



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

BEATRIZ DA COSTA FERNANDES

**PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA AVALIAÇÃO DAS TENSÕES EM SERVIÇO  
NA ARMADURA ORTOGONAL DE CASCAS DE CONCRETO ARMADO**

Recife

2024

BEATRIZ DA COSTA FERNANDES

**PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA AVALIAÇÃO DAS TENSÕES EM SERVIÇO  
NA ARMADURA ORTOGONAL DE CASCAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Coorientador: Prof. Dr. Jordlly Reydson de Barros Silva.

Recife

2024

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Gabriel Luz, CRB-4 / 2222

F363p Fernandes, Beatriz da Costa.  
Procedimento numérico para avaliação das tensões em serviço na armadura ortogonal de cascas de concreto armado / Beatriz da Costa Fernandes, 2024.

131 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Coorientador: Jordlly Reydson de Barros Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Recife, 2024.

Inclui referências e apêndice.

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Cascas. 4. Membranas. 5. Comportamento em serviço. 6. Tensões na armadura na fissura. I. Horowitz, Bernardo (Orientador). II. Silva, Jordlly Reydson de Barros. III. Título.

624 CDD (22. Ed.)

UFPE  
BCTG / 2024 - 92

**BEATRIZ DA COSTA FERNANDES**

**PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA AVALIAÇÃO DAS TENSÕES EM SERVIÇO  
NA ARMADURA ORTOGONAL DE CASCAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil, Área de Concentração Estruturas.

Aprovada em 19/03/2024

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz – UFPE

Coorientador: Prof. Dr. Jordlly Reydson de Barros Silva – UFPE

**BANCA EXAMINADORA**

participação por videoconferência  
Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta (examinador interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência  
Prof. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo (examinador externo)  
Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal

participação por videoconferência  
Prof. Dr. Fernando Artur Nogueira Silva (examinador externo)  
Universidade Católica de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus pais, irmão e demais que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse curso.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, com sua infinita misericórdia, por estar ao meu lado constantemente, por ter me concedido força e coragem para superar as adversidades ao longo desse caminho.

À minha amada família, em especial meus pais, Antônio e Bernadete, e irmão, Alyson, pelo amor e apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

Ao meu querido professor e orientador Dr. Bernardo Horowitz e co-orientador Dr. Jordlly Silva, por toda paciência, conhecimentos e experiências compartilhadas durante esse curso e no desenvolvimento desse trabalho.

À FACEPE por ter possibilitado e financiado esta pesquisa.

Reverencio também todos os professores do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, por compartilharem seus conhecimentos e experiências de vida profissional, fundamentais para minha formação.

Aos demais servidores e colaboradores que compõe esta instituição.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desse curso.

*“O que me fez chegar até aqui não foi a capacidade intelectual, e sim a FÉ. Sob a benção divina, caminhei junto com os sábios, os verdadeiros responsáveis por essa conquista.”*

## RESUMO

Elementos de casca estão presentes em importantes obras de engenharia como reservatórios e lajes de tabuleiro de pontes. Em serviço o desempenho dessas estruturas pode ficar comprometido devido a fissuração do concreto, pondo em risco, por exemplo, a estanqueidade e o estado limite de fadiga. Esses problemas possuem uma dependência da tensão na armadura. De modo que, é na fissura que se observa as maiores flutuações de tensões, logo maiores deformações da armadura, que se traduzem na abertura de fissura. É evidente, portanto, a necessidade do conhecimento dessas tensões para garantir a funcionalidade e durabilidade das estruturas. Diante disso, este trabalho apresenta uma rotina computacional implementada em *Python* chamada Modelo de Casca Fissurada (*Cracked Shell Model* – CSM), capaz de calcular as tensões nas armaduras ortogonais em elementos de casca de concreto armado. Para tanto, a espessura da casca é discretizada em lamelas sujeitas a estado plano de tensões. As armaduras são avaliadas a partir do Modelo de Membrana Fissurada (*Cracked Membrane Model* - CMM), na qual considera o efeito de enrijecimento à tração via Modelo de Banço Tractionado (*Tension Chord Model* - TCM). Além disso, também foi desenvolvida uma implementação do CMM utilizando técnicas de otimização para solucionar o sistema de equações. A validação do CMM e CSM foi realizada com dados experimentais e numéricos de painéis disponíveis na literatura, nos quais se mostraram capazes de prever o comportamento completo de elementos de membrana e casca de concreto armado, com alta eficiência numérica. Adicionalmente foi conduzido um estudo sobre o efeito de membrana comprimida em lajes de tabuleiro de pontes, o qual aumenta a resistência dessas lajes. O estudo demonstrou que modelos baseados na teoria de Kirchhoff, como o CSM, não conseguem capturar os esforços oriundos desse efeito, conduzindo a uma carga última inferior à observada em ensaios.

**Palavras-chave:** concreto armado; cascas; membranas; comportamento em serviço; tensões na armadura na fissura.

## ABSTRACT

Shell elements are present in important engineering works such as reservoirs and bridge deck slabs. In service, the performance of these structures may be compromised due to cracking of the concrete, putting at risk, for example, watertightness and the fatigue limit state. These problems have a dependence on the stress in the reinforcement. Thus, it is at the crack that the greatest stress fluctuations are observed, therefore greater deformations of the reinforcement, which translates into crack opening. Therefore, it is evident that there is a need to understand these stresses to guarantee the functionality and durability of structures. In light of this, this work presents a computational routine implemented in Python called Cracked Shell Model (CSM), capable of calculating the stresses in orthogonal reinforcement in reinforced concrete shell elements. To this end, the thickness of the shell is discretized into layers subject to a plane state of stress. The reinforcements are evaluated using the Cracked Membrane Model (CMM), which considers the effect of tension stiffening via the Tension Chord Model (TCM). Furthermore, an implementation of the CMM was also developed using optimization techniques to solve the system of equations. Validation of the CMM and CSM was carried out using experimental and numerical results from panels available in the literature, which proved capable to predict the full behavior of reinforced concrete shell and membrane elements, with high numerical efficiency. Additionally, a study was conducted on the effect of compressive membranes on bridge deck slabs, which increases the resistance of these slabs. The study demonstrated that models based on Kirchhoff's theory, such as the CSM, cannot capture the efforts arising from this effect, leading to an ultimate load lower than that observed in tests.

**Keywords:** reinforced concrete; shells; membranes; serviceability behavior; reinforcement stresses at the crack.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Curva tensão-deformação do aço	27
Figura 2 –	Comportamento tensão-deformação do concreto à compressão	28
Figura 3 –	Comportamento tensão-deformação do concreto à compressão em membranas	29
Figura 4 –	Curva tensão-deformação do concreto à tração	31
Figura 5 –	Aderência aço-concreto	32
Figura 6 –	Curva tensão de aderência-deslizamento-tensão no aço	35
Figura 7 –	Enrijecimento à tração	36
Figura 8 –	Distribuição de tensões e deformações nos regimes	38
Figura 9 –	Estruturas sujeitas a estado plano de tensão	40
Figura 10 –	Esquema do equilíbrio para modelos constitutivos médios e locais	41
Figura 11 –	Equilíbrio do elemento de membrana fissurada	42
Figura 12 –	Círculo de Mohr das tensões para o CMM	43
Figura 13 –	Círculo de Mohr das deformações para o CMM	44
Figura 14 –	Modelo de Membrana Fissurada (CMM)	45
Figura 15 –	Círculo de Mohr das tensões totais no concreto na fissura e no centro entre fissuras	47
Figura 16 –	Comportamento do banzo tracionado para baixo nível de carga	49
Figura 17 –	Exemplo de estrutura do tipo placa	54
Figura 18 –	Elemento de placa e deslocamentos da seção transversal	55
Figura 19 –	Esquema das tensões no elemento de placa e círculo de Mohr dos momentos	57
Figura 20 –	Exemplo de estrutura do tipo casca	59
Figura 21 –	Elemento de casca e tensões na seção transversal	59
Figura 22 –	Deformações da seção transversal em elementos de casca	60
Figura 23 –	Esquema do procedimento de avaliação da casca	63
Figura 24 –	Discretização da casca em lamelas de concreto	63

Figura 25 –	Esquema da casca e divisão em membranas que contém as armaduras	64
Figura 26 –	Detalhes das membranas que contém as armaduras	65
Figura 27 –	Círculo de Mohr das deformações para os casos I, II e III	65
Figura 28 –	Círculo de Mohr das deformações para os casos IV e V	66
Figura 29 –	Pseudocódigo do Modelo de Banzo Tractionado (TCM)	74
Figura 30 –	Resultados da análise do TCM	75
Figura 31 –	Pseudocódigo do comportamento do aço para baixo nível de carregamento	77
Figura 32 –	Pseudocódigo para solução de uma membrana aplicado ao CMM	78
Figura 33 –	Pseudocódigo do Modelo de Membrana Fissurada (CMM)	78
Figura 34 –	Resultados das análises dos painéis da série PV	80
Figura 35 –	Resultados das análises dos painéis das séries PV e VA	81
Figura 36 –	Resultados das análises dos painéis PV10 e PV19	83
Figura 37 –	Resultados das análises dos painéis PV19 e PV20	84
Figura 38 –	Resultados das análises dos painéis VB3 e HB3	85
Figura 39 –	Resultados das análises dos painéis HB3 e HB4	86
Figura 40 –	Resultados da análise do painel PP1	87
Figura 41 –	Resultados das análises dos painéis da série A	90
Figura 42 –	Resultados das análises dos painéis da série A (continuação)	92
Figura 43 –	Pseudocódigo do procedimento de solução do CSM	94
Figura 44 –	Pseudocódigo do modelo constitutivo do aço	95
Figura 45 –	Pseudocódigo do modelo constitutivo do concreto	96
Figura 46 –	Resultados da análise da casca SM1	99
Figura 47 –	Resultados da análise da casca SM2	100
Figura 48 –	Resultados da análise da casca SM3	101
Figura 49 –	Resultados da análise da casca B4	103
Figura 50 –	Resultados da análise da casca B5	105
Figura 51 –	Resultados da análise da casca B6	106
Figura 52 –	Resultados da análise da casca ML8	108
Figura 53 –	Resultados da análise da casca ML9	109

Figura 54 –	Resultados das tensões na armadura das cascas SM1, SM2, B5 e ML9	111
Figura 55 –	Efeito de membrana comprimida (CMA)	114
Figura 56 –	Detalhes do corpo de prova S2	116
Figura 57 –	Corpo de prova S2 em perspectiva	116
Figura 58 –	Detalhes da seção da laje	116
Figura 59 –	Detalhes da malha de elementos finitos	117
Figura 60 –	Diagrama de momento fletor $M_x^{SAP}$ do teste S2	118
Figura 61 –	Diagrama de momento fletor $M_z^{SAP}$ do teste S2	118
Figura 62 –	Diagrama de momento fletor $M_x^{SAP}$ do teste S2Fa	119
Figura 63 –	Diagrama de momento fletor $M_z^{SAP}$ do teste S2Fa	119
Figura 64 –	Resultados da análise do painel PV21	128
Figura 65 –	Resultados das análises dos painéis PV22 e SE1	129
Figura 66 –	Resultados das análises dos painéis SE1 e SE6	130
Figura 67 –	Resultados das análises dos painéis VB1 e VB2	131

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Propriedades dos painéis com armadura isotrópica	79
Tabela 2 –	Propriedades dos painéis com armadura ortotrópica	82
Tabela 3 –	Propriedades dos painéis da série A	89
Tabela 4 –	Resumo estatístico dos resultados	110
Tabela 5 –	Resultados da análise do corpo de prova S2	120
Tabela 6 –	Propriedades dos painéis com armadura ortotrópica (continuação)	128

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AASHTO	American Association of State Highway and Transportation Officials
CA	Concreto armado
CFT	Compression Field Theory
CMA	Compressive Membrane Action
CMM	Cracked Membrane Model
ELU	Estado limite último
ELS	Estado limite de serviço
MCFT	Modified Compression Field Theory
MCTM	Mohr Compatibility Truss Model
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
RA-STM	Rotating-Angle Softened Truss Model
TCM	Tension Chord Model
TF	Tensão na fissura
TM	Tensão média

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras gregas

$\alpha$	Direção da armadura
$\beta$	Expressão que relaciona os termos $n\rho$
$\delta$	Deslizamento entre materiais
$\delta_1$	Deslizamento entre materiais no ponto de escoamento do aço
$\Delta\sigma_{cx}$ e $\Delta\sigma_{cz}$	Incremento de tensão no concreto nas direções $x$ e $z$
$\Delta y_{sB}$ e $\Delta y_{sT}$	Espessura das membranas fictícias inferior e superior
$\eta$	Razão entre o módulo de tensão de cisalhamento e tensão de fissuração
$\varepsilon$	Deformação normal
$\varepsilon_c$ e $\varepsilon_s$	Deformação normal do concreto e do aço
$\varepsilon_{cc}$ e $\varepsilon_{ct}$	Deformação principal média de compressão e tração do concreto
$\varepsilon_{co}$	Deformação de compressão de pico do concreto (aos 28 dias)
$\varepsilon_{cr}$	Deformação de fissuração do concreto
$\varepsilon_{c1}$ e $\varepsilon_{c3}$	Deformação média do concreto nas direções principais 1 e 3
$\varepsilon_{c3,inf}$ e $\varepsilon_{c3,sup}$	Deformação média do concreto na direção principal 3 das lamelas inferior e superior
$\varepsilon_{mn}$ e $\varepsilon_{mt}$	Deformação normal da superfície média nas direções $n$ e $t$
$\varepsilon_{mx}$ e $\varepsilon_{mz}$	Deformação normal da superfície média nas direções $x$ e $z$
$\varepsilon_{sm}$	Deformação média do aço
$\varepsilon_{smx}$ e $\varepsilon_{smz}$	Deformação média do aço nas direções $x$ e $z$
$\varepsilon_{sr}$	Deformação do aço na fissura
$\varepsilon_{sy}$ e $\varepsilon_{su}$	Deformação de escoamento e última do aço
$\varepsilon_{syx}$ e $\varepsilon_{syz}$	Deformação de escoamento do aço nas direções $x$ e $z$
$\varepsilon_{sux}$ e $\varepsilon_{suz}$	Deformação última do aço nas direções $x$ e $z$
$\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\varepsilon_z$	Deformação normal média nas direções $x$ , $y$ e $z$

$\varepsilon_{xB}$ e $\varepsilon_{xT}$	Deformação normal na direção $x$ das membranas fictícias inferior e superior
$\varepsilon_{zB}$ e $\varepsilon_{zT}$	Deformação normal na direção $z$ das membranas fictícias inferior e superior
$\varepsilon_1$ e $\varepsilon_3$	Deformação normal média nas direções principais 1 e 3
$\gamma$	Deformação de cisalhamento
$\gamma_{mtn} = \gamma_{mnt}$	Deformação de cisalhamento da superfície média no plano $n - t$
$\gamma_{mzx} = \gamma_{mxz}$	Deformação de cisalhamento da superfície média no plano $x - z$
$\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$	Deformação de cisalhamento no plano $x - z$
$\gamma_{xzB}$ e $\gamma_{xzT}$	Deformação de cisalhamento no plano $x - z$ das membranas fictícias inferior e superior
$\varphi_x$ e $\varphi_z$	Rotação da linha $AA$ nos planos $x - y$ e $z - y$
$\kappa_n$ e $\kappa_t$	Curvatura de flexão nas direções $n$ e $t$
$\kappa_{tn} = \kappa_{nt}$	Curvatura de torção no plano $n - t$
$\kappa_x$ e $\kappa_z$	Curvatura de flexão nas direções $x$ e $z$
$\kappa_{xz} = \kappa_{zx}$	Curvatura de torção no plano $x - z$
$\kappa_p$	Curvatura de flexão principal máxima
$\lambda, \lambda_x$ e $\lambda_z$	Coeficiente que relaciona os espaçamentos entre fissuras e seu valor máximo nas direções $x$ e $z$
$\rho, \rho_x$ e $\rho_z$	Taxa de armadura nas direções $x$ e $z$
$\sigma$	Tensão normal
$\sigma_c$ e $\sigma_s$	Tensão normal no concreto e no aço
$\sigma_{cc}$ e $\sigma_{ct}$	Tensão principal média de compressão e tração do concreto
$\sigma_{cx}$ e $\sigma_{cz}$	Tensão normal no concreto nas direções $x$ e $z$
$\sigma_{cx,i}$ e $\sigma_{cz,i}$	Tensão normal na lamela de concreto $i$ nas direções $x$ e $z$
$\sigma_{cm}$ e $\sigma_{sm}$	Tensão média no concreto e no aço
$\sigma_{cqr} = \sigma_{c3r}$ e $\sigma_{cdr}$	Tensão no concreto entre fissura nas direções $q$ e $d$
$\sigma_{c1}$ e $\sigma_{c3}$	Tensão média do concreto nas direções 1 e 3
$\sigma_{sx,j}$ e $\sigma_{sz,j}$	Tensão na armadura nas direções $x$ e $z$ na camada $j$
$\sigma_{smin}$	Tensão mínima na armadura

$\sigma_{smx}$ e $\sigma_{smz}$	Tensão média na armadura nas direções $x$ e $z$
$\sigma_{sm1}$ , $\sigma_{sm2}$ e $\sigma_{sm3}$	Tensão média na armadura nos regimes 1, 2 e 3
$\sigma_{sr}$	Tensão na armadura na fissura
$\sigma_{sr1}$ , $\sigma_{sr2}$ e $\sigma_{sr3}$	Tensão na armadura na fissura nos regimes 1, 2 e 3
$\sigma_{sxr}$ e $\sigma_{s zr}$	Tensão na armadura na fissura nas direções $x$ e $z$
$\sigma_{sx}$ e $\sigma_{sz}$	Tensão na armadura nas direções $x$ e $z$
$\sigma_x$ e $\sigma_z$	Tensão normal aplicada nas direções $x$ e $z$
$\sigma_1$	Tensão principal máxima
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\tau_b$	Tensão de cisalhamento de aderência
$\tau_{bmax}$	Tensão de cisalhamento de aderência máxima
$\tau_{b0}$ e $\tau_{b1}$	Tensão de cisalhamento de aderência de primeiro e segundo nível
$\tau_{c q d r} = \tau_{c d q r}$	Tensão de cisalhamento no plano $d - q$
$\tau_{cxz,i}$	Tensão de cisalhamento na lamela de concreto $i$ no plano $x - z$
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$	Tensão de cisalhamento no plano $x - z$
$\theta$	Direção do sistema de eixos $n - t$
$\theta_p$	Direção do sistema de eixos principais 1 - 3
$\theta_r$	Direção da fissura
$\{\Delta \epsilon t\}$	Vetor incremento das deformações no plano médio e curvaturas
$\{\epsilon_{xz}\}$	Vetor das deformações no plano $x - z$
$\{\epsilon t\}$	Vetor das deformações no plano médio e curvaturas no plano $x - z$
$\{\sigma_c\}$ e $\{\sigma_s\}$	Vetor de tensões do concreto e do aço

### Letras romanas

$\hat{A}_c$ e $A_s$	Área da seção transversal de concreto e área de aço
$A_c$	Área de seção bruta de concreto
$A_{carga}$	Área de aplicação da carga de teste

$A_{s,j}, A_{sx,j}$ e $A_{sz,j}$	Área de aço da camada $j$ nas direções $x$ e $z$
$E$	Módulo de elasticidade do material
$E_c$ e $E_s$	Módulo de elasticidade do concreto e do aço
$E_{c1,sec}$ e $E_{c3,sec}$	Módulo secante do concreto nas direções 1 e 3
$E_{c13,sec}$	Módulo secante do concreto no plano 1 – 3
$E_{sh}$	Módulo de endurecimento do aço
$c_{nom}$	Cobrimento nominal da armadura
$C$	Centro do círculo de Mohr
$d - q$	Sistema de eixos auxiliar (paralelos as direções principais)
$erro_{n+1}$	Parâmetro auxiliar do critério de convergência na iteração $n + 1$
$t$	Fator de multiplicação do vetor normalizado
$f_c$	Resistência uniaxial à compressão do concreto (aos 28 dias)
$f_{cr}$	Resistência à tração do concreto
$f_p$	Resistência de compressão de pico do concreto
$f_{sy}$ e $f_{su}$	Tensão de escoamento e última do aço
$f_{syx}$ e $f_{syz}$	Tensão de escoamento do aço nas direções $x$ e $z$
$f_{sux}$ e $f_{suz}$	Tensão última do aço nas direções $x$ e $z$
$F_{CMM}^{(1)}$ e $F_{CMM}^{(2)}$	Primeira e segunda função residual para o procedimento do CMM
$F_{MCTM}$	Função residual do MCTM
$h$	Altura da placa ou casca
$h_l$	Espessura da lamela de concreto
$k$	Número de camadas de armadura
$l$	Número de lamelas de concreto
$l_b$	Comprimento de ancoragem
$m_x$ e $m_z$	Coefficiente de proporcionalidade das tensões nas direções $x$ e $z$
$m_{xz}$	Coefficiente de proporcionalidade de cisalhamento no plano $x - z$
$M$	Momento fletor

$M_x^{CSM}$	Momento fletor na direção $x$ obtido com o CSM
$M_n$ e $M_t$	Momento fletor que provoca curvatura nas direções $n$ e $t$
$M_{nt} = M_{tn}$	Momento torsor no plano $n - t$
$M_x$ e $M_z$	Momento fletor que provoca curvatura nas direções $x$ e $z$
$M_{xz} = M_{zx}$	Momento torsor no plano $x - z$
$M_r^{exp}$ e $M_u^{exp}$	Momento de fissuração e último do experimento
$M_r^{CSM}$ e $M_u^{CSM}$	Momento de fissuração e último do CSM
$M_x^{SAP}$ e $M_z^{SAP}$	Momento fletor $x$ e $z$ obtido com o SAP2000
$M_{xz}^{SAP}$	Momento fletor $xz$ obtido com o SAP2000
$M_1$ e $M_3$	Momento fletor que provoca curvatura nas direções 1 e 3
$n$	Razão entre os módulos de deformação do aço e concreto
$n - t$	Sistema de eixos local
$N$	Força normal
$N_c$ e $N_s$	Força resistida pelo concreto e pela barra de aço
$N_x$ e $N_z$	Força normal nas direções $x$ e $z$
$N_{xz} = N_{zx}$	Força de cisalhamento no plano $x - z$
$N_x^*$ e $N_z^*$	Força normal de dimensionamento nas direções $x$ e $z$
$P$	Carga aplicada sobre a superfície da placa
$p$	Ponto no plano da placa
$P_u^{CSM}$ e $P_u^{EXP}$	Carga de ruptura obtida via CSM e experimento
$q_{SAP}$	Carga aplicada para análise do SAP2000
$R$	Raio do círculo de Mohr
$s_{rm}$	Espaçamento entre fissuras
$s_{rm0}$	Espaçamento máximo entre fissuras
$s_{rmx}$ e $s_{rmz}$	Espaçamento entre fissuras nas direções $x$ e $z$
$s_{rmx0}$ e $s_{rmz0}$	Espaçamento máximo entre fissuras nas direções $x$ e $z$
$s_x$ e $s_z$	Espaçamento entre barras nas direções $x$ e $z$
$u_c$ e $u_s$	Escorregamento do concreto e da armadura
$u, v$ e $w$	Deslocamento translacional nas direções $x, y$ e $z$
$tol$	Tolerância admitida no critério de convergência
$v_p$	Deslocamento do ponto $p$ na direção $y$
$x - y - z$	Sistema de eixos globais
$x_1$ e $x_2$	Escorregamento para armadura escoada e não escoada

$y_{c,i}$	Posição da lamela de concreto $i$
$y_{i+1}$ e $y_i$	Posição superior e inferior da lamela de concreto $i$
$y_s$	Posição da armadura na camada
$y_{sB}$ e $y_{sT}$	Posição central das membranas fictícias inferior e superior
1 – 3	Sistema de eixos principais
$[C]$	Matriz de posição
$[D_{xz}]$	Matriz constitutiva do material no plano $x - z$
$[D_{xz}^c]$ e $[D_{xz}^c]_i$	Matriz constitutiva do concreto no plano $x - z$ da lamela $i$
$[D^s]$	Matriz constitutiva secante do aço
$[D_{xz}^s]$ e $[D_{xz}^s]_j$	Matriz constitutiva do aço no plano $x - z$ da camada $j$
$[D_{13}^c]$	Matriz constitutiva secante do concreto no sistema de eixos principais 1 e 3
$\{F_{ext}\}$ e $\{F_{int}\}$	Vetor de forças externas e internas
$\{F_c\}_i$	Vetor de forças internas na lamela de concreto $i$
$\{F_s\}$	Vetor de forças internas da armadura na camada $j$
$[K_{casca}^c]$	Matriz de rigidez do concreto
$[K_{casca}^c]_i$	Matriz de rigidez do concreto na lamela $i$
$[K_{casca}^s]$	Matriz de rigidez do aço
$[K_{casca}^s]_j$	Matriz de rigidez do aço na camada $j$
$[K_{casca}]$	Matriz de rigidez da casca
$\{R\}$	Vetor de desequilíbrio de forças
$[T]$	Matriz de transformação

### Designações específicas

$\emptyset_s$	Diâmetro da barra de aço
$\emptyset_{sx}$ e $\emptyset_{sz}$	Diâmetro da barra disposta ao longo das direções $x$ e $z$
$\emptyset_{sxB}$	Diâmetro da barra na direção $x$ da membrana fictícia inferior
$\emptyset_{sXT}$	Diâmetro da barra na direção $x$ da membrana fictícia superior

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	OBJETIVOS	23
1.1.1	<b>Objetivo geral</b>	<b>23</b>
1.1.2	<b>Objetivos específicos</b>	<b>23</b>
1.2	METODOLOGIA	24
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	24
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>26</b>
2.1	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	26
2.1.1	<b>Aço</b>	<b>26</b>
2.1.2	<b>Concreto</b>	<b>28</b>
2.1.3	<b>Interação aço-concreto via Modelo de Banzo Tracionado</b>	<b>31</b>
2.2	ELEMENTOS DE MEMBRANA	39
2.2.1	<b>Introdução</b>	<b>39</b>
2.2.2	<b>Modelo de Membrana Fissurada</b>	<b>41</b>
2.2.3	<b>Procedimento de solução do CMM</b>	<b>49</b>
2.3	ELEMENTOS DE PLACA À FLEXÃO	53
2.3.1	<b>Introdução</b>	<b>53</b>
2.3.2	<b>Compatibilidade das deformações</b>	<b>55</b>
2.3.3	<b>Equações de equilíbrio</b>	<b>57</b>
2.4	ELEMENTOS DE CASCA FINA	58
2.4.1	<b>Introdução</b>	<b>58</b>
2.4.2	<b>Compatibilidade das deformações</b>	<b>60</b>
2.4.3	<b>Equações de equilíbrio</b>	<b>61</b>
2.4.4	<b>Procedimento de solução do CSM</b>	<b>62</b>
<b>3</b>	<b>CÓDIGO NUMÉRICO E VALIDAÇÕES</b>	<b>74</b>
3.1	MODELO DE BANZO TRACIONADO	74
3.1.1	<b>Algoritmo numérico</b>	<b>74</b>
3.1.2	<b>Validação do código numérico</b>	<b>75</b>
3.2	MODELO DE MEMBRANA FISSURADA	76
3.2.1	<b>Algoritmo numérico</b>	<b>76</b>
3.2.2	<b>Validação do código numérico</b>	<b>78</b>

<b>3.2.3</b>	<b>Estudo comparativo entre modelos constitutivos médios e locais</b>	<b>88</b>
3.3	MODELO DE CASCA FISSURADA	93
<b>3.3.1</b>	<b>Algoritmo numérico</b>	<b>93</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Validação do código numérico</b>	<b>96</b>
<b>4</b>	<b>ESTUDO DE CASO: EFEITO DE MEMBRANA COMPRIMIDA</b>	<b>113</b>
4.1	INTRODUÇÃO	113
4.2	EFEITO DE MEMBRANA COMPRIMIDA	113
4.3	ESTRUTURA INVESTIGADA	115
4.4	OBTENÇÃO DA CARGA DE RUPTURA A PARTIR DO CSM	117
4.5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	120
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>122</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>124</b>
	<b>APÊNDICE A – RESULTADOS DAS ANÁLISES DOS PAINÉIS DAS SÉRIES PV, SE E VB SUBMETIDOS A FORÇAS DE MEMBRANA</b>	<b>128</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As peças laminares, não necessariamente planas, e que podem ser carregadas tanto por forças tangenciais como normais à superfície são chamadas de cascas. Na engenharia estrutural elas podem ser formadas pela combinação do concreto e armadura ortogonal. O concreto é destinado a resistir, principalmente, os esforços de compressão. Enquanto a armadura é adicionada para resistir a tração, tendo em vista a baixa resistência do concreto à tração (cerca de 10% da sua resistência a compressão), que fissura após superada a sua capacidade. O aço tem, portanto, a finalidade de garantir o equilíbrio da peça após a fissuração e controle da abertura de fissura.

Os elementos de casca estão presentes em obras de alto valor econômico como reservatórios. Em serviço (quando a armadura não está escoada) o desempenho dessa estrutura pode ser bastante afetado pela fissuração do concreto. Além de facilitar a entrada de agentes nocivos as armaduras, pondo em risco a durabilidade da estrutura, a fissuração pode comprometer a estanqueidade, permitindo a fuga do conteúdo do seu interior. Esse problema apresenta uma dependência do nível de tensão na armadura, pois quanto maior essa tensão maior a deformação da armadura e quanto maior esta deformação maior a abertura da fissura. As tensões na armadura, desse modo, desempenham importante função no controle do grau de fissuração do concreto.

Outra importante obra modelada com elementos de cascas são as lajes de tabuleiros de pontes. Estruturas desse tipo estão fortemente sujeitas a carregamentos repetidos, de modo que as armaduras ficam susceptíveis ao fenômeno da fadiga. Esse fenômeno geralmente domina a ruptura desse tipo de laje conforme Spathelf (2017). Segundo o mesmo autor “o dano por fadiga é definido como a deterioração progressiva da estrutura interna de um material sob ciclos de tensão crescentes”. Em ensaios de carregamento cíclico, realizados por Eshwarappa e Gangulo (2016), foi constatado que é na fissura onde ocorre as maiores flutuações de tensões, pois a armadura rompe nesse local. O Estado Limite de Fadiga nesse caso é condicionado pelas tensões na armadura avaliadas na fissura. Dessa condição é evidente que até mesmo em serviço a segurança da estrutura é colocada em risco.

Os problemas relatados apresentam uma dependência das tensões na armadura em termos de valores locais (na fissura). O conhecimento dessas tensões,

portanto, é fundamental para garantir o bom desempenho em serviço quanto a abertura de fissuras e resistência à fadiga. As normas brasileiras apresentam recomendações para o cálculo das tensões em serviço para peças lineares de concreto armado. Essas estruturas são caracterizadas por uma dimensão ser preponderantemente maior que as outras, de modo que as tensões são avaliadas em uma única direção. No caso de cascas de concreto armado, duas dimensões são relevantes em relação a espessura, além disso, podem estar sujeitas a momentos fletores em ambas as direções e momentos torsores. No caso de cascas de concreto armado, duas dimensões são relevantes em relação a espessura, além disso, podem estar sujeitas a momentos fletores em ambas as direções e momentos torsores. A ABNT NBR 6118 (2023) (Projeto de Estruturas de Concreto) não apresenta especificações para o cálculo das respectivas tensões em estruturas laminares, como cascas, e devido as suas características geométricas e de carregamento, o que requer uma modelagem física bastante distinta dos elementos lineares, os cálculos disponíveis não são suficientes para avaliá-las com precisão aceitável.

Baseado nas discussões acima, este trabalho apresenta uma ferramenta computacional desenvolvida na linguagem *Python* capaz de calcular as tensões em serviço de armaduras ortogonais em elementos de cascas de concreto armado. O procedimento proposto é chamado de Modelo de Casca Fissurada (*Cracked Shell Model* - CSM). A casca é avaliada a partir de uma abordagem que consiste em discretizar a sua espessura em lamelas submetidas a estado plano de tensões. As propriedades do concreto são calculadas em cada lamela considerando o amolecimento da tensão. Por sua vez, as armaduras ortogonais inferior e superior são avaliadas a partir do Modelo de Membrana Fissurada (*Cracked Membrane Model* - CMM) desenvolvido por Kaufmann (1998), na qual considera o efeito de enrijecimento à tração a partir do Modelo de Banzo Tractionado (*Tension Chord Model* - TCM) idealizado por Marti et al. (1998). Além disso, também foi desenvolvido uma implementação do CMM utilizando técnicas de otimização de Silva (2016) e Bernardo et al. (2020).

Utilizando-se do CSM foi conduzido um estudo em um problema específico da engenharia de pontes de concreto armado. Nas lajes que compõem essa estrutura foi observado, a partir de ensaios experimentais realizados em 1971, a presença do chamado efeito de membrana comprimida. Esse efeito resulta da fissuração do concreto e restrição translacional da laje e tem como consequência o aumento da

capacidade resistente da mesma. Tamanho o ganho da resistência estrutural da laje, que normas como a AASHTO (2014) dispensam a verificação do Estado Limite de Fadiga para pontes de múltiplas vigas. No estudo realizado, foi obtido com o CSM a carga de ruptura de um corpo de prova que simula uma laje de ponte e com este resultado verificado se o mesmo é capaz de capturar o efeito de membrana comprimida.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo principal desse trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional para o cálculo das tensões em serviço de armaduras ortogonais em elementos de casca de concreto armado.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- a) Desenvolver um procedimento numérico eficiente para o cálculo das tensões na armadura em membranas de concreto armado fissurada utilizando o modelo de membrana fissurada (CMM), Kaufmann (1998). Comparar seus resultados com dados disponíveis na literatura;
- b) Desenvolver um procedimento numérico não-linear para análise de cascas de concreto armado sujeitas a diferentes estados de solicitação utilizando o método das lamelas e o modelo de membrana fissurada para determinar as tensões nas armações ortogonais;
- c) Comparar resultados do procedimento proposto com dados da literatura e *softwares* específicos para análise de elementos de casca baseados no método das lamelas e teorias correlatas ao modelo de membrana fissurada;
- d) Aplicar o procedimento proposto em um problema específico da engenharia estrutural, de modo a verificar a capacidade do mesmo em solucionar esse problema.

## 1.2 METODOLOGIA

Baseado no referencial teórico foi implementada uma rotina computacional em linguagem *Python*. A rotina computacional proposta para avaliar cascas de concreto armado fissurada faz uso do Modelo de Membrana Fissurada (*Cracked Membrane Model* - CMM) e este, por sua vez, utiliza o Modelo de Banzo Tractionado (*Tension Chord Model* - TCM) para avaliar as tensões na armadura na fissura. Diante disso, estes modelos foram inicialmente implementados, a começar pelo TCM, que foi validado com os resultados dos autores que o formulou, e em seguida o CMM, que foi validado com resultados experimentais e numéricos disponíveis na literatura. Por fim, foi implementado o Modelo de Casca Fissurada (*Cracked Membrane Model* - CSM), validado com resultados experimentais e outras soluções numéricas presentes na literatura.

Este trabalho limita-se a analisar o comportamento estrutural de cascas de concreto armado sob carga estática, especialmente no regime pós-fissuração do concreto e anterior ao escoamento da armadura. A casca com espessura constante é avaliada por meio da teoria de Kirchhoff de placas finas, de modo que a influência das forças cortantes é desprezada. A espessura da estrutura é discretizada em lamelas e as camadas de armadura são modeladas como elemento de membrana de concreto armado, a fim de considerar o efeito de enrijecimento à tração. O comportamento do concreto à compressão na faixa pré-pico é não-linear, enquanto o pós-pico é desconsiderado. Para elementos de membrana sujeitos a estado plano de tensão biaxial de compressão e tração, o comportamento do concreto à compressão incorpora o efeito de amolecimento da tensão. O efeito de confinamento é desprezado. À tração, o concreto é assumido como elástico linear até a fissuração. Com relação a armadura, foi considerada somente sua capacidade de resistir aos esforços axiais. Para o concreto armado não fissurado, a armadura é avaliada a partir do comportamento elasto-plástico com endurecimento, tanto para tração como para compressão.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Visando facilitar a compreensão das discussões durante a leitura, este trabalho está organizado e estruturado da seguinte forma:

- a) No capítulo 1 é realizado um enquadramento geral do tema do trabalho, é descrito os objetivos pretendidos, limitação do estudo, a metodologia utilizada e organização do trabalho;
- b) O capítulo 2 relata a fundamentação teórica. São mostrados os modelos constitutivos dos materiais. Descrição do modelo de membrana fissurada proposto por Kaufmann (1998), destinado a avaliar o comportamento de painéis de concreto armado submetidos a solicitações no plano. Descrevendo os procedimentos numéricos admitidos para solução do seu sistema de equações. É demonstrado as equações de equilíbrio e compatibilidade de elementos de placa e casca de concreto armado. Por fim, é discutido os procedimentos numéricos utilizados para estudar cascas de concreto armado ortogonalmente.
- c) O capítulo 3 mostra a rotina computacional proposta para avaliar casca de concreto armado ortogonalmente, perpassando pelas rotinas do modelo de banzo tracionado e modelo de membrana fissurada. As validações das rotinas com resultados experimentais e numéricos da literatura também constam nesse capítulo.
- d) No capítulo 4 é mostrado uma aplicação da rotina computacional desenvolvida em um problema específico da engenharia estrutural. É determinado a carga de ruptura de um corpo de prova de laje de concreto armado e verificado a existência do efeito de membrana comprimida;
- d) Por fim, o último capítulo (capítulo 5) é apresentado as conclusões obtidas ao final desse trabalho;

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

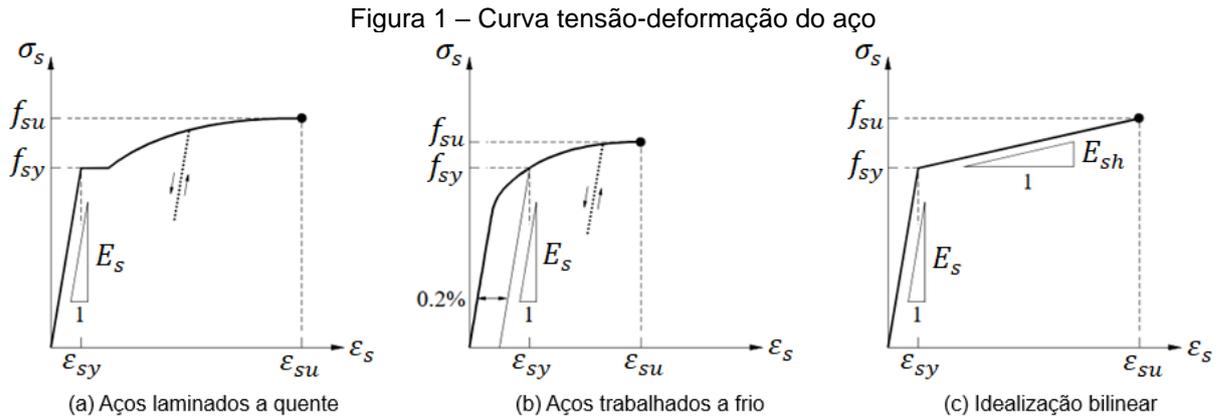
O conhecimento das propriedades dos materiais, obtido com a realização de ensaios, é fundamental para se determinar quais as melhores formas de aplicação e como explorar suas potencialidades. Os materiais constituintes das estruturas de concreto armado como o concreto e o aço apresentam características mecânicas bastante distintas, fato que os tornam uma boa combinação para resistir aos diferentes esforços que uma estrutura pode está submetida.

Para simulações numéricas de estruturas, em particular de concreto armado, é necessário o estabelecimento de relações ou modelos constitutivos que caracterizem as propriedades intrínsecas de cada material, considerando a interação entre eles e demais fatores externos que possam estar expostos. Nesta seção serão discutidas as características desses materiais que os tornam possíveis de serem utilizados na construção civil dando ênfase aos modelos constitutivos utilizados nesse trabalho.

#### 2.1.1 Aço

A principal propriedade do aço que o possibilita ser utilizado em vários setores da economia é a sua alta resistência a esforços de tração que convencionalmente é a mesma para compressão. Acerca do processo de fabricação das barras de aço empregadas em estruturas de concreto armado pode-se distinguir dois tipos: os aços laminados à quente que são conhecidos pelas barras CA-50 e CA-25 e os aços trabalhados à frio, característicos das barras CA-60. Cada um desses processos implica uma resposta diferente em relação ao comportamento tensão-deformação conforme é mostrado na Figura 1.

O regime elástico linear é definido pela existência de uma proporcionalidade entre as grandezas de tensão e deformação e pela reversibilidade das deformações, como pode ser observado para ambos os tipos de aço ilustrados nas Figuras 1(a) e 1(b). Superado esta fase, ou seja, quando a tensão é maior que a tensão de escoamento do aço  $f_{sy}$ , o material apresenta um comportamento plástico, caracterizado pela irreversibilidade das deformações totais.



Fonte: Adaptado de Kaufmann (1998, p. 18).

No regime plástico os aços laminados a quente Figura 1(a), possuem um patamar de escoamento, com aumento de deformações para uma mesma tensão  $f_{sy}$ , e em seguida um endurecimento do material, correspondente ao aumento da capacidade de carga com aumento da deformação. Esse comportamento permanece até a ruptura, quando é atingida a tensão última do aço  $f_{su}$ . Os aços trabalhados a frio Figura 1(b), não possuem um patamar de escoamento bem definido, desse modo, para tensões acima das tensões de escoamento o material já apresenta um comportamento de endurecimento.

Utilizando uma abordagem sugerida por Sigrist (1995), o comportamento tensão-deformação de qualquer aço pode ser caracterizado por meio de uma aproximação de um gráfico bilinear como ilustrado na Figura 1(c) cujo ponto de inflexão é a tensão de escoamento  $f_{sy}$ . Nesse modelo bilinear a tensão no aço  $\sigma_s$  é definido pela equação Eq. (1), que é uma função da deformação média do aço  $\varepsilon_{sm}$ .

$$\sigma_s(\varepsilon_{sm}) = \begin{cases} E_s \varepsilon_{sm} & \text{se } |\varepsilon_{sm}| < \varepsilon_{sy} \\ [f_{sy} + E_{sh}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sy})] \text{ sinal}(\varepsilon_{sm}), & \text{se } |\varepsilon_{sm}| \geq \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (1)$$

No regime elástico linear ( $\varepsilon_{sm} < \varepsilon_{sy}$ ) o coeficiente de proporcionalidade é o módulo de elasticidade  $E_s$ . Enquanto no regime plástico ( $\varepsilon_{sm} \geq \varepsilon_{sy}$ ) é representado pelo módulo de endurecimento  $E_{sh}$  calculado por Eq. (2) em que os termos  $\varepsilon_{su}$  e  $\varepsilon_{sy}$  correspondem as deformações última e de escoamento do aço.

$$E_{sh} = \frac{f_{su} - f_{sy}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} \quad (2)$$

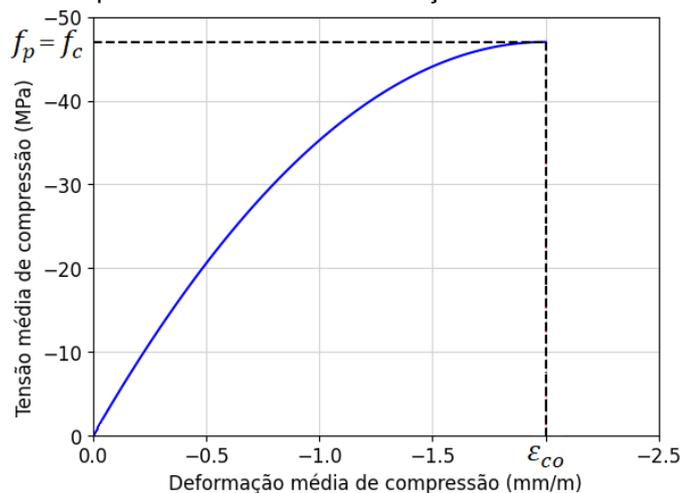
## 2.1.2 Concreto

O concreto endurecido apresenta importantes propriedades mecânicas, destacando sua significativa resistência a compressão comparada à de tração. Dada a heterogeneidade do concreto o mesmo apresenta um comportamento mecânico distinto para diferentes condições de solicitação tanto no estágio não fissurado como no pós fissurado. Os tópicos seguintes estabelecem as relações constitutivas para considerar esses casos.

### 2.1.2.1 Concreto à compressão

A boa capacidade de resistência à compressão do concreto, somado a outras vantagens como, por exemplo, resistência ao fogo e à água, e facilidades acerca do processo executivo, explica seu largo uso na construção civil. A resistência uniaxial à compressão do concreto  $f_c$ , refere-se àquela obtida por meio de ensaio de compressão direta realizado aos 28 dias. O corpo de prova geralmente cilíndrico possui diâmetro de 150 mm e altura equivalente ao dobro desse diâmetro é submetido a uma carga axial monotônica até que ocorra sua ruptura.

Figura 2 – Comportamento tensão-deformação do concreto à compressão



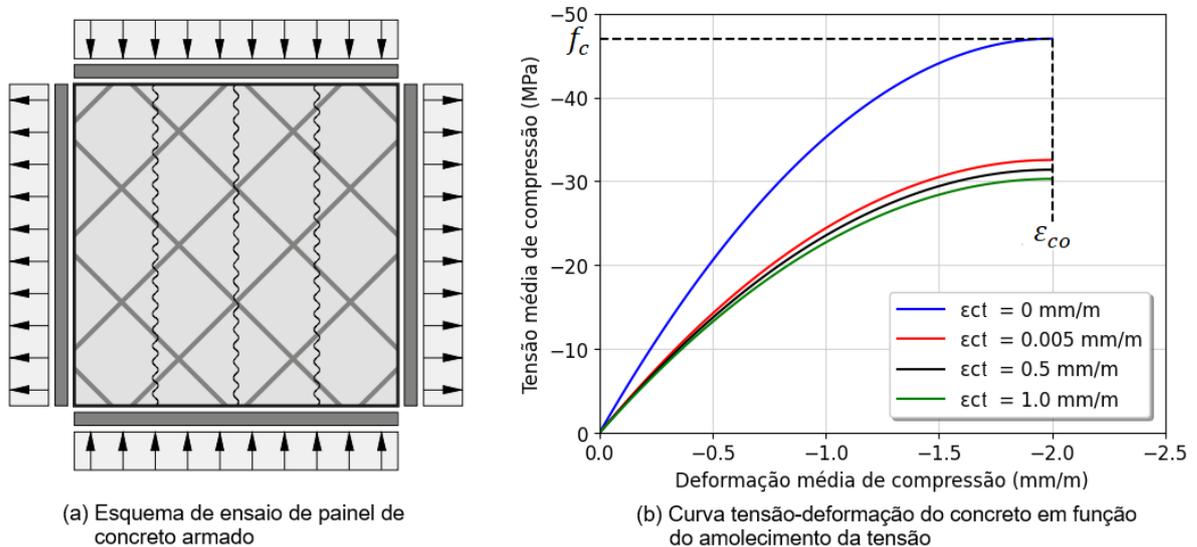
A resposta tensão-deformação de compressão do concreto na faixa pré-pico pode ser aproximada por uma parábola como mostra a Figura 2 (KAUFMANN, 1998). O modelo constitutivo para as regiões pré e pós pico é estabelecido pela equação Eq. (3).

$$\sigma_{cc}(\varepsilon_{cc}) = \begin{cases} f_p \frac{\varepsilon_{cc}^2 + 2\varepsilon_{cc}\varepsilon_{co}}{\varepsilon_{co}^2}, & \text{se } |\varepsilon_{cc}| < |\varepsilon_{co}| \\ 0, & \text{se } |\varepsilon_{cc}| \geq |\varepsilon_{co}| \end{cases} \quad (3)$$

Sendo,  $\sigma_{cc}$  a tensão principal de compressão do concreto,  $\varepsilon_{cc}$  a deformação principal média de compressão do concreto,  $f_p$  a tensão de pico e  $\varepsilon_{co}$  a deformação correspondente a tensão  $f_p$ . Para  $f_c \leq 50$  MPa essa deformação geralmente é admitida constante e igual a 2 ‰.

