.

De acordo com a dupla, Felipe teria 15 bolinhas de gude e João 30 bolinhas. Quando eles registraram que João tinha 30 bolinhas de gude, nos fez perceber que eles estavam atribuindo a João a quantidade total de bolinhas estabelecida no problema. Isso nos levou a acreditar que a estratégia por eles adotada foi a estratégia “total como fonte (TF)”.

Para possibilitar uma melhor compreensão de como foi pensado pelos estudantes para resolver esse problema, foi realizada a análise da gravação da entrevista no momento da aplicação do teste. A pesquisadora precisou fazer a leitura do problema para a dupla, pois os estudantes apresentavam dificuldade de leitura e pediram que ela os ajudasse fazendo-a.

Logo a seguir, estão descritos extratos da entrevista realizada pela pesquisadora a dupla DJ no momento da realização do teste.

> **P**: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?
> **P**: Repetir?
> **P**: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?
> **Raul**: Felipe tem 15 e João tem 30.
> **P**: Por quê?
> **Raul**: Porque se Felipe tem metade de João, então João tem 30 e ele tem 15, porque a metade de 30 é 15.

A dupla DJ, logo acima, mesmo tendo dificuldade com a leitura e necessitar da ajuda da pesquisadora para realizar a leitura para eles, eles conseguem chegar a um resultado, e com a entrevista conseguem expor como foi pensado para se chegar a esse resultado.

Com a entrevista é possível perceber que a dupla tem a ideia de metade e logo responde que a metade de 30 é 15. De imediato associam o número 30 como sendo a quantidade de um dos valores desconhecidos, a quantidade de bolinhas de gude de João, adotando assim a estratégia “Total como Fonte”. Isso é possível identificar quando Raul explica que “Felipe tem a metade de João, então João tem 30 e ele tem 15”.

Então percebemos que 30 corresponde à quantidade total das bolinhas de gude, que passa a ser a quantidade de bolinhas de João. Nesse momento a dupla está considerando o valor total apresentado no problema como sendo o valor de uma das incógnitas e a partir daí encontra o outro valor desconhecido. Eles também realizam apenas cálculos aritméticos, como a dupla anterior.

No decorrer da entrevista o estudante Otávio também é questionado sobre o problema, se ele entendeu e como seria a resposta do problema, Otávio responde como está no extrato a seguir.

> **P**: Você acha que é assim? E Otávio, como você pensou?
> **Otávio**: A resposta é essa.
> **P**: Por que você pensou dessa maneira?
> **Raul**: Se Felipe tem menos da metade de João, então ele fica com 15 e João com 30. Se ele tem a metade de 30 é 15.
> **Otávio**: Não estou entendendo.
> **P**: Explica para ele, Raul.
> **Raul**: Se Felipe e João têm 30 bolinhas, aí Felipe tem a metade de bolinhas de João. Então é o quê?
> **Otávio**: é 15.
> **P**: Por que você pensou no 15? Por que 15?
> **Otávio**: Porque 15 mais 15, dá 30. Porque é a metade.
> **P**: Então, como ficaria?
> **Raul**: Felipe 15 e João 30.

Ao acompanhar a fala de Otávio, vemos que ao ser questionado pela pesquisadora, ele de imediato concorda afirmando “a resposta é essa”, para a resposta dada por Raul, que ele diz “Felipe tem 15 e João tem 30”. Em seguida Otávio afirma que não compreende o que foi apresentado no problema.

A pesquisadora então sugere a Raul que explique como pensou, e Otávio responde que é 15, e explica que é 15 porque 15 mais 15 é 30. Ou seja, Otávio também está considerando a quantidade 30 como sendo o valor correspondente à quantidade de carrinhos de Carlos. E quando a dupla é questionada de como ficaria a quantidade de carrinhos de cada personagem eles respondem, que “Felipe tem 15 e João 30”.

Essa tomada de decisão da dupla é a mesma utilizada nos estudos de Oliveira e Câmara (2011). Em ambos os trabalhos realizados, os estudantes não estão estabelecendo as relações presentes nos problemas, estão apenas realizando os cálculos puramente aritméticos. Contudo, o que fez a dupla estudada em nosso trabalho corrobora com o que foi realizado no estudo realizado por Oliveira e Câmara (2011).

Mesmo a dupla compreendendo a ideia de metade, não consegue estabelecer as relações com o que é apresentado no problema. Logo, não resolve o problema e também não alcança o desenvolvimento de característica do pensamento algébrico, uma vez que se faz necessário estabelecer relações e considerar o valor proposto no problema como sendo o valor total.

Logo, a partir do que é trazido por Almeida (2016) e Oliveira e Câmara (2011) em que a estratégia de base “Total como Fonte” é uma estratégia em que o estudante entende “o problema de partilha como se fosse de estrutura aritmética, mobilizando no momento em que o está respondendo, estratégia essencialmente aritmética” (Almeida, 2016, p. 110). Portanto, podemos concluir que ambas as duplas que utilizaram a estratégia de base “TF” em nosso estudo não mobilizou nenhuma das características do pensamento algébrico.

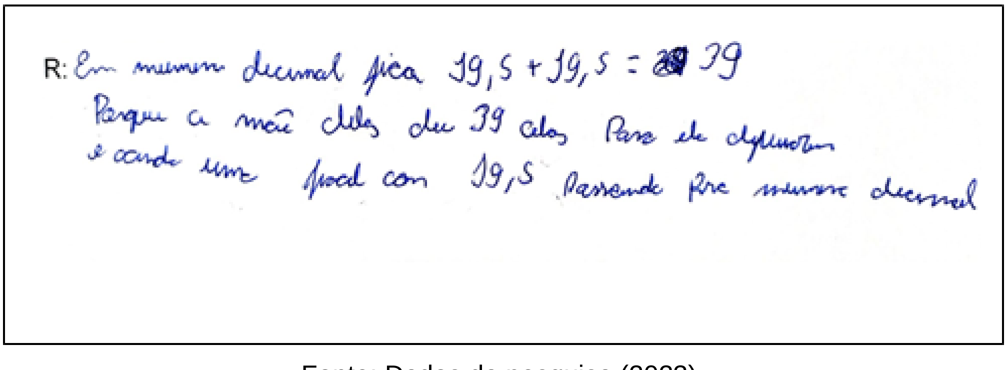
5.1.2 Estratégia “Dividir por 2 (D2)” – Registro no papel e Entrevista

As figuras logo abaixo trazem as imagens de respostas registradas por duas (2) duplas de estudantes as quais tomaram como estratégia para a resolução do problema proposto a “Dividir por 2 (D2)”.

A dupla DI fez uso dessa estratégia de resolução para tentar solucionar o problema 4, e a dupla DB utilizou a mesma estratégia para resolver o problema 2. A seguir temos o registro da dupla DI para resolver o problema 4.

Problema 1: Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?

Figura 4 – Resposta dada ao problema 4 utilizando a estratégia D2


R: Em numero decimal fica 19,5 + 19,5 = ~~[illegible]~~ 39
Porque a mãe delas deu 39 selos para ela dividirem
e cada uma ficou com 19,5 passando para numero decimal

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao analisar a resposta registrada pela dupla DI composta pelas estudantes Germania e Nita. Percebemos que elas buscaram realizar a operação da adição para encontrar a solução para o problema. Nessa adição elas realizaram a soma de parcelas iguais, nos fazendo inferir que elas poderiam estar pensando em uma divisão. Quando elas realizaram a soma de 19,5 mais 19,5 = 39, nos leva a acreditar que o número 39 foi dividido por 2. A partir dessa conta realizada, a dupla registra como solução que "porque a mãe delas deu 39 selos para elas dividirem, e cada uma ficou com 19,5 passando para número decimal". Se o problema apresenta como valor a quantidade de 39 sendo o total de selos, então a dupla realizou uma divisão em partes iguais. Dessa forma, mesmo não realizando a operação da divisão, a dupla nos dá a indicação de uma divisão da quantidade de selos trazida no problema, a partir do registro feito por elas.

Buscando entender melhor como as estudantes chegaram a essa solução para o problema, realizamos a transcrição de extratos da entrevista realizada com a dupla no decorrer da realização do teste.

> **Germania**: Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?
> **Nita**: É 26.
> **Germania**: 26 não. É 16.
> **Nita**: Acho que é 18.
> **Germania**: Acho que se foi decimal vai ser 19,5. Pode colocar número decimal?
> **P**: Você quem sabe.
> **Germania**: Eu acho assim, número normal vai passar para decimal. Então vai ser 19,5 mais 19,5 que vai dar 39.
> **Nita**: Então vai ser assim mesmo.
> **P**: Por que você pensou dessa forma?
> **Germania**: A gente passou para número decimal, então vai ficar 19,5 mais 19,5 é igual a 39. A gente pensou nisso.
> **P**: Porque pensou em 19,5?
> **Germania**: Porque passei para um número decimal aí fica assim. Porque a metade de 39 em número decimal é 19,5. Fica mais fácil para a gente entender em número decimal.

No extrato acima, a dupla apresenta em suas falas como chegaram ao resultado que consideraram como solução para o problema. Quando a estudante Germania faz a leitura do enunciado, sua colega Nita já busca responder de imediato dizendo que a resposta é 26. Na sequência, Germania discorda de Nita afirmando que a resposta é 16 e não 26. Nita, por sua vez, discorda de Germania afirmando um novo valor, 18. Até esse resultado, ambas as estudantes afirmam valores sem justificar como chegaram a essas respostas.

Podemos ressaltar que ao responder de imediato 26, é possível que a estudante Nita estivesse pensando algebricamente, uma vez que ela poderia ter realizado a divisão da quantidade 39 em 3 partes (x + x + x) e somou 2 das partes. Logo ela considerou 26 como sendo a quantidade correspondente a Manoela, mas por ela ter sido contestada pela colega Germania, acabou por mudar sua resposta.

A dupla então, continua buscando encontrar a solução, até que Germania afirma que a resposta seria 19,5 e explica como chegou a essa solução, dizendo que "Acho que se foi decimal vai ser 19,5". Quando ela é questionada pela pesquisadora do porquê dessa resposta, ela afirma que estava usando número decimal e que ao somar a quantidade de "19,5 mais 19,5 é igual a 39". A estudante Nita concorda com Germania com relação a resposta dada ao problema.

Ao expor essa fala, Germania nos faz perceber que a dupla pensou em uma divisão para resolver o problema proposto, uma vez que elas estão realizando a soma de parcelas iguais. A dupla não leva em consideração a relação apresentada pelo problema, apenas entende a quantidade de 39 selos como sendo o valor total do problema. Ao não considerar as relações que são trazidas pelo enunciado do problema, a dupla considera como solução apenas o valor dessa divisão, admitindo resposta a apenas uma das incógnitas (Oliveira; Câmara, 2011). Isso porque, ao tratarmos de problemas de partilha os valores correspondentes às incógnitas são valores desiguais, que é o que caracteriza esse tipo de problema.

