

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**PROCESSOS SEMI MARKOVIANOS E REDES BAYESIANAS
PARA AVALIAÇÃO DE INDICADORES DE DESEMPENHO
DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS COMPLEXOS
TOLERANTES À FALHA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UFPE
PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
POR

MÁRCIO JOSÉ DAS CHAGAS MOURA

Orientador: Enrique López Droguett, Ph.D.

RECIFE, Novembro / 2006

M929i

Moura, Márcio José das Chagas

Processos semi markovianos e redes bayesianas para avaliação de indicadores de desempenho de confiabilidade de sistemas complexos tolerantes à falha / Márcio José das Chagas Moura. – Recife: O Autor, 2006.

xi, 112 f.; il., gráfs., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Depto. de Engenharia de Produção, 2006.

Inclui referências bibliográficas, anexos e apêndices.

1. Engenharia de Produção. 2. Confiabilidade. 3. Processos semi markovianos. 4. Transformadas de Laplace. 5. Redes bayesianas. I. Título.

658.5 CDD (22.ed.)

UFPE/BCTG/2006-116

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA
DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO ACADÊMICO DE

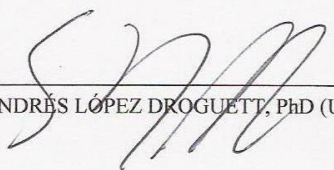
MÁRCIO JOSÉ DAS CHAGAS MOURA

“Processos Semi Markovianos e Redes Bayesianas para Avaliação de Indicadores de Desempenho de Confiabilidade de Sistemas Complexos Tolerantes à Falha”.

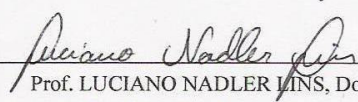
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PESQUISA OPERACIONAL

A comissão examinadora, composta pelos professores abaixo, sob a presidência do(a) primeiro(a), considera o candidato **MÁRCIO JOSÉ DAS CHAGAS MOURA APROVADO COM DISTINÇÃO.**

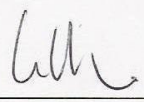
Recife, 14 de novembro de 2006.



Prof. ENRIQUE ANDRÉS LÓPEZ DROGUETT, PhD (UFPE)



Prof. LUCIANO NADLER LINS, Doutor (UFPE)



Prof. ENRICO ANTONIO COLOSIMO, PhD (UFMG)

PÁGINA DEDICATÓRIA

À minha avó, Iracema das Chagas (em memória).

À minha mãe, Maria da Conceição.

À minha filha, Geovanna.

AGRADECIMENTOS

Esse sem dúvida é o tópico mais fácil de redigir desse trabalho. As palavras fluem naturalmente. A causa disso é o sentimento de alegria e alívio desse momento. Inúmeras pessoas contribuíram para a concretização desse sonho.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por te me concedido paz e saúde, pré-requisitos necessários e suficientes para se iniciar qualquer coisa nesta vida.

Agradeço à minha avó, Iracema das Chagas (em memória), à minha mãe, Maria da Conceição e à minha filha, Geovanna, mulheres que fazem minha vida ter sentido a cada dia. Agradeço à minha família, em geral, especialmente minha tia Marinalva e meu pai, Marcos Antônio.

Agradeço à minha namorada, Alessandra Fragoso, pelos vários momentos de compreensão pela escassez de tempo acarretada pela consecução do presente trabalho.

Agradeço ao professor Enrique López por ter acreditado em mim e me concedido a oportunidade de trabalhar no Risetec - Grupo de Pesquisas em Análise de Riscos Tecnológicos e Eng^a de Confiabilidade. Agradeço também a todos que compõem tal grupo de pesquisa, especialmente à professora Dayse Duarte e a Paulo Firmino.

Agradeço aos professores membros da banca, Luciano Lins e Enrico Colosimo, pelas sugestões valiosas. Agradeço também aos professores, Eugênio Oliveira e José Dias, pelas conversas construtivas.

Agradeço a todos meus amigos, especialmente a Mário Vieira, Vanessa Valentim, Millena Nascimento, Adiel Filho, Rodrigo Borba, Hélder Diniz, Paulo Fernando, Márcio Mello, Luciana Firmino, Mellina Albuquerque e Sérgio Parente.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajudaram no desenvolvimento do presente trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, é proposta uma metodologia de modelagem de indicadores de desempenho de Confiabilidade ((In)Disponibilidade, Confiabilidade, Manutenibilidade) de sistemas complexos baseada na integração entre processos semi Markovianos (PSMs) e Redes Bayesianas (RBs). Basicamente, um PSM pode ser entendido como um processo estocástico no qual as probabilidades de transição dependem do intervalo de tempo decorrido desde o qual um sistema possui determinadas características.

Já as Redes Bayesianas são estruturas probabilísticas que representam qualitativa e quantitativamente relações de causa e efeito entre determinadas variáveis aleatórias de interesse. A integração entre os PSMs e as RBs origina um modelo estocástico híbrido o qual é capaz de representar a dinamicidade de um sistema ao mesmo tempo em que trata como as relações de causa e efeito entre fatores não necessariamente temporais influenciam tal evolução.

Para desenvolver tal modelo híbrido, faz-se necessário propor e formular o método numérico computacional de resolução das equações de probabilidades de transição dos PSMs definidos através de taxas de transição as quais são equações integrais do tipo convolução. Tal método é baseado na aplicação de transformadas de Laplace as quais serão invertidas utilizando o método de Quadratura *Gaussiana* conhecido como *Gauss Legendre*.

Aplicações do modelo híbrido proposto são realizadas em sistemas tolerantes à falha com o objetivo de avaliar a evolução temporal dos indicadores de desempenho de Confiabilidade.

Palavras-chave: Engenharia de Produção, Confiabilidade, Processos semi Markovianos, Transformadas de Laplace, Redes Bayesianas, Indicadores de desempenho, Sistemas tolerantes à falha.

ABSTRACT

In this work, a methodology of modeling of Reliability performance indicators ((Un)Availability, Reliability, Maintainability) of complex systems based on the integration between semi Markov processes (SMP) and Bayesian Networks (BN) is proposed. Basically, a SMP can be understood as a stochastic process whose the transition probabilities depend on the elapsed time since a system reached determined characteristics.

Bayesian Networks are probabilistic structures that represent relations of cause and effect between determined variables of interest qualitatively and quantitatively. The integration between SMPs and BNs generates a hybrid stochastic model which is able to represent the dynamic characteristics of a system as well as dealing how the cause and effect relations between factors unnecessarily time influences such evolution.

To develop such hybrid model, it becomes necessary the development of computational and numerical formulation of the equations of transition probabilities of the SMPs which are integral equations of the convolution type. The numerical method of resolution of these ones will be based on the application of Laplace transforms which will be inverted using the method of Gaussian Quadrature known as Gauss Legendre.

Applications of the considered hybrid model will be carried through to fault tolerant systems in order to assess the behavior over time of the Reliability Performance Indicators.

Keywords: Production Engineering, Reliability, semi Markov Processes, Laplace Transforms, Bayesian Networks, Performance Indicators, Fault Tolerant Systems.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2-1 – FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE	9
FIGURA 2-2 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA.....	9
FIGURA 2-3 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	10
FIGURA 3-1 – DIAGRAMA DE TRANSIÇÕES PARA O EXEMPLO DA EMPRESA DE MANUFATURA DE LÂMINAS DE BARBEAR	21
FIGURA 3-2 – PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO INTERVALARES PARA ANÁLISE DO GRAU DE FIDELIDADE	29
FIGURA 3-3 – EXEMPLO DE REDE BAYESIANA	41
FIGURA 3-4 – INDEPENDÊNCIA CONDICIONAL: (A) – SÉRIE; (B) – CAUSA COMUM; (C) – EFEITO COMUM.....	42
FIGURA 4-1 – PROBABILIDADE $\phi_{11}(t)$ DE TRANSIÇÃO INTERVALAR.....	51
FIGURA 4-2 – PROBABILIDADE $\phi_{22}(t)$ DE TRANSIÇÃO INTERVALAR	52
FIGURA 4-3 – DIAGRAMA DE ESTADOS DO PSMH COM TAXAS CONSTANTES	53
FIGURA 4-4 – COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS FORNECIDOS PARA $P_1(T)$	53
FIGURA 4-5 – COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS FORNECIDOS PARA $P_2(T)$	54
FIGURA 4-6 – PSMH COM TEMPO DE PERMANÊNCIA NO ESTADO 1 SEGUINDO UMA LOGNORMAL	54
FIGURA 4-7 – $P_0(T)$ PARA O EXEMPLO 3	55
FIGURA 4-8 – $I(T)$ PARA O EXEMPLO 3	55
FIGURA 4-9 – PSMNH COM TEMPO DE PERMANÊNCIA NO ESTADO 2 SEGUINDO UMA LOGNORMAL.....	58
FIGURA 4-10 – $I(T)$ PARA O EXEMPLO 4	59
FIGURA 5-1 – FLUXOGRAMA DESCREVENDO O ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO ENTRE PROCESSOS SEMI MARKOVIANOS E REDES BAYESIANAS	63
FIGURA 5-2 – MODELO HÍBRIDO: PROCESSO SEMI MARKOVIANO HOMOGÊNEO E REDES BAYESIANAS PARA O SISTEMA DE RESFRIAMENTO DO FRIGORÍFICO	65
FIGURA 5-3 – DISPONIBILIDADE OPERACIONAL PARA O SISTEMA DE RESFRIAMENTO	69
FIGURA 5-4 – CONFIABILIDADE PARA O SISTEMA DE RESFRIAMENTO.....	70
FIGURA 5-5 – MANUTENIBILIDADE PARA O SISTEMA DE RESFRIAMENTO	71
FIGURA 5-6 – REPRESENTAÇÃO DOS ESTADOS DO PSMNH PARA A REDE DE AQUECIMENTO	73
FIGURA 5-7 – VARIAÇÃO DO VALOR MÉDIO $E[T(t)]$ DO TDT EM FUNÇÃO DO TEMPO DE PROCESSO	74
FIGURA 5-8 – REDE BAYESIANA DINÂMICA PARA OS PARÂMETROS λ_i E μ_i , COM $i = 1, 2, 3$	75
FIGURA 5-9 - INDISPONIBILIDADE OPERACIONAL OCASIONADA SE O TDT EXCEDER	76
FIGURA 5-10 – CONFIABILIDADE ASSUMINDO QUE A PRIMEIRA FALHA DO SISTEMA OCORRE SE O TDT EXCEDER .	77
FIGURA 5-11 – MANUTENIBILIDADE PARA O SISTEMA DE AQUECIMENTO	78
FIGURA 5-12 - DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI DO PARÂMETRO λ_i , COM $i = 1, 2$	79
FIGURA 5-13 - DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI DO PARÂMETRO λ_3	80
FIGURA 5-14 – INDISPONIBILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI	81
FIGURA 5-15 – CONFIABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI	81
FIGURA 5-16 – MANUTENIBILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI	82

LISTA DE TABELAS

TABELA 3-1 – MÉDIAS E VARIÂNCIAS DOS TEMPOS DE USO DE CADA PRODUTO EM SEMANAS	22
TABELA 3-2 – FUNÇÕES DENSIDADE, FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA E RESPECTIVOS COMPLEMENTARES DO TEMPO DE ESPERA PARA O EXEMPLO	23
TABELA 3-3 – VALORES DA PROBABILIDADE CONJUNTA PARA A RB DA FIGURA 3-3.....	44
TABELA 5-1 – TPC PARA A VARIÁVEL X	66
TABELA 5-2 – TPC PARA A VARIÁVEL Y	66
TABELA 5-3 – TPC PARA A VARIÁVEL λ	66
TABELA 5-4 – TPC DA VARIÁVEL W	67
TABELA 5-5 – TPC DA VARIÁVEL Z	67
TABELA 5-6 – TPC DA VARIÁVEL μ	67
TABELA 5-7 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL λ EM h^{-1}	68
TABELA 5-8 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL μ EM h^{-1}	68
TABELA 5-9 – FASES DO PERÍODO DE AQUECIMENTO	71
TABELA 5-10 – LISTA DE ESTADOS DO SISTEMA DE AQUECIMENTO.....	72
TABELA 5-11 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI DO PARÂMETRO λ_i , COM i $= 1, 2$	78
TABELA 5-12 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI DO PARÂMETRO λ_3	79
TABELA A. 1 – TRANSFORMADAS DE LAPLACE.....	96
TABELA B. 1 - RESULTADOS DE $\phi_{11}(t)$	98
TABELA B. 2 – RESULTADOS DE $\phi_{22}(t)$	99
TABELA C. 1 – RESULTADOS PARA $P_1(T)$	99
TABELA C. 2 – RESULTADOS PARA $P_2(T)$	100
TABELA D. 1 – RESULTADOS PARA $P_0(T)$	100
TABELA D. 2 - RESULTADOS PARA $I(T)$	100
TABELA E. 1 – RESULTADOS PARA $D(T)$	101
TABELA E. 2 – RESULTADOS PARA $I(T)$	101
TABELA F. 1 – DISPONIBILIDADE OPERACIONAL PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1	102
TABELA F. 2 – CONFIABILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1	102
TABELA F. 3 – MANUTENIBILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1	102
TABELA G. 1 – TPC PARA A VARIÁVEL X	103
TABELA G. 2 – TPC PARA A VARIÁVEL Y	103
TABELA G. 3 – TPC PARA A VARIÁVEL λ_i , COM $i = 1, 2$	103
TABELA G. 4 – TPC DA VARIÁVEL W	103
TABELA G. 5 – TPC DA VARIÁVEL Z	103
TABELA G. 6 – TPC DA VARIÁVEL μ_i , COM $i = 1, 2$	104
TABELA G. 7 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL λ_i , COM $i = 1, 2$	104
TABELA G. 8 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL μ_i , COM $i = 1, 2$	104
TABELA H. 1 – TPC PARA A VARIÁVEL X	104
TABELA H. 2 – TPC PARA A VARIÁVEL Y	104
TABELA H. 3 – TPC PARA A VARIÁVEL λ_3	104

TABELA H. 4 – TPC DA VARIÁVEL W	105
TABELA H. 5 – TPC DA VARIÁVEL Z	105
TABELA H. 6 – TPC DA VARIÁVEL μ_3	105
TABELA H. 7 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL λ_3	105
TABELA H. 8 – DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE PROBABILIDADE DA VARIÁVEL μ_3	105
TABELA I. 1 – INDISPONIBILIDADE OPERACIONAL PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	105
TABELA I. 2 – CONFIABILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	107
TABELA I. 3 – MANUTENIBILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	108
TABELA J. 1 – INDISPONIBILIDADE OPERACIONAL A PRIORI E A POSTERIORI PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2 ..	109
TABELA J. 2 – CONFIABILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	110
TABELA J. 3 – MANUTENIBILIDADE A PRIORI E A POSTERIORI PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	111

LISTA DE ACRÔNIMOS

ACH – Análise de Confiabilidade Humana
CDF – *Cumulative Distribution Function* (Função de Distribuição Acumulada)
DAG - *Directed Aciclic Graph* (Grafo Acíclico Direcionado)
DBN – *Dynamic Bayesian Networks* (Redes Bayesianas Dinâmicas)
EMV - Estimador de máxima verossimilhança
ESD – *Event Sequence Diagram* (Diagrama de Sequência de Eventos)
FTA – *Fault Tree Analysis* (Árvore de Falhas)
MDT – *Mean Down Time* (Tempo Médio Fora de Serviço)
MTBF – *Mean Time Between Failures* (Tempo Médio entre Falhas)
MTTF – *Mean Time To Failure* (Tempo Médio para Falha)
MTTR – *Mean Time To Repair* (Tempo Médio para Reparo)
PDF – *Probability Density Function* (Função Densidade de Probabilidade)
PHP - Processo Homogêneo de Poisson
PM - Processo Markoviano
PMH – Processo Markoviano Homogêneo
PMNH – Processo Markoviano Não Homogêneo
PNHP - Processo Não Homogêneo de Poisson
PR - Processo de Renovação
PRG - Processo de Renovação Generalizado
PSM - Processo semi Markoviano
PSMH – Processo semi Markoviano Homogêneo
PSMNH – Processo semi Markoviano Não Homogêneo
RB - Rede Bayesiana
ROCOF – *Rate of Occurrence Failure* (Taxa de Ocorrência de Falhas)
TDT – *Tolerable DownTime* (Tempo fora de serviço tolerável)
TL - Transformada de Laplace
TPC – Tabela de Probabilidades Condicionais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2 CONTRIBUIÇÕES E JUSTIFICATIVAS	2
1.3 OBJETIVOS	7
1.3.1 <i>Objetivo Geral</i>	7
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	7
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	7
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS PARA A ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....	8
2.1. VARIÁVEL ALEATÓRIA	8
2.2. A FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE.....	8
2.3. FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA (CDF)	9
2.4. FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE (PDF)	9
2.5. TAXA DE FALHA.....	10
2.6. FUNÇÃO INTENSIDADE DE FALHA (ROCOF).....	10
2.7. SISTEMAS NÃO REPARÁVEIS X REPARÁVEIS.....	11
2.8. ESTADO DO SISTEMA	11
2.9. TRANSIÇÃO ENTRE ESTADOS	11
2.10. TEMPO DE PERMANÊNCIA, LOCAL OU DE RESIDÊNCIA	11
2.11. TEMPO DE ESPERA.....	12
2.12. TEMPO DE PROCESSO, GLOBAL OU DE CALENDÁRIO	12
2.13. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.....	12
2.14. DISPONIBILIDADE OPERACIONAL.....	12
2.15. MANUTENIBILIDADE	13
3. BASE CONCEITUAL.....	14
3.1. PROCESSOS MARKOVIANOS	14
3.1.1. <i>Propriedade Markoviana</i>	14
3.1.2. <i>Equações de Chapman – Kolmogorov</i>	14
3.1.3. <i>PM Homogêneo</i>	15
3.1.4. <i>PM Não Homogêneo</i>	16
3.2. PROCESSOS SEMI MARKOVIANOS.....	16
3.2.1. <i>Conceitos</i>	16
3.2.2. <i>Aplicações em Confiabilidade</i>	17
3.2.3. <i>Terminologia</i>	19
3.3. PROCESSOS SEMI MARKOVIANOS HOMOGÊNEOS	20
3.3.1. <i>Conceitos Básicos e Exemplo</i>	20
3.3.2. <i>Probabilidades de Transição Intervalares</i>	24
3.3.3. <i>PSMHs definidos a partir de taxas de transição</i>	30
3.4. PROCESSOS SEMI MARKOVIANOS NÃO HOMOGÊNEOS	32
3.4.1. <i>Introdução e Conceitos</i>	32
3.4.2. <i>PSMNHs definidos a partir de taxas de transição</i>	35
3.5. REDES BAYESIANAS.....	38
3.5.1. <i>Introdução e aplicações em Confiabilidade</i>	38
3.5.2. <i>Estrutura</i>	39
3.5.3. <i>Independência Condicional</i>	42
3.5.4. <i>Cálculo das Probabilidades</i>	43
3.5.5. <i>Atualização do conhecimento via RBs</i>	45
4. MODELO NUMÉRICO PROPOSTO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PSM.....	46
4.1. SOLUÇÃO MONTE CARLO	46
4.2. MÉTODO NUMÉRICO PROPOSTO PARA PSMHS DEFINIDOS A PARTIR DE TAXAS DE TRANSIÇÃO	47
4.2.1. <i>Descrição do método numérico</i>	47

4.2.2.	<i>Exemplo 1</i>	51
4.2.3.	<i>Exemplo 2</i>	52
4.2.4.	<i>Exemplo 3</i>	54
4.3.	MÉTODO NUMÉRICO PROPOSTO PARA PSMNHs DEFINIDOS A PARTIR DE TAXAS DE TRANSIÇÃO	56
4.3.1.	<i>Exemplo 4</i>	58
5.	MODELO HÍBRIDO PROPOSTO	61
5.1.	INTEGRAÇÃO: SEMI MARKOV X REDES BAYESIANAS	61
5.2.	SISTEMAS TOLERANTES À FALHA	63
5.3.	EXEMPLO 1: SISTEMA DE RESFRIAMENTO	64
5.3.1.	<i>Descrição do problema</i>	64
5.3.2.	<i>Dados para o exemplo</i>	66
5.3.3.	<i>Análise de Resultados</i>	68
5.3.3.1.	<i>Distribuições marginais</i>	68
5.3.3.2.	<i>Disponibilidade Operacional</i>	69
5.3.3.3.	<i>Confiabilidade</i>	69
5.3.3.4.	<i>Manutenibilidade</i>	70
5.4.	EXEMPLO 2: SISTEMA DE AQUECIMENTO	71
5.4.1.	<i>Descrição do problema</i>	71
5.4.2.	<i>Dados para o exemplo</i>	73
5.4.3.	<i>Análise de resultados</i>	75
5.4.3.1.	<i>Indisponibilidade</i>	76
5.4.3.2.	<i>Confiabilidade</i>	76
5.4.3.3.	<i>Manutenibilidade</i>	77
5.4.4.	<i>Atualização de crenças probabilísticas</i>	78
5.4.4.1.	<i>Distribuições marginais</i>	78
5.4.4.2.	<i>Indisponibilidade a posteriori</i>	80
5.4.4.3.	<i>Confiabilidade a posteriori</i>	81
5.4.4.4.	<i>Manutenibilidade a posteriori</i>	82
6.	CONCLUSÕES	83
6.1.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
6.2.	LIMITAÇÕES E DESAFIOS FUTUROS	84
6.2.1.	<i>Processos semi Markovianos</i>	84
6.2.2.	<i>Redes Bayesianas</i>	85
6.2.3.	<i>Modelo Híbrido: PSMs e RBs</i>	86
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
	ANEXOS	93
	ANEXO A – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE <i>CHAPMAN-KOLMOGOROV</i>	93
	ANEXO B – CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA ATRAVÉS DE DETERMINANTES	94
	APÊNDICES	96
	APÊNDICE A - TRANSFORMADAS DE LAPLACE	96
	APÊNDICE B – RESULTADOS EXEMPLO 1	98
	APÊNDICE C – RESULTADOS EXEMPLO 2	99
	APÊNDICE D – RESULTADOS EXEMPLO 3	100
	APÊNDICE E – RESULTADOS EXEMPLO 4	101
	APÊNDICE F – INDICADORES DE CONFIABILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1	102
	APÊNDICE G – TPCs DAS FASES 1 E 2 DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	103
	APÊNDICE H – TPCs DA FASE 3 DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	104
	APÊNDICE I – INDICADORES DE CONFIABILIDADE PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	105
	APÊNDICE J – INDICADORES DE CONFIABILIDADE A POSTERIORI PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2	109

1. INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais

O presente trabalho insere-se no contexto da Engenharia de Confiabilidade a qual avalia a probabilidade de um componente, sub-sistema ou sistema¹ exercer sua função sob condições operacionais específicas durante algum determinado período de tempo, Singpurwalla (2006). Considere que um sistema seja constituído de equipamentos, pessoas e da interação entre estes.

A aplicação de técnicas da Engenharia de Confiabilidade proporciona redução de custos, otimização do processo produtivo, estabelecimento de intervalos mais acurados de manutenção preventiva, redução do tempo de espera em operações de *setup*, níveis mais baixos de estoques intermediários, aumento da vida útil de plantas produtivas, entre outras vantagens.