Em se tratando de elementos submetidos a estado plano de tensão como membranas de concreto armado Figura 3(a), em que podem está sujeitos a estado plano de tensão biaxial de compressão e tração, a resistência à compressão do concreto obtida por ensaio uniaxial deixa de ser representativa. Segundo Kaufmann (1998), em membranas de concreto fissurado é observado o chamado efeito de amolecimento do concreto, originado em razão das deformações principais médias de tração  $\varepsilon_{ct}$  perpendiculares a direção de compressão do concreto, causando uma redução da resistência à compressão.

Figura 3 – Comportamento tensão-deformação do concreto à compressão em membranas



Fonte: A autora (2024) e adaptado de Kaufmann (1998, p. 27).

Baseado em ensaios experimentais que investigam a influência das deformações transversais na resistência à compressão do concreto algumas relações para considerar esse efeito foram definidas. Kaufmann (1998) propôs uma correção somente no valor da resistência à compressão (amolecimento da tensão), fazendo um

ajuste com base na deformação principal de tração  $\varepsilon_{ct}$ , conforme a equação Eq. (4), sendo a resistência  $f_c$  expressa em MPa.

$$f_p = \frac{f_c^{2/3}}{0,4 + 30\varepsilon_{ct}} \leq f_c \quad (4)$$

A Figura 3(b) mostra o comportamento tensão-deformação do concreto na região pré-pico definido a partir da Eq. (3), considerando o efeito de amolecimento da tensão por meio de Eq. (4). Cada gráfico ilustrado corresponde a resposta do concreto em função da deformação de tração perpendicular a direção de compressão, variando entre 0 mm/m, situação em que não há deformação de tração ( $f_p = f_c$ ), até 1 mm/m cujo gráfico apresenta a menor tensão de pico. Observa-se uma redução cada vez maior da capacidade resistente do concreto à medida que aumenta as deformações de tração.

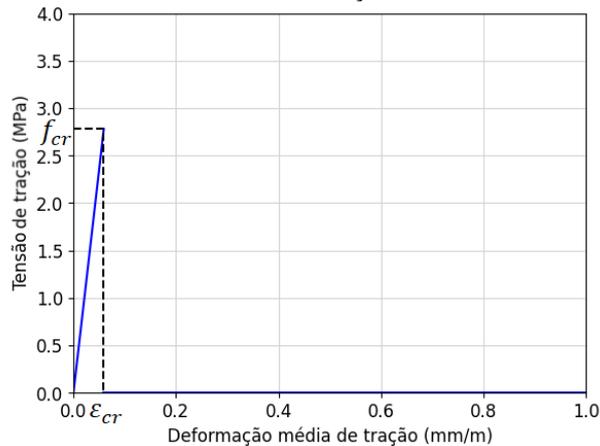
#### 2.1.2.2 Concreto à tração

A resistência à tração do concreto  $f_{cr}$  é definida pela ABNT NBR 6118 (2023) como  $0,3f_c^{2/3}$  para concretos da Classe I ( $f_c \leq 50$  MPa). Esse valor tão baixo justifica a necessidade do emprego do aço para resistir a tensões desse tipo quando a peça for solicitada.

As tensões de tração do concreto são fundamentais para avaliar o comportamento da estrutura no Estado Limite de Serviço (ELS), destacando aqui, o cálculo do espaçamento médio entre fissuras e abertura de fissuras. O modelo constitutivo utilizado para caracterizar o comportamento tensão-deformação do concreto à tração é elástico linear e descrito pela equação Eq. (5), sendo a tensão principal máxima de tração  $\sigma_{ct}$  uma função da deformação principal de tração  $\varepsilon_{ct}$ . Esse modelo é graficamente ilustrado na Figura 4.

$$\sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) = \begin{cases} E_c \varepsilon_{ct}, & \text{se } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{cr} \\ 0, & \text{se } \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (5)$$

Figura 4 – Curva tensão-deformação do concreto à tração



Fonte: A autora (2024).

O termo  $\varepsilon_{cr}$  é a deformação de fissuração do concreto e  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto, que pode ser estimado através de Eq. (6).

$$E_c = \frac{2f_c}{|\varepsilon_{co}|} \quad (6)$$

### 2.1.3 Interação aço-concreto via Modelo de Banzo Tracionado

O comportamento oriundo da interação entre o concreto e o aço sob tração pode ser avaliado pelo Modelo de Banzo Tracionado (*Tension Chord Model – TCM*) proposto por Marti et al. (1998). A formulação do modelo será apresentada nessa seção.

#### 2.1.3.1 Aderência

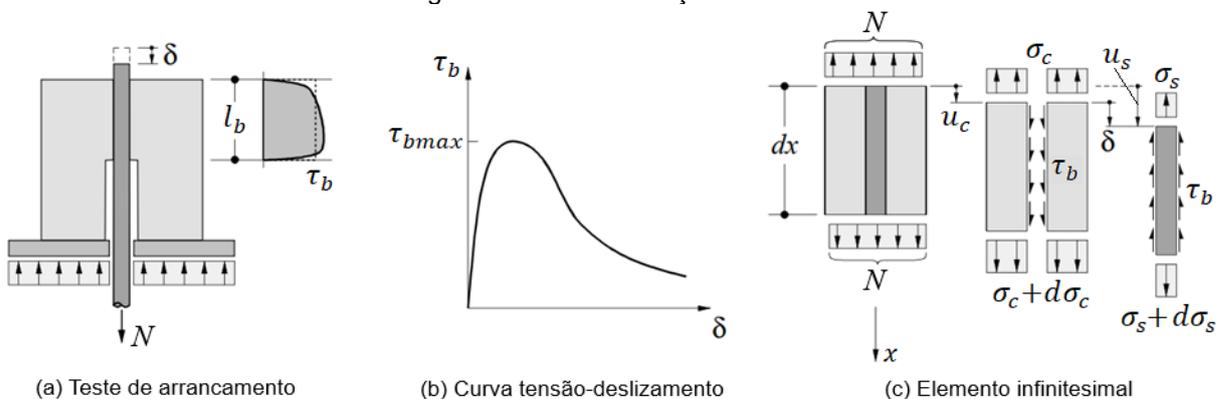
A combinação das características do concreto e do aço para ganhar resistência estrutural só é possível quando ambos estão intimamente ligados por um mecanismo chamada de aderência. Esse mecanismo permite com que tensões sejam transmitidas de um material para outro, através de tensões de cisalhamento de aderência que são desenvolvidas na interface aço-concreto. Os mecanismos de aderência são desenvolvidos por três fatores: a aderência por adesão, atrito e mecânica. O primeiro ocorre por meio das ligações físico-químicas que se estabelecem no contato entre o concreto e o aço durante o processo de pega do cimento. Esse fator é o que menos contribui para a resistência da aderência, uma vez que, deixa de existir quando ocorre

pequenos deslocamentos da barra de aço. O segundo decorre do surgimento de forças de atrito, ativadas quando há deslizamento da barra de aço em relação ao concreto. Por fim, o último dos fatores e o mais importante, ocorre devido o travamento do concreto entre as nervuras da barra, garantindo uma ligação efetiva entre os dois materiais. Fica evidente então, que as características do concreto e das barras interferem significativamente para um maior ou menor grau de aderência.

Segundo Buchaim (2001) quando nessa iteração os dois materiais se alongam igualmente, isto é, as deformações são as mesmas, a aderência é denominada rígida, podendo ser observada quando o concreto não está fissurado. Em contrapartida, na ocorrência de fissuração, caracterizado por diferentes deformações desses materiais nas proximidades da fissura (maior alongamento do aço), implicando na existência de deslizamento da armadura em relação ao concreto, a aderência é conhecida por deslizante ou móvel. Dado a importância da aderência deslizante no estudo de estruturas de concreto armado fissurada, existe na literatura diversas investigações sobre esse tema com distintas abordagens. De acordo com o mesmo autor pode-se distinguir duas formas de tratamento do problema, em que uma estabelece uma lei tensão de aderência em função do deslizamento e a outra não. Como a primeira forma de tratamento do problema fornece subsídios para o surgimento do modelo apresentado nessa seção, maior atenção será dada a ela.

A partir do teste de arrancamento (*pull out*) mostrado na Figura 5(a) as grandezas associadas a interação aço-concreto podem ser avaliadas.

Figura 5 – Aderência aço-concreto



Na Figura 5(a), é ilustrada uma barra de aço tracionada por uma força  $N$ , aderida a um bloco de concreto numa faixa chamada de comprimento de ancoragem

$l_b$ . A tensão de cisalhamento de aderência  $\tau_b$ , desenvolvida na interface entre o concreto e a armadura apresenta um comportamento não linear ao longo de  $l_b$ . Como observado na Figura 5(b), a respectiva tensão varia em função do deslizamento entre os dois materiais  $\delta$ . A aderência aumenta com o deslizamento até que a tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{bmax}$  seja atingida, caso o deslizamento aumente ainda mais, as tensões de cisalhamento decrescem. Dado a não linearidade desses parâmetros, a tensão de cisalhamento de aderência é simplificada por um valor uniformemente distribuído ao longo do perímetro nominal da barra de diâmetro  $\phi_s$  conforme Eq. (7).

$$\tau_b = \frac{N}{\phi_s \pi l_b} \quad (7)$$

De acordo com o sistema, o equilíbrio entre forças internas e forças externas em uma seção qualquer é demonstrado na Eq. (8).

$$N = A_s \sigma_s + \hat{A}_c \sigma_c \quad (8)$$

Onde  $\hat{A}_c = A_c - A_s$ , com  $A_c$  correspondente a área de seção bruta de concreto e  $A_s = \pi \phi_s^2 / 4$  a área de seção da barra. Considerando a taxa geométrica da armadura como  $\rho = A_s / A_c$ , a equação Eq. (8) pode ser reescrita como Eq. (9).

$$\frac{N}{A_s} = \sigma_s + \frac{(1 - \rho)}{\rho} \sigma_c \quad (9)$$

Analisando um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  Figura 5(c), extraído do teste de arrancamento e com vista as condições de equilíbrio do elemento, as forças na armadura  $N_s$  e no concreto  $N_c$  ao longo desse comprimento podem ser definidas como uma função da tensão de cisalhamento de aderência  $\tau_b(x)$ , Eq. (10).

$$\frac{dN_s}{dx} = - \frac{dN_c}{dx} = \pi \phi_s \tau_b(x) \quad (10)$$

De Eq. (10) as tensões em cada material são definidas por Eq. (11).

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_c}{dx} = \frac{4}{\phi_s} \tau_b(x) \quad (11)$$

Sendo a tensão na armadura igual a Eq. (12).

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4}{\phi_s} \tau_b(x) \quad (12)$$

E a tensão no concreto igual a Eq. (13).

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = -\frac{4\rho}{\phi_s(1-\rho)} \tau_b(x) \quad (13)$$

Ainda com relação a Figura 5(c), observa-se que o concreto deslocou  $u_c$  e o aço  $u_s$ , de modo que, o escorregamento relativo entre os materiais pode ser determinado como  $\delta = u_s - u_c$ . Diferenciando-se essa expressão em relação ao comprimento  $dx$ , é obtida uma equação de compatibilidade da deformação do aço  $\varepsilon_s$  e do concreto  $\varepsilon_c$ , Eq. (14).

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{du_s}{dx} - \frac{du_c}{dx} = \varepsilon_s - \varepsilon_c \quad (14)$$

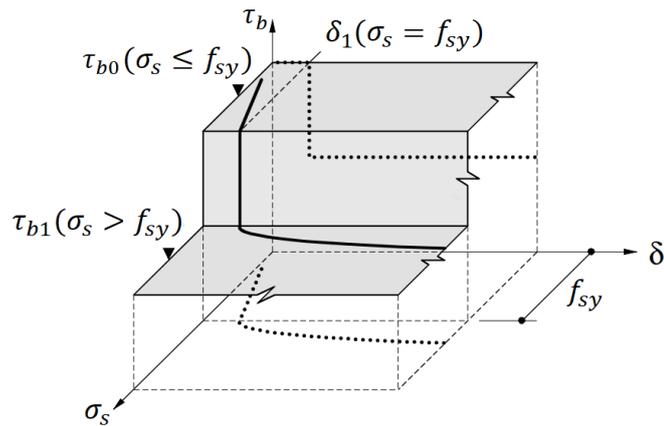
Assumindo um comportamento elástico linear do aço ( $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$ ) e do concreto ( $\sigma_c = E_c \varepsilon_c$ ) e combinando as equações Eq. (12) e (13) com Eq. (14) pode-se obter uma equação diferencial de segunda ordem que relaciona o escorregamento  $\delta$  e a tensão de aderência  $\tau_b(x)$ , Eq. (15). Em que  $n$  é a razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto.

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\tau_b(x)}{\phi_s E_s} \left[ 1 + \frac{n\rho}{(1-\rho)} \right] \quad (15)$$

A solução exata da equação diferencial Eq. (15) encontra um obstáculo na sua dependência da função da tensão de aderência adotada. Sigrist (1995) admitindo o modelo bilinear do aço, sugere uma solução simplificada para essa equação, representando a tensão de aderência como rígida perfeitamente-plástica, através de uma função degrau composta por dois patamares, Figura 6.

Na função da tensão de aderência  $\tau_b(x)$ , o primeiro nível corresponde à situação em que as tensões na armadura  $\sigma_s$  são inferiores ou iguais a tensão de escoamento  $f_{sy}$ , onde a tensão de aderência  $\tau_{b0}$  é admitida o dobro da resistência à fissuração do concreto à tração  $f_{cr}$ . O segundo degrau se refere ao caso oposto, onde o aço já escoou. A tensão de aderência nesse caso  $\tau_{b1}$  equivale a metade de  $\tau_{b0}$ , ou seja,  $f_{cr}$ .

Figura 6 - Curva tensão de aderência-deslizamento-tensão no aço



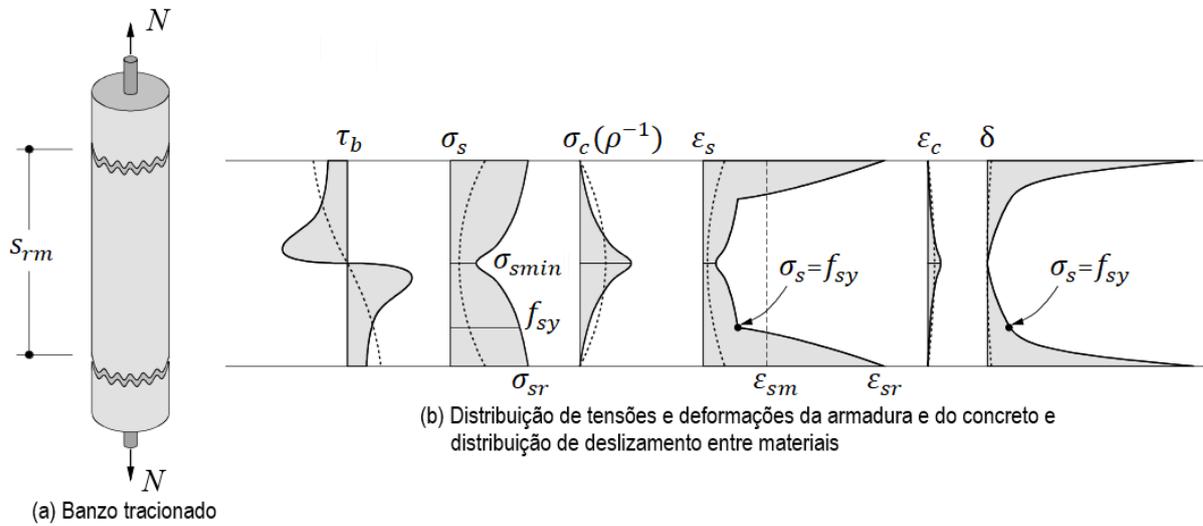
Fonte: Adaptado de Kaufmann (1998, p. 23).

### 2.1.3.2 Enrijecimento à tração

O modelo da tensão de aderência em função do escorregamento, discutido na seção anterior, é aplicado na avaliação da tensão na armadura na fissura  $\sigma_{sr}$ , que está relacionada a sua deformação média  $\varepsilon_{sm}$ . O cálculo dessa tensão depende do chamado efeito de enrijecimento à tração (*tension stiffening*), que consiste no ganho de rigidez pela barra devido à contribuição do concreto à tração entre fissuras (KAUFMANN, 1998). Esse efeito surge em decorrência do mecanismo de aderência e ao assumir que o concreto não-fissurado entre fissuras, circundante a barra de aço, resiste à tração. Dessa forma, ao observar a Figura 7 um percentual da carga aplicada é resistido pelo concreto e outra pela barra de aço (KVAM, 2018).

De acordo com a distribuição de tensões da Figura 7, é possível destacar dois aspectos: no ponto médio entre as fissuras, a tensão da armadura é mínima e no concreto é máxima; e na fissura, somente o aço suporta a força axial, conseqüentemente, sua tensão é máxima e a do concreto é nula.

Figura 7 – Enrijecimento à tração



Fonte: Adaptado de Kaufmann (1998, p. 21).

### 2.1.3.3 Espaçamento entre fissuras

Entre fissuras, a tensão máxima de tração no concreto  $\sigma_{ct}$  deve ser menor que a sua resistência à tração do concreto  $f_{cr}$ . Pois, ao atingir esse valor, forma-se uma nova fissura no local. Assim, a tensão de aderência observada no elemento não pode resultar em uma tensão de tração no concreto maior que  $f_{cr}$ .

Desse modo, o espaçamento entre fissuras de um elemento tracionado  $s_{rm}$  (Figura 7) fica limitado entre  $s_{rm0}$ , sendo esse o espaçamento máximo entre fissuras correspondente a situação onde as tensões de tração do concreto, transmitidas ao concreto por aderência, são iguais a tensão de resistência à tração  $f_{cr}$ . Integrando a equação Eq. (13), essa condição é posta como mostrada em Eq. (16) e Eq. (17):

$$\sigma_{ct} = \int d\sigma_c \leq f_{cr} \quad (16)$$

$$\frac{4}{\phi_s} \frac{\rho}{(1-\rho)} \int_{x=0}^{s_{rm0}/2} \tau_b(x) dx \leq f_{cr} \quad (17)$$

A solução de Eq. (17) requer o conhecimento de  $\tau_b(x)$ . Marti et al. (1998) considerou o comportamento bilinear do aço e a relação tensão de aderência – escorregamento rígida perfeitamente plástica proposta por Sigrist (1995). Esta idealização foi chamada de Modelo de Banzo Tracionado. Considerando que a fase de formação de fissuras termina antes do início do escoamento, a tensão de aderência

é igual a  $\tau_{b0}$ . Desse modo, resolvendo-a para o caso onde  $\sigma_{ct} = f_{cr}$ , (correspondente a  $s_{rm} = s_{rm0}$ ), o espaçamento máximo entre fissuras pode ser calculado de acordo com a Eq. (18).

$$s_{rm0} = \frac{f_{cr}\phi_s(1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} \quad (18)$$

Por outro lado, o espaçamento entre as fissuras não pode ser inferior a  $s_{rm0}/2$ . Por exemplo, se o espaçamento entre as fissuras for 40% de  $s_{rm0}$ , isso significa que essa nova fissura central surgiu de um espaçamento entre fissuras anterior igual a 80% (novas fissuras surgem no ponto médio entre fissuras já formadas), o que é inconsistente com o modelo em questão.

A limitação imposta ao espaçamento real entre fissuras  $s_{rm}$ , pode ser resumida pela Eq. (19) como sugerida por Kaufmann (1998). Sendo  $\lambda = s_{rm}/s_{rm0}$  cujo valor está definido no intervalo  $0,5 \leq \lambda \leq 1$ .

$$s_{rm} = \lambda s_{rm0} \quad (19)$$

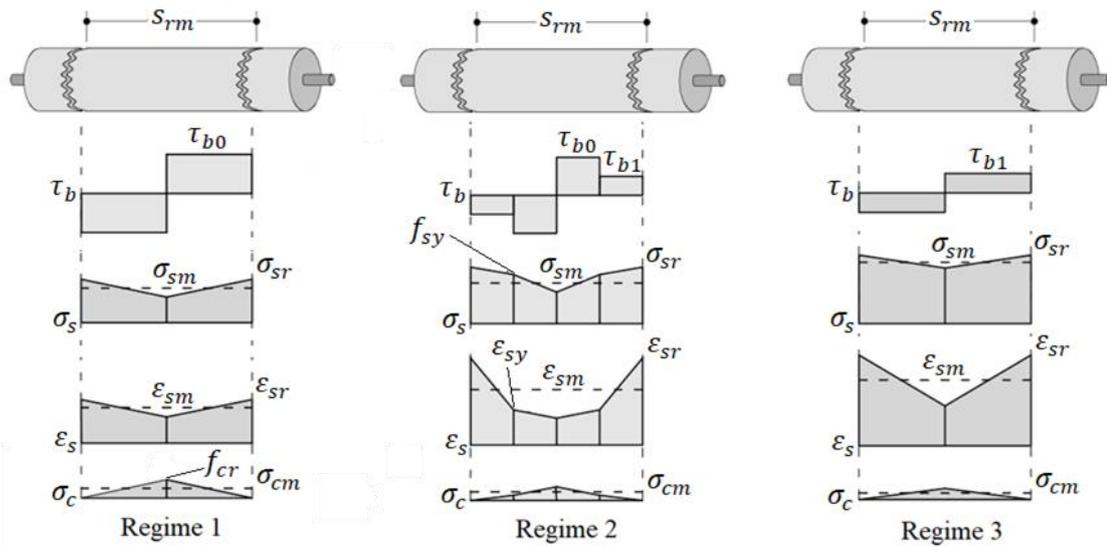
#### 2.1.3.4 Tensão na armadura e no concreto

Em razão das tensões de aderência serem constantes nesse modelo, a distribuição de tensões e deformações entre fissuras no aço e no concreto são lineares. Além disso, como as tensões de aderência são representadas por uma função degrau com dois domínios (antes e após o escoamento do aço), as tensões no aço na fissura  $\sigma_{sr}$  podem se enquadrar em 3 regimes distintos: aço não-escoado, aço parcialmente escoado e aço totalmente escoado, Figura 8.

O Regime 1 ocorre quando  $\sigma_{sr}$  é igual ou inferior a  $f_{sy}$ . De acordo com a Figura 8, a tensão  $\sigma_{sr1}$  é dada pela tensão média ( $\sigma_{sm1} = E_s \varepsilon_{sm}$ ) acrescida da tensão na armadura devido à aderência desenvolvida ao longo do comprimento  $s_{rm}/4$ , Eq. (20).

$$\sigma_{sr1} = \sigma_{sm1} + \int_{x=0}^{s_{rm}/4} d\sigma_s = E_s \varepsilon_{sm} + \frac{\tau_{b0} s_{rm}}{\phi_s} \quad (20)$$

Figura 8 - Distribuição de tensões e deformações nos regimes



Fonte: Adaptado de Pimentel (2011, p. 56).

O Regime 2 ocorre quando a tensão máxima na armadura localizada na fissura  $\sigma_{sr2}$  é superior a tensão de escoamento  $f_{sy}$  e a tensão mínima  $\sigma_{smin}$  é inferior a  $f_{sy}$ ,  $\sigma_{smin} \leq f_{sy} \leq \sigma_{sr2}$ . A armadura apresenta um comportamento elástico nas proximidades do ponto médio entre fissuras e plástico próximo às fissuras e, por causa disso, identifica-se a presença dos dois níveis de tensão de aderência. A tensão mínima  $\sigma_{smin}$  é calculada de acordo com Sigrist (1995) pela equação Eq. (21).

$$\sigma_{smin} = \sigma_{sr2} - (\sigma_{sr2} - f_{sy}) \left(1 - \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}}\right) - \frac{2\tau_{b1}S_{rm}}{\phi_s} \quad (21)$$

Uma vez atendido esses critérios, a tensão da armadura na fissura  $\sigma_{sr2}$  é dada por meio da Eq. (22), e a tensão média do aço  $\sigma_{sm2}$  é determinada por meio da Eq. (23) segundo Kaufmann (1998).

$$\sigma_{sr2} = f_{sy} + 2 \frac{\frac{\tau_{b0}S_{rm}}{\phi_s} - \sqrt{(f_{sy} - E_s \epsilon_{sm}) \frac{\tau_{b1}S_{rm}}{\phi_s} \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}}\right) + \frac{E_s}{E_{sh}} \tau_{b0} \tau_{b1} \frac{S_{rm}^2}{\phi_s^2}}}{\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}}} \quad (22)$$

$$\sigma_{sm2} = f_{sy} - \frac{(\sigma_{sr2} - f_{sy})^2 \phi_s \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - 1\right)}{4\tau_{b1}S_{rm}} + (\sigma_{sr2} - f_{sy}) \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{\tau_{b0}S_{rm}}{\phi_s} \quad (23)$$

No Regime 3 as tensões em toda a armadura são superiores a tensão de escoamento ( $f_{sy} < \sigma_{sm3}$ ). Nessas condições, a tensão na fissura  $\sigma_{sr3}$ , de forma análoga ao Regime 1, é equivalente a soma da tensão média Eq. (24), com a contribuição relativa à aderência ao longo do comprimento  $s_{rm}/4$ , tal como expresso pela Eq. (25).

$$\sigma_{sm3} = f_{sy} + \left( \varepsilon_{sm} - \frac{f_{sy}}{E_s} \right) E_{sh} \quad (24)$$

$$\sigma_{sr3} = \sigma_{sm3} + \int_{x=0}^{s_{rm}/4} d\sigma_s = f_{sy} + \left( \varepsilon_{sm} - \frac{f_{sy}}{E_s} \right) E_{sh} + \frac{\tau_{b1} s_{rm}}{\phi_s} \quad (25)$$

Para todos os casos, a tensão no aço na fissura  $\sigma_{sr}$  deve corresponder a soma da sua tensão média com a tensão média no concreto  $\sigma_{cm}$ , para que o equilíbrio do elemento tracionado esteja atendido, Eq. (26). Essa relação pode ser usada para avaliar a tensão média no concreto  $\sigma_{cm}$  com base nas tensões  $\sigma_{sm}$  e  $\sigma_{sr}$ .

$$\sigma_{sm} + \sigma_{cm} \frac{\rho}{(1 - \rho)} = \sigma_{sr} \quad (26)$$

## 2.2 ELEMENTOS DE MEMBRANA

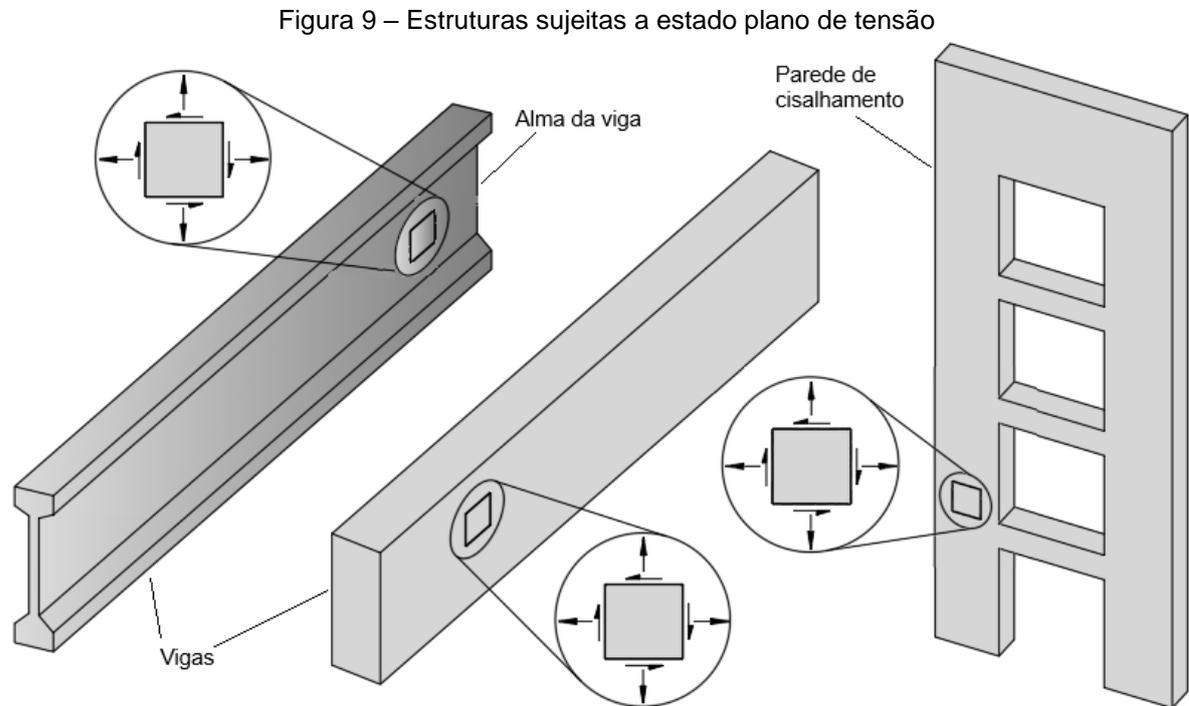
### 2.2.1 Introdução

Membranas são estruturas de superfície plana sujeitas a, predominantemente, estado plano de tensão. Na construção civil existem vários exemplos que podem ser avaliados estruturalmente a partir da união desses elementos como os ilustrados na Figura 9.

Os elementos de membrana de concreto armado dispõem de inúmeros modelos físicos que possibilitam estimar o seu comportamento, sobretudo na fase pós fissuração considerada mais complexa. Conforme Kaufmann (1998) os modelos de treliças podem ser utilizados para avaliá-los tanto na fase pré como pós fissuração.

Nessa categoria destaca-se as contribuições de Vecchio e Collins (1982). Eles propuseram uma correção na relação tensão deformação do concreto sob

compressão a partir da consideração do efeito de amolecimento do concreto e formularam a Teoria de Campo de Compressão (*Compression Field Theory – CFT*).

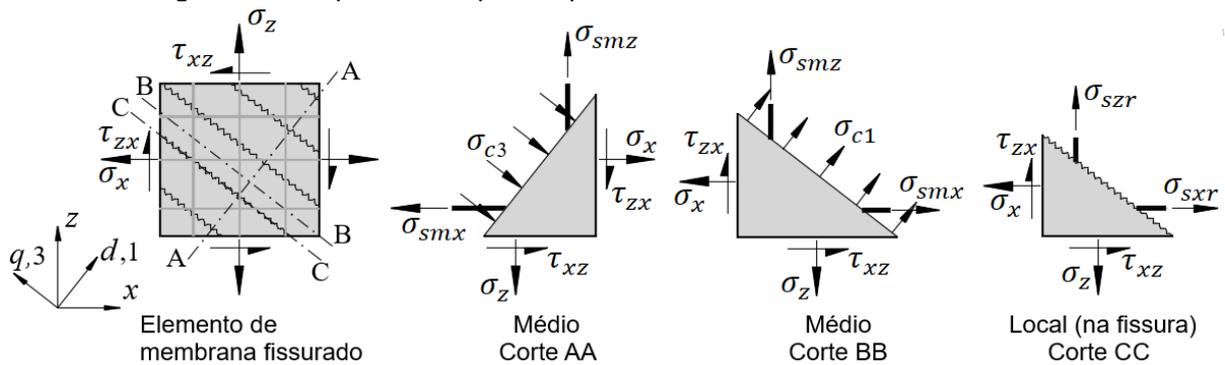


Fonte: A autora (2024) e adaptado de Kvam (2018, p. 5).

Anos depois, modificações foram realizadas por Vecchio e Collins (1986) para incluir, principalmente, a capacidade resistente média à tração do concreto no sentido transversal as bielas de compressão, surgindo a Teoria do Campo de Compressão Modificado (*Modified Compression Field Theory – MCFT*). Considerado inovador, o MCFT tornou-se base para os modelos desenvolvidos posteriormente.

Os modelos de treliças podem ser divididos em dois tipos: os modelos constitutivos médios e modelos constitutivos locais. Nos modelos constitutivos médios o equilíbrio é avaliado considerando as tensões médias do concreto e da armadura, correspondentes a um domínio que contém várias fissuras, ver Figura 10. Exemplos de modelos constitutivos médios são o MCFT ou o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável (*Rotating-Angle Softened Truss Model – RA-STM*) idealizado por Hsu (1988). Por sua vez, os modelos constitutivos estabelecem o equilíbrio na fissura (local), onde apenas as tensões no aço são consideradas, como mostra o corte CC da Figura 10. Como exemplo do mesmo, tem-se o Modelo de Membrana Fissurada (*Cracked Membrane Model – CMM*) desenvolvido por Kaufmann (1998).

Figura 10 – Esquema do equilíbrio para modelos constitutivos médios e locais



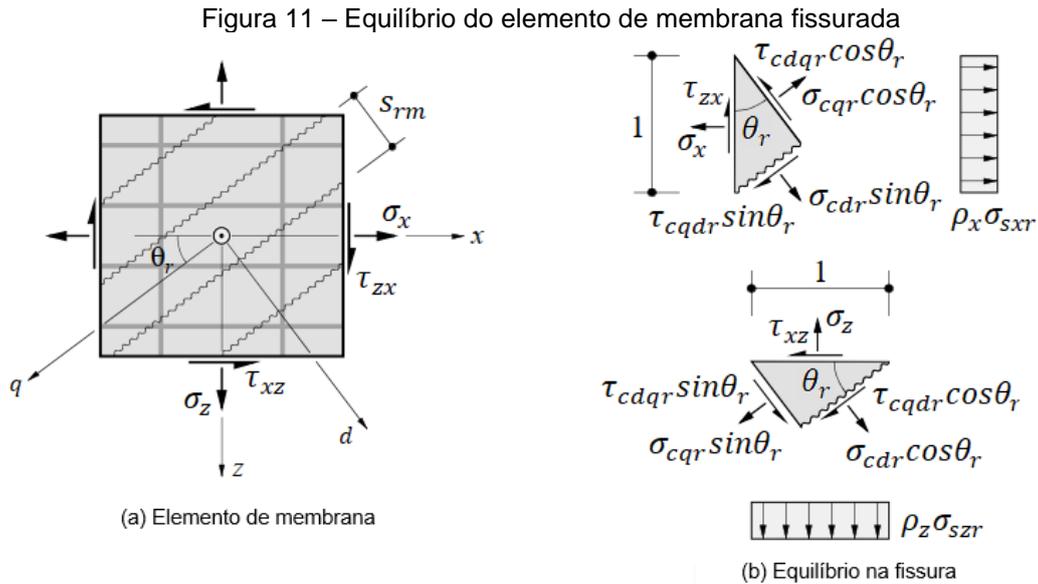
As vantagens do CMM residem no cálculo do espaçamento entre fissuras e tensões na armadura na fissura. As condições de equilíbrio expressas em termos de tensões na fissura garantem a ligação com a análise limite (KAUFMANN, 1998). Essas vantagens se alinham com os objetivos desse trabalho. Nas próximas seções são apresentados o modelo de membrana fissurada e os procedimentos numéricos admitidos para solução do seu sistema de equações.

## 2.2.2 Modelo de Membrana Fissurada

O modelo de membrana fissurada desenvolvido por Kaufmann (1998) é baseado no MCFT e utiliza o modelo de banzo tracionado (Marti et al. (1998)) para estimar o efeito de enrijecimento à tração. O CMM está pautado nos três princípios da mecânica das estruturas, que são: equilíbrio das forças, compatibilidade das deformações (mostradas a seguir) e as relações constitutivas dos materiais (ver seção 2.1).

### 2.2.2.1 Equações de equilíbrio

A Figura 11(a) apresenta um elemento bidimensional de concreto armado fissurado, sujeito a ação de forças de membrana no plano  $x - z$  tais como, as tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e as tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{zx}$ . As armaduras são ortogonais onde as barras longitudinais são paralelas ao eixo  $x$ , e as transversais ao eixo  $z$ . As fissuras igualmente espaçadas são paralelas ao eixo  $q$  e este possui uma inclinação em relação ao eixo  $x$  igual a  $\theta_r$ , chamado de direção da fissura e considerado nesse modelo como variável.



Fonte: Adaptado do Kaufmann (1998, p. 55).

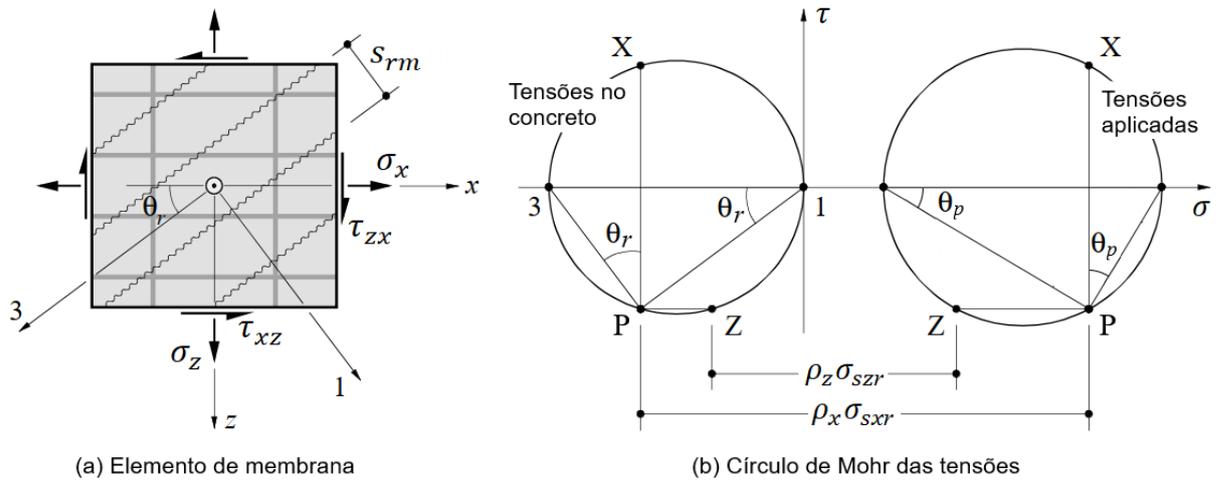
A contribuição do concreto é representada pelas tensões normais de tração e compressão  $\sigma_{cdr}$  e  $\sigma_{cqr}$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_{cqdr}$ , orientadas segundo o sistema de eixos  $d - q$ . As armaduras, desprezando qualquer possível efeito de pino, contribuem por meio das tensões normais equivalentes  $\sigma_{sxr}\rho_x$  e  $\sigma_{szr}\rho_z$ .

Baseado nos pressupostos anteriores e no círculo de Mohr das tensões, o equilíbrio do elemento bidimensional da Figura 11(b) pode ser obtido a partir da transformação de coordenadas entre o sistema de eixos  $x - z$  e o sistema de eixos principais  $d - q$ , como mostrado na equação Eq. (27).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_r & \sin^2\theta_r & 2\sin\theta_r\cos\theta_r \\ \sin^2\theta_r & \cos^2\theta_r & -2\sin\theta_r\cos\theta_r \\ -\sin\theta_r\cos\theta_r & \sin\theta_r\cos\theta_r & \cos^2\theta_r - \sin^2\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{cqr} \\ \sigma_{cdr} \\ \tau_{cqdr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_x\sigma_{sxr} \\ \rho_z\sigma_{szr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

No modelo de membrana fissurada (CMM) o estado de equilíbrio do elemento é obtido na fissura, estando ela livre de tensões. Nesse caso, são nulas a tensão normal de tração  $\sigma_{cdr}$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_{cqdr}$  na fissura. De acordo com Kaufmann (1998) essa condição garante que não haja transferência de esforços entre fissura e desse modo apenas a armadura contribuirá para o equilíbrio. Admitido essa condição a representação gráfica do círculo de Mohr das tensões do respectivo modelo é tal como apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Círculo de Mohr das tensões para o CMM



Do círculo de Mohr das tensões ao agrupar os termos das matrizes da Eq. (27), obtém-se as equações de equilíbrio do modelo, Eq. (28), (29) e (30). O termo  $\sigma_{cqr}$  passa a ser chamado de  $\sigma_{c3r}$ .

$$\sigma_x = \rho_x \sigma_{sxr} + \sigma_{c3r} \cos^2 \theta_r \quad (28)$$

$$\sigma_z = \rho_z \sigma_{s zr} + \sigma_{c3r} \sin^2 \theta_r \quad (29)$$

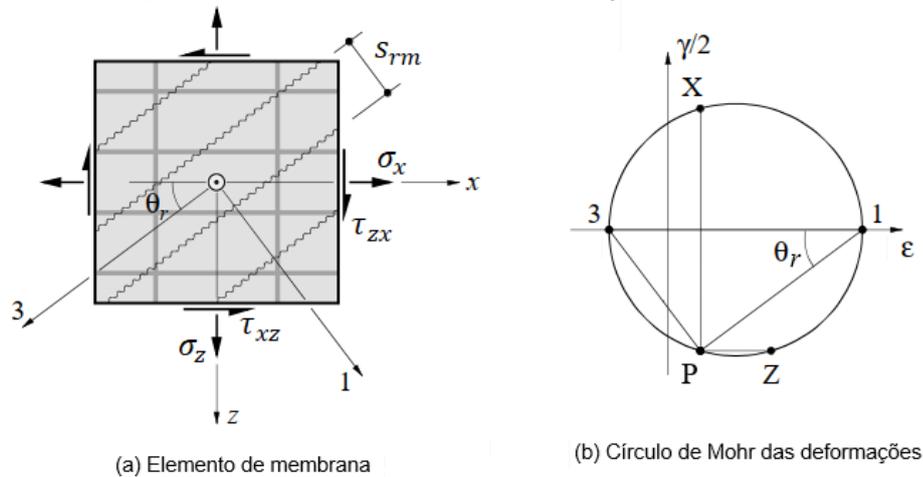
$$\tau_{xz} = -\sigma_{c3r} \sin \theta_r \cos \theta_r \quad (30)$$

### 2.2.2.2 Compatibilidade das deformações

As condições de compatibilidade das deformações do modelo podem ser obtidas por meio do círculo de Mohr das deformações da Figura 13. A partir dele, fazendo a transformação de coordenadas entre o sistema de eixos  $x - z$  e o sistema de eixos principais 1 - 3 são obtidas três equações que relacionam as deformações médias normais ( $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ ) e de cisalhamento  $\gamma_{xz}$ , com as deformações médias principais de tração e compressão ( $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ ), Eq. (31).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_r & \sin^2 \theta_r & 2 \sin \theta_r \cos \theta_r \\ \sin^2 \theta_r & \cos^2 \theta_r & -2 \sin \theta_r \cos \theta_r \\ -2 \sin \theta_r \cos \theta_r & 2 \sin \theta_r \cos \theta_r & 2(\cos^2 \theta_r - \sin^2 \theta_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Figura 13 – Círculo de Mohr das deformações para o CMM



(a) Elemento de membrana

(b) Círculo de Mohr das deformações

Fonte: Adaptado do Kaufmann (1998, p. 59).

Combinando o produto das matrizes à direita da igualdade de Eq. (31) com a identidade trigonométrica  $\sin^2\theta_r + \cos^2\theta_r = 1$ , obtém-se o que é chamado de 1º princípio da invariância das deformações, mostrado na Eq. (32). Essa relação pode ser usada para avaliar a deformação principal máxima  $\varepsilon_1$  com base nas deformações médias  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_z$ .