Na última linha do extrato, Germania apresenta o termo "metade de 39", nesse momento, ela nos faz perceber que estavam considerando a quantidade 39 como sendo a quantidade de selos dos dois personagens e realiza uma divisão "como se a partilha desse valor fosse em partes iguais" (Oliveira; Câmara, 2011, p. 6). Com isso a dupla busca solucionar o problema realizando uma divisão como se estivesse lidando com um problema aritmético (Almeida, 2016), pois está considerando uma divisão em partes iguais.

Tentando entender como a dupla pensou para resolver esse problema, a pesquisadora continua o diálogo. O extrato dessa conversa é registrado a seguir.

> **P:** Vocês acham que tem outra maneira de fazer?
> **Germania**: Acho que tem, mais não sei outra maneira.
> **P:** Porque você pensou em fazer assim?

> **Germania:** Acho que fica mais fácil colocando para número decimal.
> **P**: Qual a pergunta do problema?
> **Germania**: Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma? 19,5, porque elas dividiram os selos delas. A mãe deu o selo para elas dividirem, então, cada uma ficou com 19,5 selos.
> **P**: Como você chegou a esse resultado?
> **Germania**: Porque o professor ensinou. Ele calculou a metade de números decimais, aí eu pensei nisso. Ele já ensinou isso à gente.
> **P**: E Nita, como pensou? Pensou em algo diferente?
> **Nita:** Pensei diferente, não. Eu acho que está certa a resposta.

Nos registros do extrato acima Germania continua a afirmar que os selos foram divididos para as duas personagens, reafirmando o uso da estratégia “D2” na resolução desse problema. A estudante refaz a leitura do problema como proposto pela pesquisadora e continua fazendo o uso dessa estratégia.

Quando questionada pela pesquisadora de como chegou a essa maneira de resolver, ela então coloca que “o professor ensinou”. Ou seja, estudou em momento anterior em sala de aula sobre números decimais e isso a inspirou na resolução, como nos parece.

Em uma conversa informal anteriormente com o professor, ele afirma que já havia vivenciado em sala de aula a resolução de problema algébricos do tipo partilha, mas devido ao curto tempo que se tinha não foi possível enfatizar essa temática, mas que ele havia vivenciado em sala. Com a aplicação do teste é possível perceber que a dupla ainda não consegue resolver a maior parte dos problemas de partilha proposto no teste.

A dupla realizou a partilha do valor total em partes iguais, o que não ocorre com os problemas de partilha, levando-os ao erro. A forma de resolução utilizada pela dupla de nosso estudo corrobora com o que foi realizado no estudo desenvolvido por Almeida (2016). Em ambos os estudos os estudantes que utilizaram a estratégia de resolução “dividir por 3” no trabalho de Almeida (2016) e “dividir por 2” em nosso estudo, não consideraram as condições apresentadas no enunciado do problema. Respondem os problemas como se fosse uma divisão em partes iguais, e “demonstram compreendê-lo como um simples problema de estrutura aritmética” (Almeida, 2016, p. 134).

Portanto, mesmo a dupla considerando a quantidade 39 como sendo o valor total do problema, as estudantes não compreenderam o problema. Não consideraram as relações estabelecidas no enunciado, com isso não conseguiram encontrar a solução correta, pois, é imprescindível estabelecer as relações apresentadas num problema algébrico para obter êxito em sua resolução (Almeida, 2016).

Entretanto, a partir do que foi exposto pela dupla tanto pelos registros no papel quanto com a entrevista, podemos concluir que as estudantes estavam pensando em uma divisão em partes iguais, fazendo uso da estratégia D2. Pois, ao citar “porque a metade de 39” automaticamente ela está realizando uma divisão. Como é trazido por Oliveira e Câmara (2011), quando o estudante faz uso da estratégia D3, no nosso caso é a D2, o estudante está mobilizando características aritméticas e não algébricas. Logo a dupla não conseguiu, nesse problema, encontrar a solução correta e ao mesmo tempo não mobilizou nenhuma das características do pensamento algébrico.

A seguir temos o registro da resposta dada no papel pela dupla DB para solucionar o problema 2 fazendo uso da estratégia D2.

Problema 2: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?

Figura 5 – Resposta dada ao problema 2 utilizando a estratégia D2


R: 15 bolinhas de Felipe e joao 15

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na resposta registrada na figura 5 acima, dada pela dupla DB composta pelos estudantes Manuela e Carlos, os estudantes registram apenas a resposta que eles acreditam que seja a solução para o problema, não registrando nada sobre como eles pensaram para chegar à solução.

Ao analisarmos a resposta registrada pela dupla, acreditamos que os estudantes fizeram o uso da estratégia dividir por 2 para solucionar o problema. Como o valor apresentado no problema é o número 30, e como resultado a dupla registrou que cada personagem do problema tinha 15 bolinhas, acreditamos que foi realizado uma divisão por dois.

Como o registro no papel não indica que a dupla realizou uma conta de divisão por 2, fizemos a análise da entrevista realizada no decorrer da realização da atividade, objetivando verificar como eles chegaram e como pensaram a resposta. Esse registro dos extratos da entrevista se encontra logo a seguir.

> **Carlos**: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um? Felipe tem 15 bolinhas.
> **Manuela:** É o quê?
> **Carlos:** Felipe tem 15 bolinhas, porque a metade de 30 num é 15. Porque 15 mais 15 num é 30. Aí bota 15 bolinhas
> **P:** 15 bolinhas de quem?
> **Carlos**: 15 bolinhas de Felipe e 30 de João.
> **Manuela:** Se todos os dois tem a metade, né 15 de cada?
> **P**: Cada um tem 15? E você pensou como? Que o outro tinha quanto Carlos?
> **Carlos**: Eu pensei que o outro tinha 30 e ele comprou só 15 bolinhas de gude, aí por isso eu falei que ele tinha 15 bolinhas de gude e João tinha 30. Mas Manuela pensou bom, porque se tem 30, Felipe fica com 15 e ele com 15.

Ao analisarmos a entrevista realizada com a dupla é possível ver que eles buscam resolver o problema realizando a divisão por 2. No primeiro momento Carlos se coloca respondendo o problema afirmando que Felipe, personagem do problema, teria 15 bolinhas de gude sem citar a quantidade de bolinhas de gude de Carlos. Um pouco depois, em outra fala, ele deixa ainda mais claro que ele estava pensando em uma divisão em partes iguais para tentar resolver o problema. Isso fica claro quando ele argumenta que “Felipe tem 15 bolinhas, porque a metade de 30 num é 15”, e ainda reforça quando continua dizendo que “15 mais 15 é 30”, nesse momento percebemos o processo da divisão, pensada por ele. Em seguida ele busca explicar a sua colega Manuela quando ela se expressa, passando a impressão de que não houvesse entendido o problema quando o questiona, “é o quê?”. Carlos também é questionado pela pesquisadora sobre de quem são as 15 bolinhas de gude, e ele responde que Felipe tem 15 e João tem 30.

A partir da indagação realizada a Carlos, Manuela nos fez perceber que ela estava tentando entender como ele pensou, pois, logo ela o questiona sobre a resposta dada por ele à pesquisadora. Manuela se coloca perguntando “se todos os dois tem a metade, né 15 de cada?”. Nesse momento a estudante Manuela também demonstra que estava pensando em uma divisão para tentar solucionar o problema. A estudante em sua fala nos leva a entender que ela está realizando a divisão do valor total proposto em partes iguais, ela não está levando em consideração a relação apresentada no problema que afirma “Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João”. Eles apenas estão fazendo uma divisão do valor total para encontrar os valores das incógnitas.

Buscando compreender como Carlos resolveu o problema e chegou ao resultado que João teria 30 bolinhas, a pesquisadora questiona como ele pensou. Por sua vez, Carlos se coloca afirmando que pensou que “o outro tinha 30 e ele comprou apenas 15 bolinhas de gude”, quando ele fala sobre o outro tinha 30 ele está se referindo ao personagem João, e ele comprou 15 se referiu a Felipe, o outro personagem do problema.

Com essa fala Carlos nos levou a entender que ele havia pensado que a quantidade de 30 bolinhas correspondia à quantidade de bolinhas de gude de João, e que Paulo teria “comprado” 15 bolinhas. O estudante Carlos não estava considerando as 30 bolinhas de gude como sendo o total de bolinhas do problema, e que elas corresponderiam ao valor das duas incógnitas juntas.

Ao final de sua fala, Carlos concorda com a forma pela qual Manuela resolveu o problema, a proposta da divisão por 2, e acabam por responder que cada valor desconhecido corresponderia a 15, realizando a divisão do total em duas partes iguais. Nesse trecho percebemos que Carlos consegue fazer a relação entre as partes, mas não consegue fazer a relação das partes com o todo.

Tanto o que foi afirmado na fala de Carlos, bem como na fala de Manuela, ambos pensam na divisão do valor total em partes iguais para resolver o problema, o que está corroborando com o trabalho realizado por Almeida (2016). Tanto em nosso estudo quanto no estudo realizado por Almeida (2016, p. 111), os estudantes não levam em consideração as relações apresentadas no problema e “entendendo-o como uma simples situação de estrutura aritmética”.

Logo, a estratégia que prevaleceu na resolução do problema foi dividir por 2, mesmo os dois discutindo e buscando responder o problema, não conseguiram obter êxito na resolução e acabaram respondendo de forma incorreta. Portanto, a dupla não conseguiu mobilizar nenhuma das características do pensamento algébrico, optaram por uma estratégia que não favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas do pensamento aritmético de acordo com Oliveira e Câmara (2011).

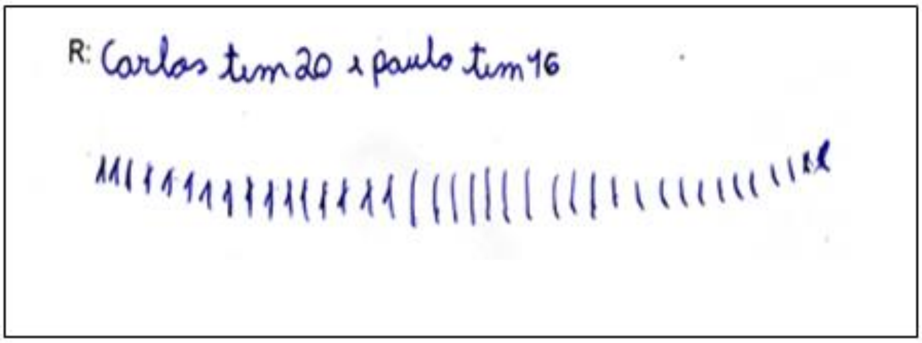
5.1.3 Estratégia “Cálculo Qualquer (CQ)” – Registro no papel e Entrevista

Outra estratégia identificada por Oliveira e Câmara (2011) utilizada por estudantes para tentar solucionar problemas algébricos do tipo partilha é a estratégia “Cálculo Qualquer (CQ)”. Em nosso trabalho três duplas também fizeram o uso dessa estratégia buscando encontrar uma solução para os problemas propostos. Trazemos nesse trabalho a análise de duas duplas que utilizaram a estratégia “CQ”.

