



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR NOS TECIDOS  
OCULARES DEVIDO À PRESENÇA DE IMPLANTES RETINIANOS  
ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS  
EM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS**

**GISELLE MARIA LOPES LEITE DA SILVA**

**Orientadora: Rita de Cássia Fernandes de Lima  
Co-orientador: Paulo Roberto Maciel Lyra**

**Dissertação submetida à Universidade Federal de Pernambuco para a obtenção do Grau  
de Mestre em Engenharia Mecânica**

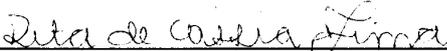
**Recife, março de 2004**

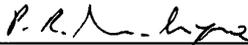
“ANÁLISE DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR NOS TECIDOS OCULARES  
DEVIDO À PRESENÇA DE IMPLANTES RETINIANOS ATRAVÉS DA  
UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS EM MALHAS NÃO-  
ESTRUTURADAS”.

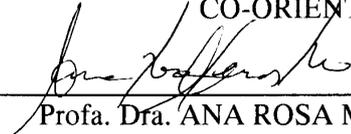
GISELLE MARIA LOPES LEITE DA SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

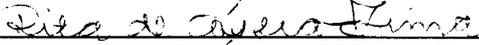
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MECÂNICA COMPUTACIONAL  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA/CTG/EEP/UFPE

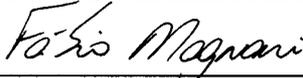
  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. RITA DE CÁSSIA FERNANDES DE LIMA  
ORIENTADORA/PRESIDENTE

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA  
CO-ORIENTADOR

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. ANA ROSA MENDES PRIMO  
VICE-COORDENADORA DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. RITA DE CÁSSIA FERNANDES DE LIMA (UFPE)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. FÁBIO SANTANA MAGNANI (UFPE)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. CARLOS ALBERTO BRAYNER DE OLIVEIRA LIRA (UFPE)

## DEDICATÓRIA

---

**Dedico esta dissertação a Deus,  
e a minha família.**

## AGRADECIMENTOS

---

Em primeiro lugar agradeço a Deus e ao Espírito Santo, pois sem Ele nada poderia ter feito;

À minha mãe, meu avô, tios e irmãos pelo amor, carinho e apoio que me deram todos estes anos;

À Professora Rita, pela grande amizade, apoio e compreensão que tem demonstrado por mim desde a iniciação científica, tanto nas horas de alegria como nas de dificuldades;

Ao Professor Paulo Lyra, pela co-orientação e profundo envolvimento neste trabalho;

Agradeço especialmente a Darlan Carvalho pelo interesse e envolvimento, e a Clarissa Lima por se disponibilizar a obter as imagens através do AutoCad;

A D. Eliane, pela atenção e disponibilidade com que sempre me tratou durante este período;

A Camila, Carla, Erwin, e demais amigos do DEMEC, pela amizade e incentivo;

À CAPES pela bolsa concedida para a realização deste trabalho;

Aos amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desta dissertação.

# ANÁLISE DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR NOS TECIDOS OCULARES DEVIDO À PRESENÇA DE IMPLANTES RETINIANOS ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS EM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

Giselle Maria Lopes Leite da Silva

## RESUMO

Algumas das principais causas de cegueira na população são as doenças degenerativas da retina, tais como retinose pigmentar (RP) e degeneração macular (AMD). Ambas provocam a degeneração das células fotorreceptoras tornando, assim, o sistema visual insensível à luz (Peachey & Chow, 1999). Um meio desenvolvido recentemente para restaurar o sistema visual envolve a aplicação de estímulos elétricos externos. Baseando-se neste princípio, estão sendo fabricados implantes ou próteses visuais que são pequenos *chips*, dotados de eletrodos capazes de estimular eletricamente áreas em torno do implante e, assim, ativar o sistema visual. Porém, o calor gerado a partir dos sensores eletrônicos pode danificar o tecido neural adjacente e até mesmo o próprio implante. Além disto, a elevação de temperatura pode tornar o ambiente propício à proliferação de bactérias podendo causar infecções (Schwiebert et al., 2002). A análise da transferência de calor no olho humano devida a implantes artificiais na retina é o objetivo do presente trabalho. Os danos térmicos causados no tecido pela exposição a altas temperaturas podem ser quantificados através da função dano. A análise da transferência de calor no olho é feita através de uma formulação do método dos volumes finitos anteriormente desenvolvida para tratar modelos bidimensionais (Guimarães, 2003; Lyra et al., 2002). Esta formulação utiliza volume de controle centrado no nó e foi implementada fazendo uso de uma estrutura de dados baseada nas arestas da malha. O modelo físico-matemático é aqui descrito detalhadamente em conjunto com a função dano. Faz-se uma breve descrição da formulação numérica bidimensional da implementação computacional, da modelagem geométrica, da geração da malha discreta e do pré-processamento dos dados adotados. Apresentam-se os resultados da análise térmica dos tecidos oculares, inicialmente na ausência, e em seguida, na presença de implantes do tipo subretinal e epirretinal. Posteriormente, esta formulação bidimensional foi estendida para lidar com modelos axissimétricos. Para validar a ferramenta, a mesma foi aplicada em problemas-modelo tridimensionais axissimétricos de transferência de calor, que apresentam solução analítica.

# **ANALYSIS OF THE BIOHEAT TRANSFER EQUATION IN THE OCULAR TISSUES DUE TO THE PRESENCE OF RETINAL IMPLANTS USING AN UNSTRUCTURED MESH FINITE VOLUME METHOD**

Giselle Maria Lopes Leite da Silva

## **ABSTRACT**

Retinitis pigmentosa (RP) and age-related macular degeneration (AMD) are some of the leading causes of blindness in the population. Both involve a degeneration of the photoreceptor cells, rendering the visual system insensitive to light (Peachey & Chow, 1999). An alternative approach towards function restoration of the visual system involves the application of external electrical stimuli. The development of retinal prosthesis lies in this concept. The retinal prosthesis or implants consist of small chips composed by electrodes that create an electrical current, which stimulate adjacent areas and so activate the visual system. However, the heat generated by the electronic sensors can damage the adjacent neuronal tissue and also the implant. Furthermore, the temperature increase can produce an environment suitable to proliferate bacteria that could lead to infection (Schwiebert et al., 2002). The analysis of heat transfer in human eyes is the objective of this work. The thermal injury in tissues produced by the exposure to high temperatures may be quantified by a damage function. The analysis of heat transfer in the eye is done by a finite volume formulation developed for two-dimensional models (Guimarães, 2003; Lyra et al., 2002). This formulation uses a vertex centered finite volume method implemented using an edge-based data structure. The physical-mathematical model and the damage function are presented in details. It's also presented a brief description of the adopted numerical two-dimensional formulation, the computational implementation, the geometrical model, the discrete mesh generation and the preprocessing of data. Results of the thermal analysis in ocular tissues are presented, initially without, and after with the presence of either a subretinal or an epiretinal implant. Later, this two-dimensional formulation was extended to deal with axisymmetric models. Heat transfer axisymmetric model problems, which the exact solutions are known, were used to validate the computational tool.

## SUMÁRIO

---

1.	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	MOTIVAÇÃO.....	1
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
1.3	OBJETIVOS.....	8
1.4	MÉTODO NUMÉRICO.....	8
1.5	ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO.....	9
2.	DESCRIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO.....	10
2.1	EQUAÇÃO DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	10
2.2	FUNÇÃO DANO.....	12
3.	ANÁLISE BIDIMENSIONAL DO PROBLEMA ANALISADO.....	16
3.1	INTRODUÇÃO.....	16
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	16
3.3	FORMULAÇÃO DOS VOLUMES FINITOS.....	17
3.4	IMPLEMENTAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	20
3.5	PROBLEMA ANALISADO.....	21
3.6	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	25
3.6.1	Análise numérica do campo de temperatura no olho sem a presença de implante.....	25
3.6.2	Análise numérica do campo de temperatura no olho com a presença de implante.....	27
3.6.3	Conclusões dos resultados obtidos.....	35
4.	DESCRIÇÃO DA FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA.....	36
4.1	INTRODUÇÃO.....	36
4.2	EQUAÇÃO GOVERNANTE E CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	36
4.3	FORMULAÇÃO DOS VOLUMES FINITOS PARA UM MODELO AXISSIMÉTRICO.....	37
4.3.1	Discretização dos Termos de Fontes Térmicas.....	44
4.3.2	Discretização das Condições de Contorno.....	45
4.3.3	Domínio com Múltiplos Materiais.....	45

4.4	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL.....	46
4.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	46
5.	VALIDAÇÃO DO PROGRAMA AXISSIMÉTRICO.....	48
5.1	INTRODUÇÃO.....	48
5.2	CILINDRO SÓLIDO SEM GERAÇÃO DE CALOR.....	48
5.3	CILINDRO SÓLIDO SEM GERAÇÃO DE CALOR E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CAUCHY.....	50
5.4	CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM UM CILINDRO SÓLIDO COM GERAÇÃO DE CALOR.....	51
5.5	CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM UM CILINDRO SÓLIDO COM GERAÇÃO DE CALOR E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CAUCHY.....	53
5.6	CONCLUSÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS.....	54
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	55
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$A$	Constante pré-exponencial de Henriques
$dA$	Área da secção transversal de um volume de controle
$A_I$	Área da secção transversal de um volume de controle associado ao nó $I$
$c$	Calor específico do tecido
$c_s$	Calor específico do sangue
$c_x$	Concentração de células
$C_{IJ_L}^{AX(j)}$	Coefficiente de peso referente ao domínio
$D_{IJ_L}^{AX(j)}$	Coefficiente de peso referente ao contorno
$\underline{E}$	Taxa de evaporação do filme lacrimal
$\Delta E_{at}$	Energia de ativação
$\Delta G$	Energia de Gibbs
$h$	Constante universal de Planck, $(6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s})$
$k$	Condutividade térmica
$k_B$	Constante pré-exponencial de Birngruber
$k_t$	Condutividade térmica do tecido
$\mathbf{K}$	Matriz diagonal de condutividade térmica
$\mathbf{M}$	Matriz diagonal de capacidade calorífica
$n_j$	Cossenos diretores da normal externa ao domínio
$N_A$	Número de Avogrado, $(6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})$
$q$	Fluxo de calor convectivo
$q_j$	Fluxo de calor convectivo na direção $x_j$
$\bar{q}_n$	Fluxo de calor prescrito
$q_{IJ_L}^{j(A)}$	Fluxo na aresta $IJ_L$ do domínio, nas direções $j$
$q_{IJ_L}^{j(S)}$	Fluxo na aresta $IJ_L$ do contorno, nas direções $j$
$Q$	Taxa volumétrica de geração de calor
$Q_m$	Taxa volumétrica de calor devido à geração de calor metabólico
$Q_p$	Taxa volumétrica de calor devido à perfusão sanguínea
$Q^P$	Fonte de calor que atua em um ponto

$Q^C$	Fonte de calor que atua sobre uma curva
$Q^R$	Fonte de calor que atua sobre uma região
$r$	Coordenada radial
$r_c$	Componente radial do centróide do volume de controle
$r_x$	Taxa de variação da concentração
$R$	Constante universal dos gases, $(8,31 J/mol.K)$
$\mathbf{R}$	Vetor de termos independentes
$S$	Linha do contorno de uma secção transversal de um volume de controle
$\Delta S$	Variação de entropia
$t$	Tempo
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$t^i$	Tempo inicial
$t^f$	Tempo final
$T$	Temperatura
$\bar{T}$	Temperatura prescrita
$\hat{T}$	Temperatura calculada numericamente
$\bar{T}^i$	Temperatura inicial
$T_a$	Temperatura do sangue arterial
$T_v$	Temperatura do sangue venoso
$T_\infty, T_{amb}$	Temperatura média do ambiente externo
$\mathbf{T}$	Vetor de temperaturas nodais
$\mathbf{T}$	Intervalo de tempo de integração
$x_j$	Variável espacial independente
$z$	Coordenada axial

### ***Símbolos Gregos***

$\alpha$	Coefficiente de transferência de calor
$\alpha_S$	Coefficiente de transferência de calor
$\tilde{\alpha}$	Coefficiente combinado (radiação, evaporação e convecção) de transferência de calor
$\alpha_c$	Coefficiente de transferência de calor por convecção
$\alpha_r$	Coefficiente de transferência de calor por radiação
$\Gamma_C$	Porção do contorno sujeita à condição de contorno de Cauchy ou Robin
$\Gamma_D$	Porção do contorno sujeita à condição de contorno de Dirichlet

$\Gamma_N$	Porção do contorno sujeita à condição de contorno de Neumann
$\pi$	Constante pi, [3,14159265...]
$\theta$	Coordenada angular
$\rho$	Massa específica do tecido
$\rho_s$	Massa específica do sangue
$\tau_{denat}$	Tempo de denaturação
$\omega$	Taxa volumétrica de perfusão sangüínea
$\Omega$	Volume de controle axissimétrico
$\Omega_D$	Função dano

### ***Subscritos***

$\underline{a}$	sangue arterial
$\underline{c}$	Centróide
$I$	referente ao nó $I$
$IJ_L$	aresta formada pelos nós $I$ e $J_L$
$j$	varia de um ao número de dimensões espaciais
$J_L$	referente ao nó $J_L$
$MP$	ponto médio
$r$	direção radial ( $r$ )
$s$	Sangue
$v$	sangue venoso
$z$	direção axial ( $z$ )

### ***Sobrescritos***

$A$	localizado no domínio
$j$	direção $j$
$n$	passo no tempo
$S$	localizado no contorno

## LISTA DE FIGURAS

---

<b>Figura 1.1</b> - Figura esquemática do olho e seus principais componentes. Em destaque, a camada neural da retina (Meyer, 2002).	3
<b>Figura 1.2</b> – Localização dos dois tipos de implante na retina: epirretinal e subretinal (Zrenner, 2002).	5
<b>Figura 1.3</b> - O sistema epirretinal composto por três unidades funcionais: (1 - à esquerda) sensor de imagem e codificador, (2 - centro) unidade de telemetria (transmissor externo e receptor implantável) e (3 - à direita) estimulador da retina (Meyer, 2002).	6
<b>Figura 1.4</b> - Secção transversal da estrutura interna do microfotodiodo. Cada MPDA mede 20 x 20 mm <sup>2</sup> e são separados entre si de 10 mm (Meyer, 2002).	7
<b>Figura 2.1</b> - Esquema da secção transversal do olho humano (Amara, 1995).	11
<b>Figura 3.1</b> - Volumes de controle 2-D interno e de contorno, respectivamente, e seus parâmetros geométricos.	19
<b>Figura 3.2</b> - Volume de controle em uma interface entre duas regiões e seus parâmetros geométricos.	19
<b>Figura 3.3</b> - Secção reta horizontal do olho humano (Netter & Dalley II, 1997)	22
<b>Figura 3.4</b> – (a) Domínio total extraído da Fig. (3.3) através de um programa de CAD; (b) Domínio a ser analisado.	25
<b>Figura 3.5</b> - Temperaturas ao longo do eixo pupilar sem fonte de calor, em regime estacionário.	26
<b>Figura 3.6</b> - Malha triangular não-estruturada (4814 elementos e 2506 nós).	26
<b>Figura 3.7</b> - Isofaixas de temperatura dentro do olho humano para a 2 <sup>a</sup> malha analisada.	27
<b>Figura 3.8</b> - Figura esquemática da localização dos dois tipos de implante: epirretinal e subretinal (MPD-Array) (Meyer, 2002).	27
<b>Figura 3.9</b> – Malha triangular não-estruturada com 2561 nós e 4917 elementos usada para o implante subretinal.	28
<b>Figura 3.10</b> – Detalhe da localização do implante subretinal.	28
<b>Figura 3.11</b> - Escolha de um eixo ao longo do olho que passa através do implante subretinal.	29
<b>Figura 3.12</b> – Perfil de temperaturas ao longo do eixo traçado na Fig. 3.11.	29

<b>Figura 3.13</b> – Isofaixas de temperaturas dentro do olho com implante subretinal.	30
<b>Figura 3.14</b> – Função dano calculado pelo modelo de Henriques para o implante subretinal.	31
<b>Figura 3.15</b> – Função dano calculado pelo modelo de Birngruber para o implante subretinal.	31
<b>Figura 3.16</b> - Malha triangular não-estruturada com 4946 elementos e 2574 nós.	32
<b>Figura 3.17</b> – Escolha de um eixo ao longo do olho que passa através do implante epirretinal.	32
<b>Figura 3.18</b> – Perfil de temperatura ao longo do eixo traçado na Fig. 3.17.	33
<b>Figura 3.19</b> – Isofaixas de temperaturas dentro do olho com implante epirretinal.	33
<b>Figura 3.20</b> – Função dano para o implante epirretinal (Modelo de Henriques).	34
<b>Figura 3.21</b> – Função dano para o implante epirretinal (Modelo de Birngruber).	34
<b>Figura 4.1</b> - Volume de controle em coordenadas cilíndricas.	38
<b>Figura 4.2</b> - Sólido axissimétrico com um volume de controle típico em destaque.	40
<b>Figura 4.3</b> - Sub-elemento quadrilateral que compõe a malha.	40
<b>Figura 4.4</b> - Secções transversais de volumes de controle interno e de contorno, respectivamente, e seus parâmetros geométricos.	41
<b>Figura 5.1</b> – Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.2.	48
<b>Figura 5.2</b> – (a) Perfil de temperatura no cilindro em $r = 0$ e $0 \leq z \leq 5,0m$ . (b) Perfil de temperatura no cilindro em $r = 3m$ e $0 \leq z \leq 5,0m$ .	49
<b>Figura 5.3</b> – Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.3.	50
<b>Figura 5.4</b> – (a) Distribuição de temperatura no cilindro em $r = 0$ e $0 \leq z \leq 5,0m$ . (b) Distribuição de temperatura no cilindro em $r = 6m$ e $0 \leq z \leq 5,0m$ .	51
<b>Figura 5.5</b> – Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.4.	52
<b>Figura 5.6</b> – Isolinhas de temperatura para: (a) 1ª malha; (b) 2ª malha; (c) 3ª malha.	52
<b>Figura 5.7</b> – Isofaixas de temperatura para a 3ª malha.	52
<b>Figura 5.8</b> - Distribuição de temperatura em $z = 0$ e $0 \leq r \leq 5,0$ .	53
<b>Figura 5.9</b> - Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.5.	53
<b>Figura 5.10</b> – Isolinhas de temperatura para: (a) 1ª malha; (b) 2ª malha; (c) 3ª malha.	54
<b>Figura 5.11</b> - Distribuição de temperatura no cilindro em $z = 0$ e $0 \leq r \leq 5,0$ .	54

# 1. INTRODUÇÃO

---

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Atualmente, um grande número de ferramentas numéricas e computacionais da engenharia tem sido utilizado para simular processos e fenômenos biológicos. Entre estas ferramentas estão simulações numéricas de procedimentos que envolvem transferência de calor, análise de sinais, usinagem e projetos de próteses. Um exemplo é a análise de diversos sistemas ou procedimentos que podem levar ao aquecimento do olho. Este aquecimento pode ser causado por um laser, em casos de cirurgias refrativas, ou por qualquer tipo de dispositivo implantado no olho, como nos casos de implantes oculares, além da hipertermia usada no tratamento de tumores oculares.

A Equação da Biotransferência de Calor (“*Bioheat Transfer Equation – BHTE*”) é uma equação de condução de calor, com termo específico de geração de calor devida à perfusão sanguínea. Ela pode ser utilizada para analisar o campo de temperaturas no olho humano durante cirurgias que utilizem o laser como instrumento cirúrgico ou durante qualquer procedimento hipertérmico. Aplicações recentes de implantes oculares na retina, chamadas de próteses de retina, têm sido utilizadas para tentar restaurar parcialmente a visão de pessoas que apresentem patologias que podem evoluir até a cegueira total.

A análise da transferência de calor no olho humano devida a implantes artificiais na retina é o objetivo deste trabalho.

Algumas das principais causas de cegueira na população são as doenças degenerativas da retina, como por exemplo, retinose pigmentar (RP) e degeneração macular (AMD). Ambas provocam a degeneração das células fotorreceptoras tornando, assim, o sistema visual insensível à luz (Peachey & Chow, 1999).

Infelizmente, não existem tratamentos terapêuticos eficazes contra estas doenças, embora alguns tratamentos experimentais estejam sendo desenvolvidos para retardarem ou evitarem o desenvolvimento da cegueira. Podemos citar exemplos de tratamentos que se mostram eficientes na prevenção da cegueira: a terapia a laser convencional ou fotodinâmica; identificação de mutações de genes específicos proporcionando uma terapia de genes; e terapia à base de drogas. Todos estes tratamentos são promissores para tratar pacientes na fase inicial do processo degenerativo sendo pouco valiosos para pacientes em estágio avançado da doença. Existem, também, alguns tratamentos que, teoricamente, podem reverter a perda visual: tratamento genético e transplantes de retina (Peachey & Chow, 1999; Margalit et al., 2002).

Um outro meio de restaurar o sistema visual envolve a aplicação de estímulos elétricos externos. Já está devidamente comprovada a eficiência de um estímulo elétrico externo em ativar artificialmente o sistema visual. Resultados experimentais indicam esta possibilidade de até restaurar as funções visuais de olhos cegos devidos à degeneração das células fotorreceptoras. As próteses visuais são baseadas neste princípio (Chow & Chow, 1997).

Os implantes ou próteses visuais são pequenos *chips*, dotados de eletrodos capazes de estimular eletricamente pequenas áreas, a fim de ativar o sistema visual. Portanto o carregamento adequado da potência elétrica é muito importante neste tipo de implante eletrônico, e a potência necessária depende dos parâmetros do estímulo elétrico e das propriedades eletroquímicas dos eletrodos.

Os diferentes componentes das próteses podem produzir calor excessivo e danificar qualquer tecido neural, se aquele não for mantido abaixo de certo valor. O calor gerado a partir dos sensores eletrônicos pode danificar o próprio implante. A alta temperatura produzida também pode levar à infecção, pois pode tornar o ambiente propício à proliferação de bactérias (Schwiebert et al., 2002).

O estímulo elétrico da retina através de injeção de corrente elétrica gera dissipação de calor. Além disso, pacientes com doenças degenerativas da retina têm dificuldade em dissipar este calor, pois a estrutura responsável pela dissipação de calor (“choriocapillaris”) está danificada pela doença (Schwiebert et al., 2002).

Pelos motivos expostos, a potência e temperatura devem ser cuidadosamente controladas para evitar danos na retina e em tecidos vizinhos. Um estudo deve ser realizado, a fim de não permitir que o calor gerado em procedimentos ou por implantes, provoque distúrbios no fluxo sanguíneo da região da retina/coróide/esclera. A dilatação dos vasos é um precursor de retinopatias em pacientes diabéticos. Além disso, distúrbios no fluxo sanguíneo são uma característica de muitas doenças oculares, como a retinopatia diabética, degeneração macular e glaucoma (Guan et al., 2003).

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### A RETINA

A retina é um tecido transparente que ocupa 2/3 da parte posterior do globo ocular. É uma membrana delicada que se situa junto ao epitélio pigmentado sem ligações mecânicas entre si, e é composta por estruturas sensíveis à luz e conexões neurais. Em uma pequena área de sua parte posterior, apresenta uma pequena depressão chamada *macula lútea*. É neste ponto que a luz deve chegar depois de atravessar todas as estruturas do olho (Duane & Jaeger, 1987).

Os neurônios que se distribuem na mácula se classificam em cones e bastonetes. Os cones se localizam na *fovea centralis* (centro da mácula) e são menos sensíveis à luz, porém distinguem os comprimentos de onda de diversas radiações e permitem a percepção de cores. Os bastonetes se organizam na periferia da mácula e são muito sensíveis à luz, porém só percebem contrastes de claro e escuro.

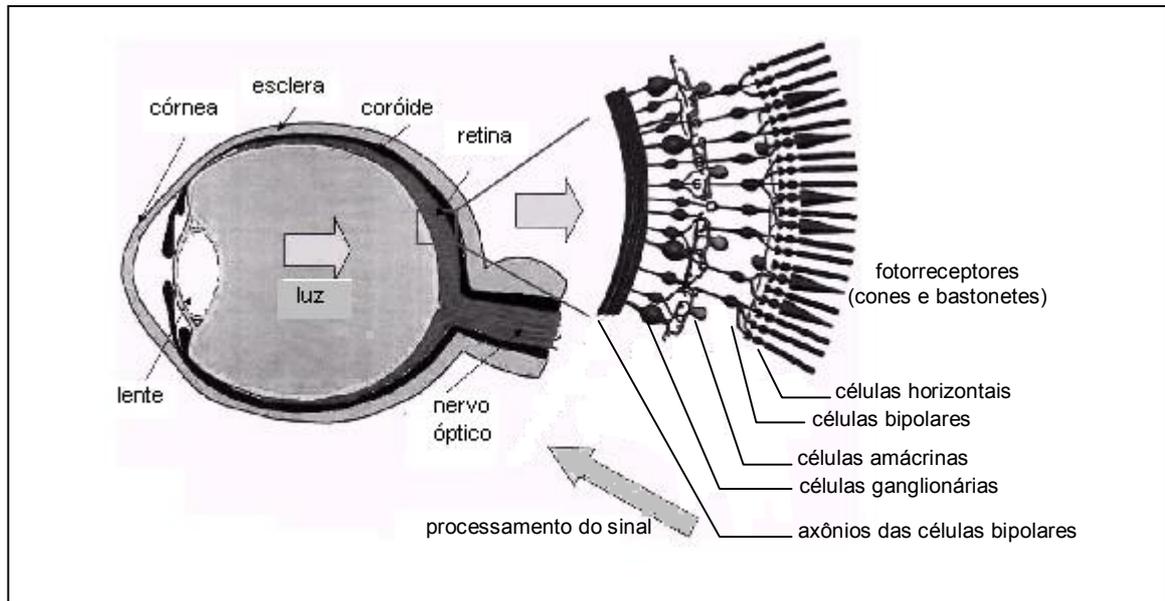
A retina é limitada interna e externamente por duas membranas. Entre as camadas interna e externa existem três tipos de neurônios: os fotorreceptores (cones e bastonetes), células bipolares e células ganglionárias.