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_z \quad (32)$$

Das equações de compatibilidade também se obter uma relação entre a direção da fissura  $\theta_r$  e as deformações médias conforme indicado por Kvam (2018). Essa correspondência é descrita na equação Eq. (33).

$$\tan^2\theta_r = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_3}{\varepsilon_z - \varepsilon_3} \quad (33)$$

### 2.2.2.3 Espaçamento entre fissuras em membranas de concreto armado

No modelo CMM o efeito de enrijecimento à tração é incorporado por meio do TCM (2.1.3) aplicado individualmente para cada direção da armadura (Figuras 14(b) e 14(c)). Sabendo que as fissuras são consideradas paralelas e igualmente espaçadas e orientadas segundo a direção da fissura  $\theta_r$ , o espaçamento entre fissuras admitido para avaliação do TCM é determinado pela correspondência

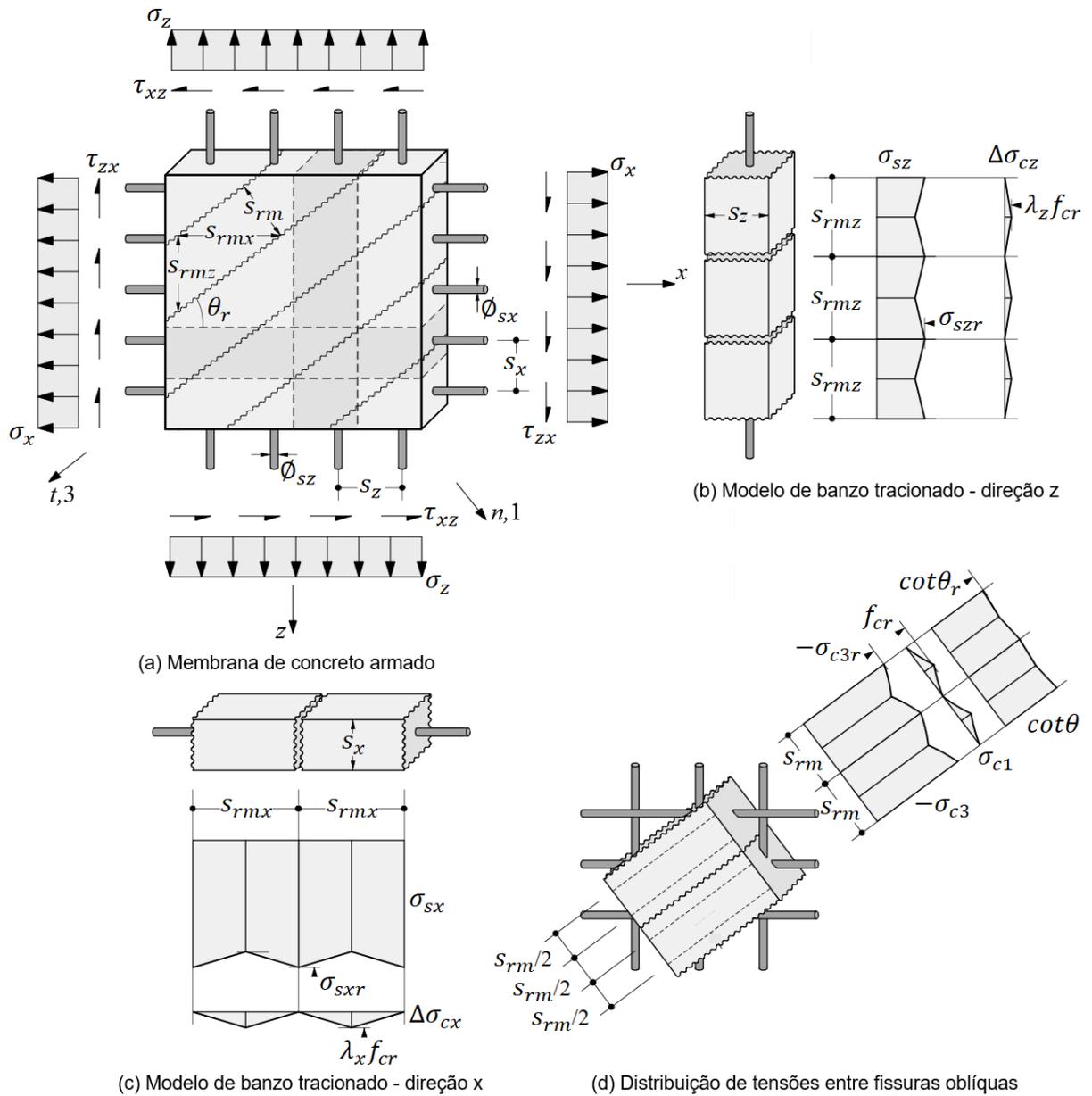
trigonométrica entre o espaçamento entre fissuras oblíquas  $s_{rm}$  e o ângulo  $\theta_r$ , Figura 14(a).

Os espaçamentos entre fissuras nas direções  $x$  e  $z$  ( $s_{rmx}$  e  $s_{rmz}$ ) são calculados segundo as equações Eq. (34) e Eq. (35).

$$s_{rmx} = \frac{s_{rm}}{\text{sen}\theta_r} \tag{34}$$

$$s_{rmz} = \frac{s_{rm}}{\text{cos}\theta_r} \tag{35}$$

Figura 14 – Modelo de Membrana Fissurada (CMM)



Fonte: Adaptado de Kaufmann (1998, p. 67).

O espaçamento entre fissuras máximo é avaliado conforme o diâmetro ( $\phi_{sx}$  e  $\phi_{sz}$ ) e a taxa de armadura ( $\rho_x$  e  $\rho_z$ ) da respectiva direção. As equações Eq. (36) e Eq. (37) indicam os cálculos para as direções  $x$  e  $z$ .

$$s_{rmx0} = \frac{f_{cr}\phi_{sx}(1 - \rho_x)}{2\tau_{b0} \rho_x} \quad (36)$$

$$s_{rmz0} = \frac{f_{cr}\phi_{sz}(1 - \rho_z)}{2\tau_{b0} \rho_z} \quad (37)$$

Analogamente, os parâmetros  $\lambda_x$  e  $\lambda_z$  são obtidos por meio das expressões Eq. (38) e Eq. (39). Para um estado plano de tensões esses parâmetros podem assumir valores fora do intervalo que é estabelecido para o caso de tensão uniaxial, podendo, inclusive, exceder o valor de 1.

$$\lambda_x = \frac{s_{rmx}}{s_{rmx0}} = \frac{s_{rm}}{s_{rmx0} \text{sen}\theta_r} \quad (38)$$

$$\lambda_z = \frac{s_{rmz}}{s_{rmz0}} = \frac{s_{rm}}{s_{rmz0} \text{cos}\theta_r} \quad (39)$$

O espaçamento entre fissuras  $s_{rm}$  em painéis fissurados segundo Kaufmann (1998) é avaliado igualmente para o caso de um elemento unidimensional, seção 2.1.3. Logo, as condições necessárias para formação de novas fissuras são semelhantes, inclusive, a imposição de um limite inferior e superior para essa distância. Assim,  $s_{rm}$  é uma função do seu espaçamento máximo, isto é,  $s_{rm} = \lambda s_{rm0}$ , sendo o parâmetro  $\lambda$  variável no intervalo de  $0,5 \leq \lambda \leq 1$ .

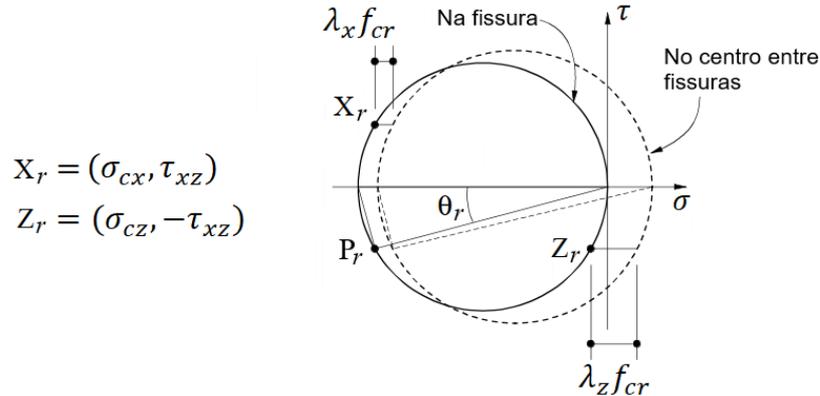
Contudo, o espaçamento entre fissuras máximo  $s_{rm0}$  em painéis fissurados corresponde à situação em que a tensão de tração principal  $\sigma_1$ , observada no centro entre duas fissuras consecutivas, é equivalente a tensão de fissuração do concreto  $f_{cr}$ . Do círculo de Mohr das tensões no centro entre fissuras (Figura 15) a tensão principal  $\sigma_1$  é igual a soma do centro  $C$  e do raio  $R$  desse círculo. Com isso, a condição supracitada é posta como indicada na equação Eq. (40).

$$C + R = \sigma_1 \leq f_{cr} \quad (40)$$

O círculo de Mohr das tensões no centro entre fissuras corresponde ao círculo de Mohr das tensões na fissura somado a contribuição do efeito da aderência entre

os materiais que produz um incremento de tensões no concreto nas direções  $x$  e  $z$  iguais a  $\Delta\sigma_{cx} = \lambda_x f_{cr}$  e  $\Delta\sigma_{cz} = \lambda_z f_{cr}$ , Figura 15.

Figura 15 - Círculo de Mohr das tensões totais no concreto na fissura e no centro entre fissuras



Fonte: Adaptado de Kaufmann (1998, p. 69).

Baseado na Figura 15 os termos  $C$  e  $R$  da equação Eq. (40) são calculados conforme Eq. (41) e Eq. (42), KVAM (2018).

$$C = \frac{(\sigma_{cx} + \lambda_x f_{cr}) + (\sigma_{cz} + \lambda_z f_{cr})}{2} = \frac{\sigma_{cx} + \sigma_{cz}}{2} + \frac{f_{cr}(\lambda_x + \lambda_z)}{2} \quad (41)$$

$$R = \sqrt{\left[ \frac{(\sigma_{cz} + \lambda_z f_{cr}) - (\sigma_{cx} + \lambda_x f_{cr})}{2} \right]^2 + \tau_{xz}^2} \quad (42)$$

$$= \sqrt{\left[ \frac{\sigma_{cz} - \sigma_{cx}}{2} - \frac{f_{cr}(\lambda_x - \lambda_z)}{2} \right]^2 + \tau_{xz}^2}$$

Do círculo de Mohr na fissura (Figura 15) algumas relações podem ser obtidas, como indicadas em Eq. (43), Eq. (44) e Eq. (45).

$$\sigma_{c3r} = \tau_{xz}(\cot\theta_r + \tan\theta_r) \quad (43)$$

$$\frac{\sigma_{cx} + \sigma_{cz}}{2} = -\frac{\sigma_{c3r}}{2} = -\frac{\tau_{xz}(\cot\theta_r + \tan\theta_r)}{2} \quad (44)$$

$$\sigma_{cz} - \sigma_{cx} = \frac{2\tau_{xz}}{\tan 2\theta_r} = \tau_{xz}(\cot\theta_r - \tan\theta_r) \quad (45)$$

Combinando as três equações anteriores com Eq. (41) e Eq. (42), a condição definida em Eq. (40) é reescrita segundo Eq. (46).

$$\frac{f_{cr}(\lambda_x + \lambda_z)}{2} - \frac{\tau_{xz}(\cot\theta_r + \tan\theta_r)}{2} + \sqrt{\left[\frac{\tau_{xz}(\cot\theta_r - \tan\theta_r)}{2} - \frac{f_{cr}(\lambda_x - \lambda_z)}{2}\right]^2 + \tau_{xz}^2} \leq f_{cr} \quad (46)$$

Resolvendo Eq. (46) de modo que a tensão de tração principal  $\sigma_1$  seja igual a tensão de fissuração  $f_{cr}$  como sugerido por Dabbagh e Foster (2006), o espaçamento entre fissuras máximo do painel fissurado  $s_{rm0}$  é determinado, Eq. (47).

$$s_{rm0} = \frac{a + \eta b - \sqrt{\eta c + d + s_{rmz0}^2 + \eta^2(s_{rmx0}^2 - d)}}{2} \quad (47)$$

Sendo:

$$\eta = |\tau_{xz}|/f_{cr} \quad (48)$$

$$a = s_{rmx0}\text{sen}|\theta_r| + s_{rmz0}\text{cos}|\theta_r| \quad (49)$$

$$b = s_{rmx0}\text{cos}|\theta_r| + s_{rmz0}\text{sen}|\theta_r| \quad (50)$$

$$c = 2(s_{rmx0}^2 + s_{rmz0}^2)\text{sen}|\theta_r|\text{cos}|\theta_r| - 2s_{rmx0}s_{rmz0} \quad (51)$$

$$d = (s_{rmx0}^2 - s_{rmz0}^2)\text{sen}^2\theta_r - 2s_{rmx0}s_{rmz0}\text{sen}|\theta_r|\text{cos}|\theta_r| \quad (52)$$

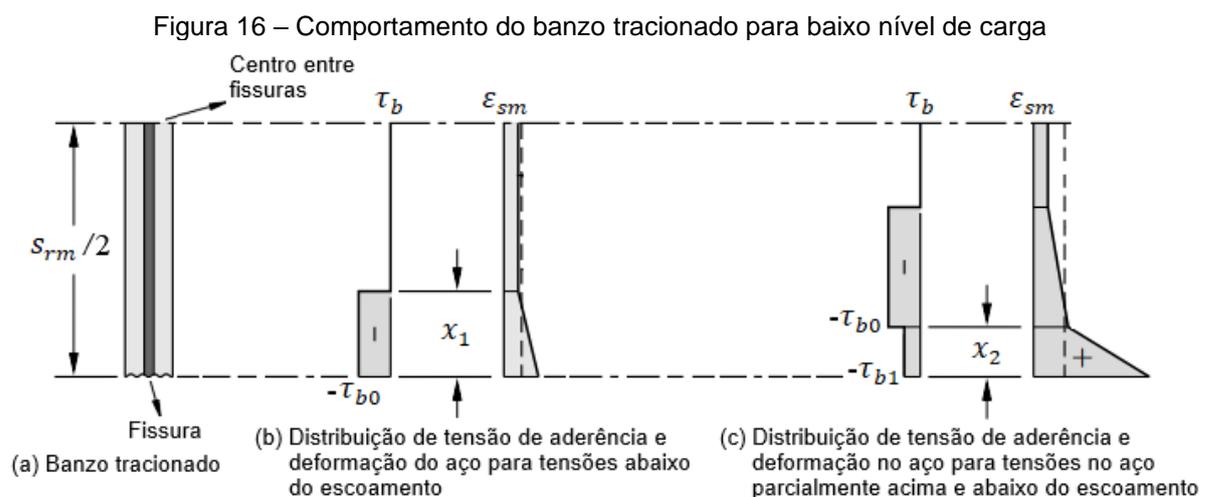
O espaçamento entre fissuras máximo do painel fissurado determinado por Eq. (46) não é aplicável quando a direção da fissura assume valores aproximadamente iguais a  $\theta_r = 0$  ou  $\theta_r = \pm\pi$  ou ainda  $\theta_r = \pm\pi/2$ . Nesses casos o painel se resume a situação de tensão uniaxial na qual o TCM é aplicado diretamente. Tomando como exemplo  $\theta_r = \pi/2$ , o que caracteriza uma tensão uniaxial na direção  $x$ , os parâmetros são  $\lambda_x = 1$ ,  $\lambda_z = 0$  e o espaçamento entre fissuras máximo do painel fissurado é igual a  $s_{rm0} = s_{rmx0}$ . Quando  $\theta_r = \pi/2$  o espaçamento entre fissuras na direção  $z$  Eq. (35), pode ser admitido como um valor muito grande,  $s_{rmz} \rightarrow \infty$ . Em tal caso, como observado por Dabbagh e Foster (2006), ocorre um cálculo excessivo da tensão de aderência ao longo do comprimento da barra (inclusive maior que o valor limite do TCM que é  $\tau_b = \tau_{b0}$ ). Quando na verdade a tensão de aderência  $\tau_b$  deveria ser igual a zero, pois não há tensões desenvolvidas nessa direção. Para  $\theta_r = 0$  ou  $\pm\pi/2$  os mesmos comentários são aplicados.

## 2.2.3 Procedimento de solução do CMM

### 2.2.3.1 Comportamento para baixos níveis de carga

Para baixos valores de carga (quando o escorregamento não está ocorrendo em todo o elemento), o CMM superestima o efeito de enrijecimento à tração ao determinar a distância entre as fissuras fictícias. Isso causa incompatibilidade nas deformações e tensões da armadura e, conseqüentemente, imprecisão na solução do sistema de equações, (SEELHOFFER, 2009). A razão para isso é que as relações do modelo estão fundamentadas na suposição de fissuração estabilizada, quando o escorregamento entre os materiais é observado ao longo do elemento.

Esse problema não foi considerado originalmente por Kaufmann (1998) ao idealizar o CMM. Nesse trabalho, a resposta para baixos níveis de carregamento foi obtida de acordo com uma adaptação do CMM apresentada por Seelhofer (2009) e Kvam (2018). Com essa adaptação o escorregamento entre os materiais é considerado apenas na proximidade da fissura Figura 16. Como será observado na seção de validação do código numérico, a adição dessa abordagem possibilita a maior precisão ao modelo no estágio inicial (baixo carregamento), como também o ganho de estabilidade numérica da solução, especialmente na transição para o concreto fissurado.



No primeiro caso ilustrado na Figura 16(b), se o escorregamento para armadura não escoada  $x_1$ , calculado segundo Eq. (53), for menor que metade do espaçamento

entre fissuras e verificado que  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$ , a tensão do aço na fissura é definida pela equação Eq. (54). Na expressão abaixo  $\beta$  equivale a  $1 + n\rho$ .

$$x_1 = \frac{s_{rm}}{2} \left( \sqrt{n^2 \rho^2 + \frac{E_s \varepsilon_{sm}}{\tau_{b0}} \frac{\phi_s}{s_{rm}} - n\rho} \right) \quad 0 \leq x_1 \leq s_{rm}/2 \quad (53)$$

$$\sigma_{sr} = x_1 \frac{4\tau_{b0}}{\phi_s} \beta \quad (54)$$

No segundo caso Figura 16(c), se ocorrer  $\sigma_{sr} \geq f_{sy}$  e o escorregamento para a armadura escoada  $x_2$  Eq. (55), pertencer ao intervalo  $0 \leq x_2 \leq s_{rm}/2$ , a tensão do aço na fissura é definida pela equação Eq. (56).

$$x_2 = \frac{\phi_s f_{sy} E_{sh}}{4\tau_{b1} \beta E_s} \left\{ \sqrt{1 + 4\beta \frac{E_s}{E_{sh}} \left[ \frac{s_{rm} \tau_{b1}}{\phi_s f_{sy}} \left( \frac{\beta E_s \varepsilon_{sm}}{f_{sy}} - n\rho \right) - \frac{\tau_{b1}}{4\tau_{b0} \beta} \right]} - 1 \right\} \quad (55)$$

$$\sigma_{sr} = f_{sy} + x_2 \frac{4\tau_{b1}}{\phi_s} \quad (56)$$

### 2.2.3.2 Equações adicionais

A partir das equações de compatibilidade Eq. (31), e das identidades trigonométricas, é possível definir mais duas equações que relacionam a direção da fissura  $\theta_r$  do painel com as deformações nos planos  $x - z$  e  $1 - 3$ . As mesmas são mostradas em Eq. (57) e (58).

$$\text{sen}^2 \theta_r = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (57)$$

$$\text{cos}^2 \theta_r = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (58)$$

Essas equações têm grande relevância em modelos estruturais na qual a direção da fissura  $\theta_r$  é variável, como é o caso do modelo de membrana fissurada. Ao aplicá-las o respectivo ângulo é eliminado das equações de equilíbrio e com isso o processo de solução ganha estabilidade numérica (SILVA, 2016). No CMM, essas equações também podem ser utilizadas no cálculo dos espaçamentos entre fissuras.

### 2.2.3.3 Carregamento proporcional

Na análise da resposta tensão-deformação do modelo de membrana fissurada, as forças de membrana aplicadas ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ), orientadas segundo as direções  $x$  e  $z$ , podem ser relacionadas com a tensão principal máxima  $\sigma_1$ , por meio de coeficientes de proporcionalidade que são mostrados nas equações Eq. (59), Eq. (60) e Eq. (61). Esse tipo de configuração para imposição do carregamento na estrutura permite com que a proporção de tensões aplicadas seja sempre constante para todos os incrementos de esforços analisados (SILVA, 2016). Nas expressões abaixo a tensão  $\sigma_1$  é calculada segundo a Eq. (62).

$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_1} \quad (59)$$

$$m_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_1} \quad (60)$$

$$m_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1} \quad (61)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (62)$$

Substituindo-as nas equações de equilíbrio do modelo Eq. (28), (29) e (30), obtém-se Eq. (63), (64) e (65).

$$m_x \sigma_1 - \rho_x \sigma_{sxr} = \sigma_{c3r} \cos^2 \theta_r \quad (63)$$

$$m_z \sigma_1 - \rho_z \sigma_{s zr} = \sigma_{c3r} \sin^2 \theta_r \quad (64)$$

$$m_{xz} \sigma_1 = -\sigma_{c3r} \sin \theta_r \cos \theta_r \quad (65)$$

Combinando o produto de Eq. (63) e (64) com o quadrado de Eq. (65), obtém-se Eq. (66).

$$(m_x \sigma_1 - \rho_x \sigma_{sxr})(m_z \sigma_1 - \rho_z \sigma_{s zr}) = (m_{xz} \sigma_1)^2 \quad (66)$$

A solução da equação anterior define uma nova expressão para a tensão  $\sigma_1$  Eq. (67), onde os parâmetros  $S$ ,  $B$  e  $C$  são calculados por Eq. (68), (69) e (70). Uma das vantagens desse cálculo é obter  $\sigma_1$  apenas com base na proporção entre os

esforços solicitantes externos, as taxas de armaduras e suas respectivas tensões (SILVA, 2016).

$$\sigma_1 = \frac{1}{2S} (B \pm \sqrt{B^2 - 4SC}) \quad (67)$$

$$S = m_x m_z - m_{xz}^2 \quad (68)$$

$$B = m_z \rho_x \sigma_{sxr} + m_x \rho_z \sigma_{s zr} \quad (69)$$

$$C = \rho_x \sigma_{sxr} \rho_z \sigma_{s zr} \quad (70)$$

Baseado nessa configuração de aplicação do carregamento na estrutura, as equações de equilíbrio em termos dos coeficientes de proporção Eq. (63) e (64), constituem o sistema de equações não lineares Eq. (71), que é resolvido durante o processo de solução.

$$\begin{cases} F_{CMM}^{(1)} = \rho_x \sigma_{sxr} + \sigma_{c3r} \cos^2 \theta_r - m_x \sigma_1 = 0 \\ F_{CMM}^{(2)} = \rho_z \sigma_{s zr} + \sigma_{c3r} \sin^2 \theta_r - m_z \sigma_1 = 0 \end{cases} \quad (71)$$

#### 2.2.3.4 Estimativa inicial (*Mohr Compatibility Truss Model* – MCTM)

Para inicialização das ferramentas computacionais de otimização utilizadas para obter a resposta de um sistema de equações, é exigido, dentre outras informações, uma estimativa inicial das variáveis a serem determinadas. Dependendo dessa estimativa, o *so/ver* pode fornecer resultados aceitáveis ou distantes do que se espera, ou ainda, não convergir para solução alguma. Soluções baseadas em técnicas de tentativa e erro podem ter um desempenho ineficientes quanto ao custo computacional, Greene (2006), Hsu e Mo (2010). Para estruturas de concreto armado, tais como elementos de membrana fissurada, uma possibilidade é utilizar um modelo simples, assumindo um comportamento elástico dos materiais (SILVA, 2016).

Diante disso, assumindo materiais elásticos e lineares, as equações de equilíbrio do elemento de membrana, descritos na seção 2.2.3.3, podem ser postas como Eq. (72), (73) e (74).

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_{sxr}}{E_s} = \frac{m_x + m_{xz} \cot \theta_r}{E_s \rho_x} \sigma_1 \quad (72)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_{s3r}}{E_s} = \frac{m_z + m_{xz} \operatorname{tg} \theta_r}{E_s \rho_z} \sigma_1 \quad (73)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_{c3r}}{E_c} = \frac{-m_{xz}}{E_c \operatorname{sen} \theta_r \operatorname{cos} \theta_r} \sigma_1 \quad (74)$$

A partir da equação de compatibilidade Eq. (33) as equações acima podem ser resolvidas, desde que a direção da fissura  $\theta_r$  em Eq. (75) seja determinada. Essa abordagem é chamada de Modelo de Treliça de Compatibilidade de Mohr (MCTM), Hsu e Mo (2010). A mesma foi empregada como estimativa inicial para solução de modelos constitutivos médios de elementos de membrana em trabalhos como Bernardo et al. (2020) e Silva (2016).

$$F_{MCTM} = \tan^2 \theta_r - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_3}{\varepsilon_z - \varepsilon_3} = 0 \quad (75)$$

Para a solução da Eq. (75) usando ferramentas de otimização de equações não-lineares o ângulo estimado para inicializar a operação pode ser o correspondente ao do sistema principal dos esforços aplicados. Esse ângulo é calculado através das relações geométricas do círculo de Mohr.

## 2.3 ELEMENTOS DE PLACA À FLEXÃO

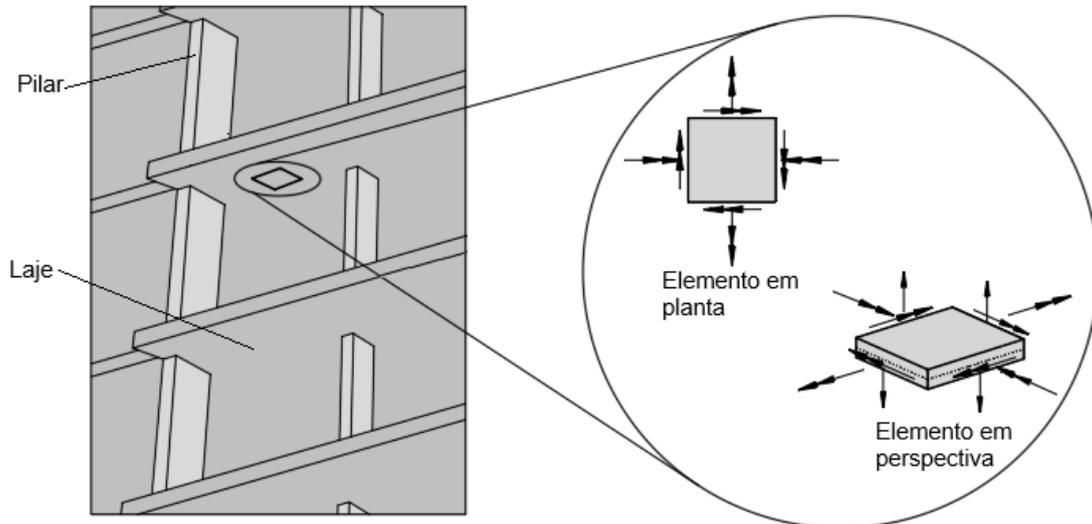
### 2.3.1 Introdução

Placas à flexão são estruturas laminares (pois a espessura é muito menor que as outras dimensões), planas e sujeitas a carregamento perpendicular ao plano, gerando flexão, torção e cisalhamento.

As placas à flexão são denominadas finas ou delgadas quando o menor vão do elemento é consideravelmente maior que a sua espessura. Na construção civil um exemplo bastante conhecido são as lajes de concreto armado, como ilustrada na Figura 17. O comportamento das placas finas submetida a uma carga  $P(x, z)$  é governado pela equação diferencial parcial de quarta ordem Eq. (76), formulada em 1811 pelo matemático italiano Joseph-Louis Lagrange, em que  $v$  é o deslocamento vertical da placa e  $D$  é a rigidez flexional da placa.

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \frac{P(x, z)}{D} \quad (76)$$

Figura 17 – Exemplo de estrutura do tipo placa



Fonte: A autora (2024).

A equação diferencial Eq. (76) é obtida a partir do equilíbrio dos esforços, compatibilidade das deformações e admitindo as hipóteses estabelecidas pela teoria de Kirchhoff, que são:

- a) O material é homogêneo, isotrópico e obedece às leis de Hooke. Logo as equações Eq. (77), Eq. (78) e Eq. (79) são válidas. As tensões são funções do módulo de elasticidade do material  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ .

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z) \quad (77)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x) \quad (78)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{zx} \quad (79)$$

- b) As deflexões são pequenas em relação à espessura da placa;  
 c) Qualquer ponto  $p(x, z)$  da placa move-se apenas na direção  $y$ , isto é, tem apenas deslocamento vertical  $v(x, z)$ , Figura 18(b);  
 d) A deformação normal ao plano médio da placa é nula em qualquer ponto, ou seja,  $\varepsilon_y = 0$ ;

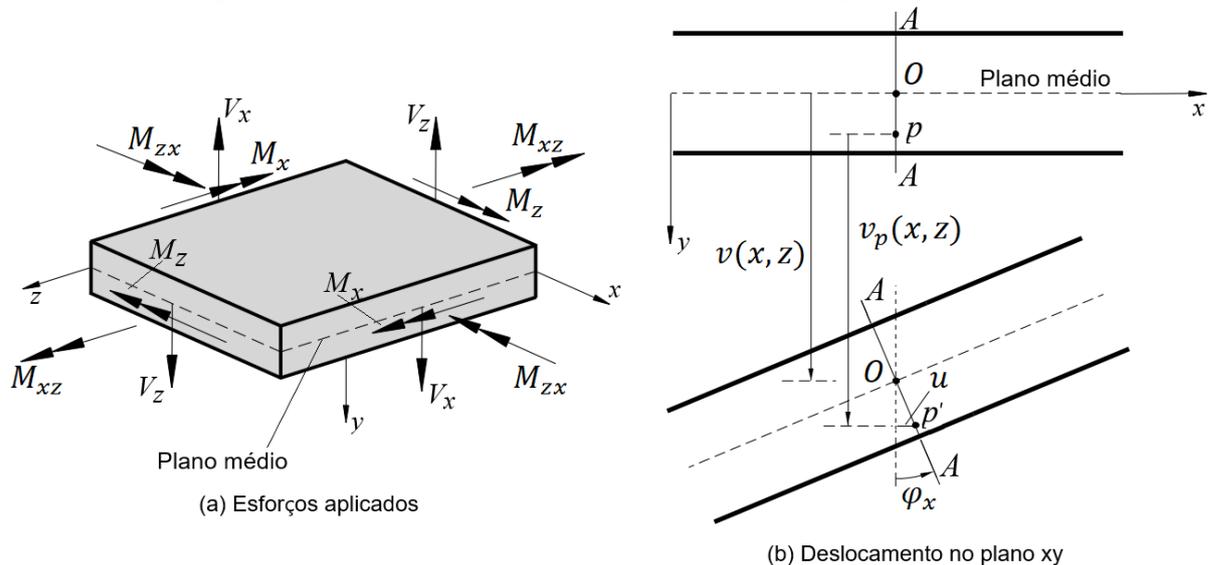
- e) Linhas retas, inicialmente normais ao plano médio, permanecem retas e normais a essa superfície após as deformações. Uma consequência dessa hipótese consiste em deformações de corte  $\gamma_{yx}$  e  $\gamma_{yz}$  desprezíveis.

Nos tópicos a seguir serão descritas sucintamente as equações de compatibilidade e equilíbrio da placa baseado nessas hipóteses.

### 2.3.2 Compatibilidade das deformações

A Figura 18(a) ilustra um elemento de placa sujeita a cisalhamento e momentos de flexão e torção. O plano médio indicado está contido no plano  $x - z$ . A Figura 18(b), por sua vez, contém duas seções dessa placa paralelas ao plano  $x - y$ , uma mostrando a seção indeformada e outra a deformada. De acordo com esta figura, ao aplicar uma carga sobre a superfície da placa, o ponto  $p(x, z)$  sofre um deslocamento transversal  $v_p$ . Simultaneamente, a linha  $AA$  que passa por esse ponto é rotacionada positivamente com valor igual a  $\varphi_x$ . De modo que, o ponto desloca  $u$  na direção  $x$ , passando a ocupar a posição  $p'$ .

Figura 18 – Elemento de placa e deslocamentos da seção transversal



Fonte: A autora (2024) e adaptado de Leitão et al. (2018, p. 14).

Considerando a deformabilidade característica da placa Figura 18(b), os deslocamentos do ponto  $p(x, z)$  no plano  $x - y$  são expressos pelas equações Eq. (80) e Eq. (81). De modo análogo, os deslocamentos do ponto  $p(x, z)$  segundo o plano  $z - y$  são obtidos, resultando em Eq. (80) e Eq. (82).

$$v = v(x, z) \quad (80)$$

$$u = y\varphi_x(x, z) \quad (81)$$

$$w = y\varphi_z(x, z) \quad (82)$$

As rotações  $\varphi_x(x, z)$  e  $\varphi_z(x, z)$  correspondem a taxa de variação do deslocamento vertical  $v(x, z)$  em relação as direções  $x$  e  $z$ , como formulada em Eq. (83) e Eq. (84). Estas igualdades decorrem diretamente do fato de se ter considerado que as linhas permanecem perpendiculares ao plano médio, mesmo após a deformação do elemento estrutural. Observando a Figura 18(b), embora a rotação é convencionalmente positiva, verifica-se que os deslocamentos transversais estão a diminuir, pelo qual a derivada assume valores negativos. Isto justifica o sinal negativo nas expressões, (LEITÃO et al., 2018).

$$\varphi_x(x, z) = -\frac{\partial v(x, z)}{\partial x} \quad (83)$$

$$\varphi_z(x, z) = -\frac{\partial v(x, z)}{\partial z} \quad (84)$$

Tendo em vista as definições de Eq. (83) e Eq. (84), constata-se que as rotacionais  $\varphi_x(x, z)$  e  $\varphi_z(x, z)$  não são independentes do deslocamento transversal  $v(x, z)$ . Este é por consequência o único deslocamento a determinar para que se possa caracterizar completamente o campo de deslocamentos de uma placa fina.

Combinando as equações Eq. (81) e Eq. (82) com a definição de deformação segundo a teoria da elasticidade, o campo de deformações da placa é calculado conforme as equações Eq. (85), Eq. (86) e Eq. (87).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (85)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (86)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -2y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (87)$$

Os termos  $-\partial^2 v / \partial x^2$  e  $-\partial^2 v / \partial z^2$  são denominadas de curvatura de flexão e  $-\partial^2 v(x, z) / \partial x \partial z$  de curvatura de torção. Substituindo-os pelas simbologias  $\kappa_x$ ,  $\kappa_z$  e  $\kappa_{xz}$ , as condições de compatibilidade da placa são reescritas como em Eq. (88), Eq. (89) e Eq. (90).

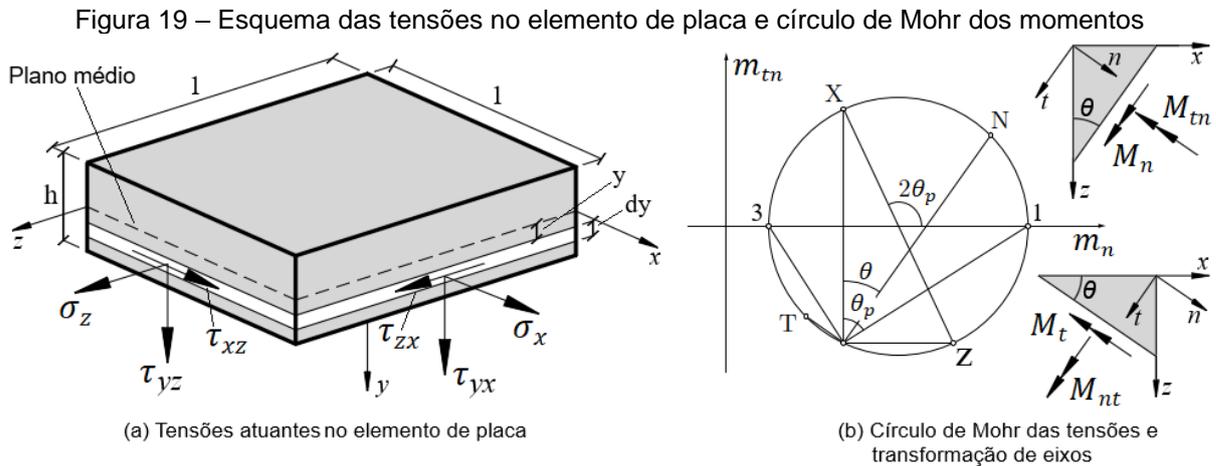
$$\varepsilon_x(y) = y\kappa_x \quad (88)$$

$$\varepsilon_z(y) = y\kappa_z \quad (89)$$

$$\gamma_{xz}(y) = 2y\kappa_{xz} \quad (90)$$

### 2.3.3 Equações de equilíbrio

As tensões normais ( $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ ) e cisalhantes ( $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ) internas oriundas do campo de deformação em cada fibra da placa, distante  $y$  do seu plano médio, produzem momentos fletores e torsores, Figura 19(a). Ao somar os esforços de cada fibra são obtidos os momentos totais internos que necessariamente devem ser iguais aos aplicados externamente para que o equilíbrio seja satisfeito.



Fonte: A autora (2024) e adaptado de Spathelf (2017, p. 50).

Assumindo que o material se comporta linearmente, as tensões em cada fibra são equivalentes a Eq. (77), Eq. (78) e Eq. (79). Combinando-as com as respectivas deformações obtém-se Eq. (91), Eq. (92) e Eq. (93). O termo  $h$  é a altura da placa e  $M_x$ ,  $M_z$  e  $M_{zx} = M_{xz}$  são os momentos de flexão e torção externos, ambos em unidade de momento por unidade de comprimento, pois o elemento possui lados iguais a 1. Considerando que as deformações por esforços transversais são desprezadas, o equilíbrio da placa nesse caso reduz apenas a flexão e a torção, o que corresponde as definições abaixo.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} y\sigma_x dy = -D \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (91)$$

$$M_z = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_z dy = -D \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (92)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = \int_{-h/2}^{h/2} y \tau_{xz} dy = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (93)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (94)$$

De acordo com o círculo de Mohr dos momentos ilustrado na Figura 19(b) os momentos fletores e torsões no sistema de eixos  $n - t$  cuja direção é  $\theta$ , podem ser obtidos a partir da matriz de transformação e do vetor que contém os momentos  $M_x$ ,  $M_z$  e  $M_{xz}$ , Eq. (95).

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_t \\ M_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_z \\ M_{xz} \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Ainda com relação a Figura 19(b), a direção dos momentos principais  $M_1$  e  $M_3$  ( $M_{tn} = M_{nt} = 0$ ) definido pelo ângulo  $\theta_p$  é equacionado conforme Eq. (96).

$$\tan 2\theta_p = \frac{2M_{xz}}{M_x - M_z} \quad (96)$$

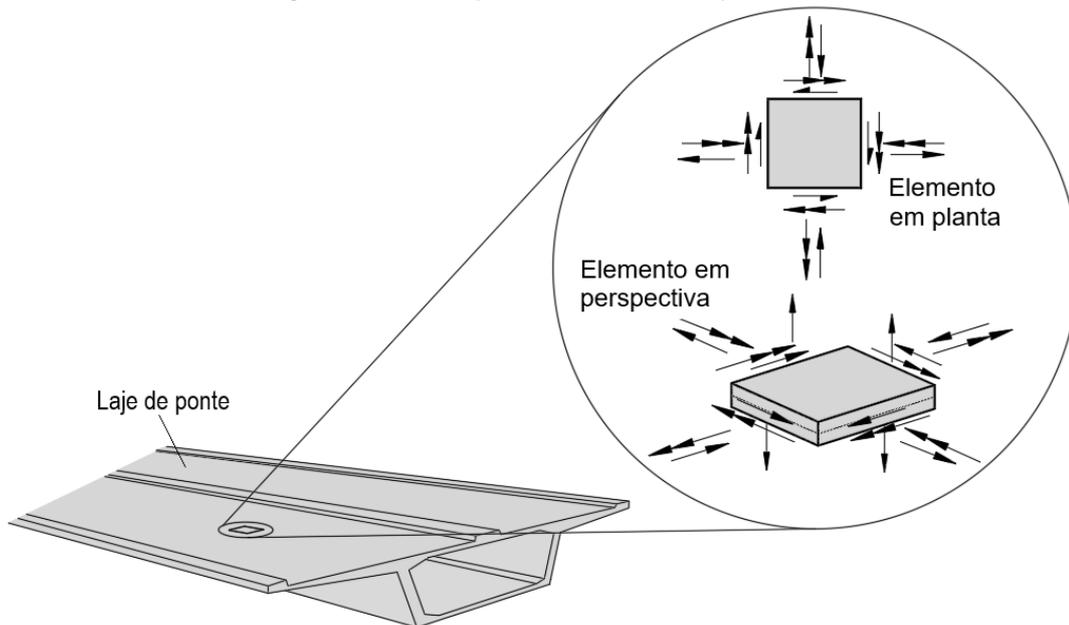
## 2.4 ELEMENTOS DE CASCA FINA

Nessa seção será abordado os elementos do tipo casca fina, as condições que o define do ponto de vista da estática e compatibilidade das deformações. Também é apresentado o procedimento de solução do Modelo de Casca Fissurada (*Cracked Shell Model – CSM*) capaz de avaliar as tensões na armadura ortogonal.

### 2.4.1 Introdução

Cascas são estruturas laminares não necessariamente planas e que podem está sujeitas a esforços de flexão, torção e forças no plano. Diversas estruturas podem ser avaliadas como associação de elementos de casca, na engenharia estrutural por exemplo, tem-se reservatórios, cúpulas e lajes de tabuleiros de ponte, Figura 20.

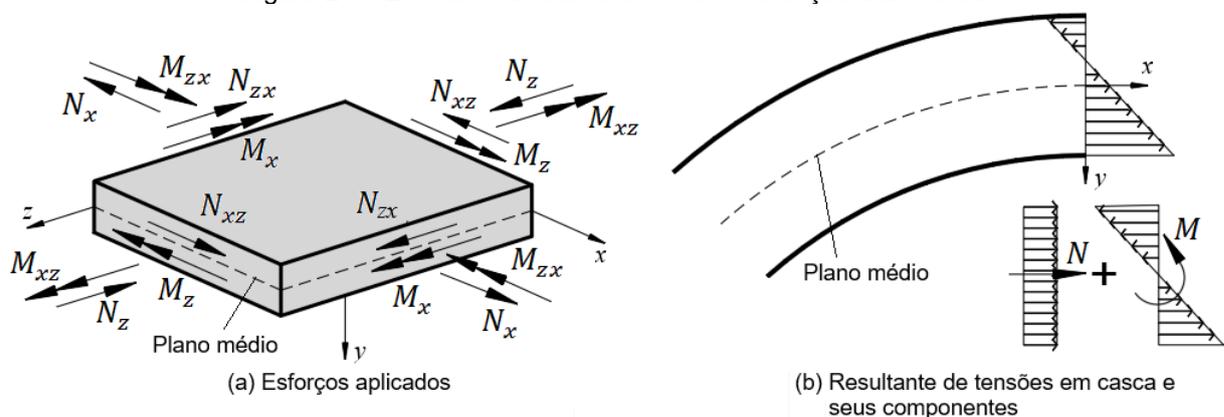
Figura 20 – Exemplo de estrutura do tipo casca



Fonte: A autora (2024) e adaptado de Kvam (2018, p. 5).

O elemento de casca é composto pela superposição de dois comportamentos independentes entre si: o comportamento da placa à flexão, sujeita a cargas perpendiculares ao seu plano, e o comportamento de membrana, quando sujeito a forças no plano (FILHO, 2000). Por essa razão é observado que as tensões no plano médio não são necessariamente nulas, como mostrado no diagrama de tensões na seção da Figura 21(b). Nesse estudo são consideradas as cascas finas com pequenas deflexões, e como será discutido nos próximos tópicos, o seu comportamento será avaliado segundo os elementos de membrana e placa discutidos nas seções 2.2 e 2.3.

Figura 21 – Elemento de casca e tensões na seção transversal



Fonte: A autora (2024).

### 2.4.2 Compatibilidade das deformações

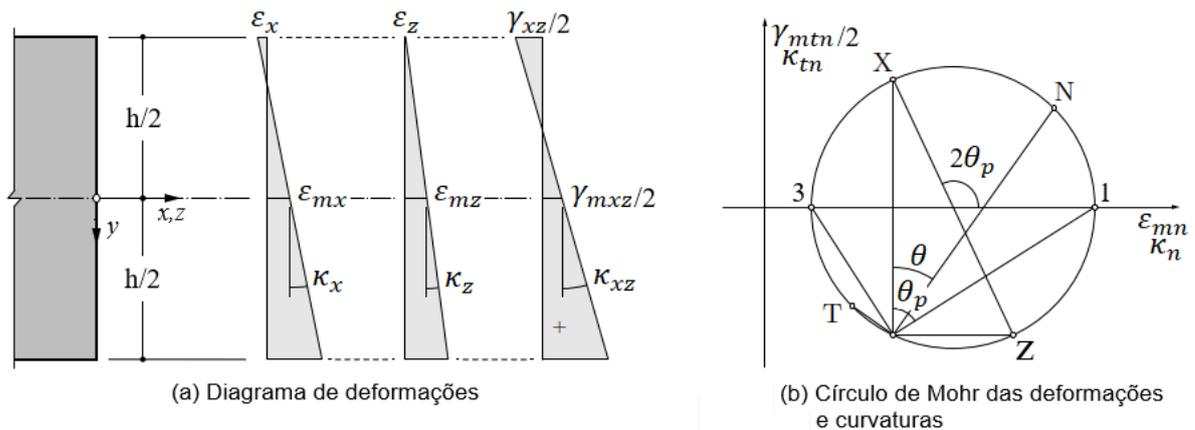
Em elementos de casca fina as equações de compatibilidade das deformações podem ser determinadas considerando os efeitos originados das forças de membrana que provocam deformações axiais e cisalhantes no plano médio ( $\varepsilon_{mx}$ ,  $\varepsilon_{mz}$  e  $\gamma_{mzx} = \gamma_{mzx}$ ); e as curvaturas ( $\kappa_x$ ,  $\kappa_z$  e  $\kappa_{zx} = \kappa_{xz}$ ) originadas dos momentos fletores e torsores. Considerando que o plano médio da casca coincide com o plano  $x - z$ , as equações Eq. (97), Eq. (98) e Eq. (99) expressam as deformações normais e cisalhante em uma fibra distante  $y$  desse plano, ver Figura 22(a).

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_{mx} + y\kappa_x \quad (97)$$

$$\varepsilon_z(y) = \varepsilon_{mz} + y\kappa_z \quad (98)$$

$$\gamma_{xz}(y) = \gamma_{mzx} + 2y\kappa_{xz} \quad (99)$$

Figura 22 – Deformações da seção transversal em elementos de casca



Fonte: Adaptado de Spathelf (2017, p. 49).

Os termos  $\varepsilon_{mx}$ ,  $\varepsilon_{mz}$ ,  $\gamma_{mzx}$ ,  $\kappa_x$ ,  $\kappa_z$  e  $\kappa_{xz}$  são constantes para cada solicitação externa que a casca está submetida. Em vista disso, os mesmos são organizados em um vetor das deformações-curvaturas da casca  $\{\varepsilon t\}$ , como mostra Eq. (100).

$$\{\varepsilon t\} = \{\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{mz}, \gamma_{mzx}, \kappa_x, \kappa_z, \kappa_{xz}\}^T \quad (100)$$

Desse modo, as equações de compatibilidade da casca são reescritas como em Eq. (101).

$$\{\varepsilon_{xz}\} = [C]\{\varepsilon t\} \quad (101)$$

Onde  $[C]$  é a matriz de posição da fibra, Eq. (102):

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (102)$$

De acordo com o círculo de Mohr das deformações da Figura 22(b) as deformações no plano médio e curvaturas segundo a direção  $\theta$  (plano  $n - t$ ) podem ser obtidas conforme as expressões Eq. (103) e Eq. (104).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{mn} \\ \varepsilon_{mt} \\ \gamma_{mtn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mx} \\ \varepsilon_{mz} \\ \gamma_{mxz} \end{Bmatrix} \quad (103)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_n \\ \kappa_t \\ \kappa_{tn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_z \\ \kappa_{xz} \end{Bmatrix} \quad (104)$$

Considerando novamente a Figura 22(b), as deformações principais máxima  $\varepsilon_1(y)$  e mínima  $\varepsilon_3(y)$  na fibra distante  $y$  do plano médio são calculadas a partir de Eq. (105).

$$\varepsilon_1(y), \varepsilon_3(y) = \frac{\varepsilon_x(y) + \varepsilon_z(y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\varepsilon_x(y) - \varepsilon_z(y)]^2 + [\gamma_{xz}(y)]^2} \quad (105)$$

A direção principal  $\theta_p$  dessas deformações é obtida por Eq. (106). Para efetuar esse cálculo no código implementado utilizou-se uma função chamada *arctan2* disponível na biblioteca do *Numpy*, Harris et al. (2020).