A figura 6 a seguir refere-se à resposta dada pela dupla DF para tentar solucionar o problema 1 proposto no teste, fazendo uso da estratégia “Cálculo qualquer (CQ)”.

Problema 1: Paulo e Carlos têm juntos 36 carrinhos. Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo. Quantos carrinhos tem cada um?

Figura 6 – Resposta dada ao problema 1 utilizando a estratégia CQ



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao observarmos a resposta dada ao problema 1 pela dupla DF, composta por Danubia e Olga, percebemos que as estudantes buscaram uma forma qualquer para dividir a quantidade de carrinhos fazendo o uso dos traços no papel, não fazendo uso de cálculos. Ao que tudo indica elas não compreenderam o que foi proposto no problema, uma vez que não utilizam as relações presentes no enunciado ao tentar resolvê-lo. Faz uso de símbolos, os traços apresentados na figura anterior, sem relacionar com o proposto no problema, e buscaram dar uma resposta de forma, ao que tudo indica aleatória, “Carlos tem 20 e Paulo tem 16”. Com a resposta registrada pela dupla, não conseguimos perceber qual foi a estratégia adotada no processo de partição da quantidade de carrinhos, apenas tentaram dar uma resposta ao problema.

Para melhor compreender como a dupla tentou resolver o problema, realizamos a transcrição de extratos da entrevista realizada com as estudantes no decorrer da realização do teste. O que pode ser observado logo a seguir.

> **Danubia**: Paulo e Carlos têm juntos 36 carrinhos. Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo. Quantos carrinhos tem cada um?
> **Olga:** Como assim?
> **Danubia:** Juntos tem 36.
> **Olga:** 18?
> **Danubia:** Se cada um tivesse 16, dava 32. Então tem o dobro, um tem 16 e o outro tem...
> **Olga:** Para dá o quê?
> **Danubia:** juntando os dois tem que dá 36, e um tem que ter mais que o outro.
> **P:** Por que no primeiro momento você pensou logo em 18?
> **Danubia:** Porque eu calculei aqui, se cada um tivesse 16 daria 32, e32 não é o valor. Então, tava faltando aí eu juntei os dois valores pra ver se era 16, mas é mais. Há já sei 20. Carlos tem 20 e Paulo tem 16.
> **Olga:** eu pensei no 20, mas não falei porque pensei que estava errado.
> **P:** Porque você pensou em 20?
> **Danubia:** Porque na minha primeira conclusão deu 32. E para 36 faltava 4. Então, como um tinha chutado 16, aí 16 mais 4 dá 20. Aí quando eu fui pensando direitinho deu o cálculo certo.
> **Olga:** Não sei, só sei que minha mente a primeira coisa que veio foi 20, do nada.

Ao observarmos o início do extrato é possível perceber que a dupla interage entre si, buscando encontrar a solução para o problema. A estudante Danubia faz a leitura de iniciado e a estudante Olga questiona sobre o problema, e inicia um diálogo entre elas. Danubia se coloca afirmando que “juntos tem 36”, o que nos fez acreditar que ela estava considerando o número 36 como sendo o total de carrinhos pertencente ao problema. Isso fica ainda mais evidente quando um pouco mais à frente ela se coloca dizendo que “juntando os dois tem que dar 36”.

Por sua vez, a estudante Olga se coloca citando o número 18. Porém, questionada pela pesquisadora sobre o porquê do 18, Olga não consegue responder como ela pensou. É possível que ela tenha pensado na divisão da quantidade total de carrinhos para os dois personagens, realizando mentalmente uma divisão em partes iguais. Se aproximando da estratégia “dividir por 2”. Porém, queremos reforçar que essa é uma inferência nossa, uma vez que não foi exposta pela estudante como ela chegou a esse resultado. A estudante Danubia, por sua vez, tenta explicar como ela fez para chegar ao resultado, e explica que pensou na quantidade 16, diferente de sua colega Olga.

Podemos perceber em sua fala que a estudante Danubia tenta resolver considerando a quantidade total de carrinhos apresentada no problema, em que um personagem tem mais carrinhos que o outro. Dessa forma ela não está considerando a relação apresentada no problema, a qual afirma que “Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo”, relação importante a ser considerada para solucionar o problema de forma correta.

Quando Danubia relata que estava considerando a quantidade 16 como sendo o valor de cada personagem, ela estava atribuindo quantidades às incógnitas na tentativa de atingir o valor total presente no problema. Ou seja, ela considerou que os valores desconhecidos seriam iguais e admitiu 16 como resposta. Ela realizou mentalmente a soma das duas quantidades, e percebeu que daria 32, o que não correspondia ao valor proposto no problema, que era 36. Em seguida, Danubia pensou qual era o valor que faltava para completar a quantidade 36, e percebeu que era 4. Ao encontrar essa diferença, a estudante somou à quantidade de carrinhos de Carlos, como ela relata em sua fala “Carlos tem 20 e Paulo 16”.

Ao realizar a soma da quantidade 16 com a quantidade 20 Danubia obteve a quantidade 36, que corresponde ao valor total do problema. Logo, ela considera que encontrou a solução do problema, e afirma “aí quando eu fui pensando direitinho deu o cálculo certo”, ou seja, ao atingir o valor total 36 ela acreditou que respondeu o problema, sem considerar as relações propostas.

Essa atitude tomada pela dupla de nosso estudo em realizar operações quaisquer tentando resolver o problema, pode ser equiparada ao estudo de Almeida (2016). Em ambos os trabalhos, os estudantes não conseguem estabelecer as relações necessárias para solucionar o problema e “eles buscam efetuar uma conta qualquer na tentativa de encontrar uma solução” (Oliveira; Câmara, 2011, p. 8).

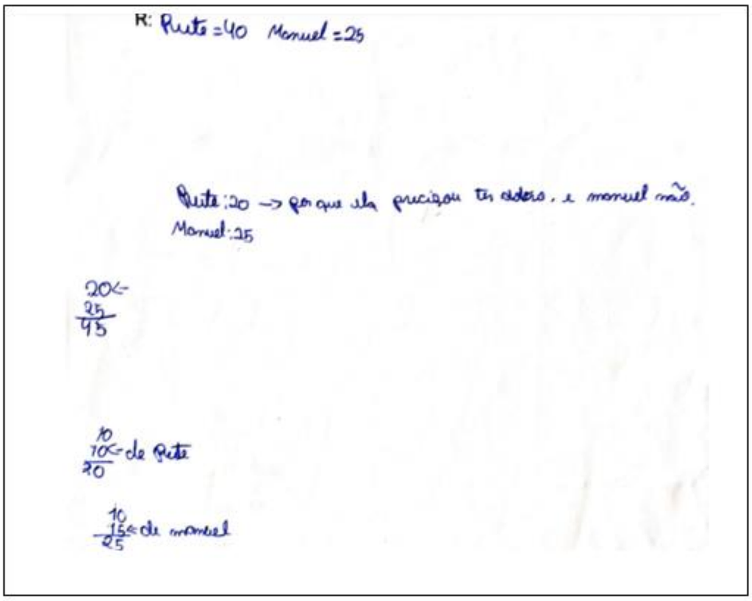
Depois de questionada pela pesquisadora o porquê da quantidade 16, a estudante não sabe explicar e diz que foi o que veio na cabeça, ou seja, a estudante assumiu um valor qualquer para os valores desconhecidos sem fazer relação alguma com o problema. Assim a dupla entendeu o problema como de estrutura aritmética em que para eles basta se chegar ao resultado final, o valor total do problema, sem se preocupar com as relações estabelecidas pelo problema.

Logo, a partir do que é exposto pela dupla sobre a forma pela qual buscaram resolver o problema, foi possível perceber que a dupla não levou em consideração as relações propostas no problema. Buscaram utilizar um cálculo qualquer sem se preocupar se conseguiria resolver corretamente o problema. De acordo com as estratégias propostas por Oliveira e Câmara (2011), essa estratégia adotada pelas estudantes se classificaria dentro das estratégias de base, como um cálculo qualquer (CQ). Pois, a dupla realizou um cálculo qualquer com a intenção de encontrar uma resposta para o problema. Como é colocado por Almeida (2016) “eles buscam efetuar uma conta qualquer na tentativa de encontrar uma solução” (Oliveira; Câmara, 2011, p. 8), sem compreender o que foi proposto no problema. Uma estratégia tipicamente aritmética que não promove o desenvolvimento do pensamento algébrico. Portanto, essa dupla também não mobilizou nenhuma das características do pensamento algébrico.

A seguir temos o problema 3, respondido pela dupla DM, a qual também fez uso da estratégia “CQ” na tentativa de resolver o problema.

Problema 3: Rute e Manoel têm juntos um total de 45 lápis de cor para ser dividido entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manoel. Com quantos lápis ficou cada um?

Figura 7 – Resposta dada ao problema 3 utilizando a estratégia CQ



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao observar a resposta registrada no papel pela dupla DM, compostas por Gustavo e Marta perceberam que os estudantes realizaram algumas adições aleatórias, fazendo somas as quais não conseguimos relacionar o que foi proposto no problema.

O que percebemos foi que a dupla, no início da soma, deu a entender que estava considerando a quantidade 45 como sendo a quantidade total, uma vez que eles realizam a primeira adição da quantidade 25 com a quantidade 20, obtendo 45, que é a quantidade total. Em seguida, continuam realizando somas: soma 10 mais 10 e obtém 20, e em seguida soma 10 mais 15 e obtém 25. Consideram as parcelas da primeira soma como sendo a quantidade de lápis de cada personagem e registram no papel que Rute tem 20 e Rute precisa do dobro, e que Manoel tem 25 e que ele não precisa de dobro. Quando observamos a resposta que eles consideraram como sendo a resposta para o problema, eles registram que Rute = 40 e Manoel = 25, ou seja, Rute tem 40 lápis e Manoel 25.

Para tentar compreender como a dupla buscou resolver o problema, temos a seguir, extratos da entrevista realizada no decorrer da resolução do problema.

> **Marta**: Rute e Manoel têm juntos um total de 45 lápis de cor para ser dividido entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manoel. Com quantos lápis ficou cada um?
> **Marta**: 20 mais 25.
> **P**: Por que 20 mais 25?
> **Marta**: Porque os dois fica o resultado de 45.
> **P**: Poderia ser outros valores?
> **Marta**: Pensei só nesses valores.
> **P**: Tem outra forma de fazer?
> **Marta**: Para chegar nesse aqui, no 20, seria 10 mais 10. Para chegar nesse aqui, no 25, seria 10 mais 15.
> **P**: Qual a pergunta do problema?
> **Marta**: quanto tem cada um?
> **P**: E aí, como ficaria?
> **Marta:** Rute teria 20 e Manoel teria 25, porque Rute teve o dobro e Manoel não. Ele já tinha mais que ela, 5 mais que ela.
> **P**: E Gustavo entendeu? Quer que ela leia para você? Você quer ler? Então, leia.
> **Gustavo**: Não.
> **P:** Você entendeu o que sua colega fez?
> **Gustavo**: Não.