O corrente trabalho tem seu foco em dois principais temas: processos semi Markovianos (PSMs) e Redes Bayesianas (RBs). Basicamente, um PSM pode ser definido como um modelo probabilístico no qual o comportamento futuro de um sistema depende de suas condições atuais assim como do tempo desde o qual possui tais condições. Entenda por condição ou estado de um sistema, as características relevantes (físicas, químicas, biológicas, etc.) que o definem.

Aplicações de PSMs podem ser encontradas, por exemplo, na literatura financeira como em D'amico *et al.* (2005), no qual o risco de concessão de crédito a empresas é modelado através de PSMs. Janssen e Manca (2001a) aplicam PSMs no contexto atuário para avaliação de modelos de recompensa de seguros de vida. Mathieu *et al.* (2005) utilizam PSMs na área de saúde pública para modelar a evolução infecciosa de pacientes portadores do vírus HIV (*Human Infected Virus*). Ainda dentro da área de saúde, Felli *et al.* (2007) utilizam PSMs para modelar a evolução do quadro médico de pacientes em ensaios clínicos a fim de avaliar a efetividade de novos medicamentos. Um outro tipo de PSM, denominado PSM Segmentado, foi originalmente desenvolvido na área de reconhecimento de voz, mas tem aplicações em áreas como segmentação de palavras e reconhecimento de tendências em séries temporais, veja Ge (2002).

¹ A distinção entre componente, sub-sistema ou sistema é realizada apenas por conveniência de modelagem.

Já as RBs, tratam-se de estruturas gráficas que capturam relações de causa e efeito assim como a magnitude dessas relações entre determinadas variáveis aleatórias de interesse. São Grafos Acíclicos Direcionados (DAGs), nos quais os nós representam variáveis (discretas ou contínuas) e os arcos representam as conexões ou dependências diretas entre tais variáveis. As conexões direcionadas são sempre conexões causais, ou seja, a direção dos arcos representa a relação de causa e efeito entre as variáveis.

Aplicações de RBs podem ser encontradas, por exemplo, em Dawid *et al.* (2006) os quais utilizam RBs na identificação de casos complexos de DNA quando há evidências de mutação entre genes ou na ausência do pai. García *et al.* (2005) utilizam RBs com intuito de detectar os fatores que determinam os diferentes estilos de aprendizagem de estudantes usuários de um sistema educacional baseado na Internet. Kao *et al.* (2005) utilizam RBs Dinâmicas (DBNs) como mecanismo descritivo de modelagem das relações de causa e efeito em uma cadeia de suprimento. Neste último trabalho, a variável ‘cumprimento (aderência) do planejamento’ determina a dependência temporal entre RBs adjacentes. Lauría e Duchessi (2006) demonstram como RBs podem ser utilizadas como parte integrante de um sistema de tomada de decisão sobre o tipo de Tecnologia de Informação a ser implementado.

Na próxima seção, serão apresentadas as contribuições e justificativas do presente trabalho.

1.2 Contribuições e Justificativas

A redução de lucros e de reputação devido à não operacionalidade é uma das maiores preocupações das organizações atuais. Segundo Galvani (2003), por exemplo, a legislação vigente dos órgãos reguladores determina que parte da receita de uma empresa de transmissão elétrica é variável e dependente da disponibilidade de seus ativos e/ou instalações. Então, quanto menores forem a frequência de falhas e o período de indisponibilidade, maior será a receita atribuída à empresa transmissora.

Um dos principais motivos da consecução do presente trabalho é a tentativa de desenvolver um modelo de análise de Confiabilidade que represente de forma mais fidedigna sistemas complexos passíveis de reparo (reparáveis), como por exemplo, as indústrias pesadas dos ramos petrolífero, petroquímico ou de fornecimento de energia elétrica. Os métodos probabilísticos mais comumente utilizados que almejam avaliar a Confiabilidade destes sistemas estão embutidos de hipóteses simplificadoras, conservadoras ou não.

Dentre as hipóteses existentes, pode-se citar a utilização de funções intensidade de falha constantes, i.e., supõe-se que o sistema em questão não sofre os efeitos de processos de deterioração. Segundo esta hipótese, a distribuição do número de falhas em um intervalo de tempo qualquer depende apenas do comprimento de tal intervalo e não da distância em relação à origem dos tempos. Esse tipo de hipótese é apenas real durante curtos períodos de tempo ou para alguns tipos de componentes eletrônicos, como lâmpadas e transistores. Os sistemas que possuem tal característica podem ser tratados por um processo Homogêneo de Poisson (PHP).

Outra hipótese simplificadora comumente utilizada é a de reparo perfeito, o que significa que o sistema é retornado a uma condição de “tão bom quanto novo” após uma operação de reparo. É uma suposição que pode ser utilizada para alguns sistemas não reparáveis, i.e., sistemas para os quais a operação de manutenção corresponde à completa substituição dos mesmos. Tais sistemas podem ser modelados através do denominado Processo de Renovação (PR), no qual os tempos entre falhas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas por uma distribuição arbitrária não necessariamente exponencial.

No extremo oposto ao reparo perfeito existe a hipótese de reparo mínimo, i.e., a ação de reparo recupera o sistema falho a uma condição que o mesmo possuía imediatamente antes da falha. O objetivo do reparo mínimo é apenas retornar o equipamento à operação, não melhorar seu desempenho. Esta é uma hipótese que na maioria das vezes não acontece na prática, já que a ação de reparo tem o intuito de melhorar o desempenho do sistema em relação ao que o mesmo possuía antes de falhar. Uma ação de reparo mínimo pode ser modelada por um Processo Não Homogêneo de Poisson (PNHP). Para maiores detalhes em PHP, PR ou PNHP veja Ross (1997).

Na maioria das vezes, uma ação de reparo recupera um sistema falho a uma condição intermediária entre um reparo perfeito e um reparo mínimo, o que é denominado reparo imperfeito. De certa forma, o reparo imperfeito pode ser entendido como um tipo de reparo geral que possui como extremos o reparo perfeito e o mínimo. Existe uma vasta literatura sobre métodos de tratamento e aplicações de ações de reparo imperfeito: Chukova *et al.* (2004), por exemplo, apresentam um método para modelar reparos imperfeitos na análise de tempos de garantia; Yañez *et al.* (2002) apresentam o modelo probabilístico de tratamento de reparo imperfeito conhecido como Processo de Renovação Generalizado (PRG); Moura e Droguett (2006a) utilizam conceitos do PRG para avaliar o grau de eficácia de equipes de manutenção de uma indústria de componentes automotivos; Doyen e Gaudoin (2004)

apresentam classes de modelos em reparo imperfeito baseados na redução que ações de reparo proporcionam na idade virtual ou na intensidade de falha de dado sistema; Pham e Wang (1996) apresentam uma vasta revisão da literatura que reúne cerca de quarenta métodos de tratamento de reparo imperfeito.

Entretanto, tanto o PR quanto o PHP, PNHP, PRG e a maioria dos métodos descritos em Pham e Wang (1996) são processos estocásticos pontuais, i.e., os tempos de reparo são considerados desprezíveis e negligenciados na análise de Confiabilidade. Tal suposição não faz sentido na maioria dos sistemas reparáveis nos quais tempos de reparo com unidades em dias e/ou semanas não são raros.

A suposição da condição (propriedade) Markoviana de falta de memória, a qual define um processo Markoviano, é outra hipótese bastante utilizada na análise de Confiabilidade de sistemas. Através desta hipótese, o comportamento futuro está condicionado apenas no estado presente desconsiderando o tempo de permanência em tal estado. Entretanto, tal hipótese em alguns casos não é real como, por exemplo, em sistemas tolerantes à falha. Nestes tipos de sistema, o comportamento futuro depende do seu estado presente assim como do tempo que permanecem em tal estado, o que invalida a propriedade Markoviana. Além disso, quando estes sistemas são formados por componentes sujeitos a processos de deterioração e/ou exigem tempos elevados de reparo, as hipóteses de funções intensidade de falha constantes e tempos de reparo desprezíveis também não são aplicáveis. Apesar de em alguns casos estes modelos probabilísticos (PHP, PR, PNHP, PRG, Processos Markovianos) serem uma boa aproximação da porção da realidade de interesse, em outros como, por exemplo, para sistemas complexos tolerantes à falha, não se adequam tão bem.

Um dos principais motivos da utilização das hipóteses anteriormente citadas é a simplificação dos modelos matemáticos e consequentemente numéricos. Modelos probabilísticos que tentam representar sistemas complexos de forma mais realística são intratáveis analiticamente ou produzem soluções numéricas de alto custo computacional.

Mesmo assim, alguns trabalhos que tentam eliminar ou pelo menos reduzir o impacto destas suposições já foram desenvolvidos e merecem ser citados, como por exemplo, Platis *et al.* (1998) os quais modelam o processo de deterioração de uma subestação elétrica através de processos Markovianos Não Homogêneos. Basicamente, neste tipo de processo Markoviano, o qual será descrito na subseção 3.1.4, o comportamento futuro de um sistema depende do estado presente e do intervalo de tempo decorrido desde o início da observação do mesmo, o qual é conhecido como tempo de processo.

Outro trabalho que merece ser citado foi desenvolvido por Limnios e Oprisan (2001) os quais utilizam processos semi Markovianos na análise de Confiabilidade de sistemas. Os PSMs são uma generalização dos processos Markovianos e por isso fornecem uma maior flexibilidade no que diz respeito à modelagem de sistemas dinâmicos complexos. Basicamente, um PSM é utilizado para modelar sistemas para os quais o comportamento futuro depende do estado presente e do tempo que permanecem neste, o qual é conhecido como tempo de permanência, local ou de residência.

Tanto em Platis *et al.* (1998) quanto em Limnios e Oprisan (2001), o comportamento futuro de determinado sistema é influenciado (condicionado) apenas por variáveis temporais, ora o tempo de processo ora o tempo de permanência. Entretanto, em alguns sistemas outras variáveis não necessariamente temporais podem influenciar seu estado, como por exemplo, as condições ambientais (temperatura, umidade, pressão, etc.), operacionais, fisiológicas e/ou psicológicas.

Para estes sistemas, torna-se imperativo o desenvolvimento de um modelo probabilístico que seja capaz de tratar como estas outras variáveis além do tempo influenciam seu comportamento. Devido a isto, a tentativa de superar as limitações impostas pelos modelos probabilísticos anteriormente citados será realizada aqui através da integração entre os processos semi Markovianos e as Redes Bayesianas.

Como será mostrado mais adiante, os PSMs não são mais estritamente Markovianos, i.e., a propriedade Markoviana não é exigida em todos os instantes de tempo. Porém, por possuírem características comuns suficientes a estes processos, os PSMs recebem tal denominação. Já as redes Bayesianas são estruturas probabilísticas capazes de detectar e tratar qualitativa e quantitativamente como fatores não necessariamente temporais (sejam estes físicos, comportamentais, etc.) interagem entre si e condicionam o comportamento futuro de um sistema. Além disso, por serem Bayesianas por natureza, as RBs permitem que atualizações do conhecimento sobre o comportamento do sistema sejam realizadas à medida que novas informações sobre os fatores condicionantes tornem-se disponíveis.

O hibridismo entre processos Markovianos e Redes Bayesianas já foi tratado em Moura e Droguett (2006b) e em Barros Jr. (2006). Em Moura e Droguett (2006b), as equações de estado dos processos Markovianos são resolvidas numericamente através do método de diferenças finitas. Neste último trabalho, as taxas de transição entre estados seguem distribuições paramétricas cujos parâmetros são efeito de fatores não necessariamente temporais os quais são modelados por RBs. Já em Barros Jr. (2006), é proposta uma solução

baseada em simulação Monte Carlo, a qual apesar de possuir tempo de simulação mais elevado, livra o modelo da hipótese de adequação a uma família de distribuições paramétricas.

Todavia, existe uma lacuna na literatura de trabalhos que tratem o hibridismo entre PSMs e RBs. Portanto, o modelo que será desenvolvido aqui é destinado a sistemas dinâmicos nos quais o comportamento futuro é determinado pelo estado presente assim como pelo tempo de permanência neste estado. Além disso, através da utilização de um tipo de PSM denominado Não Homogêneo será possível também que tais sistemas sejam constituídos por componentes sujeitos a processos de deterioração.

Desta maneira, no modelo proposto será possível assumir que os tempos de permanência em determinado estado sigam funções densidade de probabilidade paramétricas, como por exemplo, Exponencial ou *Lognormal*. A influência de outros fatores não necessariamente temporais sobre o comportamento do sistema será modelada a partir da estrutura de causa e efeito conhecida como Redes Bayesianas, dando origem a um modelo estocástico híbrido o qual será capaz de representar a incerteza associada à dinamicidade de um sistema ao mesmo tempo em que trata como as relações de causa e efeito existentes influenciam tal evolução.

A implementação numérica computacional é de tão igual importância quanto o desenvolvimento de tal modelo híbrido já que este é intratável analiticamente. Para alcançar tal objetivo, os PSMs tratados aqui serão definidos a partir de taxas de transição já que estes são mais passíveis de aplicação a problemas que se inserem no contexto da Engenharia de Confiabilidade do que os PSMs definidos por probabilidades de transição. Torna-se imperativo então propor e desenvolver a formulação numérica computacional das equações de probabilidades de transição destes PSMs as quais são equações integrais do tipo convolução. O método numérico de resolução destas equações será baseado na aplicação de transformadas de Laplace as quais serão invertidas utilizando o método de Quadratura *Gaussiana* conhecido como *Gauss Legendre*.

Possíveis exemplos de aplicação a sistemas tolerantes à falha serão apresentados ao final deste trabalho a fim de verificar a efetividade de tal modelo híbrido na avaliação de indicadores de desempenho de Confiabilidade deste tipo de sistema dinâmico complexo.

Na próxima seção, serão apresentados os objetivos do presente trabalho.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma metodologia de avaliação de indicadores de desempenho de Confiabilidade de sistemas reparáveis complexos via hibridismo entre processos semi Markovianos e Redes Bayesianas.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Revisão bibliográfica das técnicas de avaliação de Confiabilidade de sistemas reparáveis;
- Revisão bibliográfica e aplicações em Confiabilidade da estrutura de causa e efeito, denominada Redes Bayesianas;
- Desenvolvimento do método numérico de solução das equações de probabilidade de transição dos processos semi Markovianos definidos a partir de taxas de transição o qual será baseado na aplicação de transformadas de Laplace;
- Integração propriamente dita entre processos semi Markovianos e Redes Bayesianas;
- Implementação numérica do modelo híbrido proposto, em linguagem C++;
- Desenvolvimento dos exemplos de aplicação a sistemas tolerantes à falha.

1.3 Estrutura da dissertação

O presente trabalho de dissertação está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 são apresentados os conceitos fundamentais para análise de Confiabilidade. No capítulo 3, é apresentada a base conceitual a qual apresenta desenvolvimentos teóricos e aplicações presentes na literatura dos assuntos relevantes a tal trabalho, quais sejam: processos Markovianos, processos semi Markovianos e Redes Bayesianas. No capítulo 4, é proposto e desenvolvido o método numérico de resolução das equações das probabilidades de transição dos processos semi Markovianos definidos a partir de taxas de transição. No capítulo 5, é proposto o modelo baseado na integração entre processos semi Markovianos e Redes Bayesianas. Em tal capítulo, são também apresentados exemplos de aplicação do modelo híbrido proposto a sistemas tolerantes à falha. No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e considerações finais assim como os desafios e propostas de futuros trabalhos.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS PARA A ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

O objetivo do presente capítulo é sedimentar conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

2.1. Variável Aleatória

Segundo Degroot e Schervish (2002), uma variável aleatória pode ser definida como uma função de valor real que é definida em um espaço amostral A . Em outras palavras, uma variável aleatória X seria qualquer função que designa um número real $X(a)$ a cada possível resultado $a \in A$.

2.2. A função de Confiabilidade

A função de Confiabilidade $R(t)$ é definida como a probabilidade que um sistema irá realizar determinada função durante algum período de tempo t sob condições operacionais específicas. Sendo T a variável aleatória contínua que expressa o tempo de falha do sistema, $T \geq 0$, a função de Confiabilidade $R(t)$, pode ser expressa como:

$$R(t) = P\{T \geq t\}, \quad t \geq 0, \quad \text{Equação 2-1}$$

onde t é o instante correspondente ao final do período de observação do sistema. Em outras palavras, a função $R(t)$ pode ser interpretada como a probabilidade do sistema falhar pela primeira vez em ou após o instante t .

A função $R(t) \geq 0$ é monotônica decrescente (não crescente) $\forall t \geq 0$ e satisfaz as seguintes condições dadas na Equação 2-2 e Equação 2-3 as quais podem ser visualizadas na Figura 2-1:

$$R(0) = 1 \quad \text{Equação 2-2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0. \quad \text{Equação 2-3}$$

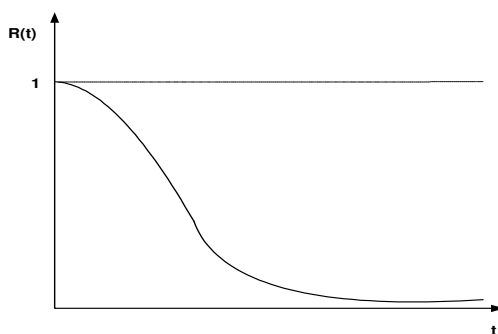


Figura 2-1 – Função de Confiabilidade

2.3. Função de distribuição acumulada (CDF)

A função $F(t)$ de distribuição acumulada (CDF) é definida como a probabilidade que um sistema irá falhar em algum instante de tempo inferior a t . A CDF corresponde ao complementar da função de Confiabilidade, como na Equação 2-4.

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - P\{T \geq t\} = 1 - R(t) \quad \text{Equação 2-4}$$

A função $F(t)$ é monotônica crescente (não decrescente) $\forall t \geq 0$ e satisfaz as condições dadas na Equação 2-5 e Equação 2-6, as quais podem ser visualizadas na Figura 2-2:

$$F(0) = 0 \quad \text{Equação 2-5}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1. \quad \text{Equação 2-6}$$

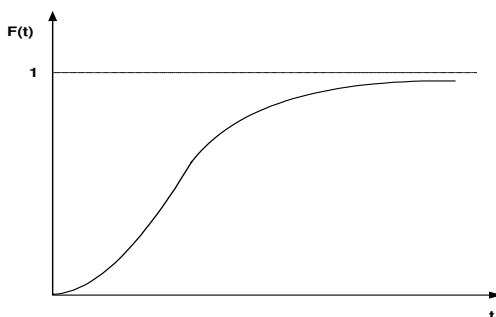


Figura 2-2 – Função de Distribuição Acumulada

2.4. Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função $f(t)$ densidade de probabilidade (PDF) é definida como segue na Equação 2-7:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}. \quad \text{Equação 2-7}$$

A PDF descreve a forma da função da distribuição do tempo de falha e possui as propriedades dadas na Equação 2-8 e Equação 2-9:

$$f(0) \geq 0 \quad \text{Equação 2-8}$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad \text{Equação 2-9}$$

Resolvendo a equação diferencial separada dada na Equação 2-7 para $F(t)$ e $R(t)$, respectivamente, as mesmas podem ser obtidas a partir da PDF como dado na Equação 2-10 e Equação 2-11 e mostrado na Figura 2-3:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Equação 2-10

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(\tau) d\tau.$$

Equação 2-11

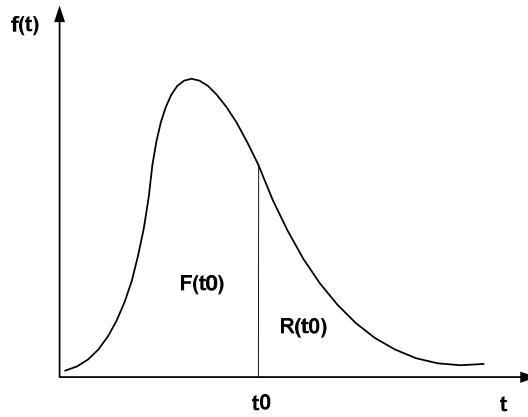


Figura 2-3 – Função Densidade de Probabilidade

2.5. Taxa de Falha

A função taxa de falha ou força de Mortalidade Instantânea $m(t)$ pode ser definida como a probabilidade de falha por unidade de tempo dado que o componente já tenha operado até o instante t . Em outras palavras, a taxa de falha é a probabilidade condicional de falha por unidade de tempo (instantânea) e é dada pela Equação 2-12:

$$m(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Equação 2-12

A função de Confiabilidade $R(t)$ pode ser obtida a partir da função da taxa de falha através da relação expressa na Equação 2-13:

$$R(t) = \exp \left[- \int_0^t m(\tau) d\tau \right].$$

Equação 2-13

2.6. Função Intensidade de falha (ROCOF)

Considerando que $E(N(t))$ seja o valor esperado do número de falhas de um sistema no intervalo de tempo $(0, t)$. Então, se $E(N(t))$ é diferenciável, a função intensidade de falha $ro(t)$, também conhecida como taxa de ocorrência de falhas (ROCOF) é definida como na Equação 2-14:

$$ro(t) = \frac{d}{dt} E(N(t)).$$

Equação 2-14

2.7. Sistemas não reparáveis x reparáveis

Um sistema não reparável é aquele para o qual a manutenção corresponde a sua completa substituição por outro idêntico e novo. Para efeitos de modelagem, caso o sistema não seja substituído pode-se considerar que o mesmo é não reparável se for completamente renovado após o reparo.

Já um sistema reparável é aquele para o qual a ação de reparo consiste de qualquer procedimento que não seja a sua completa substituição ou renovação.

2.8. Estado do sistema

O estado de um sistema pode ser definido como a combinação de valores de determinadas variáveis aleatórias de interesse. Por exemplo, em um processo químico, temperatura, volume e pressão consistem de variáveis de interesse para análise do sistema. A combinação de valores dessas variáveis determina um estado do sistema. O estado de um sistema é denominado absorvente se uma vez alcançado, o processo não o deixa dentro do tempo de missão considerado.

2.9. Transição entre estados

Em um processo químico, os valores da temperatura, volume e pressão estão dinamicamente mudando. Tal mudança de valores das variáveis de interesse determina a transição entre estados do sistema. No presente trabalho, será considerado que o conjunto X de estados do sistema é finito.

2.10. Tempo de permanência, local ou de residência

O tempo de permanência, local ou de residência τ_{ij} pode ser definido como o tempo em que o sistema permanece em um estado i até que se desloque para um estado j quando este é o estado sucessor. Os tempos de permanência τ_{ij} são variáveis aleatórias reais não negativas governadas por uma função densidade de probabilidade $h_{ij}(\cdot)$.

Os tempos locais ou de permanência são sempre reiniciados quando o processo entra em um determinado estado.

2.11. Tempo de espera

O tempo de espera τ_i pode ser definido como o valor esperado do tempo de permanência em um estado i independente de seu estado sucessor.

2.12. Tempo de processo, global ou de calendário

O tempo t de processo, global ou de calendário inicia-se no período da observação e diferentemente dos tempos de permanência e de espera não é reiniciado cada vez que o processo entra em determinado estado.

2.13. Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é uma família de variáveis aleatórias indexada no tempo (global e/ou permanência) que descreve o comportamento dinâmico de algum processo (físico, químico, biológico, etc.). No contexto de Engenharia de Confiabilidade, t é interpretado como o tempo e, como resultado, $X(t)$ representa o estado do processo no instante t .