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_x - \varepsilon_z} \quad (106)$$

### 2.4.3 Equações de equilíbrio

O equilíbrio do elemento de casca é determinado analogamente ao que foi feito para placas finas, ver seção 2.3.3. Contudo, as tensões normais e cisalhantes em cada fibra correspondem não somente aos esforços oriundos de flexão e torção, mas

também as advindas das forças de membrana. Essas equações são mostradas em Eq. (107) e Eq. (108). A primeira descreve o equilíbrio quanto as forças de membrana externa  $N_x, N_z, N_{xz} = N_{zx}$  e a segunda quanto aos esforços de placa aplicados  $M_x, M_z, M_{xz} = M_{zx}$ , ambos por unidade de comprimento.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dy \quad N_{xz} = N_{zx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dy \quad (107)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_x dy \quad M_z = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_z dy \quad M_{xz} = M_{zx} = \int_{-h/2}^{h/2} y \tau_{xz} dy \quad (108)$$

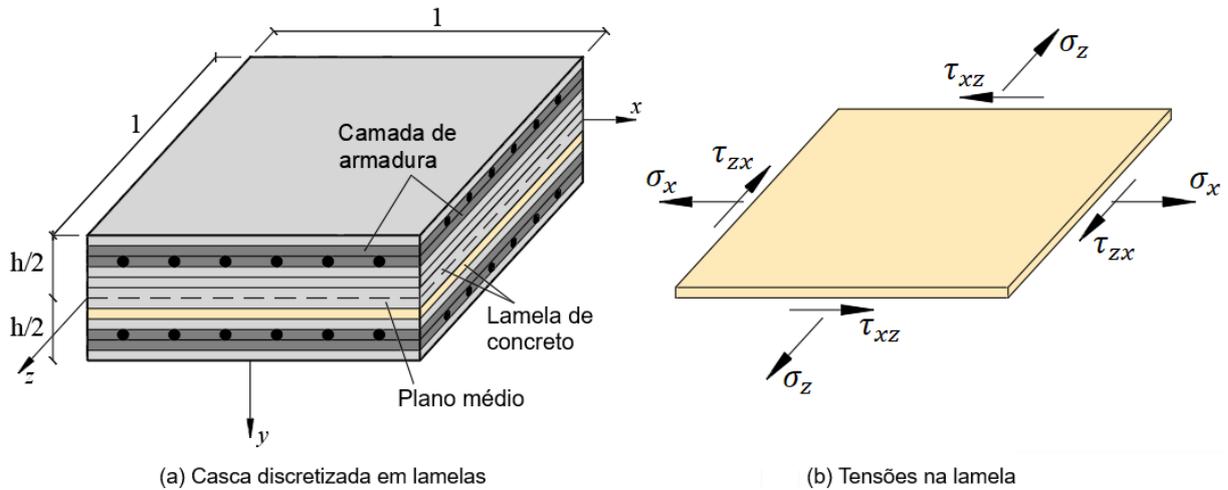
Dado que o equilíbrio ocorre quando as forças internas no material são iguais as forças externas aplicadas, o problema, quanto às relações da estática, pode ser estabelecido pelo vetor de desequilíbrio de forças  $\{R(\varepsilon t)\}$ , e este em função do vetor de deformações-curvaturas  $\{\varepsilon t\}$ . Logo, o equilíbrio é satisfeito quando o vetor de desequilíbrio de forças for nulo, Eq. (109).

$$\{R(\varepsilon t)\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}(\varepsilon t)\} \quad (109)$$

#### 2.4.4 Procedimento de solução do CSM

Nessa seção, o procedimento de solução do Modelo de Casca Fissurada (*Cracked Shell Model* – CSM) é apresentado. A casca é avaliada por meio de uma abordagem baseada nos trabalhos de Vasilescu (2000), Spathelf (2017) e Silva (2022). De acordo com essa abordagem um elemento de placa ou casca pode ser avaliado a partir da discretização da sua espessura em lamelas ou camadas, Figura 23(a), que se comportam como membranas, Figura 23(b), de modo que, a contribuição de cada uma resulta na do elemento desejado. Segundo Spathelf (2017), essa configuração possibilita a incorporação de modelos constitutivos diferentes em cada lamela a fim de representar, por exemplo, a fissuração do concreto, ou ainda adicionar camadas de armadura.

Figura 23 – Esquema do procedimento de avaliação da casca

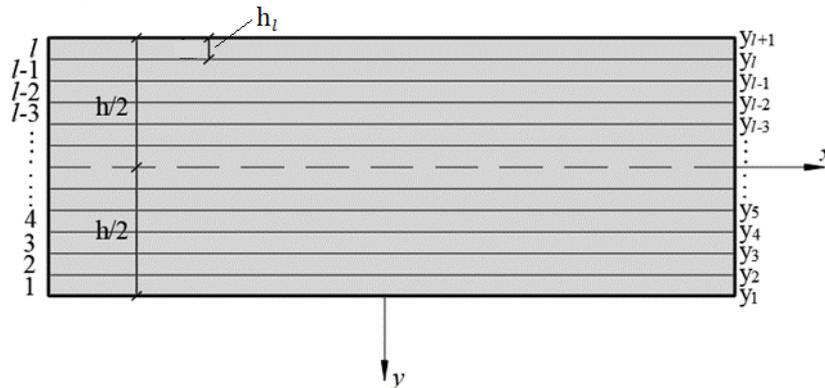


Fonte: A autora (2024) e adaptado de Silva (2022, p. 61).

No modelo de casca fissurada (CSM) o concreto é discretizado em  $l$  lamelas e a armadura em  $k$  camadas. Cada lamela  $i$  está sujeita a um estado plano de tensão avaliado no centro da espessura. Desse modo, o campo de deformações da lamela é obtido a partir do vetor de deformabilidade Eq. (100), e da distância do centro de sua espessura até o plano médio da casca. Considerando a Figura 24 e que a espessura da lamela de concreto é  $h_l = h/l$ , a respectiva distância que é indicada por  $y_{c,i}$  pode ser determinada como em Eq. (110). A equação corresponde a média entre a posição da borda superior  $y_{i+1}$  e inferior  $y_i$  da lamela.

$$y_{c,i} = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \tag{110}$$

Figura 24 – Discretização da casca em lamelas de concreto



Fonte: A autora (2024) e adaptado de Silva (2022, p. 61).

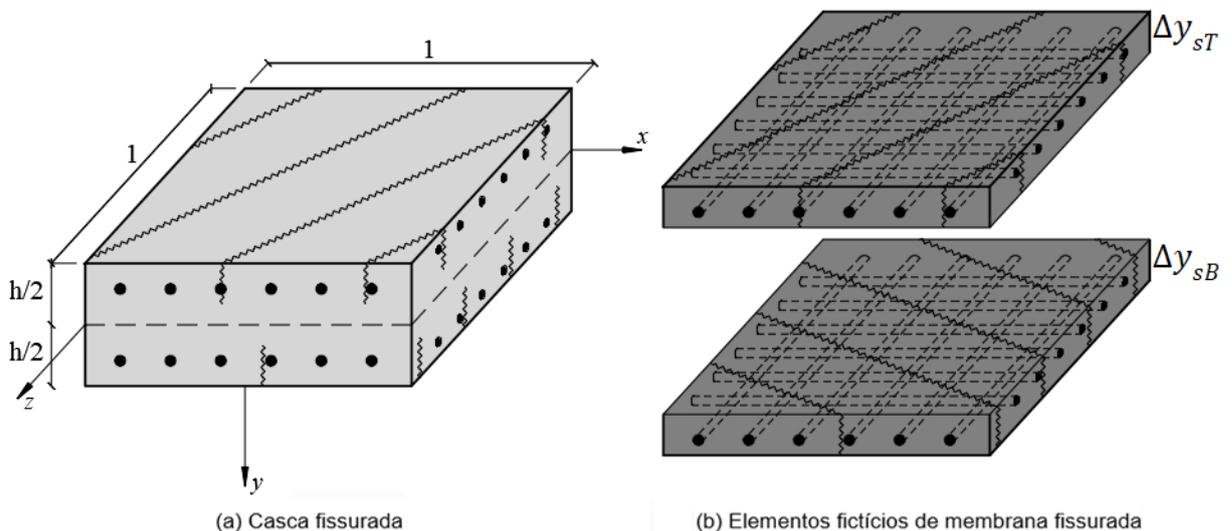
Conforme Spathelf (2017) as armaduras ortogonais podem ser consideradas como inseridas em dois elementos fictícios de membrana (superior e inferior), de modo

a considerar o efeito de enrijecimento da barra causado pelo concreto no seu entorno, Figura 25. Seu comportamento é avaliado de forma independente, e posteriormente somado ao comportamento das lamelas de concreto. A espessura de cada membrana é indicada por  $\Delta y_{sT}$  e  $\Delta y_{sB}$  e determinada por Eq. (111) e Eq. (112). As expressões são funções do cobrimento de concreto  $c_{nom}$  e do diâmetro da barra paralela ao eixo  $x$  ( $\phi_{sxT}$ ,  $\phi_{sxB}$ ). Foi admitido que as barras na direção  $x$  são aquelas mais próximas da superfície, como ilustrado na Figura 26.

$$\Delta y_{sT} = 2(c_{nom} + \phi_{sxT}) \quad (111)$$

$$\Delta y_{sB} = 2(c_{nom} + \phi_{sxB}) \quad (112)$$

Figura 25 – Esquema da casca e divisão em membranas que contém as armaduras



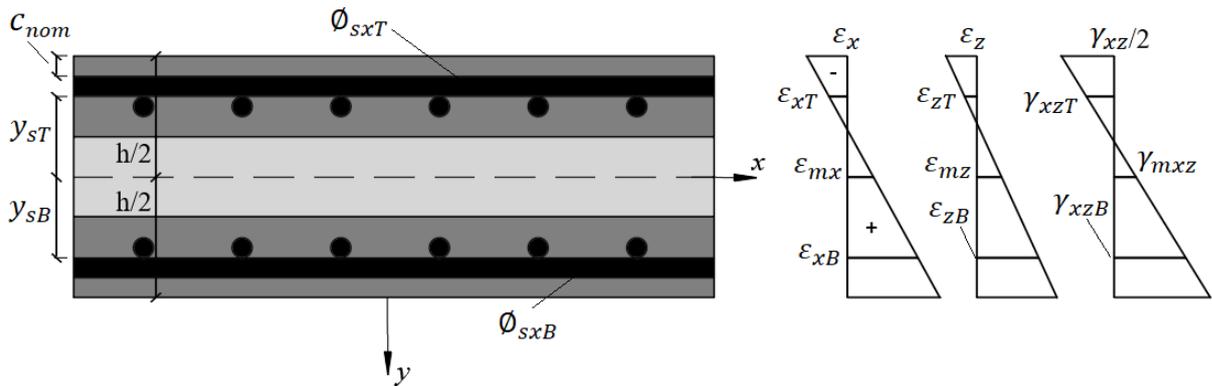
Fonte: Adaptado de Spathelf (2017, p. 62).

Os elementos fictícios de membrana que contém as armaduras estão sujeitos a um estado plano de tensões que é avaliado em uma distância calculada segundo as equações Eq. (113) e Eq. (114), Jäger (2007) apud Spathelf (2017). Os termos  $y_{sT}$  e  $y_{sB}$  são as posições dos respectivos centros das membranas superior e inferior. A Figura 26 ilustra as respectivas posições centrais das membranas, como também os diagramas das deformações normais e cisalhantes ao longo da espessura da casca, com a indicação das deformações consideradas para avaliação da membrana.

$$y_{sT} = \frac{\Delta y_{sT} - h}{2} \quad (113)$$

$$y_{sB} = \frac{h - \Delta y_{sB}}{2} \quad (114)$$

Figura 26 – Detalhes das membranas que contém as armaduras

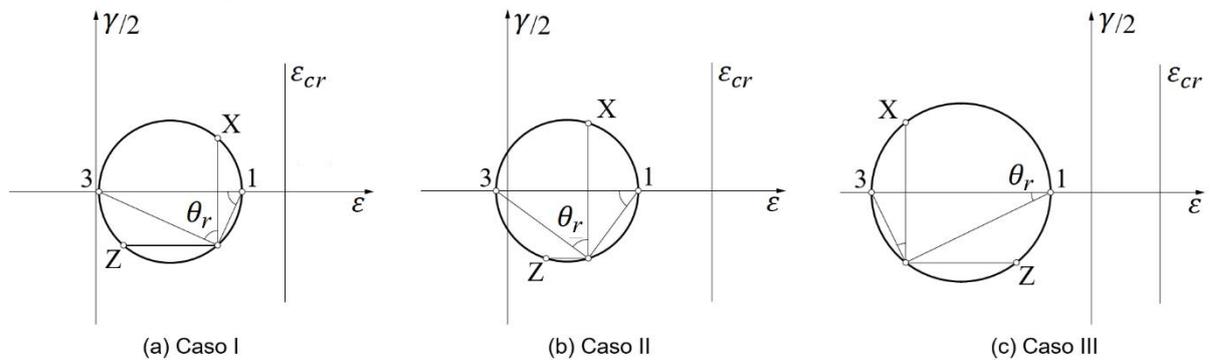


Fonte: A autora (2024) e adaptado de Jäger (2007, p. 50).

#### 2.4.4.1 Resposta não fissurada da casca

O modelo de casca usado apresenta o comportamento não fissurado quando a deformação principal máxima do concreto  $\epsilon_{c1}$  em todas as lamelas for inferior a deformação limite de tração do concreto  $f_{cr}/E_c$ . Esse estágio pode se apresentar através de um dos três casos indicado na Figura 27.

Figura 27 – Círculo de Mohr das deformações para os casos I, II e III



Fonte: Adaptado de Spathelf (2017, p. 61).

- Caso I: as deformações principais na lamela são de tração, isto é,  $0 < \epsilon_{c1} \leq f_{cr}/E_c$  e  $\epsilon_{c3} > 0$ , Figura 27(a). As tensões na lamela de concreto são lineares e calculadas por meio da equação Eq. (5);
- Caso II: existem deformações de tração,  $0 < \epsilon_{c1} \leq f_{cr}/E_c$  e de compressão  $\epsilon_{c3} < 0$ , Figura 27(b). As tensões de tração no concreto são também calculadas por Eq. (5), enquanto as tensões de compressão são obtidas conforme a seção 2.1.2.1.

- c) Caso III: as deformações principais são de compressão, isto é,  $\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c3} \leq 0$ , Figura 27(c). Como só há compressão, as tensões são determinadas de acordo com a seção 2.1.2.1. Não é considerado o efeito de confinamento, isto é, não se considera o aumento da resistência do concreto em um estado biaxial de compressão.

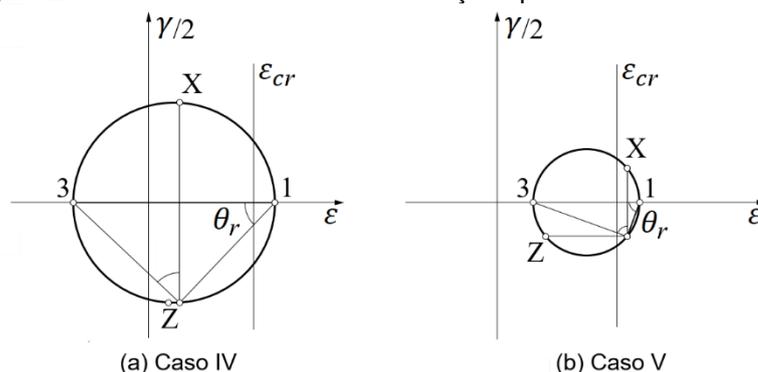
Em ambos os casos as tensões nas armaduras são determinadas a partir do modelo bilinear discutido na seção 2.1.1.

#### 2.4.4.2 Resposta fissurada da casca

O estágio fissurado ocorre quando a deformação principal máxima do concreto  $\varepsilon_{c1}$  na lamela for superior a deformação limite de tração do concreto  $f_{cr}/E_c$ , podendo ser observado um dos casos listados abaixo:

- a) Caso IV: existem deformações de tração  $\varepsilon_{c1} > f_{cr}/E_c$  e de compressão  $\varepsilon_{c3} < 0$ , Figura 28(b). As tensões de tração no concreto são calculadas com Eq. (5), enquanto as de compressão são obtidas conforme a seção 2.1.2.1;
- b) Caso V: as deformações principais são de tração, isto é,  $\varepsilon_{c1} > f_{cr}/E_c$  e  $\varepsilon_{c3} > 0$ , Figura 28(a). Nesse caso as tensões na lamela de concreto são calculadas por meio da equação Eq. (5);

Figura 28 – Círculo de Mohr das deformações para os casos IV e V



Fonte: Adaptado de Spathelf (2017, p. 61).

As tensões na armadura são determinadas na fissura de acordo com o modelo de membrana fissurada (CMM). O espaçamento máximo entre fissuras  $s_{rm}$  é obtido assumindo  $\lambda = 1$ , o que resulta nos maiores valores teóricos de tensão na armadura (SPATHELF, 2017).

#### 2.4.4.3 Matriz de rigidez

O equilíbrio de cascas finas conforme a seção 2.4.3 é definido pela equação Eq. (115).

$$\{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_z \\ N_{xz} \\ M_x \\ M_z \\ M_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ y\sigma_x \\ y\sigma_z \\ y\tau_{xz} \end{Bmatrix} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dy \quad (115)$$

O vetor das tensões de estado plano resulta do produto entre a matriz constitutiva do material  $[D_{xz}]$  e o vetor de deformações  $\{\varepsilon_{xz}\}$ , Eq. (101). Substituindo estas informações em Eq. (115), obtém-se Eq. (116).

$$\{F_{ext}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} [D_{xz}][C]\{\varepsilon\} dy = \int_{-h/2}^{h/2} [C]^T [D_{xz}][C]\{\varepsilon\} dy \quad (116)$$

Considerando que o vetor  $\{\varepsilon\}$  é constante para qualquer ponto da casca, logo pode ser colocado externamente aos termos de integração. Assim a Eq. (116) é reescrita como em Eq. (117). Esta expressão representa o problema de casca, onde o termo de integração é a matriz de rigidez  $[K_{casca}]$ .

$$\{F_{ext}\} = \int_{-h/2}^{h/2} [C]^T [D_{xz}][C] dy \{\varepsilon\} = [K_{casca}]\{\varepsilon\} \quad (117)$$

Efetuada a multiplicação matricial da integração e organizando os termos, a matriz de rigidez da casca, pode ser estabelecido conforme a equação Eq. (118).

$$[K_{casca}] = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} [D_{xz}] & y[D_{xz}] \\ y[D_{xz}] & y^2[D_{xz}] \end{bmatrix} dy \quad (118)$$

A integral Eq. (118) pode ser calculada numericamente a partir da discretização da espessura da casca em lamelas e camadas, desse modo que a matriz de rigidez é igual ao somatório das contribuições individuais de cada lamela de concreto e camada de aço. Quanto maior a quantidade de lamela, mais próxima a integral numérica estará da integral exata.

A contribuição das lamelas de concreto para a rigidez da casca  $[K_{casca}^c]$  é calculada de acordo com Eq. (119). Sendo a matriz constitutiva da lamela de concreto  $i$   $[D_{xz}^c]_i$  discutida na seção 2.4.4.4.

$$[K_{casca}^c] = \sum_{i=1}^l \begin{bmatrix} y_i - y_{i+1} [D_{xz}^c]_i & \frac{y_i^2 - y_{i+1}^2}{2} [D_{xz}^c]_i \\ \frac{y_i^2 - y_{i+1}^2}{2} [D_{xz}^c]_i & \frac{y_i^3 - y_{i+1}^3}{3} [D_{xz}^c]_i \end{bmatrix} \quad (119)$$

Por sua vez, a contribuição das camadas de aço para a rigidez da casca  $[K_{casca}^s]$  é posta como em Eq. (120). O termo  $A_{s,j}$  é a respectiva área de aço na camada  $j$ . O braço de alavanca da camada de aço  $y_s$  é igual a distância do plano médio da casca ao centro do elemento fictício de membrana na qual a armadura está inserida, desse modo, por assumir valor igual a  $y_{sB}$  ou  $y_{sT}$ , (SPATHELF, 2017). A matriz constitutiva da armadura na camada  $j$   $[D_{xz}^s]_j$  também é discutida na seção 2.4.4.4.

$$[K_{casca}^s] = \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} A_{s,j} [D_{xz}^s]_j & A_{s,j} y_s [D_{xz}^s]_j \\ A_{s,j} y_s [D_{xz}^s]_j & A_{s,j} y_s^2 [D_{xz}^s]_j \end{bmatrix} \quad (120)$$

A matriz de rigidez global da estrutura  $[K_{casca}]$ , por fim, é definida como mostra a equação Eq. (121).

$$[K_{casca}] = [K_{casca}^c] + [K_{casca}^s] \quad (121)$$

#### 2.4.4.4 Matrizes constitutivas secantes

As matrizes de rigidez dos materiais são determinadas considerando a rigidez secante. Essa matriz oferece benefícios de estabilidade numérica durante o processo

de solução do sistema de equações não lineares, o que torna essa opção mais atraente em algumas situações.

O concreto pode ser representado pela matriz constitutiva secante como apresentada por Kvam (2018), que inclui o efeito de Poisson na sua composição. Essa matriz, mostrada na equação Eq. (122), é calculada em cada lamela  $i$  no sistema de eixos principais 1 – 3.

$$[D_{13}^c] = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_{c1,sec} & \nu E_{c13,sec} & 0 \\ \nu E_{c13,sec} & E_{c3,sec} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} E_{c13,sec} \end{bmatrix} \quad (122)$$

Os módulos secantes são determinados como a razão entre as tensões e deformações principais do concreto, Eq. (123), Eq. (124) e Eq. (125).

$$E_{c1,sec} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}} \quad (123)$$

$$E_{c3,sec} = \frac{\sigma_{c3}}{\varepsilon_{c3}} \quad (124)$$

$$E_{c13,sec} = \frac{E_{c1,sec} + E_{c3,sec}}{2} \quad (125)$$

A transformação da matriz  $[D_{13}^c]$  para o sistema de eixos globais  $x - z$ , o que resulta na matriz  $[D_{xz}^c]$  Eq. (127), é realizado por meio da matriz de transformação Eq. (126). Nesse caso o ângulo  $\theta$  é igual a direção principal  $\theta_p$  das deformações, Eq. (106).

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$[D_{xz}^c] = [T(\theta_p)]^T [D_{c13}] [T(\theta_p)] \quad (127)$$

Por outro lado, a matriz constitutiva secante da armadura da camada  $j$  é definida por Eq. (128), em que o módulo secante é igual a Eq. (129).

$$[D^s] = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$E_s = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (129)$$

Analogamente, a matriz  $[D^s]$  é transformada para o sistema de eixos globais  $x - z$   $[D_{xz}^s]$ , fazendo uso da matriz  $[T(\theta)]$  como mostra a Eq. (130). O valor de  $\theta$  assume a direção da armadura  $\alpha$ . Nesse estudo, a orientação das armaduras coincide com os eixos globais, logo  $\alpha$  pode assumir valores de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

$$[D_{xz}^s] = [T(\alpha)]^T [D_s] [T(\alpha)] \quad (130)$$

#### 2.4.4.5 Vetor das forças internas

No equilíbrio do elemento de casca descrito na seção 2.4.3 os esforços internos da estrutura são determinados pela soma dos esforços internos de membrana, flexão e torção desenvolvidos em cada lamela de concreto e camada de armadura. Considerando que as tensões na lamela  $i$  são constantes, assim como as tensões nas camadas fictícias que contém as armaduras, as integrais que definem os esforços internos são resolvidas numericamente.

Nas equações abaixo são demonstrados os cálculos para obtenção dos esforços internos do concreto na direção  $x$ . Em Eq. (131) mostra-se o cálculo para forças de membrana, enquanto Eq. (132) corresponde a flexão. A tensão no concreto na direção  $x$   $\sigma_{cx}$  é resultado da contribuição de cada lamela  $\sigma_{cx,i}$ . Analogamente, os cálculos abaixo são aplicados para os esforços internos em  $z$ .

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{cx} dy = \sum_{i=1}^l \sigma_{cx,i} h_l = \sum_{i=1}^l \sigma_{cx,i} (y_i - y_{i+1}) \quad (131)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_{cx} dy = \sum_{i=1}^l \sigma_{cx,i} h_l y_{c,i} = \sum_{i=1}^l \sigma_{cx,i} \frac{y_i^2 - y_{i+1}^2}{2} \quad (132)$$

A tensão  $\sigma_{cx,i}$  é extraída do vetor que contém o estado plano de tensões da lamela, calculado a partir de Eq. (133).

$$\{\sigma_c\} = [D_{xz}^c] \{\varepsilon_{xz}\} \quad (133)$$

As equações Eq. (134) e Eq. (135) apresentam os cálculos dos esforços internos da armadura na direção  $x$ , que é semelhante ao da direção  $z$ . A tensão nas armaduras na direção  $x$   $\sigma_{sx}$  é resultado das tensões em cada camada  $\sigma_{sx,j}$ , calculado segundo o modelo bilinear (quando o concreto do elemento fictício de membrana não estiver fissurado), ou pelos modelos TCM e CMM (quando o concreto do elemento fictício de membrana estiver fissurado).

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{sx} dy = \sum_{j=1}^k \sigma_{sx,j} A_{sx,j} \quad (134)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_{sx} dy = \sum_{j=1}^k \sigma_{sx,j} A_{sx,j} y_s \quad (135)$$

Estendendo o raciocínio das equações acima para as demais direções e considerando que a armadura não contribui para esforços de cisalhamento, o vetor de forças internas do elemento de casca  $\{F_{int}\}$  é definido de acordo com a expressão Eq. (136). Este vetor é composto por equações não lineares, pois as tensões dependem do vetor de deformação-curvatura  $\{\varepsilon t\}$  e essa relação não é linear.

$$\{F_{int}(\varepsilon t)\} = \sum_{i=1}^l \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{cx,i}(y_i - y_{i+1}) \\ \sigma_{cz,i}(y_i - y_{i+1}) \\ \tau_{cxz,i}(y_i - y_{i+1}) \\ \frac{1}{2} \sigma_{cx,i}(y_i^2 - y_{i+1}^2) \\ \frac{1}{2} \sigma_{cz,i}(y_i^2 - y_{i+1}^2) \\ \frac{1}{2} \tau_{cxz,i}(y_i^2 - y_{i+1}^2) \end{array} \right\} + \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{sx,j} A_{sx,j} \\ \sigma_{sz,j} A_{sz,j} \\ 0 \\ \sigma_{sx,j} A_{sx,j} y_s \\ \sigma_{sz,j} A_{sz,j} y_s \\ 0 \end{array} \right\} \quad (136)$$

#### 2.4.4.6 Procedimento para solução do sistema não linear

Nos problemas não lineares a matriz de rigidez é função do vetor de deformações ou deslocamentos. Existe uma dificuldade nesse tipo de problema que é a impossibilidade de se determinar de imediato o vetor de deformações, ou deslocamento conforme o caso, que satisfaz a equação de equilíbrio da estrutura. Como a matriz de rigidez é dependente das deformações, os métodos diretos de

cálculo não são aplicáveis. Assim, uma alternativa para solucionar problemas dessa natureza é um procedimento iterativo.

Baseado em Silva (2022), o problema não linear de casca estudado pode ser resolvido considerando a equação Eq. (137), em que a variável a ser determinada é o vetor das deformações-curvaturas  $\{\varepsilon t\}$ . Nessa expressão, a matriz de rigidez  $[K_{casca}]$  é definida por Eq. (121) e o vetor de desequilíbrio de forças é  $\{R(\varepsilon t)\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}(\varepsilon t)\}$ , conforme Eq. (109).

$$\{R(\varepsilon t + \Delta\varepsilon t)\} = \{R(\varepsilon t)\} - [K_{casca}(\varepsilon t)]\{\Delta\varepsilon t\} \quad (137)$$

A solução de Eq. (137) requer que o vetor de desequilíbrio de forças  $\{R(\varepsilon t + \Delta\varepsilon t)\}$  tenda aproximadamente a zero. Assim, aplicando o método numérico de Newton-Raphson, esta equação pode ser resolvida através de iterações sucessivas, de modo que o vetor de incremento de deformações-curvaturas  $\{\Delta\varepsilon t\}$  é calculado através de Eq. (138) e o atual vetor de deformação  $\{\varepsilon t\}_{n+1}$  a ser avaliado é mostrado em Eq. (139). Para a primeira iteração ser efetuada é necessário definir um valor inicial para  $\{\varepsilon t\}$ . No presente estudo, utilizou-se da análise elástica linear de placa finas (Teoria de Kirchhoff) para obter esse valor e no caso de uma análise carga–deformação este valor é igual a solução da carga anterior.

$$\{\Delta\varepsilon t\}_{n+1} = [K_{casca}(\varepsilon t_n)]^{-1}(\{F_{ext}\} - \{F_{int}(\varepsilon t_n)\}) \quad (138)$$

$$\{\varepsilon t\}_{n+1} = \{\varepsilon t\}_n + \{\Delta\varepsilon t\}_{n+1} \quad (139)$$

O critério de convergência é estabelecido pela tolerância  $tol$  que é admitida para a análise. Quando o parâmetro  $erro_{n+1}$ , calculado por Eq. (140) for menor ou igual a tolerância definida, considera-se que o sistema de equações não lineares convergiu para uma solução, conseqüentemente, o processo iterativo é interrompido.

$$erro_{n+1} = \frac{\|\{\Delta\varepsilon t\}_{n+1}\|}{\|\{\varepsilon t\}_{n+1}\|} \leq tol \quad (140)$$

Conforme observado na literatura, a matriz de rigidez empregada no processo iterativo pode exercer significativa influência na eficiência computacional. Na resolução de problemas não lineares por meio do método de Newton-Raphson, optar

pela matriz de rigidez tangente, embora tenha a vantagem de proporcionar uma convergência quadrática, pode não ser a melhor escolha quando o problema não for continuamente diferenciável. Segundo Melo (2019), existe a possibilidade de ineficiência numérica quando o caminho de equilíbrio apresenta ponto limite, o que dificulta a convergência quando existe uma mudança brusca da rigidez da estrutura. Isso porque a matriz tangente torna-se quase singular quando a estrutura se aproxima do ponto de ruptura, dificultando a obtenção de uma solução. Tendo em vista o exposto e o comportamento do concreto fissurado, que muda abruptamente a matriz de rigidez nesse estágio, essa abordagem pode não ser a mais eficiente.

Como apontado na seção 2.4.4.4, optou-se pela matriz de rigidez secante para solucionar o sistema de equações não lineares. Desse modo, configura-se como uma abordagem que possui maior estabilidade numérica, o que o torna uma opção mais atraente em muitas situações, como podem ser vistos nos estudos de elementos de concreto armado de casca em Silva (2022) e viga em Melo (2019).

O método iterativo explicitado anteriormente pode ser combinado a uma abordagem incremental do carregamento, no qual passa a se chamar processo iterativo-incremento. Desse modo, é possível aplicar tais iterações para vários níveis de carregamento permitindo, por exemplo, analisar o comportamento de uma estrutura até a sua resistência última. Um fator importante nesse processo é o passo de carga imposto. Segundo De Borst et al. (2012) apud Silva (2022) para valores muito grandes é possível ter comprometimento do tempo de execução do código ou até mesmo impedir a convergência para uma resposta aceitável. Nesse trabalho o procedimento de solução utilizou uma abordagem de controle de forças (*Load-Control*) sendo incrementado o vetor de forças.

### 3 CÓDIGO NUMÉRICO E VALIDAÇÕES

Esta seção apresenta a rotina computacional do Modelo de Casca Fissurada (CSM), sendo primeiramente mostrado as rotinas do Modelo de Banzo Tracionado (TCM) e Modelo de Membrana Fissurada (CMM). Também é apresentada a validação de cada rotina ao comparar com resultados da literatura.

#### 3.1 MODELO DE BANZO TRACIONADO

##### 3.1.1 Algoritmo numérico

A rotina implementada mostrada na Figura 29 corresponde ao Modelo de Banzo Tracionado (TCM).

Figura 29 – Pseudocódigo do Modelo de Banzo Tracionado (TCM)

<b>ALGORITMO 1: Modelo de Banzo Tracionado (TCM)</b>	
	<b>Dados de entrada:</b> Propriedades dos materiais, deformação média do aço e parâmetro $\lambda$
1	Calcule a tensão média na armadura no Regime 1: $\sigma_{sm1}$ , Eq. (20);
2	Calcule a tensão na armadura na fissura no Regime 1: $\sigma_{sr1}$ , Eq. (20);
3	<b>Se</b> $\sigma_{sr1} \leq f_{sy}$ ( <b>Regime 1</b> ) faça:
4	A tensão na armadura na fissura $\sigma_{sr}$ é $\sigma_{sr1}$ ;
5	A tensão média na armadura $\sigma_{sm}$ é $\sigma_{sm1}$ ;
6	<b>Senão:</b>
7	Calcule a tensão na armadura mínima: $\sigma_{smmin}$ , Eq. (21);
8	Calcule a tensão na armadura na fissura no Regime 2: $\sigma_{sr2}$ , Eq. (22);
9	Calcule a tensão média na armadura no Regime 2: $\sigma_{sm2}$ , Eq. (23);
10	<b>Se</b> $\sigma_{smmin} \leq f_{sy}$ ( <b>Regime 2</b> ) faça:
11	A tensão na armadura na fissura $\sigma_{sr}$ é $\sigma_{sr2}$ ;
12	A tensão média na armadura $\sigma_{sm}$ é $\sigma_{sm2}$ ;
13	<b>Senão (Regime 3):</b>
14	Calcule a tensão média na armadura no Regime 3: $\sigma_{sm3}$ , Eq. (24);
15	Calcule a tensão na armadura na fissura no Regime 3: $\sigma_{sr3}$ , Eq. (25);
16	A tensão na armadura na fissura $\sigma_{sr}$ é $\sigma_{sr3}$ ;
17	A tensão média na armadura $\sigma_{sm}$ é $\sigma_{sm3}$ ;
18	<b>Fim</b>
19	<b>Fim</b>
20	Calcule a tensão média no concreto: $\sigma_{cm}$ , Eq. (26).

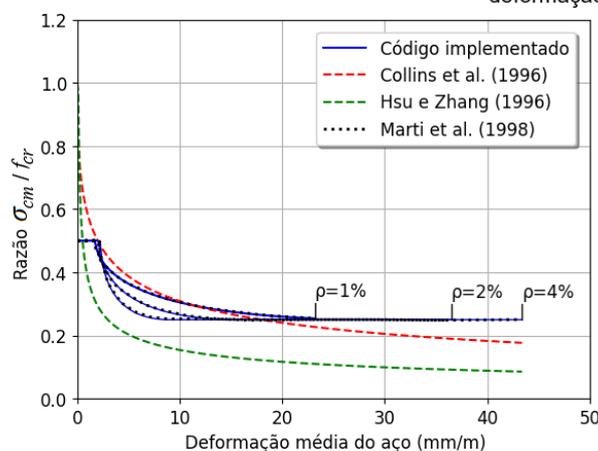
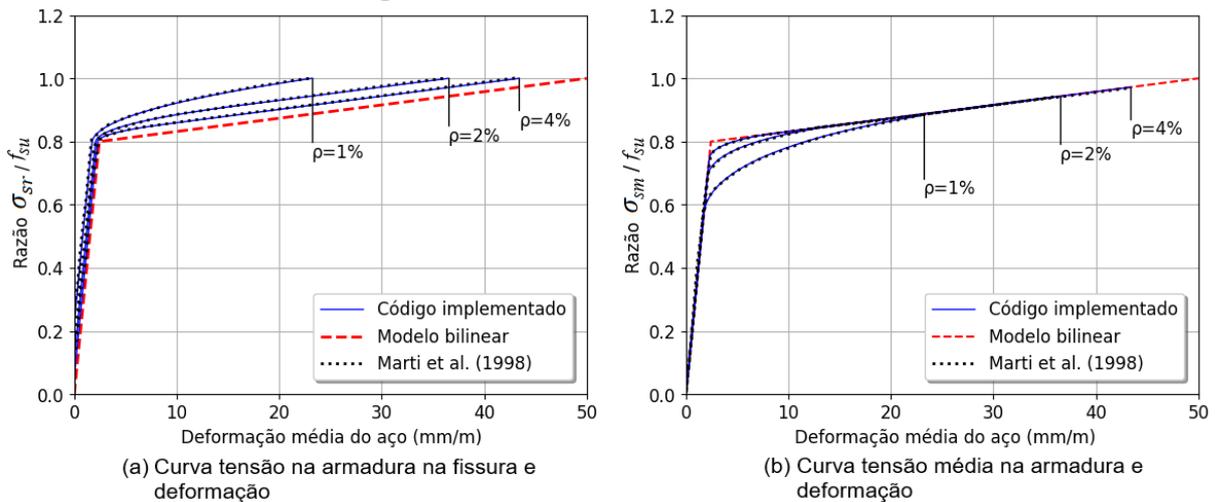
Fonte: A autora (2024).

Nela são calculadas as tensões na armadura e tensão média no concreto entre fissuras. Para a análise da resposta carga-deformação do elemento tracionado, essa rotina pode ser executada várias vezes, incrementando-se a deformação média do aço.

### 3.1.2 Validação do código numérico

A rotina foi validada com os exemplos analisados por Marti et al. (1998). As propriedades do aço são:  $f_{sy} = 500MPa$ ,  $f_{su} = 625MPa$ ,  $E_s = 205GPa$ ,  $\varepsilon_{su} = 50 \times 10^{-3}$  e  $\phi_s = 16mm$ . As propriedades do concreto são:  $f_c = 30MPa$  e  $E_c = 10f_c^{1/3}GPa$ . O espaçamento entre fissuras é igual ao espaçamento máximo  $S_{rm} = S_{rm0}$ , quando o parâmetro  $\lambda$  é igual a 1. As análises aconteceram para taxas de armadura  $\rho$  iguais a 1%, 2% e 4%. A Figura 30 apresenta os resultados da validação.

Figura 30 – Resultados da análise do TCM



Fonte: A autora (2024).

A armadura é avaliada quanto a sua tensão na fissura Figura 30(a) e tensão média Figura 30(b), que são descritas em função da deformação média da armadura. No concreto avalia-se a sua tensão média em função da deformação média da armadura Figura 30(c). Adicionalmente, as tensões médias no concreto foram comparadas com a resposta de Collins et al. (1996) e Hsu e Zhang (1996) conforme apresentado em Marti et al. (1998).

De modo geral, tanto na análise da armadura quanto na do concreto, observa-se resultados consideravelmente próximos entre o código implementado e Marti et al. (1998). A Figura 30(a) evidencia claramente um dos pressupostos da teoria que explica o modelo (seção 2.3), que é a tensão na armadura na fissura ser superior à tensão média do aço, até mesmo no trecho que antecede o escoamento da armadura. A mesma figura também reflete o ganho de rigidez da armadura na fissura para diferentes valores de  $\rho$ . Para porcentagens menores de  $\rho$ , o que significa maior quantidade de concreto no entorno da barra, o enrijecimento a tração tendeu a ser maior.

A rotina demonstrou eficiência, visto que, para o desenvolvimento das curvas adotando incrementos de deformação média do aço iguais a 0,02‰, o que corresponde a aproximadamente 2300 pontos na curva tensão-deformação, o tempo de processamento não foi superior a 1 segundo.

## 3.2 MODELO DE MEMBRANA FISSURADA

### 3.2.1 Algoritmo numérico

A rotina computacional proposta do Modelo de Membrana Fissurada (CMM) foi dividida em duas fases: MCTM e CMM. Igualmente ao procedimento adotado por Silva (2016), as variáveis escolhidas para atuarem no processo de solução das equações não lineares foram as deformações médias normais  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_z$ , e para evitar possíveis problemas de convergência, foram usados os seus valores normalizados.

Na implementação do modelo de membrana fissurada a partir da formulação original, a fase inicial da análise carga/deformação se deparou com problemas de convergência na solução, pois as relações são fundamentadas na suposição de fissuração estabilizada, quando o escorregamento entre os materiais é observado ao longo do elemento. Esses problemas foram superados após a adição das expressões

de Seelhofer (2009) para baixo nível de carregamento, cuja subrotina é mostrada na Figura 31. A mesma é executada após as tensões na armadura serem inicialmente determinadas conforme o TCM, Figura 29.

Figura 31 – Pseudocódigo do comportamento do aço para baixo nível de carregamento

**ALGORITMO 2: Comportamento do aço para baixo nível de carregamento**

**Dados de entrada:** Propriedades dos materiais, deformação média do aço e tensão na armadura

- 1 Calcule o comprimento de transferência  $x_1$ , Eq. (53);
- 2 **Se**  $x_1 \leq 0,5S_{rm}$  faça:
- 3 Calcule a tensão na fissura  $\sigma_{sr}$ , Eq. (54);
- 4 **Se**  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$  faça:
- 5 A tensão na armadura na fissura é  $\sigma_{sr}$ ;
- 6 **Senão:**
- 7 Calcule o comprimento de transferência  $x_2$ , Eq. (55);
- 8 A tensão na armadura na fissura  $\sigma_{sr}$  é calculada com Eq. (56);
- 9 **Fim**
- 10 **Senão:**
- 11 A tensão na armadura na fissura  $\sigma_{sr}$  é a mesma calculada na Figura 29;
- 12 **Fim**

Fonte: A autora (2024).

A primeira fase da rotina, contida na Figura 32, consiste na resolução da equação  $F_{MCTM}$  do Modelo de Trelça de Compatibilidade de Mohr (MCTM) utilizando a função *fsolver* presente na biblioteca do *Scipy* implementada na linguagem *Python*. Com este resultado são calculadas as deformações do MCTM, que serão utilizadas como estimativa para a inicialização da fase seguinte.

Na segunda fase, correspondente ao CMM, é resolvido o sistema de equações não lineares mostrado na Figura 33. Também é utilizado a função *fsolver* para solucionar este problema. Essa ferramenta se mostrou eficiente, possibilitando rapidez no processo e um algoritmo robusto. Como estimativa inicial para a primeira iteração são utilizados os resultados do MCTM. Os mesmos são utilizados apenas para o primeiro estado plano de tensões analisado.

Para uma análise da resposta carga-deformação do elemento (Figura 32), o pseudocódigo do CMM (Figura 33) pode ser executada várias vezes incrementando a deformação principal mínima  $\varepsilon_3$  e como estimativa inicial para solução do novo sistema de equações do CMM é usado a solução anterior do CMM. Esse processo se

repete até a deformação  $\varepsilon_3$  atingir o limite definido, ou ainda, se algum dos aços atingir a tensão de ruptura.

Figura 32 – Pseudocódigo para solução de uma membrana aplicado ao CMM

**ALGORITMO 3: Procedimento para solução de elemento de membrana**

**Dados de entrada:** Propriedades dos materiais, carga externa, parâmetro  $\lambda$  e número máximo de pontos  $n$ .

- 1 Solucione  $F_{MCTM}$ , Eq. (75);
- 2 Calcule as deformações do MCTM, Eq. (72), Eq. (73) e Eq. (74);
- 3 **Para** todos os  $n$  pontos faça:
- 4     Incremente a deformação principal mínima  $\varepsilon_3$ ;
- 5     Solucione o Modelo de Membrana Fissurada (Figura 33);
- 6     **Se**  $\varepsilon_3 < \varepsilon_{c0}$  ou  $\sigma_{sxr} < f_{sux}$  ou  $\sigma_{szz} < f_{suz}$  faça:
- 7         Salve os resultados e o loop continua;
- 8     **Senão:**
- 9         O loop é encerrado;
- 10    **Fim**
- 11 **Fim**
- 12 Imprima os resultados

Fonte: A autora (2024).

Figura 33 – Pseudocódigo do Modelo de Membrana Fissurada (CMM)

**ALGORITMO 4: Modelo de Membrana Fissurada (CMM)**

**Dados de entrada:** Propriedades dos materiais, carga externa e parâmetro  $\lambda$

- 1 Calcule a deformação principal máxima  $\varepsilon_1$ , Eq. (32);
- 2 Calcule as funções trigonométricas, Eq. (57) e Eq. (58);
- 3 Calcule a tensão de compressão do concreto  $\sigma_{c3r}$ , Eq. (3);
- 4 Calcule a tensão de cisalhamento  $\tau_{xz}$ , Eq. (30);
- 5 Calcule o espaçamento entre fissuras  $S_{rmx0}$  e  $S_{rmz0}$ , Eq. (36) e Eq. (37);
- 6 Calcule o espaçamento entre fissuras máximo  $S_{rm0}$  na direção  $\theta_r$ , Eq. (47);
- 7 Calcule o espaçamento entre fissuras  $S_{rm}$  na direção  $\theta_r$ , Seção 2.2.2.3;
- 8 Calcule o espaçamento entre fissuras  $S_{rmx}$  e  $S_{rmz}$ , Eq. (34) e Eq. (35);
- 9 Calcule a tensão na armadura na fissura na direção  $x$   $\sigma_{sxr}$  via TCM, Figura 29;
- 10 Verifique a tensão na armadura, Figura 31;
- 11 Calcule a tensão na armadura na fissura na direção  $z$   $\sigma_{szz}$  via TCM, Figura 29;
- 12 Verifique a tensão na armadura, Figura 31;
- 13 Calcule a tensão principal máxima  $\sigma_1$ , Eq. (67);
- 14 Avalie a equação Eq. (71).

Fonte: A autora (2024).

### 3.2.2 Validação do código numérico

A rotina do CMM foi validada com os resultados experimentais de 22 painéis de concreto armado ortogonalmente que foram testados para diferentes estados planos de tensões. Esses painéis são nomeados por série conforme apresentado pelos seus autores, a saber: série PP de Marti e Mayboom (1992), série PV de Vecchio e Collins (1982), VA e VB de Zhang e Hsu (1998), HB de Zhang (1992) e SE de Khalifa (1986) e Kirschner e Collins (1986).

Os resultados obtidos também são comparados com a solução numérica original de Kaufmann (1998) e solução de Kvam (2018). Nessa seção será apresentado os resultados daqueles considerados mais relevantes, contudo, todos os demais podem ser consultados no Apêndice A.

Os painéis mostrados a seguir foram divididos conforme a classificação da armadura em isotrópica e ortotrópica. Os painéis classificados como isotrópicos são indicados na Tabela 1, indicando as propriedades dos materiais e carregamento. As dimensões dos mesmos são: série PV iguais a 890×890×70 mm e série VA iguais a 1397×1397×178 mm. O módulo de elasticidade da armadura é igual a 200GPa e são analisados para valores de  $\lambda$  iguais a 0,5 e 1.