A espessura da retina varia ao longo das diferentes regiões, sendo de 100  $\mu\text{m}$  na periferia e na mácula, 180  $\mu\text{m}$  no equador e 560  $\mu\text{m}$  próximo ao nervo óptico.

Além da mácula, outra região da retina dotada de terminações nervosas é a papila localizada no disco óptico. A fôvea mede 1,5 mm de diâmetro e está localizada a 3-4 mm do disco óptico, e possui metade da espessura usual da retina. Ela contém a maior concentração de fotorreceptores e nesta região os cones estão diretamente expostos à luz. Na papila todos os axônios das células ganglionárias se encontram para formar o nervo óptico.

A função essencial da retina é a transdução da luz em sinais elétricos. A retina converte a informação em sinais elétricos neurais, que o nervo óptico transporta para o córtex visual do cérebro. O córtex decodifica os sinais neurais em imagens perceptíveis (Meyer, 2002). Os fotorreceptores recebem o estímulo visual e fornecem um potencial elétrico para a camada neural bipolar adjacente. As células bipolares convertem os sinais elétricos em trens de pulsos elétricos mantendo a informação espacial-temporal. O processamento do sinal é feito em todas as camadas neurais: células horizontais, bipolares, amácrinas e ganglionárias (Meyer, 2002).

Na Fig. 1.1 podem ser vistos os principais componentes do olho humano e, em destaque, os componentes da camada neural.



**Figura 1.5** – Figura esquemática do olho e seus principais componentes. Em destaque, a camada neural da retina (Meyer, 2002).

### DOENÇAS NA RETINA

As doenças mais comuns que afetam a retina são: a retinose pigmentar (RP) e a degeneração macular (AMD). Elas são caracterizadas por uma degeneração gradual das células fotorreceptoras.

A RP é mais freqüente em adolescentes e jovens adultos, progride durante toda a vida do indivíduo e não há cura. Os principais sintomas são: cegueira noturna, perda da habilidade de distinguir cores, perda da visão periférica durante a adolescência e com o avanço da doença, em torno dos 30 anos de idade, a perda da visão é completa (Nadig, 1999). Através dos anos muitos tratamentos foram testados, contudo, sem benefícios comprovados: minerais, vasodilatadores, cortisona, dimetil sulfóxido, ozônio e transplantes. O tratamento com vitamina A foi comprovadamente eficaz no retardamento dos tipos mais comuns de RP (Nadig, 1999). A RP é a principal causa de cegueira hereditária e atinge cerca de um entre 3500 nascimentos (Margalit et al., 2002).

Outros exemplos de retinopatias são a degeneração hereditária da retina e a degeneração da mácula em idade avançada (AMD). Nestes casos existem poucas maneiras de prevenir o desenvolvimento da cegueira. A AMD é a causa mais comum de perda de visão entre adultos maiores de 65 anos nos países ocidentais (Margalit et al., 2002). O principal problema deste tipo de doença é a perda dos fotorreceptores ou de suas funções, porém o caminho do processamento do sinal na retina permanece intacto (Schubert et al., 1999).

Terapia a laser convencional ou fotodinâmica são dois métodos que podem ser efetivos no tratamento da degeneração macular. A terapia genética (identificação de mutações de genes específicos) e o tratamento com drogas são dois exemplos de tratamentos experimentais para prevenir o desenvolvimento da cegueira causada por doenças da retina (Peachey & Chow, 1999; Margalit et al., 2002). Existem grupos que estão pesquisando a possibilidade do transplante de células da retina, que podem ser as células neurais, o pigmento epitelial da retina ou uma combinação dos dois (Nadig, 1999; Peachey & Chow, 1999).

Outro possível tratamento utiliza implantes de retina. Apesar de ainda estarem em fase experimental, inclusive em animais, para que seu funcionamento e a interação térmica/elétrica com os tecidos sejam melhor compreendidos, a sua implantação em seres humanos já está autorizada nos Estados Unidos.

As próteses visuais são baseadas no fato de que estímulos elétricos em uma pequena área do tecido neural no caminho óptico podem criar uma percepção à luz, comparável à criada pelo estímulo a luz dos fotorreceptores naturais. As próteses visuais podem ser: corticais, ou seja, implantadas no córtex cerebral; retiniais, implantadas diretamente na retina; e as próteses do nervo óptico, que são implantadas no nervo óptico.

### EVOLUÇÃO DOS IMPLANTES

Em 1956, Tassiker implantou uma pequena célula de selênio, sensível à luz, atrás da retina de um paciente cego e a capacidade de percepção da luz do paciente foi restaurada temporariamente. Outras tentativas de restaurar a visão foram feitas acoplando eletrodos à superfície do córtex visual de pacientes cegos, porém não foi possível obter imagens nítidas (Zrenner, 2002). Um grupo belga implantou eletrodos em volta do nervo óptico de um paciente cego. O paciente foi capaz de localizar pontos brilhantes de luz, mas sem muita nitidez (Zrenner, 2002).

Nos anos 90, muitos pesquisadores aplicaram seus esforços em desenvolver uma prótese que pudesse ser implantada diretamente na retina. Um implante de retina requer a criação de uma complicada subminiatura de arranjos ordenados de eletrodos e circuitos elétricos feitos de materiais que devem ser estáveis e relativamente inertes, para que o seu impacto no tecido remanescente seja mínimo (Zrenner, 2002).

Implantes de retina estão em desenvolvimento nos Estados Unidos, Alemanha e Japão. Atualmente, estão sendo desenvolvidos dois tipos de implantes: epirretinal e subretinal (Margalit et al., 2002).

Como pode ser visto na Fig. 1.2, no tipo epirretinal, o mecanismo é implantado na cavidade vítrea e fixado na superfície interna da retina. Desta forma, o estímulo elétrico encontra primeiro a camada interna. No tipo subretinal, o implante é feito no espaço entre os neurosensores da retina e o pigmento epitelial da retina. Sendo assim o estímulo elétrico encontra primeiro a camada externa da retina.

Estes implantes possuem a vantagem de utilizar a fisiologia óptica e o caminho visual ainda existentes. Além disso, a cavidade vítrea pode ser utilizada como sumidouro de calor, e comparado com qualquer implante no córtex, apresenta menor risco de mortalidade e morbidade devidas à cirurgia. Porém, eles têm seu uso limitado a patologias da camada externa da retina. Existem dificuldades em fixar o implante na retina (principalmente o tipo epirretinal), e não se sabe como as propriedades da luz serão decodificadas durante o estímulo de várias células simultaneamente.

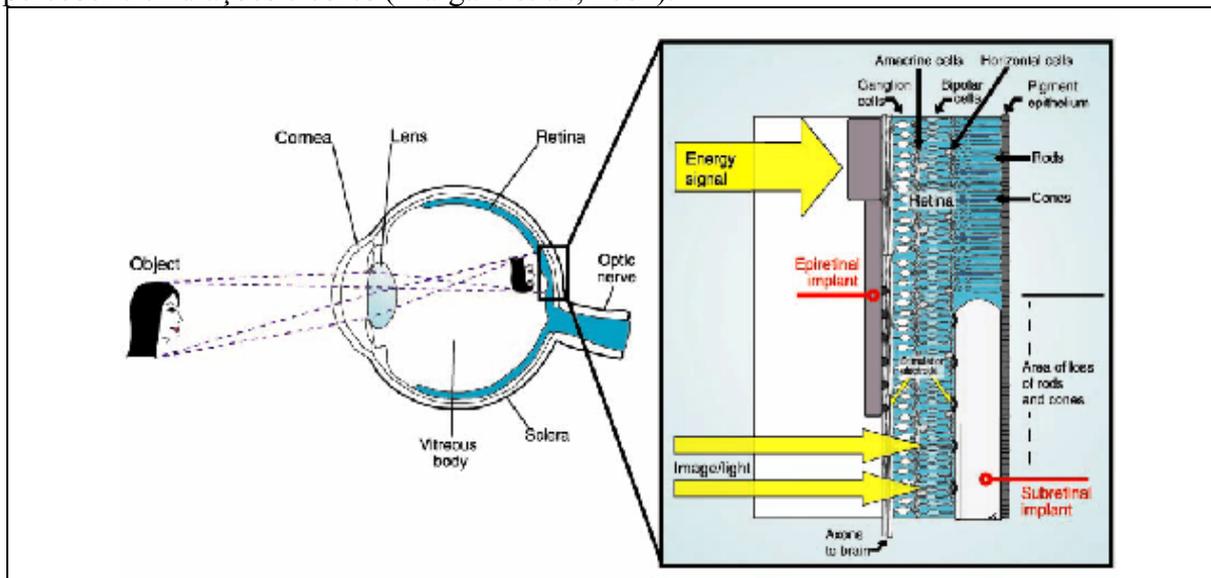
É importante ressaltar que os implantes epirretinais e subretinais substituem funções fisiológicas diferentes. O implante subretinal substitui os fotorreceptores degenerados enquanto o epirretinal estimula diretamente as células ganglionárias.

### TIPOS DE PRÓTESES DE RETINA

#### a) Próteses Epirretinais

Em 1999, um estudo foi realizado para testar um estímulo elétrico na superfície da retina em nove pacientes cegos por RP e AMD. Os pacientes foram capazes de identificar letras e formatos de caixas durante um pequeno período de estímulo elétrico e quando o

estímulo foi encerrado não houve a persistência da imagem. Eles também foram capazes de perceber tremulações e cores (Margalit et al., 2002).



**Figura 1.6** - Localização dos dois tipos de implante na retina: epirretinal e subretinal (Zrenner, 2002)

A prótese artificial consiste em um *chip* composto de sensores que estimulam eletricamente a superfície da retina. Estes sinais elétricos são convertidos em sinais químicos pelos gânglios e outras estruturas adjacentes e enviados para o cérebro através do nervo óptico (Meyer, 2002).

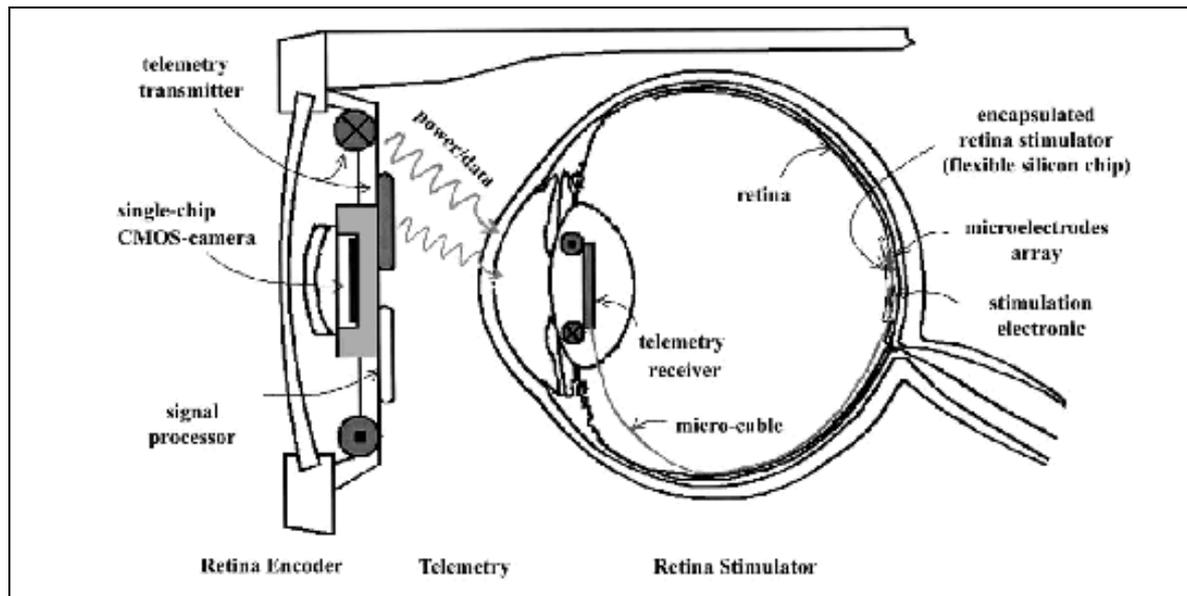
Como já foi dito, o implante epirretinal estimula diretamente as células ganglionárias. Como o implante não está localizado no caminho natural do processamento de dados, os sinais de estímulos da luz devem ser sintetizados. Portanto, este tipo de implante requer um codificador para mapear padrões visuais e transformá-los em estímulos elétricos (Meyer, 2002).

Este sistema é composto por três unidades funcionais principais: um codificador, uma unidade de telemetria para transmissão de dados (transmissor externo e receptor implantável) e um implante estimulador (Fig. 1.3). O codificador, uma espécie de mini-câmera localizada externamente, captura as imagens e transfere as informações visuais e potência para os componentes intraoculares por meio de ondas de radio-freqüência (telemetria). Este *chip* receptor irá decodificar os sinais recebidos em sinais elétricos. Um fino cabo de poliamida contendo condutores de platina conecta o *chip* receptor ao *chip* estimulador. (Meyer, 2002; Humayun et al., 2003).

Como a maioria dos elementos eletrônicos é mantida fora da superfície da retina, o fluido da cavidade vítrea ajuda na dissipação do calor gerado por estes elementos. A captura de imagens por um fotosensor extraocular permite um melhor controle dos sinais de imagem e um menor número de elementos implantados dentro do olho (Margalit et al., 2002).

As principais vantagens do implante epirretinal são:

- a maior parte do aparato eletrônico não se encontra na superfície da retina. A localização na cavidade vítrea ajuda bastante na dissipação do calor gerado;
- não utiliza a rede neural remanescente da retina, com isto, ele pode ser utilizado em estágios avançados de degeneração (Margalit et al., 2002; Schwiebert et al., 2002; Zrenner, 2002).



**Figura 1.7** – O sistema epirretinal composto por três unidades funcionais: (1 - à esquerda) sensor de imagem e codificador, (2 - centro) unidade de telemetria (transmissor externo e receptor implantável) e (3 - à direita) estimulador da retina (Meyer, 2002).

As principais desvantagens são:

- dificuldade em fixar o implante na retina. Alguns métodos mais comuns para fixar o implante são o uso de bioadesivos, ímãs ou através de aderências da retina (espécie de tecido novo que une órgãos internos) (Margalit et al., 2002; Schwiebert et al., 2002; Zrenner, 2002).
- distância para as células alvo. Teoricamente, quanto maior a distância entre a célula e o eletrodo, maior a corrente necessária para o estímulo elétrico (Margalit et al., 2002; Schwiebert et al., 2002; Zrenner, 2002).

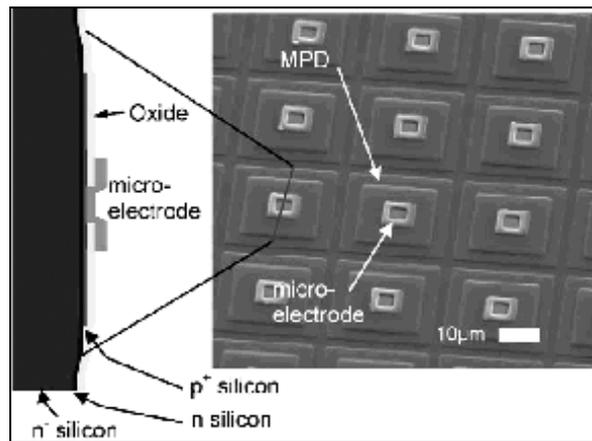
#### b) Próteses Subretiniais

O implante deste tipo fica localizado sob a superfície da retina, entre o pigmento epitelial e a camada da retina que contém as células fotorreceptoras (Schwiebert et al., 2002; Zrenner, 2002). O espaço subretinal é uma boa localização para estimular as células bipolares por causa da proximidade física com a camada interna (Margalit et al., 2002).

O implante subretinal envolve o estímulo elétrico da camada interna da retina a partir do espaço subretinal por meio do implante de um arranjo de microfotodiodos de silicônio (MPDA ou MPA), substituindo, assim, os fotorreceptores degenerados.

Uma carga elétrica é gerada em cada célula de fotodiodo, em resposta ao estímulo de luz, o qual é transferido para o eletrodo adjacente que estimula as células bipolares (Chow et al., 2002; Meyer, 2002).

A Fig. 1.4 mostra a secção transversal de um microfotodiodo. Um arranjo de microfotodiodos (MPDA) é fabricado sobre uma pastilha de silício, onde são montadas as estruturas eletricamente ativas e posteriormente é aplicada uma camada apassivadora de óxido de silício a fim de tornar o *chip* quimicamente inerte (Hämmerle et al., 2002). Os eletrodos podem ser feitos de ouro ou nitreto de titânio (Zrenner, 2002).



**Figura 1.8** - Seção transversal da estrutura interna do microfotodiodo. Cada MPDA mede  $20 \times 20 \mu\text{m}^2$  e são separados entre si de  $10 \mu\text{m}$  (Meyer, 2002).

O *chip* tem um diâmetro que varia de 1 a 3 mm e sua espessura, de 30 a  $70 \mu\text{m}$ . Estão sendo desenvolvidos protótipos de diversos tamanhos:  $20 \times 20 \mu\text{m}^2$ ;  $100 \times 100 \mu\text{m}^2$ ;  $200 \times 200 \mu\text{m}^2$ . O MPDA não possui conexões externas e é ativado apenas pela luz incidente (Peachey & Chow, 1999; Chow et al., 2002; Meyer, 2002). Tipicamente, a eficiência de conversão é de 0,35-0,45 A/W (Hämmerle et al., 2002).

O implante trabalha do seguinte modo: a luz passa através das camadas internas da retina que realiza um pré-processamento e amplificação da imagem. Na parte posterior da retina, os fotorreceptores (cones e bastonetes) são excitados pela luz incidente. O caminho dos sinais elétricos é oposto ao da luz incidente (Schubert et al., 1999).

As células solares ou fotovoltaicas modernas são ineficientes comparadas com os fotorreceptores naturais. A corrente gerada por um microfotodiodo não é suficiente para estimular os neurônios adjacentes. É preciso uma fonte externa de energia para que a luz disponível no ambiente seja suficiente para gerar a corrente necessária para estimular os neurônios. Esta fonte de energia pode ser devida à radiação próxima do infravermelho. Outra solução parcial para o problema é minimizar a área da superfície de estímulo do eletrodo (Margalit et al., 2002; Zrenner, 2002).

As formas de se recarregar este tipo de implante ainda não estão totalmente definidas, nem são eficazes e práticas. Há referências sobre carregamento solar, via campo magnético, ou fontes de laser que atuem no infravermelho (Margalit et al., 2002; Zrenner, 2002).

As principais vantagens do implante subretinal são:

- facilidade em fixar o implante no espaço subretinal devido às forças de aderência entre os sensores da retina e o pigmento epitelial;
- não requerer uma câmera ou um processador de imagem externo (Margalit et al., 2002; Schwiebert et al., 2002; Zrenner, 2002).

As principais desvantagens são:

- praticamente não é possível o controle externo do processamento da informação visual;
- pela ausência de um aparato externo não é possível um fornecimento de energia constante, sendo necessário um carregamento periódico.

### 1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como principal objetivo analisar a transferência de calor no olho humano devido à presença de implantes de retina. Esta análise será feita através de uma simulação numérica onde será utilizado um modelo bidimensional com o uso do método dos volumes finitos em uma malha não-estruturada, com uma estrutura de dados por arestas.

Uma vez calculadas as temperaturas, será calculada também a função dano, com o objetivo de se quantificar o dano térmico em diversos pontos dos tecidos oculares e que pode ser ocasionado pela potência elétrica dissipada pelos referidos implantes.

Posteriormente, esta formulação desenvolvida para tratar modelos bidimensionais é estendida para lidar com modelos axissimétricos a fim de se tentar obter resultados mais próximos a uma simulação tridimensional.

### 1.4 MÉTODO NUMÉRICO

Nos últimos anos, houve um aumento no número de pesquisadores que trabalham com malhas não-estruturadas, por permitir resolver problemas de geometria complexa, na simulação de vários problemas científicos e da engenharia. Os métodos mais utilizados nas aplicações numéricas com malhas não-estruturadas são o método dos elementos finitos (MEF) (Zienkiewicz & Morgan, 1983) e o método dos volumes finitos (MVF) (Barth, 1992).

O uso de malhas não-estruturadas sempre esteve associado ao método dos elementos finitos (MEF), geralmente empregando malhas triangulares. Nas duas últimas décadas, um grande esforço de pesquisa está sendo dedicado ao desenvolvimento de métodos em volumes finitos (MVF) usando malhas não-estruturadas em problemas da dinâmica dos fluidos (Baliga & Patankar, 1983; Maliska, 1995). O método dos volumes finitos é particularmente atraente na solução de equações de conservação, sendo bastante flexível quando da implementação adequada à utilização de malhas não-estruturadas, pois garante conservação discreta local e global, permitindo ainda tratar problemas de geometrias complexas e a utilização de técnicas de adaptação de malhas (Barth, 1992; Maliska, 1995; Lyra et al., 2002).

Os volumes de controle podem ser criados de inúmeras maneiras, dentre elas os mais usados são obtidos pelo método das medianas (*median dual*) ou a partir da triangulação de Delaunay (Maliska, 1995). O método dos volumes finitos pode ser centrado no nó (ou vértice), ou seja, as variáveis do problema são definidas para os nós da malha. O MVF também pode ser centrado no elemento (ou célula), neste caso, as incógnitas são definidas dentro do elemento, em geral, no centróide do elemento. Cada uma das opções possui suas vantagens e desvantagens, porém as formulações centradas nos nós requerem menor memória e menos cálculos quando estendidas às malhas tetraédricas tridimensionais, e possuem também uma forte semelhança com uma formulação em elementos finitos por arestas quando elementos triangulares (tetraedros) lineares são usados (Barth, 1992; Peraire et al., 1993 & Sorensen, 2001).

O uso de malhas não-estruturadas requer o armazenamento de informações topológicas da malha (conectividades), aumentando assim, o uso da memória do computador e o endereçamento indireto para recuperar informação local requerida durante a análise via MVF. Visando reduzir um pouco o custo adicional em termos de tempo de CPU e a memória requerida, uma estrutura de dados baseada nas arestas é adotada.

No presente trabalho, é utilizada uma formulação de volumes finitos centrada no vértice (ou nó), também chamada de *vertex centered* (Sorensen, 2001). Utilizam-se malhas não-estruturadas com elementos triangulares. Esta formulação é implementada usando uma estrutura de dados por arestas. Os volumes de controle são formados pelo método das medianas. O método consiste em ligar os centróides dos triângulos com os pontos médios dos lados destes triângulos a fim de formar o volume de controle em torno de um nó (Maliska, 1995).

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho de dissertação está dividido em capítulos para seu melhor entendimento. No Capítulo 2 é feita a descrição do modelo físico-matemático utilizado, apresentando a Equação da Biotransferência de Calor e suas características de aplicação. Neste capítulo também se faz uma breve explanação sobre a função dano, e sobre alguns de seus modelos, que será utilizada para quantificar o dano causado pela elevação da temperatura nos tecidos analisados.

No Capítulo 3 é feita a análise da transferência de calor no olho através de um modelo numérico bidimensional discretizado via o método dos volumes finitos. A formulação numérica bidimensional é brevemente apresentada juntamente com uma descrição da implementação computacional, da modelagem geométrica, da geração da malha discreta e do pré-processamento dos dados adotados. O problema da distribuição de temperatura no interior do olho humano é descrito apresentando todas as informações necessárias (propriedades termofísicas, condições de contorno, descrição da malha utilizada, etc.) para se fazer uma simulação o mais preciso possível. Apresentam-se comparações com um modelo axissimétrico em elementos finitos, no qual não existe a presença de implantes. A seguir, o modelo bidimensional é operado para análise térmica dos tecidos oculares na presença de implantes retinianos epirretinal e subretinal.

No Capítulo 4, é feito o desenvolvimento do modelo numérico axissimétrico discretizado via o método dos volumes finitos, em malhas não-estruturadas utilizando-se estrutura de dados por arestas. Também são brevemente apresentadas as discretizações das condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Cauchy), dos termos de carregamento, bem como a consideração de domínios com múltiplos materiais e a discretização temporal efetuada por meio de diferenças finitas. Além de apresentar um algoritmo que descreve o programa computacional desenvolvido com o método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas.

No Capítulo 5, apresenta-se a validação da ferramenta desenvolvida no Capítulo 4, através de problemas tridimensionais axissimétricos de transferência de calor obtidos na literatura, para os quais são conhecidas suas soluções analíticas ou numéricas.

O Capítulo 6 traz as conclusões obtidas além de sugestões para trabalhos futuros.

Por fim, apresentam-se as referências bibliográficas.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

---

### 2.1 EQUAÇÃO DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR

A equação da biotransferência de calor (BHTE - “*Bioheat Transfer Equation*”) é uma equação de condução de calor, com um termo específico de geração de calor devida à perfusão sanguínea,  $Q_p$ , e é mostrada na equação abaixo.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q \quad (2.1)$$

onde:

- $k_t$  = condutividade térmica do tecido [ $W/m^\circ C$ ];
- $\rho$  = massa específica do tecido [ $kg/m^3$ ];
- $c$  = calor específico do tecido [ $J/kg^\circ C$ ];
- $T$  = temperatura [ $^\circ C$ ];
- $t$  = tempo [ $s$ ];
- $Q_p$  = fonte de calor devido à perfusão sanguínea [ $W/m^3$ ];
- $Q_m$  = fonte de calor devido à geração de calor metabólico [ $W/m^3$ ];
- $Q$  = fonte externa de calor sobre o domínio [ $W/m^3$ ].

O termo de fonte  $Q$  pode ser devido a qualquer meio de aquecimento, como sementes ferromagnéticas e radiação eletromagnética, incluindo radiofrequência, microondas, ultra-som e laser. Pode também ser devido à potência elétrica gerada pelos implantes de retina descritos no Capítulo 1. O termo de geração de calor metabólico é desprezado, pois, geralmente, este é muito menor que o calor externo depositado (Stuesson & Andersson-Engels, 1995).