2.14. Disponibilidade Operacional

No contexto de Engenharia de Confiabilidade, os estados que um sistema pode ocupar podem ser divididos em dois grandes grupos: conjunto D de estados disponíveis, nos quais o sistema está operacional e conjunto I de estados indisponíveis nos quais o sistema não está operacional, sendo $D \cup I = X$ e $D \cap I = \emptyset$. A disponibilidade operacional $A(t)$ de um sistema pode ser definida como a probabilidade que em t o sistema esteja no estado i pertencente ao conjunto D . A indisponibilidade corresponde ao complementar da disponibilidade.

A função de disponibilidade operacional $A_i(t)$ pode ser então calculada através do somatório das probabilidades do processo alcançar um dos estados $j \in D$ dado que o sistema estava em $t=0$ no estado i como na Equação 2-15:

$$A_i(t) = \sum_{j \in D} P_{ij}(t). \quad \text{Equação 2-15}$$

A função de Confiabilidade $R(t)$ de um sistema reparável que pode ocupar N estados pode ser calculada supondo que os estados do conjunto I são absorventes. A Confiabilidade $R_i(t)$ seria então calculada como a soma das probabilidades do sistema alcançar um estado

indisponível j dado que o mesmo estava em $t=0$ no estado disponível i como na Equação 2-16:

$$R_i(t) = \sum_{j \in I} P_{ij}^m(t), \quad \text{Equação 2-16}$$

onde $P_{ij}^m(t)$ é a probabilidade do sistema alcançar o estado indisponível j dado que o mesmo estava no estado disponível i supondo que todos os estados indisponíveis são absorventes.

2.15. Manutenibilidade

Para um sistema reparável, a facilidade com o que o mesmo sofre manutenção e é retornado à operação é medida através de sua manutenibilidade. Em outras palavras, manutenibilidade $M(t)$ pode ser entendida como a probabilidade que um sistema falho seja retornado à operação dentro de um período de tempo t considerando que a manutenção é realizada de acordo com os procedimentos preestabelecidos.

A função manutenibilidade $M(t)$ pode ser calculada supondo que todos os estados do conjunto D são absorventes. A manutenibilidade $M_i(t)$ seria então calculada como a soma das probabilidades do sistema alcançar um estado disponível j dado que o mesmo estava em $t=0$ no estado indisponível i como na Equação 2-17:

$$M_i(t) = \sum_{j \in D} P_{ij}^m(t), \quad \text{Equação 2-17}$$

onde $P_{ij}^m(t)$ é a probabilidade do sistema alcançar o estado disponível j dado que o mesmo estava no estado indisponível i supondo que todos os estados disponíveis são absorventes.

A Manutenibilidade $M(t)$, a Confiabilidade $R(t)$ e a (In)Disponibilidade operacional $A(t)$ são os indicadores de desempenho de Confiabilidade que serão analisados no presente trabalho.

3. BASE CONCEITUAL

O objetivo deste capítulo é apresentar a fundamentação teórica e algumas aplicações presentes na literatura dos principais temas relacionados ao presente trabalho.

3.1. Processos Markovianos

3.1.1. Propriedade Markoviana

Os processos Markovianos (PMs) são um dos processos estocásticos mais importantes para modelagem de sistemas dinâmicos. No contexto da Engenharia de Confiabilidade, são utilizados basicamente quando modelos como árvore de falhas, árvore de eventos ou diagrama de blocos são insuficientes para representar funcionalmente um sistema complexo.

Aqui será considerado o PM de espaço de estados finito $X = \{1, 2, \dots, N\}$ e tempo contínuo $t \geq 0$, i.e., as transições de um determinado estado para outro podem ocorrer em qualquer instante do tempo.

Um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é denominado processo Markoviano se o mesmo satisfaz a propriedade de Markov:

$$P(X(t) = j \mid X(v) = i, X(u) = x(u)) = P(X(t) = j \mid X(v) = i) \quad \text{Equação 3-1}$$

para todo possível $x(u), 0 \leq u < v$, veja Ross (1997).

Segundo Howard (1971b), a Equação 3-1 também conhecida como “falta de memória” significa que quando o presente sobre o processo é conhecido, o desenvolvimento futuro é incondicional ao passado. Para os PMs, tal propriedade é verdadeira em todos os instantes de tempo.

3.1.2. Equações de Chapman – Kolmogorov

Estruturalmente, um PM é composto por nós que representam os possíveis estados que o processo pode ocupar, e setas as quais correspondem às transições entre estados.

Probabilisticamente, um PM no tempo é caracterizado a partir de um vetor de probabilidades iniciais $P(X(0) = k), k \in X$ e pelas probabilidades de transição entre estados:

$$p_{ij}(v, t) = P(X(t) = j \mid X(v) = i) \quad \text{Equação 3-2}$$

para $0 \leq v \leq t$ e $i, j = 1, \dots, N$, onde N é o número de estados do PM.

As probabilidades de transição de um PM satisfazem a equação de *Chapman-Kolmogorov*, a qual estabelece que $\forall i, \forall j \in X$:

$$p_{ij}(v, t) = \sum_{k=1}^N p_{ik}(v, u) \cdot p_{kj}(u, t) \quad \text{Equação 3-3}$$

para $0 \leq v < u < t$.

No caso de tempo discreto², o cálculo das probabilidades de transição em um instante qualquer m através da Equação 3-3 reduz-se à multiplicação entre as matrizes P_0 das probabilidades de transição iniciais e P_{m-1} das probabilidades de transição no instante $m-1$.

Já no caso de tempo contínuo, as probabilidades de transição são obtidas a partir de um sistema de equações diferenciais como demonstrado no ANEXO A e dado pela Equação 3-4:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N P_i(t) \cdot \lambda_{ij}(t) + P_j(t) \cdot \lambda_{jj}(t) \quad \text{Equação 3-4}$$

onde $\lambda_{ij}(t)$ é uma função contínua e não negativa, conhecida como taxa de transição do estado i para o estado j . No contexto de Engenharia de Confiabilidade, $\lambda_{ij}(t)$ pode representar taxas de falha ou reparo.

Existem diversas técnicas de resolução do sistema formado pelas N equações da forma da Equação 3-4 para o caso contínuo. Entre as quais podem-se citar o método de *Runge-Kutta* de 4ª ou 5ª ordem ou a utilização de variáveis suplementares, veja Oliveira *et al.* (2005).

3.1.3. PM Homogêneo

A Equação 3-4 torna-se mais simples quando se trata do processo de Markov Homogêneo (PMH). Nesse tipo de PM, as taxas de transição $\lambda_{ij}(t)$ são constantes no tempo o que resulta que a distribuição do tempo de permanência nos estados é exponencial com parâmetro $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$.

Em um PMH, o número esperado de falhas depende apenas do intervalo de tempo Δt considerado e não do tempo desde que o sistema alcançou determinado estado nem do tempo de processo. Diz-se, então, que o PMH possui incrementos estacionários e desta maneira não é recomendado para modelagem de sistemas que estão sujeitos a processos de deterioração ou de melhoria.

² No caso discreto, o domínio do tempo corresponde ao conjunto dos números naturais não negativos.

3.1.4. PM Não Homogêneo

Já quando na Equação 3-4 as taxas de transição dependem do tempo de processo, o PM é denominado Não Homogêneo (PMNH). Nesse caso, os incrementos não são mais estacionários e as distribuições do tempo de permanência são condicionadas no tempo de processo. Devido a isto, através da aplicação do PMNH o processo de desgaste de sistemas pode ser melhor modelado.

Como aplicações de PMs em Confiabilidade pode-se citar, por exemplo, o trabalho de Smotherman e Zemoudeh (1989) no qual PMNHs são utilizados para avaliar a Confiabilidade de sistemas que possuem múltiplas fases operacionais cada uma da qual com duração aleatória. Platis *et al.* (1998) aplicam PMNHs em tempo discreto para avaliar métricas de Confiabilidade, além de outros indicadores de desempenho de uma subestação elétrica francesa. Moura *et al.* (2005) utilizam PMs para avaliar a disponibilidade operacional de duas malhas de completção inteligente de poços de petróleo, entre outras aplicações.

Nesta seção, foi apresentada uma visão geral sobre os processos Markovianos. A equação de *Chapman-Kolmogorov* a qual calcula as probabilidades de estado de um PM foi apresentada. A distinção entre processos Markovianos Homogêneos e Não Homogêneos também foi realizada.

3.2. Processos semi Markovianos

3.2.1. Conceitos

Segundo Howard (1971a), pode-se entender um processo semi Markoviano (PSM) como um modelo probabilístico no qual a ocupação sucessiva de estados é governada pelas probabilidades de transição de um PM, mas para o qual o tempo de permanência em determinado estado é descrito por uma variável aleatória real que depende do estado correntemente ocupado e do estado para o qual a próxima transição será feita.

Em um PSM, a propriedade Markoviana é exigida somente nos instantes de transição entre estados, sendo este o motivo de tal processo não ser mais estritamente Markoviano. Assim, a distribuição da duração nos estados pode ser arbitrária, assumindo uma função densidade de probabilidade que pode não ser exponencial.

Os PSMs são modelos bastante utilizados na modelagem de sistemas dinâmicos complexos. Tais processos apresentam uma maior flexibilidade de modelagem do que os sistemas Markovianos ao mesmo tempo em que generalizam resultados obtidos por estes.

Segundo Ouhbi e Limnios (2003), há casos nos quais a propriedade Markoviana não pode ser aceita já que é necessário permitir que o tempo de permanência em determinado estado seja exponencialmente distribuído. Esta é uma das razões devido a qual os PSMs são recomendados.

3.2.2. Aplicações em Confiabilidade

No contexto de Engenharia de Confiabilidade, algumas aplicações e desenvolvimentos teóricos em PSMs merecem ser citados: Perman *et al.* (1997) aplicam um procedimento recursivo para aproximar as probabilidades de transição entre estados ao longo do tempo e a disponibilidade média de um PSM. Fórmulas fechadas para tais métricas não são disponíveis quando as distribuições do tempo de permanência em determinado estado são gerais (arbitrárias). Tal procedimento recursivo é então utilizado para adequar os dados de falha de uma planta de força (*power plant*) a um modelo semi Markoviano com distribuições condicionais do tempo de permanência seguindo uma *Weibull* com parâmetros dependentes apenas do estado presente.

Limnios (1997) argumenta que a principal vantagem de usar PSMs é permitir distribuições não exponenciais para os tempos de permanência em determinado estado e assim generalizar vários tipos de processos estocásticos, entre eles o processo Markoviano. Dado que na realidade tempos de falha e reparo são na maioria das vezes não exponenciais, este tipo de modelo é bastante importante. PSMs são uma larga família de processos estocásticos que incluem como casos especiais processos Markovianos em tempo discreto e contínuo e os processos de renovação alternado e modificado, por exemplo. Neste último trabalho, é realizada uma análise de Dependabilidade (Disponibilidade; Confiabilidade; Manutenibilidade; Tempos Médios) para sistemas semi Markovianos com espaço de estados finito e em tempo discreto através de um método baseado em cálculos algébricos.

Ouhbi e Limnios (1997) estimam a Confiabilidade e disponibilidade de um rotor turbo-gerador a partir dos dados de falha observados na *Electricité De France* utilizando PSMs.

Ouhbi e Limnios (2002) investigam e derivam uma formulação estatística para avaliar a taxa de ocorrência de falhas (ROCOF) de processos semi Markovianos. Através deste resultado, as ROCOFs de sistemas Markovianos e processos de renovação alternados são também derivadas como casos especiais.

Grabski (2003) apresenta as propriedades da função de Confiabilidade de um componente o qual é submetido a um processo de carga aleatória e que possui uma taxa de falha modelada

por um PSM. Neste trabalho, as noções básicas de um PSM são apresentadas utilizando um processo de Renovação Markoviano. As funções de Confiabilidade foram obtidas através da aplicação das transformadas de Laplace-*Stieltjes* às equações de renovação e utilizando o sistema computacional MATHEMATICA para obter uma solução analítica da transformada inversa.

Ouhbi e Limnios (2003) introduzem estimadores não paramétricos para Confiabilidade e disponibilidade de sistemas semi Markovianos avaliando as propriedades assintóticas de tais métricas. Um método para construir intervalos de confiança para tais estimadores é dado e um exemplo de aplicação é realizado para um PSM de três estados.

Limnios e Oprisan (2003) apresentam uma visão geral do trabalho desenvolvido em Limnios e Oprisan (2001) o qual demonstra resultados bastante importantes e aplicações de PSMs em análises de Confiabilidade.

Pievatolo e Valadè (2003) avaliam a Confiabilidade de sistemas elétricos de operação contínua. Em tal trabalho, é desenvolvido um modelo analítico o qual possibilita que as distribuições dos tempos de falha e reparo sejam não exponenciais. PSMs são então utilizados para calcular o tempo médio entre falhas (MTBF) e o tempo médio para recuperação (MTTR) de um compensador de saída de voltagem.

El-Gohary (2004) apresenta estimadores de máxima verossimilhança (EMV) e Bayesianos para os parâmetros de modelos de Confiabilidade semi Markovianos. Em geral, os EMVs não têm forma fechada e são soluções de um sistema complexo de equações não lineares. Outro método o qual pode permitir obter estimações dos parâmetros do PSM é o Bayesiano o qual é bastante atrativo quando a experiência sobre dados de falha é limitada. Veja Martz e Waller (1982) para conceitos básicos sobre inferência Bayesiana e Droguett e Mosleh (2006) para uma aplicação desta metodologia na análise de Confiabilidade de produtos em desenvolvimento.

Afchain (2004) propõe um método de estimação não paramétrica das distribuições dos tempos de falha e reparo de um PSM assumindo que tais fenômenos possuem uma competição mútua. Um exemplo de aplicação foi realizado a um sistema industrial composto por três componentes e um operador de manutenção.

Limnios e Ouhbi (2005) apresentam estimadores não paramétricos de alguns importantes indicadores em análise de Confiabilidade de sistemas semi Markovianos. Entre tais, estão o

tempo médio até a falha (MTTF) e o tempo médio fora de serviço (MDT). As propriedades assintóticas de tais estimadores também são avaliadas.

Chen e Trivedi (2005) utilizam processos de decisão semi Markovianos para otimizar de forma conjunta a taxa de inspeção e o intervalo entre manutenções preventivas. É assumido neste trabalho que a manutenção é realizada não em intervalos de tempo pré-determinados, mas sim de acordo com a condição de degradação do sistema.

Xie *et al.* (2005) analisam políticas de rejuvenescimento parcial e total de *softwares* utilizando PSMs. Sem uma ação de rejuvenescimento proativa aplicada a sistemas de *software*, a qualidade do serviço decrementa devido a motivos como, por exemplo, o espaço restrito de memória livre, o que compromete a alta disponibilidade. Em tal trabalho, um modelo semi Markoviano é construído com o intuito de maximizar a disponibilidade do sistema. Solução analítica para disponibilidade é obtida como uma função bivariada dos níveis de rejuvenescimento do *software*.

Soszynska (2006) utiliza PSMs para avaliar a Confiabilidade de um sistema k de n de transporte de petróleo em condições operacionais variáveis. Neste trabalho, o PSM é responsável por relacionar as condições operacionais do sistema com a sua função de Confiabilidade.

Jenab e Dhillon (2006) utilizam PSMs para desenvolver um modelo analítico que avalie não somente a Confiabilidade e a disponibilidade assim como a probabilidade, a média e o desvio padrão do tempo em que um sistema k de n multi-estado reversível alcança determinado estado. Neste trabalho, é apresentado um exemplo de aplicação no qual as distribuições de probabilidade condicionais do tempo de permanência em determinado estado são todas Normais.

3.2.3. Terminologia

Basicamente, existem dois tipos de processos semi Markovianos: Homogêneos (PSMH), nos quais as probabilidades de transição entre estados dependem do tempo de permanência em determinado estado; e Não Homogêneos (PSMNH), nos quais as probabilidades de transição dependem tanto do tempo de permanência em determinado estado quanto do tempo de processo, também conhecido como tempo de calendário, o qual é definido na seção 2.12.

O PSM de espaço de estados finito em tempo contínuo será descrito nas próximas seções, as quais tratarão dos processos semi Markovianos Homogêneo e Não Homogêneo, nessa

ordem. Serão apresentadas características particulares dos respectivos processos semi Markovianos.

3.3. Processos semi Markovianos Homogêneos

3.3.1. Conceitos Básicos e Exemplo

Antes de desenvolvimentos teóricos mais avançados, os conceitos básicos dos Processos semi Markovianos Homogêneos (PSMHs) serão apresentados através de um exemplo simples ilustrativo o qual se insere no contexto do departamento de vendas de uma empresa de manufatura de lâminas de barbear.

Basicamente, suponha que tal empresa produza dois tipos de produtos e dado que um consumidor adquiriu o produto 1 na sua última compra há uma probabilidade igual a 0.8 de adquirir novamente o produto 1 e, portanto, 0.2 de adquirir o produto 2 na sua próxima compra. Dado que o consumidor adquiriu o produto 2 na sua última compra, há uma probabilidade igual a 0.3 de adquirir o produto 1 e 0.7 de adquirir novamente o produto 2 em sua próxima compra. A partir destes dados, a seguinte matriz de transição pode ser construída:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = [p_{ij}]. \quad \text{Equação 3-5}$$

Como relatado na seção 3.2, segundo Howard (1971a) os PSMs podem ser entendidos como um processo no qual a ocupação sucessiva de estados é governada pelas probabilidades de transição de um PM. Tal processo, conhecido como PM embutido, determina a trajetória do sistema modelado a partir das probabilidades de transição as quais neste caso são dadas na Equação 3-5. Desta forma, para todo PSM está associado um processo Markoviano, conhecido PM embutido, o qual é responsável pelas transições entre estados.

Entretanto, o tempo de permanência em cada estado é descrito por uma variável aleatória real positiva que depende tanto do estado presentemente ocupado quanto do estado para o qual a próxima transição será feita. Ou seja, nos instantes de transição o PSM comporta-se exatamente como um processo Markoviano, porém os instantes nos quais tais transições ocorrem são modelados por um mecanismo probabilístico diferente.

Então, após o consumidor decidir qual produto (1 ou 2) irá adquirir e então realizar a compra, o tempo até a próxima aquisição dependerá das características particulares de cada produto. O produto 1 é composto por apenas uma lâmina de barbear e, portanto, executa sua função de forma satisfatória por um período esperado inferior que o produto 2 o qual possui

três lâminas. Entretanto, o preço de cada produto é inversamente proporcional ao número de lâminas que o mesmo contém.

Desta forma, de acordo com dados do departamento de vendas nota-se que o tempo de uso de dado produto pelo consumidor depende do instante desde a última compra e tem funções de densidade condicionais dadas na Equação 3-6. Cada função $h_{ij}(\bullet)$ representa a função densidade de probabilidade (PDF) condicional do tempo de uso em semanas do produto i dado que o próximo produto a ser adquirido será j . Tal tempo de uso corresponde ao tempo local ou de permanência condicional o qual é descrito na seção 2.10.

$$H(\tau) = \begin{bmatrix} h_{11}(\tau) = 4e^{-4\tau} & h_{12}(\tau) = 2e^{-2\tau} \\ h_{21}(\tau) = 3e^{-3\tau} & h_{22}(\tau) = e^{-\tau} \end{bmatrix} = [h_{ij}(\tau)], \quad \tau \geq 0. \quad \text{Equação 3-6}$$

A Figura 3-1 ilustra o diagrama de estados, as possíveis transições assim como as probabilidades de transição e PDFs condicionais dos tempos de uso de cada produto. Nesta figura, o número do estado é referente ao nome do produto. Desta forma, uma transição para o estado 1 corresponde à compra do produto 1 e para o estado 2 à compra do produto 2.

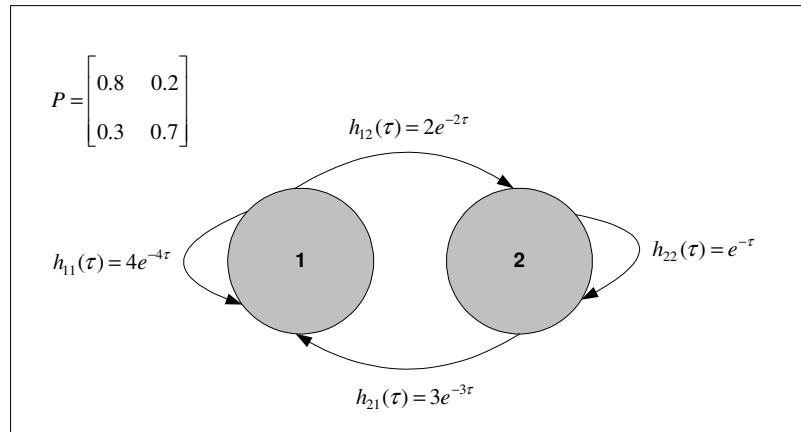


Figura 3-1 – Diagrama de transições para o exemplo da empresa de manufatura de lâminas de barbear

Nota-se que para definir um PSM completamente, é necessária a determinação de N^2 probabilidades de transição do PM embutido dadas na Equação 3-5 assim como N^2 PDFs do tempo de permanência que seguem na Equação 3-6.

Neste caso, as PDFs da Equação 3-6 são todas exponenciais com parâmetros diferentes representando as durações condicionais do tempo de permanência em cada estado. Utilizando a notação $\bar{\tau}_{ij} = 1/\lambda_{ij}$ e $\sigma_{ij}^2 = 1/\lambda_{ij}^2$ para a média e variância respectivamente do tempo de uso

do produto i dado que o próximo produto a ser comprado será j , tem-se os valores mostrados na Tabela 3-1, onde λ_{ij} corresponde ao parâmetro da PDF exponencial do tempo de permanência.

Tabela 3-1 – Médias e variâncias dos tempos de uso de cada produto em semanas

i	j	$\bar{\tau}_{ij}$	σ_{ij}^2
1	1	$1/4$	$1/16$
1	2	$1/2$	$1/4$
2	1	$1/3$	$1/9$
2	2	1	1

Preliminarmente, tais resultados mostram que os consumidores que preferem o produto 2 compram em média a cada semana este produto, o qual é mais caro do que o produto 1, mas possui um tempo esperado de uso superior.

Alternativamente, pode-se representar a natureza probabilística dos tempos de permanência a partir de sua função de distribuição acumulada $F_{ij}(t)$ (CDF) e do seu complementar $\bar{F}_{ij}(t)$ as quais são dadas na Equação 3-7 e Equação 3-8, respectivamente:

$$F_{ij}(t) = P\{\tau_{ij} \leq t\} = \int_0^t h_{ij}(\tau) d\tau \quad \text{Equação 3-7}$$

$$\bar{F}_{ij}(t) = P\{\tau_{ij} > t\} = \int_t^\infty h_{ij}(\tau) d\tau = 1 - F_{ij}(t). \quad \text{Equação 3-8}$$

Neste caso, já que todas as CDFs e respectivos complementares dos tempos de permanência são exponenciais, então estes podem ser escritos em forma matricial como na Equação 3-9 e Equação 3-10, onde o índice M representa a formulação matricial:

$$F_{ij}^M(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-4t} & 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-3t} & 1 - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad \text{Equação 3-9}$$

$$\bar{F}_{ij}^M(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{-2t} \\ e^{-3t} & e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0. \quad \text{Equação 3-10}$$

O tempo de permanência é condicional no estado presentemente ocupado e no estado para o qual a próxima transição será feita. Porém, dada a natureza estocástica do processo não se sabe qual o estado o mesmo ocupará em seguida. Pode-se definir, então, o tempo de espera τ_i

como uma variável aleatória real positiva que representa o tempo de permanência no estado i quando não se conhece qual o estado sucessor. O tempo de espera τ_i , por exemplo, representa o tempo de uso do produto 1 dado que não se sabe se o consumidor irá adquirir o produto 1 ou 2 em sua próxima compra.