Tabela 1 – Propriedades dos painéis com armadura isotrópica

Painel	Armadura										Concreto		EPT <sup>a</sup>
	$\rho_x$ %	$\phi_x$ mm	$f_{syx}$ MPa	$f_{sux}$ MPa	$\epsilon_{sux}$ ‰	$\rho_z$ %	$\phi_z$ mm	$f_{syz}$ MPa	$f_{suz}$ MPa	$\epsilon_{suz}$ ‰	$f_c$ MPa	$\epsilon_{co}$ ‰	
PV23	1,785	6,35	518	596	100	1,785	6,35	518	596	100	20,5	2,00	-0,39 <sup>c</sup>
PV25	1,785	6,35	466	536	100	1,785	6,35	466	536	100	19,3	1,80	-0,69 <sup>c</sup>
PV27	1,785	6,35	442	508	100	1,785	6,35	442	508	100	20,5	1,90	CP <sup>b</sup>
PV28	1,785	6,35	483	555	100	1,785	6,35	483	555	100	19,0	1,85	+0,32 <sup>c</sup>
VA0	0,571	11,3	445	579	100	0,571	11,3	445	579	100	98,8	2,40	CP <sup>b</sup>
VA1	1,143	11,3	445	579	100	1,143	11,3	445	579	100	95,1	2,45	CP <sup>b</sup>
VA2	2,276	16,0	409	534	100	2,276	16,0	409	534	100	98,2	2,50	CP <sup>b</sup>
VA3	3,419	19,5	455	608	100	3,419	19,5	455	608	100	94,6	2,45	CP <sup>b</sup>
VA4	4,99	25,2	470	606	100	4,99	25,2	470	606	100	103,1	2,35	CP <sup>b</sup>

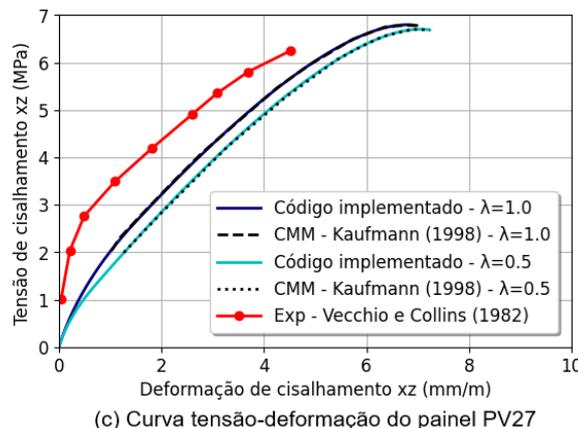
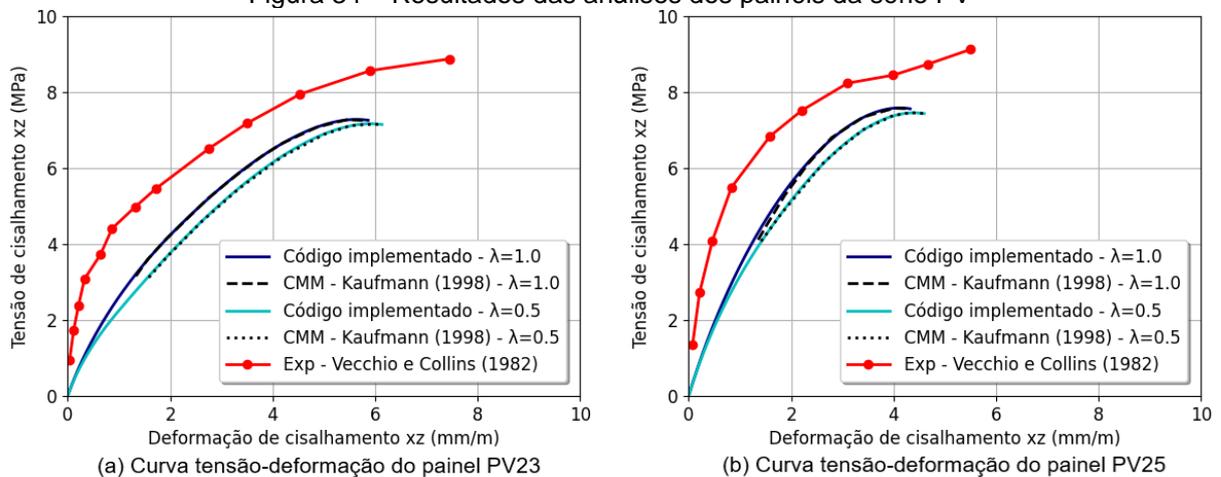
<sup>a</sup>Estado plano de tensões aplicado; <sup>b</sup>Cisalhamento puro ( $\sigma_x = \sigma_z = 0$ ); <sup>c</sup>Quociente entre tensões  $\sigma_x/|\tau_{xz}| = \sigma_z/|\tau_{xz}|$ . Fonte: A autora (2024).

Os resultados das análises são mostrados nas Figuras 34 e 35. As curvas correspondem ao comportamento  $\tau_{xz} - \gamma_{xz}$ . De maneira geral, observa-se boa

correspondência entre os resultados do código implementado e da literatura. Conforme as análises efetuadas, apenas o painel VA0 falha por deformação excessiva das armaduras (em ambas as direções e para os dois valores de  $\lambda$  considerados), enquanto que nos demais painéis verifica-se o esmagamento do concreto ao atingir a deformação de pico. Na comparação com os resultados experimentais, o modelo CMM (KAUFMANN, 1998) consegue capturar bem o comportamento dos painéis no regime pré-pico do concreto, sobretudo, quando o parâmetro  $\lambda$  é igual 1.

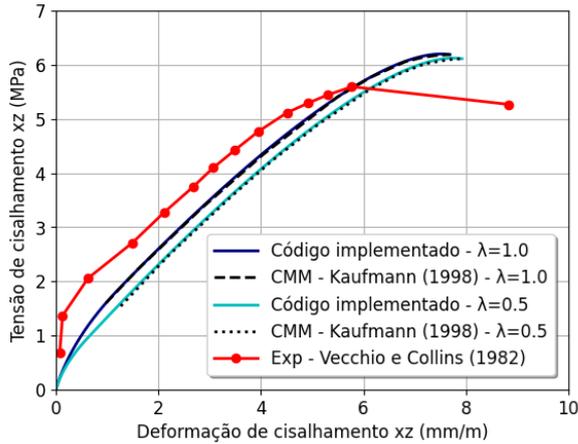
Ao confrontar as soluções numéricas é perceptível a sobreposição de valores ao longo de quase todo o trajeto das curvas, exceto na fase inicial, pois Kaufmann (1998) não apresentou suas previsões. Essa diferença resulta da incorporação das contribuições de Seelhofer (2009) no cálculo das tensões na armadura para baixo nível de carga, como visto nos problemas relatados na seção 2.2.3.1. Elas foram importantes não apenas para a aderência ao fenômeno físico modelado, mas também para garantir estabilidade numérica e melhorar a convergência da solução na transição da fase não fissurada e fissurada.

Figura 34 – Resultados das análises dos painéis da série PV

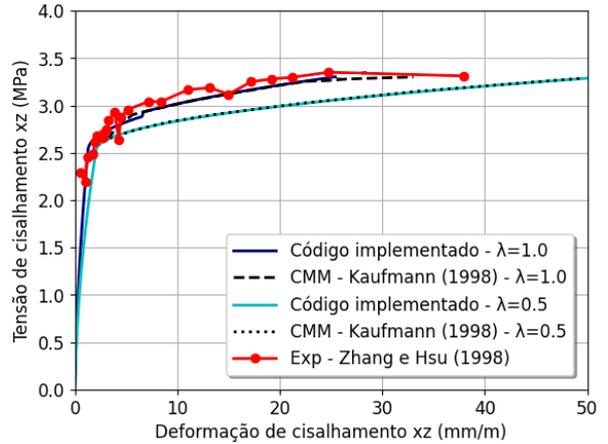


Fonte: A autora (2024).

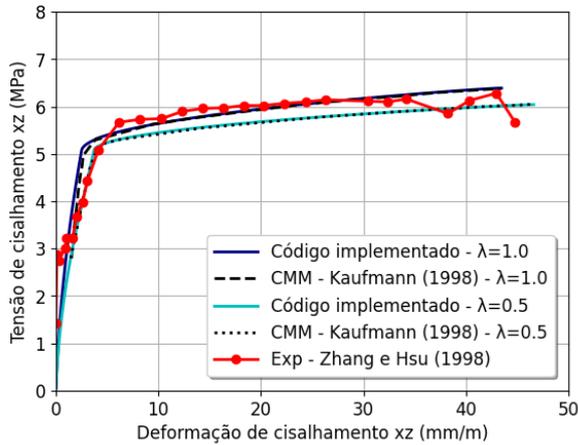
Figura 35 – Resultados das análises dos painéis das séries PV e VA



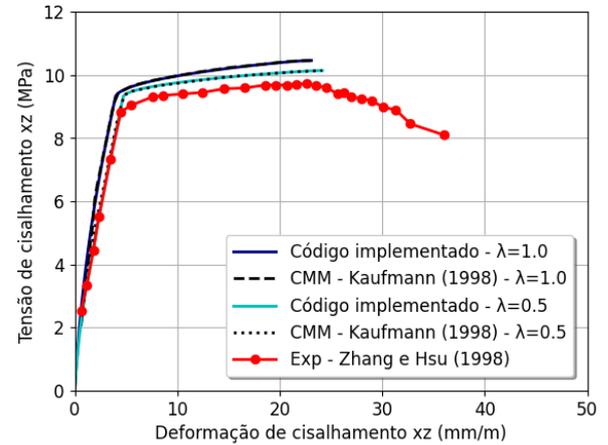
(a) Curva tensão-deformação do painel PV28



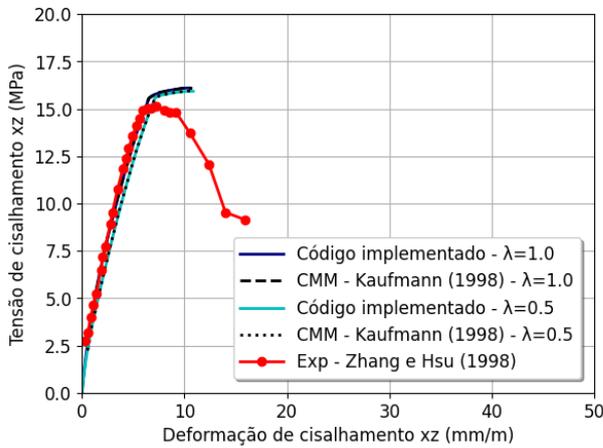
(b) Curva tensão-deformação do painel VA0



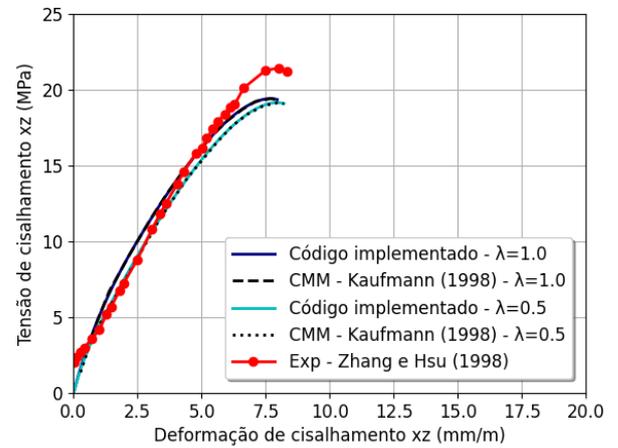
(c) Curva tensão-deformação do painel VA1



(d) Curva tensão-deformação do painel VA2



(e) Curva tensão-deformação do painel VA3



(f) Curva tensão-deformação do painel VA4

Fonte: A autora (2024).

Os painéis da segunda classificação (armadura ortotrópica) são listados na Tabela 2 assim como suas propriedades. A armadura possui módulo de elasticidade igual a 200GPa. Também são investigados para valores de  $\lambda$  iguais a 0,5 e 1. As dimensões dos painéis das séries VB e HB são 1397×1397×178 mm e série PP1 são 1626×1626×287 mm. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 36 a 40. São avaliados os comportamentos  $\tau_{xz} - \gamma_{xz}$ ,  $\tau_{xz} - \varepsilon_1$ ,  $\tau_{xz} - \varepsilon_3$  e  $\tau_{xz} - \theta_r$ . No caso do painel PP1, além desses também são estudadas as deformações médias das armaduras nas duas direções.

Tabela 2 – Propriedades dos painéis com armadura ortotrópica

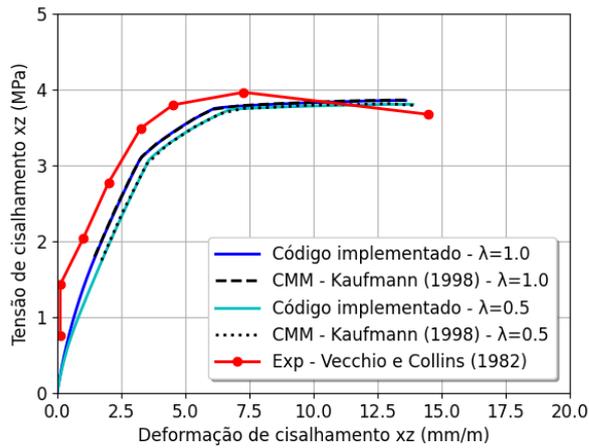
Painel	Armadura										Concreto		EPT <sup>a</sup>
	$\rho_x$ %	$\phi_x$ mm	$f_{syx}$ MPa	$f_{sux}$ MPa	$\varepsilon_{sux}$ ‰	$\rho_z$ %	$\phi_z$ mm	$f_{syz}$ MPa	$f_{suz}$ MPa	$\varepsilon_{suz}$ ‰	$f_c$ MPa	$\varepsilon_{co}$ ‰	
PV10	1,785	6,35	276	317	100	0,999	4,70	276	317	100	14,5	2,70	CP <sup>b</sup>
PV19	1,785	6,35	458	527	100	0,713	4,01	299	344	100	19,0	2,15	CP <sup>b</sup>
PV20	1,785	6,35	460	529	100	0,885	4,47	297	341	100	19,6	1,80	CP <sup>b</sup>
VB3	5,700	25,2	470	606	100	1,140	11,3	445	579	100	102,3	2,35	CP <sup>b</sup>
HB3	1,710	19,5	446	583	100	0,57	11,3	450	579	100	66,8	2,80	CP <sup>b</sup>
HB4	2,84	25,2	470	629	100	0,57	11,3	450	579	100	62,9	2,70	CP <sup>b</sup>
PP1	1,942	19,5	479	667	90	0,647	11,3	480	640	91	27,0	2,12	CP <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Estado plano de tensões aplicado; <sup>b</sup>Cisalhamento puro ( $\sigma_x = \sigma_z = 0$ ); Fonte: A autora (2024).

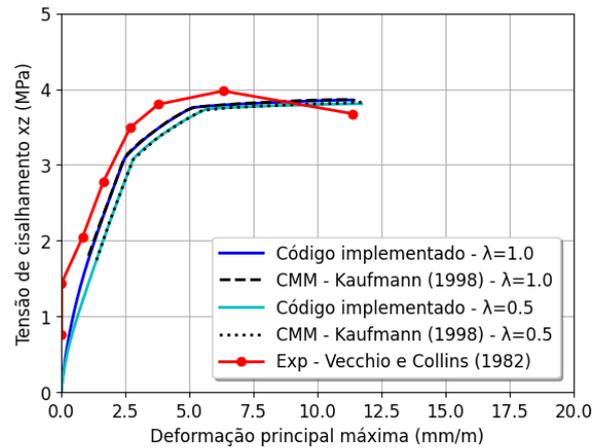
Dos resultados obtidos verifica-se que o comportamento dos painéis a partir da análise com o código implementado também apresenta boa previsão para o caso de armadura ortotrópica. As percepções e discursões com relação a comparação com a solução numérica de Kaufmann (1998) são as mesmas apresentadas para a armadura isotrópica.

No painel PP1 (Figura 40), ao comparar as soluções numéricas quando  $\lambda = 1$ , nota-se previsões muito próximas ao longo de toda a curva, em razão do procedimento de solução de Kvam (2018) também incorporar as contribuições de Seelhofer (2009) para o ajuste da modelagem física do aço para baixos níveis de carga. O autor não apresenta a previsão para  $\lambda = 0,5$ .

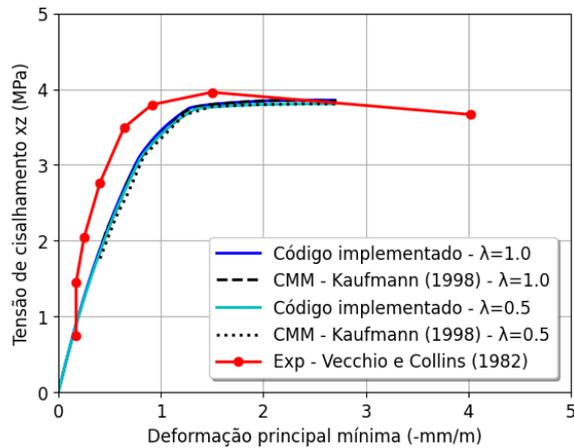
Figura 36 – Resultados das análises dos painéis PV10 e PV19



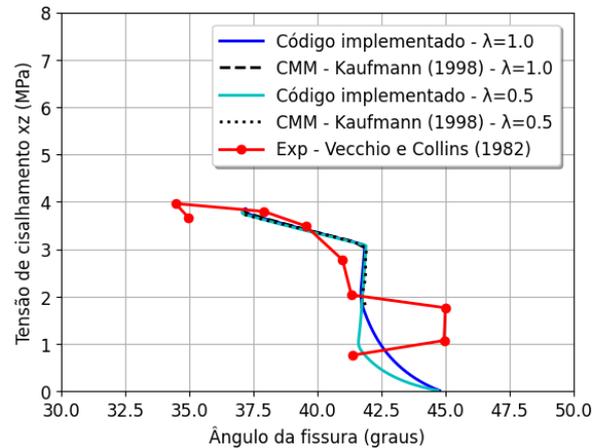
(a) Curva tensão-deformação do painel PV10



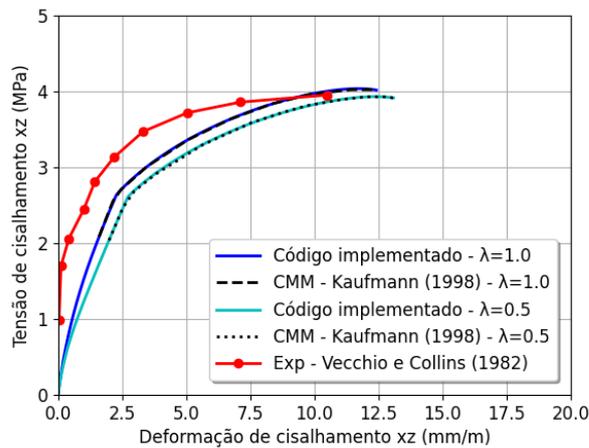
(b) Curva tensão-deformação principal máxima do painel PV10



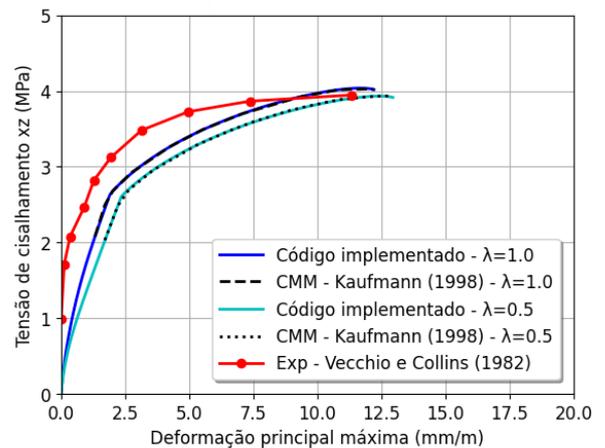
(c) Curva tensão-deformação principal mínima do painel PV10



(d) Curva tensão-ângulo da fissura do painel PV10



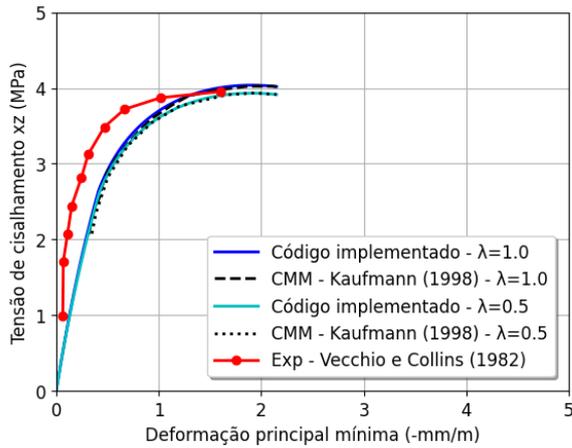
(e) Curva tensão-deformação do painel PV19



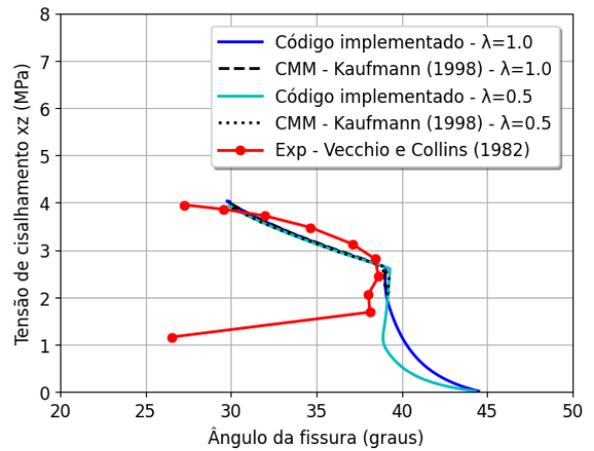
(f) Curva tensão-deformação principal máxima do painel PV19

Fonte: A autora (2024).

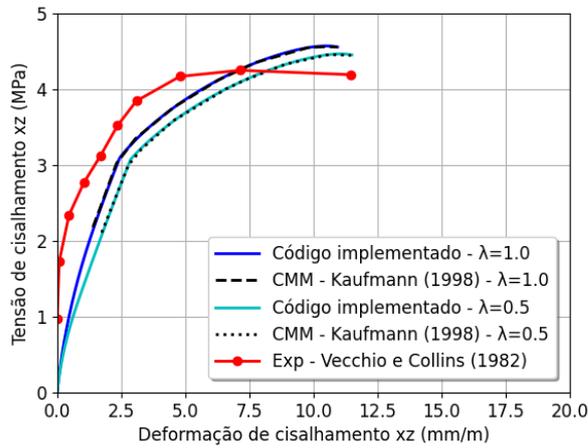
Figura 37 – Resultados das análises dos painéis PV19 e PV20



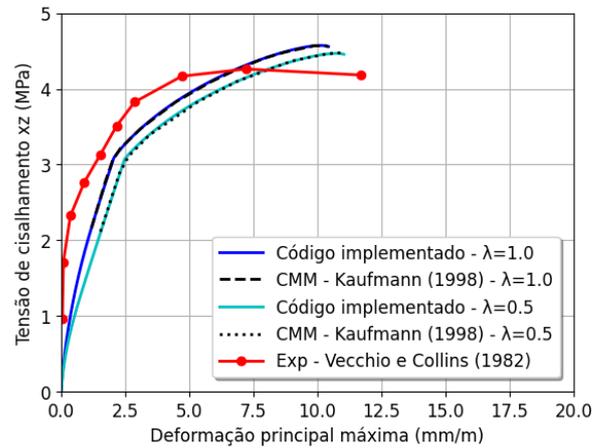
(a) Curva tensão-deformação principal mínima do painel PV19



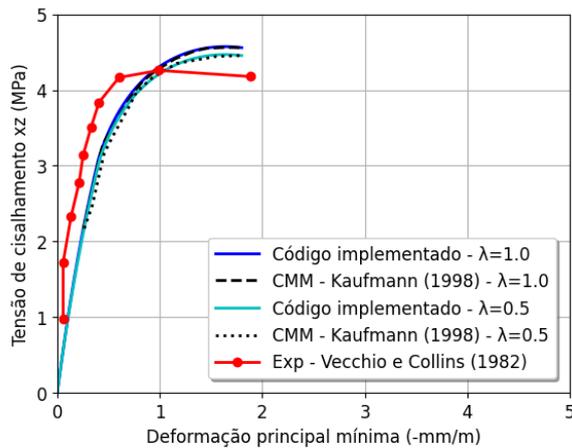
(b) Curva tensão-ângulo da fissura do painel PV19



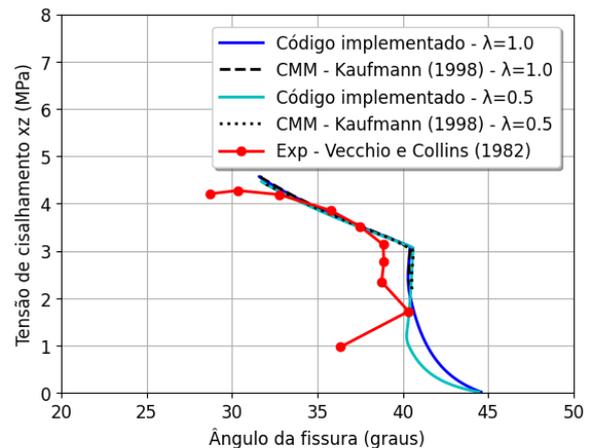
(c) Curva tensão-deformação do painel PV20



(d) Curva tensão-deformação principal máxima do painel PV20



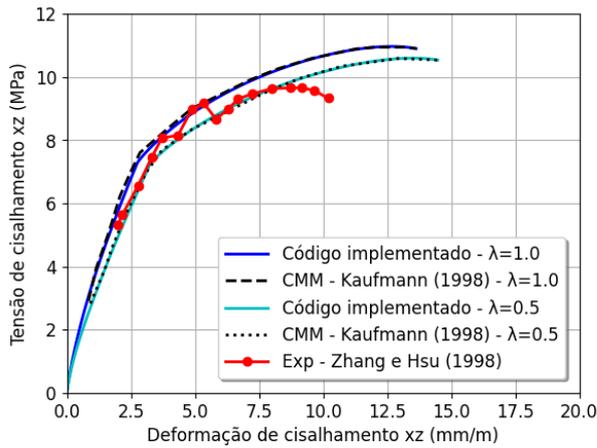
(e) Curva tensão-deformação principal mínima do painel PV20



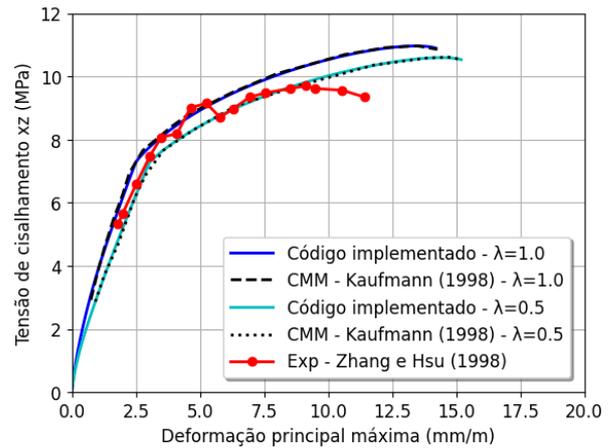
(f) Curva tensão-ângulo da fissura do painel PV20

Fonte: A autora (2024).

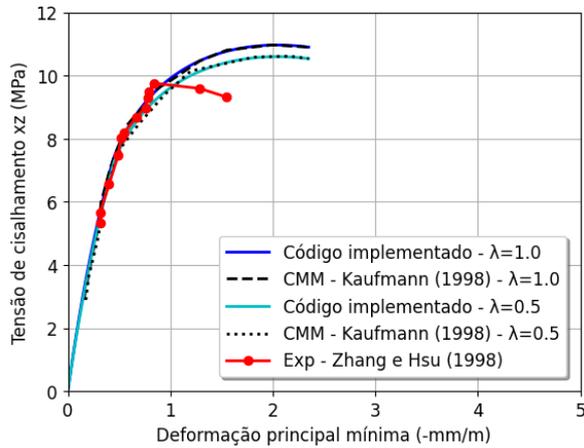
Figura 38 – Resultados das análises dos painéis VB3 e HB3



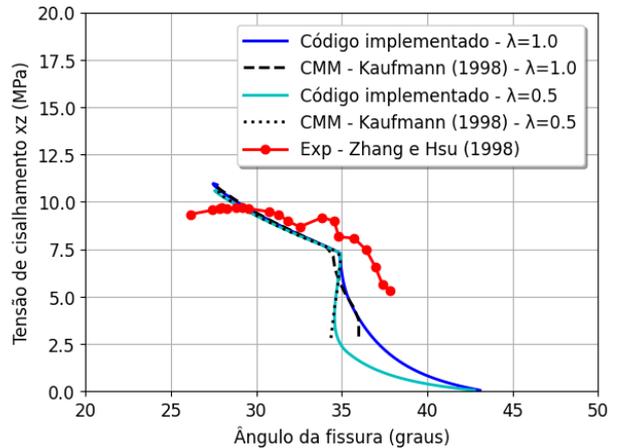
(a) Curva tensão-deformação do painel VB3



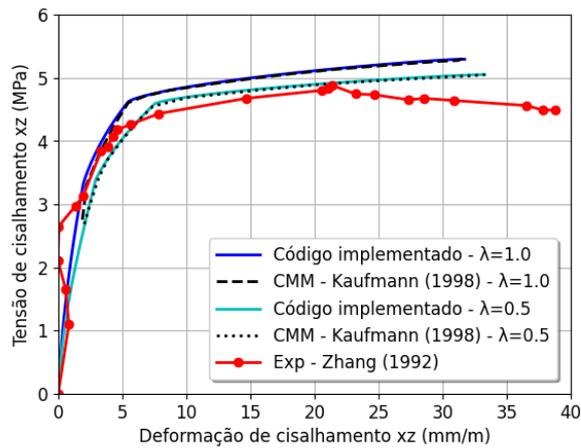
(b) Curva tensão-deformação principal máxima do painel VB3



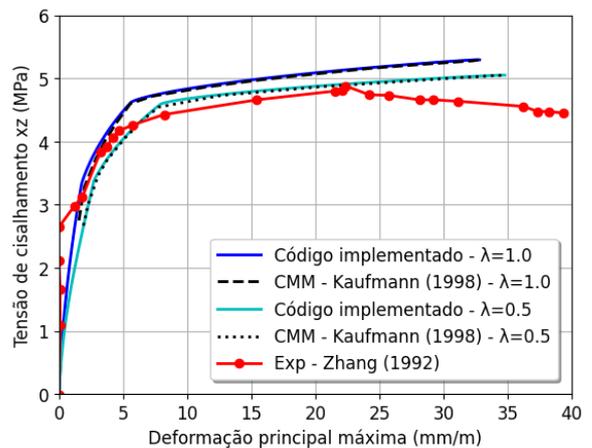
(c) Curva tensão-deformação principal mínima do painel VB3



(d) Curva tensão-ângulo da fissura do painel VB3



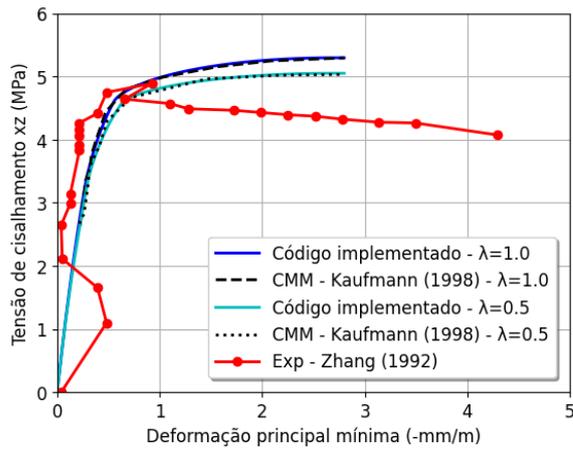
(e) Curva tensão-deformação do painel HB3



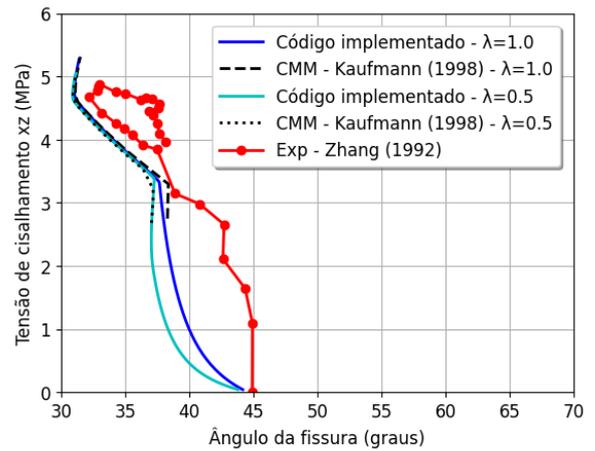
(f) Curva tensão-deformação principal máxima do painel HB3

Fonte: A autora (2024).

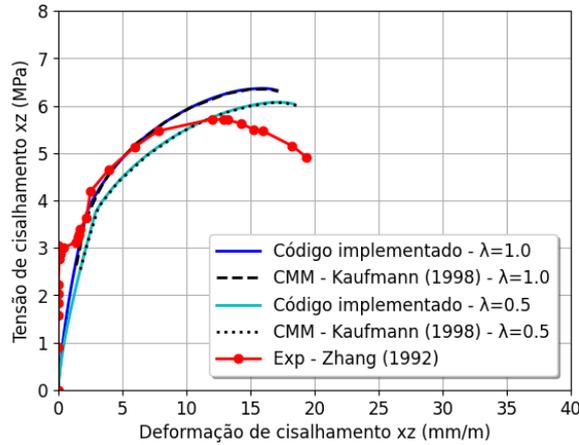
Figura 39 – Resultados das análises dos painéis HB3 e HB4



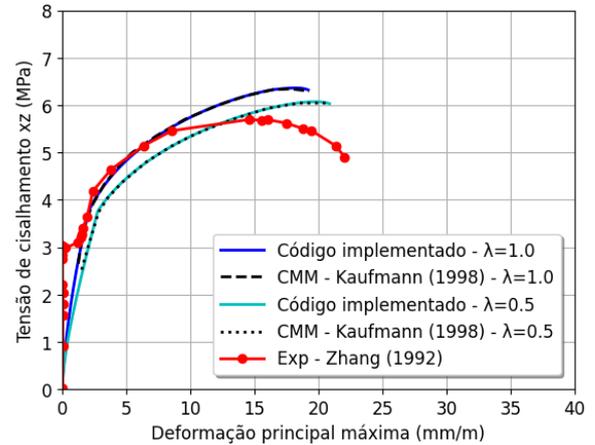
(a) Curva tensão-deformação principal mínima do painel HB3



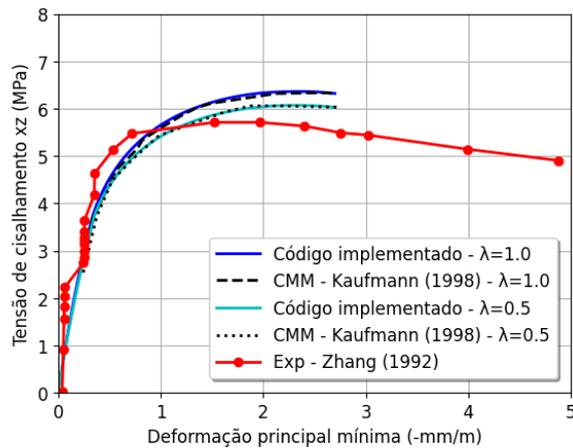
(b) Curva tensão-ângulo da fissura do painel HB3



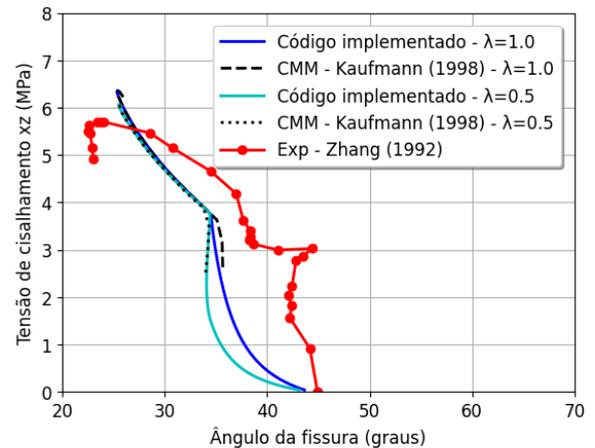
(c) Curva tensão-deformação do painel HB4



(d) Curva tensão-deformação principal máxima do painel HB4



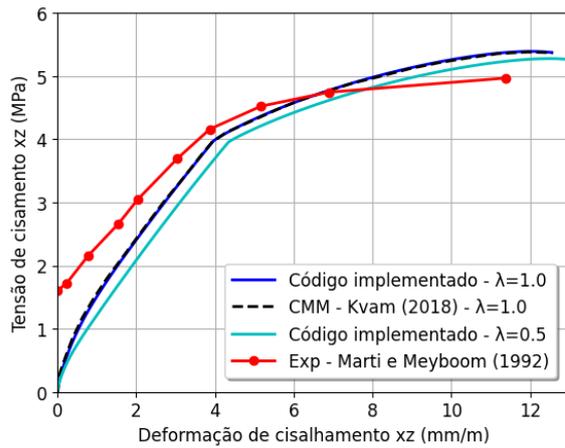
(e) Curva tensão-deformação principal mínima do painel HB4



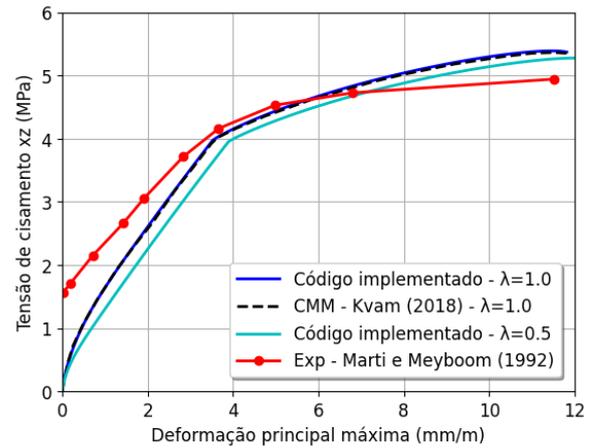
(f) Curva tensão-ângulo da fissura do painel HB4

Fonte: A autora (2024).

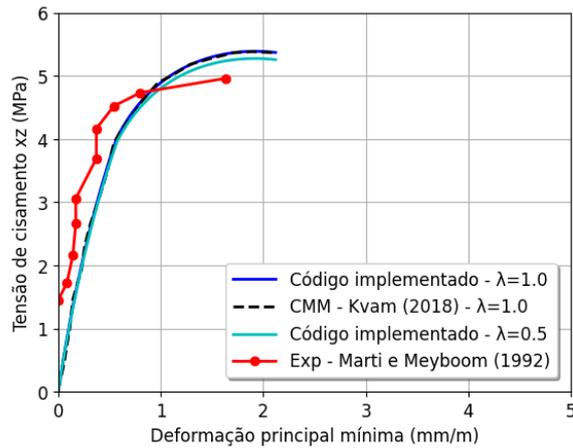
Figura 40 – Resultados da análise do painel PP1



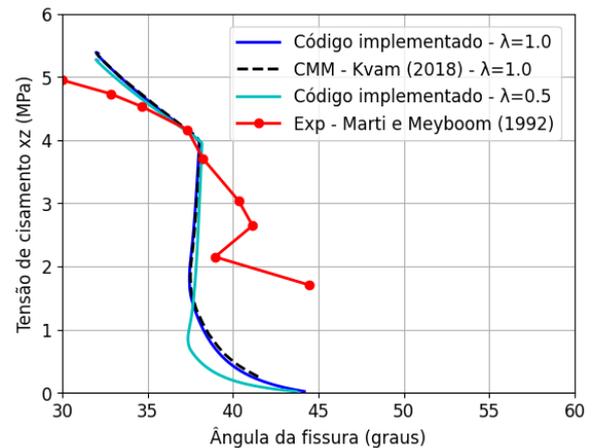
(a) Curva tensão-deformação do painel PP1



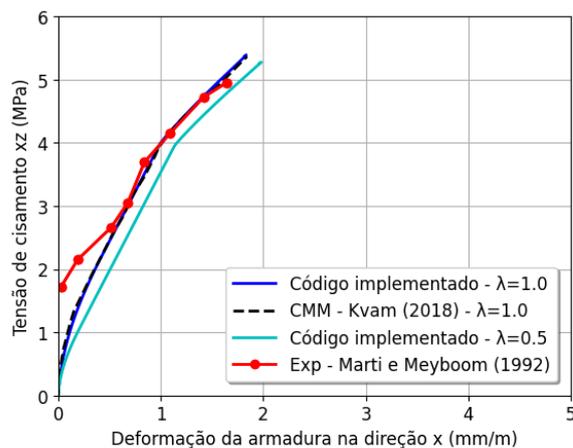
(b) Curva tensão-deformação principal máxima do painel PP1



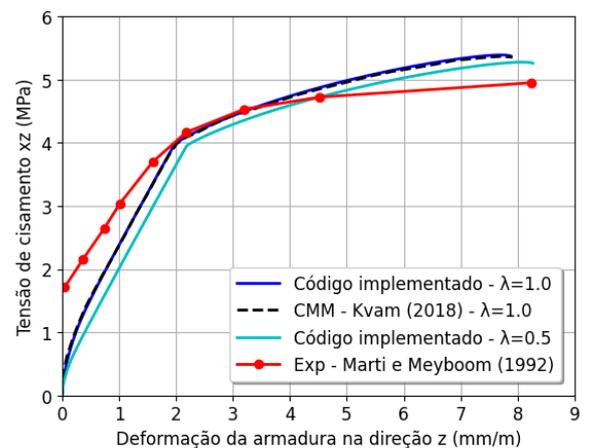
(c) Curva tensão-deformação principal mínima do painel PP1



(d) Curva tensão-ângulo da fissura do painel PP1



(e) Curva tensão-deformação da armadura na direção x do painel PP1



(f) Curva tensão-deformação da armadura na direção z do painel PP1

Fonte: A autora (2024).

Baseada nos resultados apresentados, o código implementado para o CMM mostrou-se satisfatório para avaliar membranas de concreto armado fissurada, inclusive com relação ao tempo de processamento, haja vista que utilizando um computador com uma CPU Intel Core i5-5200U com processador de 2,20 GHz. e considerando que para o desenvolvimento de uma curva com 1000 pontos (ou seja, 1000 sistemas de equações não lineares), o tempo de análise não foi superior a 1 segundo. Isso demonstra, portanto, sua eficiência.

Dada a boa previsão da rotina, verifica-se também que a utilização da abordagem MCTM como ferramenta auxiliar para obter uma estimativa inicial, previamente aplicada em modelos constitutivos médios, também é aplicável para modelos constitutivos locais, evitando o uso de técnicas de tentativa e erro, adotadas por outros autores, Greene (2006), Hsu e Mo (2010).

### **3.2.3 Estudo comparativo entre modelos constitutivos médios e locais**

Tendo em vista as diferenças entre os modelos constitutivos médios e locais para avaliar membranas de concreto armado, esta seção realiza um estudo comparativo entre esses dois modelos. Para isso foram comparadas as previsões dos painéis de concreto armado ortogonalmente por meio do modelo constitutivo médio Eff. RA-STM de Bernardo et al. (2020) que é baseado no RA-STM Hsu (1988), e do modelo constitutivo local CMM que foi implementado neste trabalho e validado conforme mostrado anteriormente. É válido destacar que além da diferença no estabelecimento do equilíbrio, no Eff. RA-STM o efeito de enrijecimento à tração é verificado por meio de leis constitutivas empíricas, enquanto no CMM faz uso da formulação do modelo de banzo tracionado (TCM), Marti et al. (1998).

Os painéis avaliados são os da Série A testados por Pang e Hsu (1995). Os mesmos possuem as dimensões de 1400×1400×178 mm e estão sujeitos a um estado de cisalhamento puro no plano  $xz$ . As propriedades da armadura e do concreto estão descritas na Tabela 3, sendo o módulo de elasticidade da armadura igual a 200GPa. Não é informado pelo autor as propriedades de tensão última, deformação última e bitola do aço. No entanto, tendo em vista a necessidade de conhecer essa tensão e deformação, pois o modelo CMM adota uma relação tensão-deformação bilinear com endurecimento do aço, foi adotado a tensão última igual ao valor inteiro imediatamente superior a tensão de escoamento (por exemplo, se  $f_{sy} = 463 \text{ MPa}$ ,

então  $f_{su} = 464 \text{ MPa}$ ) e a deformação igual a 10‰ de acordo com a ABNT NBR 6118 (2023). Quanto a bitola do aço, embora seja também um dado de entrada necessário, foi verificado que para painéis com armaduras isotrópicas e carregamento do tipo cisalhamento puro, igualmente aos da série A, o termo da bitola não interfere nos resultados. Logo, foi adotado um valor arbitrário apenas para que o código pudesse ser executado.