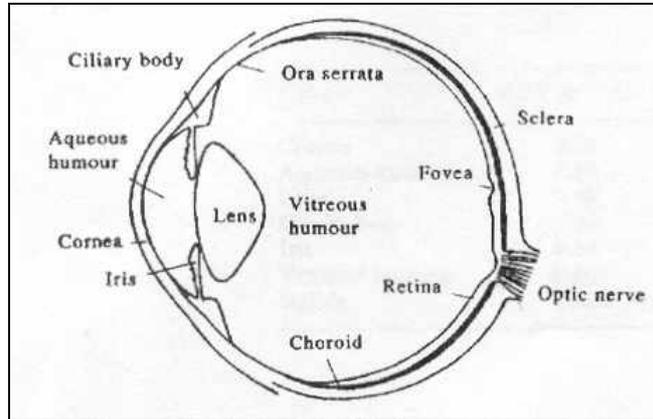
O processo físico a ser aqui analisado é governado pela Equação (2.1). Esta equação, apresentada inicialmente por Harry H. Pennes, foi a primeira relação quantitativa que descreveu a transferência de calor em tecidos humanos e incluiu os efeitos do fluxo sanguíneo na temperatura do tecido em uma base contínua, considerando assim, a representação da distribuição temporal e espacial da temperatura em sistemas vivos (Charny, 1992).

A referida equação foi obtida a partir do balanço total de energia considerando-se o armazenamento térmico, a taxa de geração da energia interna, a condução de calor, a convecção e a retirada de calor devido à perfusão sanguínea. Foram desprezados efeitos químicos e físicos. O campo de temperaturas é obtido para um meio biológico homogêneo, sólido e linear, com propriedades térmicas isotrópicas. O balanço de energia assume que o fluxo sanguíneo dentro do tecido é não-direcional para o nível capilar, isto é, os capilares são orientados com respeito às suas conexões arteriolar e venular. Assume-se, também, que a troca de calor convectiva ocorre apenas no sistema capilar (Bowman, 1985).

A Figura 2.1 representa uma seção transversal do olho. Para a análise a ser efetuada, é possível se fazer algumas simplificações de acordo com a geometria e a estrutura do olho. As propriedades termofísicas da íris e do corpo ciliar são idênticas às do humor aquoso, por isso eles serão considerados como uma única região. A fóvea é anatomicamente diferente da retina, mas no presente estudo será considerado que a mesma constitui uma parte da retina possuindo, portanto, as mesmas propriedades termofísicas (Amara, 1995). As demais

hipóteses usadas na construção do modelo físico a ser usado na simulação estão detalhadas no Capítulo 3.

Os principais modos de transferência de calor envolvidos são: convecção entre a superfície da córnea e o ambiente externo; condução interna; e transferência de calor por convecção a partir da retina para a coróide devido ao fluxo sanguíneo existente nesta região. Com estas considerações, o olho fica representado por cinco regiões de propriedades termofísicas diferentes: a córnea, o humor aquoso, a lente, o humor vítreo e a retina.



**Figura 2.9** - Esquema da secção transversal do olho humano (Amara, 1995).

A Eq. (2.1) pode ser reescrita em coordenadas cartesianas desprezando-se o termo de geração de calor metabólico:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q \quad (2.2a)$$

Tendo em vista as simplificações na geometria do problema expostas anteriormente e a simetria em relação ao eixo pupilar, é conveniente formular o problema em coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ). A Eq. (2.1) pode, também, ser reescrita em coordenadas cilíndricas como mostrado a seguir:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_t \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q \quad (2.2b)$$

A fonte de calor devido à perfusão é dada por  $Q_p$ , e representa um sumidouro de calor devido à remoção por advecção de calor efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos. O termo é representado por (Diller, 1982):

$$Q_p = \omega \rho_s c_s (T_a - T_v) \quad (2.3)$$

onde:

- $\omega$  = taxa volumétrica de perfusão sanguínea [ $m^3$  de sangue/ $m^3$  de tecido.s];
- $\rho_s$  = massa específica do sangue [ $kg/m^3$ ];
- $c_s$  = calor específico do sangue [ $J/kg^\circ C$ ];
- $T_a$  = temperatura do sangue arterial entrando no tecido [ $^\circ C$ ];
- $T_v$  = temperatura do sangue venoso deixando o tecido [ $^\circ C$ ].

Normalmente se supõe que a temperatura do sangue que entra na região capilar é igual à temperatura do sangue arterial ( $T_s = T_a$ ), e que a temperatura do sangue que a deixa é a temperatura do sangue venoso,  $T_v$ , e que pode ser considerada igual à temperatura local ( $T$ ) do tecido. A velocidade do sangue nos vasos capilares é muito pequena, com um número de Peclet (que expressa a razão entre a transferência de calor por convecção e a transferência de calor por condução) muito menor que a unidade. Este fato justifica a consideração de que a temperatura do sangue venoso saindo do tecido seja igual à temperatura do mesmo (Charny, 1992). Logo  $Q_p$  torna-se:

$$Q_p = \omega \rho_s c_s (T_a - T) \quad (2.4)$$

A taxa volumétrica de perfusão sangüínea,  $\omega$ , é específica para cada tipo de tecido (Jain, 1985), e não pode ser medida diretamente (Charny, 1992), havendo uma grande dificuldade em se obter valores reais nos diversos tipos de tecidos. Para se obter estes valores, assim como de propriedades do tecido *in vivo*, o mesmo deve ser analisado antes da remoção. Os efeitos do fluxo sangüíneo e da geração de calor metabólico devem ser considerados separadamente para que as propriedades térmicas do meio possam ser deduzidas (Cooper & Trezek, 1971). Portanto, este modelo pode ser muito importante na investigação de um comportamento qualitativo. Medidas das propriedades termofísicas de tecidos vivos é uma tarefa desafiadora, especificamente quando se examina como essas propriedades variam com a temperatura. Portanto, quando se lida com tecidos vivos, os modelos numéricos fornecem aproximações muito mais imprecisas, do que aquelas obtidas para qualquer outro tipo de situação na qual há maior segurança sobre os valores de tais propriedades.

O olho é um órgão pouco vascularizado, porém, um grande fluxo sangüíneo se concentra na região esclera/retina/coróide (Scott, 1988). A vascularização da retina é distribuída primariamente no interior da retina e, provavelmente, nutre a maioria das estruturas da retina, exceto o pigmento epitelial e os fotorreceptores que são nutridos pela vascularização coroidal (Guan et al., 2003). Distúrbios no fluxo sangüíneo capilar da retina são características de muitas doenças oculares como diabetes, degeneração macular e glaucoma. A retina é um dos poucos tecidos humanos onde a circulação sangüínea pode ser observada direta e não-invasivamente (Riva et al., 1985). Várias técnicas não-invasivas têm sido desenvolvidas para calcular o fluxo sangüíneo ocular em humanos. Uma delas, o velocímetro bi-direcional a laser Doppler, fornece uma medida pontual da velocidade do fluxo dos principais arteríolos e veníolos da retina. O instrumento utilizado nesta técnica é capaz de determinar os diâmetros dos vasos e a máxima velocidade no centro destes vasos e com isto determinar a taxa volumétrica de escoamento do fluxo sangüíneo (Riva et al., 1985; Riva et al., 1986; Grunwald et al., 1992; Guan et al., 2003). A taxa de perfusão sangüínea será considerada apenas na retina. O fluxo sangüíneo na coróide será considerado apenas como uma condição de contorno de troca de calor por convecção entre a retina e a coróide, através do uso de um coeficiente de transferência adequado.

## 2.2 FUNÇÃO DANO

A exposição a temperaturas elevadas resulta em danos irreversíveis no tecido, como a denaturação das proteínas, a perda das funções biológicas das moléculas ou mesmo a sua evaporação.

A denaturação pode ser vista como um processo de desenvolvimento comum que pode levar à necrose das células. Pode ser descrita por várias teorias, como por exemplo, um processo de mudança de fase. Porém, o método de tratamento com maior êxito descreve o processo em termos de equações de taxas termoquímicas, onde o histórico detalhado da temperatura determina a extensão da denaturação (Rol et al., 2000). Segundo Henriques e

Moritz (in Diller, 1982), o processo de denaturação é geralmente descrito por um caso particular da lei de Arrhenius, fundamental para o fenômeno de denaturação/coagulação. A cinética da denaturação térmica, cujos parâmetros são a energia de ativação e a temperatura, é representada por um dano integral  $\Omega_D$ , que mede o dano físico produzido. Para um dado tecido, a denaturação é determinada exclusivamente pela mudança temporal da temperatura do tecido (Rol et al., 2000).

Inicialmente, Henriques (in Diller, 1982) determinou os valores da constante pré-exponencial e da energia de ativação para aquecimento da pele a baixas temperaturas e estes valores têm sido utilizados por diversos pesquisadores para os processos analisados de dano térmico. As pesquisas mais recentes têm estudado o processo cinético associado com outras fontes de dano epitérmico, como por exemplo, a destruição do tecido durante a irradiação a laser.

Preibe e Welch (in Diller, 1982) adaptaram o modelo de Henriques para calcular o dano com uma distribuição Gaussiana de intensidade. Eles fizeram estudos para a exposição de longa e curta duração, utilizando seu modelo acoplado com dados experimentais para definir as condições de limite do dano.

Outros pesquisadores se basearam no modelo de Henriques para estudar o dano causado por aquecimento em outras partes do corpo, como coração e artérias. A diferença no estabelecimento dos coeficientes é uma consequência de variações nos dados experimentais aplicados para definir os modelos de ênfases individuais dos cientistas na análise do processo de aquecimento. Para queimaduras na pele, adotam-se os valores de  $\Omega_D = 0,53$ ; 1 e 10.000 para queimaduras de 1°, 2° e 3° graus, respectivamente (Diller et al., 1991).

O dano causado pelo aquecimento, em um ponto do tecido pode ser determinado empiricamente através da expressão.

$$\Omega_D = A \int_0^t \exp\left(-\frac{\Delta E_{at}}{RT}\right) dt \quad (2.5)$$

onde  $A = 3,1 \cdot 10^{08} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta E_{at} = 6,27 \cdot 10^5 \text{ J/mol}$  e foram ajustados para dados experimentais que caracterizavam as queimaduras de 1°, 2° e 3° graus. A constante universal dos gases ( $R$ ) é dada  $8,31 \text{ J/mol.K}$  e a temperatura  $T$  é absoluta ( $K$ ). Há modelos devidos a vários pesquisadores (Diller et al., 1991) que divergem nos valores calculados de  $\Omega_D$  para exposição de tecidos vivos a altas temperaturas. O modelo de Henriques e Moritz foi o primeiro deles, e não considera o aumento do valor da referida função durante o resfriamento de um corpo previamente aquecido, mas fornece bom ajuste para baixas temperaturas. Por este motivo e pelas características do aquecimento do olho pelo implante, este será o modelo aqui considerado.

A seguir, é descrito um outro modelo desenvolvido por Birngruber, que utiliza um caso particular da lei de Arrhenius, desenvolvida empiricamente para descrever o efeito do calor na taxa de reações químicas (Rol et al., 2002).

Considerando uma reação que envolva a produção de um complexo ativado como produto intermediário, a taxa de formação do produto final desta reação é dada por:

$$r_x = \frac{RT}{N_A h} \exp\left(-\frac{\Delta G}{RT}\right) \quad (2.6)$$

onde,  $T$  é a temperatura absoluta,  $\Delta G$  é a energia livre de Gibbs para ativação do processo,  $R$  é a constante universal dos gases,  $N_A$  é a constante de Avogadro e  $h$  é a constante universal de Planck.

A variação de concentração das células não danificadas  $c_x$  pode ser escrita como:

$$\frac{dc_x}{dt} = -r_x(T) \cdot c_x \quad (2.7)$$

Integrando a Eq. (2.6) ao longo do tempo  $t$ , obtém-se o dano  $\Omega_D$ :

$$\Omega_D = \ln\left(\frac{c_x(0)}{c_x(t)}\right) = \int_0^t r_x \cdot dt \quad (2.8)$$

onde  $c_x(0)$  e  $c_x(t)$  são as concentrações das células não danificadas nos instantes inicial e final. A integral de Arrhenius  $\Omega_D$  é um número positivo que mede o grau de denaturação de uma proteína unimolecular. A fração de moléculas que não foram denaturadas pelo processo de aquecimento após um tempo  $t$  é:

$$\frac{c_x(t)}{c_x(0)} = e^{-\Omega_D} \quad (2.9)$$

Portanto, quando  $\Omega_D = 1$ , a fração de proteínas não denaturadas é de  $1/e = 36,8\%$ , ou seja,  $63,2\%$  das proteínas foram danificadas. Este ponto foi definido por Henriques como o ponto final de uma necrose completa. Este ponto também foi chamado de limite de denaturação por Birngruber (in Rol et al., 2000).

A energia livre de Gibbs é dada por:

$$\Delta G = \Delta E_{at} - RT - T \Delta S \quad (2.10)$$

onde  $\Delta E_{at}$  é a energia de ativação para o processo de denaturação e  $\Delta S$  é a variação de entropia durante a reação. A integral de Arrhenius é então dada por:

$$\Omega_D = \frac{R}{N_A h} \exp\left(1 + \frac{\Delta S}{R}\right) \cdot \int_0^{\tau_{denat}} T(t) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_{at}}{RT(t)}\right) dt \quad (2.11)$$

Na prática a evolução do grau de denaturação é subjetiva e o processo de aquecimento é interrompido em um valor arbitrário de  $\Omega_D$ . Henriques (in Rol et al., 2000), por exemplo, escolheu  $\Omega_D = 1$ .

Assume-se que a temperatura de exposição é constante e que as temperaturas aumentam do valor da temperatura do corpo até um valor constante  $T(t) = T$ , e ao fim do tempo de denaturação  $\tau_{denat}$ , retorna para  $T(\tau_{denat}) = T_{corpo}$ . Para este caso especial, a equação (2.11) fica:

$$\Omega_D = \frac{R}{N_A h} \exp\left(1 + \frac{\Delta S}{R}\right) \cdot T \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_{at}}{RT}\right) \tau_{denat} \quad (2.12)$$

onde o tempo de denaturação pode ser escrito:

$$\tau_{denat} = k_B \frac{\Omega_D}{T} \exp\left(\frac{\Delta E_{at}}{RT}\right) \quad (2.13)$$

onde  $k_B$  e  $\Delta E_{at}$  são constantes que dependem do tecido considerado. De acordo com Birngruber (in Rol et al., 2000), a energia de ativação para o tecido da retina é  $\Delta E_{at} = 2,9 \cdot 10^5$  J/mol, a variação de entropia  $\Delta S = 595$  J/mol.K, e a constante  $k_B = 1,4713 \cdot 10^{-42}$  s.K. Existe uma relação unívoca entre o tempo de denaturação e a temperatura do tecido, por exemplo, se a temperatura do tecido for de 68,4°C, o tempo de denaturação será de 1s (Rol et al., 2000).

Uma comparação entre modelos e seus resultados encontram-se em Lima et al. (2004). O novo modelo de Birngruber, apesar de mais recente e de ter sido desenvolvido especificamente para tecidos oculares, enquanto os demais foram utilizados para queimaduras de pele, apresenta valores numéricos inferiores a todos os demais. Por medida de segurança e para efeitos de comparação, foram mantidos aqui os dois modelos até que novos trabalhos informem qual poderia ser a opção mais segura.

## 3. ANÁLISE BIDIMENSIONAL DO PROBLEMA

---

### 3.1 INTRODUÇÃO

Como já foi dito, o presente trabalho tem como objetivo analisar a transferência de calor no olho humano devido à presença de implantes de retina. Inicialmente, será feita uma análise através de uma simulação numérica onde será utilizada uma formulação do método dos volumes finitos anteriormente desenvolvida para tratar modelos bidimensionais (Lyra et al, 2002; Guimarães, 2003; Lima et al., 2003). Esta formulação utiliza volume de controle centrado no nó e foi implementada fazendo uso de uma estrutura de dados baseada nas arestas da malha.

A formulação envolvendo a discretização espacial e temporal para malhas triangulares, incluindo o tratamento de condições de contorno, termos de carregamento térmico, o tratamento de problemas envolvendo múltiplos materiais, são detalhadamente descritas por Guimarães (2003). A validação da ferramenta numérica e a modelagem computacional também se encontram descritas em Lyra et al, (2002) e Guimarães, (2003).

Neste capítulo, serão brevemente descritas a formulação numérica e a modelagem computacional. Em seguida, será apresentado o problema a ser analisado, seguido pelos resultados numéricos obtidos.

O problema consiste em analisar o perfil de temperatura devido ao calor gerado pela implantação de um *chip* na região da retina. Conforme mencionado no Capítulo 1, existem dois tipos de implantes e ambos serão analisados aqui: o subretinal e o epirretinal. No primeiro, o *chip* é implantado na região compreendida entre a retina e a coróide. No segundo tipo, o *chip* deve ser implantado na superfície interna da retina, ou seja, em contato com o humor vítreo. Para efeitos de comparação, também serão calculadas as temperaturas do olho sem a presença do *chip*.

### 3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Partindo-se da lei da conservação da energia, pode-se derivar a equação parcial que governa a transferência de calor em regime transitório num meio contínuo estacionário:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{T} \quad (3.1)$$

onde,  $\rho$  é a massa específica,  $c$  é o calor específico,  $T$  é a temperatura,  $q_j$  é o fluxo de calor na direção  $x_j$  e dado pela Lei de Fourier e  $Q$  representa os termos de fonte ou sumidouro de calor volumétrico. O domínio espacial do problema é representado por  $\Omega$ , com  $x_j$  sendo a variável espacial independente e  $j$  variando de um ao número de dimensões espaciais.  $\mathbf{T} = [t^i, t^f]$  representa o intervalo de tempo de integração.

A equação governante do problema é a equação da biotransferência de calor de Pennes (BHTE), descrita no Capítulo 2. Para a análise bidimensional, serão utilizadas coordenadas

cartesianas (Eq. 2.2a) e a equação a seguir pode ser obtida a partir da Eq. (3.1) com a utilização da Lei de Fourier para o fluxo de calor condutivo:  $q_j = -k_j \partial T / \partial x_j$ .

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \quad (3.2)$$

A forma mais adequada, porém, para a descrição da formulação do método dos volumes finitos é a Eq. (3.1) escrita em termos dos fluxos.

Por simplicidade, o meio é considerado ortotrópico com  $\rho, c, k_j$  constantes e a Eq. (3.1) representa uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, parabólica e não-homogênea.

A Eq. (3.1) representa um problema que está sujeito a condições iniciais e de contorno. As condições de contorno de interesse podem ser de diferentes tipos:

a) Condição de contorno de Dirichlet:

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_D \text{ X } \mathbf{T} \quad (3.3)$$

b) Condição de contorno de Neumann:

$$-q_j n_j = \bar{q}_n \quad \text{em } \Gamma_N \text{ X } \mathbf{T} \quad (3.4)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal externa ao domínio.

c) Condição de contorno de Cauchy, ou de Robin, ou mista:

$$-q_j n_j = \bar{q}_n + \alpha_T (T - T_a) \quad \text{em } \Gamma_C \text{ X } \mathbf{T} \quad (3.5)$$

onde  $\alpha_T$  é o coeficiente de transferência de calor e  $T_a$  é a temperatura média do fluido.

Finalmente, uma distribuição inicial da temperatura  $\bar{T}^i$  é conhecida para um estágio de tempo inicial  $t^i$ , e a condição inicial é expressa por:

$$T = \bar{T}^i \quad \text{em } \Omega \text{ e } t = t^i \quad (3.6)$$

As Equações (3.1) a (3.6) descrevem completamente o modelo matemático proposto, o qual governa a condução de calor em um meio estacionário.

### 3.3 FORMULAÇÃO DOS VOLUMES FINITOS

A Eq. (3.1) é integrada em torno de um volume controle arbitrário, com o contorno,  $\Gamma$ , fechado.

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (3.7)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da equação, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} q_j n_j d\Gamma + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (3.8)$$

Para obter a formulação numérica, via MVF, a partir da Eq. (3.8), procede-se inicialmente a discretização do domínio computacional que é feita por meio de uma malha não-estruturada. As integrais sobre o volume na Eq. (3.8) são calculadas para cada volume de controle associado ao nó  $I$  da malha como:

$$\rho c \int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \cong \rho c \frac{\partial T_I}{\partial t} V_I \cong \rho c \frac{\partial \hat{T}_I}{\partial t} V_I \quad (3.9)$$

e

$$\int_{\Omega_I} Q d\Omega \cong Q_I V_I \quad (3.10)$$

onde  $V_I$  é o volume do volume de controle ao redor do nó  $I$ ,  $\hat{T}_I$  e  $Q_I$  representam, respectivamente, a temperatura calculada numericamente e o termo fonte, para o nó  $I$ .

A integral sobre o contorno presente na mesma equação é calculada sobre o contorno do volume de controle associado ao nó  $I$ , usando uma representação da malha por arestas,

$$\int_{\Gamma_I} q_j n_j d\Gamma \cong \sum_L C_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Omega)} + \sum_L D_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Gamma)} \quad (3.11)$$

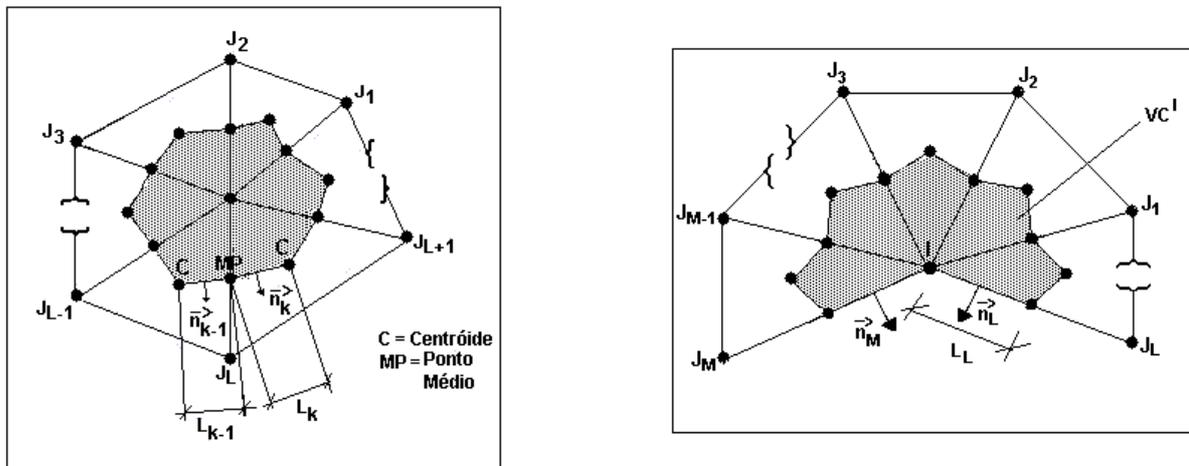
Os coeficientes peso  $C_{IJ_L}^j$  e  $D_{IJ_L}^j$  representam as componentes do vetor área normais à superfície do volume de controle e que devem multiplicar o fluxo associado à aresta  $IJ_L$  para obter a contribuição do fluxo de calor desta aresta para o nó  $I$ . Os coeficientes  $C_{IJ_L}^j$  são calculados para todas as arestas da malha, enquanto que os coeficientes  $D_{IJ_L}^j$  são calculados apenas para as arestas do contorno. Para um modelo bidimensional, os coeficientes  $C_{IJ_L}^j$  e  $D_{IJ_L}^j$  são definidos por:

$$C_{IJ_L}^j = \sum_k A_K n_K^j \quad e \quad D_{IJ_L}^j = A_L n_L^j \quad (3.12)$$

onde,  $A_K = L_K E_K$ , sendo,  $E_K$  a espessura unitária e  $L_K$  o comprimento de cada interface  $K$  associada à aresta  $IJ_L$ .  $A_L = L_L E_L$ , onde  $L_L$  é a metade do comprimento da aresta de contorno em consideração e  $E_L$  é calculado de forma similar ao  $E_k$ . Os parâmetros geométricos necessários para calcular os coeficientes estão detalhados na Fig. 3.1.

Considerando as aproximações dadas pelas Equações (3.9), (3.10) e (3.11), a formulação semidiscreta da Equação (3.8) pode ser, convenientemente, expressa como:

$$\rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} V_I = \sum_L C_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Omega)} + \sum_L D_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Gamma)} + Q_I V_I \quad (3.13)$$

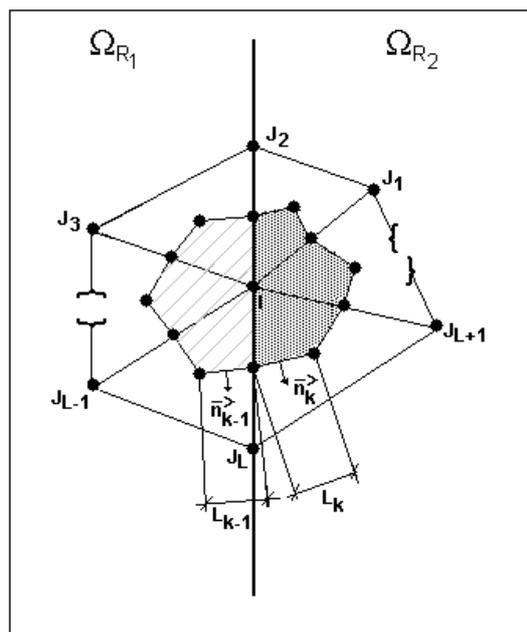


**Figura 3.1** – Volumes de controle 2-D interno e de contorno, respectivamente, e seus parâmetros geométricos.

O tratamento de problemas de transferência de calor que envolvam múltiplos materiais em diferentes partes do domínio torna necessário se fazer a discretização das equações governantes de forma consistente, a fim de garantir a solução correta através da interface das sub-regiões. Para cada aresta da interface entre duas regiões os coeficientes são calculados independentemente para cada região. De acordo com a Figura (3.2) a aresta  $IJ_L$  teria dois coeficientes de peso definidos como:

$$C_{IJ_L}^{j(R_1)} = A_{k-1} n_{k-1}^j \quad e \quad C_{IJ_L}^{j(R_2)} = A_k n_k^j \quad (3.14)$$

onde,  $R_k$  representam as regiões com diferentes materiais que concorrem na aresta em análise.