Com a entrevista percebemos que Marta participa e interage mais, Gustavo é bem calado e tem certa dificuldade na compreensão sobre o problema. É necessário a pesquisadora questionar, e tentar trazê-lo para a conversa, mas, mesmo assim, o diálogo entre ele, sua parceira de equipe e a pesquisadora é pouco.

No extrato acima a estudante Marta tenta nos explicar como ela chegou ao resultado do problema. No primeiro momento ela nos levou a pensar que estava considerando a quantidade 45 como sendo a quantidade total de lápis do problema, quando ela se coloca afirmando que a resposta é “20 mais 25”, após ler o problema. E quando é questionada, sobre o porquê dessa resposta, a estudante logo responde que é porque ao somar o 20 mais o 25 se obtém como resultado a quantidade 45. Em suas palavras, ela afirma que “os dois fica o resultado 45”. Com essa fala a estudante nos levou a acreditar que ela estava tomando a quantidade 45 como sendo o valor total. Ou seja, a estudante estava levando em consideração apenas a quantidade total de lápis do problema e não as relações por ele estabelecidas. A estudante “não consegue se apropriar do significado do problema” (Oliveira; Câmara, 2011, p. 9), e admite valores quaisquer como respostas às incógnitas.

Em seguida, a pesquisadora questiona a Marta se pode ter outra resposta para o problema ou outra forma de responder, e a estudante responde que o que ela pensou como resposta foram esses valores apontando para o 20 e o 25 e começa a descrever como ela tentou solucionar o problema. Ela busca explicar como ela encontrou o que considera como resposta para os valores desconhecidos desse problema, a quantidade 20 e a quantidade 25.

A estudante afirma que a partir da soma da quantidade 10 mais 10 ela obteve 20 e que a partir da soma de 10 mais 15 ela obteve 25. Marta não deixa claro porque estava considerando como resposta para as incógnitas os valores 20 e 25, nos levando a acreditar que ela estava utilizando quantidades quaisquer para responder o problema, considerando apenas a quantidade 45 como sendo o valor total. Ela dá mais evidências de que está fazendo o uso de valores quaisquer quando afirma em sua fala que “Rute teria 20 e Manoel teria 25, porque Rute teve o dobro e Manoel não”. Nesse relato ela tenta relacionar os valores que ela considerou como resposta com o problema, pois, ao dizer que Rute teve o dobro, ela está se referindo a informação do enunciado, em que afirma que Rute tem o dobro. Mas, a estudante não estabelece a relação completa do enunciado, que “Rute tem o dobro da quantidade de lápis de Manoel”, e que o total dos valores desconhecidos teria que corresponder a 45, com isso responde o problema de forma equivocada.

Para mais esclarecimento a pesquisadora questiona a dupla sobre como Rute tem o dobro e Manoel não. E a estudante responde como o que está descrito no extrato abaixo.

> **P**: Aí você pensou em 20 e 25. Por que Rute tem 20?
> **Marta**: Porque ela precisou de ter dobro.
> **P:** E porque Manoel tem 25?
> **Marta:** Sei lá, porque ela tem pouquinho menos.
> **P:** Quem tem menos, ela?
> **Marta**: Sim. Se eu colocar a resposta aqui ela vai ter 40 e ele 25, que é o dobro que ela teve.
> **P**: De onde vêm o 40 dela?
> **Marta**: Eu falei que ela tem 20, aí 20 mais 20 dá 40.
> **P:** Então quanto ela tem?
> **Marta**: No total de agora 40.
> **P:** Porque você somou 20 com 20 pra dá 40?

> **Marta:** Porque ela tinha 20, aí tá falando aqui que ela teve o dobro aí eu pensei em 40. Porque 20 mais 20, dá 40.
> **P:** E esse primeiro 20 dela foi de onde?
> **Marta:** Do 45.

Na fala de Marta, extrato acima, ela afirma que os personagens, Rute e Manoel têm respectivamente 20 e 25 lápis. Quando é questionada sobre a quantidade de lápis atribuídos a cada personagem, ela explica que Rute vai precisar ter o dobro e tem um pouco menos que Manoel, e afirma não saber por que Manoel teria os 25 lápis, e se justifica afirmando porque ele não necessitaria do dobro assim ficaria com 25.

Até aqui Marta está considerando o total de lápis do problema, mas logo depois percebemos que isso não acontece, pois ela dobra a quantidade de lápis da personagem Rute. Ela afirma: “ela vai ter 40 e ele 25, que é o dobro que ela teve”. Marta é questionada sobre a quantidade 40 e ela afirma que vem do 20. Ou seja, ela considerava que Rute teria 20 lápis, mas como o problema afirma que Rute tem o dobro da quantidade de lápis de Manoel, ela acaba por dobrar a quantidade de lápis que ela considerava ser de Rute, como ela mesma afirma “ela tinha 20, aí tá falando aqui que ela teve o dobro, aí pensei no 40”, apontando para o problema.

Nesse trecho percebemos que a estudante compreende a ideia de dobro quando ela faz esse relato e quando reforça afirmando “porque 20 mais 20 dar 40”, se referindo ao dobro da quantidade 20. E passa a não considerar a quantidade total de lápis do problema quando afirma que Rute tem 40 lápis e Manoel 25, como no extrato a seguir: “**P**: Ao final quanto tem Rute e quanto tem Manoel? **Marta:** Rute tem 40 e Manoel 25”. A dupla finaliza a resposta ao problema deixando como solução “Rute tem 40 e Manoel 25” lápis cada. Logo, a dupla não considerou a quantidade total de lápis proposto no enunciado do problema, que era 45.

Ao analisar a fala da estudante, uma vez que Marta é quem mais se coloca no diálogo, ela busca realizar cálculos para tentar solucionar o problema. Tenta dar resposta ao problema, mas não consegue relacionar o que está proposto, “não consegue estabelecer as relações necessárias na resolução de um problema” (Almeida; Câmara, 2018, p. 554). A dupla percebe que um dos personagens tem o dobro da quantidade de lápis em comparação com o outro, mas não considerou a quantidade 45 como sendo o total de lápis. Tenta fazer uma partição qualquer dos lápis para os personagens, sem se deter ao que está sendo estabelecido pelo problema, fazendo cálculos quaisquer.

Portanto, a dupla realizou alguns cálculos sem estabelecer relações com o que foi proposto no enunciado, apenas na tentativa de dar uma solução ao problema. De acordo com Oliveira e Câmara (2011), a estratégia adotada se classificaria como “CQ”.

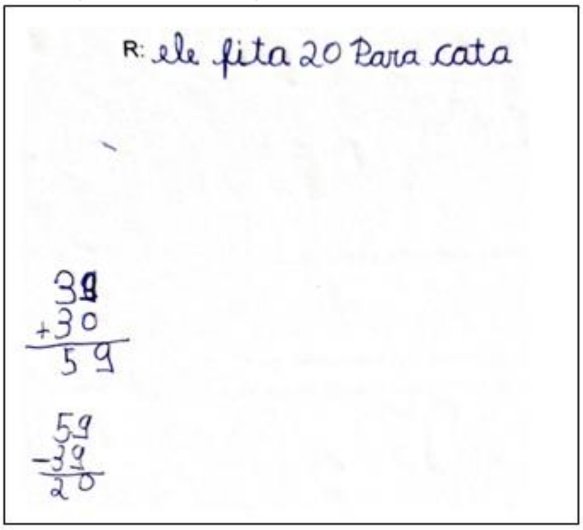
5.1.4 Estratégia “Não Identificada (NI)” – Registro no papel e Entrevista

Em seu estudo, Oliveira e Câmara (2011), estabeleceram estratégia de base para resolução de problemas de partilha. Além das estratégias que foram identificadas, foi possível perceber que existiam respostas que não era possível identificar qual estratégia era utilizada para responder o problema, as classificando como “não identificada (NI)”.

A figura 8 a seguir traz o registro da resposta dada ao problema 4 realizada pela dupla DN que tentou resolver o problema, fazendo uso de alguma estratégia a qual não foi possível identificar.

Problema 4: Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?

Figura 8 – Resposta dada ao problema 4 utilizando a estratégia NI



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A dupla denominada DN, composta pelos estudantes Patrícia e Sérgio, responderam o problema 4 com o seguinte registro em linguagem natural: “ele fita 20 para cada”, ou seja, cada personagem ficou com 20 selos. A dupla realizou alguns cálculos utilizando a adição e a subtração, sem fazer nenhuma relação com o enunciado e sem estabelecer as relações presentes no problema. Por conta disso, classificamos a estratégia de base como “NI”.

A partir do que foi registrado pela dupla, acreditamos que eles não compreenderam o problema, não estabeleceram as relações apresentadas com o que eles estavam pensando e deram uma resposta qualquer ao problema, respondendo de forma incorreta.

Para tentar melhor compreender como a dupla tentou responder o problema, temos a seguir extratos da entrevista realizada no momento da aplicação do teste.

> **Patrícia:** Clara e Manuela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem metade da quantidade de selos de Manuela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?
> **Sérgio:** Esse eu não sei também.
> **Patrícia:** É 59.
> **P:** O que é esse 59?
> **Patrícia:** o valor desses dois.
> **P**: O que são esses dois? De onde vem esses dois?
> **Patrícia:** veio daqui.
> **P:** Porque você colocou 30?
> **Patrícia**: O número que veio na minha mente.
> **P:** Porque você pensou nesse número? Porque veio esse na sua mente?
> **Patrícia:** Sei lá.
> **P:** Porque você fez essa soma?
> **Patrícia:** Sei lá.
> **Sergio**: também não sei.
> **P**: Porque vocês pensaram em juntar o 39 com o 30?
> **Patrícia:** um número baixo e outro alto.
> **P:** Porque depois você diminui 39?
> **Patrícia:** Para ver quanto ficaria para cada.
> **Sérgio:** Também acho que é 20.
> **P:** Tem alguma estratégia que levou vocês a resolveram assim?
> **Patrícia:** Não.

Ao observarmos a fala dos estudantes na entrevista, percebemos que a dupla tenta encontrar uma solução para o problema. No primeiro instante após a estudante Patrícia realizar a leitura do problema, o estudante Sérgio já afirma que não entendeu. Em seguida, Patrícia responde que é 59. Quando questionada pela pesquisadora sobre o que é esse 59, Patrícia diz que “veio daqui”, apontando para a adição envolvendo 39 mais 30 igual a 59. Observamos que a soma foi realizada obtendo um resultado incorreto, acreditamos que foi uma questão de atenção por parte da dupla. A pesquisadora novamente questiona a dupla porque eles colocaram 30 como uma das parcelas da adição. Patrícia, por sua vez, responde que “é o que está na minha mente”. A estudante não sabe explicar como estava tentando resolver o problema, notamos que as operações realizadas pela dupla não estabelecem nenhuma relação com o que estava sendo proposto no enunciado.