Tabela 3 – Propriedades dos painéis da série A

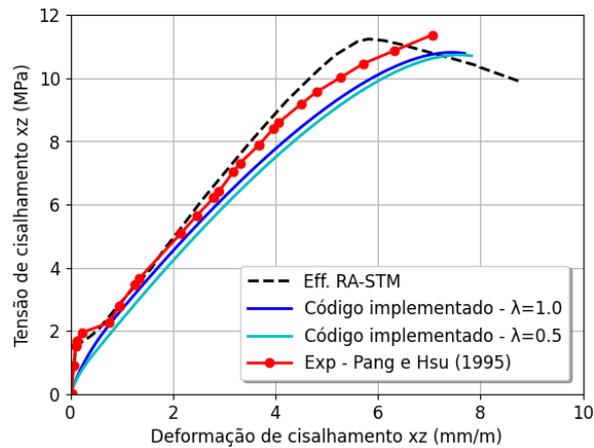
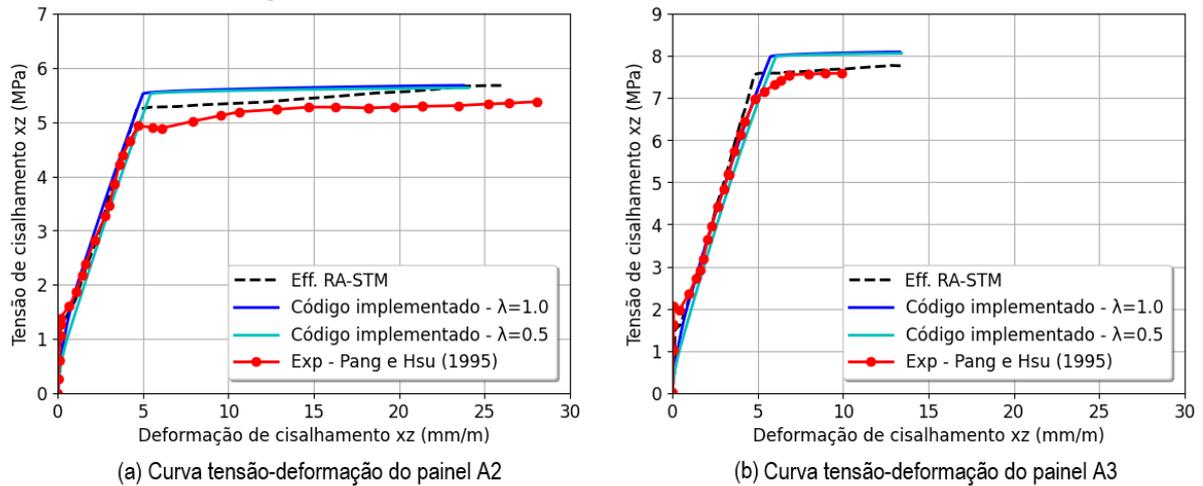
Painel	Armadura										Concreto		EPT <sup>a</sup>
	$\rho_x$ %	$\phi_x$ mm	$f_{syx}$ MPa	$f_{sux}$ MPa	$\epsilon_{sux}$ ‰	$\rho_z$ %	$\phi_z$ mm	$f_{syx}$ MPa	$f_{suz}$ MPa	$\epsilon_{suz}$ ‰	$f_c$ MPa	$\epsilon_{co}$ ‰	
A2	1,19	-	463	464	10	1,19	-	463	464	10	41,2	2,10	CP <sup>b</sup>
A3	1,79	-	446	447	10	1,79	-	446	447	10	41,6	1,94	CP <sup>b</sup>
A4	2,98	-	470	471	10	2,98	-	470	471	10	42,5	2,20	CP <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Estado plano aplicado no painel; <sup>b</sup>Cisalhamento puro ( $\sigma_x = \sigma_z = 0$ ); Fonte: A autora (2024).

A Figura 41 ilustra as curvas tensão de cisalhamento *versus* deformação de cisalhamento ( $\tau_{xz} - \gamma_{xz}$ ) de cada painel. Para a solução via CMM, os painéis foram avaliados para valores de  $\lambda$  iguais a 0,5 e 1. De acordo com as curvas, os painéis A2 e A3 (Figuras 41(a) e 41(b)) apresenta uma ruptura por escoamento da armadura. Esse colapso pode ser identificado para as armaduras nas duas direções, visto que possuem as mesmas características e o painel está sujeito a cisalhamento puro. Por outro lado, o painel A4 (Figura 41(c)) apresenta uma ruptura por esmagamento do concreto sem escoamento do aço.

No geral, as curvas de ambos os modelos mostrados na Figura 41 apresentam boa concordância com os dados experimentais, principalmente nos painéis A2 e A3, em particular na região em serviço. Após escoamento do aço, o modelo constitutivo médio (Eff. RA-STM) aproximou-se mais do resultado experimental. Contudo, as tensões de cisalhamento de ruptura de ambos os modelos apresentam valores próximos. No painel A4, embora as previsões das soluções sejam representativas quando comparado com o experimento, é notado maior variação entre os resultados dos modelos. Nesse caso a abordagem que considera valores médios (Eff. RA-STM) se mostrou mais rígida.

Figura 41 – Resultados das análises dos painéis da série A



Fonte: A autora (2024).

Nas Figuras 42(a), 42(c) e 42(e) é mostrado o comportamento das tensões média (TM) e na fissura (TF) *versus* deformações médias da armadura. Para o CMM são apresentadas as curvas correspondentes a tensão média e a tensão na fissura para valores de  $\lambda$  iguais a 0,5 e 1. No experimento e para o modelo Eff. RA-STM, a tensão é equivalente à média.

Em termos de valores médios das tensões nas armaduras, nota-se boa correlação entre soluções numéricas e experimento no estado de serviço (antes do escoamento da armadura). Ambas as soluções (CMM e Eff. RA-STM) possuem respostas muito próximas entre si, especialmente nos painéis A3 e A4.

A curva de tensão na armadura na fissura obtida apenas pelo modelo constitutivo local, como esperado, apresentou um comportamento superior a todas as curvas de tensão média, inclusive a peça trabalhando no estado de serviço. Esse evento pode ser melhor visualizado considerando as Figuras 42(b), 42(d) e 42(f). As

curvas representam a relação entre  $\sigma_{sxr}/\sigma_{smx}$  e  $\varepsilon_{smx}/\varepsilon_{syx}$  para a armadura na direção  $x$  e considerando o comportamento pós fissurado do concreto. Em todos os painéis, verifica-se que a razão entre as tensões ( $\sigma_{sxr}/\sigma_{smx}$ ) é maior que 1, sobretudo na região antes do escoamento da armadura ( $\varepsilon_{smx}/\varepsilon_{syx} < 1$ ).

O fato da tensão na armadura na fissura ser superior à tensão média é consistente com o que Eshwarappa e Gangolu (2016) observaram em ensaios de carregamento cíclicos, quando a armadura rompeu exatamente na fissura. Isso mostra que a tensão crítica da armadura ocorre na fissura e modelos constitutivos cujo equilíbrio é definido na fissura, como o CMM, são mais adequados para avaliá-la, embora existam modelos que tentam converter a tensão média no aço em tensão máxima (na fissura) como mostra Vecchio (2000). Assim, em casos diretamente associados ao comportamento máximo do aço, como cálculo de abertura de fissura, ou mesmo em problemas de fadiga, a tensão adotada para tais casos deve ser a maior possível.

Neste estudo comparativo também foi considerada uma versão modificada do método Wood&Armer, Wood (1968) e Armer (1968). O modelo original consiste em determinar os momentos de dimensionamento de lajes de concreto armado levando-se em consideração os momentos fletores e torsores existentes na estrutura. Nesse trabalho, é utilizado a abordagem que está implementada no *software* comercial STRAP, ATIR Engineering Software Development (2021) que faz uma adaptação desse método, para obter as tensões na armadura de membranas de concreto armado. Conforme descrito no seu manual de utilização, para armaduras ortogonais, as forças de dimensionamento da armadura  $N_x^*$  e  $N_z^*$ , respectivas as direções  $x$  e  $z$ , são calculadas segundo as equações Eq. (141) a Eq. (143). Sendo,  $N_x$  e  $N_z$  as forças normais e  $N_{xz}$  a força de cisalhamento, ambas em unidade de força por metro.

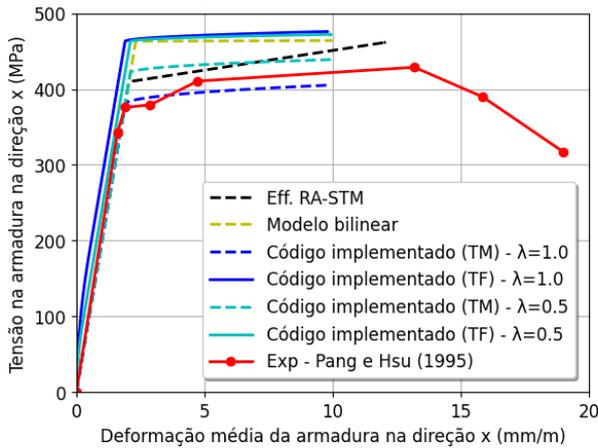
$$N_x^* = N_x + |N_{xz}| \quad N_z^* = N_z + |N_{xz}| \quad (141)$$

Além disso, caso  $N_x^* < 0$ , então:

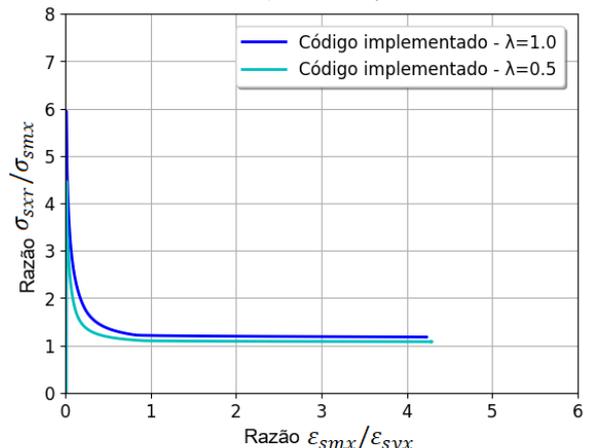
$$N_x^* = 0 \quad N_z^* = N_z + \left| \frac{N_{xz}^2}{N_x} \right| \quad (142)$$

Ou, se  $N_z^* < 0$ , então:

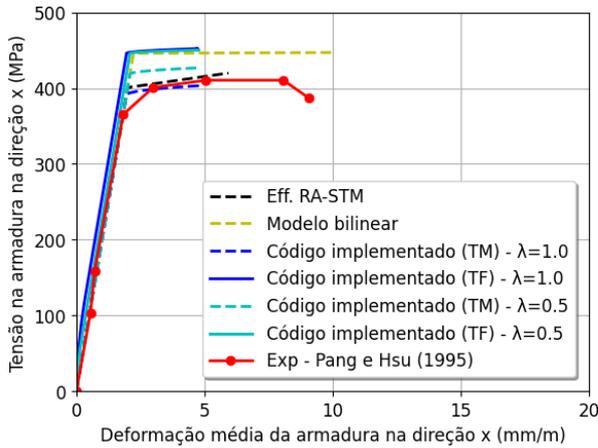
Figura 42 – Resultados das análises dos painéis da série A (continuação)



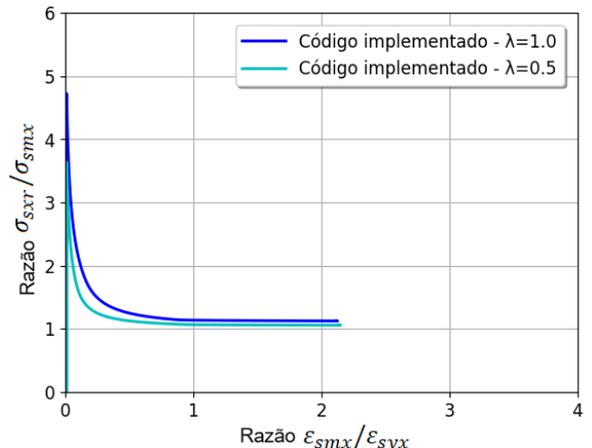
(a) Curva tensão-deformação da armadura do painel A2



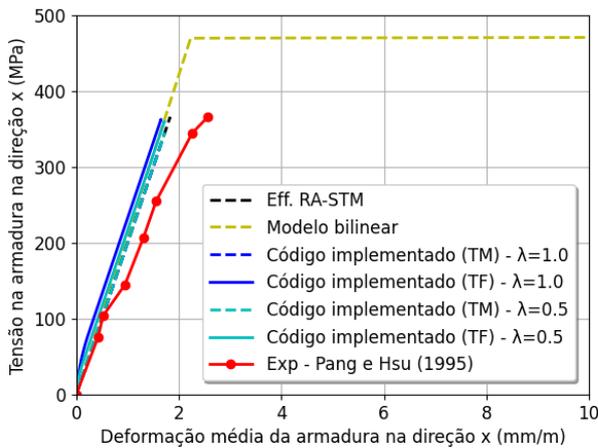
(b) Curva da relação  $\sigma_{sxr}/\sigma_{smx}$  e  $\epsilon_{smx}/\epsilon_{syx}$  do painel A2



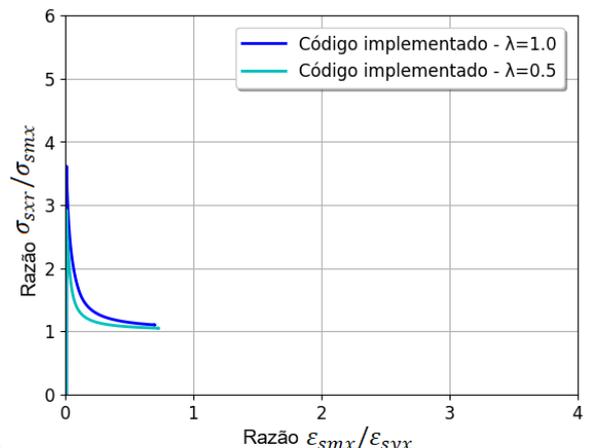
(c) Curva tensão-deformação da armadura do painel A3



(d) Curva da relação  $\sigma_{sxr}/\sigma_{smx}$  e  $\epsilon_{smx}/\epsilon_{syx}$  do painel A3



(e) Curva tensão-deformação da armadura do painel A4



(f) Curva da relação  $\sigma_{sxr}/\sigma_{smx}$  e  $\epsilon_{smx}/\epsilon_{syx}$  do painel A4

Fonte: A autora (2024).

$$N_z^* = 0 \qquad N_x^* = N_x + \left| \frac{N_{xz}^2}{N_z} \right| \qquad (143)$$

Finalmente, conhecida as forças de dimensionamento na armadura, as tensões na mesma podem ser determinadas por meio da equação Eq. (144). Sendo  $N_x^*$  e  $N_z^*$  dados em unidade de força por metro.

$$\sigma_{sx} = \frac{N_x^*}{\rho_x A_c} \qquad \sigma_{sz} = \frac{N_z^*}{\rho_z A_c} \qquad (144)$$

Como os painéis da série A foram submetidos a um estado de cisalhamento puro, as tensões de cálculo da armadura, obtidas pelas equações modificadas de Wood&Armer (Eq. (141)), foram baseadas apenas nesta tensão. Como neste modelo as cargas externas são resistidas exclusivamente pela armadura, a resposta do material coincide com o modelo bilinear que, como pode ser observado na Figura 42, apresentou boa proximidade com as tensões máximas do CMM.

Assim, pode-se concluir que o método Wood&Armer modificado está alinhado com a percepção de que a tensão crítica está na fissura, mostrando-se, portanto, adequado para avaliar tais tensões quando comparado aos demais modelos discutidos neste estudo.

### 3.3 MODELO DE CASCA FISSURADA

#### 3.3.1 Algoritmo numérico

A rotina computacional do Modelo de Casca Fissurada é dividida em três figuras. Na Figura 43 é mostrado o procedimento de solução do problema a partir do método de Newton-Raphson. A Figura 45 apresenta o modelo constitutivo do concreto. O comportamento do concreto é avaliado segundo o estágio em que se encontra, isto é, fissurado ou não. A matriz de rigidez e vetor de forças internas do respectivo material é adicionada a matriz e vetor global da casca.

O algoritmo da Figura 44 é responsável por avaliar o comportamento da armadura, de modo que será considerado a partir do modelo bilinear quando a membrana fictícia que contém a armação não estiver fissurada. Caso contrário, será

verificado três condições em função do ângulo da fissura. Se este ângulo for  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ou múltiplo, no qual resulta no valor de seno igual a 0 ou 1, a armadura paralela a direção da fissura é avaliada através do modelo bilinear e a armadura na direção perpendicular por meio do TCM, Figura 29. Por outro lado, quando o ângulo for diferente dos anteriores as armaduras são avaliadas a partir do CMM, Figura 33.

Para uma análise da resposta carga-deformação do elemento, o procedimento de solução do CSM (Figura 43) é executado várias vezes incremento o vetor de forças externas. Esse processo se repete até a deformação  $\varepsilon_{c3}$  das lamelas mais externas da casca atingir o limite determinado, ou ainda, se algum dos aços atingir a tensão de ruptura.

Figura 43 – Pseudocódigo do procedimento de solução do CSM

<b>ALGORITMO 5: Procedimento de solução do CSM</b>	
<b>Dados de entrada:</b> Propriedades dos materiais, características geométricas da casca, carga externa, parâmetro $\lambda$ , estimativa inicial, número de lamelas e tolerância para o critério de convergência.	
1	<b>Para</b> todos os $f$ vetores de forças externas faça:
2	Incremente o vetor de forças externa $\{F_{ext}\}$ ;
3	A variável <i>erro</i> recebe 1;
4	<b>Enquanto</b> <i>erro</i> maior que <i>tol</i> faça:
5	Inicialize o vetor de forças internas da casca $\{F_{int}\}$ ;
6	Inicialize a matriz de rigidez da casca $[K_{casca}]$ ;
7	<b>Para</b> todas as lamelas de concreto faça:
8	Monte $\{F_{int}\}$ e $[K_{casca}]$ com a contribuição do concreto, Figura 45;
9	<b>Fim</b>
10	<b>Para</b> todos os elementos fictícios de membrana faça:
11	Adicione em $\{F_{int}\}$ e $[K_{casca}]$ a contribuição do aço, Figura 44;
12	<b>Fim</b>
13	Calcule o vetor resíduo das forças $\{R(\varepsilon t)\}$ , Eq. (109);
14	Calcule o vetor de incremento $\{\Delta\varepsilon t\}$ , Eq. (138);
15	Atualize o vetor de deformação $\{\varepsilon t\}$ , Eq. (139);
16	Calcule o parâmetro <i>erro</i> , Eq. (140);
17	<b>Fim</b>
18	<b>Se</b> $\varepsilon_{c3,sup} < \varepsilon_{c0}$ ou $\varepsilon_{c3,inf} < \varepsilon_{c0}$ ou $\sigma_{sx} < f_{sux}$ ou $\sigma_{sz} < f_{suz}$ faça:
19	Salve os resultados e o loop continua;
20	<b>Senão:</b>
21	O loop é encerrado;
22	<b>Fim</b>
23	<b>Fim</b>
24	Imprima os resultados

Figura 44 – Pseudocódigo do modelo constitutivo do aço

**ALGORITMO 6: Modelo constitutivo do aço**

```

1  Calcule o vetor  $\{\varepsilon_{xz}\}$  da membrana, Eq. (101);
2  Calcule a deformação principal máxima da membrana  $\varepsilon_{c1}$ , Eq. (105);
3  Se  $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr}$  faça:
4    Calcule as tensões  $\sigma_{sx}$  e  $\sigma_{sz}$  a partir do modelo bilinear, Eq. (1);
5  Senão:
6    Calcule a deformação principal mínima da membrana  $\varepsilon_3$ , Eq. (105);
7    Calcule seno e cosseno do ângulo da fissura, Eq. (57) e Eq. (58);
8    Se seno igual a 1 faça:
9      Calcule  $\sigma_{sxr}$  via TCM, Figura 29;
10     Verifique  $\sigma_{sxr}$  a partir da Figura 31;
11     Calcule  $\sigma_{sz}$  a partir do modelo bilinear, Eq. (1);
12    Senão, se seno igual a 0 faça:
13     Calcule  $\sigma_{sx}$  a partir do modelo bilinear, Eq. (1);
14     Calcule  $\sigma_{s zr}$  via TCM, Figura 29;
15     Verifique  $\sigma_{s zr}$  a partir da Figura 31;
16    Senão:
17     Calcule  $\sigma_{s xr}$  e  $\sigma_{s zr}$  via CMM, Figura 33;
18  Fim
19 Fim
20 Monte o vetor de tensões da armadura ortogonal da membrana  $\{\sigma_s\}$ ;
21 Calcule o vetor de forças internas da armadura ortogonal  $\{F_s\}$ , Eq. (136);
22 Adicione  $\{F_s\}$  no vetor de forças internas da casca  $\{F_{int}\}$ ;
23 Para todas as camadas de armadura da membrana faça:
24   Inicialize a matriz de rigidez da armadura  $[K_{casca}^s]_j$ ;
25   Calcule a matriz constitutiva secante  $[D^s]$ , Eq. (128);
26   Calcule a matriz de transformação  $[T(\alpha)]$ , Eq. (126);
27   Calcule a matriz  $[D_{xz}^s]$ , Eq. (130);
28   Calcule a matriz de rigidez  $[K_{casca}^s]_j$ , Eq. (120);
29   Adicione  $[K_{casca}^s]_j$  a matriz de rigidez da casca  $[K_{casca}]$ ;
30 Fim

```

Fonte: A autora (2024).

Figura 45 – Pseudocódigo do modelo constitutivo do concreto

**ALGORITMO 7: Modelo constitutivo do concreto**

```

1  Inicialize a matriz de rigidez da lamela  $[K_{casca}^c]_i$ ;
2  Calcule o vetor  $\{\varepsilon_{xz}\}$  da lamela, Eq. (101);
3  Calcule as deformações principais do concreto  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c3}$ , Eq. (105);
4  Calcule o ângulo da direção principal  $\theta_p$ , Eq. (106);
5  Se  $\varepsilon_{c1} \leq 0$  faça:
6    Calcule a tensão  $\sigma_{c1}$  a partir de Eq. (3);
7  Senão:
8    Calcule a tensão  $\sigma_{c1}$  a partir de Eq. (5);
9  Fim
10 Se  $\varepsilon_{c3} \leq 0$  faça:
11   Calcule a tensão  $\sigma_{c3}$  a partir de Eq. (3);
12 Senão:
13   Calcule a tensão  $\sigma_{c3}$  a partir de Eq. (5);
14 Fim
15 Calcule os módulos secantes  $E_{c1}$ ,  $E_{c3}$  e  $E_{c13}$ , Eq. (123) a Eq. (125);
16 Calcule a matriz constitutiva secante  $[D_{13}^c]$ , Eq. (122);
17 Calcule a matriz de transformação  $[T(\theta_p)]$ , Eq. (126);
18 Calcule a matriz constitutiva  $[D_{xz}^c]$ , Eq. (127);
19 Calcule o vetor de tensões  $\{\sigma_c\}$ , Eq. (133);
20 Calcule o vetor de forças internas da lamela  $\{F_c\}_i$ , Eq. (136);
21 Adicione  $\{F_c\}_i$  no vetor de forças internas da casca  $\{F_{int}\}$ ;
22 Calcule a matriz de rigidez  $[K_{casca}^c]_i$ , Eq. (119);
23 Adicione  $[K_{casca}^c]_i$  a matriz de rigidez da casca  $[K_{casca}]$ ;

```

Fonte: A autora (2024).

**3.3.2 Validação do código numérico**

A validação da rotina proposta sucedeu com a comparação dos resultados de ensaios desenvolvidos por Polak e Vecchio (1994), Lenschow e Sozen (1966), Apud Spathelf (2017) e Marti, Leesti e Khalifa (1966). Visando a comparação com outros procedimentos numéricos, esses mesmos ensaios também foram analisados por outras ferramentas computacionais dentre elas: *software* Sheell2000 desenvolvido por Bentz (2000), que admite a Teoria de Campo de Compressão Modificada para avaliar o comportamento de membranas de concreto armado, e rotina computacional que utiliza a abordagem de discretização em lamela como Spathelf (2017) e código de elementos finitos CANECA desenvolvido por Silva (2022).

**3.3.2.1 Cascas de Polak**

O primeiro conjunto de cascas analisado foi investigado por Polak e Vecchio (1994). Foram realizados quatro ensaios em painéis de concreto armado ortogonalmente, submetidos a diferentes solicitações e resistências do concreto. Foram estudados nesse trabalho o SM1, SM2 e SM3, sendo o quarto SM4 descartado pois a armadura, embora ortogonal, possuem direções defasadas em  $45^\circ$  e, portanto, está fora do escopo principal desse trabalho. Os painéis SM1, SM2 e SM3 possuem as dimensões iguais a  $1524 \times 1524 \times 316$  mm. Nas Figuras 46(a), 47(a) e 48(a) é mostrada as cargas solicitantes, detalhes geométricos e propriedades dos materiais necessários para a análise.

Em todos os experimentos, inclusive as cascas de Lenschow e de Marti apresentadas posteriormente, o vetor de forças externas é expresso em termos do vetor normalizado dos esforços de membrana, flexão e torção e do fator incremento de carga  $t$ . Para o procedimento de solução do sistema de equações não lineares foi imposta uma tolerância de  $10^{-2}$  para o critério de convergência. A espessura do elemento foi discretizada em 20 lamelas de concreto e as armaduras contidas em duas membranas, pois há barras na região superior e inferior do painel. Nessa série de painéis em particular, as armaduras na direção  $z$  foram consideradas justapostas as armaduras na direção  $x$ , de modo a atender o critério de Jäger (2007) apud Spathelf (2017), Figura 26. Para a estimativa inicial dos respectivos painéis foi utilizado a resposta do primeiro vetor de forças ( $t = 1$ ) obtido a partir de uma análise linear elástica segundo a teoria de Kirchhoff.

As Figuras 46(b), 47(b) e 48(b) apresentam a curva  $M_x - \kappa_x$  do ensaio experimental juntamente com a resposta obtida com o código implementado do CSM e por outras abordagens numéricas da literatura. De modo geral, observa-se que a rotina desenvolvida prevê muito bem o comportamento dos painéis, principalmente na região em serviço, trecho do gráfico que vai até o escoamento da armadura ou aproximadamente até o ponto B. Após o escoamento, o comportamento se mostra menos rígido que o experimento e demais soluções numéricas. Em ambos os painéis o processamento foi interrompido quando a deformação principal de compressão das lamelas mais externas da casca atingiram o limite definido, o que caracteriza ruptura por esmagamento do concreto. O tempo médio de processamento das análises foi de aproximadamente 6 segundos.

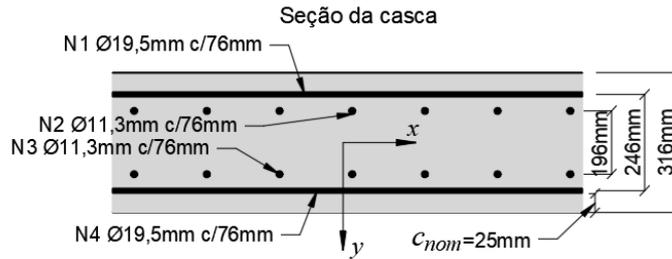
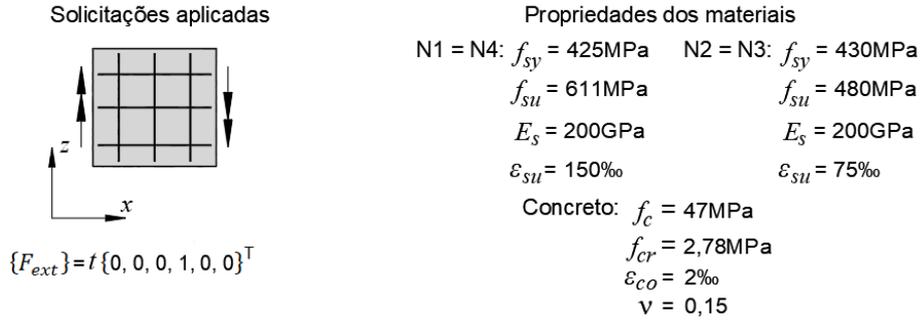
Nas Figuras 46, 47 e 48, as subfiguras (c) (d) e (e) ilustram o diagrama de tensões no concreto e as forças na armadura, da seção paralela ao plano  $x - y$ , nos

pontos A, B e C que são indicados na curva  $M_x - \kappa_x$ . Todos os pontos estão localizados na região de pós fissuração do concreto. O ponto A está localizado próximo ao início da fissuração do concreto. O ponto B antes do escoamento da armadura, e por fim, o ponto C situa-se após o escoamento da armadura. Os retângulos na cor cinza equivalem as lamelas de concreto e seu comprimento varia em função da tensão. As setas vermelhas representam as armaduras superior e inferior na direção  $x$ , sendo seu comprimento determinado em função da força interna no material. O ponto na seção onde apresenta deformação nula ( $\varepsilon_x = 0$ ), a chamada linha neutra, foi determinada a partir da Eq. (97), bastando apenas conhecer a deformação média e a curvatura na respectiva direção. Para uma visualização clara desse local é necessário uma discretização refinada da seção. Nos casos mostrados, como foi adotado apenas 20 lamelas, pode acontecer da linha neutra cruzar uma lamela de concreto com tensão diferente de zero.

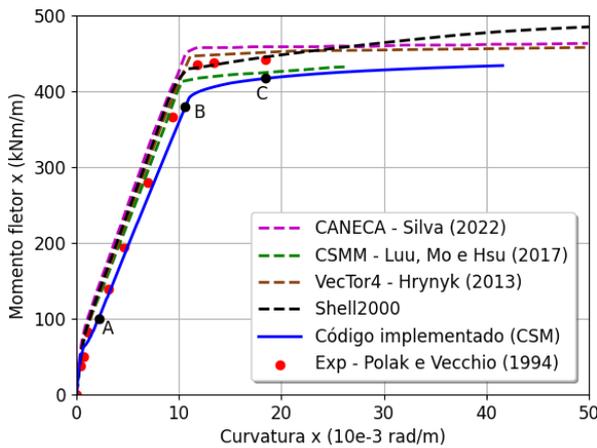
Essa representação gráfica contribui para um melhor entendimento do comportamento dos materiais na respectiva seção. Ela possibilita ao profissional conhecer as tensões nas lamelas de concreto, inclusive se este encontra-se fissurado ou não, além de identificar a posição da linha neutra e quais armaduras estão sob tração e compressão, juntamente com a visualização das suas tensões.

Conforme é observado, o comportamento de cada diagrama está coerente, do ponto de vista da mecânica, com o tipo de solicitação a que está submetida. Em todos eles verifica-se que acima da linha neutra as lamelas de concreto e a armadura superior estão sob compressão. Abaixo dela, sob tração, basicamente apenas a armadura contribui para o equilíbrio da seção, com algumas exceções, como na seção do ponto A de todas as curvas, onde próximo a linha neutra é perceptível algumas lamelas de concreto ainda tracionadas.

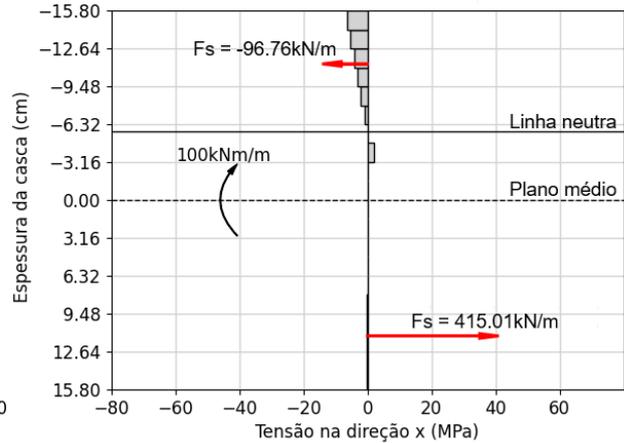
Figura 46 – Resultados da análise da casca SM1



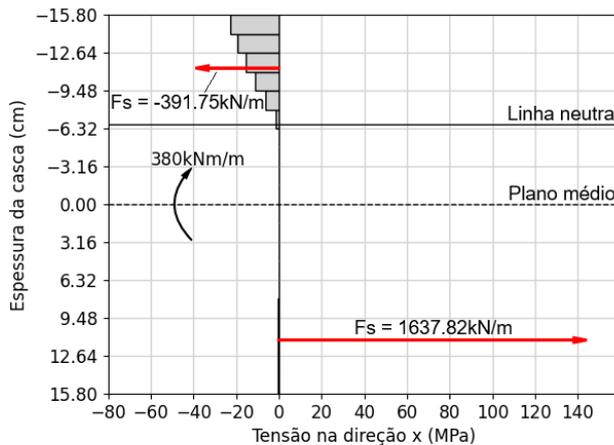
(a) Detalhes da casca SM1



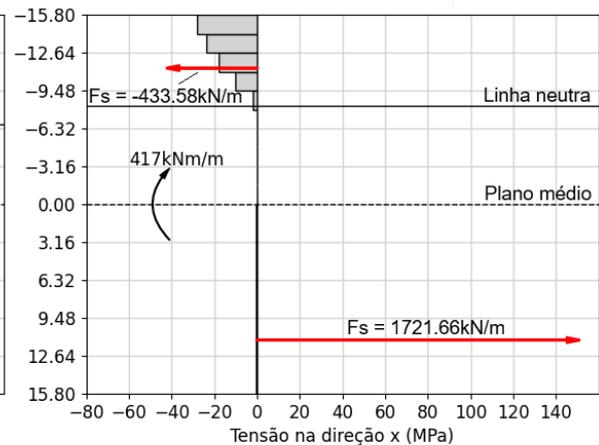
(b) Curva momento-curvatura da casca SM1



(c) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto A da casca SM1)



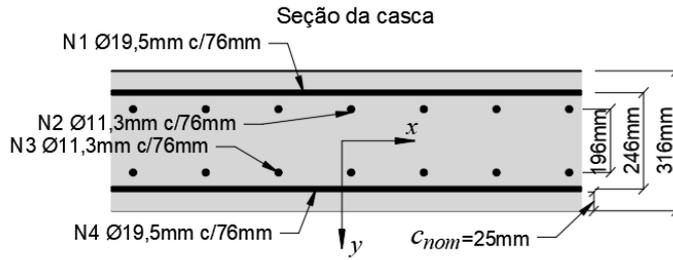
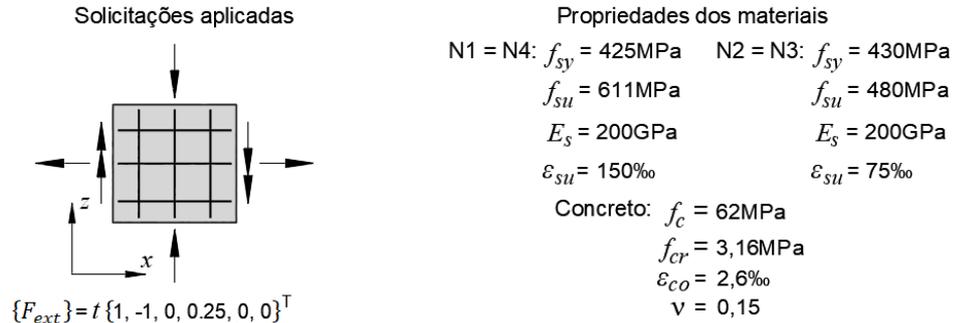
(d) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto B da casca SM1)



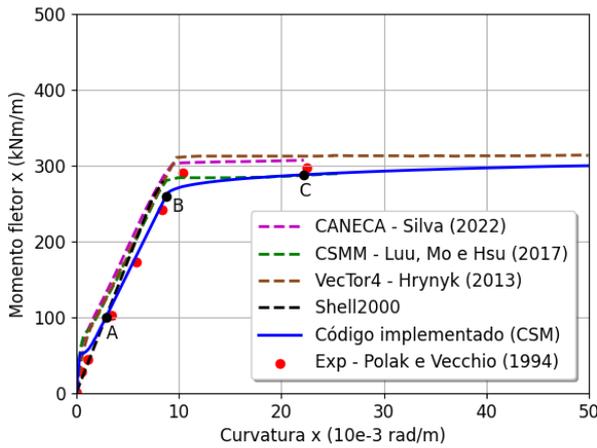
(e) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto C da casca SM1)

Fonte: A autora (2024).

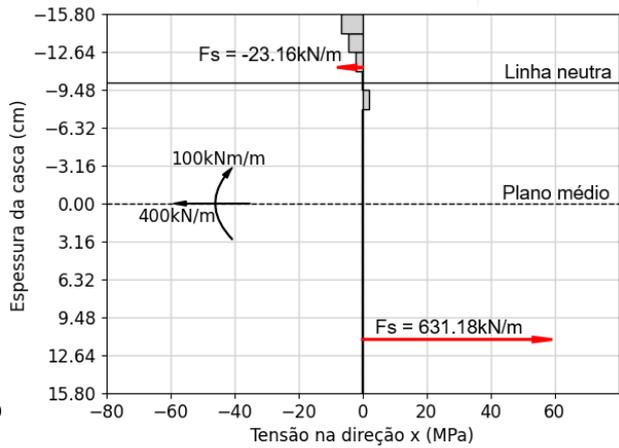
Figura 47 – Resultados da análise da casca SM2



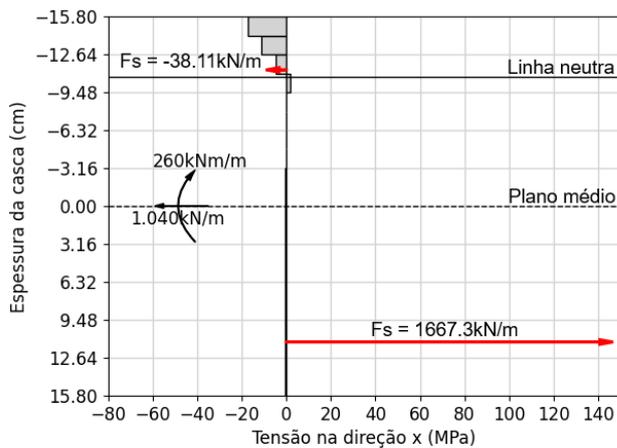
(a) Detalhes da casca SM2



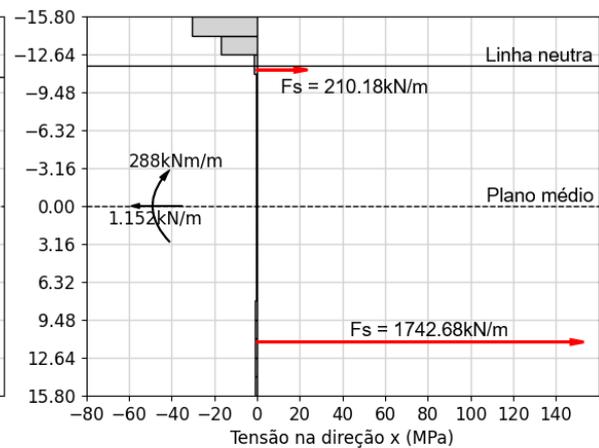
(b) Curva momento-curvatura da casca SM2



(c) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto A da casca SM2)



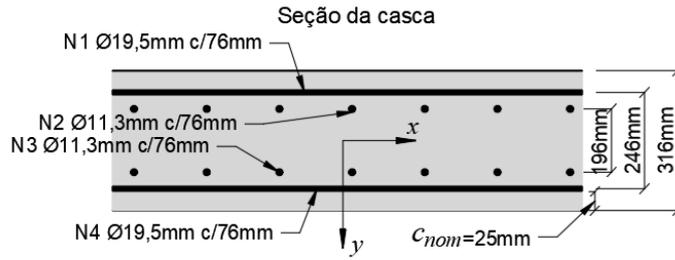
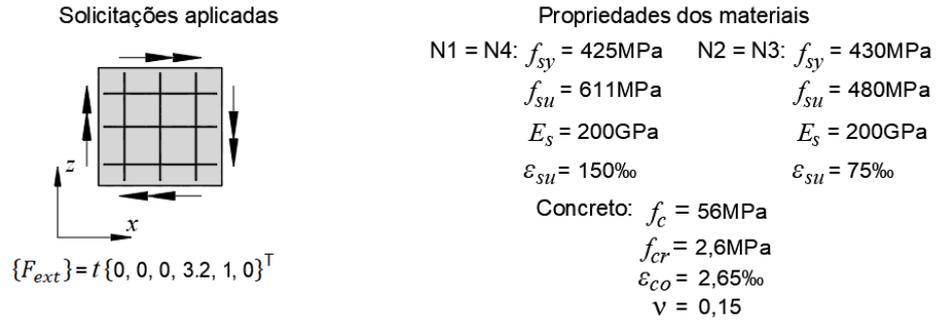
(d) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto B da casca SM2)



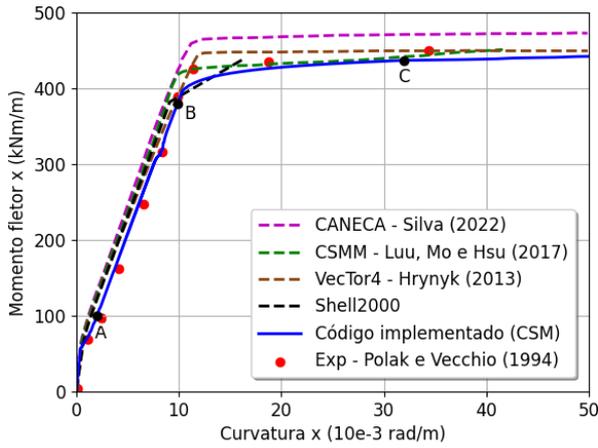
(e) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto C da casca SM2)

Fonte: A autora (2024).

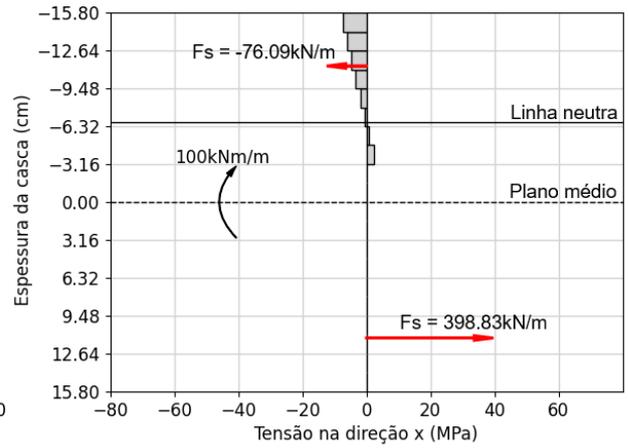
Figura 48 – Resultados da análise da casca SM3



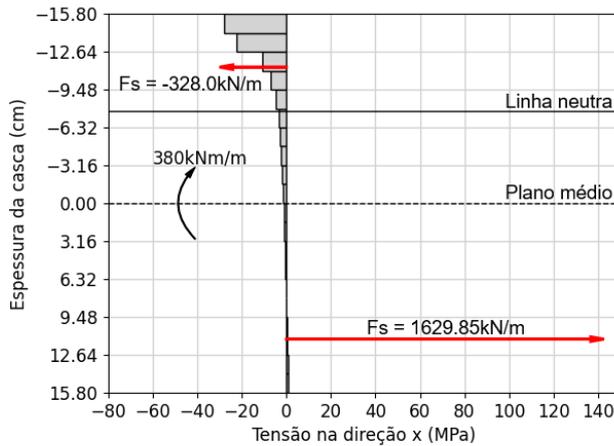
(a) Detalhes da casca SM3



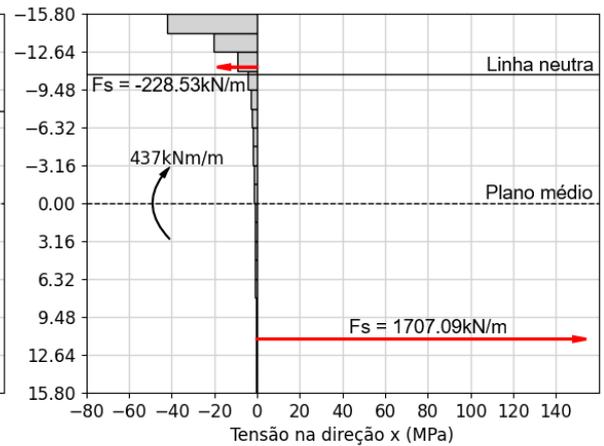
(b) Curva momento-curvatura da casca SM3



(c) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto A da casca SM3)



(d) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto B da casca SM3)



(e) Diagrama de tensões no concreto e forças no aço (ponto C da casca SM3)

Fonte: A autora (2024).

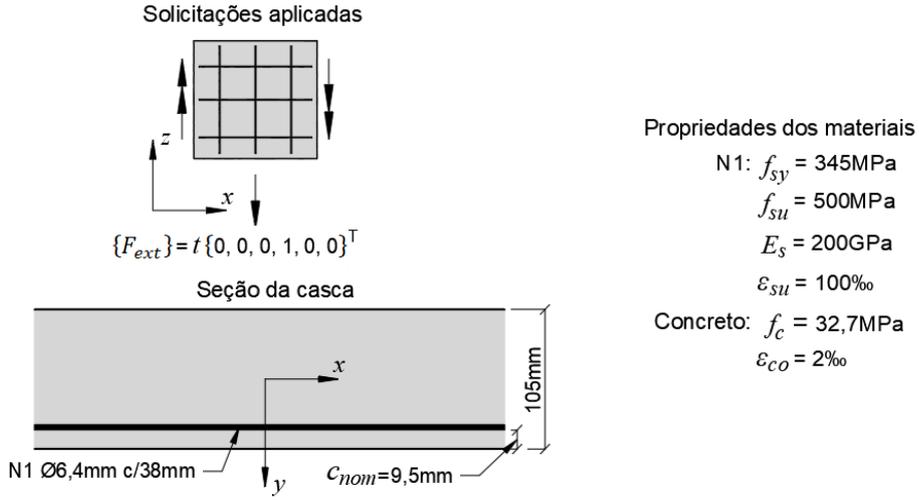
### 3.3.2.2 Cascas de Lenschow

Dos ensaios realizados por Lenschow e Sozen (1966) foram analisados nesse trabalho os experimentos B4, B5 e B6. As dimensões dos painéis são de 1067×1524×105mm. Os dados geométricos, propriedades dos materiais e solicitações aplicadas, bem como, os resultados são mostrados nas Figuras 49, 50 e 51. Ressalta que devido a não indicação do coeficiente de Poisson, este foi adotado como zero, conforme Pimentel (2011), enquanto que as demais informações omissas foram calculadas segundo a revisão da literatura. Como critério de convergência para o procedimento de solução foi admitido uma tolerância de  $10^{-2}$ . O painel foi discretizado em 100 lamelas de concreto conforme indicado por Spathelf (2017). Para a estimativa inicial considerou a resposta do primeiro vetor de forças ( $t = 1$ ) analisado através da teoria de Kirchhoff. O tempo médio de processamento das análises foi de 10 segundos. Levando em conta a quantidade de lamelas adotada é um tempo relativamente baixo, demonstrando a eficiência da rotina proposta.

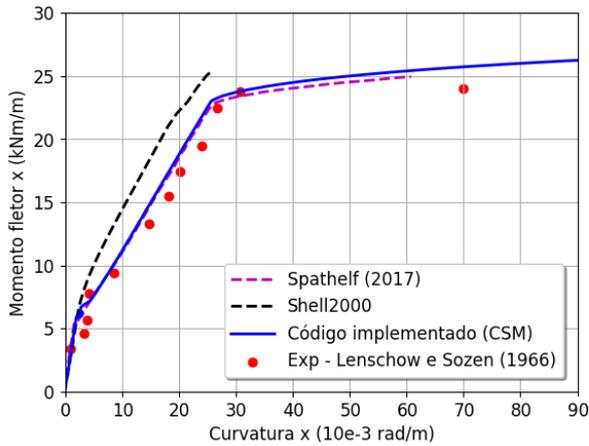
A casca B4 (Figura 49), dispõe de armadura apenas na região inferior e na direção  $x$  do painel, de modo que está submetido somente a momento uniaxial, caso semelhante a uma viga chata sob flexão. É avaliado o comportamento  $M_x - \kappa_x$ ,  $M_x - \varepsilon_{smx}$  e  $M_x - \varepsilon_{c3}$ . A deformação principal mínima  $\varepsilon_{c3}$  nesse caso é o da fibra superior da estrutura, que no modelo CSM corresponde a deformação da lamela superior.