**Figura 3.2** - Volume de controle em uma interface entre duas regiões e seus parâmetros

geométricos.

No caso de múltiplos materiais, a equação semi-discreta (3.13) é agora substituída por:

$$\rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} V_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Omega^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^j q_{IJ_L}^{j(\Gamma)} + \sum_{k=1}^2 \sum_L C_{IJ_L}^{j(R_k)} q_{IJ_L}^{j(\Gamma_i^*)} \right) + Q_I V_I \quad (3.15)$$

O primeiro termo do lado direito da equação quantifica o fluxo que atravessa as interfaces do volume de controle associado ao nó  $I$ . O segundo termo quantifica o fluxo através das arestas do contorno, e o terceiro termo, quantifica o fluxo através das interfaces entre materiais diferentes. Os termos  $q_{IJ_L}^{j(\Omega^*)}$ ,  $q_{IJ_L}^{j(\Gamma)}$  e  $q_{IJ_L}^{j(\Gamma_i^*)}$  representam, respectivamente, os fluxos nas arestas do domínio e contorno externo, no contorno externo e nas interfaces entre materiais.

O cálculo dos termos de fluxos constantes na Eq. (3.15), bem como a discretização do termo de fonte térmica, estão descritos detalhadamente em Lyra et al, (2002) e Guimarães, (2003)

A forma semidiscreta do problema de transferência de calor transiente dado pela Eq. (3.15), representa um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que pode ser reescrito em uma notação compacta matricial, como:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (3.16)$$

onde,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  representam, respectivamente, a matriz (diagonal) de capacidade calorífica e a matriz de condutividade térmica. O vetor  $\mathbf{R}$  é formado por termos independentes, que surgem das fontes térmicas e condições de contorno, e  $\mathbf{T}$  é o vetor das temperaturas nodais. No presente trabalho, adotou-se esquema explícito de avanço no tempo (“Euler forward”).

### 3.4 IMPLEMENTAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAL

Para a análise do problema aqui tratado foi adotada a mesma modelagem computacional utilizada por Guimarães (2003), que está brevemente descrita a seguir.

O primeiro passo é a captura da imagem a ser analisada, por meio de um *scanner*. Esta etapa pode ser eliminada caso já se possua a imagem digitalizada por meio de imagens radiológicas digitais. Em seguida, através de um programa de CAD (“*Computer Aided Design*”), são marcados pontos sobre os contornos da imagem e são, então, obtidas as coordenadas destes pontos.

As informações sobre a geometria do problema são os dados de entrada para um gerador de malhas triangulares não-estruturadas desenvolvido por Peraire (1987) e posteriormente ampliado por Carvalho (2001). É necessário, também, outro arquivo de dados de entrada que contenha os parâmetros de controle da malha (espaçamento, direção e fator de alongamento). O gerador, por sua vez, tem como saída um arquivo de dados que contém informações sobre a malha gerada: coordenadas físicas, listadas pelos números dos nós; uma lista das conectividades de cada elemento (informação topológica) e do tipo de material associado a cada elemento; e uma lista das conectividades das arestas do contorno juntamente com um parâmetro que informa a geometria à qual está associada esta aresta, assim como outro parâmetro definindo o tipo de condição de contorno.

A seguir, é realizado um pré-processamento dos dados da malha, que tem como finalidade converter a estrutura de dados por elementos fornecidos pelo gerador, em uma estrutura de dados por arestas a ser utilizada pelo programa de análise do método dos volumes finitos (MVF). Esta conversão é feita através da construção de um vetor onde estão listadas todas as arestas da malha, exceto as pertencentes à interface entre duas regiões com materiais distintos, outro vetor com as arestas do contorno e um com as arestas de interface entre regiões, com suas respectivas conectividades. São calculados os coeficientes peso para todas as arestas conforme descritos na Seção 3.3. A seguir, as fontes, propriedades dos materiais, condições iniciais e de contorno são associadas a cada entidade topológica da malha (arestas e nós).

As informações sobre os coeficientes peso e coordenadas nodais, oriundos do pré-processador, são os dados de entrada para o processador via MVF, juntamente com um arquivo de dados sobre o problema analisado. Este arquivo de dados fornece os parâmetros físicos do problema, isto é, as propriedades termofísicas de cada região do domínio (densidade, calor específico, condutividade térmica e coeficiente de perfusão), condição inicial, condições de contorno e taxa de geração de calor, fornecendo também dados necessários ao processamento: número de iterações, tempo de análise, tolerância para atingir o regime estacionário. O processador tem como saída arquivos contendo o histórico dos valores de temperatura e função dano e componentes de fluxo para cada nó da malha. Posteriormente, a visualização é feita com o auxílio do programa computacional “Mtool” desenvolvido pelo TeCGraf/PUC-Rio e cedido pela CENPES/Petrobrás ao Grupo de Mecânica Computacional do DEMEC/UFPE (<http://www.tecgraf.puc-rio.br>).

### 3.5 PROBLEMA ANALISADO

A impossibilidade de se fazer experimentos diretamente no olho humano dificulta a simulação numérica, pois os parâmetros físicos do olho não são conhecidos com precisão. Além disto, algumas estruturas como nervos, vasos sanguíneos, etc, são desprezadas na simulação (Amara, 1995).

A seguir são apresentadas as hipóteses e considerações adotadas para a simulação do problema aqui considerado:

- I. Como as propriedades termofísicas da íris e do corpo ciliar são idênticas às do humor aquoso (Amara, 1995), eles serão considerados como uma única região;
- II. Apesar de a fóvea ser anatomicamente diferente da retina, será considerada como uma parte constituinte da retina e, portanto, possui as mesmas propriedades termofísicas desta última;
- III. A superfície da córnea troca calor por convecção com um ambiente externo a 20°C;
- IV. A transferência de calor dentro do olho ocorre por condução;
- V. A retina troca calor por convecção com a coróide;
- VI. A temperatura do sangue é considerada igual a 37°C;
- VII. O olho é um órgão pouco vascularizado e seu grande fluxo sanguíneo se concentra na região retina/coróide/esclera. Na simulação, devido ao domínio considerado, só haverá perfusão sanguínea na retina.

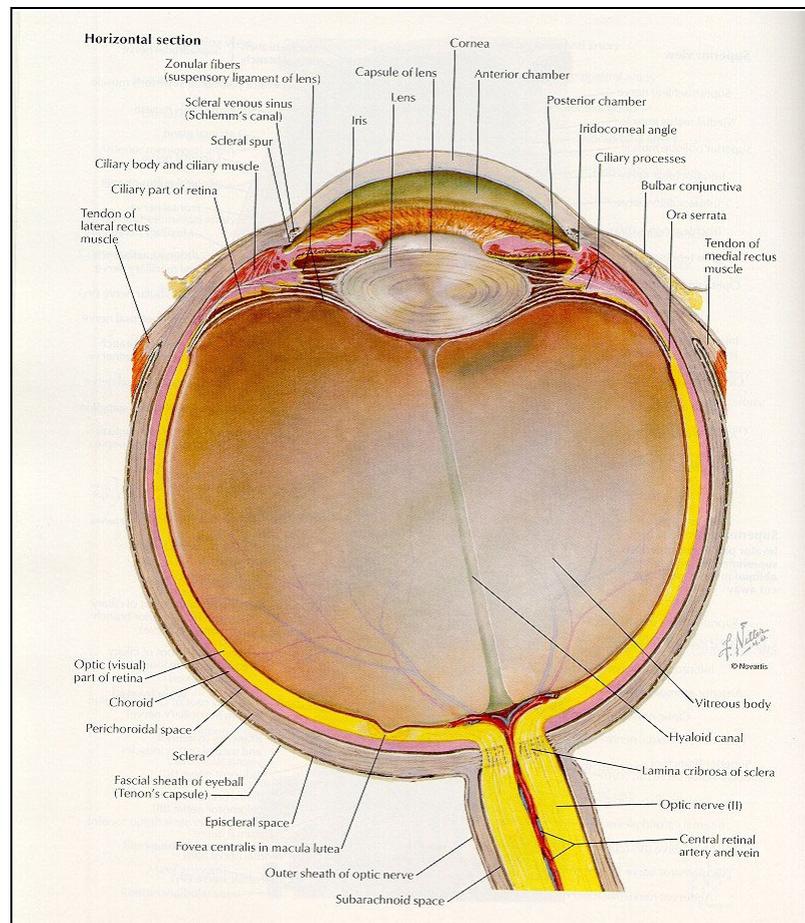
O olho será representado por cinco regiões de propriedades termofísicas diferentes: a córnea, o humor aquoso, a lente, o humor vítreo e a retina.

As condições de contorno e condições iniciais são:

- I. Transferência de calor por convecção entre superfície da córnea e o ambiente externo;
- II. Transferência de calor por convecção entre a retina e a coróide;

III. Temperatura inicial do olho será considerada igual a  $36,5^{\circ}\text{C}$ .

A Fig. (3.3) mostra uma secção vertical do olho humano e os tecidos que compõem a região de interesse.



**Figura 3.3** – Seção reta horizontal do olho humano (Netter & Dalley II, 1997)

Encontrar valores apropriados para as propriedades físicas envolvidas na análise representa um grande problema para construir modelos matemáticos de sistemas biológicos, principalmente quando o modelo é usado para diferentes condições fisiológicas e ambientais (Scott [a], 1988).

De forma geral, existe grande carência de dados confiáveis sobre os parâmetros necessários para a modelagem de tecidos vivos. A maioria dos dados disponível na literatura foi obtida a partir de experimentos efetuados em animais, especialmente com porcos, coelhos e macacos, e foram extrapolados para o caso humano, o que envolve imprecisões.

Nesta secção são apresentados todos os parâmetros empregados no modelo aqui discutido.

#### a) Dimensões do olho

As dimensões do olho humano foram obtidas a partir dos trabalhos de Amara (1995) e Duane (1987). O diâmetro pupilar axial do olho humano mede 25,4 mm. A superfície anterior do olho é a córnea, cuja espessura varia entre 0,4 mm (no centro) e 0,7 mm (na periferia) e cujo diâmetro horizontal é de 11,8 mm. A lente, localizada entre os humores aquoso e vítreo, possui uma espessura de 4 mm e um diâmetro de 9 mm. A retina tem sua espessura variável ao longo do contorno do olho. Mede 0,2 mm próximo ao equador, 0,1 mm na região da fóvea e atinge sua espessura máxima de 0,5 mm, próximo à região do nervo óptico. Sua menor

espessura (0,05 mm) se localiza na “*ora serrata*” (vide Fig. 3.1). Os humores aquoso e vítreo são líquidos transparentes com diferentes concentrações de NaCl cujos comprimentos verticais são, respectivamente, 3mm e 15mm.

### b) Propriedades termofísicas

Assume-se que os valores da condutividade térmica ( $k$ ), massa específica ( $\rho$ ) e calor específico ( $c$ ) são constantes dentro de cada região do globo ocular. As propriedades termofísicas dos tecidos analisados estão descritas na Tabela (3.1).

O principal material que compõe os implantes é o silício. Apesar de possuir eletrodos de nitreto de titânio, a área total agrupada por estes eletrodos é muito pequena se comparada com a área total do *chip*. Portanto, as propriedades do implante serão consideradas iguais às propriedades do silício e que estão apresentadas na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 - Propriedades termofísicas do olho e do implante**

<i>Tecido</i>	$k$ ( $W/m^{\circ}C$ ) <sup>(a)</sup>	$\rho$ ( $kg/m^3$ ) <sup>(a)</sup>	$c$ ( $J/kg^{\circ}C$ ) <sup>(a)</sup>	$\omega$ ( $s^{-1}$ ) <sup>(b)</sup>
Córnea	0,580	1050	4178	---
Humor aquoso	0,580	1000	3997	---
Cristalino	0,400	1050	3000	---
Humor vítreo	0,603	1000	4178	---
Retina	0,628	1000	4190	0,012
Silício	148,0 <sup>(c)</sup>	2330 <sup>(c)</sup>	712 <sup>(c)</sup>	---

<sup>(a)</sup> Scott, 1988; Amara, 1995; <sup>(b)</sup> Welch et al., 1980; <sup>(c)</sup> Incropera & DeWitt, 1998.

### c) Taxa de Evaporação

Segundo Adler (in Scott, 1988), cerca de 0,5 a 1,25g de fluido lacrimal são secretadas pelo olho em um período de 16h, dos quais 25% são perdidas por evaporação. Esta taxa de evaporação do filme lacrimal foi calculada e está na faixa de 40 a 100  $W/m^2$ . No presente trabalho será utilizado o valor de  $E = 40 W/m^2$ , pois este provoca temperaturas mais elevadas no olho, constituindo-se assim a situação mais crítica.

### d) Coeficientes convectivos de transferência de calor

Lagendijk (in Scott, 1988) combinou a evaporação, radiação e transferência de calor por convecção na superfície da córnea em um único coeficiente de transferência de calor.

$$\tilde{\alpha} = E/(T - T_{amb}) + \alpha_c + \alpha_r$$

onde  $\alpha_c = 10 W/m^2 \text{ }^{\circ}C$  e  $\alpha_r = 6 W/m^2 \text{ }^{\circ}C$  são, respectivamente, referentes à transferência de calor da superfície da córnea para o ambiente por convecção e radiação. Como citado acima fluxo de retirada de calor devido à evaporação ( $E$ ) é dado por 40  $W/m^2$ .

Desta forma o coeficiente convectivo foi estimado por Lagendijk (in Scott, 1988) considerando a evaporação do filme lacrimal e a troca de calor por radiação e convecção da córnea para o ambiente, e foi obtido o valor de:

$$\tilde{\alpha} = 20 W/m^2 \text{ }^{\circ}C$$

O coeficiente de transferência de calor da retina para a coróide é, também, dado por Lagendijk (in Scott, 1988).

$$\alpha = 65 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Neste valor está incluída a retirada de calor por convecção devido à perfusão sanguínea existente na região da coróide.

e) *Temperaturas de controle*

A temperatura do sangue é tomada igual a 37°C. A temperatura de controle do ambiente foi considerada constante e igual a 20°C.

f) *Taxa de geração de calor devido aos implantes*

A taxa volumétrica de geração do calor presente no problema é devida ao *chip* implantado na retina. Como já mencionado no Capítulo 1, existem dois tipos de implantes: epirretinal e subretinal. Cada um apresenta uma taxa específica de geração de calor.

Apesar do sigilo mantido pelos fabricantes dos *chips*, atualmente utilizados em seres humanos, há informações que alguns deles dissipam bastante calor causando superaquecimento em regiões próximas ao implante, fato que pode causar danos térmicos irreversíveis aos tecidos adjacentes. Pesquisas em animais para melhor entendimento e melhoramento do sistema continuam a ser efetuadas em paralelo (Chow et al., 2002).

A presente simulação será efetuada com dados existentes na literatura. Pretende-se, com a divulgação do presente trabalho, motivar a obtenção de números confiáveis para que temperaturas e danos térmicos sejam calculados de forma mais realista.

Os implantes são *chips* semicondutores de silício e uma camada de passivação de SiO<sub>2</sub>, e os eletrodos podem ser de ouro ou nitreto de titânio. Na presente análise, serão considerados eletrodos feitos de nitreto de titânio. Os implantes são localizados próximos à mácula, onde estão concentrados os neurônios responsáveis pela percepção visual. Os experimentos mostram que estes *chips* são implantados por período de até 18 meses, porém a camada de passivação de SiO<sub>2</sub> começa a apresentar danos morfológicos devido à corrosão a partir dos 3 meses. Após um período de 6 meses a camada de passivação já se encontra bastante corroída, após 12 meses a corrosão já atinge o silício, enquanto que os eletrodos se mantêm intactos (Hämmerle et al., 2002).

Para o implante subretinal, foram utilizados os dados obtidos por Hämmerle et al. (2002). Enquanto que para o implante epirretinal, foram utilizados dados obtidos por Humayun et al. (2003) e estão detalhados a seguir. O perfil de temperatura será analisado para ambos os casos por um período de três a seis meses.

➤ *SUBRETINAL*

- *Chip* de formato circular, com 3mm de diâmetro e 70µm de espessura;
- Apresenta uma resistência elétrica de 1000 Ω e gera uma corrente elétrica de 0,05 mA;
- A potência dissipada, portanto, é dada pela expressão  $P_{ot} = Ri^2$ , e que neste caso é igual a  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ .

Mais dados sobre a resistência do chip e corrente podem ser encontrados em Hämmerle et al. (2002).

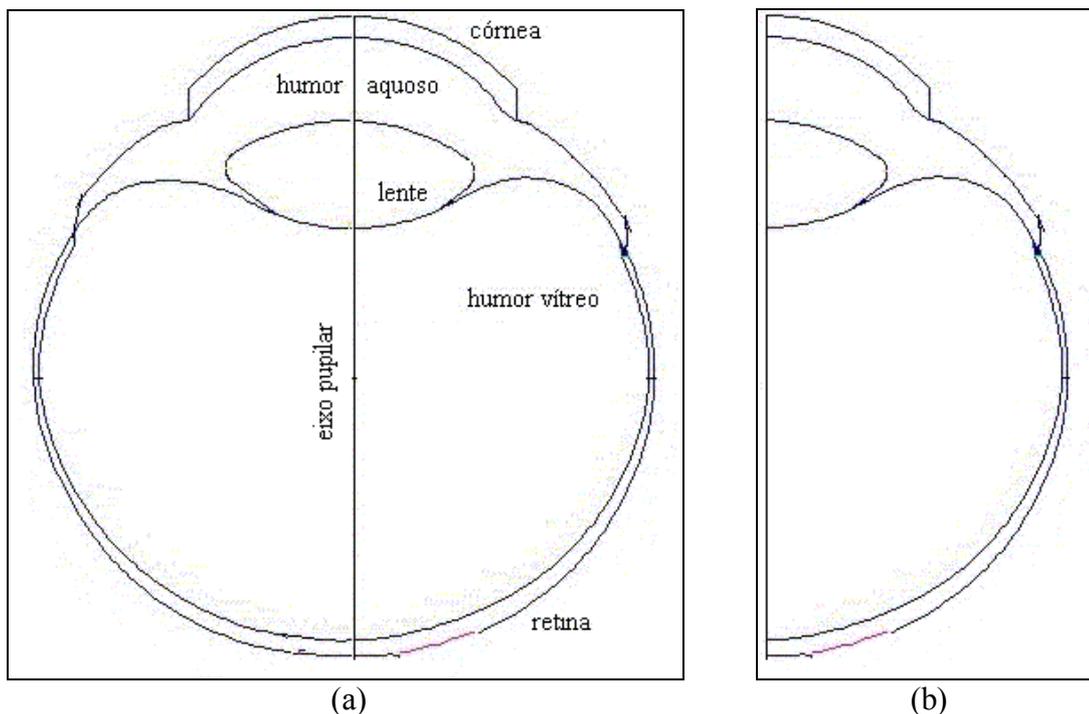
➤ *EPIRRETINAL*

- *Chip* de formato quadrilateral de 30 µm de espessura e uma superfície de 4,6mm x 4,7 mm;

- A potência máxima dissipada por ele no tecido da retina é de  $46 \text{ mW}$ ;  
Dados sobre a resistência e corrente elétrica também podem ser encontrados em Humayun et al. (2003).

### 3.6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da Fig. (3.3) é possível obter o domínio de interesse a ser analisado na simulação, com o auxílio de um programa de CAD. Para a obtenção deste domínio foram consideradas as simplificações da geometria discutidas nas hipóteses no início deste capítulo. A Fig. (3.4a) mostra o domínio obtido e nela também estão indicadas as regiões de interesse. Devido à simetria do problema, será suficiente analisar apenas metade deste domínio, conforme mostrado na Fig. (3.4b).



**Figura 3.4** – (a) Domínio total extraído da Fig. (3.3) através de um programa de CAD; (b) Domínio a ser analisado.

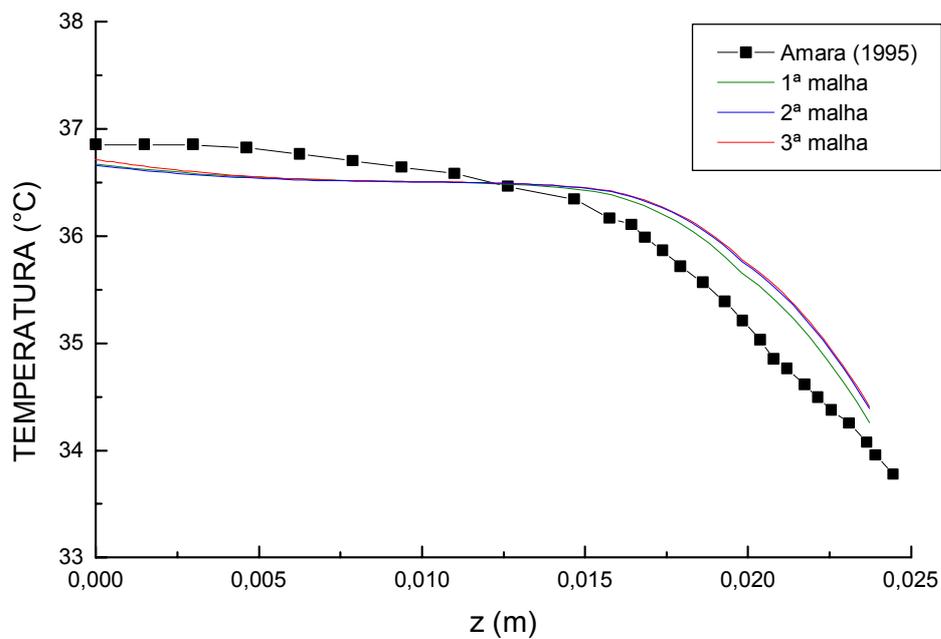
#### 3.6.1 Análise numérica do campo de temperatura no olho sem a presença de implante

Inicialmente, é analisada a transferência de calor no olho humano e calculada a distribuição de temperatura no estado estacionário em um olho que não está exposto a tipo algum de aquecimento. Estes resultados são comparados com os dados obtidos por Amara (1995) que utiliza uma formulação axissimétrica com elementos finitos.

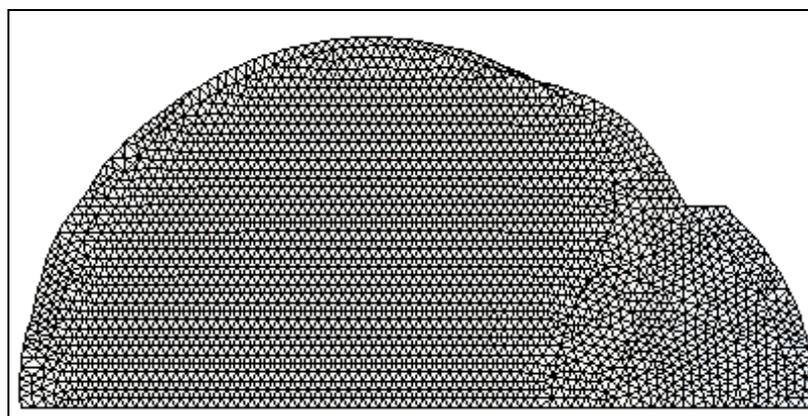
Para a solução numérica do problema foram analisadas três malhas uniformes triangulares não-estruturadas distintas, a fim de se efetuar um estudo de convergência de malha. A primeira malha possui 1736 elementos e 929 nós; a segunda, 4814 elementos e 2506 nós; e a terceira, 11261 elementos e 5782 nós.

A Figura 3.3 apresenta a distribuição de temperatura ao longo do eixo pupilar e a comparação entre as três malhas estudadas e os dados obtidos na literatura (Amara, 1995). Observa-se que os resultados da 2ª e da 3ª malha são praticamente idênticos, portanto a 2ª será adotada para análises detalhadas. As Figuras 3.4 e 3.5 mostram, respectivamente, a 2ª malha estudada e as isofoixas de temperatura para esta malha.

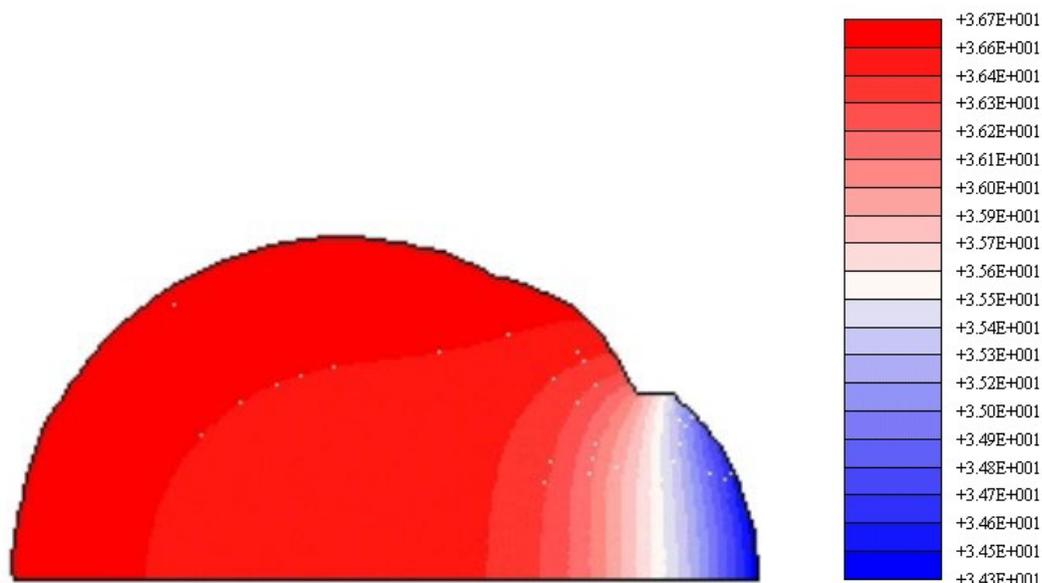
Para a segunda malha, a máxima variação percentual obtida entre as temperaturas foi de 1,7%. Considerando-se que o modelo axissimétrico fornece valores mais próximos de um modelo real tridimensional e que a diferença máxima obtida entre as temperaturas tem um valor baixo, é possível adotar o modelo bidimensional para uma primeira análise do problema. A utilização de um modelo axissimétrico com volumes finitos pode ser aplicada numa etapa posterior a este trabalho.