Continuando a análise do extrato, ao ser questionado pela pesquisadora sobre o porquê da realização da soma, a dupla não soube dizer por que realizaram aquele procedimento. A partir dos questionamentos e das respostas dadas pelos estudantes, percebemos que eles estavam tentando responder o problema de forma aleatória. A pesquisadora continuou questionando a dupla na busca de entender como eles responderam o problema e questionou por que eles realizaram a soma dos 39 mais 30? A estudante Patrícia responde que é por ser “um número baixo e outro alto”. Com essa fala a estudante demonstra está respondendo o problema sem se preocupar com o que está estabelecido no enunciado. Sobre o porquê de realizar a subtração, Patrícia responde apenas que foi para ver o resultado que seria gerado, não dando indícios nenhum de alguma estratégia para resolução, e também não consegue explicar porque fizeram esses cálculos.

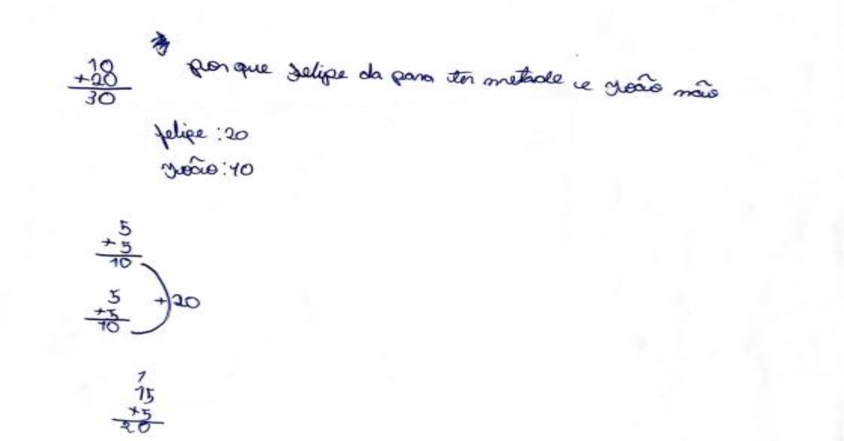
A partir do que foi apresentado como resposta escrita, bem como o extrato da entrevista, é possível afirmar que a dupla não considera o valor total do problema como sendo a quantidade 39, não se detém as relações estabelecidas no problema, como “Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe”. Podemos ver isso nos trechos em que ele afirma que “é um número baixo e outro alto”, fazendo cálculos aleatórios. Com todas essas observações e não conseguindo identificar a estratégia adotada pela dupla, de acordo com Oliveira e Câmara (2011, p. 5), classificamos como não identificada, como os próprios autores colocam que como “não foi possível identificar a estratégia mobilizada pelo sujeito”, à classificamos como não identificada, dentre as estratégias utilizadas como base para nosso estudo.

5.1.5 Estratégia “Atribuir Valor (AV)” – Registro no papel e Entrevista

A figura 9 abaixo refere-se à resposta dada ao problema 2 pela dupla DM, tomando como base a estratégia “AV”. De acordo com Almeida (2016) essa estratégia permite o aluno atribuir valor a uma das incógnitas e assim encontrar o valor da outra incógnita.

Problema 2: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?

Figura 9 – Resposta dada ao problema 2 utilizando a estratégia AV



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na resposta acima dada ao problema 2 pela dupla DM, composta por Gustavo e Marta, é perceptível que os estudantes compreenderam a primeira relação apresentada no problema. Quando eles realizaram a soma: 10 mais 20, e obtiveram 30 como resultado, além de registrarem que a quantidade desconhecida da primeira incógnita correspondia a 10 e a da segunda a 20. Isso mostra que a dupla compreendeu que o número 30 correspondia ao valor total. Além disso, essa dupla também compreendeu a relação estabelecida entre os valores desconhecidos, ou seja, que um é a metade do outro. Como é colocado por Oliveira e Câmara (2011), na estratégia "atribuir valor" o estudante atribui valor a uma das incógnitas e estabelece as relações propostas para determinar o valor da segunda incógnita.

Para verificarmos como foi pensado pelos estudantes para se chegar ao resultado que eles registraram no papel, temos a seguir alguns extratos das falas da dupla captadas na entrevista no momento de realização do teste.

> **Marta**: Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?
> **Marta**: Só se um estiver mais que o outro.
> **P**: Lê novamente, pra ver se compreende.
> **Gustavo:** Não entendi tanto não
> **Marta**: Só se algum tiver 10 e o outro tiver 20.
> **P**: Por que 10 e 20, diz aí?
> **Marta**: Porque 20 mais 10 é 30.
> **P**: 20 mais 10 daria 30. Porquê você pensou dessa maneira?
> **Marta**: Porque, aí para chegar a 30 primeiro tinha 20, aí veio o 1, aí tinha 10 aí juntou aí deu 30.

> **P**: Por que tinha um com 20 e tem outro com 10. Por que o 20 e o 10?
> **Marta**: Porque 20 mais 10 é 30.
> **P**: Certo. Agora porque o 20 mais 10? Por que justamente um é 20 e o outro 10?
> **Marta**: Porque não pensei em outro jeito não, pensei em 20 mais 10. Pensei em uma continha aqui na mente, mas não chegou não.
> **P**: Como foi a continha que você pensou? Conta pra gente.
> **Marta**: Primeiro estava pensando em 5 mais 5, mas só que não daria não. Aí depois eu pensei em 6, mas 6 mais 6 não ia dar certo, iria dar 42 no meu pensamento. Aí 7 mais 7 ia dá 14. Aí 7 mais 7 de novo ia dá 14. E 14 mais 14, dá 28, aí faltaria 2 para chegar. Aí eu pensei em 9 mais 9, só que ia ser mais que 30. Aí eu pensei em 20 mais 10.

Nessa dupla percebemos que Marta se destaca mais que Gustavo, ele é bem tímido e dialoga pouco. Marta relata que ele apresenta dificuldade de interação e ela acaba por tomar boa parte das decisões na resolução do problema.

Ao ler o problema proposto, a estudante afirma que os personagens teriam 20 e 10 bolinhas de gude, respectivamente. Ao ser questionada sobre a resposta dada, ou seja, porque ela acreditava que a resposta era 20 e 10, Marta mostra a soma realizada, apontando para a expressão 10 + 20, e vai explicando como a realiza, "para chegar a 30, primeiro tinha 20, aí veio o 1, aí tinha 10 aí juntou e deu 30". Nesse momento ela tenta explicar a operação que estava realizando apontando para o número 1, que corresponderia à dezena da quantidade 10, com o número 2, que corresponderia às duas dezenas da quantidade 20. Mesmo continuando com os questionamentos sobre o porquê considerar como resposta a quantidade 20 e a quantidade 10, a estudante insiste que a soma desses dois números corresponde à 30.

Em sua fala, a estudante Marta, quando questionada pela pesquisadora sobre "a continha que ela pensou", ela relata que iniciou pensando em alguns valores buscando contemplar o valor total proposto pelo problema. Começou fazendo a soma de 5 em 5, viu que era insuficiente, refez usando o número 6, novamente não deu, e assim ela continuou até que percebeu que em determinado momento ela atribuiu valores que ultrapassou o número total proposto, ela utilizou o número 9. Mesmo Marta realizando uma soma inadequada para esse problema, percebemos que essas tentativas de encontrar a resposta correta não foram realizadas ao acaso, ela consegue perceber que a partir de determinado número ela já não mais poderia considerar o valor, pois ultrapassaria o valor total apresentado no problema.

O relato de Marta de como ela buscou resolver o problema corrobora com o que é apresentado por Almeida e Câmara (2018). Em ambos os trabalhos as estudantes não utilizam valores aleatórios elas têm intensões no uso de determinado valor, ou seja, as tentativas “não são feitas ao acaso” (Almeida; Câmara, 2018, p. 556). Portanto, ao tentar resolver um problema de partilha utilizando a estratégia "atribuir valor”, o estudante atribui valor a uma das incógnitas, e que esse valor não é ao acaso, o estudante tem a consciência de que irá realizar uma operação para encontrar um determinado valor. Tudo é feito com consciência e não de forma aleatória.

No decorrer da realização da atividade, Marta se coloca afirmando que os valores correspondentes às respostas para o problema seriam 20 e 10, em que Felipe teria 20 bolinhas de gude e João teria 10 bolinhas. De acordo com Marta, ela considera essa resposta frente ao que é apresentado pelo problema, pois, o problema traz como relação que “Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João”. Entretanto, Marta tem uma interpretação equivocada com base nessa relação, é o que podemos observar no extrato logo abaixo.

> **P**: quem é que tem 10 e quem é que tem 20?
> **Marta:** Eu acho que Felipe tem 20 e João tem 10.
> **P**: Por quê?
> **Marta**: Porque Felipe dá pra ter a metade e João não.
> **P**: Aí no caso, Felipe tem a metade e João não? Qual seria essa metade de Felipe?
> **Marta**: 10
> **P**: E o 10 vêm de onde?
> **Marta**: Dos 20.
> **P**: Por que 10 veio de 20?
> **Marta**: Porque a metade de 20 é 10.
> **Marta**: Porque 5 mais 5 é 10, aí depois 5 mais 5 é 10 também. E se juntasse os dois daria 20.
> **P**: Por que pensou nessa maneira, de 5 em 5?
> **Marta**: Porque o resultado de 5 mais 5 chega a 10, e de 10 mais 10 chega a 20.
> **Marta**: Eu pensei desse jeito primeiro 10 mais 20 dá 30. Aí depois eu pensei assim, se Felipe dá para ter a metade então ele tem 20 e João tem 10. Porque João não tem metade.
> **P**: Eu achei interessante porque você faz as continhas para sempre chegar a 20. Porque chegar a 20?
> **Marta:** Ah, eu estava fazendo para chegar a 20, porque estava pensando na metade de Felipe.

Ao observarmos a fala da estudante em relação ao que ela considera como resposta nós entendemos que ela interpretou de forma equivocada o que é trazido pelo problema. No enunciado é colocado que “Felipe tem a metade da quantidade de bolinhas de gude de João”, nesse caso, João teria uma quantidade de bolinhas de gude e Felipe teria metade dessa quantidade. Ao ler o problema Marta considerou que, quem teria a metade da quantidade de bolinhas seria João, pois, como ela afirma em sua fala logo acima “Felipe dá pra ter a metade e João não”

Com isso a resposta que ela deu ao problema foi considerando que a quantidade de bolinhas de João corresponderia à metade da quantidade de bolinhas de Felipe, o que na realidade seria o contrário, Felipe teria a metade da quantidade de bolinhas de João. No entanto, os valores desconhecidos estavam corretos, pois um personagem teria 20 bolinhas de gude e o outro teria a metade, 10 bolinhas.