A função densidade de probabilidade $w_i(\cdot)$ do tempo de espera no estado i está relacionada à função densidade de probabilidade $h_{ij}(\cdot)$ do tempo de permanência de acordo com a Equação 3-11:

$$w_i(\tau) = \sum_{j=1}^N p_{ij} h_{ij}(\tau), \quad \text{Equação 3-11}$$

onde N representa o número de estados do processo. Em tal equação, a variável que representa o estado i é marginalizada através do somatório da ponderação das PDFs do tempo de permanência pelas probabilidades que as mesmas ocorrem ao longo de todos os possíveis estados sucessores j .

Segundo Howard (1971a), a função de distribuição acumulada $F_i(t)$ e seu complementar $\bar{F}_i(t)$ fornecem uma representação alternativa da natureza probabilística dos tempos de espera τ_i . Tais funções são dadas e relacionadas à CDF $F_{ij}(t)$ e ao complementar da CDF $\bar{F}_{ij}(t)$ do tempo de permanência τ_{ij} , como segue na Equação 3-12 e Equação 3-13, respectivamente:

$$F_i(t) = P\{\tau_i \leq t\} = \int_0^t w_i(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{j=1}^N p_{ij} h_{ij}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^N p_{ij} F_{ij}(t) \quad \text{Equação 3-12}$$

$$\bar{F}_i(t) = P\{\tau_i > t\} = \int_t^\infty w_i(\tau) d\tau = \int_t^\infty \sum_{j=1}^N p_{ij} h_{ij}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^N p_{ij} \bar{F}_{ij}(t). \quad \text{Equação 3-13}$$

As funções densidade, funções de distribuição acumulada e respectivos complementares do tempo de espera para o exemplo da indústria de lâminas de barbear estão apresentadas na Tabela 3-2:

Tabela 3-2 – Funções densidade, funções de distribuição acumulada e respectivos complementares do tempo de espera para o exemplo

i	$w_i(t)$	$F_{w_i}(t)$	$\bar{F}_{w_i}(t)$
1	$3.2e^{-4t} + 0.4e^{-2t}$	$1 - 0.8e^{-4t} - 0.2e^{-2t}$	$0.8e^{-4t} + 0.2e^{-2t}$
2	$0.9e^{-3t} + 0.7e^{-t}$	$1 - 0.3e^{-3t} - 0.7e^{-t}$	$0.3e^{-3t} + 0.7e^{-t}$

Faz-se necessário definir a matriz “núcleo” (*kernel*) $C(\tau)$ do PSMH para a qual os elementos são os produtos dos elementos correspondentes da matriz P e $H(\tau)$ como segue na Equação 3-14. O *kernel* matricial $C(\tau)$ é o descritor fundamental do PSMH já que possui os elementos que determinam as transições entre os estados e o tempo de permanência condicional:

$$C(\tau) = P \square H(\tau) \quad \text{Equação 3-14}$$

onde o símbolo $\square$ representa a multiplicação entre os elementos correspondentes das matrizes P e $H(\tau)$.

A matriz $C(\tau)$ para o exemplo é dada na Equação 3-15. Nota-se que o somatório ao longo da linha i da matriz $C(\tau)$ é igual a função densidade do tempo de espera $w_i(\tau)$ no estado i .

$$C(\tau) = P \square H(\tau) = \begin{bmatrix} 3.2e^{-4\tau} & 0.4e^{-2\tau} \\ 0.9e^{-3\tau} & 0.7e^{-\tau} \end{bmatrix} = [c_{ij}(\tau)], \tau \geq 0 \quad \text{Equação 3-15}$$

Na próxima subseção, será mostrado como é possível avaliar a evolução temporal das probabilidades de transição entre estados do PSMH as quais serão denominadas como probabilidades de transição intervalares $\phi_{ij}(t)$.

3.3.2. Probabilidades de Transição Intervalares

Permita definir $\phi_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}$ como a probabilidade que o processo alcançará o estado j no instante t dado que o mesmo entrou no estado i no instante $t=0$. Utilizando a notação apresentada na seção anterior, a equação fundamental dos PSMHs a qual define as probabilidades de transição intervalares é dada em Howard (1971a) como na Equação 3-16:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t) &= \delta_{ij}(1 - F_i(t)) + \\ &\sum_{k=1}^N p_{ik} \int_0^t h_{ik}(\tau) \phi_{kj}(t - \tau) d\tau \quad j = 1, 2, \dots, N \\ &t \geq 0. \end{aligned} \quad \text{Equação 3-16}$$

onde N é o número de estados do PSMH; δ_{ij} é o delta de *Kronecker* o qual é unitário para $i = j$ e nulo para $i \neq j$; $F_i(t)$ é a CDF do tempo de espera τ_i no estado i ; p_{ik} é a probabilidade de transição

do estado i para o estado k do PM embutido e $h_{ik}(\cdot)$ é a PDF do tempo de permanência no estado i dado que o próximo estado a ser ocupado é k .

A Equação 3-16 pode ser interpretada da seguinte forma: a primeira parcela da soma corresponde ao evento no qual o PSMH permanece no estado i pelo menos até o instante t e somente contribui para $p_{ii}(t)$. Já a segunda parcela descreve o evento que o processo permanece no estado i até o instante τ quando se desloca para algum estado k e então se move de k para j em $t - \tau$ unidades de tempo, sendo $t > \tau$.

A Equação 3-16 é conhecida como a equação fundamental dos PSMHs e tem como caso especial a equação de *Volterra* de segunda ordem, veja Press *et al.* (2002) para maiores detalhes. Tal equação pode ser escrita na forma matricial como na Equação 3-17:

$$\Phi(t) = \overline{F}_i^M(t) + \int_0^t (P \square H(\tau)) \Phi(t - \tau) d\tau. \quad \text{Equação 3-17}$$

Onde $\overline{F}_i^M(t)$ é a matriz dos complementares das CDFs do tempo de espera τ_i . A matriz $\overline{F}_i^M(t)$ é uma matriz diagonal na qual para $i = j$ seu elemento é igual ao complementar da CDF do tempo de espera sendo nulo caso contrário. O somatório da Equação 3-16 desaparece na representação matricial da Equação 3-17 devido à multiplicação entre as matrizes $P \square H(\tau)$ e $\Phi(t - \tau)$.

A matriz $P \square H(\tau)$ como relatado anteriormente corresponde ao *kernel* $C(\tau)$ do PSMH. Desta forma, a Equação 3-17 pode ser reescrita como na Equação 3-18:

$$\Phi(t) = \overline{F}_i^M(t) + \int_0^t C(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau. \quad \text{Equação 3-18}$$

A Equação 3-18 corresponde a um sistema de N^2 equações integrais de convolução, as quais recebem tal denominação devido à integral que aparece na segunda parcela, veja Boyce e Dippima (2002).

Uma integral de convolução tem a seguinte forma:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad \text{Equação 3-19}$$

Fazendo uso do resultado dado na Equação A. 6 demonstrada no APÊNDICE A que a convolução de duas funções de tempo contínuo $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ tem transformada de Laplace (TL) igual ao produto das transformadas individuais, pode-se transformar o sistema de

equações integrais da Equação 3-18 em um sistema de equações algébricas através da aplicação de TLs.

Desta forma, usando a notação que $\tilde{f}(s)$ é a TL da função $f(t)$ e aplicando tais transformadas à Equação 3-18, tem-se que:

$$\tilde{\Phi}(s) = \tilde{\bar{F}}_i^M(s) + \tilde{C}(s) * \tilde{\Phi}(s), \quad \text{Equação 3-20}$$

onde s é a variável transformada; $\tilde{\Phi}(s)$ é a matriz das TLs das probabilidades de transição intervalares; $\tilde{\bar{F}}_i^M(s)$ é a matriz das TLs do complementar das CDFs do tempo de espera; $\tilde{C}(s)$ é a matriz das TLs do *kernel* do PSMH.

Resolvendo para $\tilde{\Phi}(s)$, a Equação 3-20 torna-se:

$$[I - \tilde{C}(s)] \tilde{\Phi}(s) = \tilde{\bar{F}}_i^M(s) \quad \text{Equação 3-21}$$

$$\tilde{\Phi}(s) = [I - \tilde{C}(s)]^{-1} \tilde{\bar{F}}_i^M(s). \quad \text{Equação 3-22}$$

A Equação 3-22 significa que a matriz das TLs das probabilidades de transição intervalares é igual à multiplicação da inversa da matriz que se obtém subtraindo $\tilde{C}(s)$ da matriz Identidade pela matriz das TLs do complementar das CDFs do tempo de espera. Segundo Howard (1971a), tal matriz inversa sempre existirá para o tipo de processo que se está considerando.

Retornando ao exemplo apresentado na seção anterior, será montada a formulação matricial necessária para o cálculo das TLs das probabilidades de transição intervalares dadas pela Equação 3-22.

Utilizando os resultados da Equação A. 4 e Equação A. 8 no APÊNDICE A nos quais é demonstrado que a TL da função ae^{-at} é igual a $a/(s+a)$, a matriz $\tilde{H}(s)$ das TLs das PDFs dos tempos de permanência pode ser montada como segue na Equação 3-23:

$$\tilde{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+4} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{3}{s+3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = [\tilde{h}_{ij}(s)]. \quad \text{Equação 3-23}$$

A matriz $\tilde{C}(s)$ pode ser calculada como segue na Equação 3-24:

$$\tilde{C}(s) = P \square \tilde{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{3.2}{s+4} & \frac{0.4}{s+2} \\ \frac{0.9}{s+3} & \frac{0.7}{s+1} \end{bmatrix} = [\tilde{c}_{ij}(s)]. \quad \text{Equação 3-24}$$

A matriz $\tilde{F}_i^M(s)$ pode ser calculada utilizando o resultado no APÊNDICE A dado pela Equação A. 13 a qual mostra que $\tilde{F}_i(s) = \frac{1}{s}(1 - \tilde{w}_i(s))$, i.e., a TL do complementar da CDF do tempo de espera no estado i é igual a subtrair da unidade a TL da PDF do tempo de espera no estado i e então dividir pela variável transformada.

A TL da PDF do tempo de espera $\tilde{w}_i(s)$ no estado i pode ser obtida através da relação com a TL da PDF do tempo de permanência $\tilde{h}_{ij}(s)$ como segue na Equação 3-25:

$$\tilde{w}_i(s) = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{h}_{ij}(s). \quad \text{Equação 3-25}$$

Portanto, a matriz $\tilde{F}_i^M(s)$ é dada como segue na Equação 3-26:

$$\tilde{F}_i^M(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.8}{s+4} + \frac{0.2}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{0.3}{s+3} + \frac{0.7}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2.4}{(s+2)(s+4)} & 0 \\ 0 & \frac{s+2.4}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}. \quad \text{Equação 3-26}$$

Os próximos passos são subtrair a matriz $\tilde{C}(s)$ da matriz Identidade, calcular a inversa da matriz resultante e então multiplicá-la pela matriz das TLs do complementar das CDFs dos tempos de espera. Tais passos são mostrados na Equação 3-27, Equação 3-29 e Equação 3-30, respectivamente.

A matriz inversa é calculada a partir do cálculo do determinante da matriz M e da matriz adjunta $\overline{M}$ através do resultado demonstrado no ANEXO B.

$$M = I - \tilde{C}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.8}{s+4} & \frac{-0.4}{s+2} \\ \frac{-0.9}{s+3} & \frac{s+0.3}{s+1} \end{bmatrix} \quad \text{Equação 3-27}$$

Calculando o determinante da matriz M :

$$|M| = |I - \tilde{C}(s)| = \frac{s(s^3 + 6.1s^2 + 11.38s + 6)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s(s+2.4)(s^2+3.7s+2.5)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \\
&= \frac{s(s+0.88953)(s+2.4)(s+2.81047)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.
\end{aligned}$$

Equação 3-28

E então calculando a inversa da matriz M :

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= [I - \tilde{C}(s)]^{-1} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{s(s+0.88953)(s+2.4)(s+2.81047)} \begin{bmatrix} \frac{s+0.3}{s+1} & \frac{0.4}{s+2} \\ \frac{0.9}{s+3} & \frac{s+0.8}{s+4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Equação 3-29

A matriz das TLs das probabilidades de transição intervalares é então calculada pela multiplicação da matriz M^{-1} pela matriz $\tilde{F}_i^M(s)$ como segue na Equação 3-30:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(s) &= [I - \tilde{C}(s)]^{-1} \tilde{F}_i^M(s) \\
&= \frac{1}{s(s+0.88953)(s+2.81047)} \begin{bmatrix} (s+0.3)(s+3) & 0.4(s+4) \\ 0.9(s+1) & (s+0.8)(s+2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Equação 3-30

Dada a solução transformada da Equação 3-30, o problema agora consiste em inverter a transformada, i.e., obter a solução das probabilidades de transição intervalares na variável tempo t através das soluções na variável s .

O problema da inversão de TLs está incluído em uma classe de problemas mais geral conhecida como Problemas Inversos. Basicamente, um problema Inverso consiste em se determinar causas a partir da observação de seus respectivos efeitos. No caso das TLs, as causas são os valores das probabilidades de transição intervalares ao longo do tempo t e os efeitos são os próprios valores das transformadas.

O procedimento analítico de inversão de TLs consiste em se analisar se a solução transformada corresponde à TL de alguma função conhecida. Para auxiliar tal análise, faz-se necessária a expansão em frações parciais da Equação 3-30. Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(s) &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+0.88953} \begin{bmatrix} 0.72813 & -0.72813 \\ -0.05818 & 0.05818 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{s+2.81047} \begin{bmatrix} -0.08813 & 0.08813 \\ -0.30182 & 0.30182 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Equação 3-31

Analisando o resultado dado na Equação A. 3 (TL de $u(t)=1$ é $\frac{1}{s}$) e Equação A. 8 (TL de $f(t)=e^{-at}$ é $\frac{1}{(s+a)}$) provadas no APÊNDICE A, a matriz $\Phi(t)$ é dada como na Equação 3-32:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix} + e^{-0.88953t} \begin{bmatrix} 0.72813 & -0.72813 \\ -0.05818 & 0.05818 \end{bmatrix} + e^{-2.81047t} \begin{bmatrix} -0.08813 & 0.08813 \\ -0.30182 & 0.30182 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Equação 3-32

Suponha que o departamento de Vendas da empresa de lâminas de barbear deseje examinar o grau de fidelidade do consumidor ao longo do tempo. Entenda como grau de fidelidade em um instante $t \geq 0$, a probabilidade do consumidor está com um produto da marca i neste instante dado que adquiriu um produto da mesma marca no início da análise. Tal análise pode ser realizada a partir da avaliação das probabilidades $\phi_{11}(t)$ e $\phi_{22}(t)$ as quais são dadas pela Equação 3-33 e Equação 3-34, respectivamente e estão ilustradas na Figura 3-2.

$$\phi_{11}(t) = 0.36 + 0.72813e^{-0.88953t} - 0.08813e^{-2.81047t}$$

Equação 3-33

$$\phi_{22}(t) = 0.64 + 0.05818e^{-0.88953t} + 0.30182e^{-2.81047t}$$

Equação 3-34

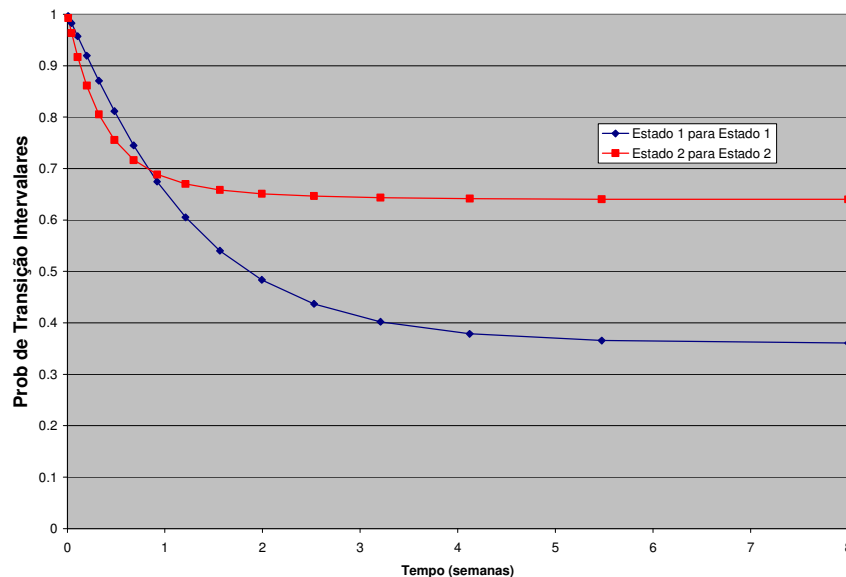


Figura 3-2 – Probabilidades de transição intervalares para análise do grau de fidelidade

De acordo com a definição de grau de fidelidade, nota-se a partir da análise da Figura 3-2 que para um período $t = 8$ semanas, o consumidor que compra o produto 2 é mais fiel do que o que prefere o produto 1. Tais resultados podem servir para uma tomada de decisão estratégica da empresa no intuito de incrementar a fidelidade do consumidor do produto 1.

A formulação descrita até agora é a maneira mais comum de apresentação dos PSMHs a qual está presente na maioria dos livros textos matemáticos, como por exemplo em Howard (1971a), Ross (1997) e Limnios e Oprisan (2001). Além disso, todas as aplicações e desenvolvimentos teóricos relatados na seção 3.2 utilizam tal formulação para PSMHs na qual é necessária a definição das probabilidades de transição do processo Markoviano embutido assim como das funções densidade condicionais dos tempos de permanência.

Entretanto, no contexto de Engenharia de Confiabilidade ao invés de probabilidades de transição, seria mais atrativo definir PSMs a partir de suas taxas de transição $\lambda_{ij}(\cdot)$, assim como é largamente utilizado para os processos Markovianos em tempo contínuo.

Becker *et al.* (2000) desenvolveram a formulação matemática dos PSMs a partir das taxas de transição $\lambda_{ij}(\cdot)$. Estas taxas de transição $\lambda_{ij}(\cdot)$ são distintas das taxas de transição dos PMs as quais ou são constantes (Markov Homogêneo) ou dependem do tempo de processo (Markov Não Homogêneo).

As taxas $\lambda_{ij}(\cdot)$ do PSM, por sua vez, podem depender apenas do tempo de permanência em um determinado estado (semi Markov Homogêneo) ou tanto do tempo de permanência nos estados quanto do tempo de processo (semi Markov Não Homogêneo). Em ambos os casos, $\lambda_{ij}(\cdot)$ pode representar taxas de falha ou reparo de componentes, sub-sistemas ou sistemas como nos PMs.

A formulação matemática dos PSMHs a partir de taxas de transição desenvolvida por Becker *et al.* (2000) será apresentada na próxima subseção.

3.3.3. PSMHs definidos a partir de taxas de transição

A taxa de transição $\lambda_{ij}(t)$ de um PSMH é definida em Becker *et al.* (2000), como:

$$\lambda_{ij}(t)dt = P\{L_n - L_{n-1} \in (t, t + dt) \cap X(L_n) = j \mid X(L_{n-1}) = i \cap L_n - L_{n-1} > t\}, \quad \text{Equação 3-35}$$

onde L_{n-1} e L_n são os instantes da última e próxima transições, respectivamente. O tempo de permanência condicional τ_{ij} é dado pela diferença $L_n - L_{n-1}$.

A Equação 3-35 significa que uma transição para o estado j ocorre em um intervalo de tempo infinitesimal depois que o processo alcançou o estado i por uma duração t , dado que não houve antes qualquer transição deixando tal estado.

Becker *et al.* (2000) provam que a definição de um PSM a partir de suas taxas de transição $\lambda_{ij}(\cdot)$ é viável e equivalente à definição fornecida pelas probabilidades de transição. Assim, as probabilidades de transição intervalares para um PSM podem ser obtidas a partir das taxas de transição $\lambda_{ij}(\cdot)$.

Para o caso Homogêneo, no qual as taxas de transição $\lambda_{ij}(t)$ dependem apenas do tempo decorrido desde a última transição (tempo de permanência), Becker *et al.* (2000) apresentam as probabilidades de transição intervalares $\phi_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}$ através das taxas $\lambda_{ij}(t)$ como:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t) = & \delta_{ij} \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(x) dx\right) + & i = 1, \dots, N \\ & + \sum_{k=1}^N \int_0^t \lambda_{ik}(\tau) \exp\left(-\int_0^\tau \lambda_i(x) dx\right) \phi_{kj}(t-\tau) d\tau & j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

Equação 3-36

onde N é o número de estados do PSMH e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

A Equação 3-37 é a taxa de transição de saída do estado i . A Equação 3-38 é o *kernel* do PSMH e corresponde à função densidade de probabilidade condicional do tempo de permanência no estado i dado que o próximo estado a ser ocupado será j . A Equação 3-39 corresponde ao complementar da função de distribuição acumulada do tempo de espera no estado i .

$$\lambda_i(\cdot) = \sum_{k=1}^N \lambda_{ik}(\cdot)$$

Equação 3-37

$$C_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(x) dx\right)$$

Equação 3-38

$$\bar{F}_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(x) dx\right).$$

Equação 3-39

A Equação 3-36 tem interpretação semelhante à dada para a Equação 3-16 (probabilidades de transição intervalares para PSMHs a partir de probabilidades de transição: a primeira parcela pode ser interpretada como o evento que o sistema permanece no estado i pelo menos

até o instante t , apenas contribuindo para $p_{ii}(t)$. A segunda parcela descreve o evento que o sistema permanece no estado i até o instante τ quando uma transição para um dos k estados ocorre e então o sistema transita do estado k para o estado j no instante t , sendo $t > \tau$.

A Equação 3-36 será resolvida afim de se calcular as probabilidades de transição intervalares $\phi_{ij}(\cdot)$ do PSMH descrito a partir de taxas de transição. A aplicação das TLs à Equação 3-36 resulta novamente na Equação 3-21 e Equação 3-22. Porém, as TLs $\tilde{C}(s)$ e $\tilde{F}_i^M(s)$ são calculadas a partir do *kernel* e do complementar da função de distribuição acumulada os quais são dados agora pela Equação 3-38 e Equação 3-39, respectivamente.

Entretanto antes de qualquer desenvolvimento mais avançado, vale salientar que o procedimento analítico descrito na seção 3.3.2 de cálculo das probabilidades de transição intervalares possui duas importantes restrições: a avaliação das probabilidades de transição intervalares de um PSM com apenas dois estados mostrou-se bastante laboriosa. Até para um sistema um pouco mais complexo do que o apresentado, a avaliação analítica de tais probabilidades torna-se inviável. Além disso, nem sempre é possível inverter as TLs de forma analítica como fora realizado, especialmente quando as PDFs dos tempos de permanência seguem funções mais gerais não necessariamente exponenciais.