De acordo com a análise, verifica-se uma ruptura por esmagamento do concreto. Observa-se também boa correlação entre os resultados do código implementado com o experimento. As deformações na armadura possuem boa correspondência, sem variação expressiva. Ao comparar com a ferramenta desenvolvida por Spathelf (2017) observa-se que as curvas convergem, principalmente no trecho não escoado. Por outro lado, quando comparado com o *software* Shell2000, este apresenta um comportamento significativamente mais rígido que os demais, sem um trecho de escoamento definido (ruptura frágil).

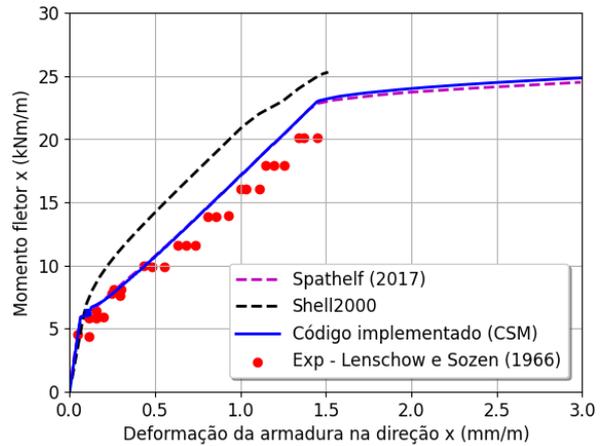
Figura 49 – Resultados da análise da casca B4



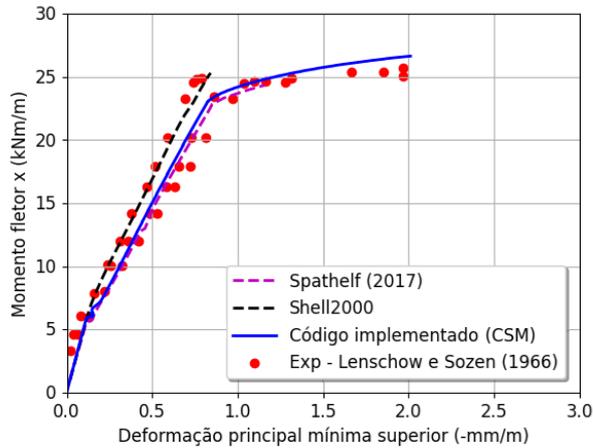
(a) Detalhes da casca B4



(b) Curva momento-curvatura da casca B4



(c) Curva momento-deformação da armadura na direção x da casca B4



(d) Curva momento-deformação principal mínima superior da casca B4

Fonte: A autora (2024).

Por sua vez, a casca B5 (Figura 50), possui armadura ortogonal na região inferior e está sujeito a um estado de flexão biaxial (flexão nas duas direções) e torção. São mostrados os comportamentos  $M_x - \kappa_p$ ,  $M_x - \varepsilon_{smx}$ ,  $M_x - \varepsilon_{smz}$ ,  $M_x - \varepsilon_{c3}$  e  $M_x - \varepsilon_{c1}$ . O termo  $\kappa_p$  é a curvatura de flexão referente ao momento principal, que segundo a equação Eq. (96) possuem uma direção de  $45^\circ$  em relação ao sistema de eixos  $x - z$ . As deformações principais do concreto mostradas são aqueles correspondentes a lamela superior da casca.

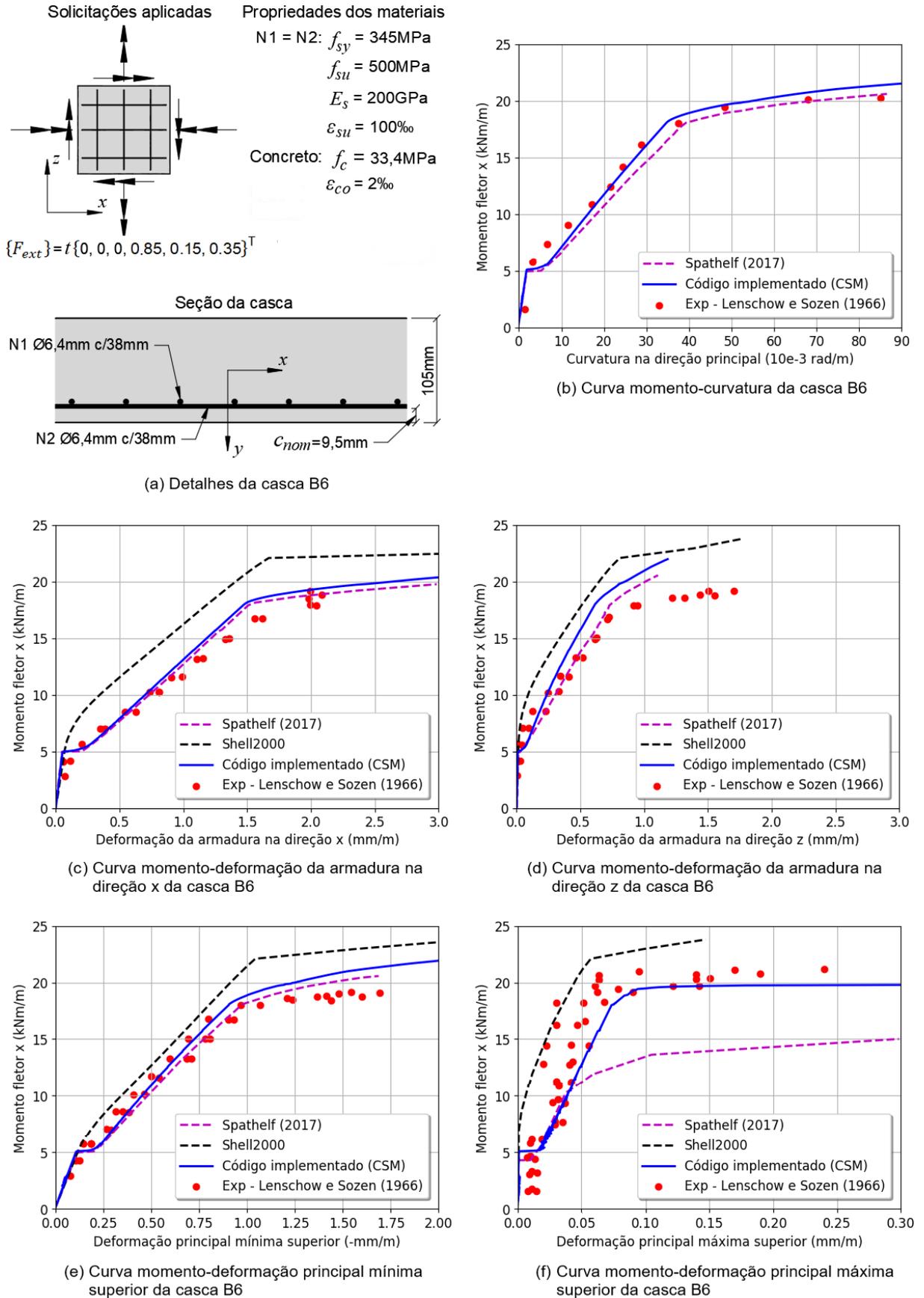
Conforme as respostas verifica-se uma conformidade da previsão do CSM com todos os resultados experimentais, ressaltando a boa correlação das curvas referentes as deformações da armadura. Comparado as soluções numéricas, o CSM demonstra resultados bastante satisfatórios, sobretudo na curva de deformação principal máxima  $\varepsilon_{c1}$ , onde mesmo apresentando instabilidade numérica na transição para o estado fissurado conseguiu capturar o comportamento do concreto melhor do que as demais análises numéricas mostradas.

Por fim, a casca B6 mostrada na Figura 51 também dispõe de armadura ortogonal na região inferior e está sujeita a um estado de flexão biaxial com torção. Igualmente a B5 também são analisados os comportamentos  $M_x - \kappa_p$ ,  $M_x - \varepsilon_{smx}$ ,  $M_x - \varepsilon_{smz}$ ,  $M_x - \varepsilon_{c3}$  e  $M_x - \varepsilon_{c1}$ . A curvatura principal de flexão  $\kappa_p$  nesse caso está a uma direção igual a  $22,5^\circ$  conforme Eq. (96).

Novamente, constata-se boa convergência com os dados experimentais, sendo a maior discrepância observada na deformação da armadura na direção  $z$  Figura 51(d), mostrando-se o CSM um pouco mais rígido. Por outro lado, a rotina proposta demonstrou melhor previsão da deformação principal máxima superior Figura 51(f), frente as demais soluções numéricas.



Figura 51 – Resultados da análise da casca B6



Fonte: A autora (2024).

### 3.3.2.3 Cascas de Leesti

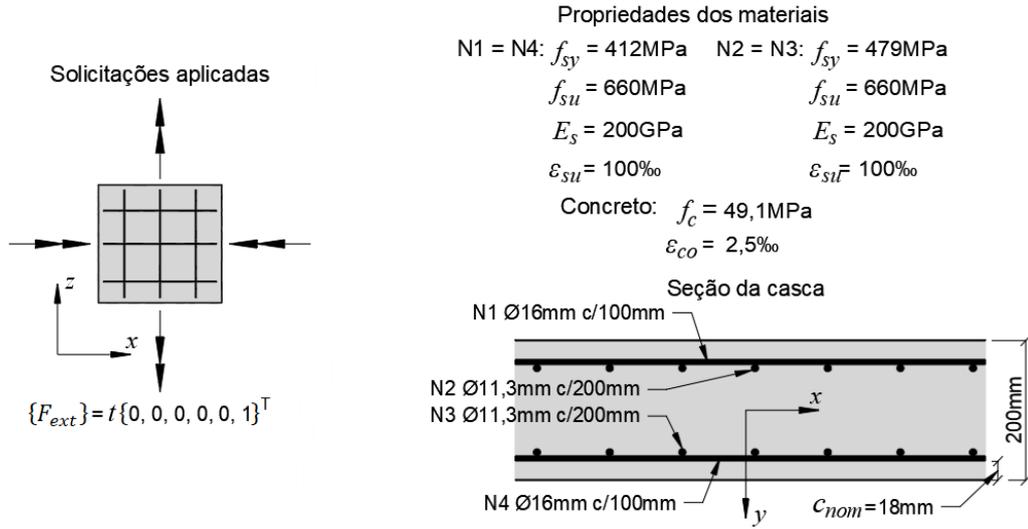
Marti, Leesti e Khalifa (1966) realizaram nove ensaios em painéis de concreto armado ortogonalmente submetidos unicamente a momentos de torção (torção pura). Foram estudados os painéis ML8 e ML9 que possuem as dimensões de 1700×1700×200 mm. Os detalhes geométricos, carga solicitada e propriedades dos materiais de cada painel são mostrados nas Figuras 52(a) e 53(a). Devido a não indicação do coeficiente de Poisson, este foi adotado como zero, enquanto que as demais informações omissas foram calculadas segundo a revisão da literatura. Para o procedimento de solução foi imposta uma tolerância de  $10^{-2}$  para o critério de convergência. A espessura dos painéis foi discretizada em 100 lamelas de concreto.

Para a estimativa inicial foi considerada a resposta resultante da teoria de Kirchhoff. As análises para o estado de torção pura foram mais demoradas, com um tempo médio de processamento de 15 segundos. Esse valor é praticamente o dobro do tempo que foi observado nos casos mostrados anteriormente. Porém, problemas de torção pura geralmente são mais complexos de se analisar, além disso, verificou-se que a estimativa inicial admitida não se mostrou adequada, pois para os primeiros pontos da curva o código apresentou maior dificuldade para convergência da solução. Como esse problema não é o foco desse estudo prosseguiu a análise com a mesma estimativa.

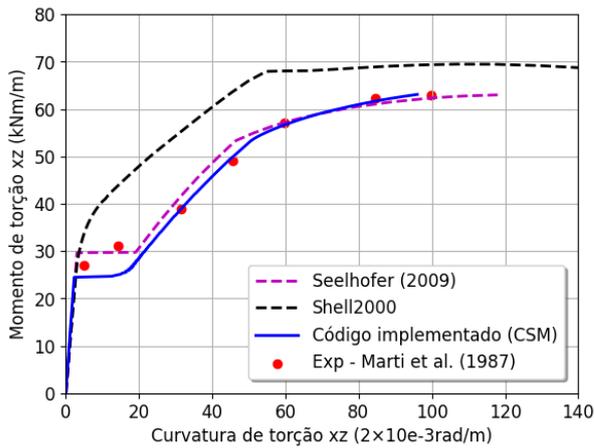
Os resultados das análises são mostrados nas Figuras 52 e 53. Foram avaliados o comportamento  $M_{xz} - \kappa_{xz}$ ,  $M_{xz} - \varepsilon_{mx}$ , e  $M_{xz} - \varepsilon_{mz}$ . Constata-se, em todos os casos, boa correlação entre a solução do CSM e os dados experimentais, principalmente nas curvas que representam a curvatura de torção (Figura 52(b) e Figura 53(b)) e deformação no plano médio em  $z$ , Figura 52(d). Inclusive as cascas rompem por compressão do concreto para momentos torsores bastante próximos. Desses resultados fica demonstrado que a rotina proposta é capaz de avaliar de modo satisfatório cascas sujeitas a torção pura.

Comparando com a solução do Seelhofer (2009), ambos apresentam previsões próximas, em especial o ML9. Já a previsão do Shell2000 se mostrou mais rígida no primeiro gráfico de todos os painéis. Nos demais gráficos não consta a resposta do Shell2000 pois não são disponibilizados para visualização.

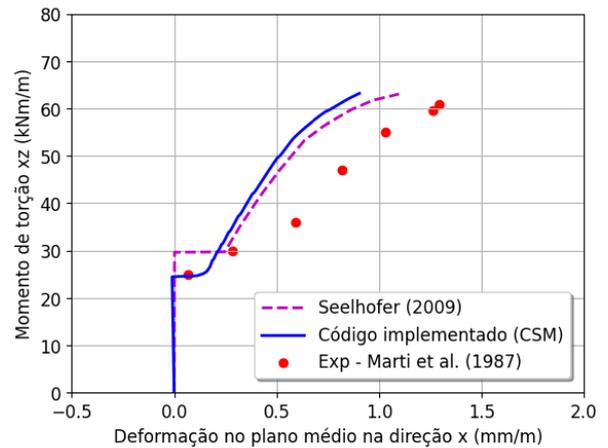
Figura 52 – Resultados da análise da casca ML8



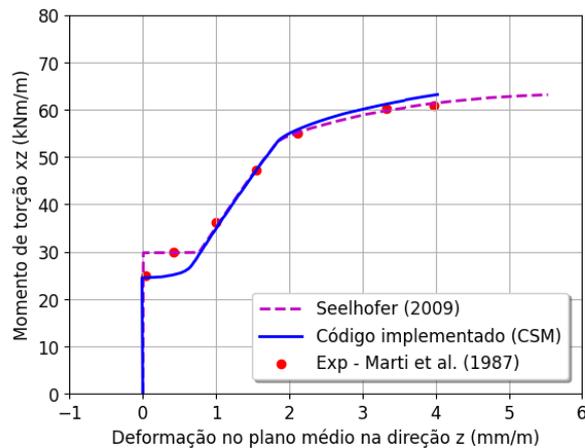
(a) Detalhes da casca ML8



(b) Curva momento-curvatura da casca ML8



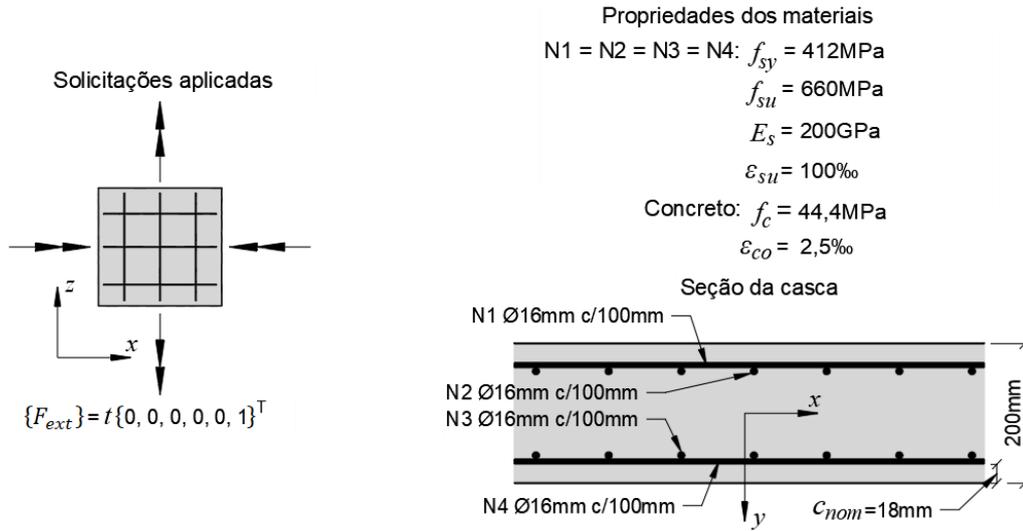
(c) Curva momento-deformação no plano médio na direção x da casca ML8



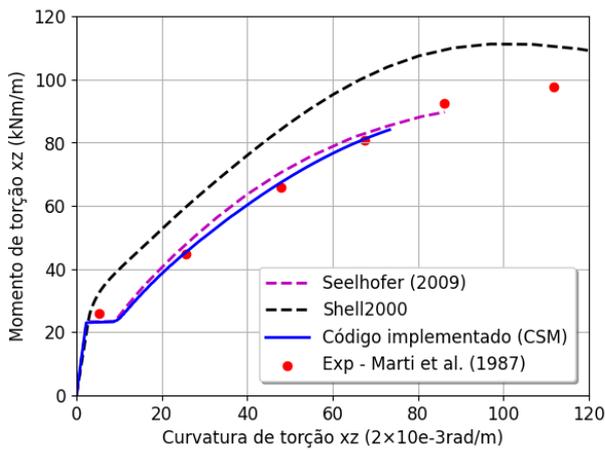
(d) Curva momento-deformação no plano médio na direção z da casca ML8

Fonte: A autora (2024).

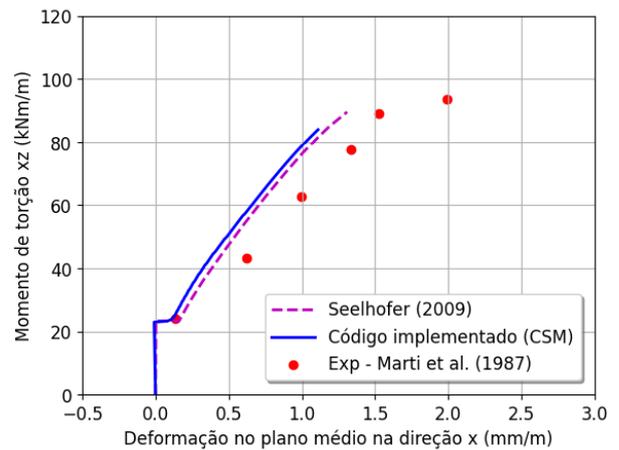
Figura 53 – Resultados da análise da casca ML9



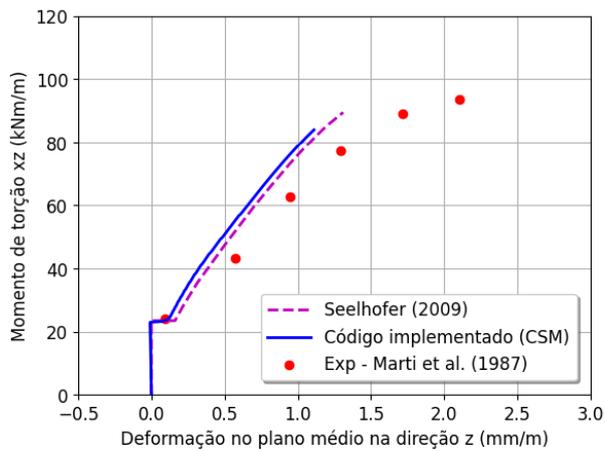
(a) Detalhes da casca ML9



(b) Curva momento-curvatura da casca ML9



(c) Curva momento-deformação no plano médio na direção x da casca ML9



(d) Curva momento-deformação no plano médio na direção z da casca ML9

Fonte: A autora (2024).

### 3.3.2.4 Resumo estatístico dos resultados

A Tabela 4 apresenta o resumo dos momentos de fissuração e último correspondentes ao experimento ( $M_r^{exp}$  e  $M_u^{exp}$ ) e ao CSM ( $M_r^{CSM}$  e  $M_u^{CSM}$ ). Para os painéis das séries SM e B este momento é  $M_x$ . Enquanto para a série ML é  $M_{xz}$ . De acordo com a tabela, a relação entre o momento de fissuração do CSM e do experimento ( $M_r^{CSM}/M_r^{exp}$ ) apresenta uma média de 0,93, o que demonstra que os momentos segundo o CSM foram subestimados. O desvio padrão indica um grau de dispersão dos valores de cerca de 15%. Existe a possibilidade de que a verificação da fissuração do concreto durante a realização do experimento não corresponda a primeira fissura, isto é, fissuras já teriam sido formadas sem que tenham sido contabilizadas. Ao avaliar a relação entre os momentos últimos ( $M_u^{CSM}/M_u^{exp}$ ), verifica-se que o CSM consegue prevê bem esse momento, visto que a média foi de 1,03, com baixo grau de dispersão (9%). Conforme essa relação, a maior diferença observada, na qual a previsão do CSM é superestimada, foi de 19%, correspondente ao painel B5. Fatores como a retração do concreto ou até mesmo a resistência à compressão do concreto desenvolvida durante a realização do experimento pode ter contribuído para um menor momento fletor último do experimento. Por outro lado, a maior diferença verificada, na qual a previsão do CSM é subestimada, foi de 14%, correspondente ao painel ML9. Os problemas associados a torção pura, como o painel ML9, geralmente são mais complexos de se analisar, sendo necessário uma análise tridimensional do problema, considerando a existência de outros deslocamentos além dos característicos da teoria de placas finas.

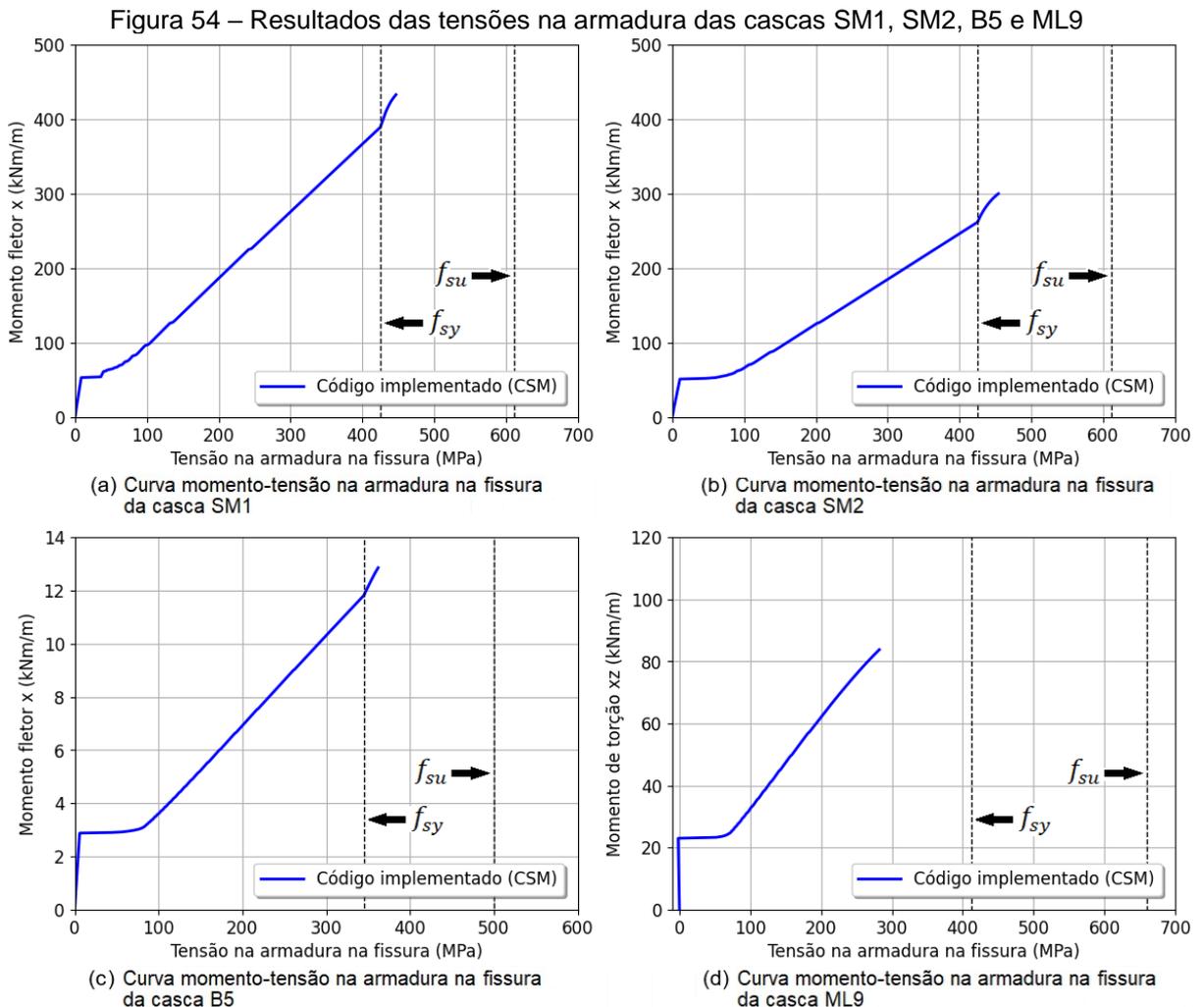
Tabela 4 – Resumo estatístico dos resultados

Painel	$M_r^{exp}$ kNm/m	$M_u^{exp}$ kNm/m	$M_r^{CSM}$ kNm/m	$M_u^{CSM}$ kNm/m	$M_r^{CSM}/M_r^{exp}$	$M_u^{CSM}/M_u^{exp}$
SM1	75	442,27	54	434	0,72	0,98
SM2	45	297,87	52	309	1,16	1,04
SM3	62	450,25	58	443	0,94	0,98
B4	7,74	24,01	5,91	26,65	0,76	1,11
B5	2,43	10,80	2,86	12,89	1,18	1,19
B6	5,81	20,26	5	21,90	0,86	1,08
ML8	27,07	63,03	24,39	63	0,90	1,00
ML9	25,77	97,68	22,97	83,76	0,89	0,86
			<b>Média aritmética</b>		<b>0,93</b>	<b>1,03</b>
			<b>Desvio padrão</b>		<b>0,15</b>	<b>0,09</b>

Fonte: A autora (2024).

### 3.3.2.5 Análise momento–tensão na armadura na fissura

Uma limitação encontrada nesse trabalho foi a ausência de dados experimentais da tensão na armadura na fissura em estruturas de casca para validação do código implementado quanto a esse comportamento. Existe uma grande dificuldade para medição da tensão na armadura, inclusive em regiões de fissuras, necessitando de técnicas sofisticadas. Nenhuma das cascas analisadas anteriormente apresenta resultados do comportamento da armadura (médio ou local). Diante disso e tendo em vista que o foco desse estudo é a avaliação das tensões na armadura em serviço, essa seção tem a finalidade de mostrar a previsão do comportamento da armadura via CSM de algumas cascas que foram apresentadas acima. A Figura 54 ilustra a curva momento–tensão na armadura na fissura das barras da malha inferior que estão dispostas na direção  $x$ .



Fonte: A autora (2024).

Conforme indicação dos pontos de escoamento e ruptura do material, em nenhum dos casos ilustrados a estrutura falha por ruptura da barra na direção  $x$ , entretanto, verifica-se o escoamento da mesma nas cascas SM1, SM2 e B5. Nessas cascas em particular, observa-se na Figura 54 que a previsão após a fissuração do concreto indica um comportamento aproximadamente linear da tensão na armadura, em relação à solicitação, até o ponto de escoamento desse material. As tensões depois desse ponto continuam a aumentar, porém a uma proporção menor em relação ao aumento do momento fletor. Isso se deve ao módulo de endurecimento do aço ser inferior ao módulo de elasticidade, o que contribui para a diminuição da rigidez global da estrutura. Esse fato pode ser visualizado a partir das Figuras 46(a), 47(a) e 50(a), onde a curvatura aumenta consideravelmente para um pequeno aumento de esforço de flexão. A tensão principal de compressão na superfície superior da casca atinge a capacidade máxima do concreto resultando na falha da estrutura por esmagamento do concreto.

## 4 ESTUDO DE CASO: EFEITO DE MEMBRANA COMPRIMIDA

### 4.1 INTRODUÇÃO

Esta seção destina-se a apresentar uma aplicação da rotina computacional do CSM em um problema específico da engenharia. O problema estudado parte de investigações desenvolvidas a respeito do efeito de membrana comprimida (*Compressive Membrane Action* – CMA) em lajes de concreto armado de pontes. Esse efeito resulta da fissuração do concreto e restrição translacional da laje, em seu plano, e tem como consequência o aumento da capacidade resistente da mesma.

Nesse estudo pretende-se determinar, a partir do modelo CSM, a carga de ruptura de um corpo de prova que simula uma laje de concreto armado de ponte. O resultado numérico é comparado com o obtido no ensaio experimental. Com base na resposta, é verificada a capacidade do modelo CSM de capturar o efeito do CMA.

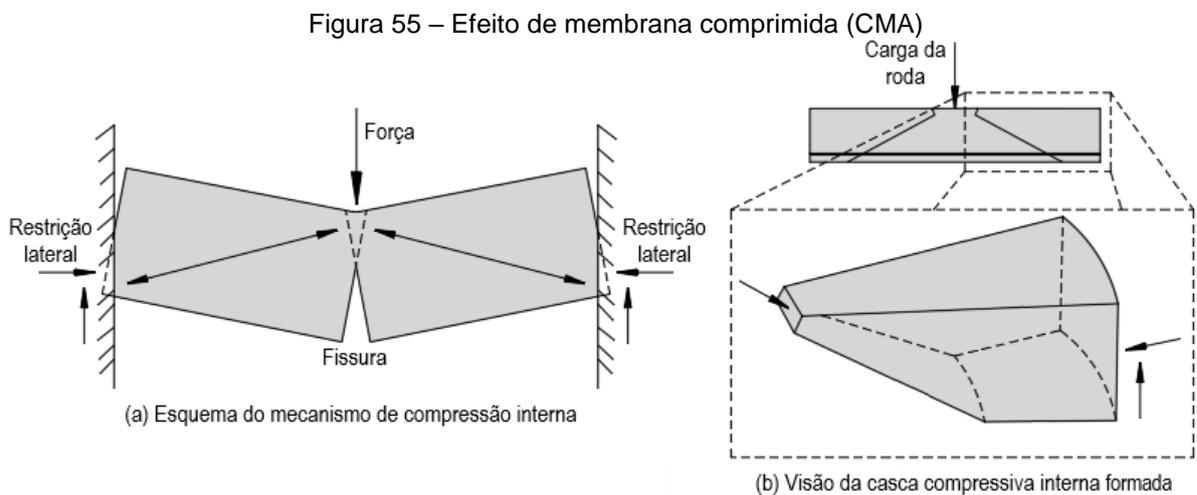
### 4.2 EFEITO DE MEMBRANA COMPRIMIDA

As primeiras evidências do efeito de membrana comprimida ou arqueamento interno em lajes de concreto armado foram publicadas em 1955, quando Ockleston (1955) apud Hon et al. (2005), a partir de uma série de testes em lajes de um edifício, verificou-se que a capacidade resistente das mesmas foi muito superior ao esperado.

Anos mais tarde, na década de setenta, na Província de Ontário no Canadá, foram conduzidos estudos a fim de investigar o motivo de lajes de concreto armado de pontes reais não apresentarem problemas estruturais, mesmo tendo a espessura da seção transversal de concreto reduzida e as armaduras de flexão comprometidas, em virtude das reações químicas originadas tanto do sal, que era lançado sobre a estrutura para o degelo da neve, como da maresia do mar. Brotchie e Holley (1971) apud Csagoly e Lybas (1989) observaram que, além da capacidade resistente à flexão das lajes, existe um mecanismo adicional pelo qual as lajes suportam às cargas concentradas dos pneus dos veículos, constituído por um estado de membrana comprimida no interior da estrutura, que é capaz de suportar uma parcela considerável da carga.

Conforme Rankin et al. (1998) o efeito CMA resulta da fissuração do concreto no local de maior momento positivo causando uma migração ascendente da linha

neutra que é acompanhado por uma expansão do plano da laje nos seus bordos. Os deslocamentos oriundos dessa expansão tendem a serem contidos por alguma restrição (por exemplo, vigas de bordo, lajes adjacentes ou concreto circundante), ao fazer isso são geradas forças de compressão no plano que, por fim, levam ao aumento da resistência da laje. De acordo com a AASHTO (2014) e Csagoly e Lybas (1989) o CMA cria o que pode ser melhor descrito como uma casca comprimida internamente que se desenvolve em ambas as direções da laje. A Figura 55 ilustra com detalhes o que é discutido. A partir das figuras, verifica-se que o CMA se desenvolve desde a superfície inferior do apoio para a superfície superior a meio vão, provocando o aumento da resistência da laje.



Fonte: Adaptado de Rankin et al. (1998, p. 462) e Csagoly e Lybas (1989, p. 56).

Na literatura nacional ainda é escasso os estudos que abordam tal tema e, por essa razão, dificilmente há de se observar o CMA introduzido nas práticas de projeto. O CMA diminui consideravelmente as tensões na armadura. Isso possibilita o projeto de peças com menores taxas de armadura, o que é favorável economicamente, principalmente, em obras com alto custo envolvido, como as lajes de tabuleiros de pontes. Como essas lajes estão sujeitas a flutuações de tensões muito grandes, e por isso, o fenômeno da fadiga nas armaduras é presente, o entendimento do CMA é essencial para proporcionar um projeto econômico e adequado quanto a segurança.

Além dos estudos que levaram a comprovação do CMA em lajes de tabuleiros de pontes, foram também conduzidos ensaios para verificar a influência do CMA na vida à fadiga das respectivas lajes, Brotchie e Holley (1971) apud Csagoly e Lybas (1989). Conforme os resultados, a relação entre a capacidade resistente com carga

cíclica e o respectivo valor com carga estática (limite de fadiga) para as lajes com armadura ortotrópica (corresponde ao projeto convencional) foi de 50%, e para as lajes com armadura isotrópica 40%. Como esses valores foram significativamente maiores que os definidos pela norma de infraestrutura americana (American Association of State Highway and Transportation Officials - AASHTO) vigente na época, concluiu-se que o CMA mitiga consideravelmente o problema de fadiga em lajes de concreto armado, CSAGOLY e LYBAS (1989).

Com a descoberta do CMA, a norma de projetos de pontes de Ontário e dos Estados Unidos foi revisada com o intuito de aproveitar os benefícios estruturais proporcionados por este efeito. Uma importante recomendação presente na AASHTO (2014) estabelece que o Estado Limite de Fadiga não precisa ser verificado em lajes de concreto armado de pontes de múltiplas vigas, desde que o espaçamento das vigas não seja maior que 4,1 m. É necessário apenas uma armadura mínima tendo em vista que o CMA (denominado nessa norma de *Internal Arching Action*) não consegue resistir à carga total do pneu, e por isso uma pequena componente de flexão é resistido pela armadura AASHTO (2014).

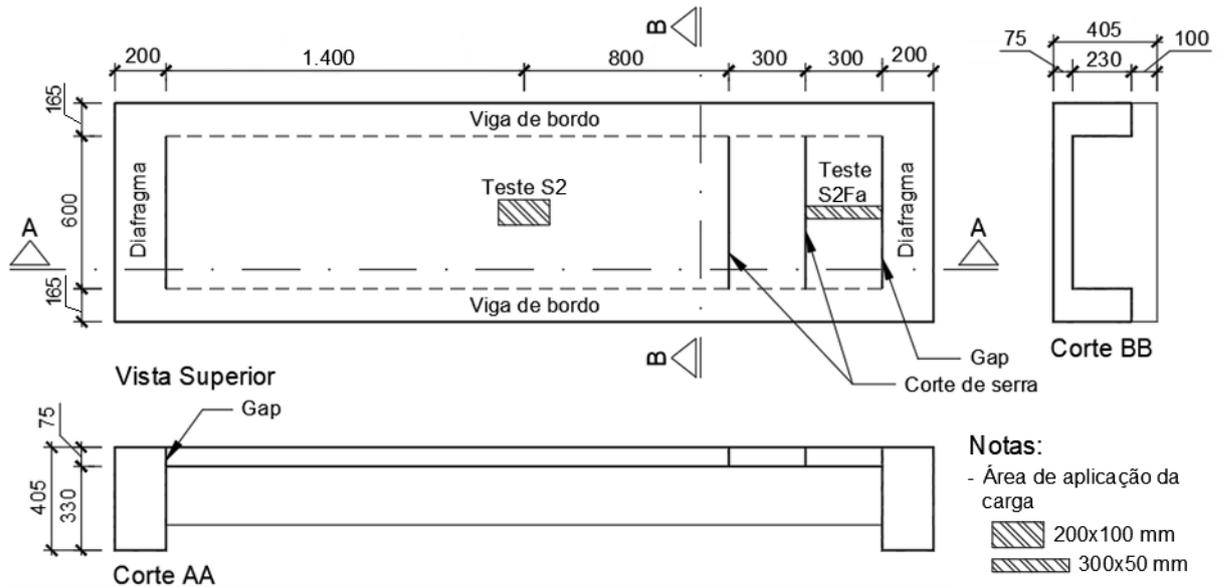
### 4.3 ESTRUTURA INVESTIGADA

Para esse estudo foi utilizado o corpo de prova S2 testado por Hon et al. (2005). O corpo de prova, mostrado nas Figuras 56 e 57, foi construído de modo a simular uma laje de concreto armado de ponte apoiada sobre vigas. A laje inicialmente é construída como uma única peça, e posteriormente dividida em três, isso porque são feitos cortes de serra (*saw cuts*) em dois pontos como indicado nas figuras. As lajes também não possuem conexão com os diafragmas. As características do concreto e do aço são indicadas na Figura 58 onde é detalhada a seção transversal da laje. As propriedades dos materiais não informadas pelo autor foram admitidas segundo recomendações da ABNT NBR 6118 (2023), dentre elas: coeficiente de Poisson do concreto, módulo de elasticidade e deformação última do aço. A tensão última  $f_{su}$  adotada foi igual ao valor inteiro imediatamente superior a tensão de escoamento, ver Figura 58.

O corpo de prova foi submetido a testes de carga em quatro pontos diferentes, dos quais o S2 e S2Fa são considerados nesse estudo, ver Figura 56. O primeiro teste executado foi o S2, sendo aplicada no meio do vão uma carga monotônica numa área

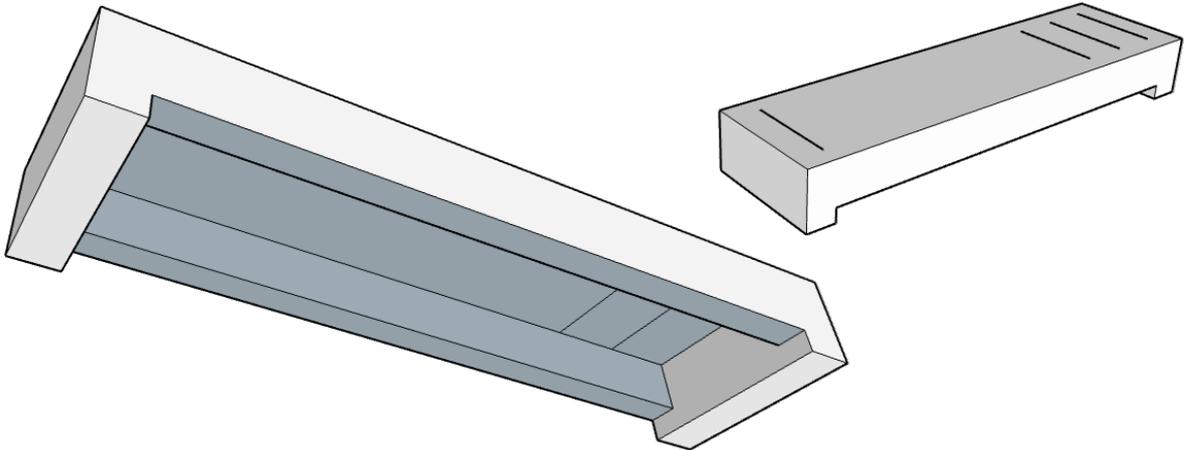
de 200×100 mm, simulando o pneu de um veículo. No teste S2Fa, a carga uniforme foi aplicada numa área de 300×50 mm, provocando uma significativa flexão ao longo do maior vão da laje. Para a realização dos testes, o corpo de prova foi apoiado nos quatros cantos.

Figura 56 – Detalhes do corpo de prova S2



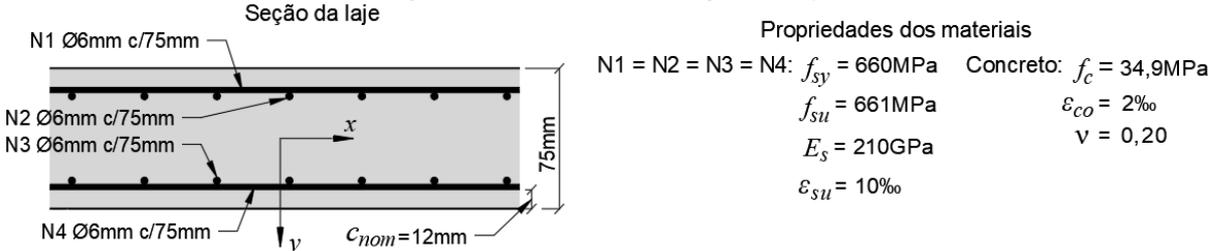
Fonte: Adaptado de Hon et al. (2005, p. 3).

Figura 57 – Corpo de prova S2 em perspectiva



Fonte: A autora (2024).

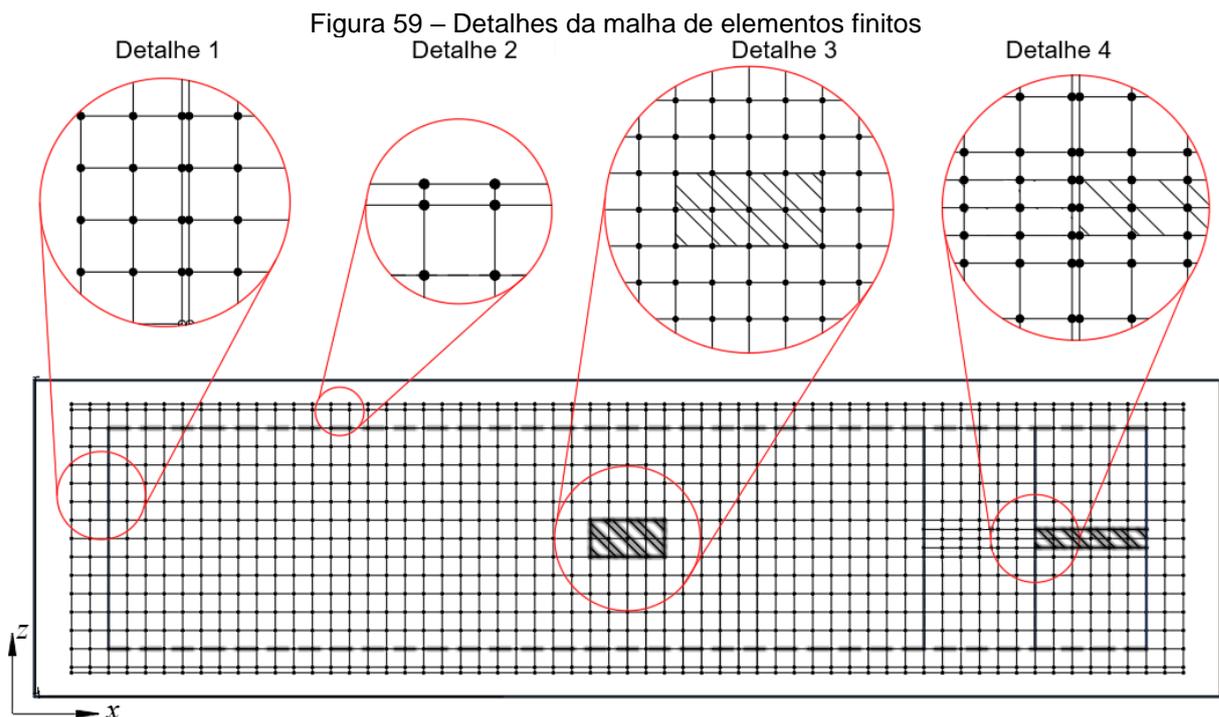
Figura 58 – Detalhes da seção da laje



Fonte: A autora (2024).

#### 4.4 OBTENÇÃO DA CARGA DE RUPTURA A PARTIR DO CSM

O corpo de prova inicialmente foi analisado no *software* de análise estrutural SAP2000. A intenção era determinar os esforços internos de placa via SAP2000 ( $M_x^{SAP}$ ,  $M_z^{SAP}$  e  $M_{xz}^{SAP}$ ) de acordo com o carregamento solicitante, através de uma análise linear elástica via elementos finitos. As razões entre esses esforços ( $M_z^{SAP}/M_x^{SAP}$  e  $M_{xz}^{SAP}/M_x^{SAP}$ ) foram utilizados na análise com o CSM. No SAP2000, o corpo de prova foi modelado utilizando elementos de barra (*frame*) para representar as vigas de bordo e diafragma e elementos de cascas-finas (*shell-thin*) para representar as lajes. A malha de elementos finitos da laje é mostrada na Figura 59, sendo composta por 864 elementos com tamanhos de 50×50 mm, 50×32,5 mm e 50×25 mm.