No decorrer da conversa Marta afirma que pensou em um valor, no caso o 20, valor correspondente a uma das incógnitas e que, a partir da quantidade 20, ela encontra o outro valor desconhecido, o 10, a partir da relação que faz entre essas duas quantidades. Ela enfatiza que 10 é metade de 20 e que as duas quantidades juntas correspondem a 30. Nessa situação, ela está considerando o 30 como sendo realmente o valor total do problema, percebendo a relação presente entre os dois valores desconhecidos. Ou seja, outra relação que consta no enunciado, em que um valor corresponde à metade do outro “Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João”.

Por conta disso, classificamos essa estratégia de resolução como sendo a de “atribuir valor”. De acordo com Almeida (2016), quando o estudante faz uso da estratégia ele está pensando algebricamente, pois mobiliza algumas das características do pensamento algébrico.

Quando a estudante Marta relata que começa pensando em uma quantidade e vai somando-as até chegar à quantidade que ela quer, no caso do problema apresentado o 30, ela está, de acordo com Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) estabelecendo relações entre as partes e o todo, condições apresentadas no enunciado do problema, mobilizando uma das características do pensamento algébrico, a capacidade de “estabelecer relações”.

Ao retomarmos a figura referente à resposta registrada pela dupla, percebemos que eles registram algumas operações envolvendo a adição. Em uma se tem como registro 10 + 20 = 30, em que nos fez inferir, e que depois foi confirmada com a entrevista, que a soma dos valores das incógnitas, a quantidade 10 e a quantidade 20, correspondem ao valor total do problema, a quantidade 30. Buscaram relacionaram os valores que atribuíram na obtenção de um dos valores desconhecidos, o 20. Quando associa a soma 5 + 5 =10 com a outra soma de 5 + 5 = 10, a dupla relaciona esses dois valores ligando-os através de uma linha e escrevendo o valor 20, indicando que as somas acima são iguais a 20. O que é reforçado pela fala de Marta e registrado no extrato acima que “5 mais 5 é 10, aí depois 5 mais 5 é 10 também. E se juntasse os dois daria 20”.

Contudo, tanto na resposta registrada pela dupla, assim como no extrato da entrevista em que Marta afirma que os valores das incógnitas correspondem a 10 e a 20, que o valor de uma incógnita é 10 porque é a metade da outra, além de afirmar que “10 mais 20 dá 30”, em que esse 30 corresponde ao valor total do problema. A estudante demonstra que o modelo que a dupla utilizou representa as relações propostas pelo enunciado do problema, a relação entre a quantidade de bolinha de gude de cada personagem e a quantidade total de bolinhas de gude do problema. A dupla revela nesse momento mais uma característica do pensamento algébrico, “a capacidade de modelar e de entender o problema como uma relação de igualdade” (Almeida; Câmara, 2018, p. 557).

Continuando, ao mesmo tempo em que a dupla escolheu o valor para a incógnita, eles não estavam realizando uma escolha aleatória, mas intencional. Pelo que é indicado pela fala de Marta registrada no extrato da entrevista, ela nos aponta que compreendeu a quantidade de bolinhas que cada personagem deveria receber.

Assim, como a soma dessas quantidades, que corresponderia à quantidade de bolinhas de gude do problema. Ao responder o problema e encontrar a solução, a dupla mostrou que compreendeu o problema como um problema algébrico, a partir das relações estabelecidas, mesmo não conseguindo ainda representá-lo utilizando uma linguagem simbólica algébrica (Almeida, 2016).

Corroborando com o que foi realizado por Almeida (2016), os estudantes de

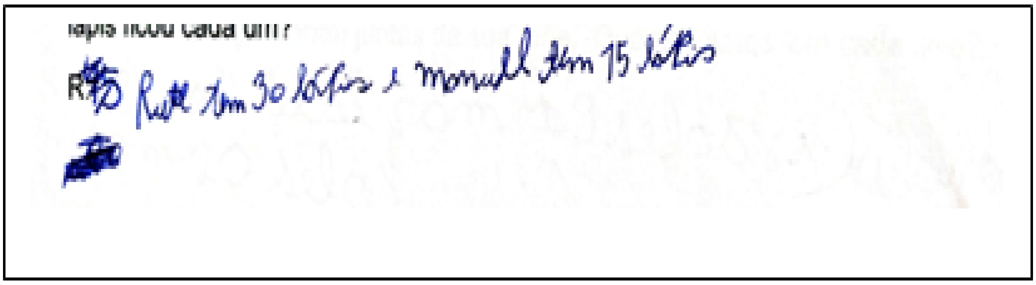
ambos os estudos, estabeleceram as relações presentes no enunciado, revelam que compreende o que significa cada parte presente em seus modelos para resolução do problema, reafirmando a “capacidade de construir significado” mesmo os estudantes ainda não conseguirem fazer o uso de símbolos algébricos, apenas registros de formas mais simples como a linguagem alfanumérica.

Portanto, nesse problema 2 a dupla DM consegue estabelecer relações apresentadas no problema. Os estudantes encontraram os valores desconhecidos, mesmo relacionando os valores aos personagens de forma equivocada. Quando afirma “Felipe: 20” e “João: 10”, na verdade seria Felipe: 10 e João: 20. Contudo, podemos dizer que a dupla resolveu o problema com êxito. Ao tentar encontrar os valores desconhecidos atribuindo valores, e fazer relações com as informações apresentadas, está usando a estratégia “atribuir valor”. Logo, de acordo com Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2018) os estudantes que adotaram essa estratégia revelam mobilizar características do pensamento algébrico como: estabelecer relações, modelar e construir significado. Assim, a dupla mobilizou as três características do pensamento algébrico como demonstrado anteriormente, porém as duas últimas características, a capacidade de modelar e de construir significado, são reveladas de uma forma muito incipiente.

A seguir temos o registro da resposta ao problema 3 realizado pela dupla DB, fazendo uso também da estratégia, atribuir valor (AV).

Problema 3: Rute e Manuel têm juntos um total de 45 lápis de cor para serem divididos entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manuel. Com quantos lápis ficou cada um?

Figura 10 – Resposta dada ao problema 3 utilizando a estratégia AV



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Ao observarmos a resposta dada ao problema pela dupla DB, composta pelos estudantes Manuela e Carlos, percebemos que eles iniciam registrando a quantidade 45 como resposta. Podemos inferir que a dupla estava considerando uma única resposta para o problema, por isso colocou a quantidade 45 como solução no primeiro momento. Acreditamos que ao perceber que havia algo que não estava de acordo com o que estava proposto no enunciado, a dupla resolve riscar essa resposta e desconsiderá-la. Logo eles dão uma nova resposta, agora de forma direta, escrita em linguagem natural, afirmando que Rute tem 30 lápis e Manuel tem 15 lápis. A dupla responde de forma correta o problema levando em consideração a relação apresentada no enunciado, ou seja, que “Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manoel”. No entanto, não deixa nenhum outro registro no papel para mostrar-nos como foi pensado para se chegar a esse resultado.

Então, buscando entender como a dupla conseguiu solucionar o problema corretamente, fizemos a análise da entrevista realizada e transcrita no extrato a seguir.

> **P:** Lê o problema novamente.
> **Carlos**: Rute e Manuel têm juntos um total de 45 lápis de cor para ser divido entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manuel. Com quantos lápis ficou cada um?
> **Carlos**: Significa que se ela ficasse com 45 ele ia ficar com 0, e ela com os 45. Então ela pode ter 30, Rute ter 30, e Manuel ter 15 lápis. Ver juntando num vai ter os 45 lápis. Tipo que nem eu falei é o mesmo que fazer uma decomposição, 30 mais 10 mais 5. Aí 30 mais 10 é 40 mais 5 dá 45. Aí Rute tem 30 lápis e Manuel 15. Pronto.
> **P:** É isso?
> **Carlos:** É, só.

Ao fazer a análise da fala do estudante Carlos, percebemos que ao observar com mais calma o problema, ele logo encontra a solução correta. No primeiro momento ele pensa na quantidade 45 lápis como sendo de um dos personagens do problema, mas ao fazer isso ele percebeu que o outro personagem não ficaria com nenhum lápis, como ele mesmo indica em sua fala "se ela ficasse com 45, ele ia ficar com 0". No entanto, de acordo com o que foi apresentado pelo problema, ambos os personagens possuíam lápis. Assim o estudante refaz a resposta, respondendo corretamente.

Carlos considera a quantidade total de lápis do problema como sendo 45 lápis. Isso pode ser constatado no extrato quando ele fala que Rute tem 30 lápis e Manoel 15. E reforça o que acreditamos que ele está considerando o 45, como sendo a quantidade total também quando ele afirma que "juntando num vai ter os 45 lápis". Ou seja, ao somar os dois valores, que ele está considerando como sendo das incógnitas a quantidade de 30 lápis da personagem Rute, e 15 lápis de Manuel, corresponde ao total de 45 lápis.

Como o registro realizado no papel não foi suficiente para nos indicar qual estratégia de base a dupla fez uso para resolver o problema, foi necessário observar a fala trazido no extrato. Ao fazer essa análise da fala do estudante Carlos, ele deixa evidente que está considerando o valor total do problema, os 45 lápis. Isso está presente em sua fala "então ela pode ter 30, Rute ter 30, e Manuel ter 15 lápis. Ver juntando num vai ter os 45 lápis". Com essa mesma fala o estudante nos mostra que está estabelecendo a relação que está no enunciado do problema "Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manuel". Pois, como ele colocou Rute tem 30 lápis e Manoel 15 lápis, assim a quantidade de lápis de Rute corresponde ao dobro da quantidade de lápis de Manuel.

Continuando com nossa análise, quando Carlos se coloca dizendo que “é o mesmo que fazer uma decomposição, 30 mais 10 mais 5”, é possível inferirmos que ele está atribuindo a quantidade de 30 lápis a Rute e considera a relação do enunciado. A partir daí ele utiliza a operação inversa e encontra a quantidade de lápis de Manoel. Ou seja, ele atribui à quantidade 30 e encontra a metade dessa quantidade, no caso, os 15 lápis. Ao final, ele verifica se o valor total é correspondente ao que está presente no enunciado. Podemos confirmar essa afirmação a partir da fala registrada no extrato, “aí 30 mais 10 é 40 mais 5 dá 45”.

Ao atribuir valor a incógnita para encontrar os outros valores desconhecidos, estabelecendo as relações do enunciado do problema, o estudante está fazendo uso da estratégia “atribuir valor” (Oliveira; Câmara, 2011). Logo, de acordo com o que é colocado por Oliveira e Câmara (2011), a dupla DB utilizou essa estratégia para resolver o problema. Nesse momento ele nos revela ter compreendido a relação existente entre as informações contidas no enunciado. De acordo com Almeida (2016), os estudantes que adotam essa estratégia para resolver problemas de partilha revelam mobilizar características do pensamento algébrico.