**Figura 3.5** - Temperaturas ao longo do eixo pupilar sem fonte de calor, em regime estacionário.



**Figura 3.6** - Malha triangular não-estruturada (4814 elementos e 2506 nós).

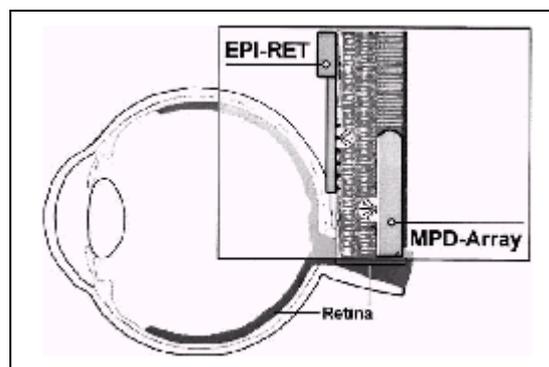


**Figura 3.7** - Isofaixas de temperatura dentro do olho humano para a 2ª malha analisada.

### 3.6.2 Análise numérica do campo de temperatura no olho com a presença de implantes

A presença de implantes na retina altera o regime permanente do campo de temperatura dentro do olho. A seguir, serão apresentados os novos perfis de temperatura devido aos dois tipos de implantes citados anteriormente. A Figura 3.8 mostra um esquema da localização dos implantes epirretinal (EPI-RET) e subretinal (MPD-array) na retina.

O campo de temperatura inicial adotado para as análises seguintes, é obtido a partir do perfil de temperatura estacionário sem a presença de fonte de calor.



**Figura 3.8** - Figura esquemática da localização dos dois tipos de implante: epirretinal e subretinal (MPD-Array) (Meyer, 2002).

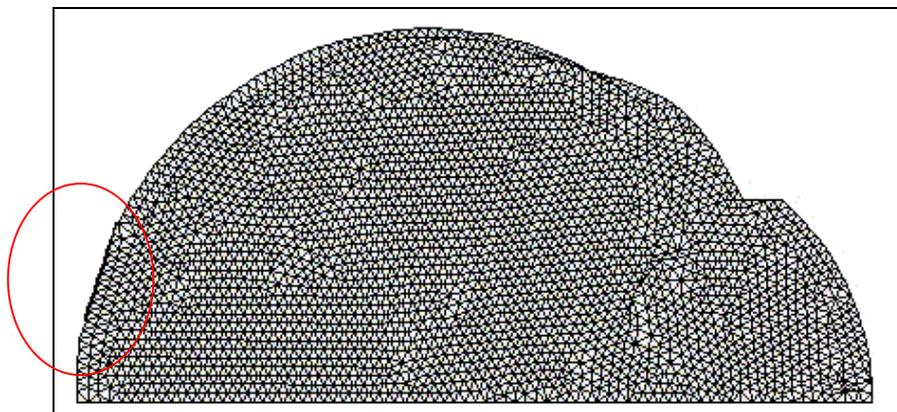
#### a) Subretinal

Para a simulação numérica do olho com o implante subretinal, inicialmente foi feito um estudo para determinar a malha mais adequada a ser utilizada. O programa foi executado em uma máquina com processador Intel Celeron 700MHz com 64,0MB de memória RAM.

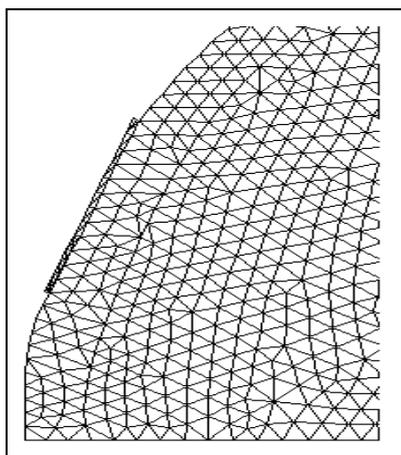
Uma análise de convergência, para a solução numérica, foi realizada de modo semelhante à realizada para o caso anterior. Três malhas foram analisadas: a primeira com

2.204 elementos e 1173 nós; a segunda com 4917 elementos e 2561 nós; e a terceira com 7170 elementos e 3708 nós.

A segunda malha foi escolhida por apresentar solução tão precisa quanto a primeira e não requerer tanta memória quanto ela e está representada na Fig. 3.9. Além disso, em problemas de biomecânica onde os parâmetros físicos utilizados apresentam grandes imprecisões, um grande refinamento de malha pode não ser justificado. A Figura 3.10 mostra a localização do implante subretinal na malha. Com o auxílio do programa Mtool, foi traçado um eixo (Fig. 3.11) sobre a malha de modo a passar pela região próxima ao implante. A Figura 3.12 apresenta o perfil de temperatura ao longo deste eixo. Observa-se que os pontos localizados na retina, inclusive os localizados próximos ao implante apresentaram temperaturas semelhantes, em torno de  $36,72^{\circ}\text{C}$ . A maior diferença de temperatura foi de  $0,0003^{\circ}\text{C}$ , obtida na região próxima ao implante. A Figura 3.13 apresenta as isofaixas de temperatura no olho humano devido ao aquecimento pelo implante subretinal.



**Figura 3.9** – Malha triangular não-estruturada com 2561 nós e 4917 elementos usada para o implante subretinal.



**Figura 3.10** – Detalhe da localização do implante subretinal.

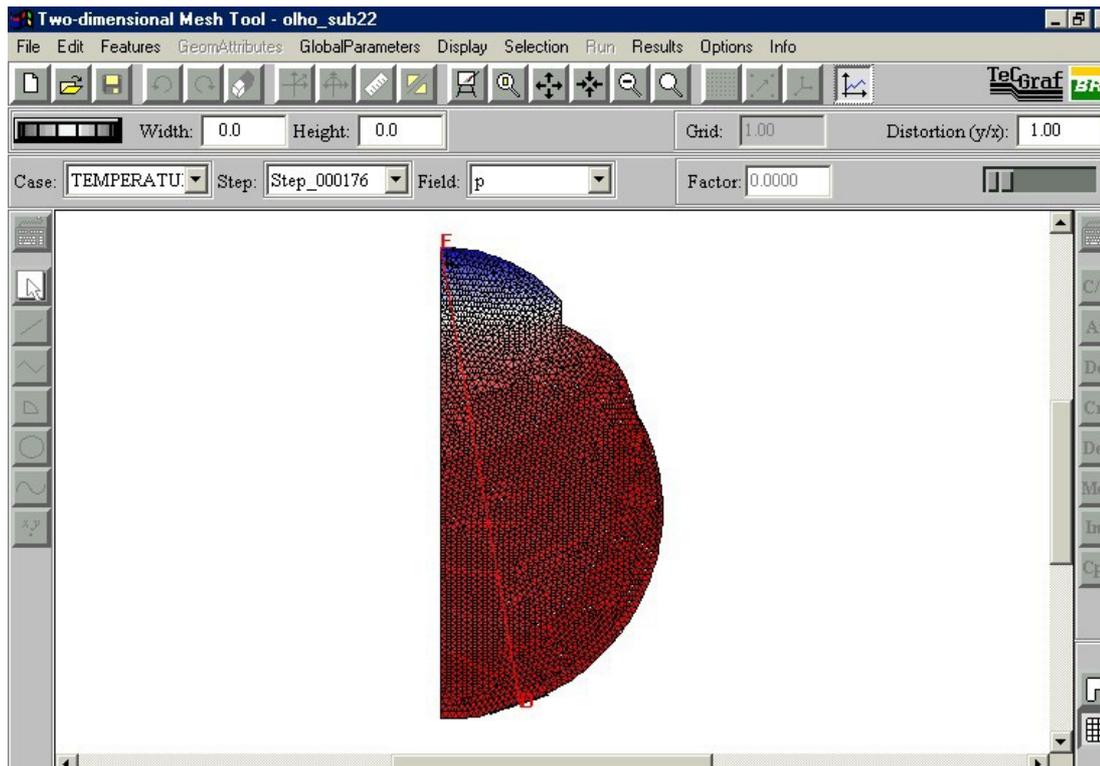


Figura 3.11 - Escolha de um eixo ao longo do olho que passa através do implante subretinal.

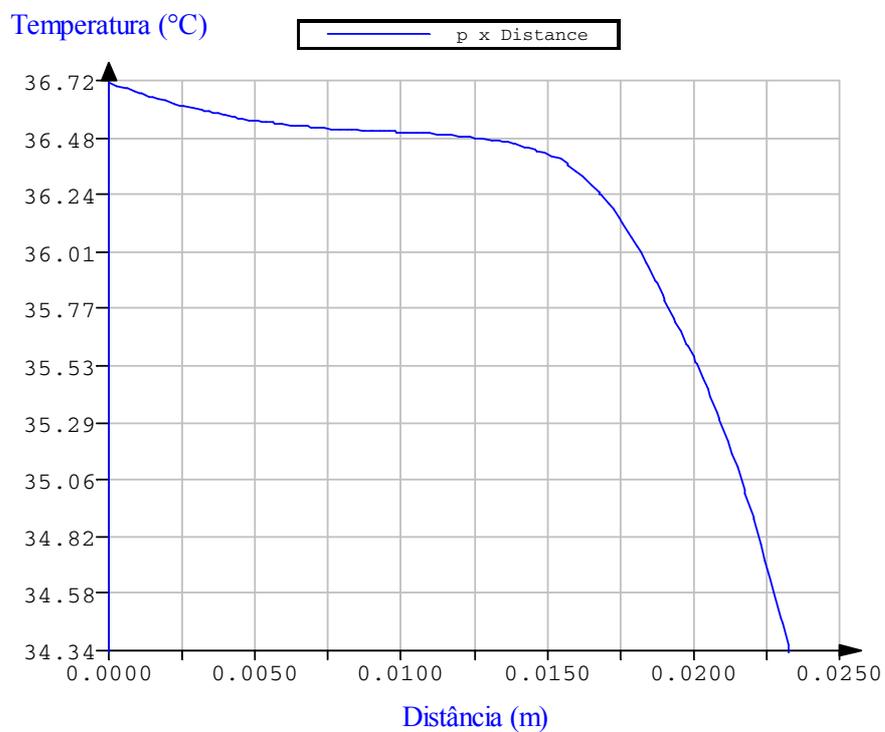
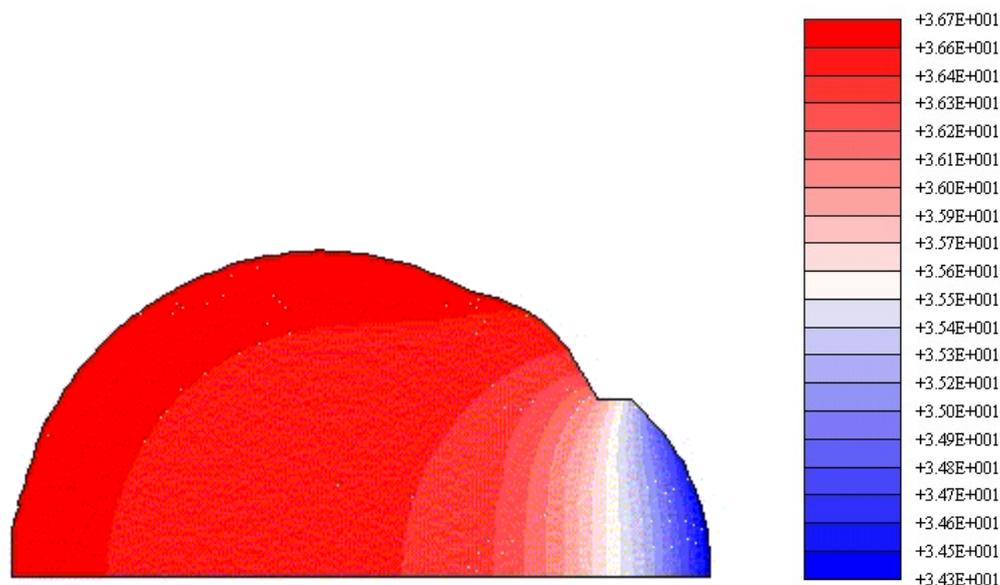


Figura 3.12 – Perfil de temperaturas ao longo do eixo traçado na Fig. 3.11.



**Figura 3.13** – Isofaixas de temperaturas dentro do olho com implante subretinal.

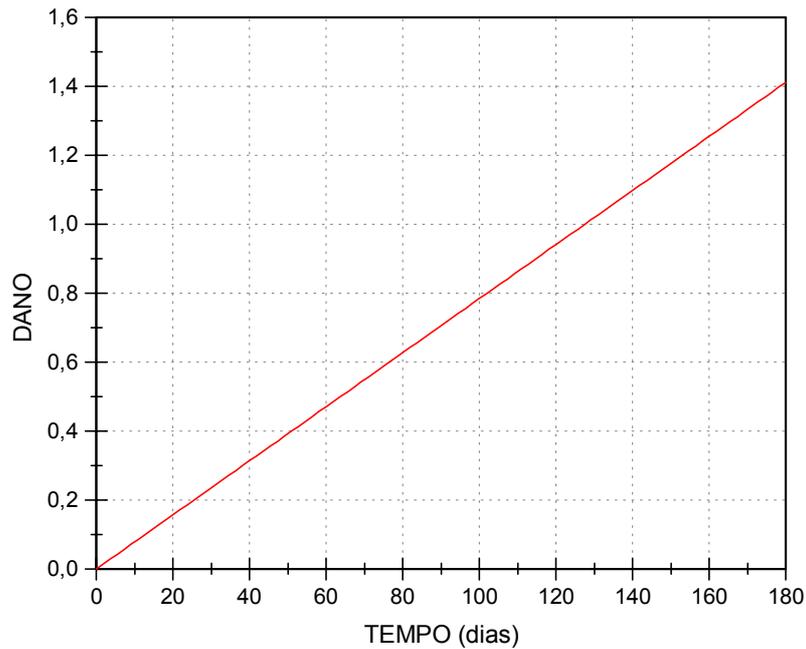
O intervalo de tempo adotado para a discretização temporal é de  $1,4 \cdot 10^{-6}$  s, e o novo estado estacionário é alcançado após 175 intervalos de tempo. Observa-se através da Fig. 3.13 que as temperaturas no olho não apresentam grandes alterações devido à presença da fonte de calor. Para analisar o possível dano térmico causado por este aumento de temperatura, faz-se uso do cálculo da função dano. Serão utilizados os modelos de Henriques (vide Eq. 2.5), o mais tradicional, e o de Birngruber, sintetizado pela Eq. (2.12), que usa parâmetros específicos para o olho.

O perfil do dano calculado para os primeiros seis meses da colocação do implante, é calculado através da Eq. (2.5) com a temperatura constante e está apresentado na Fig. 3.14 para o nó de maior aquecimento localizado próximo ao implante.

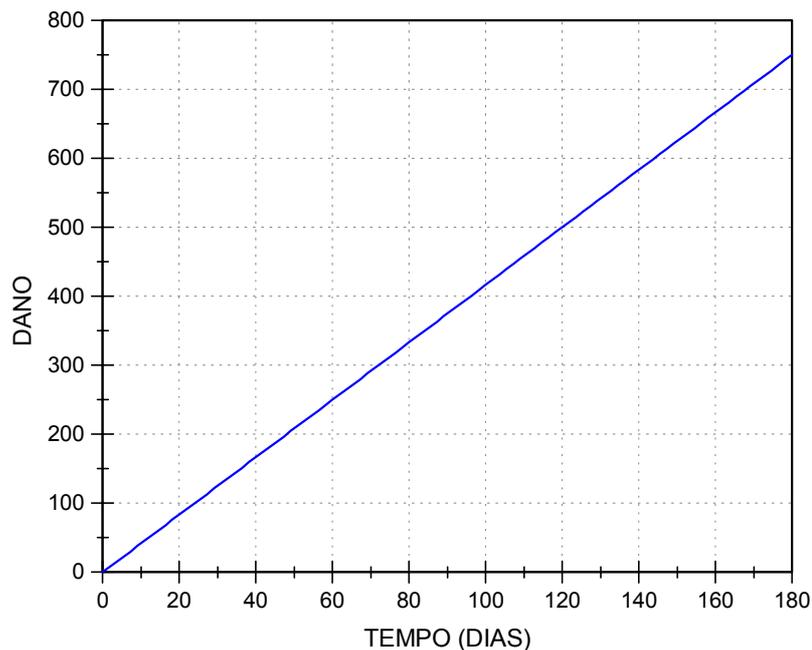
Através da Fig. 3.14, observa-se que a função dano atinge o valor limite de 0,53 após aproximadamente 2,3 meses (70 dias). Ou seja, após este período o calor dissipado pelo implante pode começar a causar danos térmicos irreversíveis nos tecidos oculares adjacentes.

O valor de dano irreversível ( $\Omega=1$ ) é atingido em torno de 4,3 meses (130 dias). A análise temporal não foi prolongada, porque normalmente antes deste tempo, o chip pode descarregar ou mesmo ter sua camada de silício degradada.

A Figura 3.15 mostra a função dano calculada pelo modelo de Birngruber (vide Eq. 2.11). Para este modelo, a função dano apresenta valores superiores àqueles obtidos através do modelo de Henriques. Os valores da função ao longo dos seis primeiros meses são mostrados para efeito de comparação na Fig. 3.14. A manutenção do modelo de Birngruber no presente trabalho foi motivada apenas porque se trata do primeiro modelo de dano disponível na literatura, cujos parâmetros foram especificados para tecidos oculares. Análises adicionais se fazem necessárias uma vez que os referidos parâmetros foram apresentados para terapias transpupilares a laser. Nestes casos, a intensidade da fonte é muitas ordens de grandeza maior que no caso dos implantes, o que induz a temperaturas muito mais elevadas. Por outro lado, a análise apresentada por Rol et al.(2000), só começa a quantificar dano e denaturação de proteínas a partir de  $37^{\circ}\text{C}$ , não ficando clara a validade do modelo, para temperaturas mais baixas, como as obtidas no presente trabalho.



**Figura 3.14** – Função dano calculado pelo modelo de Henriques para o implante subretinal.

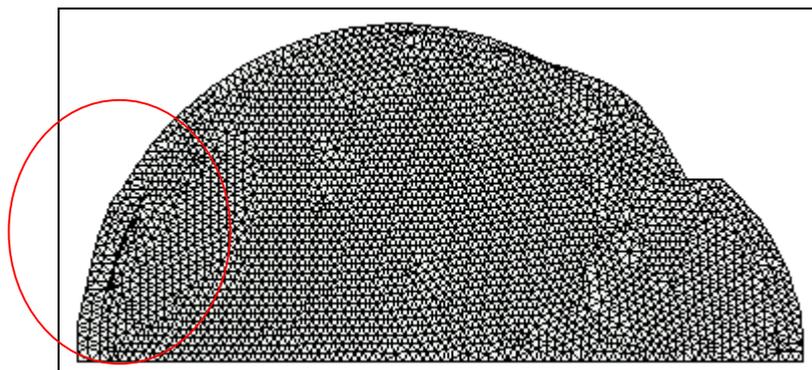


**Figura 3.15** – Função dano calculado pelo modelo de Birngruber para o implante subretinal.

Para observar o efeito da potência do chip na temperatura da retina e analisar a resposta do programa computacional, foram realizadas novas análises com três níveis de potências:  $0,25 W$ ;  $2,5 W$ ; e  $25 W$ . Para os dois primeiros casos não foi observada nenhuma alteração significativa de temperatura na região da retina. O dano térmico só é observado a partir de 127 dias. Enquanto que para o último caso, as temperaturas na retina atingiram valores em torno de  $41^{\circ}C$ , valor com qual a função dano atinge seu valor limite de dano irreversível ( $\Omega = 1$ ) em torno de 2 dias. Também foi possível observar que as elevações de temperatura se concentraram na região próxima ao implante, não alterando significativamente as temperaturas de outras regiões, como por exemplo, no eixo pupilar.

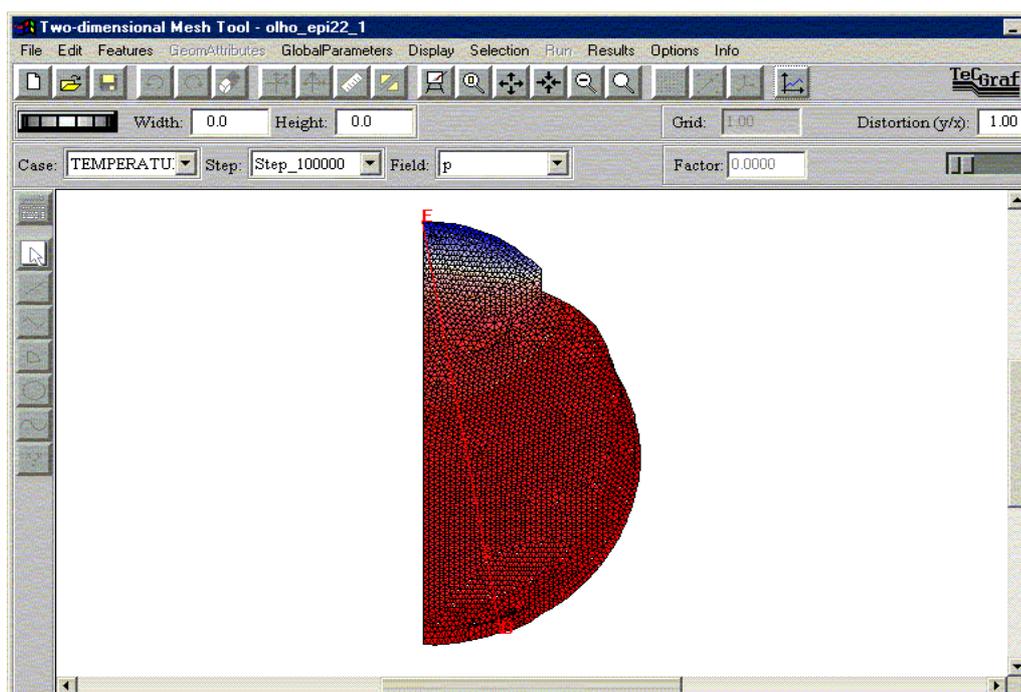
**b) Epirretinal**

Para a simulação numérica do olho com o implante epirretinal, um estudo de convergência, semelhante ao anterior, foi feito para determinar a malha mais adequada a ser utilizada. Três malhas foram analisadas: a primeira com 2465 elementos e 1303 nós; a segunda com 4946 elementos e 2574 nós; e a terceira com 7166 elementos e 3704 nós. A segunda malha foi escolhida para análise e está representada na Fig. 3.16, onde, em destaque, está a localização do implante epirretinal. O intervalo de tempo adotado é de  $8,1 \cdot 10^{-7}$  s, e o novo estado estacionário é alcançado após 180 intervalos de tempo.

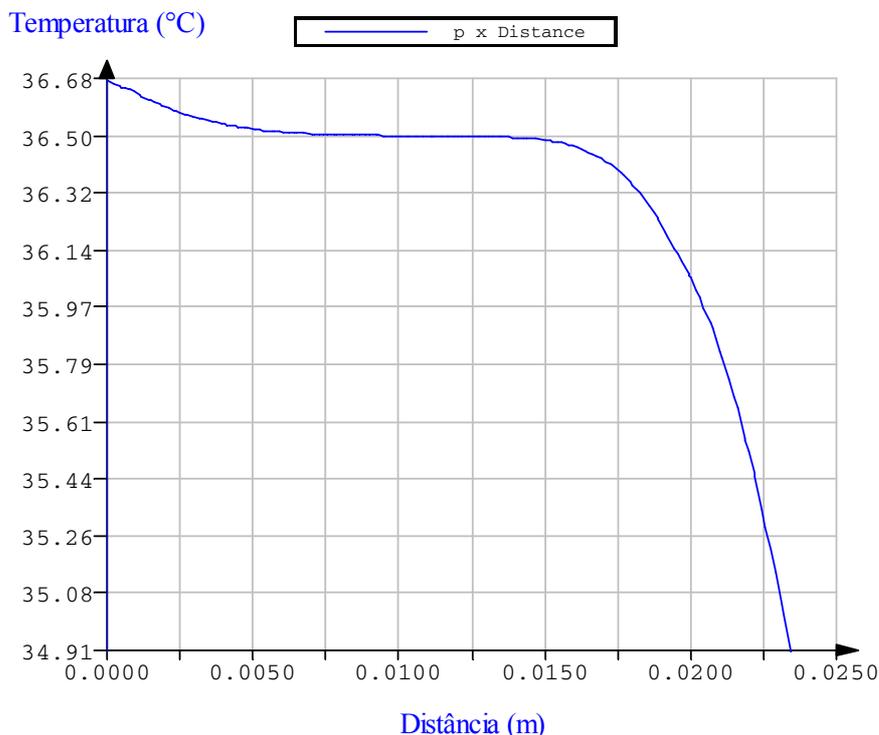


**Figura 3.16** – Malha triangular não-estruturada com 4946 elementos e 2574 nós.

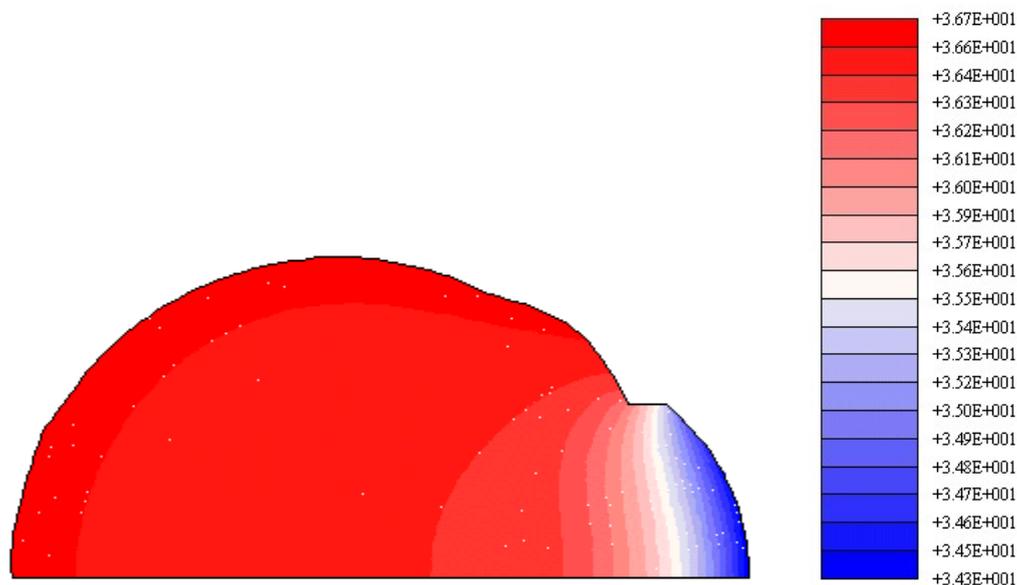
A Figura 3.17 mostra um eixo traçado sobre a malha, com a ajuda do Mtool, e que passa por pontos próximos ao implante. A Figura 3.18 apresenta as temperaturas ao longo deste eixo. O maior aumento de temperaturas observado na retina foi de  $0,0052^{\circ}\text{C}$ , na região próxima ao implante. A Figura 3.19 apresenta as isoformas de temperatura no olho humano devido ao aquecimento pelo implante epirretinal.