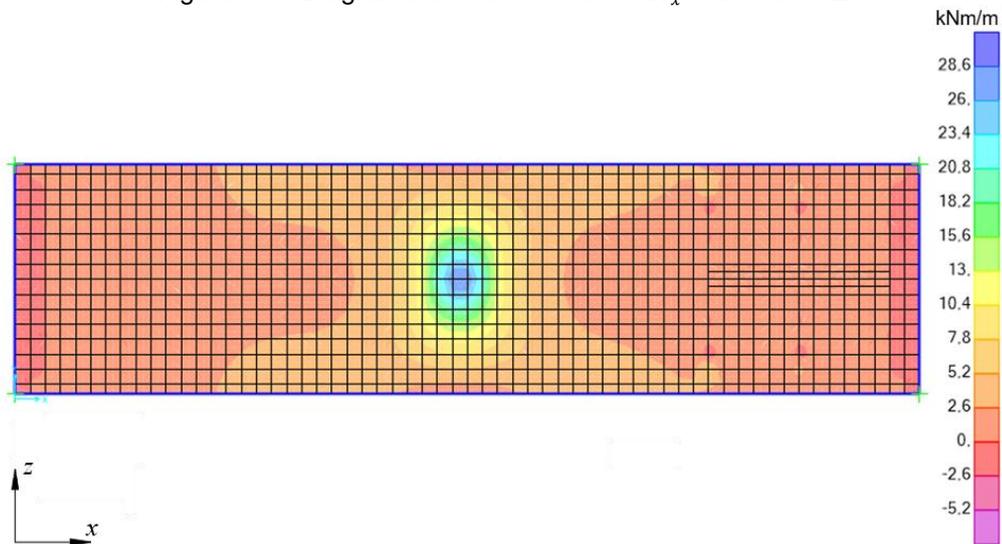


Foram impostas restrições translacionais nos quatro cantos. Para simular o corte de serra (*saw cut*) e o Gap (Figura 56), os nós de elementos vizinhos nesses locais foram desconectados, causando uma descontinuidade na malha. Os detalhes 1 e 4 da Figura 59 exemplifica essa desconexão, porém, na realidade, os nós possuem as mesmas coordenadas.

Como a razão entre os esforços internos ( $M_z^{SAP}/M_x^{SAP}$  e  $M_{xz}^{SAP}/M_x^{SAP}$ ) em uma análise linear é indiferente a carga aplicada, optou por considerar o valor arbitrário para o carregamento aplicado  $q_{SAP}$  igual a 10000 kN/m<sup>2</sup> para a análise.

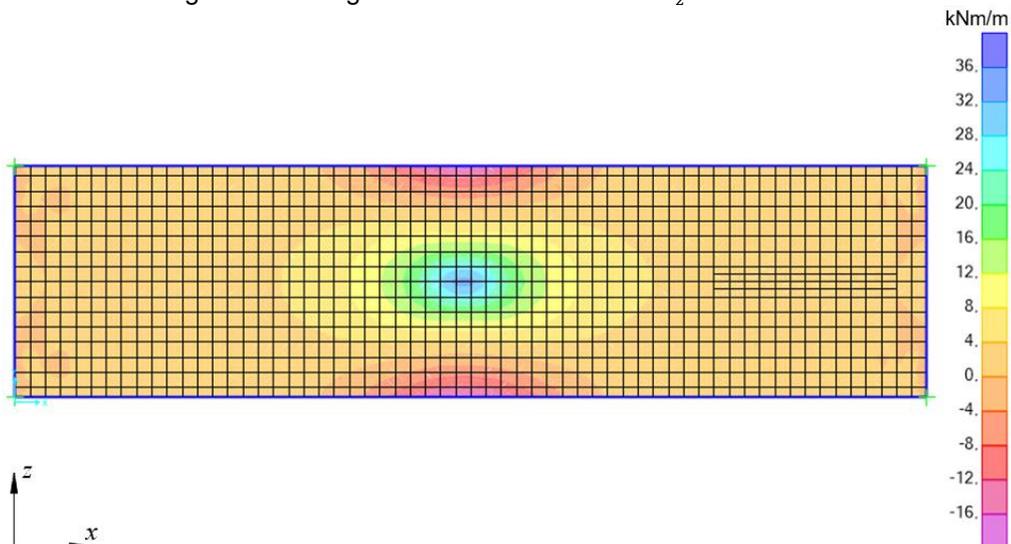
Foram coletados os maiores esforços, os quais evidentemente ocorreram no ponto central de aplicação da carga. Dado a natureza da análise e modelagem da laje, a mesma se comportou como uma placa, conseqüentemente, os esforços de membrana foram nulos. As Figuras 60 a 63 ilustram os diagramas de momentos fletores de cada análise (S2 e S2Fa). Os momentos torsores foram aproximadamente zero ( $M_{xz}^{SAP}/M_x^{SAP} \approx 0$ ), resultando apenas em momentos fletores nas direções  $x$  e  $z$ .

Figura 60 – Diagrama de momento fletor  $M_x^{SAP}$  do teste S2

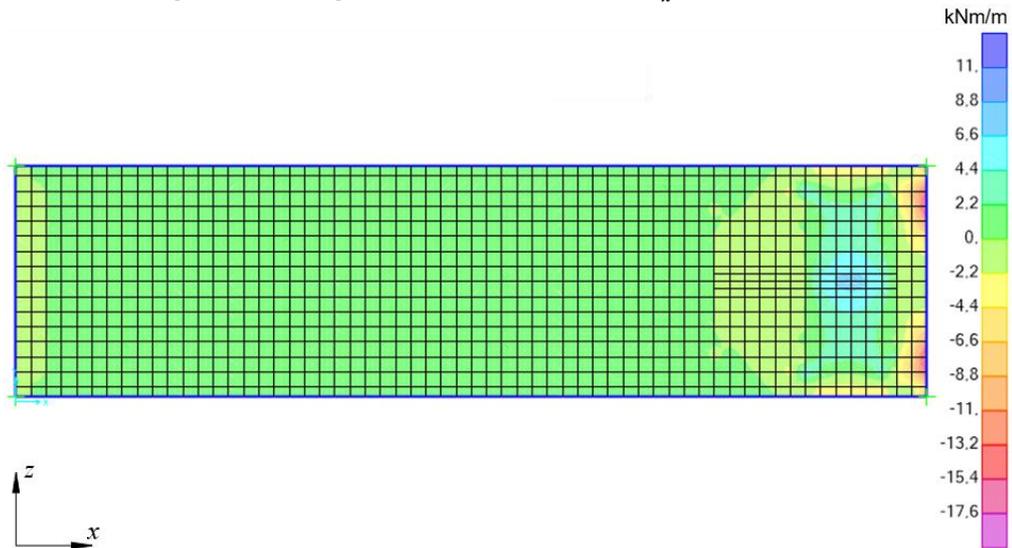


Fonte: A autora (2024).

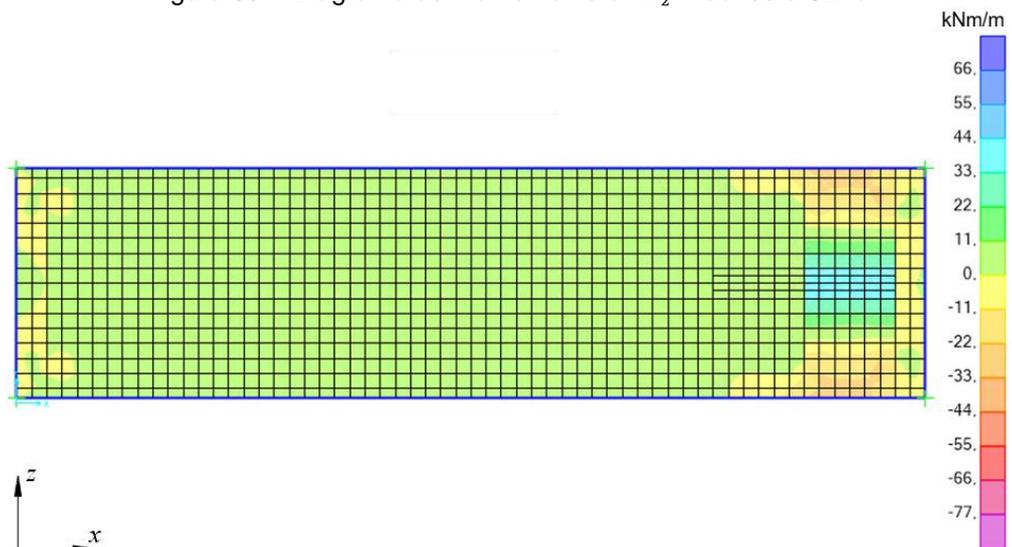
Figura 61 – Diagrama de momento fletor  $M_z^{SAP}$  do teste S2



Fonte: A autora (2024).

Figura 62 – Diagrama de momento fletor  $M_x^{SAP}$  do teste S2Fa

Fonte: A autora (2024).

Figura 63 – Diagrama de momento fletor  $M_z^{SAP}$  do teste S2Fa

Fonte: A autora (2024).

Com base na análise via SAP2000, o vetor de forças externas inserido na rotina implementada (CSM) é definida na equação Eq. (145), onde  $t$  é o fator de incremento da carga, aumentado ao longo da análise via CSM. Naturalmente, em uma análise não-linear essa proporção entre os esforços não é mantida, em razão da não-linearidade física do concreto. Contudo, a metodologia apresentada constitui apenas uma forma simplificada de se obter os esforços internos na estrutura, utilizando uma ferramenta comumente empregada em escritórios de projeto, para uma posterior análise não-linear e verificação da relevância do CMA no presente estudo.

$$\{F_{ext}\} = t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_x^{SAP} \\ M_z^{SAP}/M_x^{SAP} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (145)$$

Para análise no CSM a casca foi discretizada em 100 lamelas de concreto e admitida tolerância de  $10^{-2}$  como critério de convergência. Durante a análise, foi avaliado o vetor  $\{F_{ext}\}$  correspondente a falha do elemento de casca, quando um dos materiais atinge a resistência máxima estabelecida. Aplicando o momento fletor último da direção  $x$   $M_x^{CSM}$  na equação Eq. (146), a carga de ruptura via CSM  $P_u^{CSM}$  pode ser estimada. O termo  $A_{carga}$  equivale a área de aplicação da carga.

$$P_u^{CSM} = q_{SAP} A_{carga} \frac{M_x^{CSM}}{M_x^{SAP}} \quad (146)$$

#### 4.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados das cargas de ruptura para os testes S2 e S2Fa são mostrados na Tabela 5. Nela consta os valores experimentais  $P_u^{EXP}$  e os da rotina do CSM. De acordo com a análise do CSM, em ambos os casos foi observado ruptura da armadura inferior na direção  $z$ , após o seu escoamento, pois o modelo do aço é aproximadamente uma curva elasto-plástica perfeita. Os dados mostram que para o ensaio S2 a carga de ruptura encontrada foi 70,77 kN, o que corresponde a um valor aproximadamente 50% menor que o experimental. Enquanto no ensaio S2Fa a carga de ruptura encontrada foi 46,06 kN, o que em termos percentual indica que é aproximadamente 38% menor que o experimental.

Tabela 5 – Resultados da análise do corpo de prova S2

Teste	$P_u^{EXP}$ [kN]	$P_u^{CSM}$ [kN]	$P_u^{CSM}/P_u^{EXP}$ [%]
S2	142,85	70,77	49,5
S2Fa	74,00	46,06	62,2

Fonte: A autora (2024).

Apesar da boa previsão do CSM frente às validações experimentais apresentadas na seção 3.3, o que demonstra o bom desempenho do modelo CSM, é

interessante observar que os percentuais de diferença entre as cargas de ruptura  $P_u^{EXP}$  e  $P_u^{CSM}$  apresentada na Tabela 5 é bastante expressivo. Conforme a tabela, verifica-se que a diferença percentual do teste S2 (50%) é maior que o do teste S2Fa (38%).

As diferenças observadas podem ser atribuídas, pelo menos em parte, ao CMA, discutido na seção 4.2. A geometria do teste S2, por ter mais concreto de envolvimento, é mais favorável para o surgimento do CMA, em comparação com o S2Fa. Isso ajuda a justificar as duas diferenças observadas:

- a)  $P_u^{EXP}$  em S2 ser significativamente superior ao do S2Fa; e
- b) A resposta de S2Fa (menor contribuição do CMA) observada no ensaio ser mais próxima dos resultados numéricos obtidos em um modelo que considera a teoria de placas (CSM).

De acordo com essa hipótese, a razão das cargas de ruptura do CSM serem tão inferiores em relação aos experimentos deve-se ao modelo que não é capaz de incorporar o CMA. Com isso, o CSM subestima a carga da ruptura da estrutura e superestima as tensões na armadura. Diante dessa constatação, percebe-se que a base teórica na qual o CSM está fundamentado, como a teoria de Kirchhoff de elementos de placas finas, não se mostra adequada para avaliar tal problema. Essa mesma teoria está presente no elemento de casca usado no SAP2000, amplamente utilizado na prática de projeto nacional de pontes.

Os resultados observados mostram que a desconsideração do CMA em projetos estruturais de pontes implica no dimensionamento da armadura à flexão para tensões superestimadas, representando um demasiado conservadorismo, principalmente ao avaliar o fenômeno de fadiga que em determinadas situações pode inclusive ser dispensado. Isso impacta diretamente no custo financeiro da construção sem uma contrapartida quanto a segurança da mesma.

Nas normas brasileiras que regulamentam as atividades de projetos de pontes de concreto armado como a ABNT NBR 7187 (2021) (Projeto de pontes, viadutos e passarelas de concreto) e ABNT NBR 6118 (2023) não há menção do CMA, ao contrário da AASHTO (2014), em nenhuma verificação, sobretudo para o Estado Limite de Fadiga, o qual pode ser sensivelmente impactado pelo CMA.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado uma rotina computacional capaz de calcular as tensões em serviço e na ruptura de armaduras ortogonais em elementos de casca de concreto armado. Para tanto, o elemento foi discretizado em lamela e o CMM foi incorporado para obter as tensões na armadura na fissura (modelo CSM). Além disso, uma rotina do CMM utilizando técnicas de otimização foi apresentada. As validações do CMM e CSM foram realizadas por meio de resultados experimentais e numéricos de painéis disponíveis na literatura. Adicionalmente foi conduzido um estudo de caso, em que a carga de ruptura de um corpo de prova de laje de concreto armado de ponte foi determinada utilizando o CSM. Com base na resposta numérica foi verificada a capacidade do mesmo de capturar o efeito de CMA. Dos resultados obtidos pode-se concluir que:

- a) A implementação computacional do CMM demonstrou ser capaz de avaliar com precisão o comportamento de elementos de membrana de concreto armado, principalmente no pós-fissuração do concreto. O MCTM mostra-se útil como estimativa inicial para resolução do sistema de equações para modelos constitutivos locais. A adição da formulação para baixos níveis de carga mostrou-se importante não só para a precisão do modelo físico, mas também foi relevante do ponto de vista numérico. Com isso, foram observados ganhos de estabilidade numérica e melhorias na convergência da solução na transição do estágio não fissurado para o fissurado, permitindo a avaliação de 1000 pontos na curva tensão-deformação do CMM (1000 sistemas de equações não-lineares) em aproximadamente um 1 segundo.
- b) De acordo com a curva tensão-deformação da armadura dos painéis da série A, em serviço, a tensão na armadura na fissura obtida com o CMM foi superior à tensão média, para ambos os valores de  $\lambda$ . Isto mostra que a utilização de tensões médias do aço é inadequada para avaliar a tensão da armadura em problemas onde a tensão máxima é crítica, como é o caso da fadiga do aço;
- c) O método Wood&Armer modificado apresentou bons resultados na avaliação das tensões em serviço para a armadura na fissura quando comparado ao CMM. Este método revela-se uma metodologia alternativa,

especialmente em problemas onde o foco principal está na tensão na fissura.

- d) A implementação computacional do CSM demonstrou ser capaz de avaliar com precisão o comportamento de elementos de cascas de concreto armado submetido a diferentes solicitações externas, conforme os resultados experimentais. Apresentando boa previsão tanto em serviço, quando a armadura não está escoada, quanto no estado último do elemento.
- e) Embora não tenha sido possível a validação da implementação computacional do CSM com dados experimentais de tensões na armadura na fissura conclui-se, diante da boa previsão apresentada pelos demais resultados que foram mostrados, que o CSM é capaz de estimar de modo satisfatório as respectivas tensões na armadura de cascas de concreto armado.
- f) Quanto ao custo computacional, tendo em vista os critérios estabelecidos para o método iterativo-incremental, o tempo de processamento foi de aproximadamente 15 segundos para elementos submetidos a torção pura e em média 8 segundos para as demais solicitações. Isso demonstra a eficiência computacional da rotina proposta. A justificativa para tal diferença no custo computacional se deu em virtude da estimativa inicial utilizada para a primeira iteração do primeiro ponto da curva momento-curvatura (sendo este correspondente ao modelo linear de placa fina de Kirchhoff), onde, os problemas de torção pura demandaram um tempo maior para o algoritmo encontrar uma configuração em equilíbrio. Tal problema pode ser amenizado buscando-se outros tipos de estimativas iniciais.
- g) No estudo sobre o efeito de membrana comprimida (CMA) em lajes de tabuleiros de pontes, a carga de ruptura do corpo de prova obtida a partir do CSM foi significativamente inferior ao observado no ensaio, para ambos os testes. Demonstrando que o procedimento apresentado, apesar de ter tido um bom desempenho na validação com dados experimentais, não conseguiu modelar corretamente o comportamento da estrutura. Conclui-se diante disso que modelos baseados na teoria de Kirchhoff como o CSM demonstram ser inadequados para avaliar lajes desse tipo.

## REFERÊNCIAS

- FILHO, A. A. Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE. São Paulo: Érica, 2000.
- ARAÚJO, J. M. Curso de concreto armado. 4. ed. 2 v. Rio Grande: Dunas, 2014.
- AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. Bridge design specifications, 2014.
- ARMER, G. S. T. Correspondence, Concrete, 2, p. 319-320, 1968.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7187: Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido. Rio de Janeiro: ABNT, 2022.
- ATIR Engineering Software Development. (2010). STRAP structural analysis programs. STRAP user's manual. [s. l.]
- BENTZ, Evan. Shell2000. University of Toronto, Canada, 2000.
- BENTZ, Evan. Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - University of Toronto, Canadá, 2000.
- BERNARDO, L. F. A.; FILHO, B. M. V. C.; HOROWITZ, B. Refinement of the rotating-angle softened truss model with efficient solution procedure for RC membranes. Engineering Structures, v. 213, p. 1-12, 2020.
- BROTCHIE, J. F.; HOLLEY, M. J. Membrane action in slabs. Cracking, Deflection, and ultimate load of concrete slab systems, American Concrete Institute, Detroit, p. 345-377, 1971.
- BUCHAIM, Roberto. A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- COLLINS, M. P.; MITCHELL, D.; ADEBAR, P.; VECCHIO, F. J. A general shear design method, ACI Structural Journal, v. 93, n. 1, p. 36-45, 1996.
- CSAGOLY, P. F.; LYBAS, J. M. Advanced design method for concrete bridge deck slabs. ACI Structural journal, v. 11, n. 5, p. 53-63, 1989.
- DE BORST, R. et al. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. [S.l.]: Wiley, 2012. 516 p.
- DABBAGH, H.; FOSTER, S. J. A smeared fixed crack model for fe analysis of rc membranes incorporating aggregate interlock. Advances in Structural Engineering, v. 9, n. 1, p. 91-102, 2006.

ESHWARAPPA, N. H.; GANGOLU, A. R. Fatigue behavior of lightly reinforced concrete beams in flexure due to overload. In: Saouma V, Bolander J, Landis E, editors. 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, v. 9, p. 1–12, 2016.

GREENE, G. G., Jr. Behavior of reinforced concrete girders under cyclic torsion and torsion combined with shear: experimental investigation and analytical models. 2006. Ph.D. (Doutorado em Engenharia Civil) - University of Missouri-Rolla, USA, 2006.

HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, v. 585, p. 357-362, 2020.

HON, A.; TAPLIN, G.; AL-MAHAIDI, R. S. Strength of Reinforced Concrete Bridge Decks Under Compressive Membrane Action. *ACI Structural Journal*, v. 102, n. 3, p. 393-401, 2005.

HRYNYK, T. D. Behaviour and modelling of reinforced concrete slabs and shells under static and dynamic loads. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - University of Toronto, Canada, 2013.

HSU, T. T. C. Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion. *ACI Structural Journal*, v. 85, n. 6, p. 624–635, 1988.

HSU, T.T.C.; MO, Y.L. *Unified Theory of Concrete Structures*. Wiley, 2010.

HSU, T. T. C.; ZHANG, L. X. Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements. *ACI Structural Journal*, v. 93, n. 1, p. 108–115, 1996.

JÄGER, T. (2007). *Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten*. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich, 2007.

KAUFMANN, Walter. *Strength and deformations of structural concrete subjected to in-plane shear and normal forces*. 1998. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich, 1998.

KHALIFA, Jameel. *Limit Analysis and Design of Reinforced Concrete Shell Elements*. 1986. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - University of Toronto, Toronto, 1986.

KIRSCHNER, U.; COLLINS, M. P. *Investigating the Behaviour of Reinforced Concrete Shell Elements*. University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No. 86-09, Toronto, 1986.

KVAM, Simen. *Implementation of the cracked membrane model for crack width predictions in reinforced concrete shell Structures*. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Estrutural) - Norwegian University of Science and Technology, Norway, 2018.

LEITÃO, V. M. A.; CASTRO L. M. S. S. *Análise de estruturas 1: apontamentos sobre análise de lajes*. Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

LENSCHOW, R. J.; SOZEN, M.A. A Yield Criterion for Reinforced Concrete under Biaxial Moments and Forces. Structural Research Series No. 311, University of Illinois, 1966.

LUU, C.; MO, Y.; HSU, T. T. Development of CSMM-based shell element for reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, v. 132, p. 778-790, 2017.

MARTI, P.; LEESTI, P.; KHALIFA, W. Torsion Tests on Reinforced Concrete Slab Elements. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v. 113, n. 5, p. 994–1010, 1987.

MARTI, P.; ALVAREZ, M.; KAUFMANN, W.; SIGRIST, V. Tension chord model for structural concrete. *Structural Engineering International*. v. 8, n. 4, p. 287–298, 1998.

MARTI, P.; MEYBOOM, J. Response of prestressed concrete elements to in-plane shear forces. *ACI Structural Journal*, v. 89, n. 5, p. 503–514, 1992.

MELO, G. F. Análise não linear de vigas de concreto armado com método secante. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

OCKLESTON, A. J. Load Tests on a Three Storey Reinforced Concrete Building in Johannesburg. *The Structural Engineer*, v. 33, p. 304-322, 1955.

OLIVEIRA, A. S. M. O efeito de membrana em lajes mistas aço-betão sujeitas a fogo. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade de Aveiro, Aveiro Pessoa, 2019.

PANG, X. B.; HSU T. T. C. Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear. *ACI Structural Journal*, v. 92, n. 6, p. 665-679, 1995.

PIMENTEL, M. J. S. Numerical modelling for safety examination of existing concrete bridges. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Faculty of Engineering of the University of Porto, Porto, 2011.

POLAK, M. A.; VECCHIO, F. J. Reinforced concrete shell elements subjected to bending and membrane loads. *ACI Structural Journal*, v. 91, n. 3, p. 261–268, 1994.

RANKIN, G. I. B.; LONG, A. E. Arching action strength enhancement in laterally-restrained slab strips. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures and Buildings*, v. 122, p. 461-467, 1997.

SEELHOFER, Hans. Ebener Spannungszustand im Betonbau: Grundlagen und Anwendungen. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich, 2009.

SIGRIST, Viktor. Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern (On the Deformation Capacity of Structural Concrete Girders). 1995. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zürich, 1995.

Scipy Community. SciPy.optimize: scientific optimization in Python. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html>. Acesso em: 15 de abril de 2023.

SILVA, J. R. B. Procedimento eficiente para análise de seções em concreto armado usando o modelo de treliça com amolecimento. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, J. R. B. Análise de pilares-parede de concreto armado via método dos elementos finitos. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.

SPATHELF, C. A. Fatigue performance of orthogonally reinforced concrete slabs. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – St. Gallen University, Zurich, 2017.

SILVA, J. R. B.; HOROWITZ, B.; BERNARDO, L. F. A. Efficient Analysis of Beam Sections Using Softened Truss Model. *ACI Structural Journal*, v. 114, n. 3, p. 765-774, 2017.

VASILESCU, Adrian. Analysis of geometrically Nonlinear and Softening Response of Thin Structures by a new Facet Shell Element. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Faculty of Graduate Studies and Research, Department of Civil and Environmental Engineering, Carleton University, Ottawa, Ontario, 2000.

VECCHIO, F. J. Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v. 126, n. 9, p. 1070-1077, 2000.

VECCHIO, F.J.; COLLINS, M. P. The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No. 82-03, Toronto, March, 1982.

VECCHIO, F.J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Structural Journal*, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.

WOOD, R. H. The reinforcement of slabs in accordance with a predetermined field of moments. *Concrete*, v. 2, p. 69-76, 1968.

ZHANG, L. X. Constitutive Laws of Reinforced Elements with Medium-High Strength Concrete. 1992. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - University of Houston, Houston, 1992.

ZHANG, L. X.; HSU, T. T. C. Behavior and analysis of 100 MPa concrete membrane elements. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 124, n. 1, p. 24-34, 1998.

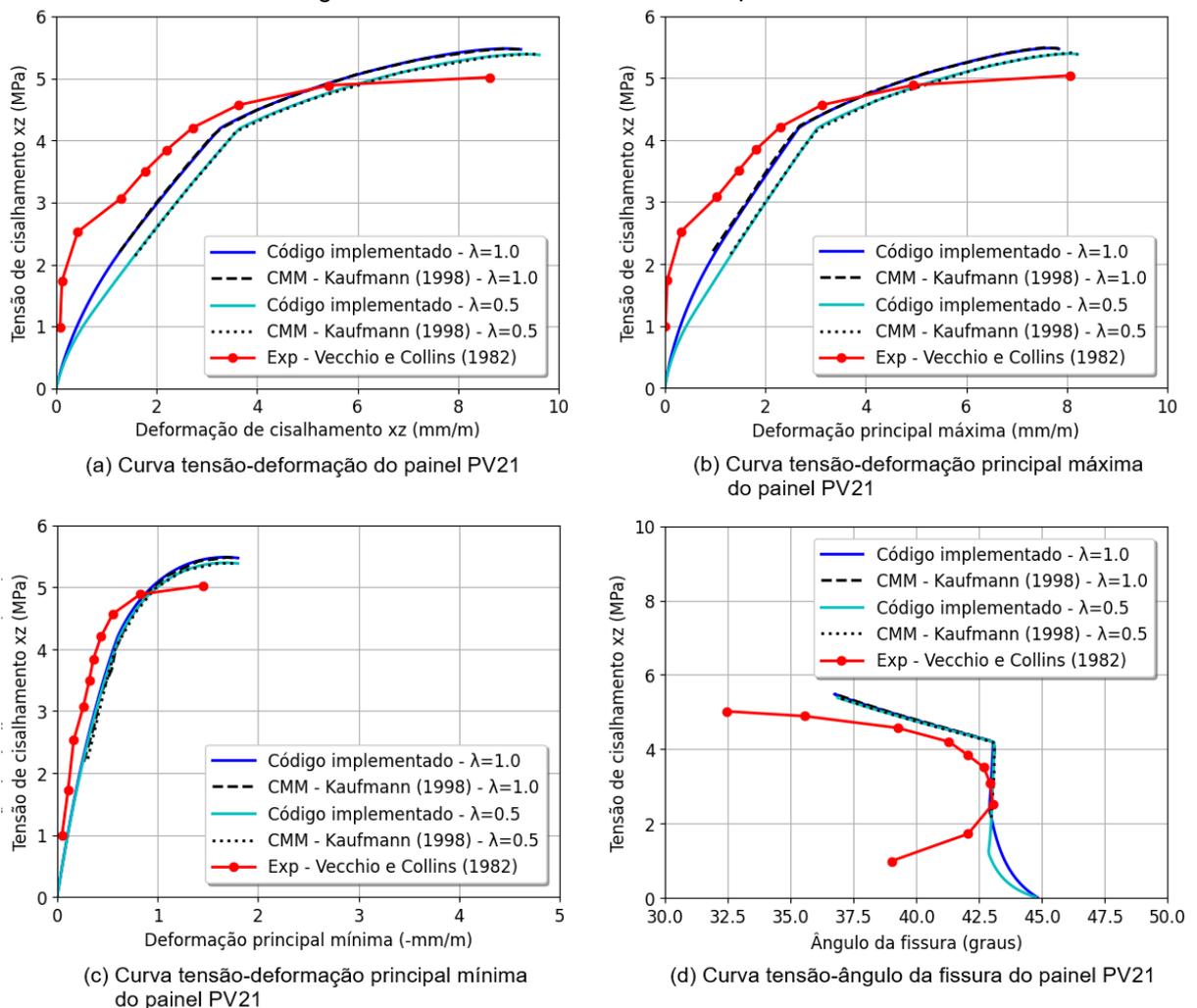
**APÊNDICE A – RESULTADOS DAS ANÁLISES DOS PAINÉIS DAS SÉRIES PV, SE E VB SUBMETIDOS A FORÇAS DE MEMBRANA**

Tabela 6 – Propriedades dos painéis com armadura ortotrópica (continuação)

Painel	Armadura										Concreto		EPT <sup>a</sup>
	$\rho_x$ %	$\varnothing_x$ mm	$f_{syx}$ MPa	$f_{sux}$ MPa	$\epsilon_{sux}$ ‰	$\rho_z$ %	$\varnothing_z$ mm	$f_{syz}$ MPa	$f_{suz}$ MPa	$\epsilon_{suz}$ ‰	$f_c$ MPa	$\epsilon_{co}$ ‰	
PV21	1,785	6,35	458	527	100	1,524	5,87	420	483	100	19,6	2,00	CP <sup>b</sup>
PV22	1,785	6,35	458	527	100	1,524	5,87	420	483	100	19,6	2,00	CP <sup>b</sup>
SE1	2,930	19,5	492	640	100	0,978	11,3	479	623	100	42,5	2,54	CP <sup>b</sup>
SE6	2,930	19,5	492	640	100	0,326	11,3	479	623	100	40,0	2,50	CP <sup>b</sup>
VB1	2,280	16,0	409	534	100	1,140	11,3	445	579	100	98,2	2,50	CP <sup>b</sup>
VB2	3,420	19,5	455	608	100	1,140	11,3	445	579	100	97,6	2,45	CP <sup>b</sup>

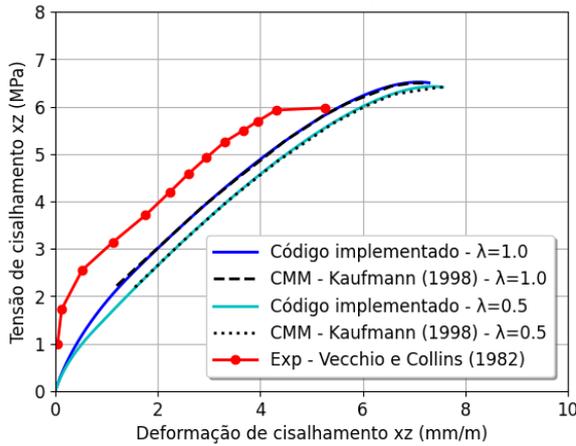
<sup>a</sup>Estado plano de tensões aplicado; <sup>b</sup>Cisalhamento puro ( $\sigma_x = \sigma_z = 0$ ). Fonte: A autora (2024).

Figura 64 – Resultados da análise do painel PV21

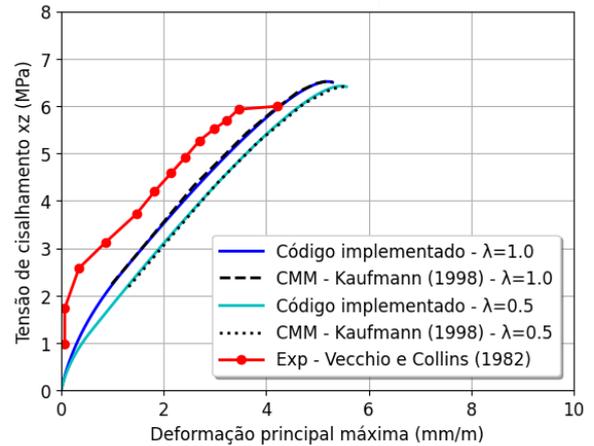


Fonte: A autora (2024).

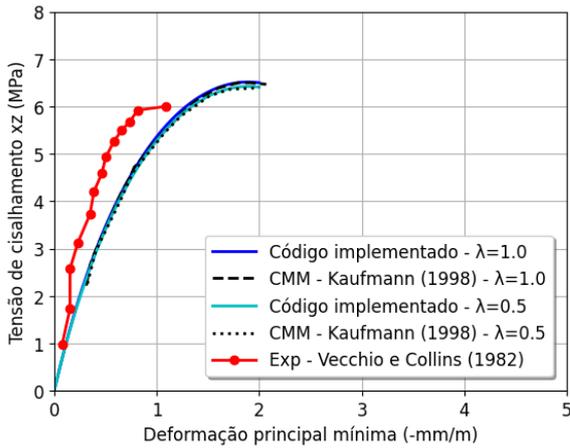
Figura 65 – Resultados das análises dos painéis PV22 e SE1



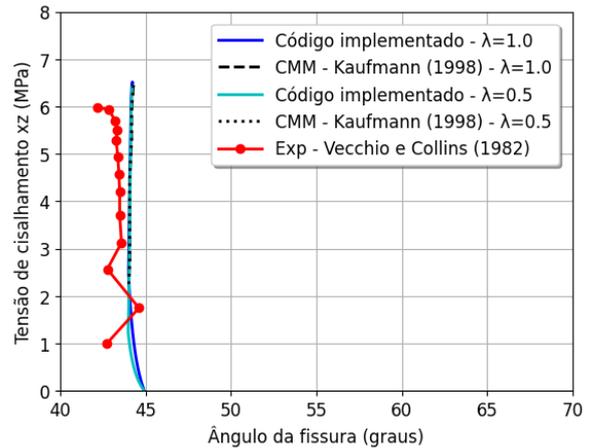
(a) Curva tensão-deformação do painel PV22



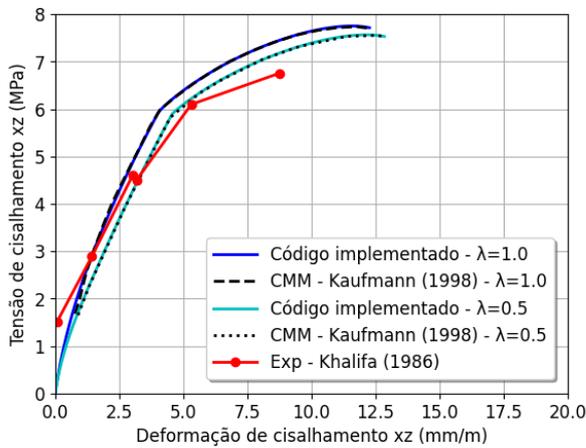
(b) Curva tensão-deformação principal máxima do painel PV22



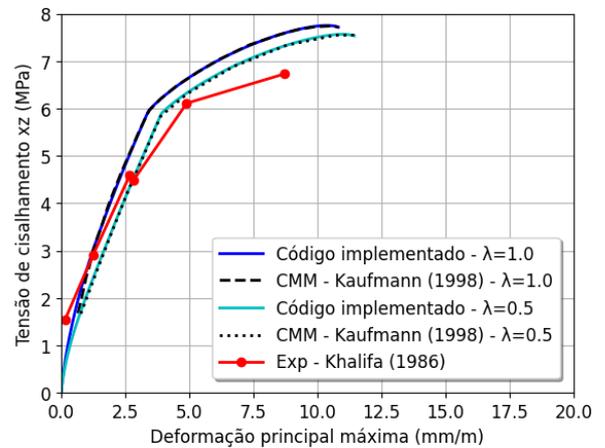
(c) Curva tensão-deformação principal mínima do painel PV22



(d) Curva tensão-ângulo da fissura do painel PV22



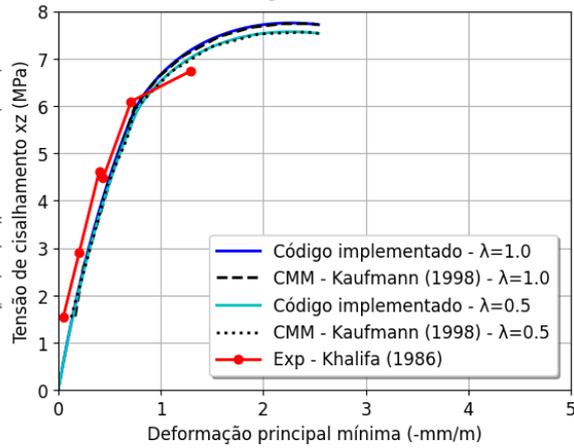
(e) Curva tensão-deformação do painel SE1



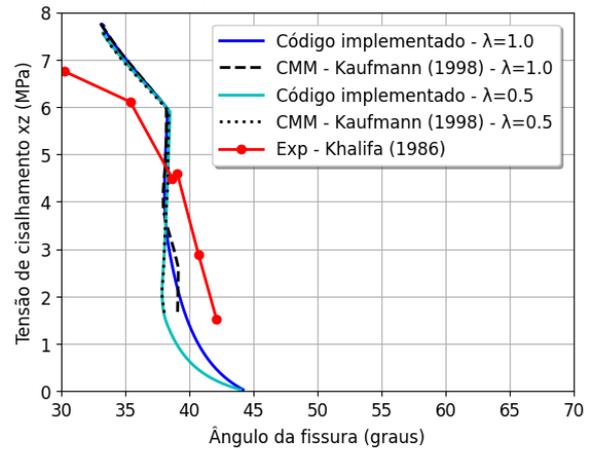
(f) Curva tensão-deformação principal máxima do painel SE1

Fonte: A autora (2024).

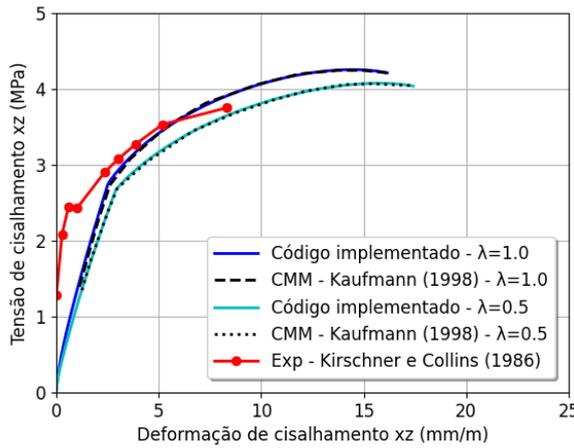
Figure 66 – Resultados das análises dos painéis SE1 e SE6



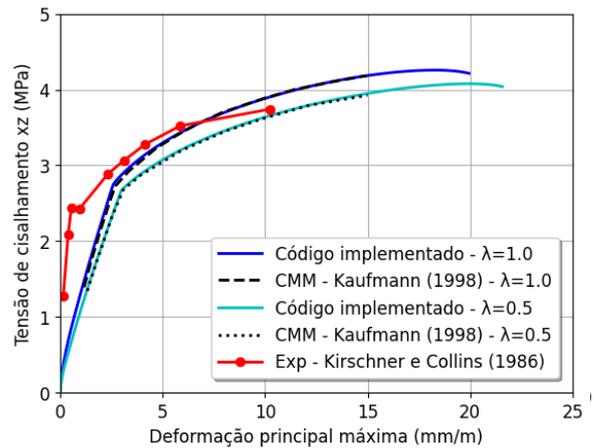
(a) Curva tensão-deformação principal mínima do painel SE1



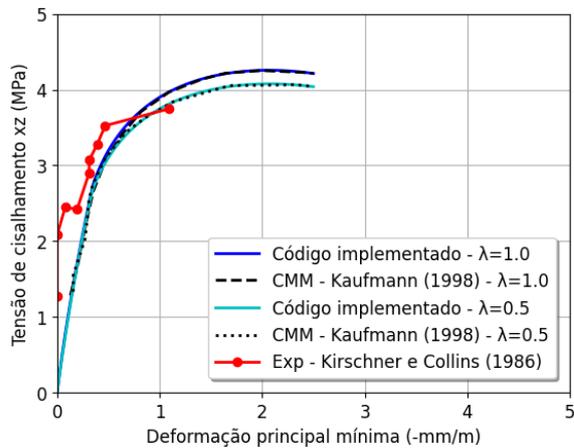
(b) Curva tensão-ângulo da fissura do painel SE1



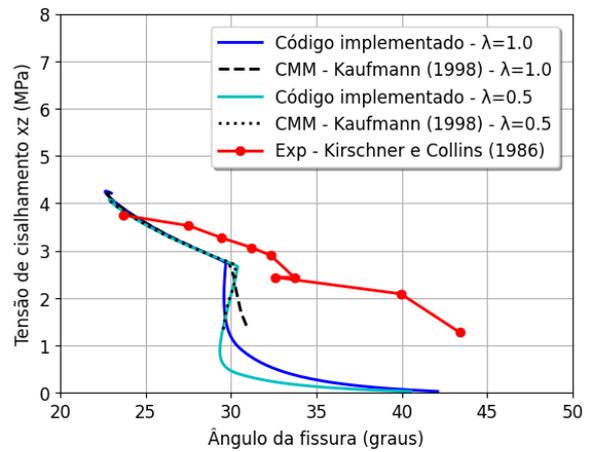
(c) Curva tensão-deformação do painel SE6



(d) Curva tensão-deformação principal máxima do painel SE6



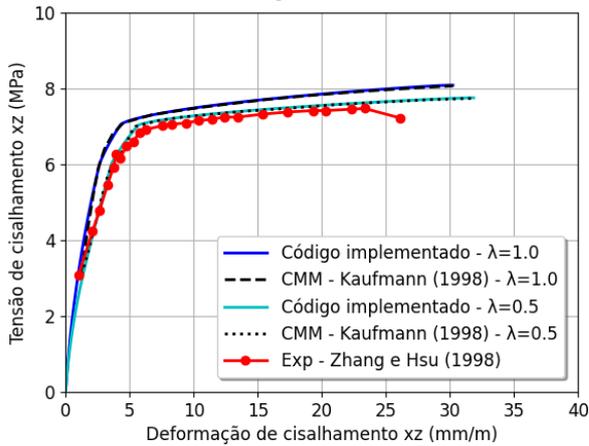
(e) Curva tensão-deformação principal mínima do painel SE6



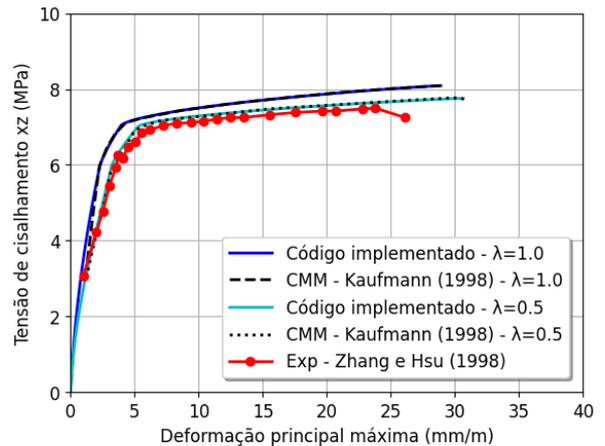
(f) Curva tensão-ângulo da fissura do painel SE6

Fonte: A autora (2024).

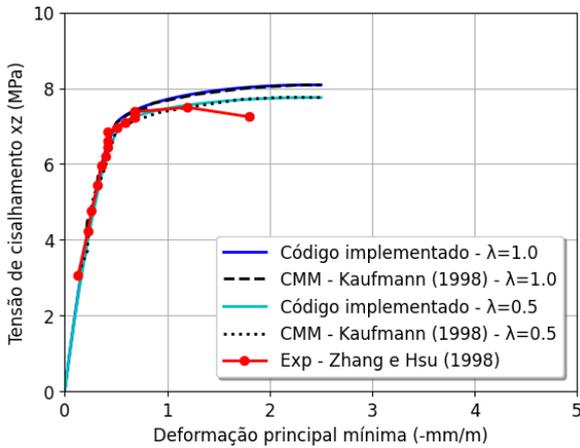
Figura 67 – Resultados das análises dos painéis VB1 e VB2



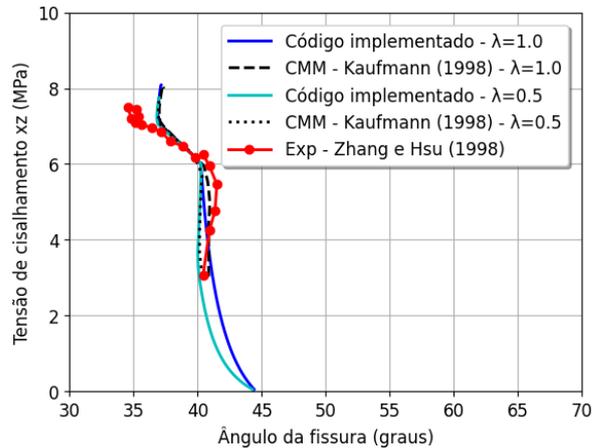
(a) Curva tensão-deformação do painel VB1



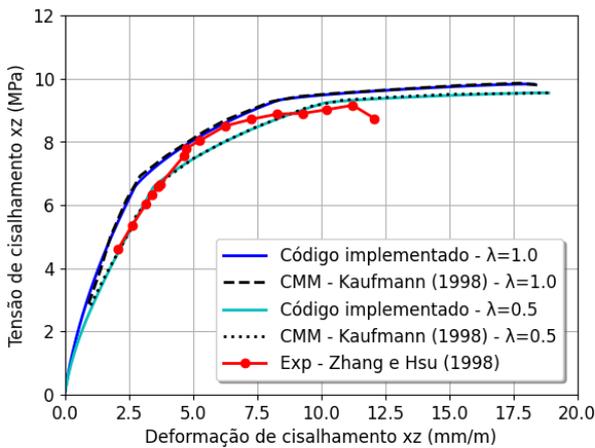
(b) Curva tensão-deformação principal máxima do painel VB1



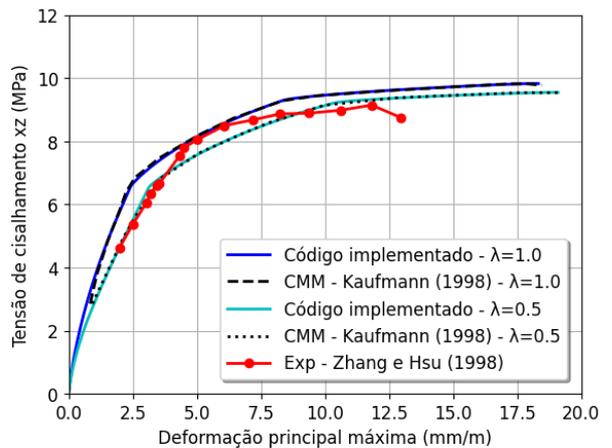
(c) Curva tensão-deformação principal mínima do painel VB1



(d) Curva tensão-ângulo da fissura do painel VB1



(e) Curva tensão-deformação do painel VB2



(f) Curva tensão-deformação principal máxima do painel VB2

Fonte: A autora (2024).