A resposta dada pela dupla DB corrobora com o que é colocado por Almeida (2016) em relação à resposta dada pelo estudante Caio ao problema Q1b de seu estudo, em que ele estabelece as relações presentes nas informações do enunciado, as quantidades pertencentes a cada incógnita com o valor total do problema. O que ocorreu também com a dupla DB. Assim podemos afirmar que a dupla DB, mobiliza a característica central do pensamento algébrico, a capacidade de “estabelecer relações”.

Ao mesmo tempo em que o estudante estabelece as relações do enunciado, representa através de um modelo, que não foi registrado no papel, mas em sua fala. Carlos nos permite inferir que ele construiu um modelo mental, uma vez que ele relaciona as quantidades de lápis de cada personagem com o total de lápis do problema. Ele revela ter entendido “o problema como uma relação de igualdade entre as quantidades” (Almeida, 2016, p. 139), como pensado por Caio, ao responder à questão Q1b. Portanto, a dupla DB mobiliza mais uma característica do pensamento algébrico: a “capacidade de Modelar”.

A partir da sua fala registrada no extrato, o estudante Carlos nos revela ter compreendido o problema e o que significa as informações e respostas dadas ao problema. Isso porque o valor atribuído à incógnita não foi realizado de forma aleatória, revelando que ele compreendeu o problema (Almeida, 2016). Assim ele nos revela mobilizar outra característica do pensamento algébrico, a capacidade de “construir significado”.

Logo, a dupla DB respondeu corretamente o problema 3, fizeram uso da estratégia “atribuir valor” e como mostrado acima eles conseguiram mobilizar três das cinco características do pensamento algébrico: a capacidade de “estabelecer relações”, “modelar” e “construir significado”, demonstrando que mesmo os estudantes que ainda não tenham tido contato com a álgebra formal conseguem desenvolver essa forma de pensar.

Portanto, estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental conseguem mobilizar elementos caracterizadores do pensamento algébrico como foi mostrado nesse estudo, a partir da resolução dos problemas de partilha.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo identificar as estratégias mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico.

Diversas pesquisas como Silva, Saviole e Passos (2015), Santos e Moreira (2016), Silva e Saviole (2014), Oliveira e Paulo (2019) vem apontando para a importância do estudo da álgebra desde os anos iniciais. Contudo, estudos como os de Silva e Saviole (2012), Oliveira e Câmara (2011) e Silva, Saviole e Passos (2015) realizaram pesquisas e concluíram que estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental indicaram, a partir de suas respostas, que são capazes de mobilizar elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Por sua vez, os documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018), documento nacional, bem como o CPE (2019), documento estadual, orientam para o estudo da álgebra desde os anos iniciais do ensino fundamental.

Diante do que vem apontando as pesquisas e as orientações presentes nos documentos, o nosso estudo foi desenvolvido tomando como hipótese que os estudantes do 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental seriam capazes de mobilizar características do pensamento algébrico ao resolver problemas de partilha a partir da utilização de estratégias de resolução.

Para desenvolver nosso estudo e buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: quais estratégias são mobilizadas por estudantes do 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental ao resolverem problemas de partilha e suas relações com as características do pensamento algébrico? Com esse questionamento esperávamos que os estudantes de nossa pesquisa respondessem os problemas propostos e utilizando as estratégias de resolução e mobilizassem características do pensamento algébrico, uma vez que temos pesquisas indicando que estudantes desse nível de ensino apresentam condições de desenvolver aspectos do pensamento algébrico como é colocado por Silva e Saviole (2012) e temos os documentos orientando para o ensino de álgebra nesse nível de ensino.

Com o intuito de alcançar o objetivo de nosso estudo e responder nossa questão de pesquisa, realizamos a aplicação de teste contendo problemas de partilha com uma relação e a realização de uma entrevista clínica para tentar compreender melhor como os estudantes responderam os problemas.

Para a análise de dados tomamos como base as estratégias identificadas por Oliveira e Câmara (2011) que foram: “atribuir valor”, “dividir por 3”, “total como fonte”, “algébrica”, “calculo qualquer”, e para as respostas que não era possível identificar a estratégia mobilizada eles classificaram como “não identificada”. Fizemos apenas uma alteração na estratégia “dividir por 3”, que em nosso estudo ficou “dividir por 2”. Isso porque estávamos utilizando problemas com uma relação, nesse caso tínhamos duas incógnitas, diferentemente dos problemas com duas relações que apresentam três incógnitas, que foi a quantidade de relação presente nos problemas utilizados no estudo de Oliveira e Câmara (2011).

Também utilizamos em nossas análises as características do pensamento algébrico propostas por Almeida (2016) que são: a capacidade de “estabelecer relações”, a capacidade de “modelar”, a capacidade de “construir significado”, a capacidade de “generalizar” e a capacidade de “operar com o desconhecido”.

O nosso estudo apresenta significativa relevância no que diz respeito ao desenvolvimento dos estudantes em relação ao pensar algebricamente. A indicativa de quais estratégias os estudantes estão utilizando ao resolver problemas de partilha, a forma pela qual estão resolvendo, o rendimento que eles estão apresentando são dados importantes que possibilita o repensar em como vivenciar essa temática em sala de aula, e como planejar para o desenvolvimento de aulas que venham desenvolver esse tipo de pensamento.

Após a análise dos dados foi possível identificar de modo geral que os estudantes investigados adotaram as estratégias “dividir por 2” e “total como fonte” como sendo as mais utilizadas, apresentando um percentual de 50% e 25% de utilização, respectivamente. Tivemos também a estratégia “cálculo qualquer” com um percentual de 7,1%, que de acordo com Almeida (2016) essas estratégias revelam mobilizar elementos caracterizadores do pensamento aritmético. Mas como o mesmo autor bem coloca “o estudante pode mobilizar algumas das características dessa forma de pensar, quando se depara com outras situações como, por exemplo, as de generalização de padrões” (Almeida, 2016, p. 135).

Vimos que praticamente todas as estratégias mobilizadas pelos estudantes de nosso estudo não levam em conta as relações postas no problema, não mobilizando nenhuma característica do pensamento algébrico. Quando comparamos com os resultados das pesquisas de Silva, Saviole e Passos (2015) e Silva e Saviole (2012) que em suas pesquisas indicam que os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental revelam mobilizar elementos do pensamento algébrico e os documentos oficiais que indicam que é possível trabalhar a álgebra nos anos iniciais, identificamos algo bem diferente do que esperávamos encontrar. Precisamos destacar que os estudantes ficaram um tempo afastado da sala de aula no período da pandemia, apenas com aulas remotas, o que acabou por prejudicar o seu aprendizado.

Tanto as pesquisas quanto os documentos indicam a possibilidade de trabalhar com a álgebra nos anos iniciais, fomos produzir nossos dados com a expectativa de encontrar resultados com mais elementos do pensamento algébrico, o que não aconteceu. Os nossos resultados indicaram que os estudantes apresentam uma considerável dificuldade ao resolverem problemas de partilha.

Precisamos pensar na possibilidade de a pandemia ter afetado os estudantes. Como nossa pesquisa teve sua produção de dados após o período pandêmico, acreditamos que isso dificultou ainda mais o aprendizado dos estudantes. Uma vez que muitos desses estudantes não tiveram as condições necessárias para um estudo considerado adequado, que levasse o estudante a compreender os conteúdos que estavam sendo vivenciados. Por muitas vezes não ter um computador, um smartphone, tablete e internet para acompanhar as aulas remotas, além de não conseguir, muitas das vezes, discutir e tirar suas dúvidas seja com colegas ou mesmo com os professores. Quando tinham as atividades impressas não tinham as explicações e nem conseguiam tirar suas dúvidas ao resolver as atividades. Em casa, os pais muitas das vezes tinham dificuldade em relação ao conteúdo, e não conseguiriam ajudar seu filho tirando suas dúvidas. Foram aproximadamente dois anos afastados do ambiente escolar, acreditamos que esse fator pode ter influenciado no resultado de nosso estudo.

Outro elemento a ser pensado são as condições dos professores a trabalhar com a álgebra. Muitos professores ainda apresentam resistência em trabalhar alguns conteúdos de matemática em suas aulas, muitas vezes por trazerem junto consigo uma aversão lá da sua vida estudantil, outros por apresentar uma dificuldade em sua formação acadêmica, e isso torna um pouco difícil o trabalho com a álgebra. Ou até mesmo esse trabalho pode está sendo feito, mas realizado de uma forma que não leva o estudante a desenvolver o pensamento algébrico.

A partir dessas reflexões alguns questionamentos surgiram: O que pode ser feito para que estudantes dos anos iniciais consigam desenvolver o pensamento algébrico ao se depararem com os problemas de partilha? Como pensar a formação inicial e continuada para professores dos anos iniciais em relação à álgebra? Como elaborar e validar atividades de ensino – aprendizagem que possibilite o desenvolvimento do pensamento algébrico em relação aos problemas de partilhas para alunos dos anos iniciais?

Retomamos as análises e olhando para o rendimento, tivemos apenas dois problemas respondidos corretamente fazendo uso da estratégia “atribuir valor”. Ao analisar as respostas corretas identificamos que os estudantes conseguiram mobilizar três das cinco características do pensamento algébrico, a capacidade de: “estabelecer relações”, “modelar” e “construir significado”. De acordo com Almeida (2016) o estudante que adota a estratégia atribuir valor “revela a mobilização de três das cinco características que compõe o pensamento algébrico: a capacidade de estabelecer relação, a capacidade de modelar e a capacidades de construir significado” (Almeida, 2016, p.140).

De acordo com o que é trazido pelos documentos, orientando para o trabalho com os problemas de partilha no 5º ano do ensino fundamental, acreditávamos que teríamos um rendimento maior do que o que tivemos. Acreditávamos que teríamos um número bem maior de acertos, uma vez que os estudantes já haviam vivenciado o conteúdo em sala, como afirmado pelo professor da turma investigada.

Precisamos ressaltar que, para que o estudante consiga se apropriar e resolver problemas algébricos do tipo partilha, como é proposta a ser trabalhada em sala de aula, se faz necessário um trabalho efetivo realizado pelo professor. É necessário que o professor consiga propor atividades que proporcione o estudante a compreender efetivamente e vivenciar o pensamento algébrico.

Mesmo as pesquisas apontando para a importância da álgebra nos anos iniciais, e os documentos oficiais orientam para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais como vem indicado na BNCC (Brasil, 2018) para o trabalho com o pensamento algébrico desde o primeiro ano do ensino fundamental. Foi possível verificar que os estudantes de nosso estudo apresentaram grande dificuldade na resolução dos problemas algébricos do tipo partilha com uma relação, com um baixo rendimento. Fizeram uso de estratégia, em sua maioria, as que privilegiam o desenvolvimento do pensamento aritmético. Praticamente não utilizaram as estratégias que levam o estudante mobilizar características do pensamento algébrico.

Concluímos nossa pesquisa e podemos afirmar que conseguimos alcançar o objetivo de identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes do 5º ano do ensino fundamental e relacionar com as características do pensamento algébrico. Contudo, não tivemos o resultado que esperávamos que seria ter encontrado mais duplas que tivesse respondido corretamente os problemas de partilha, a partir da utilização de estratégias que levassem os estudantes a mobilizar características do pensamento algébrico, como era nossa hipótese.