Portanto, o procedimento de cálculo analítico das probabilidades de transição intervalares dos PSMHs não é aplicável na maioria dos sistemas complexos reais os quais podem ocupar um número elevado de estados e possuem PDFs dos tempos de permanência em tais estados não exponenciais.

É necessário então que seja desenvolvido um método numérico de resolução das probabilidades de transição intervalares para PSMHs a partir de taxas de transição o qual será apresentado na seção 4.2.1. O desenvolvimento de tal método numérico é bastante relevante, pois servirá também como base para resolução das probabilidades de transição intervalares dos processos semi Markovianos Não Homogêneos (PSMNH), os quais serão descritos na próxima seção.

3.4. Processos semi Markovianos Não Homogêneos

3.4.1. Introdução e Conceitos

Os processos semi Markovianos Não Homogêneos (PSMNH) foram originalmente desenvolvidos por Iosifescu (1972). A formulação de tal classe de processos estocásticos

deveu-se à necessidade de desenvolver um modelo no qual as probabilidades de transição dependessem tanto do instante desde a última transição quanto do tempo de processo, ou seja, um modelo que englobe características tanto de um processo semi Markoviano Homogêneo quanto de um Processo Markoviano Não Homogêneo.

Assim como ocorre em Grabski (2003) e Corradi *et al.* (2004) para PSMHs, o PSMNH será apresentado aqui a partir do Processo de Renovação Markoviano Não Homogêneo, utilizando uma notação semelhante à dada em Çinlar (1975).

Permita que $E = \{1, \dots, N\}$ represente o espaço finito de estados. Permita também definir as seguintes variáveis aleatórias:

$$X_n : \Omega \rightarrow E, \quad T_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty], \quad \text{Equação 3-40}$$

onde X_n e T_n são o estado e o tempo de processo na n -ésima transição, respectivamente.

O processo (X, T) é chamado de processo de Renovação Markoviano se

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t \mid X_n = i, T_n = l, X_{n-1}, T_{n-1}, \dots, X_0, T_0] \\ = P[X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t \mid X_n = i, T_n = l]. \end{aligned} \quad \text{Equação 3-41}$$

O *kernel* $C(\cdot, \cdot)$ do PSMNH é definido como:

$$C_{ij}(l, t) = P[X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t \mid X_n = i, T_n = l]. \quad \text{Equação 3-42}$$

A Equação 3-42 representa a probabilidade do processo alcançar o estado j em um instante $T_{n+1} \leq t$ dado que alcançou o estado i no instante l . Note que o *kernel* é definido aqui como uma função de distribuição acumulada.

Segue que:

$$p_{ij}(l) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_{ij}(l, t), \quad i, j \in E. \quad \text{Equação 3-43}$$

Sendo $P(l) = [p_{ij}(l)]$ a matriz de probabilidades de transição do processo Markoviano Não Homogêneo embutido.

A probabilidade que o processo deixará o estado i do instante l até t a qual representa a função de distribuição do tempo de espera no estado i é dada por:

$$F_i(l, t) = P[T_{n+1} \leq t \mid X_n = i, T_n = l]. \quad \text{Equação 3-44}$$

A Equação 3-44 representa a probabilidade do processo deixar o estado i do instante l até t não se sabendo qual é o estado sucessor.

Logicamente, tem-se que:

$$F_i(l, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}(l, t). \quad \text{Equação 3-45}$$

É possível definir então as funções de distribuição acumulada condicionais do tempo de permanência em cada estado dado o próximo estado a ser ocupado pelo processo, como segue:

$$G_{ij}(l, t) = P[T_{n+1} \leq t \mid X_n = i, X_{n+1} = j, T_n = l]. \quad \text{Equação 3-46}$$

Segundo D'amico *et al.* (2005), a principal diferença entre um PMNH e um PSMNH está nas funções de distribuição acumulada $G_{ij}(l, t)$. No ambiente Markoviano, tais funções devem ser exponenciais negativas. Já no caso semi Markoviano, $G_{ij}(l, t)$ pode ser de qualquer tipo.

As probabilidades são relacionadas por:

$$G_{ij}(l, t) = \begin{cases} \frac{C_{ij}(l, t)}{p_{ij}(l)}, & \text{se } p_{ij}(l) \neq 0 \\ 1, & \text{se } p_{ij}(l) = 0. \end{cases} \quad \text{Equação 3-47}$$

Tais relações também valem para o PSMH, com a exceção de que as probabilidades $p_{ij}(\cdot)$ não são dependentes do tempo de processo e as quantidades $C_{ij}(\cdot, \cdot)$ e $G_{ij}(\cdot, \cdot)$ dependem apenas do instante desde a última transição, i.e., do tempo de permanência.

As probabilidades de transição intervalares $\phi_{ij}(l, t) = P[X_t = j \mid X_l = i]$ do PSMNH $X = \left(X_t, t \in R_0^+ \right)$, onde X representa o estado ocupado pelo processo no instante t , podem ser calculadas como:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(l, t) &= \delta_{ij} (1 - F_i(l, t)) + \sum_{k=1}^N \int_l^t dC_{ik}(l, \tau) \phi_{kj}(\tau, t) d\tau \\ &= \delta_{ij} (1 - F_i(l, t)) + \sum_{k=1}^N \int_l^t \dot{C}_{ik}(l, \tau) \phi_{kj}(\tau, t) d\tau, \end{aligned} \quad \text{Equação 3-48}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e $\dot{C}_{ik}(\cdot, \cdot)$ é a derivada do *kernel* do PSMNH em relação ao tempo de processo. Utilizando a relação dada na seção 2.4 (Função Densidade de Probabilidade (PDF)), a derivada do *kernel* $\dot{C}_{ik}(\cdot, \cdot)$ do PSMNH corresponde à PDF do tempo de permanência no estado i dado que o processo transitará para o estado k em sua próxima transição.

A primeira parcela da Equação 3-48 representa a probabilidade do processo permanecer no estado i do instante l até t , sem haver qualquer mudança de estado nesse período. A segunda parcela representa a probabilidade do processo alcançar o estado i no instante l , deixar tal estado e alcançar o estado k intermediário no instante τ e transitar do estado k para j no instante t , sendo $t > \tau > l$.

A resolução da Equação 3-48 é mais complexa do que a sua versão para o caso Homogêneo dada pela Equação 3-18 por dois motivos: a Equação 3-48 não é mais uma equação integral de convolução ao contrário do que acontece com os PSMHs e depende de dois parâmetros temporais l e t .

Janssen e Manca (2001b) acreditam que a não homogeneidade em relação ao tempo de processo no ambiente contínuo implique em muito mais dificuldades sendo esta uma das principais razões que justifica a escassez de aplicações desta poderosa ferramenta de modelagem de sistemas dinâmicos. Janssen e Manca (2001b) desenvolvem um método de resolução da Equação 3-48 utilizando um método geral de integração numérica.

A apresentação formal de um PSMNH a qual foi dada na presente seção é a mesma que foi originalmente desenvolvida e utilizada nos livros textos matemáticos. Em tal formulação, é necessária a designação das probabilidades de transição do processo Markoviano Não Homogêneo embutido e das funções de distribuição acumuladas condicionais do tempo de permanência para completa definição do PSMNH.

Entretanto, em Engenharia de Confiabilidade da mesma forma que acontece para PSMHs, os PSMNHs tornam-se mais passíveis de aplicação se forem definidos a partir de taxas de transição assim como é largamente utilizado para os PMNHs. Neste sentido, Becker *et al.* (2000) desenvolve a formulação matemática de um PSMNH a partir de suas taxas de transição a qual será apresentada na próxima seção.

3.4.2. PSMNHs definidos a partir de taxas de transição

Os PSMHs foram definidos a partir de taxas de transição as quais dependem do tempo de permanência em determinado estado na subseção 3.3.3. Uma rápida definição dos PMNHs nos quais as taxas de transição dependem do tempo de processo ou de calendário foi dada na seção 3.1. Entretanto, taxas de transição que dependem de ambos os tipos de variáveis temporais (tempo de permanência e de processo) podem ocorrer simultaneamente em problemas reais. Portanto, é necessário o desenvolvimento de um modelo no qual as taxas de transição possam depender tanto do tempo de permanência quanto do tempo de processo.

As variáveis t e t_{tr} serão usadas para representar respectivamente a dependência das taxas de transição em função do tempo de processo e do instante da última transição. Para a dependência do tempo de permanência, a variável x será usada. Utilizando esta notação, Becker *et al.* (2000) definem a taxa de transição de um PSMNH como:

$$\begin{aligned}\lambda_{ij}(x, t, t_{tr}) dx &= P\{L_n - L_{n-1} \in (x, x + dx) \cap X(L_n) = j \mid X(L_{n-1}) \\ &= i \cap L_n - L_{n-1} > x \cap L_{n-1} = t_{tr}\},\end{aligned}\tag{Equação 3-49}$$

onde $t_{tr} = t - x$ e t é o tempo de processo.

A Equação 3-49 significa que uma transição para o estado j ocorre em um intervalo de tempo infinitesimal depois que o processo alcançou o estado i no instante $L_{n-1} = t_{tr}$, dado que não houve antes qualquer transição deixando tal estado. Tanto t quanto t_{tr} representam tempos de processo, porém t_{tr} é o instante da última transição L_{n-1} tal que $t = t_{tr} + x$.

Para obter a versão da Equação 3-36 (probabilidades de transição intervalares do PSMH definido por taxas de transição) para o PSMNH deve-se levar em consideração que o processo é não homogêneo em relação ao tempo de processo. Assim, $\phi_{ij}(\cdot, \cdot)$ é dada por:

$$\phi_{ij}(l, t) = P\{X(t) = j \mid X(l) = i \cap L_0 = l\}.\tag{Equação 3-50}$$

Desta forma, a versão da Equação 3-36 para o caso Não Homogêneo, é dada em Becker *et al.* (2000), como segue na Equação 3-51:

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(l, t) &= \delta_{ij} \exp\left(-\int_l^t \lambda_i(x-l, x, l) dx\right) \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_l^t \lambda_{ik}(\tau-l, \tau, l) \exp\left(-\int_l^\tau \lambda_i(x-l, x, l) dx\right) \phi_{kj}(\tau, t) d\tau.\end{aligned}\tag{Equação 3-51}$$

A resolução da Equação 3-51 da mesma forma da Equação 3-48 é mais complexa que a sua respectiva versão para o caso Homogêneo pelos motivos apresentados na seção anterior.

Becker *et al.* (2000) avaliam a possibilidade de resolução da Equação 3-51 a partir da formulação de um problema de valor inicial o qual envolve funções densidade. Um problema de valor inicial tem o objetivo de determinar $p_j(t)$ dado $p_j(0)$.

Então, permita que $H_{rj}(t) = E[N(t)]$ seja o valor esperado do número de vezes que o estado j é visitado no intervalo $(0, t)$. Se $H_{rj}(t)$ é diferenciável, $h_{rj}(t)dt = dH_{rj}(t)$ será a sua respectiva PDF. Como o processo considerado é regular, i.e., não mais de uma transição pode

ocorrer em qualquer intervalo $(t, t+dt)$, $h_{rj}(t)$ pode ser entendida como a probabilidade que uma transição ocorra para o estado j em um intervalo de tempo dt infinitesimal, como segue na Equação 3-52:

$$h_{rj}(t)dt = P\left\{\text{estado } j \text{ visitado em } (t, t+dt)\right\}. \quad \text{Equação 3-52}$$

Então, segue que:

$$h_{rj}(t) = \sum_{i=1}^N p_i(0) \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(l, l, 0) dl\right) \lambda_{ij}(t, t, 0) \\ + \sum_{i=1}^N \int_0^t h_{ri}(\tau) \exp\left(-\int_0^{t-\tau} \lambda_i(l, \tau+l, \tau) dl\right) \lambda_{ij}(t-\tau, t, \tau). \quad \text{Equação 3-53}$$

De acordo com a Equação 3-53, o estado j pode ser alcançado ou se o processo inicialmente estava no estado i e permanece neste estado até o instante t , quando uma transição para o estado j ocorre ou se o processo visitou o estado i no instante τ , permanecendo neste estado por $t-\tau$ unidades de tempo quando então uma transição para o estado j ocorre.

A Equação 3-53 corresponde a um sistema de N equações integrais de convolução na variável x cada uma com incógnita $h_{rj}(t)$, $j=1, \dots, N$. Se tais equações são resolvidas simultaneamente, as probabilidades $\phi_j(t)$ podem ser obtidas a partir das condições iniciais $\phi_j(0)$ como segue na Equação 3-54:

$$\phi_j(t) = \phi_j(0) \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(l, l, 0) dl\right) \\ + \int_0^t h_{rj}(\tau) \exp\left(-\int_0^{t-\tau} \lambda_j(l, \tau+l, \tau) dl\right) d\tau. \quad \text{Equação 3-54}$$

A Equação 3-54 significa que o processo pode estar no estado j se estava inicialmente no estado j e permanece lá pelo menos até o instante t ou se visitou o estado j em um instante qualquer $\tau \in (0, t)$ com probabilidade $h_{rj}(\tau)$ e permanece lá por $t-\tau$ unidades de tempo. A Equação 3-54 também é um sistema de equações integrais de convolução de N variáveis $\phi_j(t)$ que podem ser resolvidas independentemente.

Apesar de desenvolver a formulação matemática completa para os PSMNHs a partir de taxas de transição, Becker *et al.* (2000) não apresentam um método específico de resolução da

Equação 3-53 e Equação 3-54. No capítulo 4 seção 4.3, será desenvolvido o método de resolução de tais equações o qual é semelhante ao desenvolvido para PSMHs. Isto é possível já que tais equações agora também são do tipo convolução.

Nesta seção, foi discutido o processo semi Markoviano Não Homogêneo. O PSMNH engloba características dos processos Markovianos Não Homogêneos e dos processos semi Markovianos Homogêneos. O PSMNH definido a partir de taxas de transição e a formulação matemática de suas probabilidades de transição intervalares também foram apresentados.

3.5. Redes Bayesianas

3.5.1. Introdução e aplicações em Confiabilidade

Segundo Korb e Nicholson (2003), Redes Bayesianas (RBs) são modelos gráficos que permitem representar razões ou argumentos no domínio da incerteza. Basicamente, uma RB é um Grafo Acíclico Direcionado (DAG), no qual os nós representam variáveis de interesse (discretas ou contínuas) e os arcos representam conexões diretas entre tais variáveis. Tais conexões são sempre relações de causa e efeito, sendo a origem do arco a causa e a extremidade o seu respectivo efeito.

Segundo Pearl (2000), as RBs foram desenvolvidas no início dos anos 80 para facilitar a tarefa de predição e “abdução” em sistemas de Inteligência Artificial (AI) para raciocínio com conhecimento incerto. Atualmente, as RBs estão sendo empregadas em diversos contextos com o objetivo de descrever e/ou quantificar as estruturas de causa e efeito entre variáveis de interesse.

Em Engenharia de Confiabilidade, especialmente na última década, RBs têm se tornado uma ferramenta de modelagem bastante popular e útil. Algumas aplicações nessa área merecem ser citadas: Firmino (2004) apresenta as vantagens de direcionar uma análise de Confiabilidade de equipamentos ou humana através de RBs através da conversão de métodos classicamente conhecidos (árvores de Falha e árvores de Eventos) ao seu formato. Segundo Firmino (2004), a aplicação de RBs leva a uma representação gráfica das causalidades inerentes aos componentes do problema e proporciona um raciocínio sensato-artificial baseado em conceitos da teoria dos grafos, probabilidade, computação e do comportamento humano. De acordo com Pearl (2000), causalidade pode ser entendida como a condição segundo a qual uma causa produz um efeito.

Santos (2005) utilizam RBs para avaliação probabilística de riscos no processo de perfuração e completção de poços de petróleo multilaterais. Em tal trabalho, as RBs são aplicadas com o objetivo de avaliar qualitativamente o risco associado com operações de construção de poços multilaterais. A metodologia de avaliação probabilística de riscos a partir de RBs surge como alternativa ao modelo convencional, o qual é baseado em árvores de Falhas e de Eventos, as quais são casos especiais das RBs quando se assume representação binária e independência entre as variáveis de interesse.

Menêzes (2005) propõe uma metodologia de Análise de Confiabilidade Humana (ACH) através da utilização de RBs. Tal proposta foi realizada na tentativa de superar as limitações dos modelos de 1ª e 2ª geração de ACH, entre as quais estão suposições irreais de independência, dificuldade de categorização de variáveis e aplicações de técnicas desenvolvidas para Confiabilidade de equipamentos na ACH. O modelo proposto é sistemático e composto de três fases: coleta de informações e análise, análise qualitativa e coleta de dados e análise quantitativa. Em Menêzes e Droguett (2007), é realizada uma aplicação da metodologia proposta para ACH na operação de manutenção de linhas de transmissão.

Menêzes e Droguett (2006) propõem uma metodologia para análise de Confiabilidade de sistemas baseada no hibridismo entre árvores de falha e eventos e RBs. Em tal trabalho, a modelagem dinâmica do sistema é tratada por Diagramas de Seqüências de Eventos (ESD). Os eventos pivotais no ESD que estão relacionados a equipamentos serão tratados por árvores de Falha quando os eventos são binários e a suposição de independência é possível. Já os eventos pivotais relacionados a erros humanos são tratados por RBs. Oliveira (2006) aplica tal modelo híbrido proposto para avaliação probabilística do risco no caso da cirurgia de histerectomia vaginal.

Na próxima seção, serão apresentados os passos metodológicos de montagem e a estrutura de uma Rede Bayesiana.

3.5.2. Estrutura

Basicamente, um problema pode ser modelado por uma RB quando duas perguntas devem ser respondidas. Qual a relação de causa e efeito entre as variáveis de determinado processo? Qual a magnitude de tais relações? As respostas são entradas de algum problema de tomada de decisão.

Por exemplo, considere a Figura 3-3 na qual é ilustrada uma RB na qual a variável aleatória experiência da equipe de manutenção condiciona os tempos de falha e reparo. Tal RB pode ser utilizada como entrada de um problema de otimização da manutenção, por exemplo.

Como pode ser visto na Figura 3-3, a estrutura de uma RB é constituída de nós, os quais representam as variáveis (discretas ou contínuas), e arcos que representam conexões diretas entre tais variáveis.

Um primeiro passo na construção de uma RB é a identificação das variáveis de interesse e a natureza das mesmas, i.e., se são discretas ou contínuas. No presente trabalho, serão considerados apenas valores discretos para as variáveis de interesse. Os valores dessas variáveis deverão ser mutuamente exclusivos, significando que as mesmas não podem assumir mais de um valor por vez em seu domínio.

O próximo passo para montagem de uma RB é a determinação das relações causais entre as variáveis de interesse o que consiste em se determinar a topologia da RB. Dois nós serão conectados diretamente se um causa ou afeta o outro, sendo que o sentido do arco corresponde ao efeito.

É bastante comum em RBs se utilizar uma terminologia análoga à utilizada em estruturas de família, i.e., um nó é pai de um nó filho, se um arco partir daquele para este. No exemplo da Figura 3-3, a variável experiência é pai dos tempos de falha e reparo. Outra terminologia bastante utilizada é a seguinte: qualquer nó sem pai é denominado nó de entrada, qualquer nó sem filhos é chamado de nó de saída e qualquer nó que não é nem de entrada nem de saída é denominado nó intermediário. No exemplo apresentado, a experiência é nó de entrada e os tempos de falha e reparo são nós de saída, não existindo nós intermediários.

Após a identificação da estrutura topológica da RB, o próximo passo é determinar a magnitude das relações de causalidade entre as variáveis conectadas. Isto é feito especificando para cada nó uma distribuição de probabilidade condicional. Como se trata de variáveis aleatórias discretas, isto consiste em determinar uma tabela de probabilidades condicionais (TPC) para cada nó, analisando as possíveis combinações de valores dos seus nós pais.

Representando por E a experiência da equipe de manutenção e discretizando seus valores em $E \leq 10$ anos ou $E > 10$ anos, por F o tempo de falha e discretizando em $F < 100$ horas ou $F \geq 100$ horas e por R o tempo de reparo e discretizando em $R < 1$ hora ou $R > 1$ hora, as TPCs para cada variável estão especificadas também na Figura 3-3, na qual por exemplo

$P(F \geq 100hs | E \leq 10anos)$ representa a probabilidade condicional da realização do tempo de falha ser superior ou igual a 100 horas dado que a experiência da equipe de manutenção é inferior ou igual a 10 anos.

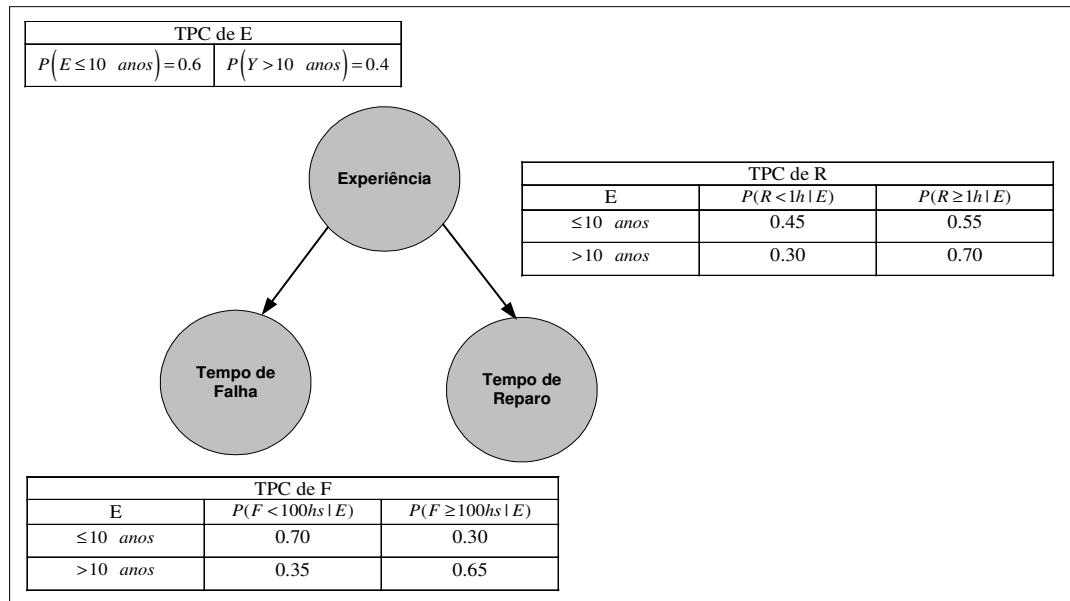


Figura 3-3 – Exemplo de Rede Bayesiana

O tamanho de um TPC de um nó é exponencial ao seu número de pais. Por exemplo, para uma variável dicotômica, i.e., que assume valores binários, com n pais é necessário especificar uma TPC com 2^{n+1} probabilidades.

A montagem de uma RB exige conhecimentos de áreas distintas, porém complementares. Barros Jr. (2006) apresenta uma metodologia de extração de conhecimento a partir de uma base de dados e como utilizar tal conhecimento para estruturar RBs tanto qualitativa quanto quantitativamente. Menêzes (2005) utilizam opiniões de especialistas para montar a topologia de uma RB. Em tal trabalho, também é realizada a elicitacão da opinião de especialistas para determinacão das TPCs através do método proposto em Firmino *et al.* (2006). Langseth e Portinale (2007) discutem estas duas maneiras de montar RBs, i.e., a partir de dados empíricos e/ou opiniões de especialistas.