**Figura 3.17** – Escolha de um eixo ao longo do olho que passa através do implante epirretinal.



**Figura 3.18** – Perfil de temperatura ao longo do eixo traçado na Fig. 3.17.



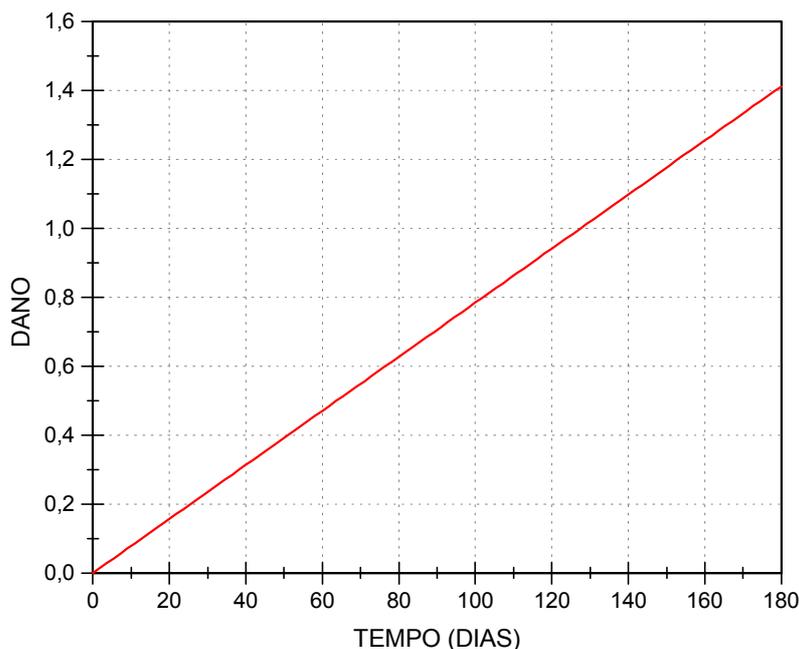
**Figura 3.19** – Isofaixas de temperaturas dentro do olho com implante epirretinal.

O perfil do dano calculado para os seis meses seguintes é calculado através da Eq. (2.5) com a temperatura constante e está apresentado na Fig. 3.20 para o nó de maior aquecimento na região da retina.

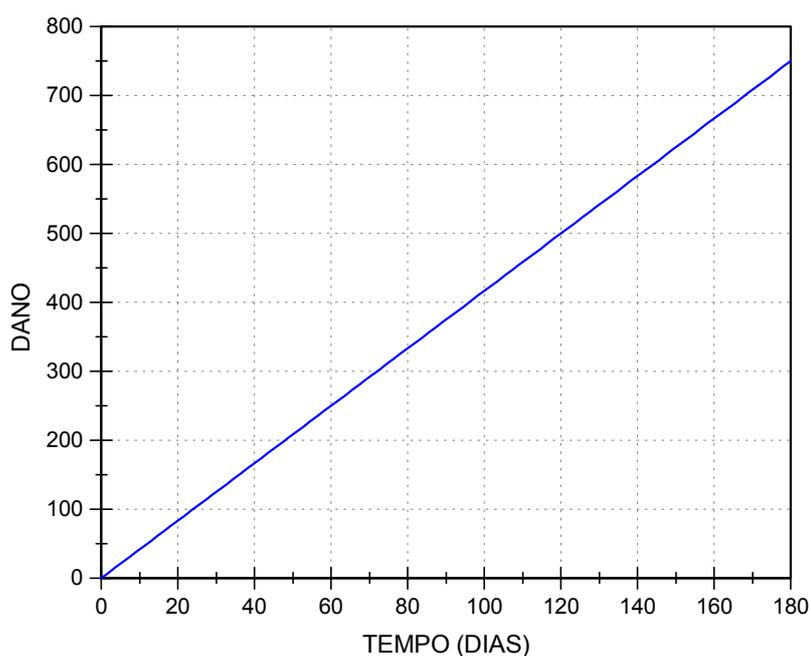
É possível observar que a função dano atinge seu valor limite de início de dano térmico irreversível de 0,53, após aproximadamente 70 dias (2,3 meses). O valor de dano irreversível ( $\Omega=1$ ) é atingido em torno de 4,3 meses (130 dias).

Para ambos os implantes, subretinal e epirretinal, o dano térmico irreversível tem início no mesmo período, apesar de a potência elétrica dissipada pelo implante epirretinal ser maior. Isto indica que o implante epirretinal tem maior capacidade de dissipar calor quando comparado com o implante subretinal. Fato que está de acordo com a literatura, pois o implante epirretinal tem maior capacidade de dissipar calor devido à proximidade do humor vítreo (Margalit et al., 2002).

A Figura 3.21 mostra a função dano calculada pelo modelo de Birngruber (vide Eq. 2.11). Comentários sobre este modelo, foram efetuados quando da primeira apresentação dos seus resultados e são igualmente válidos para os implantes epirretinais.



**Figura 3.20** – Função dano para o implante epirretinal (Modelo de Henriques).



**Figura 3.21** – Função dano para o implante epirretinal (Modelo de Birngruber).

Assim como feito para o implante subretinal, novas análises com outros valores de potência também foram feitos para observar o efeito da potência do chip na temperatura da retina. As potências utilizadas foram:  $0,25\text{ W}$ ;  $2,5\text{ W}$ ; e  $25\text{ W}$ . Assim como observado para o implante subretinal, nos dois primeiros casos o dano térmico só foi observado a partir de 127 dias. Para o último caso, as temperaturas alcançaram valores em torno de  $48^{\circ}\text{C}$ , danificando o tecido termicamente o tecido em aproximadamente 15 minutos. Do mesmo modo, os aumentos de temperatura foram observados apenas na região próxima ao implante.

### 3.6.3 Conclusões dos resultados obtidos

Os resultados indicam que o implante epirretinal, apesar de dissipar uma energia maior, produz danos térmicos semelhantes ao implante subretinal, demonstrando, assim, maior capacidade de dissipar calor, fato que pode ser explicado pela maior proximidade o humor aquoso. Este resultado concorda com citações encontradas na literatura (Margalit et al., 2002). Vale ressaltar que os dados utilizados nas análises são os disponíveis na literatura consultada, e que não são necessariamente os dados utilizados nas pesquisas mais recentes.

Conforme mencionado anteriormente, o modelo de Birngruber para determinar o dano térmico, não está satisfatoriamente validado para temperaturas em torno de  $37^{\circ}\text{C}$ . As análises aqui apresentadas indicam a necessidade de um estudo mais detalhado do referido modelo para esta faixa de temperatura.

O programa desenvolvido se mostrou capaz de calcular, de forma bastante satisfatória, temperaturas e valores do dano térmico para implantes de retina. Uma vez que se consigam valores reais para a potência elétrica empregada, melhores conclusões poderão ser obtidas em relação ao superaquecimento e poderão ser estabelecidos tempos de exposição seguro, a fim de se evitar danos térmicos irreversíveis nos tecidos próximos ao implante.

Apesar de terem sido obtidos resultados satisfatórios, será desenvolvido no capítulo a seguir uma formulação axissimétrica com o intuito de obter resultados mais precisos ao modelo real tridimensional.

## 4. DESCRIÇÃO DA FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA

---

### 4.1 INTRODUÇÃO

No estudo de uma certa classe de problemas a utilização de modelos bidimensionais torna-se muito grosseira e devido à característica axissimétrica dos mesmos, a modelagem tridimensional, com seus custos computacionais associados, pode ser evitada. Desta forma, pode-se desenvolver uma formulação do MVF adequada para lidar com modelos axissimétricos onde apenas a metade de um plano que contém o eixo do sólido de revolução é discretizado. Apesar do pequeno erro percentual encontrado nos resultados com a formulação bidimensional para o olho sem implante, uma formulação axissimétrica foi desenvolvida com o objetivo de se obter resultados mais próximos à realidade.

A formulação do MVF escolhida para a análise numérica foi a mesma adotada para o caso bidimensional descrito no Capítulo 3. Neste capítulo apresentamos a extensão da formulação bidimensional para lidar com modelos axissimétricos discretizados por malhas não-estruturadas triangulares.

### 4.2 EQUAÇÃO GOVERNANTE E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como já foi dito no Capítulo 2, é conveniente formular o problema adotando-se um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Assume-se que o olho é simétrico em relação ao eixo pupilar, coincidente com o eixo  $z$ , o eixo de simetria. Todos os coeficientes são independentes de  $\theta$ , o perfil de temperatura é função apenas de  $(r, z)$ , e o modelo se torna um modelo axissimétrico. A discretização da secção longitudinal é rotacionada em  $2\pi$  radianos em torno do eixo de simetria. O resultado é a discretização do domínio axissimétrico em elementos toroidais de secção transversal triangular e os toróides dos volumes de controle com secção transversal poligonal.

A equação governante do problema estudado neste trabalho é a equação da biotransferência de calor de Pennes (BHTE) em coordenadas cilíndricas, como descrita no Capítulo 2 (Eq. (2.2b)):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_t \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{T} \quad (4.1)$$

onde,  $\rho$  é a massa específica,  $c$  é o calor específico,  $T$  é a temperatura, e  $Q$  representa os termos de fonte ou sumidouro de calor. O domínio espacial do problema é representado por  $\Omega$ , com  $r$  sendo a coordenada radial,  $\theta$ , coordenada angular e  $z$ , a coordenada axial. O intervalo de tempo de integração é representado por  $\mathbf{T} = [t^i, t^f]$ .

O fluxo de calor condutivo é função do gradiente de temperatura sendo modelado pela Lei de Fourier:

$$q_j = -k_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

onde  $k_j$  é a condutividade térmica na direção  $x_j$  que representa a variável espacial independente, e  $j$  varia de um ao número de dimensões espaciais. Em coordenadas cilíndricas  $x_j$  representa as coordenadas  $(r, \theta, z)$ .

Por simplicidade, o meio é considerado ortotrópico com  $\rho, c, k$ , constantes e a Eq. (4.1) representa uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, parabólica e não-homogênea.

O problema representado pela Eq. (4.1) está sujeito a condições iniciais e de contorno. As condições de contorno de interesse podem ser de diferentes tipos:

a) Condição de Contorno de Dirichlet: temperatura prescrita  $\bar{T}$  sobre uma porção do contorno  $\Gamma_D$ .

$$T = \bar{T}, \quad em \ \Gamma_D \ X \ T \quad (4.3)$$

b) Condição de Contorno de Neumann: fluxo de calor normal prescrito  $\bar{q}_n$  sobre  $\Gamma_N$ .

$$-q_j n_j = \bar{q}_n, \quad em \ \Gamma_N \ X \ T \quad (4.4)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal externa ao domínio.

c) Condição de Contorno de Cauchy: condição de contorno mista, ou seja, fluxo prescrito e/ou troca de calor por convecção sobre  $\Gamma_C$ .

$$-q_j n_j = \bar{q}_n + \alpha_S (T - T_\infty), \quad em \ \Gamma_C \ X \ T \quad (4.5)$$

onde  $\alpha_S$  é o coeficiente de transferência de calor e  $T_\infty$  é a temperatura média do ambiente.

A distribuição inicial da temperatura  $\bar{T}^i$  é conhecida para um estágio de tempo inicial  $t^i$ , e a condição inicial é expressa por:

$$T = \bar{T}^i \quad em \ \Omega \ e \ t = t^i \quad (4.6)$$

As equações acima descrevem completamente o modelo matemático proposto, o qual governa a condução de calor em um meio estacionário.

### 4.3 FORMULAÇÃO DOS VOLUMES FINITOS PARA UM MODELO AXISSIMÉTRICO

Como já foi dito anteriormente, admite-se um modelo axissimétrico, onde o eixo das coordenadas  $z$  é o eixo de simetria. Todos os coeficientes são independentes de  $\theta$ , portanto, a distribuição de temperatura é função apenas de  $(r, z)$ .

Desta forma, a equação da condução descrita pela Eq. (4.1) é, então, reescrita de forma adequada como:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad (4.7)$$

Integrando-se a Eq. (4.7) em torno de um volume axissimétrico  $\Omega$ , temos:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.8)$$

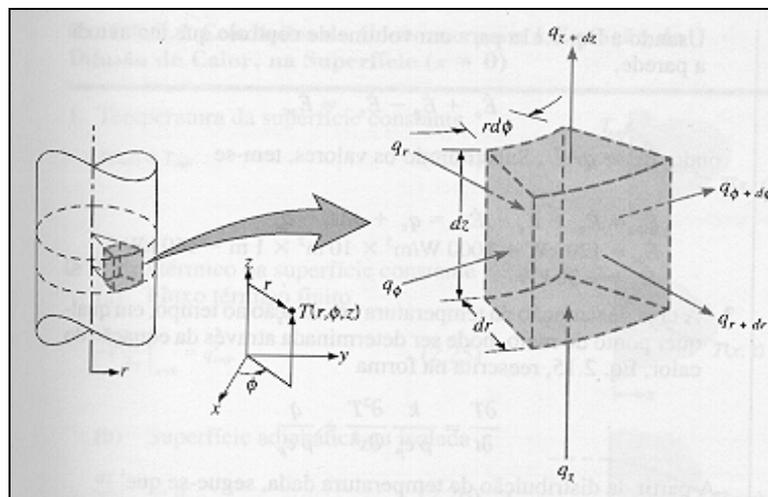
Reescrevendo a equação em termos de fluxos:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq_r) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial q_z}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.9)$$

O volume axissimétrico  $\Omega$  é dado pela expressão a seguir e está representado na Fig. 4.1:

$$d\Omega = r d\theta dr dz = r d\theta dA$$

sendo  $dA = dr dz$ .



**Figura 4.10** - Volume de controle em coordenadas cilíndricas

Como o problema é independente de  $\theta$ , temos que:

$$d\Omega = 2\pi r dA$$

Substituindo na Eq. (4.9), temos:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) 2\pi r dA - \int_A \frac{\partial q_z}{\partial z} 2\pi r dA + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.10)$$

O terceiro termo do lado direito da Eq. (4.10), que representa a integração sobre o volume da fonte térmica, será discretizado posteriormente.

A equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_A \frac{\partial(2\pi r q_r)}{\partial r} dA - \int_A \frac{\partial(2\pi r q_z)}{\partial z} dA + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.11)$$

A Eq. (4.11) pode ser reescrita com notação indicial, que é uma forma mais compacta para descrever a formulação do método dos volumes finitos:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_A \frac{\partial(2\pi r q_j)}{\partial x_j} dA + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.12)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no 1º termo do lado direito da Eq. (4.12), temos:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_S (2\pi r q)_j n_j dS + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.13)$$

Para obter a formulação numérica, via MVF, da Eq. (4.13), procede-se inicialmente a discretização do domínio computacional que no presente trabalho é feita por meio de uma malha de elementos não-estruturada. Constrói-se então a malha dual pelo método das medianas para obter os volumes de controle associados a cada nó. As integrais sobre o volume na Eq. (4.13) são calculadas para cada volume de controle axissimétrico associado ao nó  $I$  da malha, como:

$$\int_{A_I} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA \cong \rho c \frac{\partial T_I}{\partial t} 2\pi r_c A_I \cong \rho c \frac{\partial \hat{T}_I}{\partial t} 2\pi r_c A_I \quad (4.14)$$

onde  $A_I$  é a área da secção transversal do volume de controle associado ao nó  $I$ ,  $r_c$  é o raio do centróide deste volume de controle,  $\hat{T}_I$  representa a temperatura calculada numericamente para o nó  $I$ .

A Figura 4.2 representa um exemplo de volume de controle axissimétrico típico e o sistema de coordenadas adotado.

O centróide do volume de controle é dado por:

$$r_c = \frac{\sum_i r_i A_i}{\sum_i A_i} \quad (4.15)$$

onde  $r_i$  é o centróide de cada sub-elemento que forma o volume de controle. A Fig. 4.3 mostra um sub-elemento quadrangular onde o termo  $r_i$  representa o centróide da região hachurada e  $A_i$  é a área deste sub-elemento. É importante observar que as coordenadas do centróide não

coincidem, necessariamente, com as coordenadas do nó  $I$ . A diferença é particularmente grande no caso de nós de contorno.

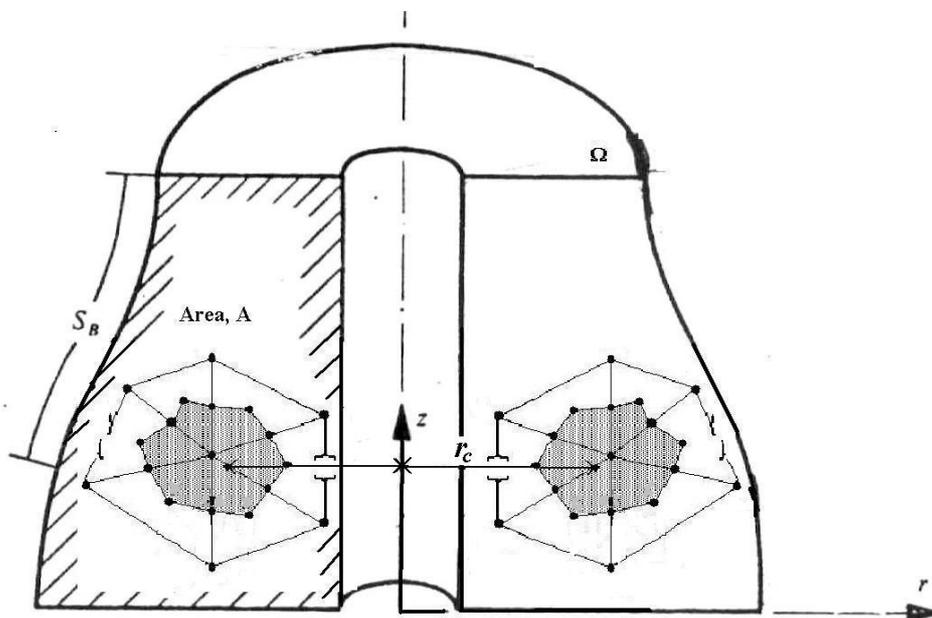


Figura 4.2 - Sólido axissimétrico com um volume de controle típico em destaque.

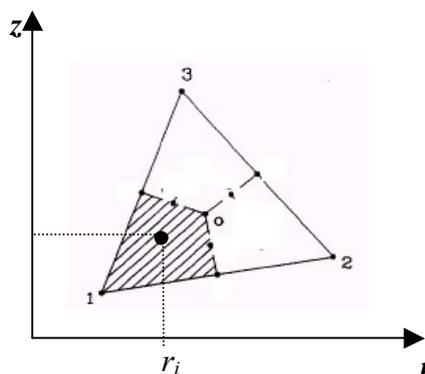


Figura 4.3 - Sub-elemento quadrilateral que compõe a malha.

A integral sobre o contorno presente na Eq. (4.13) é calculada sobre o contorno do volume de controle associado ao nó  $I$ , usando uma representação da malha por arestas (Lyra et al., 2002; Sorensen, 2001), através da aproximação:

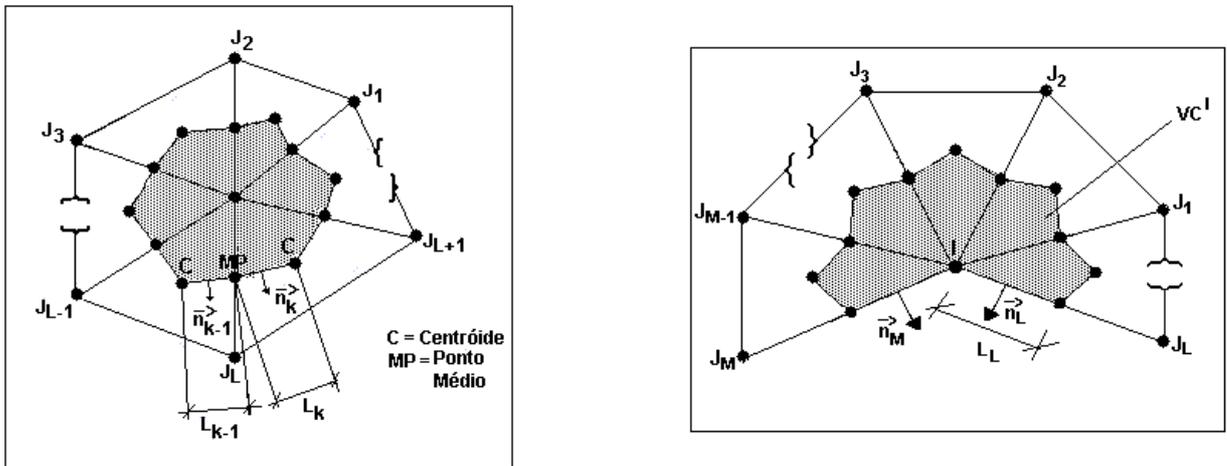
$$\int_S (2\pi r q_j) n_j dS \cong \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} \quad (4.16)$$

Os coeficientes  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  representam as componentes na direção  $j$  do vetor área normal à superfície do volume de controle e que devem multiplicar o fluxo associado à aresta  $IJ_L$  para assim obter a contribuição do fluxo de calor desta aresta para o nó  $I$ . Sendo que primeiro somatório da Eq. (4.16) se dá sobre todas as arestas da malha que estão conectadas ao nó  $I$ , enquanto que o segundo somatório corresponde à contribuição do fluxo em uma aresta  $L$  do contorno conectadas ao nó  $I$ .

A seguir são apresentadas as expressões para o cálculo dos coeficientes de peso  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$ , correspondentes ao modelo axissimétrico proposto no presente trabalho e para o qual foi desenvolvido e validado um sistema computacional.

$$C_{IJ_L}^{AX(j)} = \sum_k A_K n_K^j \quad e \quad D_{IJ_L}^{AX(j)} = A_L n_L^j \quad (4.17)$$

onde,  $A_K = 2\pi r_k L_K$ , com  $r_k = (r_{MP} + r_C)/2$ , ou seja, a coordenada radial do ponto médio da interface  $K$  e  $L_K$  é o comprimento de cada interface  $K$  associada à aresta  $IJ_L$ . Cada interface liga o centróide (C) de um elemento em torno do nó  $I$  ao ponto médio (MP) de uma das arestas que pertencem a este elemento. Para cada aresta do contorno deve-se calcular um coeficiente  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  para cada nó da aresta, para os quais  $A_L = 2\pi r_L L_L$ , onde  $L_L$  é a metade do comprimento da aresta de contorno em consideração, e  $r_L = (3r_I + r_{J_L})/4$ , para o nó  $I$ , e  $r_L = (3r_{J_L} + r_I)/4$ , para o nó  $J_L$ . Vale ressaltar que, ao contrário do caso bidimensional onde tem-se um coeficiente  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  único por aresta, tem-se dois coeficientes por aresta, cada um associado a cada nó. As componentes dos vetores unitários normais à superfície na direção  $j$  são dados por  $n_K^j$  e  $n_L^j$ . A Figura 3.4 mostra as secções transversais de volumes de controle interno e de contorno, respectivamente, e nelas estão detalhados os parâmetros geométricos necessários para calcular os coeficientes.



**Figura 4.4** – Secções transversais de volumes de controle interno e de contorno, respectivamente, e seus parâmetros geométricos.