Por fim acreditamos que a escola tem grande influência no desenvolvimento do estudante. A forma como as tarefas são elaboradas, com um determinado objetivo, proporciona o desenvolvimento das diversas capacidades do estudante entre elas o desenvolvimento do pensar, dentre eles está o pensar algebricamente. O caminho a ser traçado para a construção do pensamento algébrico deve ser valorizado, buscando fazer o estudante entender a importância desse pensar, e fazer com que ele aprenda a álgebra de forma significativa. Com isso deixamos como indagação para posteriores pesquisas: como elaborar uma sequência de atividades que levem os estudantes a pensar algebricamente?

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ALMEIDA, J. R. Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, vol. 8, n. 1, 2017.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: em busca de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016. *In:* **Anais do [...]**, São Paulo, 2016.

ALMEIDA, J. R. **Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita**: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino Fundamental. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha. **ZETETIKÉ**, vol. 26, n. 3, p. 546-568, 2018.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, vol. 21, n. 3, p. 167-187, 2019.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de educação Matemática**, vol. 6, n. 10, p. 34-60, 2017.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), vol. 10, n. 2, 2008.

ARCAVI, A. **El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos**: Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática. Caminha, Portugal, 2005.

BARBOSA, E.; BORRALHO, A. **Pensamento algébrico e explorações de padrões**. APM PT [online], 2009. Disponível em: apm.pt|files|_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf. Acesso em: 8 fev. 2022.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. vol. 36, n. 5, 2005.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. XIII Conferência Iberamericana de Educação Matemática, SBEM, Recife, 2011. *In:* **Anais do [...]**, Recife, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 5ª a 8ª Série. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CARDOSO, F. S.; SOARES, G. M.; GONÇALVES, B. da C. L. A percepção de professores sobre as consequências da pandemia da COVID 19 na Educação Básica. **Ensino Em Re-Vista**, vol. 29, 2022.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, vol. 32, n. 94, 2018.

DELVAL, J. **Introdução à pratica do método clínico**: descobrindo o pensamento das crianças/Juan Delval; trad. Fátima Murad.- Porto Alegre: Artmed, 2002.

FALCÃO, J. T. R. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. *In* SCHILLIEMAN, A. D. *et al.* (Orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras**, vol. 6, n. 17, p. 34-47, nov. 2016.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições,** vol. 4, n. 1, 1993.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – NCE – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003. *In:* **Anais do [...]**, Rio de Janeiro, 2003.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. *In*: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1999.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? *In* KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels**. Quadrante**, v. XVI, n. 1, 2007.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. *In*: ALSINA, C. *et al.* (Eds.). **ICME 8**: Selected Lectures. Seville: S. A. E. M. Thales, 1996.

KIERAN, C. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. *In*: STACEY, K. *et al*. (Eds). **The Future of teaching and learning of algebra**: The 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra**: Handbook of research on mathematics teaching and learning. National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, New York, 1992.

KUHN, M. C.; LIMA, E. Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **Revista de ensino de Ciências e Matemática**, vol. 12, n. 3, p. 1-23, 2021.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) - University of Nothingam, Nothingam, 1992.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Papirus: Campinas. 2005.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. **EPU-São Paulo**, n.2, p. 11-24, 1986.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **Bulletin AMQ**, vol. 39, n. 4, p.30-49. Québec, 1999.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo. **Pro-Posições**, vol. 3, n. 1, 1992.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática, SBEM, Recife, 2011. *In:* **Anais da [...]**, Recife, 2011.

OLIVEIRA, T. S. P.; LIMA, A. C. S.; SILVA, E. N. Estudo da álgebra: o desenvolvimento histórico da formalização simbólica. IV Seminário Cearense de

História da Matemática, online, 2020. *In:* **Anais do [...]**, vol. 7, n. 20, p. 347-356, 2020.

OLIVEIRA, V.; PAULO, R.M. Entendendo e discutindo as possibilidades do ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, vol. 21, n. 3, p. 75-95, 2019.

PEREIRA, A. S. *et al.* Metodologia da pesquisa científica [recurso eletrônico]. 1. Edição. Santa Maria, RS: UFSM, NTE, 2018. 1 e-book.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco**: Secretaria de Educação - Ensino Fundamental – SE, Recife, 2019.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares. Secretaria de Educação - SE: Recife, 2012.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco**: Matemática / Secretaria de Educação. - Recife: SE. 2008.

QUEIROZ, K. J. M.; LIMA, V. A. A. Método Clínico piagetiano nos estudos sobre psicologia moral: o uso dos dilemas. **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genética**. vol. 3, n. 5, p.110- 131, 2010.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **A global dialogue from multiple perspectives**. Berlin: Editora Springer, 2011.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon, 2009. *In:* **Anais do […]**, Lyon, 2009.

SANTOS JR., C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

SANTOS, C. C. S., MOREIRA, K. G. O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016. *In:* **Anais do [...]**¸São Paulo, 2016.

SANTOS, M. C.; ALMEIDA, J. A. Parâmetros balizadores da pesquisa em Educação Matemática no Brasil: pesquisa em educação algébrica. **Educação Matemática em Pesquisa**, vol. 17, n. 3, p. 541-555, 2015.

SCARPARO, A. L. S.; MARQUES, T. B. I. Método Clínico Piagetiano como ferramenta para investigar noções sobre alimentação saudável. **Artigos de tema livre**: Demetra, [s. v.], 2017.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, vol. 6, n. 1, 2012.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, vol. 3, n. 5, 2014.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D; PASSO, M. M. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Álgebra. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**. vol. 8, n. 3, 2015.

SILVA, R. M. **Pensamento Algébrico em Tarefas com Padrões**: uma investigação nos anos iniciais do ensino fundamental. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

APÊNDICE A – TESTE

TESTE

Escola: ____

Estudantes: ____

____

Data: ____/_____/_____

Ano: _________ Turma: ____________ Turno: ___________

“Resolva cada um dos problemas propostos”:

1) Paulo e Carlos têm juntos 36 carrinhos. Carlos tem o dobro da quantidade de carrinhos de Paulo. Quantos carrinhos tem cada um?

R:

2) Felipe e João têm juntos um total de 30 bolinhas de gude. Felipe tem metade da quantidade de bolinhas de gude de João. Quantas bolinhas de gude tem cada um?

R:

3) Rute e Manuel tem juntos um total de 45 lápis de cor para ser dividido entre os dois. Rute ficou com o dobro da quantidade de lápis de Manuel. Com quantos lápis ficou cada um?

R:

4) Clara e Manoela ganharam juntas de sua mãe 39 selos da Barbie para colecionar. Clara tem a metade da quantidade de selos de Manoela, referente aos selos que ganharam juntas de sua mãe. Quantos selos tem cada uma?

R:

APÊNDICE B – CARTA À GESTORA DA ESCOLA

Recife (PE), __ de _______ de 2022.

Prezado(a) Gestor(a)

Sou Wanuza Wiviane Pereira de Araújo, mestranda do Programa Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e estou realizando uma pesquisa intitulada **Características do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha com uma relação.**

Para isso, venho solicitar a sua permissão para ter acesso à Escola e para consultar os(as) estudantes sobre a disponibilidade de colaborar com a minha pesquisa, especialmente, para conceder entrevista clínica e me permitir observar e questionar sobre o processo de resolução de alguns problemas de partilha no momento de sua resolução.

Do meu lado, assumo o compromisso de não citar o nome da escola e dos(as) estudantes e de utilizar os dados coletados com fidedignidade e exclusivamente para fins acadêmicos. Caso concorde com meu pedido, nestes termos, solicita que assine esta carta, também assinada por mim e pelo professor orientador da pesquisa.

Agradeço, antecipadamente, pela valiosa colaboração e fico à disposição para outros esclarecimentos.

Atenciosamente

Ciente

___________________________	___________________________
Wanuza Wiviane Pereira de Araújo	Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida
(Mestranda)	(Orientador da Pesquisa)
E-mail: wanuza.wiviane@ufpe.br	SIAPE N.º 1982221
Fone (81) 9 9927 9099	

Concordo com a realização da Pesquisa

Assinatura: ____

Matrícula ou CPF N.º ____

Escola: ____

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos você a permitir a participação de sua criança como voluntário (a) da pesquisa **Características do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas de partilha com uma relação**, que está sob a responsabilidade do (a) pesquisador(a) Wanuza Wiviane Pereira de Araújo, endereço: Rua da Alegria, 460, centro - Passira, Pernambuco, Telefone (81) 99927-9099, e-mail: wanuza.wiviane@ufpe.br . Está sob a orientação do Profº. Dr. Jadilson Ramos de Almeida, Telefone: (81) 99639-0038, email: jadilson.almeida@ufrpe.br.

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com a responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concordar que o estudante pelo qual você é responsável possa participar da realização do estudo, pedimos que assinale na opção: declaro que li e concordo com o que está disposto no atual documento. Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

A pesquisa intitulada “**Características do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas de partilha com uma relação”**, está sendo desenvolvida com o objetivo de Identificar as características do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas de partilha com uma relação.

Nessa pesquisa, os estudantes em dupla, serão conduzidos a um ambiente tranquilo e reservado, como a biblioteca da escola para responderem a um teste contendo alguns problemas de partilha. A própria pesquisadora irá realizar a aplicação do teste. No decorrer da realização da atividade a pesquisadora irá dialogar com os estudantes sobre a resolução. Após a entrega do teste e a explicação de como será conduzida a atividade, a pesquisadora ligará seu smartphone para registrar a fala dos estudantes no momento da resolução, pois, é de grande importância para a coleta e análise dos dados a fala dos estudantes, uma vez que nem tudo o que é pensado e falado está registrado no papel. Portanto, é de grande importância o registro da fala através de gravação.

Após o término da resolução do teste, a pesquisadora recolherá as folhas respondidas e encerrará a gravação, que servirá apenas como material para análise da pesquisa. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. A participação na pesquisa não apresenta risco nenhum para o estudante.

Os dados coletados nesta pesquisa ficarão armazenados em computador pessoal, sob a responsabilidade da pesquisadora no endereço, pelo período de mínimo 5 anos. Nada lhe será pago e nem será cobrado para que sua criança participe desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

As dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas com a pesquisadora responsável, via e-mail wanuza.wiviane@ufpe.br e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do contato telefônico (81) 99927-9099**.**

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br)**

APÊNDICE D – CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIA

Eu,____, CPF____, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com a pesquisadora responsável, concordo que ____________________________________ participe do estudo "**Características do pensamento algébrico mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas de partilha com uma relação"**, como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo(a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação de minha criança. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento).

( ) Sendo assim, declaro que li, entendi e concordo com o que está disposto no atual documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar e que eu posso interromper minha participação a qualquer momento. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para os propósitos acima descrito.