Nota-se, portanto, que uma RB é uma representacão em forma de modelo gráfico de uma distribuicão de probabilidade multivariada na qual é possível representar as relacões de causalidade entre variáveis de interesse de forma qualitativa, através da topologia, quanto de forma quantitativa, através das TPCs.

3.5.3. Independência Condicional

Os exemplos e a terminologia dados em Langseth e Portinale (2007) serão utilizados para definir os conceitos de independência condicional e d -separação.

Considere a notação $X \perp Y | Z$ a qual representa que dado a variável Z , as variáveis X e Y são condicionalmente independentes. Se Z é conjunto vazio, a notação pode ser simplificada para $X \perp Y$ que significa que X e Y são marginalmente independentes. O termo $X \not\perp Y | Z$ será usado para denotar que dado a variável Z , as variáveis X e Y são condicionalmente dependentes.

Segundo Pearl (1988), todas as declarações de independência condicional podem ser traduzidas de uma RB usando as regras de d -separação. A idéia da d -separação pode ser explicada pelas RBs mostradas na Figura 3-4.

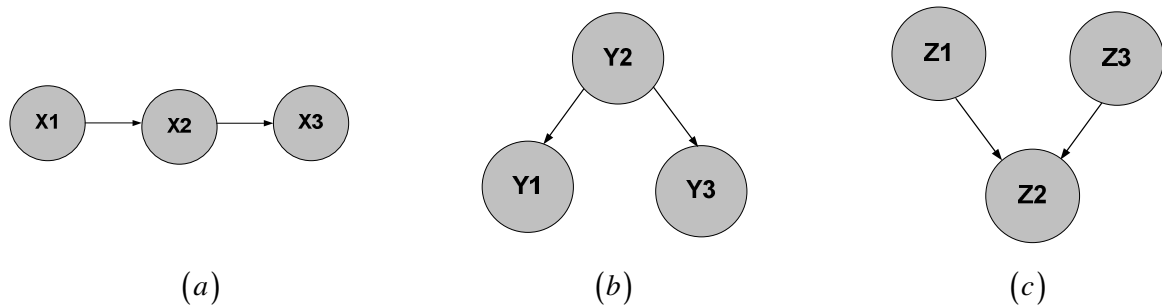


Figura 3-4 – Independência condicional: (a) – série; (b) – causa comum; (c) – efeito comum.

A RB em série da Figura 3-4(a) significa que $X_1 \perp X_3 | X_2$, mas $X_1 \not\perp X_3$ marginalmente. Por exemplo, permita X_1 ser a atividade de planejamento da manutenção preventiva, X_2 ser a manutenção preventiva implementada e X_3 o tempo de vida do equipamento. As declarações de independência condicional que estão codificadas nesta RB significam que caso não se tenha conhecimento se a manutenção preventiva foi implementada, então o planejamento da manutenção pode informar algo sobre o tempo de vida do equipamento ($X_1 \not\perp X_3$). Entretanto, se surgir uma evidência que o programa de manutenção preventiva foi implementado, o planejamento é irrelevante para a predição do tempo de vida ($X_1 \perp X_3 | X_2$).

A Figura 3-4(b) é conhecida como uma RB de causa comum e tem propriedades similares ao primeiro caso, i.e., $Y_1 \perp Y_3 | Y_2$, mas $Y_1 \not\perp Y_3$ marginalmente. Esta RB pode modelar, por exemplo, o nível de qualidade dos produtos de uma linha de produção. Permita Y_1 ser a qualidade do primeiro item que foi produzido nesta linha, Y_3 a qualidade do segundo item e Y_2 uma medida de quão bem a linha de produção opera. Suponha que Y_2 não é conhecida,

então uma evidência sobre se Y_1 é bom (ruim), torna possível realizar inferência se a qualidade da linha Y_2 é boa (ruim) e também se Y_3 será bom ou ruim. Desta forma, $Y_1 \not\perp Y_3$. Entretanto, se a qualidade da produção Y_2 é conhecida, cada produto pode ser visto como independente um do outro, $Y_1 \perp Y_3 | Y_2$.

A Figura 3-4(c) é conhecida como uma RB de efeito comum e codifica a informação que Z_1 e Z_3 são marginalmente independentes, mas $Z_1 \not\perp Z_3 | Z_2$. Suponha que Z_1 é a qualidade de uma linha de produção, Z_3 são as condições ambientais (temperatura, umidade, pressão, etc.) de produção e Z_2 a qualidade de um produto oriundo desta linha. A priori, a qualidade da linha de produção é independente das condições ambientais ($Z_1 \perp Z_3$). Entretanto, tão logo se observa a qualidade Z_2 do produto, pode-se fazer inferência sobre a qualidade Z_1 da linha e sobre as condições ambientais Z_3 , de forma que $Z_1 \not\perp Z_3 | Z_2$.

Resumindo, pode-se concluir que no caso (a) o conhecimento sobre X_2 bloqueia a relevância de X_1 para X_3 , no caso (b) a falta de evidência sobre Y_2 bloqueia a relevância de Y_1 para Y_3 e o conhecimento sobre Z_2 ativa a dependência entre Z_1 e Z_3 . O termo bloquear significa aqui interromper as direções de dependências.

Estas declarações de independência são propriedades das RBs e são conhecidas como d -separação, onde d significa direção de dependência. O que se nota a partir da análise da d -separação é que as inferências em uma RB podem ser feitas não apenas no sentido determinados pelos arcos o que permite que tal estrutura seja uma ferramenta tanto de diagnóstico quanto de prognóstico.

3.5.4. Cálculo das Probabilidades

Uma RB recebe tal denominação por fazer uso do Teorema de Bayes, o qual para variáveis discretas segue como:

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \quad \text{Equação 3-55}$$

onde $P(A)$ é conhecida como a probabilidade a priori de A , i.e., antes de tomarmos conhecimento da evidência E , $P(E|A)$ é a probabilidade de que E seja observada se A é realmente verdadeiro (ocorre) e é conhecida como função de verossimilhança e $P(A|E)$ é a probabilidade a posteriori de A , i.e., após termos obtido a nova informação representada por E . Logo, $P(A|E)$ representa a probabilidade atualizada sobre o evento A uma vez que

obtemos a informação adicional E relevante a A . Veja Martz e Waller (1982) para conceitos básicos sobre Inferência Bayesiana.

A utilização do Teorema de Bayes permite que a crença (probabilidade) sobre alguma variável de interesse seja atualizada a partir que novas informações (evidências) tornem-se disponíveis.

Para o exemplo da Figura 3-3, fazendo uso direto do Teorema de Bayes, pode-se marginalizar as probabilidades condicionais dos tempos de falha F e de reparo R através da lei de probabilidade total, como segue:

$$P(R|E) = P(R \cap E) / P(E) \Rightarrow P(R \cap E) = P(R|E)P(E) \Rightarrow P(R) = \sum_E P(R|E)P(E) \quad \text{Equação 3-56}$$

$$\text{Assim, } P(R < 1h) = 0.45 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.39 \text{ e } P(R \geq 1h) = 0.55 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.61.$$

$$P(F|E) = P(F \cap E) / P(E) \Rightarrow P(F \cap E) = P(F|E)P(E) \Rightarrow P(F) = \sum_E P(F|E)P(E) \quad \text{Equação 3-57}$$

$$\text{Assim, } P(F < 100h) = 0.70 \cdot 0.6 + 0.35 \cdot 0.4 = 0.56 \text{ e } P(F \geq 100h) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.65 \cdot 0.4 = 0.44.$$

Já a probabilidade conjunta da RB pode ser calculada através da regra da cadeia como segue na Equação 3-58:

$$P(U) = P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | pa(X_i)), \quad \text{Equação 3-58}$$

onde $P(U)$ é probabilidade conjunta para a rede e $P(X_i | pa(X_i))$ são as probabilidades condicionais de X em relação a seus pais. A aplicação da regra da cadeia assume que os filhos sejam independentes dado seus pais.

Aplicando a Equação 3-58 ao caso da RB na Figura 3-3, tem-se que:

$$P(E, F, R) = P(E) \times P(F|E) \times P(R|E) \quad \text{Equação 3-59}$$

A Equação 3-59 pode ser utilizada para determinação da probabilidade conjunta da RB para todos as possíveis combinações de valores das variáveis E , F e R . Utilizando a notação $E_0 = E \leq 10\text{anos}$, $E_1 = E > 10\text{anos}$, $F_0 = F < 100\text{hs}$, $F_1 = F \geq 100\text{hs}$, $R_0 = R < 1h$ e $R_1 = R \geq 1h$, os valores da distribuição conjunta para o exemplo da Figura 3-3 são dados na Tabela 3-3.

Tabela 3-3 – Valores da probabilidade conjunta para a RB da Figura 3-3

$P(E_0, F_0, R_0) = 0.189$	$P(E_0, F_1, R_0) = 0.081$	$P(E_0, F_0, R_1) = 0.231$	$P(E_1, F_1, R_0) = 0.078$
$P(E_1, F_0, R_0) = 0.042$	$P(E_0, F_1, R_1) = 0.099$	$P(E_1, F_0, R_1) = 0.098$	$P(E_1, F_1, R_1) = 0.182$

3.5.5. Atualização do conhecimento via RBs

Por ser Bayesiana por natureza, RBs permitem que atualizações de crenças probabilísticas sejam realizadas através do teorema de Bayes à medida que novas informações (evidências) surjam.

Suponha, por exemplo, que o equipamento falhou e seu tempo de falha foi inferior a 100 hrs, i.e., evidenciou-se o evento F_0 . Deseja-se, então, avaliar a modificação na TPC do tempo de reparo devido à ocorrência dessa evidência. Deve-se, então, avaliar a distribuição a posteriori do tempo de reparo a partir do teorema de Bayes, como segue:

$$\begin{aligned} P(R_0 | F_0) &= \frac{P(E_0, F_0, R_0) + P(E_1, F_0, R_0)}{P(E_0, F_0, R_0) + P(E_1, F_0, R_0) + P(E_0, F_0, R_1) + P(E_1, F_0, R_1)} \\ &= \frac{0.189 + 0.042}{0.189 + 0.042 + 0.231 + 0.098} = 0.4125 \end{aligned} \quad \text{Equação 3-60}$$

Note que a variável F permanece constante e igual a F_0 na Equação 3-60 dado que a mesma representa uma evidência.

Este tipo de evidência que permite a atualização de crenças probabilísticas a partir de dados observados (empíricos) é conhecida como atualização empírica. Outro tipo de evidência denominada subjetiva pode também ser utilizada para atualização de crenças. Neste tipo de evidência, não se tem certeza da ocorrência de determinado evento. A atualização, por sua vez, é realizada através de taxas, como em Menêzes e Droguett (2007).

Existem algoritmos específicos que efetuam a atualização de crenças probabilísticas em uma RB, tais como o algoritmo de passagem de mensagem de Kim e Pearl, o algoritmo *top-down*, os métodos de clusterização, entre outros, veja Korb e Nicholson (2003). O esforço numérico necessário para efetuar os cálculos de crenças probabilísticas em RBs exige o uso de *softwares* específicos que implementem um ou mais desses algoritmos, como o software BBN desenvolvido por Firmino (2004).

Nesta seção, as RBs foram definidas, apresentadas e analisadas. Foram identificados os passos necessários para montagem de uma RB, desde a determinação das variáveis de interesse até a especificação de uma tabela de distribuição de probabilidade condicional para cada uma delas. Foi mostrado também, como se calcula crenças probabilísticas a partir do Teorema de Bayes e como se determina a probabilidade conjunta de uma RB.

4. MODELO NUMÉRICO PROPOSTO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PSM

Neste capítulo, serão desenvolvidos os métodos numéricos propostos neste trabalho de resolução das equações de probabilidades de transição intervalares para os processos semi Markovianos Homogêneo e Não Homogêneo definidos a partir de taxas de transição. A solução Monte Carlo também será apresentada e utilizada aqui para comparar e validar os resultados fornecidos por tais métodos numéricos.

4.1. Solução Monte Carlo

Permita z_k representar o estado ocupado pelo processo depois da k -ésima transição, t_k o instante no qual tal transição ocorre, $F_{z_k, z_{k+1}}(\cdot)$ a CDF condicional do tempo de permanência no estado z_k dado que o próximo estado a ser ocupado é z_{k+1} , c_{z_k} um contador do número de vezes que o estado z_k é visitado, $X_{z_k, z_{k+1}}$ e $Y_{z_k, z_{k+1}}$ variáveis aleatórias que representam tempos de permanência no estado z_k dado que o processo transitará para o estado z_{k+1} , $\phi_{z_k}(T)$ a probabilidade do processo estar no estado z_k no instante T e N o número de estados.

Fazendo $c_j = 0, \forall j = 1, \dots, N$, uma iteração do algoritmo baseado em simulação Monte Carlo para PSMs definidos a partir de taxas de transição pode ser escrita em forma de pseudocódigo da seguinte maneira:

1. Faça $k = 0, t_0 = 0, z_0$ como estado inicial;
2. Enquanto $t_k < T$:
 - a. Amostre uma variável aleatória $X_{z_k, z_{k+1}} = \min(Y_{z_k, j} \sim F_{z_k, j}(\cdot))$, onde $\forall j = 1, \dots, N$ e $F_{z_k, j}(\cdot) \neq 0$ e faça $x = X(\omega)$;
 - b. Faça $k := k + 1, t_k = t_{k-1} + x$. Se $t_k < T$, faça $z_k := z_{k+1}$;
3. Faça $c_{z_k} = c_{z_k} + 1$;

Basicamente, o algoritmo acima descrito pode ser entendido da seguinte maneira: o primeiro passo corresponde à configuração das condições iniciais. O tempo de permanência em um estado z_k é determinado como a mínima realização de todas as possíveis transições que partem deste estado tendo como destino o estado z_{k+1} . O tempo de processo t_k é

incrementado pelo tempo de permanência x no estado z_k . Caso $t_k \geq T$, o tempo de missão T foi atingido e o contador c_{z_k} é incrementado da unidade, finalizando a iteração.

O procedimento descrito pode ser aplicado aos PSMs Homogêneo ou Não Homogêneo. A diferença é que nos PSMNHs, a CDF $F_{z_k, z_{k+1}}(\cdot)$ depende do tempo de processo t_k .

Os passos 1, 2 e 3 são repetidos por um número suficiente grande M de iterações e as probabilidades de estado $\phi_j(T)$ são então calculadas dividindo os valores c_j por M .

O algoritmo Monte Carlo será utilizado para comparar os resultados fornecidos pelo método numérico proposto o qual será descrito nas duas próximas seções.

4.2. Método numérico proposto para PSMHs definidos a partir de taxas de transição

Como relatado na subseção 3.3.2, dada a solução da equação $\tilde{\Phi}(s) = [I - \tilde{C}(s)]^{-1} \tilde{F}_i^M(s)$, é necessário inverter as TLs para se obter a solução na variável $t \geq 0$. Dada a notória dificuldade de realizar tal inversão de forma analítica, o objetivo da presente seção é propor um método numérico de cálculo das probabilidades de transição intervalares dos PSMHs baseado na aplicação de TLs. A inversão de tais transformadas será realizada através do método de Quadratura Gaussiana de integração numérica, conhecido como *Gauss Legendre*.

4.2.1. Descrição do método numérico

Como visto anteriormente, a equação fundamental dos PSMHs definidos a partir de probabilidades de transição (Equação 3-16) trata-se de uma equação integral de convolução. Alguns métodos de resolução numérica destas equações merecem ser citados, como por exemplo, o trabalho de Csenki (1995) o qual aplica a regra do trapézio para resolução numérica das equações dos PSMHs definidos por probabilidades de transição. Tal método numérico é utilizado para avaliar a Confiabilidade de um sistema semi Markoviano composto por dois equipamentos com manutenção preventiva sequencial.

A regra do trapézio de integração numérica assim como a regra de *Simpson* e a integração de *Romberg* são métodos que calculam integrais através da soma de valores do integrando em abscissas igualmente espaçadas multiplicados por pesos escolhidos. Tais métodos são bastante laboriosos (alto custo computacional), necessitando de uma alta ordem para obter alta exatidão.

Outro trabalho que merece ser citado é o de Corradi *et al.* (2004) os quais resolvem as equações dos PSMs definidos por probabilidades de transição utilizando um método geral de quadratura.

Apesar de desenvolver e apresentar a formulação matemática dos PSMs definidos a partir de taxas de transição, Becker *et al.* (2000) não propõem uma metodologia de solução numérica das equações de probabilidades de transição intervalares destes PSMs.

O método que é proposto aqui para avaliar as probabilidades de transição intervalares dos PSMs definidos a partir de taxas de transição (Equação 3-36) é baseado no aproveitamento numérico da convolução existente em tal equação. A resolução da Equação 3-36 será feita como na subseção 3.3.2, i.e., aplicando TLs e depois as invertendo para obter a solução na variável t .

Trabalhos que têm como objetivo inverter TLs numericamente merecem ser citados: Abate e Whitt (1992), por exemplo, desenvolvem um método baseado em séries de *Fourier* para inverter numericamente TLs de funções de distribuição acumulada e funções densidade de probabilidade. Tal método executa a inversão das TLs por meio da regra do trapézio a qual possui as limitações já relatadas.

Valkó e Abate (2004) analisam o método de *Gaver* para inversão de TLs. Tal método inverte TLs através da Equação 4-1:

$$f_k(t) = (-1)^k \tau k \binom{2k}{k} \Delta^k \hat{f}(k\tau) = k\tau \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \hat{f}((k+j)\tau). \quad \text{Equação 4-1}$$

Onde $\tau = \ln 2/t$ e Δ é operador diferencial recursivo dado por:

$$\Delta \hat{f}(n\tau) = \hat{f}((n+1)\tau) - \hat{f}(n\tau). \quad \text{Equação 4-2}$$

A seqüência de *Gaver* possui pelo menos duas limitações. Primeiramente, a convergência da seqüência é logarítmica. Por exemplo, $f_{1000}(t)$ pode fornecer uma estimativa para $f(t)$ com apenas dois ou três dígitos de precisão. Através de uma análise comparativa entre métodos de aceleração da convergência da seqüência de *Gaver*, constatou-se que o melhor é o algoritmo não linear *Wynn rho*, veja Valkó e Abate (2004).

A outra limitação da seqüência de *Gaver* é que é necessária a avaliação de fatoriais de alta ordem. É sabido que uma calculadora é capaz de calcular até o $69!$ utilizando o método aproximado de *Stirling*. Porém, a partir daí os cálculos incorrem em erros de *over-flow* (números maiores do que a precisão da máquina pode representar).

Uma outra forma imprecisa de inversão de TLs é dada em Abate e Valkó (2004) e em Milovanovic e Cvetkovic (2005) por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{f}(s) \exp(st) ds \quad (\sigma > \sigma_0). \quad \text{Equação 4-3}$$

Onde σ_0 é então chamado de abscissa de convergência de $\hat{f}(s)$ a qual representa a solução transformada. A Equação 4-3 é denominada método de *Talbot* e possui uma complexa aritmética já que envolve a avaliação da função no eixo imaginário. Tal método é baseado na deformação do contorno padrão na integral *Browmwich*.

O método de inversão de TLs que será utilizado foi apresentado em Oliveira (2001) o qual o utiliza para avaliação das probabilidades de estado de PMs Não Homogêneos com variáveis suplementares. As TLs são aplicadas às equações diferenciais do PM e invertidas através do método que será descrito. Em tal trabalho, são apresentados vários exemplos de aplicação de demonstração da efetividade, vantagens e limitações do método no ambiente Markoviano.

Tal procedimento de inversão de TLs o qual é baseado em um método de Quadratura Gaussiana, conhecido como *Gauss Legendre* será proposto aqui a ser utilizado no ambiente semi Markoviano a fim de calcular numericamente as probabilidades de transição intervalares de um PSMH.

Pela definição de TLs, tem-se que:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad \text{Equação 4-4}$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = \exp(-t)$, a Equação 4-4 torna-se:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^1 z^{s-1} f(-\ln(z)) dz. \quad \text{Equação 4-5}$$

A integral que aparece no lado direito da Equação 4-5 pode ser aproximada por uma quadratura Gaussiana a qual envolve a avaliação ponderada da função $f(\cdot)$ em abscissas fornecidas neste caso pelo método de integração *Gauss Legendre*. Desta forma, tem-se que:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{k=1}^R w_k z_k^{s-1} f(-\ln(z_k)). \quad \text{Equação 4-6}$$

Onde w_k e z_k são os pesos e abscissas, respectivamente, fornecidos pelo método de integração de *Gauss Legendre*. É importante frisar que w_k e z_k não dependem da função $f(\cdot)$ e sim somente do número R de pontos da quadratura e do intervalo de integração. Veja Press

et al. (2002) para maiores detalhes sobre a obtenção de w_k e z_k para o método *Gauss Legendre*.

Segundo Press *et al.* (2002), ao contrário de outros métodos de integração numérica, a idéia da Quadratura Gaussiana é fornecer a liberdade de escolher não somente os coeficientes de ponderação, mas também a localização das abscissas nas quais a função será avaliada. Tais abscissas não serão mais igualmente espaçadas.

Discretizando a Equação 4-6 em R valores de s , $s=1,2,...,R$, origina-se um sistema de R equações algébricas lineares com R incógnitas $f(-\ln(z_k))$, como segue:

$$[A][\Phi] = [\tilde{\Phi}]. \quad \text{Equação 4-7}$$

Onde $a_{vk} = w_k z_k^{v-1}$, Φ é a matriz das probabilidades de transição intervalares $\phi_{ij}(-\ln z_k)$ e $\tilde{\Phi}$ é a matriz das TLs das probabilidades de transição intervalares $\tilde{\phi}_{ij}(s_k)$, com $s_k = 1, ..., R$. Dada a solução transformada, a Equação 4-7 deve ser resolvida N^2 vezes de forma a obter $\phi_{ij}(-\ln z_k) \forall i=1, ..., N, \forall j=1, ..., N$ por algum método de resolução de sistemas de equações algébricas lineares.

Porém, antes de resolver a Equação 4-7, a Equação 3-21 ($\tilde{\Phi}(s) = [I - \tilde{C}(s)]^{-1} \tilde{F}_i^M(s)$) deve ser resolvida R vezes de forma a obter as TLs das probabilidades de transição intervalares $\tilde{\phi}_{ij}(s_k) \forall s=1, ..., R$. O número R de pontos de discretização da variável s será igual a 16 de acordo com uma análise de sensibilidade apresentada em Oliveira *et al.* (1997).

O método numérico descrito dessa forma é capaz apenas de retornar as probabilidades de transição $\phi_{ij}(\cdot)$ nos pontos $t = -\ln z_k$. Porém, utilizando o resultado dado na Equação 4-8, o procedimento descrito pode ser utilizado para obter as probabilidades $\phi_{ij}(T), \forall T \geq 0$, onde T é o horizonte de previsão.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt &= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u} f(u) \frac{du}{a} & \left(u = at \Rightarrow du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a} \right) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned} \quad \text{Equação 4-8}$$

A constante $a > 0$ funciona como um fator de escala e será definida aqui como $a = -T / \ln z_1$, onde z_1 é o menor valor da abscissa fornecida pelo método de *Gauss Legendre*.