Considerando as aproximações dadas pelas Equações (4.14) e (4.16), a formulação semidiscreta da Equação (4.13) pode ser, convenientemente, expressa como:

$$\rho c \frac{\partial \hat{T}_I}{\partial t} 2\pi r_C A_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} \right) + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.18)$$

O valor do fluxo  $q_{IJ_L}^{j(A)}$  na aresta é aproximado pela média dos valores dos fluxos dos nós correspondentes:

$$q_{IJ_L}^{j(A)} = \frac{q_I^j + q_{J_L}^j}{2} \quad (4.19)$$

Assume-se que o valor do fluxo  $q_{IJ_L}^{j(S)}$  para arestas do contorno, quando do somatório sobre as arestas do contorno, é igual ao próprio fluxo no nó associado ao volume de controle em questão, isto é:

$$q_{IJ_L}^{j(S)} = q_I^j \quad (4.20)$$

Para calcular os fluxos nas arestas, descritos pelas Equações (4.19) e (4.20), é necessário conhecer o valor nodal dos fluxos e, conseqüentemente, os valores nodais dos gradientes de temperatura. A integral sobre um volume de controle ao redor do nó  $I$  pode ser dada por:

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega = \int_{A_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} 2\pi r dA \quad (4.21a)$$

Visando obter uma expressão semelhante à Eq. (4.12) e com isto utilizar os mesmos coeficientes definidos pela Eq. (4.17), podemos reescrever o lado direito da Eq. (4.21a) da forma:

$$\int_{A_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} 2\pi r dA = 2\pi \int_{A_I} \left[ \frac{\partial(rT)}{\partial x_j} - bT \right] dA = 2\pi \int_{A_I} \frac{\partial(rT)}{\partial x_j} dA - 2\pi \int_{A_I} bT dA \quad (4.21b)$$

onde,

$$b = \begin{cases} 1 & \text{para } x_j = r \quad (\text{direção radial}) \\ 0 & \text{para } x_j = z \quad (\text{direção axial}) \end{cases}$$

Adotando o teorema da divergência e a aproximação usada para calcular a integral sobre um volume de controle ao redor do nó  $I$ , tem-se que:

$$2\pi \int_{A_I} \frac{\partial(rT)}{\partial x_j} \equiv 2\pi \int_{S_I} (rT) n_j dS \quad e \quad 2\pi \int_{A_I} bT dA \equiv 2\pi b T_I A_I \quad (4.21c)$$

Podemos, então, escrever:

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega \equiv 2\pi \int_{S_I} (rT) n_j dS - 2\pi b T_I A_I \quad (4.21d)$$

por outro lado,

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega = \int_{A_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} 2\pi r dA \equiv 2\pi \frac{\partial T_I}{\partial x_j} r_C A_I \quad (4.22)$$

Igualando as Equações (4.21d) e (4.22):

$$\frac{\partial T_I}{\partial x_j} 2\pi r_C A_I \cong 2\pi \int_{S_I} (rT) n_j dS - 2\pi b T_I A_I \quad (4.23)$$

Usando a mesma aproximação adotada para calcular a integral no contorno na Eq. (4.16), tem-se a aproximação nodal do gradiente expressa como:

$$\frac{\partial T_I}{\partial x_j} 2\pi r_C A_I \cong \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} T_{IJ_L}^{(A)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} T_{IJ_L}^{(S)} - 2\pi b T_I A_I \quad (4.24)$$

onde os coeficientes  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  são dados pela Eq. (4.17).

Usando as mesmas aproximações adotadas na determinação dos fluxos nas Equações (4.19) e (4.20), tem-se que:

$$T_{IJ_L}^{(A)} = \frac{T_I + T_{J_L}}{2} \quad \text{e} \quad T_{IJ_L}^{(S)} = T_I \quad (4.25)$$

O uso da expressão (4.24) para calcular os gradientes implica no uso recursivo da aproximação adotada para calcular uma integral sobre o contorno e portanto a discretização do termo de difusão na Eq. (4.18) envolve informações de duas camadas de pontos ao redor do ponto  $I$  em consideração, ou seja, um estêncil estendido. Além disso, se uma malha estruturada quadrilateral (ou com hexaedros) uniforme é adotada, os valores calculados para um dado nó estão desacoplados dos valores dos nós diretamente ligados a ele. Este fato pode levar a oscilações “par-ímpar” (Lyra, 1994 & Sorensen, 2001), uma vez que a contribuição dos nós diretamente conectados ao nó  $I$  é cancelada.

No cálculo do termo de difusividade em uma malha não-estruturada não-uniforme, a adoção de um estêncil estendido e um acoplamento fraco entre nós diretamente interconectados pode levar a alguma perda de robustez e à redução na taxa de convergência do esquema resultante. Para superar tais deficiências, os gradientes são calculados através de um procedimento alternativo, sugerido na literatura (Crumpton et al., 1997 & Sorensen, 2001). Resumidamente, o procedimento consiste em uma nova avaliação do fluxo  $q_{IJ_L}^{j(A)}$  associado ao somatório sobre todas as arestas da malha, considerando-se as contribuições deste fluxo nas direções paralela e normal à aresta. Sendo que para a contribuição paralela é feita uma nova aproximação em diferenças finitas central de segunda ordem, e a componente normal se mantém igual à obtida via aproximação expressa na Eq. (4.24). Este procedimento está descrito detalhadamente em Guimarães, (2003). Procedimento semelhante foi adotado para as arestas do contorno sujeitas a condições de contorno de fluxo prescrito. Com ele foram obtidos melhores resultados para o caso axissimétrico. A componente paralela à aresta do fluxo  $q_{IJ_L}^{j(S)}$  é substituída por uma nova aproximação, também em diferenças finitas central de segunda ordem, enquanto que a componente normal é substituída pelo valor do fluxo prescrito.

Com a nova aproximação do fluxo nas arestas, aqui representadas por  $q_{IJ_L}^{j(A^*)}$ , a Eq. (4.18) pode ser reescrita como:

$$\rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} 2\pi r_C A_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(J)} q_{IJ_L}^{j(A^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(J)} q_{IJ_L}^{j(S)} \right) + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.26)$$

### 4.3.1 Discretização dos Termos de Fontes Térmicas

O termo  $Q$  representa a fonte térmica que pode atuar em diferentes porções do domínio. A equação abaixo reproduz as formas possíveis de fonte de calor que podem ocorrer na equação da biotransferência de calor.

$$Q = \bar{Q}^P + Q^C + Q^R \quad (4.27)$$

onde os sobrescritos  $P$ ,  $C$ ,  $R$  informam se as fontes térmicas ou sumidouros de calor agem em um ponto, uma curva ou uma região, respectivamente. Vale salientar que a expressão proposta na Eq. (4.27) apenas se aplica no caso de fontes térmicas axissimétricas e fontes pontuais quando aplicadas sobre o eixo.

A forma integral da fonte térmica  $Q$ , descrita pela Eq. (4.27), é dada por:

$$\int_{\Omega} Q d\Omega = \bar{Q}^P + \int_{\Gamma_C} Q^C d\Gamma + \int_{\Omega_R} Q^R d\Omega \quad (4.28)$$

Como o modelo trata apenas fontes axissimétricas, o termo de fonte pontual,  $\bar{Q}^P$ , já considera o valor da fonte de calor total para um volume axissimétrico associado a um dado nó  $I$ . O valor desta fonte pontual já está multiplicado por um volume equivalente a  $V = 2\pi r A$ , por conveniência, então, o termo fonte será escrito da forma:

$$\bar{Q}^P \equiv 2\pi Q^P \quad (4.29)$$

O termo  $Q^C$  considera o valor da fonte de calor para uma faixa de largura unitária sobre o plano e ao longo da superfície  $\Gamma_C$ . Desta forma,  $Q_I^C$  fornece a taxa de calor por unidade de área para um dado nó  $I$  sobre a superfície  $\Gamma_C$ . Então, a integral sobre o contorno na Eq. (4.28) é facilmente aproximada para cada parte do contorno fictício ( $\Gamma_{C_I}$ ) associada ao nó  $I$ , como:

$$\int_{\Gamma_{C_I}} Q^C d\Gamma = \int_{S_I} Q^C 2\pi r dS \cong \sum_L Q_I^C 2\pi r_L S_L \quad (4.30)$$

onde,  $S_L = L_L$ , descrito após a Eq. (4.17). Na Equação (4.30), o somatório se dá sobre as duas arestas  $L$  que aproximam a curva  $C$  no ponto  $I$  sob a qual a fonte atua.

Se a fonte de calor por unidade de volume,  $Q^R$ , é distribuída sobre a região  $\Omega_R$ , a integral é, então, calculada em torno de cada volume de controle ao redor do nó  $I$ ,  $\forall I \in \Omega_{R_I}$  e a integral é aproximada da mesma forma que para a Eq. (4.14).

$$\int_{\Omega_{R_I}} Q^R d\Omega = \int_{A_I} Q^R 2\pi r dA \cong Q_I^R 2\pi r_C A_I \quad (4.31)$$

Substituindo as Eqs. (4.29) a (4.31) na Eq. (4.28), tem-se que:

$$\int_{\Omega} Q d\Omega = 2\pi Q^P + \sum_L Q_I^C 2\pi r_L L_L + Q_I^R 2\pi r_C A_I \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Discretização das Condições de Contorno

Para a porção do domínio submetido à condição de contorno de Dirichlet, o valor nodal da temperatura é conhecido, sendo o valor da temperatura prescrita  $\bar{T}_I$ .

A componente paralela é substituída por uma nova aproximação calculada por diferenças finitas central de segunda ordem. Para a imposição da condição de contorno de Neumann, a componente normal do fluxo (vinda do cálculo via MVF) deve ser substituída pelo fluxo prescrito  $\bar{q}_n$ .

A condição de contorno de Cauchy, é implementada de modo semelhante à condição de contorno de Neumann, uma vez que na formulação explícita adotada para o tempo o lado direito da Eq. (4.5) é conhecido se tomarmos o valor da temperatura  $T$  do estágio de tempo anterior.

### 4.3.3 Domínio com Múltiplos Materiais

Quando os problemas de transferência de calor envolvem diferentes propriedades de materiais, a discretização das equações governantes deve garantir a solução correta através da interface das sub-regiões. O gerador de malhas utilizado (Carvalho, 2001; Lyra e Carvalho, 2000) tem flexibilidade para gerar malhas consistentes sobre o domínio com múltiplas regiões.

Durante a fase de pré-processamento dos dados, é armazenado na memória o número da região a qual cada aresta interna e do contorno pertencem, além do valor dos coeficientes de peso. Esta informação é necessária para obter as propriedades do material durante os cálculos envolvidos na formulação do MVF. Quando uma aresta pertence à interface entre duas regiões, os coeficientes são calculados para cada região independentemente. Com isto, cada aresta da interface possui dois coeficientes de peso, definidos de forma semelhante à Eq. (4.17), cada um associado a uma das regiões, como:

$$C_{IJ_L}^{AX(j)(R_1)} = A_{k-1} n_{k-1}^j \quad e \quad C_{IJ_L}^{AX(j)(R_2)} = A_k n_k^j \quad (4.33)$$

onde as áreas  $A_k$  e  $A_{k-1}$  e os vetores  $n_k^j$  e  $n_{k-1}^j$  estão definidos após a Eq. (4.17).

No caso de múltiplos materiais, a equação discreta (4.26) é agora substituída por:

$$\rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} 2\pi r_C A_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} + \sum_{k=1}^2 \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)(R_k)} q_{IJ_L}^{j(S_k^*)} \right) + \quad (4.34)$$

$$+ 2\pi Q^P + \sum_L Q_I^C 2\pi r_L S_L + Q_I^R 2\pi r_C A_I$$

Vale ressaltar que o terceiro somatório do lado direito apenas se torna diferente de zero quando o nó  $I$  está na interface entre duas ou mais regiões de propriedades diferentes. Os fluxos nas arestas da interface  $q_{IJ_L}^{j(S_k^*)}$  são calculados da mesma forma que os fluxos sobre todas as arestas da malha  $q_{IJ_L}^{j(A^*)}$ .

Os valores dos gradientes e respectivos fluxos são obtidos em três etapas. Em primeiro lugar é feito um somatório sobre as arestas do contorno com as condições de contorno de Neumann e Cauchy prescritas. Em segundo lugar é feito um somatório sobre todas as arestas do domínio (internas e de contorno); a terceira etapa consiste em somatório duplo sobre as

arestas das interfaces. Durante cada somatório são utilizados o coeficiente e propriedades do material correspondentes a cada lado.

Como a constante  $2\pi$  aparece em todos os termos da equação, explicitamente ou implicitamente, como no caso dos coeficientes  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$ , pode ser simplificada, não sendo implementada na prática nem no cálculo dos coeficientes (Eq. 4.17) nem nos termos da Eq. (4.34).

#### 4.4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

A discretização no tempo é feita através de uma formulação explícita (“Euler forward”), onde as temperaturas dos nós vizinhos a  $I$  são avaliadas no instante anterior, ou seja, já são conhecidas. É possível, portanto, explicitar a incógnita da equação ( $T_I$ ) em função das temperaturas vizinhas já conhecidas do instante anterior. Cada nó possui uma equação e estas equações não são acopladas entre si, podendo ser resolvidas uma a uma, tantas vezes quantos forem os níveis de tempo desejados (Maliska, 1995).

A aproximação do termo transiente que aparece nas Eq. (4.26) e (4.34) é dada por:

$$\frac{dT_I}{dt} = \frac{T_I^{n+1} - T_I^n}{\Delta t} \quad (4.35)$$

onde  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  é comprimento do intervalo de tempo e os sobrescritos representam os níveis de tempo.

Após a discretização no tempo a Eq. (4.34) fica:

$$\rho c \frac{T_I^{n+1} - T_I^n}{\Delta t} 2\pi r_C A_I = \left[ - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} + \sum_{k=1}^2 \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)(R_k)} q_{IJ_L}^{j(S_k^*)} \right) + 2\pi Q^P + \sum_L Q_I^C 2\pi r_L S_L + Q_I^R 2\pi r_C A_I \right]^n \quad (4.36)$$

onde os fluxos são avaliados com as temperaturas calculadas no instante anterior. A solução do regime permanente é obtida com a evolução ao longo do tempo quando  $\partial T/\partial t \rightarrow 0$ .

A precisão deste esquema é apenas de primeira ordem e o  $\Delta t$  tem que ser escolhido de modo a satisfazer a condição de estabilidade (Zienkiewicz & Morgan, 1983). Outras alternativas podem ser implementadas se uma precisão maior no tempo é necessária, tais como: o método trapezoidal generalizado (Lyra, 1994); esquema de Runge-Kutta de múltiplo estágio Lyra, 1994); ou esquemas envolvendo mais que dois intervalos de tempo (Sorensen, 2001).

#### 4.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A etapa de análise via MVF propriamente dita pode ser descrita pelo algoritmo abaixo:

1. Entrada de dados: modelo discreto, propriedades físicas e parâmetros de controle;
2. Cálculo do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) baseado no limite de estabilidade;

- 
3. Cálculo do valor inicial da função dano;
  4. Cálculo dos termos de fonte de calor sobre o contorno e domínio;
  5. Imposição de condição de contorno de Dirichlet nos nós correspondentes do contorno;
  6. Cálculo dos gradientes e fluxos de calor via MVF;
  7. Cálculo dos fluxos paralelos às arestas do contorno por diferenças finitas (DF);
  8. Decomposição dos fluxos nas componentes paralela e normal às arestas do contorno e substituição da componente paralela pela componente vinda do cálculo por DF, apenas para os nós com condição de contorno de Neumann ou de Cauchy;
  9. Imposição dos fluxos de calor prescritos (condição de contorno de Neumann ou de Cauchy) nos pontos nodais correspondentes do contorno, através da substituição da componente normal do fluxo pelos fluxos de calor prescritos;
  10. Substituição das componentes paralelas dos fluxos das arestas do domínio pelas aproximações por DF;
  11. Atualização das temperaturas de forma explícita e cálculo do valor acumulado da função dano;
  12. Impressão dos resultados;
  13. Iterar entre os itens 4 a 12 até completar o tempo de análise desejado ou alcançar um novo estado estacionário.

## 5. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

---

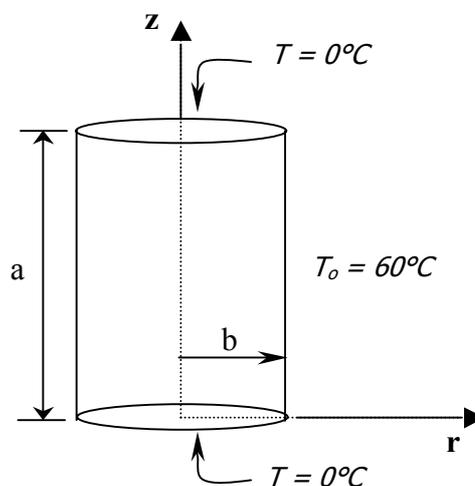
### 5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é destinado a apresentar alguns exemplos que demonstrem as habilidades do esquema numérico proposto descrito no Capítulo 4 e validem o sistema computacional desenvolvido. O primeiro exemplo apresenta um problema simples, sem geração de calor, que permite verificar a implementação da condição de contorno de Dirichlet e Neumann. O segundo, também sem geração de calor, avalia as condições de contorno de Neumann e Cauchy. Os dois últimos exemplos mostram problemas unidimensionais com geração de calor e envolve as três condições de contorno.

O modelo apresentado no Capítulo 4, bem como sua implementação, foram desenvolvidos para problemas no regime transiente. As soluções de problemas no estado estacionário foram obtidas através da análise de um estado transitório, até que se obtivesse um resíduo com valor menor que  $10^{-5}$ .

### 5.2 CILINDRO SÓLIDO SEM GERAÇÃO DE CALOR E COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET

O primeiro exemplo, consiste em calcular o perfil de temperatura em estado estacionário em um cilindro sólido sem geração de calor de dimensões  $0 \leq r \leq b$  e  $0 \leq z \leq a$ . As superfícies em  $z = 0$  e  $z = a$  são mantidas à temperatura de zero grau. A superfície em  $r = b$  é mantida à temperatura constante  $T_o = 60^\circ\text{C}$ . O cilindro é feito com um material que possui uma condutividade térmica  $k = 2,0 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , massa específica  $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$  e calor específico,  $c = 1,0 \text{ J/kg K}$ . As dimensões do cilindro são  $b = 6 \text{ m}$  e  $a = 5 \text{ m}$ . No tempo  $t = 0$ , a placa se encontrava a  $T = 5^\circ\text{C}$ . A Figura 5.1 indica as condições de contorno para este problema.



**Figura 5.1** - Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.2.

A formulação matemática deste problema é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} T = T_0 \quad \text{em} \quad r = b & & T = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{em} \quad r = 0 \quad (\text{simetria}) & & T = 0 \quad \text{em} \quad z = a \end{aligned} \quad (5.2)$$

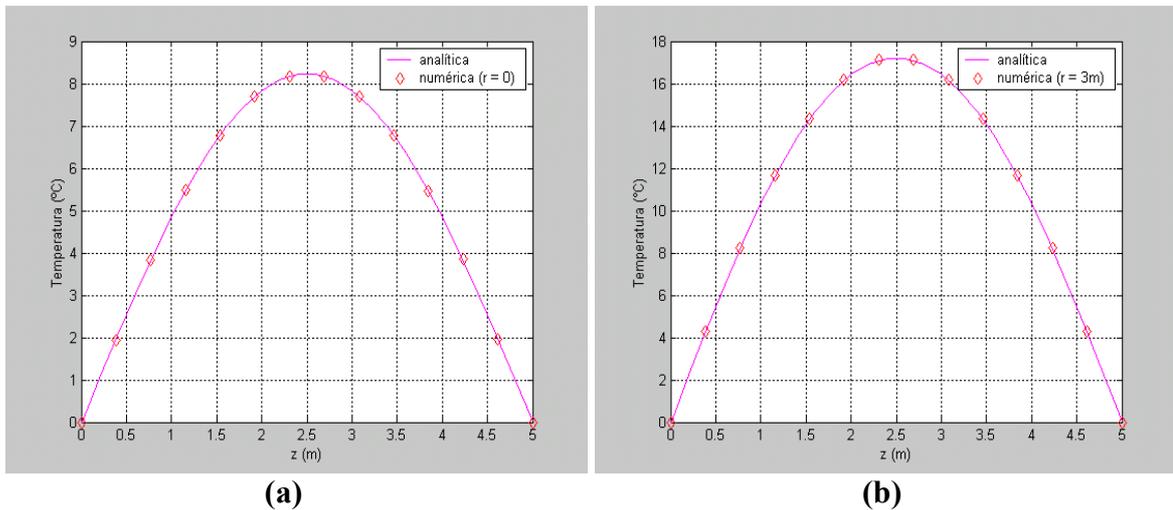
A solução analítica que satisfaz as condições de contorno do problema pode ser encontrada em Özisik (1980) e está descrita na Eq. (5.3).

$$T(r, z) = \frac{2T_0}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos(\eta_m a)] [I_0(\eta_m r) \text{sen}(\eta_m z)]}{\eta_m I_0(\eta_m b)} \quad (5.3)$$

onde,  $\eta_m = \frac{m\pi}{a}$  e  $I_0(x)$  é a função modificada de Bessel de 1ª espécie e ordem zero.

Para a solução numérica do problema, foi utilizada uma malha triangular não-estruturada com 390 elementos e 225 nós. A solução foi obtida quando o perfil de temperatura atingiu o estado permanente.

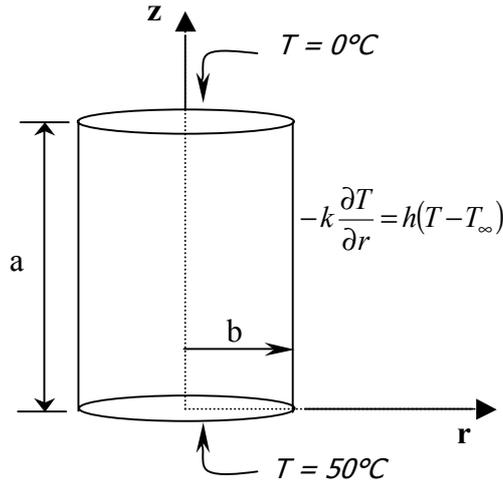
As Figuras 5.2(a) e 5.2(b) mostram as distribuições de temperatura e a comparação com a solução analítica para o eixo em  $r = 0$  e em  $r = 3m$ . Os resultados obtidos numericamente no domínio apresentaram boa aproximação com os valores analíticos, sendo o maior erro encontrado igual a 0,73%.



**Figura 5.2** – (a) Perfil de temperatura no cilindro em  $r = 0$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .  
 (b) Perfil de temperatura no cilindro em  $r = 3m$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .

### 5.3 CILINDRO SÓLIDO SEM GERAÇÃO DE CALOR E COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CAUCHY

Um segundo exemplo é apresentado, onde é calculado o perfil de temperatura em estado estacionário para um cilindro sólido sem geração de calor, de dimensões e propriedades físicas idênticas ao primeiro exemplo. A superfície em  $z = 0$  agora é mantida a uma temperatura constante  $T_o = 50^\circ\text{C}$ , a superfície em  $z = a$  é mantida a zero grau, e a superfície em  $r = b$  dissipa calor por convecção para um ambiente também a zero grau com coeficiente de transferência de calor  $h = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$ . No tempo  $t = 0$ , a placa se encontrava a  $T = 25^\circ\text{C}$ . A Figura 5.3 indica as condições de contorno para o problema.



**Figura 5.3** - Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.3.

A formulação matemática deste problema é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5.4)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - 0) \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -HT \quad \text{em } r = b$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{em } r = 0 \text{ (simetria)} \quad (5.5)$$

$$T = T_o \quad \text{em } z = 0$$

$$T = 0 \quad \text{em } z = a$$

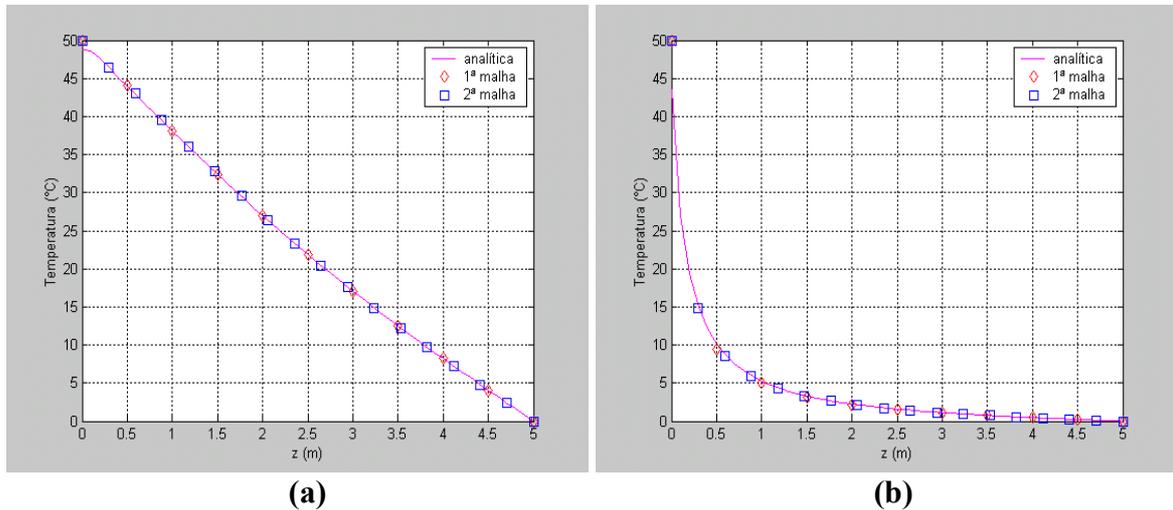
onde  $H = h/k$ .

A solução analítica da Eq. (5.4) que satisfaz as condições de contorno dadas pelas Eqs. (5.5) pode ser encontrada em Özisik (1980) e é dada por:

$$\frac{T(r, z)}{T_o} = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H}{H^2 + \beta_m^2} \frac{\sinh \beta_m (a - z)}{\sinh \beta_m a} \frac{J_o(\beta_m r)}{J_o(\beta_m b)} \quad (5.6)$$

onde os coeficientes  $\beta_m$  são as raízes positivas da equação  $\beta_m J_1(\beta_m b) = H J_o(\beta_m b)$  e  $J_o(x)$  e  $J_1(x)$  são as funções de Bessel de 1ª espécie de ordens zero e um, respectivamente.

Para a solução numérica do problema, foram utilizadas duas malhas triangulares não-estruturadas, a primeira malha com 146 nós e 246 elementos e a segunda, com 403 nós e 730 elementos. A solução foi obtida quando o perfil de temperatura atingiu o estado permanente. A Figura 5.4 mostra a distribuição de temperatura da 1ª e 2ª malha e a comparação com a solução analítica. A solução numérica para este exemplo se apresentou satisfatória para todo o domínio. Comparando com a solução analítica, o maior erro encontrado foi igual a 1,3% e a 0,47%, para a 1ª e 2ª malha respectivamente.



**Figura 5.4** – (a) Distribuição de temperatura no cilindro em  $r = 0$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .  
 (b) Distribuição de temperatura no cilindro em  $r = 6m$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .

### 5.4 CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM UM CILINDRO SÓLIDO COM GERAÇÃO DE CALOR

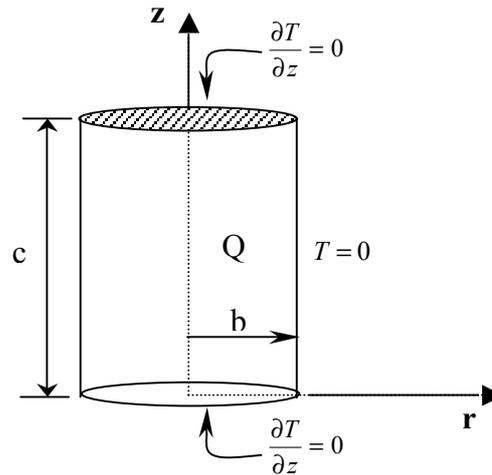
Este terceiro exemplo considera a geração de calor em um cilindro circular maciço também em condições de estado estacionário. Um cilindro, de altura  $z = a$  e raio  $r = b$ , gera calor a uma taxa constante de  $Q = 2,4 \text{ W/m}^3$ . As superfícies superior ( $z = a$ ) e inferior ( $z = 0$ ) são mantidas isoladas, enquanto a superfície do cilindro, em  $r = b$ , é mantida à temperatura constante e igual a  $0^\circ\text{C}$ . As dimensões do cilindro são  $a = 5 \text{ m}$  e  $b = 5 \text{ m}$ . O cilindro é feito de um material cuja condutividade térmica é  $k = 2,0 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , massa específica  $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$  e calor específico,  $c = 1,0 \text{ J/kg K}$ . A placa estava inicialmente a  $0^\circ\text{C}$ . A Figura 5.5 indica as condições de contorno para este problema, lembrando que a condição de fluxo nulo no eixo  $z$  se deve à simetria do problema.

Devido às condições de isolamento não há fluxo de calor na direção  $z$ , portanto o problema pode ser tratado como um problema unidimensional. A formulação matemática do problema estacionário é apresentada a seguir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{Q}{k} = 0 \tag{5.7}$$

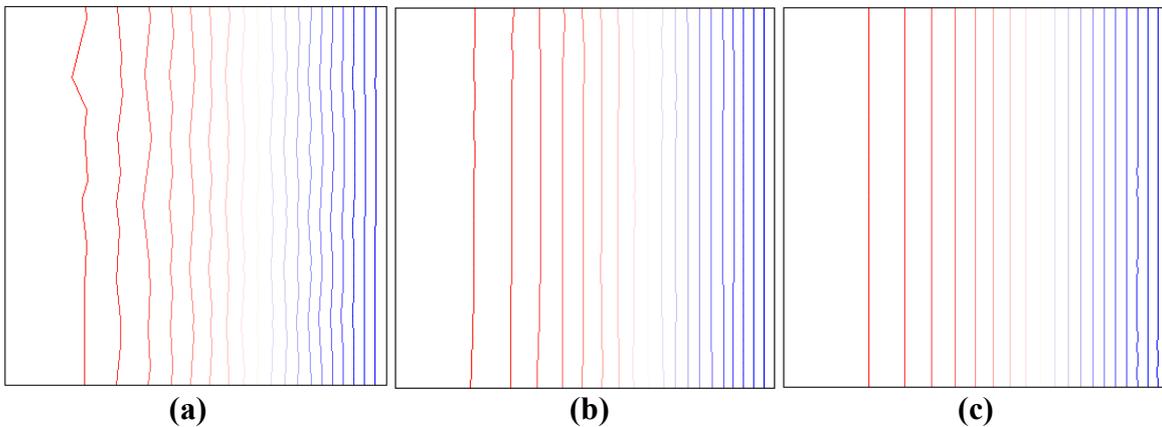
Aplicando as condições de contorno obtém-se, como solução da Eq. (5.7), a seguinte expressão:

$$T = \frac{Q}{4k} (b^2 - r^2) \tag{5.8}$$

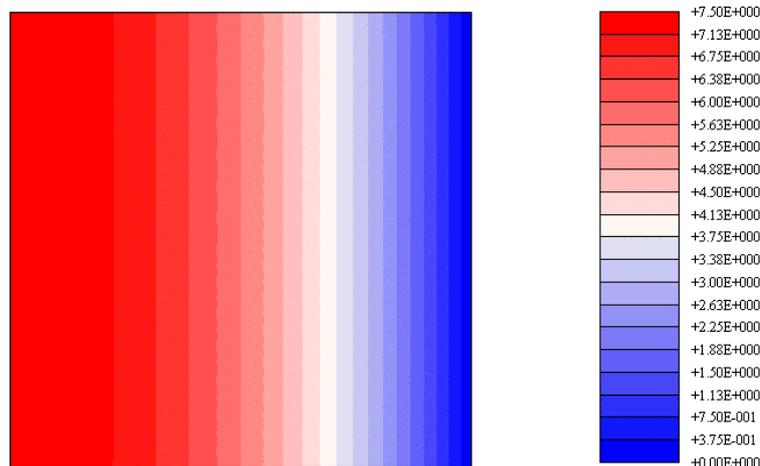


**Figura 5.5** - Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.4.

Para resolver numericamente o problema, com as ferramentas descritas anteriormente, foram geradas três malhas triangulares não-estruturadas e uniformes, a primeira com 37 nós e 52 elementos, a segunda, com 66 nós e 102 elementos e a terceira com 735 nós e 1368 elementos. As isolinhas de temperatura para as três malhas são apresentadas pela Fig. 5.6, mostrando a melhoria do comportamento da solução numérica com o refinamento da malha. A Figura 5.7 mostra as isoformas de temperatura para a 3ª malha. A distribuição de temperatura após atingir o estado estacionário e a comparação com a solução analítica está representada na Fig. 5.8. Para melhor visualização dos resultados, apenas a 1ª e 2ª malhas são apresentadas na Fig. 5.8.



**Figura 5.6** – Isolinhas de temperatura para: (a) 1ª malha; (b) 2ª malha; (c) 3ª malha.



**Figura 5.7** – Isofaixas de temperatura para a 3ª malha.

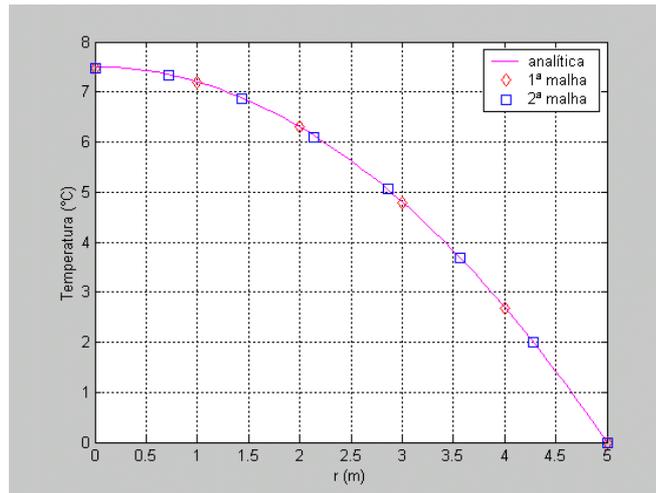


Figura 5.8 - Distribuição de temperatura em  $z = 0$  e  $0 \leq r \leq 5,0$ .

### 5.5 CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM UM CILINDRO SÓLIDO COM GERAÇÃO DE CALOR E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CAUCHY

Este quarto exemplo é idêntico ao anterior, mas agora a superfície em  $r = b$  dissipa calor por convecção para um ambiente a  $T_\infty = 4^\circ\text{C}$ . As propriedades físicas são as mesmas utilizadas no exemplo anterior e o coeficiente de transferência de calor é  $h = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$ . O cilindro estava inicialmente a  $0^\circ\text{C}$ . A Fig. 5.9 indica as condições de contorno para o problema.

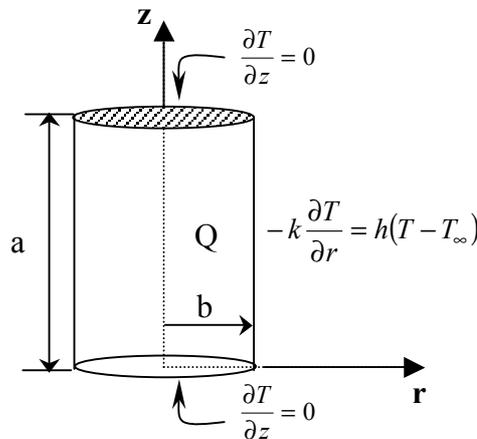
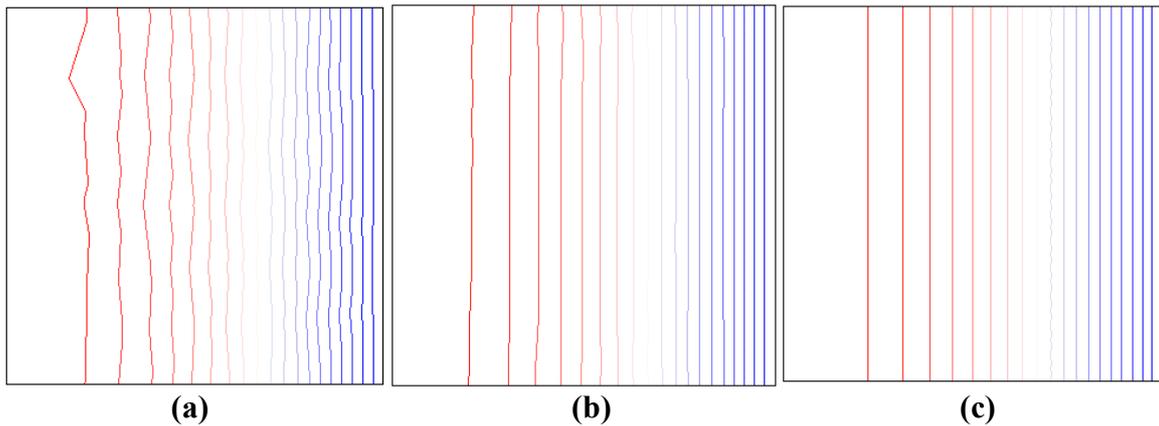


Figura 5.9 - Condições de contorno em um cilindro maciço considerado no Ex. 5.5.

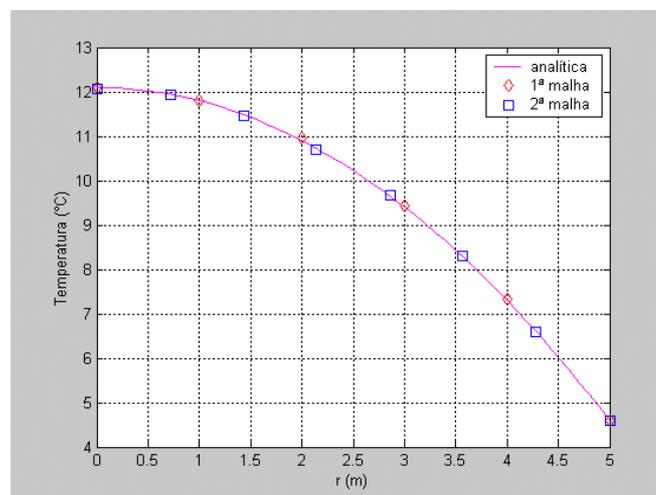
O problema também é descrito pela Eq. (5.7), e com a aplicação das novas condições de contorno, obtém-se a solução analítica para o problema:

$$T = \frac{Q}{4k} (b^2 - r^2) + \frac{bQ}{2h} + T_\infty \tag{5.9}$$

Foram utilizadas as mesmas malhas usadas do exemplo anterior. As isolinhas de temperaturas para as três malhas são apresentadas na Fig. 5.10. É possível notar que a solução numérica tende a se aproximar do comportamento esperado com o refinamento da malha. A distribuição de temperatura, após atingir o estado estacionário para a 1ª e 2ª malha, e a comparação com a solução analítica é apresentada na Fig. 5.11.



**Figura 5.10** – Isolinhas de temperatura para: (a) 1ª malha; (b) 2ª malha; (c) 3ª malha.



**Figura 5.11** - Distribuição de temperatura no cilindro em  $z = 0$  e  $0 \leq r \leq 5,0$ .

## 5.6 CONCLUSÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS

Através dos exemplos mostrados, observa-se que a ferramenta possui habilidade para fornecer as soluções numéricas satisfatórias nos domínios analisados, validando, assim, o sistema computacional desenvolvido. O programa desenvolvido deverá ser empregado na solução de problemas mais complexos com simetria axissimétricas para simulação de aplicações da biotransferência de calor.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

---

A tecnologia, muito recente, de implantes ou próteses de retina motivou a análise feita no presente trabalho, principalmente porque estão sendo feitas, simultaneamente, implantes em pessoas que perderam totalmente a visão; testes em animais; e simulações de comportamento térmico e/ou clínico de atividades da camada neural remanescente.

A ferramenta numérica disponível e que foi aqui utilizada era uma modelagem bidimensional, através do MVF em malhas não-estruturadas. Foram analisados, com os últimos dados encontrados na literatura, os dois tipos de implantes – o epirretinal e o subretinal. Sabe-se, porém, que o sigilo industrial impede a divulgação de dados reais dos implantes que já estão sendo utilizados. A concorrência comercial tornou-se especialmente acirrada desde que foram autorizados testes em seres humanos. Foi efetuada, para validação do modelo, uma comparação da análise térmica do olho, sem a presença de implantes com um modelo axissimétrico em elementos finitos. A pequena diferença alcançada (máximo de 1,7%) validou o uso da ferramenta bidimensional. Temperaturas e valores obtidos pela função dano foram maiores para os implantes epirretinais, como esperado, uma vez que neste caso, a potência elétrica dissipada pelo *chip* é maior.

Os períodos de duração dos implantes são longos (em média de 3 a 6 meses), portanto a análise de temperatura durante este período através de uma discretização temporal explícita é de alto custo computacional, pois os intervalos de tempo são muito pequenos devido a geometria do problema. Sugere-se, que para períodos grandes de análise como estes, seja implementada uma discretização implícita (já em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa), pois assim será possível utilizar intervalos de tempo maiores.

Devido às pequenas dimensões do olho humano, um tratamento bidimensional pode levar a resultados não muito precisos. Para que este trabalho tivesse resultados mais confiáveis foi desenvolvida uma formulação axissimétrica para o método dos volumes finitos. Alguns exemplos de geometria mais simples foram usados com sucesso para validar o modelo.

A formulação axissimétrica foi desenvolvida com o intuito de se evitar uma formulação tridimensional e seus custos computacionais, porém como esta última já está sendo desenvolvida pelo grupo de pesquisa e deverá ser utilizada no futuro, em aplicações como a aqui apresentada.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

---

- AGARD Report 787, *Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows*, França, 1992.
- AMARA, E.H., “Numerical investigations on thermal effects of laser-ocular media interaction”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 38 (13), pp. 2479-2488, 1995.
- BALIGA, B.R. & PATANKAR, S.V., “A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer”, *Numerical Heat Transfer*, vol. 6, pp. 245-261, 1983.
- BARTH, T. J., “Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations”, *AGARD Report 787*, pp. 6.1-6.61, 1992.
- BOUGHAMOURA, A., BELMABROUK, H., NASRALLAH, S.B., “Numerical study of a piston-driven laminar flow and heat transfer in a pipe with a sudden expansion”, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, pp. 591-604, 2003.
- BOWMAN, H. F., “Estimation of tissue blood flow”, In: SHITZER, A. & EBERHART, R.C., *Heat Transfer in Medicine and Biology – Analysis and Applications*. Nova York, Plenum Press, vol. 1, cap 9, pp. 193-230, 1985.
- CARVALHO, D. K. E. de, “Um sistema computacional para geração e adaptação de malhas não-estruturadas bidimensionais”, Recife, (Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Pernambuco), 70p, 2001.
- CHARNY, C.K., “Mathematical models of bioheat equation”. In: CHO, Y. I., ed. *Advances in Heat Transfer: Bioengineering Heat Transfer*, Academic Press, Inc. vol. 22, pp. 19–155, 1992.
- CHOW, A.Y. & CHOW, V.Y., “Subretinal electrical stimulation of the rabbit retina”, *Neuroscience Letters*, vol. 225, pp. 13-16, 1997.
- CHOW, A.Y., PARDUE, M.T., PERLMAN, J.I., BALL, S.L., CHOW, V.Y., HETLING, J.R., PEYMAN, G.A., LIANG, C., STUBBS Jr., E.B., PEACHEY, N.S., “Subretinal implantation of semiconductor-based photodiodes: durability of novel implant designs”, *Journal of Rehabilitation Research and Development*, vol. 39 (3), pp. 313-322, 2002.
- COOPER, T.E. & TREZEK, G.J., “Correlation of thermal properties of some human tissue with water content”, *Aerospace Medicine*, vol. 42(1), pp. 24-27, 1971.
- CRUMPTON, P.I., MOINIER, P., GILES, M.B.T.J., “An unstructured algorithm for high Reynolds number flows on highly stretched grids”. In: TAYLOR, C. & CROSS, J. T, ed., *Numerical Methods In Laminar and Turbulent Flow*, Pineridge Press, pp. 561-572, 1997.

- DILLER, K. R., “Modeling of bioheat transfer processes at high and low temperatures”. In: CHO, Y. I., ed., *Advances in Heat Transfer: Bioengineering Heat Transfer*, Academic Press, Inc., vol. 22, pp. 157–357, 1982.
- DILLER, K.R., HAYES, L.J., BLAKE, G.K., “Analysis of alternate models for simulating thermal burns”, *Journal of Burn Care & Rehabilitation*, pp. 177-189, 1991.
- DUANE, T.D. & JAEGER, E.A., *Biomedical foundations of ophthalmology*, Ed. Harper & Row, 1987, vol. 1.
- GRUNWALD, J.E., RIVA, C.E., BAINE, J., BRUCKER, A.J., “Total retinal volumetric blood flow rate in diabetic patients with poor glycemic control”, *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, vol. 33(2), pp. 356-363, 1992.
- GUAN, K., HUDSON, C., FLANAGAN, J.G., “Variability and repeatability of retinal blood flow measurements using the Canon Laser Blood Flowmeter”, *Microvascular Research*, vol. 65, pp. 145-151, 2003.
- GUIMARÃES, C.S.C., “Modelagem Computacional da Biotransferência de Calor no Tratamento por Hipertermia em Tumores de Duodeno através do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não Estruturadas”, Recife, 2003. 80p. (Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Pernambuco).
- JAIN, R.K., “Analysis of heat transfer and temperature distributions in tissues during local and whole-body hyperthermia”. In: SHITZER, A. & EBERHART, R. C., *Heat Transfer in Medicine and Biology – Analysis and Applications*. Nova York, Plenum Press, cap. 16, vol. 2, pp. 3-53, 1985.
- HÄMMERLE, H., KOBUCH, K., KOHLER, K., NISCH, W., SACHS, H., STELZLE, M., “Biostability of micro-photodiode arrays for subretinal implantation”, *Biomaterials*, vol. 23, pp. 797-804, 2002.
- HUMAYUN, M.S., de JUAN Jr., E., WEILAND, J.D., DAGNELIE, G., KATONA, S., GREENBERG, R., SUZUKI, S., “Pattern electrical stimulation of the human retina”, *Vision Research*, vol. 39, pp. 2569-2576, 1999.
- HUMAYUN, M.S., WEILAND, J.D., GILDO, Y.F., GREENBERG, R., WILLIAMSON, R., LITTLE, J., MECH, B., CIMMARUSTI, V., VAN BOEMEL, G., DAGNELIE, G., de JUAN Jr., “Visual perception in a blind subject with a chronic microelectronic retinal prosthesis”, *Vision Research*, vol. 43, pp. 2573-2581, 2003.
- INCROPERA, F.P., DeWITT, D.P., *Fundamentos da transferência de calor e de massa*, 4ª ed., Rio de Janeiro, Ed. LTC, 1998.
- LIMA, R. de C.F., LYRA, P.R.M., GUIMARÃES, C.S.C., CARVALHO, D.K.E. de, “Solução da equação da biotransferência de calor através do uso do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas – Análise de um tumor não operável de duodeno”, In: XXIV CILAMCE - IBERIAN LATIN - AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Ouro Preto, MG, publicado em CD-ROM, 2003.

- LIMA, R de C.F. de, HOLANDA, G.S., SILVA, G.M.L.L. da, “Análise do dano térmico provocado no olho em cirurgias refrativas de hipermetropia – uma comparação entre diversos modelos para simular queimas térmicas”, In: CONEM 2002 - CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, Belém – PA, a se realizar no período de 10 a 13 de Agosto de 2004.
- LIU, W., SIVAPRAKASAN, M., SING., P.R., BASHIRULLAH, R.W., WANG, G., “Electronic Visual Prosthesis”, *Artificial Organs*, vol. 27(11), pp. 986-995, 2003.
- LYRA, P.R.M., “Unstructured grid adaptive algorithms for fluid dynamics and heat conduction”, Ph.D. thesis C/PH/182/94, University of Wales – Swansea, 1994.
- LYRA, P.R.M. & CARVALHO, D.K.E. de, “A Flexible unstructured mesh generator for transient anisotropic remeshing”, In: ECCOMAS 2000 – EUROPEAN CONGRESS ON COMP. METH. IN APPLIED SCIENCES AND ENG., Barcelona, Espanha, publicado em CD-ROM, 2000.
- LYRA, P.R.M., LIMA, R de C.F. de, GUIMARÃES, C.S.C., CARVALHO, D.K.E. de, “Uma formulação com estrutura de dados por arestas do método dos volumes finitos na solução de problemas de potencial”, In: MECOM'2002 - FIRST SOUTH AMERICAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL MECHANICS, *Anais*, Parana - Santa Fé, Argentina, 2002.
- LYRA, P.R.M., WILLMERSDORF, R.B., MARTINS, M.A.D., COUTINHO, Á.L.G.A., “Parallel implementation of edge-based finite element schemes for compressible flows on unstructured grids”, In: VECPAR'98 – THIRD INTERNATIONAL MEETING ON VECTOR AND PARALEL PROCESSING, Porto, Portugal, pp. 99-111, 1998.
- MALISKA, C.R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional; Fundamentos e Coordenadas Generalizadas*, Rio de Janeiro, Ed. LTC, 1995.
- MARGALIT, E., MAIA, M., WEILAND, J.D., GREENBERG, R.J., FUJII, G.Y., TORRES, G., PIYATHAISERE, D.V., O'HEARN, T.M., LIU, W., LAZZI, G., DAGNELIE, G., SCRIBNER, D.A., de JUAN JR, E., HUMAYUN, M.S., “Retinal prosthesis for the blind”, *Survey of ophthalmology*, vol. 47 (4), pp. 335-356, July-August 2002.
- MASSON, C. & BALIGA, B.R., “A Control-Volume Finite Element Method for Dilute Gas-Solid Particle Flows”, *Computers Fluids*, vol. 23(8), pp.1073-1096, 1994.
- MEYER, J.U., “Retina implant – a bioMEMS challenge”, *Sensors and Actuators A*, vol. 97-98, pp. 1-9, 2002.
- MTOOL: Programa de visualização. Endereço eletrônico. <http://www.tecgraf.puc-rio.br>.
- NADIG, M.N., “Development of a silicon retinal implant: cortical evoked potentials following focal stimulation of the rabbit retina with light and electricity”, *Clinical Neurophysiology*, vol. 110, pp. 1545-1553, 1999.
- NETTER, F. H. & DALLEY II, A. F., *Atlas of Human Anatomy*, 2<sup>nd</sup> ed., Novartis, USA, 1997.

- ÖZISIK, M.N., *Heat Conduction*, New York, Ed. John Wiley & Sons, 1980.
- PEACHEY, N.S. & CHOW, A.Y., “Subretinal implantation of semiconductor-based photodiodes: progress and challenges”, *Journal of Rehabilitation Research and Development*, vol. 36 (4), 1999.
- PERAIRE, J., PEIRÓ, J. & MORGAN, K., “Finite element multigrid solution of Euler flows past installed aero-engines”, *J. Computational Mechanics*, vol.11, pp. 433-451, 1993.
- RIVA, C.E., GRUNWALD, J.E., SINCLAIR, S.H., PETRIG, B.L., “blood flow and volumetric flow rate in human retinal vessels”, *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, vol. 26, pp. 1124-1132, 1985.
- RIVA, C.E., GRUNWALD, J.E., PETRIG, B.L., “Autoregulation of human retinal blood flow – An investigative with laser doppler velocimetry”, *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, vol. 27, pp. 1706-1712, 1986.
- ROL, P., FANKHAUSER, F., GIGER, H., DÜRR, U., KWASNIEWSKA, S., “Transpupillar laser phototherapy for retinal and choroidal tumors: a rational approach”, *Graefe’s Arch Clin Exp Ophthalmol*, vol. 238, pp. 249-272, 2000.
- SCHWIEBERT, L., GUPTA, S.K.S., AUNER, P.S.G., ABRAMS, G., LEZZI, R., McALLISTER, P., “A biomedical smart sensor for the visually impaired”, *IEEE Sensors*, paper n° 62-2, jun, 2002.
- SCHUBERT, M.B., HIERZENBERGER, A., LEHNER, H.J., WERNER, J.H., “Optimizing photodiode arrays for the use as retinal implants”, *Sensors and Actuators*, vol. 74, pp. 193-197, 1999.
- SCOTT, J.A. “A finite element model of heat transport in the human eye”, *Phys. Med. Biol*, vol. 33 (2), pp.227-241, 1988.
- SORENSEN, K.A., “A multigrid procedure for the solution of compressible fluid flows on unstructured hybrid meshes”, Ph.D. thesis C/PH/251/01, University of Wales – Swansea, 2001.
- STURESSON, C. & ANDERSSON-ENGELS, S., “A mathematical model for predicting the temperature distribution in laser-induced hypertermia. Experimental evaluation and applications”, *Physics in Medicine and Biology*, vol. 40(12), pp. 2037-2052, 1995.
- WELCH, A.J., WISSLER, E.H., PRIEBE, L.A., “Significance of blood flow in calculations of temperature in laser irradiated tissue”, *IEEE Transactions of Biomedical Engineering*, vol. BME-27 (3), pp. 164-166, 1980.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & MORGAN, K., *Finite Element and Approximation*, Ed. John Wiley & Sons, Inc, 1983.
- ZRENNER, E., “Will retinal implants restore vision?”, *Science*, vol. 295, pp. 1022-1025, Feb 2002.