Apesar do foco deste método ser os PSMHs definidos a partir de taxas de transição, este pode ser aplicado a PSMHs definidos a partir de probabilidades de transição com os devidos ajustes.

Nas próximas subseções, serão apresentados e discutidos exemplos de aplicação do método numérico proposto. Tais exemplos serão realizados afim de comparar e validar os resultados obtidos em termos de custo computacional e de precisão em relação à solução analítica quando a mesma for possível de ser obtida.

4.2.2. Exemplo 1

O exemplo 1 corresponde à aplicação do método numérico ao exemplo descrito e resolvido analiticamente na subseção 3.3.1. A Figura 4-1 ilustra a comparação entre a solução analítica e o resultado fornecido pelo método proposto para a probabilidade $\phi_{11}(t)$ de transição intervalar. Os erros cometidos em se estimar $\phi_{11}(t)$ pelo método descrito são apresentados no APÊNDICE B, sendo o máximo da ordem de 10^{-5} .

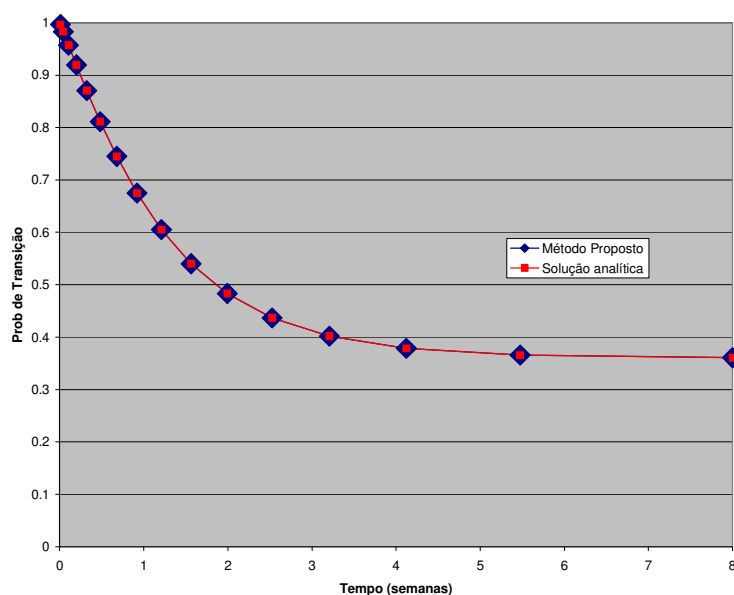


Figura 4-1 – Probabilidade $\phi_{11}(t)$ de Transição Intervalar

Já a Figura 4-2 ilustra a adequação do método numérico para a probabilidade $\phi_{22}(t)$ de transição intervalar. Os erros cometidos em se estimar $\phi_{22}(t)$ numericamente estão

apresentados no APÊNDICE B assim como os valores de tais probabilidades de transição. O erro máximo cometido neste caso é da ordem de 10^{-6} .

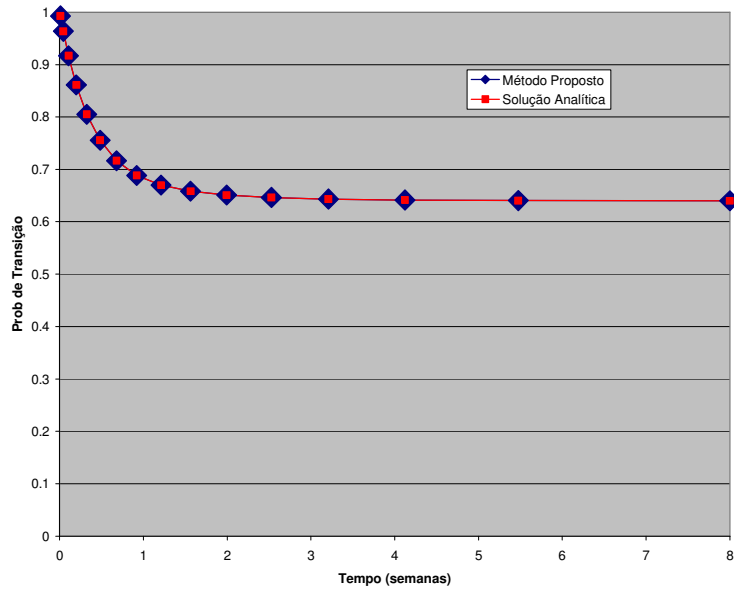


Figura 4-2 – Probabilidade $\phi_{22}(t)$ de Transição Intervalar

Os valores de $\phi_{11}(t), \phi_{12}(t), \phi_{21}(t), \phi_{22}(t)$ são calculados simultaneamente e o tempo de simulação foi de 0.01 do segundo.

4.2.3. Exemplo 2

Os resultados apresentados no exemplo 1 mostram que o procedimento numérico descrito é passível de aplicação a PSMHs descritos a partir de probabilidades de transição como na seção 3.2. Porém, PSMHs a partir de taxas de transição são o foco do presente trabalho.

O exemplo 2 trata um PSMH com taxas constantes, cujo diagrama de estados é dado na Figura 4-3, onde $\lambda = 0.01h^{-1}$ e $\mu = 0.1h^{-1}$. Tal PSMH corresponde a um processo Markoviano Homogêneo, já que os tempos de permanência nos estados 1 e 2 são exponencialmente distribuídos.

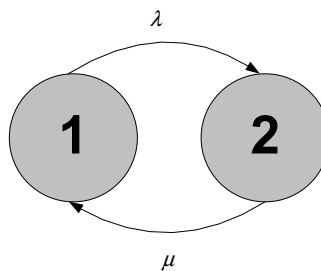


Figura 4-3 – Diagrama de estados do PSMH com taxas constantes

Tal PM possui solução analítica dada em Oliveira (2001) pela Equação 4-9 e Equação 4-10, supondo que $P_1(0) = 1$ e $P_2(0) = 0$:

$$P_1(t) = \frac{1}{\mu + \lambda} \left[\mu + \lambda e^{-(\mu + \lambda)t} \right] \quad \text{Equação 4-9}$$

$$P_2(t) = 1 - P_1(t). \quad \text{Equação 4-10}$$

Onde $P_1(t)$ e $P_2(t)$ são as probabilidades de estado do PM.

A Figura 4-4 ilustra os resultados fornecidos pelo método numérico proposto para PSMHs e a solução analítica para um horizonte de previsão $t = 1000.0hs$. Os resultados numéricos estão no APÊNDICE C o qual também apresenta os erros incorridos.

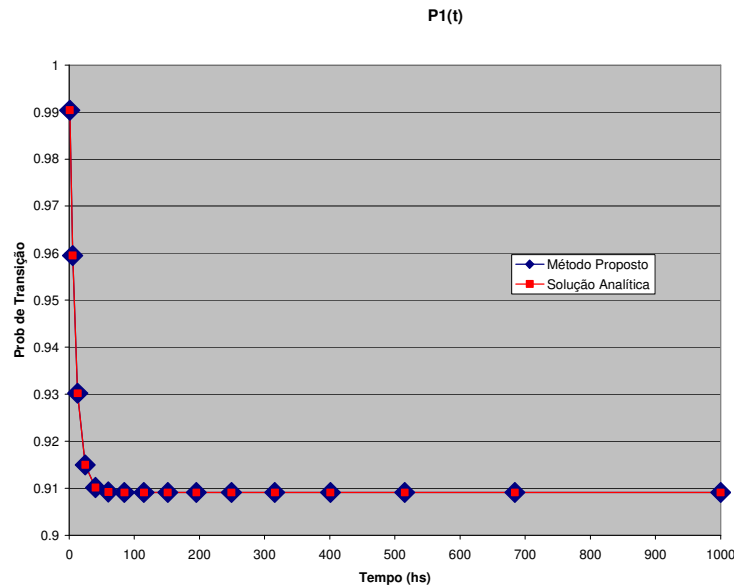


Figura 4-4 – Comparação entre os resultados fornecidos para $P_1(t)$

Já a Figura 4-5 ilustra os resultados fornecidos pelo método numérico proposto para PSMHs e a solução analítica para um horizonte de previsão $t = 1000.0hs$. Os resultados também estão no APÊNDICE C. O tempo de simulação para o exemplo 2 foi de $0.01seg$.

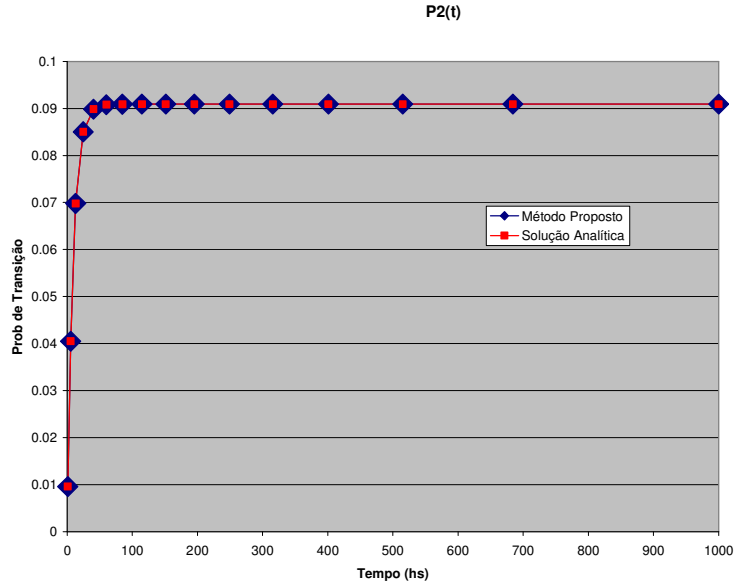


Figura 4-5 – Comparação entre os resultados fornecidos para $P_2(t)$

O exemplo 2 mostra que os PSMs generalizam resultados obtidos para os processos Markovianos.

4.2.4. Exemplo 3

O terceiro exemplo de PSMHs está ilustrado na Figura 4-6, onde $\lambda = 10^{-4} h^{-1}$ e $\mu = 0.01 h^{-1}$. O tempo de permanência no estado 1 dado que o processo irá ocupar o estado 2 em sua próxima transição segue uma distribuição Lognormal cuja PDF é dada pela Equação 4-11, onde $v = E[\ln(T)] = 2.5hs$, $\sigma = \sqrt{Var\{\ln\{T\}\}} = 0.25hs$ e T é o tempo de permanência no estado 1.

$$f_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \tau - v}{\sigma}\right].$$

Equação 4-11

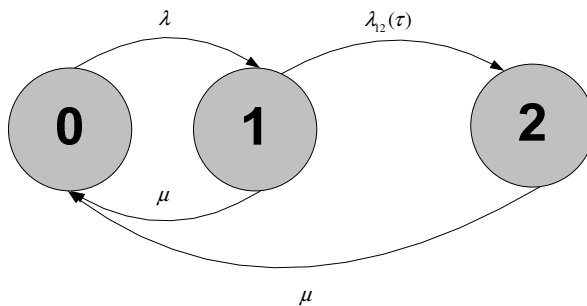


Figura 4-6 – PSMH com tempo de permanência no estado 1 seguindo uma Lognormal

Tal PSMH não possui solução analítica como nos exemplos 1 e 2 e devido a isso o método proposto será comparado com a solução Monte Carlo em termos de desempenho e exatidão.

Dado que o processo encontra-se no estado 0 em $t=0$ e está indisponível no estado 2, a probabilidade $P_0(t)$ e a indisponibilidade $I(t)$ seguem para um horizonte de previsão de $t = 2000.0hs$ na Figura 4-7 e Figura 4-8, respectivamente.

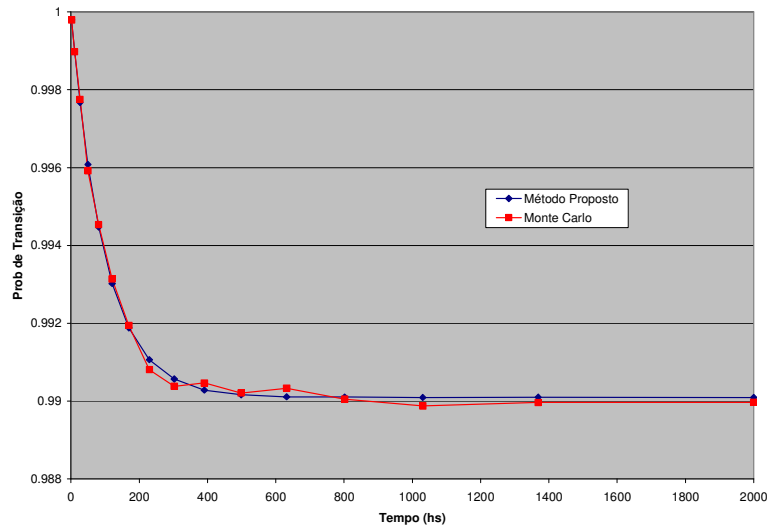


Figura 4-7 – $P_0(t)$ para o exemplo 3

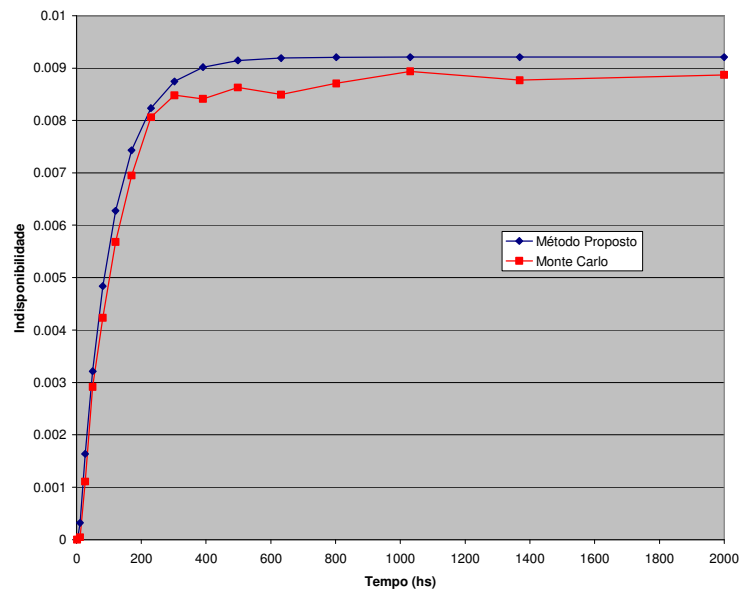


Figura 4-8 – $I(t)$ para o exemplo 3

O método proposto e a simulação Monte Carlo possuem tempos de simulação de $2.73seg$ e $88.52seg$, respectivamente. O APÊNDICE D contém os pontos dos gráficos da Figura 4-7 e

Figura 4-8, além dos valores dos erros incorridos pelo método proposto quando comparado com a solução Monte Carlo.

Os exemplos apresentados podem ser considerados abrangentes já que o comportamento de evolução das taxas de falha analisado (Exponencial e Lognormal³) é o que normalmente aparece em exemplos reais. A metodologia proposta apresentou-se bastante veloz quando em comparação com a simulação Monte Carlo e precisa em relação à solução analítica quando a mesma foi possível de ser obtida.

Na próxima seção, será desenvolvido o método numérico proposto para a resolução das equações dos processos semi Markovianos Não Homogêneos definidos a partir de taxas de transição.

4.3. Método numérico proposto para PSMNHs definidos a partir de taxas de transição

A Equação 3-53 a qual descreve a função densidade do número de vezes que um estado j é visitado para um PSMNH definido por taxas de transição pode ser escrita na forma matricial como na Equação 4-12:

$$\begin{aligned} [h_{r1}(t) \cdots h_{rN}(t)] &= [a_{r1}(t) \cdots a_{rN}(t)] \\ &+ \int_0^t [h_{r1}(\tau) \cdots h_{rN}(\tau)] \cdot \begin{bmatrix} k_{11}(t-\tau, t, \tau) & \cdots & k_{1N}(t-\tau, t, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(t-\tau, t, \tau) & \cdots & k_{NN}(t-\tau, t, \tau) \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad \text{Equação 4-12}$$

Onde N é o número de estados do PSMNH,

$$a_{rj}(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(0) \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(l, l, 0) dl\right) \lambda_{ij}(t, t, 0) \quad \text{Equação 4-13}$$

e

$$k_{ij}(t-\tau, t, \tau) = \exp\left(-\int_0^{t-\tau} \lambda_i(l, \tau+l, \tau) dl\right) \lambda_{ij}(t-\tau, t, \tau). \quad \text{Equação 4-14}$$

A Equação 4-12 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} h_{r1}(t) \\ \vdots \\ h_{rN}(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{r1}(t) \\ \vdots \\ a_{rN}(t) \end{bmatrix}^T + \int_0^t \begin{bmatrix} k_{11}(t-\tau, t, \tau) & \cdots & k_{1N}(t-\tau, t, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(t-\tau, t, \tau) & \cdots & k_{NN}(t-\tau, t, \tau) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} h_{r1}(\tau) \\ \vdots \\ h_{rN}(\tau) \end{bmatrix}^T d\tau. \quad \text{Equação 4-15}$$

³ Resultados semelhantes podem também ser derivados para outras distribuições de probabilidade, como a Weibull.

Onde o símbolo T representa a matriz Transposta. Segue então que:

$$\left[H(t) \right]^T = \left[A(t) \right]^T + \int_0^t \left[K(t-\tau, t, \tau) \right]^T \cdot \left[H(\tau) \right]^T d\tau. \quad \text{Equação 4-16}$$

Aplicando transformadas de Laplace à Equação 4-16:

$$\left[\tilde{H}(s) \right]^T = \left[\tilde{A}(s) \right]^T + \left[\tilde{K}(s) \right]^T * \left[\tilde{H}(s) \right]^T \quad \text{Equação 4-17}$$

A Equação 4-17 pode ser escrita como:

$$\left[I - \left[\tilde{K}(s) \right]^T \right] \cdot \left[\tilde{H}(s) \right]^T = \left[\tilde{A}(s) \right]^T. \quad \text{Equação 4-18}$$

Ou

$$\left[\tilde{H}(s) \right]^T = \left[I - \left[\tilde{K}(s) \right]^T \right]^{-1} \cdot \left[\tilde{A}(s) \right]^T. \quad \text{Equação 4-19}$$

A Equação 4-19 deve ser resolvida para $s=1, \dots, R$ por algum método numérico de resolução de sistemas de equações algébricas lineares. As raízes da Equação 4-19 são os valores de $\tilde{h}_{rj}(s), \forall j=1, \dots, N; \forall s=1, \dots, R$.

Aplicando TLs à Equação 3-54 a qual determina as probabilidades de transição intervalares para um PSMNH definido por taxas de transição, tem-se que:

$$\tilde{\phi}_j(s) = \phi(0) \cdot \tilde{v}_j(s) + \tilde{h}_{rj}(s) * \tilde{v}_j(s). \quad \text{Equação 4-20}$$

Onde $\tilde{v}_j(s)$ é a TL do termo $\exp\left(-\int_0^{t-\tau} \lambda_j(l, \tau+l, \tau) dl\right)$. A Equação 4-20 deve ser resolvida

$\forall j=1, \dots, N$ e $\forall s=1, \dots, R$ utilizando os valores $\tilde{h}_{rj}(s)$ obtidos da Equação 4-19. Os valores $\tilde{\phi}_j(s)$ representam a solução de tal equação.

Após a resolução da Equação 4-20, a solução $\tilde{\phi}_j(s)$ deve ser invertida conforme método descrito na seção 4.2 a fim de obter a solução $\phi_j(t), \forall t \geq 0$. A Equação 4-20 deve ser resolvida N vezes afim de se obter $\phi_j(t), \forall j=1, \dots, N$.

Conforme relatado na seção 4.2, o número R de pontos que a variável transformada s deve ser discretizada é igual a 16. Porém, para o caso Não Homogêneo o número de pontos de discretização pode ser incrementado através da relação dada pela Equação 4-21 a qual apresenta a TL da função $f(K+at)$, onde $K > 0$ e $a > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-st} f(K+at) dt &= \int_K^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)(u-K)} f(u) \frac{du}{a} & \left(u = K + at \Rightarrow t = \frac{u-K}{a} \Rightarrow du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a} \right) \\
&= \frac{\exp\left(sK/a\right)}{a} \left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du - \int_0^K e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du \right] \\
&= \frac{\exp\left(sK/a\right)}{a} \left[\tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^K e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du \right]
\end{aligned}$$

Equação 4-21

As quantidades $K > 0$ e $a > 0$ representam o tempo acumulado de operação do sistema e uma constante de escala, respectivamente. Tal constante de escala será a mesma utilizada na seção 4.2.

4.3.1. Exemplo 4

Um exemplo de PSMNH está ilustrado na Figura 4-9, onde $\lambda = 0.001h^{-1}$ e $\mu = 0.01h^{-1}$. O tempo de permanência no estado 2 dado que o processo irá ocupar o estado 3 segue uma distribuição Lognormal cuja PDF é dada pela Equação 4-22.

$$f_{ikt}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \tau - \mu(t)}{\sigma(t)}\right].$$

Equação 4-22

Onde $\mu(t) = E\{\ln(T(t))\}$, $\sigma(t) = \sqrt{Var\{\ln\{T(t)\}\}}$ e $T(t)$ é o tempo de permanência no estado 2 o qual varia linearmente com o tempo de processo entre os valores de 20 e 2hs no intervalo das primeiras 14 semanas permanecendo constante para $t > 14$ semanas, sendo o valor do desvio padrão $\sigma(t)$ igual a 10% do valor médio $\mu(t)$.

A Figura 4-9 ilustra tal PSMNH, sendo que a transição ondulada indica a dependência da taxa de transição $\lambda_{23t}(\cdot)$ em relação ao tempo t global de processo.

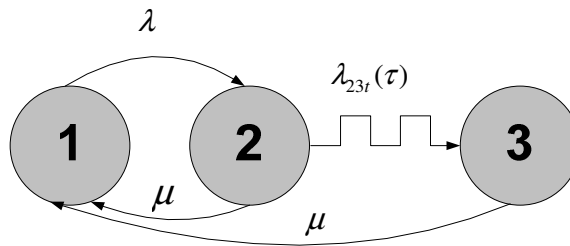


Figura 4-9 – PSMNH com tempo de permanência no estado 2 seguindo uma Lognormal

Tal PSMNH não possui solução analítica e devido a isso o método proposto será comparado com a solução Monte Carlo em termos de desempenho e exatidão.

Dado que o processo encontra-se no estado 1 em $t = 0$ e torna-se indisponível no estado 3, a indisponibilidade para um horizonte de previsão de $t = 500.0hs$ é dada na Figura 4-10.

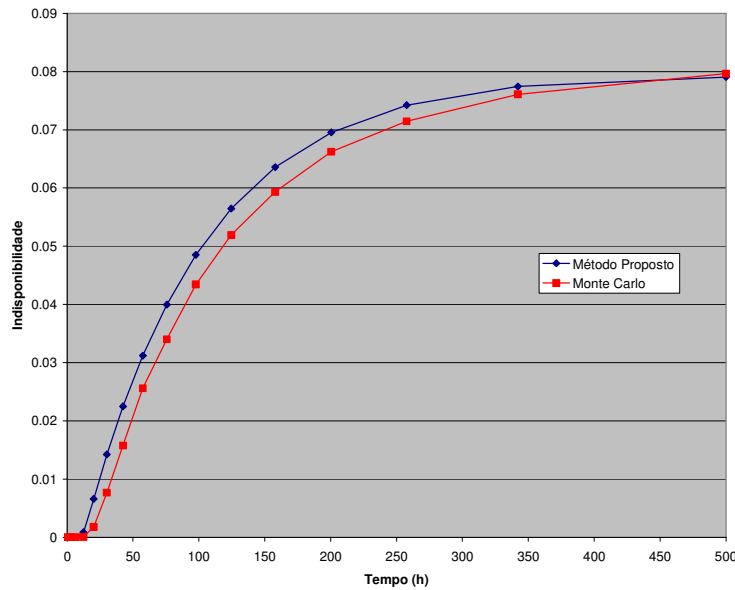


Figura 4-10 – $I(t)$ para o exemplo 4

O método proposto e a simulação Monte Carlo possuem tempos de simulação de 4.5seg e 90.36seg, respectivamente. O APÊNDICE E contém os pontos do gráfico da Figura 4-10, além dos valores da disponibilidade e dos erros relativos cometidos em aproximar a solução Monte Carlo da equação dos PSMNHs pelo método proposto.

É válido comentar o comportamento dos gráficos da Figura 4-8 e Figura 4-10. Nota-se nestes casos que os métodos numéricos propostos incluem o traçado de uma curva que ajusta os pontos fornecidos pela simulação Monte Carlo. Esta pode ser uma característica bastante benéfica já que as probabilidades de transição de um PSM podem ser ajustadas por uma curva de complexidade matemática inferior às equações de probabilidade de transição e dependendo de qual método escolhido ficar muito próxima da curva correta.

Entretanto, este não é o foco do presente trabalho e devido a isso os valores das probabilidades que serão utilizados no modelo híbrido proposto (PSM e RB) serão fornecidos pelos métodos numéricos descritos nesta seção e na anterior.

O presente exemplo pode ser considerado abrangente já que o comportamento de evolução das taxas de transição analisado (Exponencial e Lognormal⁴) é o que normalmente aparece em exemplos reais.

O método proposto para resolução das equações dos PSMHs e PSMNHs foi executado para os exemplos em ambiente *Microsoft Windows Professional XP* versão 2002 em um computador AMD Athlon (TM) XP 2200+ 1.36GHz, 256MB de memória RAM.

⁴ Resultados semelhantes podem também ser derivados para outras distribuições de probabilidade, como a *Weibull*.

5. MODELO HÍBRIDO PROPOSTO

O objetivo do presente capítulo é apresentar como será realizada a integração entre processos semi Markovianos e Redes Bayesianas. Além disso, serão apresentados dois possíveis exemplos de aplicação da metodologia proposta a sistemas complexos tolerantes à falha de distinta natureza tanto física quanto funcional.

5.1. Integração: semi Markov X Redes Bayesianas

O objetivo geral do presente trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que represente de forma mais realística sistemas complexos através do hibridismo entre processos semi Markovianos e Redes Bayesianas. Tais sistemas alvo possuem uma característica básica: estão sujeitos a um processo estocástico de falha e reparo no qual o tempo de permanência em determinado estado influencia as probabilidades de transição. Além disso, fatores (ambientais, operacionais, fisiológicos, psicológicos, etc.) não necessariamente temporais também condicionam o comportamento futuro do sistema.

A metodologia híbrida proposta generaliza resultados já encontrados para os processos Markovianos, já que os PSMs são uma extensão daqueles. O modelo proposto será apresentado através de exemplos de aplicação fictícios os quais serão discutidos nas seções 5.3 e 5.4. Mas, antes disso na presente seção descreve-se como será realizado o hibridismo em termos numéricos entre PSMs e RBs o qual ocorre em tempo de simulação.

Então, considere um sistema para o qual o comportamento futuro é influenciado pelos conjuntos de variáveis temporais $\underline{t}$ e não temporais $\underline{c}$. O conjunto $\underline{t}$ pode ser formado aqui pelas variáveis tempo de permanência e/ou tempo de processo e sua influência sobre o comportamento do sistema será modelada pelos processos semi Markovianos.

Já o conjunto $\underline{c}$ de variáveis não temporais pode ser composto por fatores de naturezas distintas, como por exemplo, variáveis físicas, químicas, condições operacionais, comportamentais, fatores humanos psicológicos e/ou fisiológicos, etc. De uma forma geral, esses fatores possuem relações de causa e efeito entre si e serão considerados nesse trabalho com domínios finitos e discretos. Essas relações causais podem ser representadas por distribuições conjuntas de probabilidade. No modelo aqui proposto, tais distribuições conjuntas serão expressas por Redes Bayesianas de forma que a influência dos fatores sobre o comportamento do sistema possa ser analisada.

A junção do conhecimento sobre os conjuntos $\underline{t}$ e $\underline{c}$ origina um modelo estocástico híbrido o qual é capaz de representar a incerteza sobre a dinamicidade do sistema assim como

tratar como outras variáveis não necessariamente temporais, as quais possuem relações de causa e efeito entre si, influenciam tal evolução. Além disso, através da utilização das Redes Bayesianas é possível calibrar o conhecimento sobre o sistema com eventos operacionais atuais realizando inferências empíricas e/ou subjetivas.

Basicamente, a integração entre PSMs e RBs ocorre da seguinte maneira:

- Marginalizam-se as distribuições conjuntas de probabilidade, como foi feito na Equação 3-56 e Equação 3-57, para cada nó (variável) de saída das Redes Bayesianas. No modelo proposto, tais nós sempre representam parâmetros das funções das taxas de transição (falha ou reparo) e são tratados como variáveis aleatórias discretas;
- Após esta etapa, os parâmetros das taxas de transição do processo são amostrados a partir do método de inversão de variáveis aleatórias discretas, o qual segue na forma de pseudocódigo:
 - a. Gere um número aleatório $U \in [0,1]$;
 - b. Se $U < p_0$, faça $X = x_0$ e pare;
 - c. Se $U < p_0 + p_1$, faça $X = x_1$ e pare;
 - d. Se $U < p_0 + p_1 + p_2$, faça $X = x_2$ e pare.

.....

onde $X = x_i$ corresponde à variável aleatória discreta, no caso parâmetros das funções das taxas de transição, $p_i = P\{X = x_i\}$ e $\sum_i p_i = F_i$ é a função de distribuição acumulada da variável x_i . Para maiores detalhes sobre o método de inversão de variáveis aleatórias, veja Ross (2002);

- Após a amostragem destes parâmetros, o simulador executa o método numérico descrito na seção 4.2 caso o processo semi Markoviano seja Homogêneo ou o método numérico da seção 4.3 caso se trate de um processo Não Homogêneo;

O procedimento descrito é repetido por um número N de iterações a fim de se avaliar a influência da incerteza dada pelas Redes Bayesianas sobre as probabilidades de transição do processo semi Markoviano.

A Figura 5-1 ilustra em fluxograma o procedimento e mostra que é necessário a especificação de um horizonte de missão (período de interesse de observação do sistema) e do número de iterações (amostras) para execução do modelo.

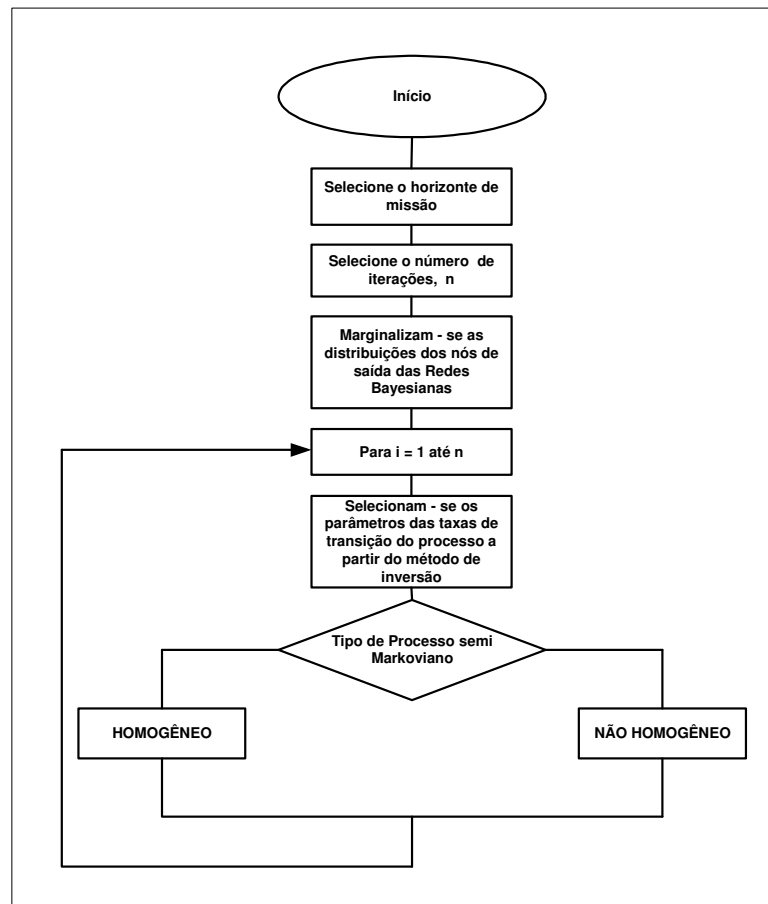


Figura 5-1 – Fluxograma descrevendo o algoritmo de integração entre Processos semi Markovianos e Redes Bayesianas

Vale frisar aqui que o hibridismo entre os PSMs e as RBs é realizado através de uma interface representada pelos parâmetros de funções das taxas de transição os quais também serão considerados com domínio finito e discreto. Tais parâmetros serão nós de saída das RBs e informação de entrada para execução do método numérico proposto no capítulo 4 para os PSMs definidos a partir de taxas de transição. À medida que novas evidências tornam-se disponíveis, as distribuições de probabilidade destes parâmetros assim como o nível de conhecimento sobre o comportamento do sistema podem ser atualizados.

Na próxima seção, serão apresentados os sistemas tolerantes à falha.

5.2. Sistemas tolerantes à falha

A maioria dos modelos probabilísticos de tratamento da (In)Disponibilidade, Confiabilidade e Manutenibilidade operacional de sistemas complexos reparáveis parte da premissa que a falha de um componente imediatamente acarreta a falha do sistema. No entanto, em alguns sistemas produtivos atuais a falha de um equipamento transforma-se em falha do sistema somente se o tempo de reparo exceder um determinado tempo T , o qual é

conhecido como tempo fora de serviço tolerável. Os sistemas que possuem esta característica são denominados tolerantes à falha.

Vaurio (1997) apresenta alguns exemplos de sistemas tolerantes à falha e desenvolve resultados para as características de Confiabilidade do sistema em termos das correspondentes características do equipamento. Entretanto, não apresenta nenhum resultado no que diz respeito a evolução temporal de indicadores de Confiabilidade destes sistemas.

Os PSMs desenvolvidos em Becker *et al.* (2000) são muito atrativos para tratamento de sistemas tolerantes à falha. No caso no qual as funções densidade dos tempos de permanência em dado estado possuem parâmetros os quais são efeito de outras variáveis aleatórias, uma Rede Bayesiana será acoplada com o intuito de tratar a incerteza associada a essa relação de causalidade.

Nas próximas seções, exemplos de possíveis aplicações do modelo híbrido proposto serão apresentados a sistemas tolerantes à falha. Para tais exemplos, será demonstrado detalhadamente o algoritmo descrito na seção anterior.

5.3. Exemplo 1: Sistema de resfriamento

5.3.1. Descrição do problema

Considere um sistema de resfriamento de um pequeno frigorífico composto de apenas um equipamento. Tal sistema possui um tempo tolerável fora de serviço (TDT), já que se o reparo for realizado rapidamente caso o equipamento falhe, os danos aos produtos não serão palpáveis. Já se o reparo demorar a ser realizado, ou o dono do estabelecimento ou a empresa responsável pela operação, manutenção e reparo do equipamento arcarão com o prejuízo a depender de cláusulas contratuais.

Assim, quando o equipamento encontra-se falho, o que corresponde ao estado 2 na Figura 5-2, um relógio local é iniciado e caso o tempo nesse estado for maior que o tolerável, tal situação implicará em indisponibilidade do sistema e consequentemente em prejuízos financeiros, o que corresponde ao estado 3. Em outras palavras, a taxa de transição do estado 2 para o estado 3 depende de quanto tempo o equipamento permanece falho no estado 2 o qual segue uma distribuição *Lognormal* cuja PDF é dada pela Equação 5-1:

$$f_{23}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \tau - v}{\sigma}\right], \quad \text{Equação 5-1}$$

onde $v = E[\ln(T)]$, $\sigma = \sqrt{\text{Var}\{\ln\{T\}\}}$ e T é o TDT.

Já que no sistema a ser modelado, as transições entre estados dependem do tempo gasto desde a última transição e não do tempo de processo um processo semi Markoviano Homogêneo surge como uma opção para modelagem deste sistema. Surge, então, uma indagação: quais fatores influenciam (condicionam) os parâmetros das taxas de falha e reparo desse processo semi Markoviano?

Geralmente, esses fatores possuem uma relação de causa e efeito entre si. Essas relações causais entre os fatores e os parâmetros das taxas de transição (falha e reparo) podem ser representadas por distribuições conjuntas de probabilidade. No modelo aqui proposto, tais distribuições conjuntas serão expressas por Redes Bayesianas. Ou seja, considera-se que os parâmetros das taxas de falha e reparo são incertos, sendo o domínio da incerteza expresso por distribuições de probabilidade. Conforme relatado na seção 5.1, será considerado que tanto os fatores quanto os parâmetros das taxas de transição possuem domínios finitos e discretos.

Tem-se, portanto, que o sistema de resfriamento do frigorífico será modelado através de um modelo híbrido entre um processo semi Markoviano Homogêneo e Redes Bayesianas, como na Figura 5-2 na qual f_λ e f_μ são as distribuições marginais de probabilidade dos parâmetros λ e μ , respectivamente.

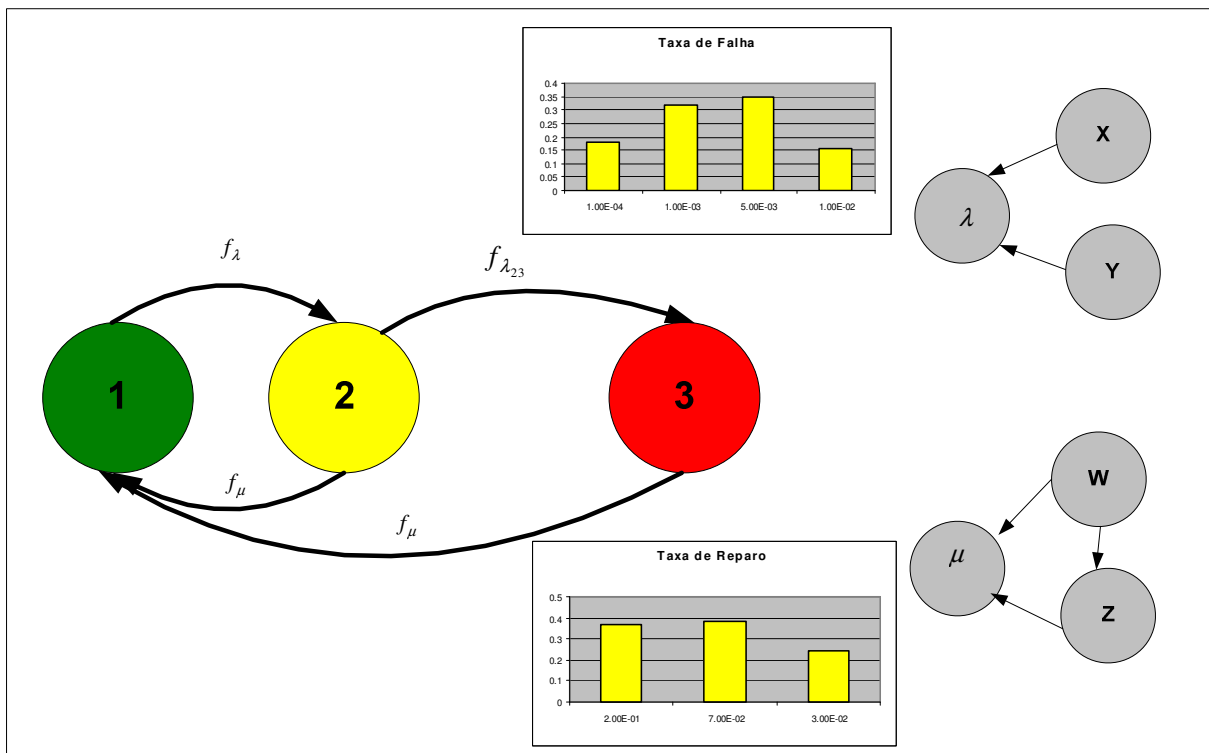


Figura 5-2 – Modelo Híbrido: Processo semi Markoviano Homogêneo e Redes Bayesianas para o sistema de resfriamento do frigorífico

5.3.2. Dados para o exemplo

Na Figura 5-2, é considerado que o parâmetro λ (taxa de falha do equipamento) é condicionado por dois fatores X e Y , os quais são a “qualidade dos componentes” e a “qualidade do reparo”, respectivamente. Como mencionado anteriormente, os fatores externos são aleatórios e discretos com domínios finitos. Assim, o fator X pode ter o conjunto de valores {novos (N), semi-novos (S), desgastados (D)}, enquanto que para o fator Y pode ter-se {apropriada (A), não apropriada (N)}.

O parâmetro λ também deve ser discretizado em valores entre um limite inferior e superior que podem ser oriundos de uma análise de dados de campo e/ou opinião de especialistas. Para o referente caso, considera-se o conjunto $\{10^{-4}, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}\}$ [falha/h] para a variável λ . Esta etapa corresponde à primeira fase de montagem de uma Rede Bayesiana, na qual se determinam os nós (variáveis) de interesse e seus possíveis valores.

Após determinada a estrutura de causa e efeito que está representada pela RB na parte superior da Figura 5-2, prossegue-se a montagem da RB determinando-se agora uma tabela de distribuição de probabilidades condicionais para cada variável de interesse. Esta etapa pode ser realizada a partir da análise de dados de campo e/ou opinião de especialistas.

Seguem abaixo as tabelas de distribuições de probabilidade condicionais para as variáveis X , Y e λ :

Tabela 5-1– TPC para a variável X

X	$P(X = x)$
Novo (N)	0.3
Semi-Novo (S)	0.5
Desgastado (D)	0.2

Tabela 5-2 – TPC para a variável Y

Y	$P(Y = y)$
Apropriada (A)	0.8
Não Apropriada (N)	0.2

Tabela 5-3 – TPC para a variável λ

X	N		S		D	
Y	A	N	A	N	A	N
$P(\lambda = 10^{-4} X, Y)$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0
$P(\lambda = 10^{-3} X, Y)$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.0
$P(\lambda = 5 \cdot 10^{-3} X, Y)$	0.1	0.2	0.4	0.5	0.5	0.6
$P(\lambda = 10^{-2} X, Y)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4

Neste exemplo, considera-se que o parâmetro μ (taxa de reparo do equipamento) é constante. Esta é uma suposição que geralmente não se verifica na prática, já que a taxa de reparo pode variar em função de um conjunto de fatores ainda maior que o daqueles que afetam a taxa de falha, um dos quais seria o período decorrido desde a ocorrência da última falha. Porém, considera-se a taxa de reparo incerta e dependente de fatores externos, o que está representado na RB na parte inferior da Figura 5-2.

Nesta rede, a variável aleatória W corresponde ao “turno em que a falha ocorre” e possui domínio {manhã (M), tarde (T), noite (N)}. A variável aleatória Z representa a “prioridade do sistema quanto à disponibilidade de recursos (material e humano) de manutenção” e possui o seguinte domínio: {alta (A), baixa (B)}. Além das variáveis W e Z condicionarem diretamente o parâmetro μ , as mesmas possuem uma relação de causa e efeito entre si.

A partir de dados de campo e da experiência operacional e de manutenção com o sistema em análise, pode-se também discretizar o domínio da taxa de reparo. Para efeitos ilustrativos, considere que a taxa de reparo μ tem o seguinte domínio: {0.2, 0.07, 0.03} [reparo/h].

O mesmo procedimento de determinação das tabelas de distribuições de probabilidades condicionais que fora realizado para λ deve ser realizado para o parâmetro μ . Desta forma, tem-se que:

Tabela 5-4 – TPC da variável W

W	$P(W = w)$
Manhã (M)	0.5
Tarde (T)	0.3
Noite (N)	0.2

Tabela 5-5 – TPC da variável Z

W	M	T	N
$P(Z = A W)$	0.7	0.6	0.5
$P(Z = B W)$	0.3	0.4	0.5

Tabela 5-6 – TPC da variável μ

Z	A			B		
W	M	T	N	M	T	N
$P(\mu = 0.2 Z, W)$	0.5	0.4	0.4	0.2	0.3	0.1
$P(\mu = 0.07 Z, W)$	0.3	0.45	0.4	0.5	0.4	0.4
$P(\mu = 0.03 Z, W)$	0.2	0.15	0.2	0.3	0.3	0.5

Já o parâmetro v que representa o valor esperado do logaritmo do tempo de espera no estado 2 dado que o sistema irá para o estado 3 foi considerado constante e igual a $2.5hs$. O desvio padrão σ foi considerado igual a $0.25hs$.

Para configurar completamente o modelo híbrido resta especificar o vetor de probabilidades iniciais. Considerando que o sistema encontra-se operacional (estado 1) no início da análise, tem-se que: $P_1(0)=1.0$, $P_2(0)=0.0$ e $P_3(0)=0.0$. Agora, portanto, o modelo híbrido pode ser executado afim de se determinar as probabilidades de estado $P_i(t)$, com $i = 1, 2$ e 3 . Desta maneira, os indicadores (Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade) instantâneos do sistema podem ser calculados.

5.3.3. Análise de Resultados

O objetivo deste exemplo é avaliar indicadores de desempenho de Confiabilidade do sistema descrito para um horizonte de previsão $t=500.0hs$. O procedimento da Figura 5-1 que descreve o modelo híbrido proposto será repetido por um número $N=10000$ iterações de forma a obter a incerteza dada pelas Redes Bayesianas sobre tais indicadores.

5.3.3.1. Distribuições marginais

Utilizando os resultados descritos na subseção 3.5.4, as distribuições marginais de probabilidade f_λ e f_μ dos parâmetros λ e μ são dadas na Tabela 5-7 e Tabela 5-8, respectivamente.

Tabela 5-7 – Distribuição marginal de probabilidade da variável λ em h^{-1}

$\lambda(h^{-1})$	$P(\Lambda = \lambda)$
10^{-4}	0.18
10^{-3}	0.316
$5 \cdot 10^{-3}$	0.35
10^{-2}	0.154

Tabela 5-8 – Distribuição marginal de probabilidade da variável μ em h^{-1}

$\mu(h^{-1})$	$P(\Psi = \mu)$
0.2	0.18
0.07	0.316
0.03	0.35

5.3.3.2. Disponibilidade Operacional

A Figura 5-3 ilustra os percentis de 5%, 50% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador disponibilidade operacional. Cada um dos percentis corresponde à probabilidade do valor real da disponibilidade ser inferior ao valor calculado.

A incerteza dada pelos percentis representa a incerteza sobre os parâmetros λ e μ os quais foram dados por RBs. A evolução temporal da disponibilidade foi calculada a partir do procedimento numérico descrito na seção 4.2 para PSMHs.

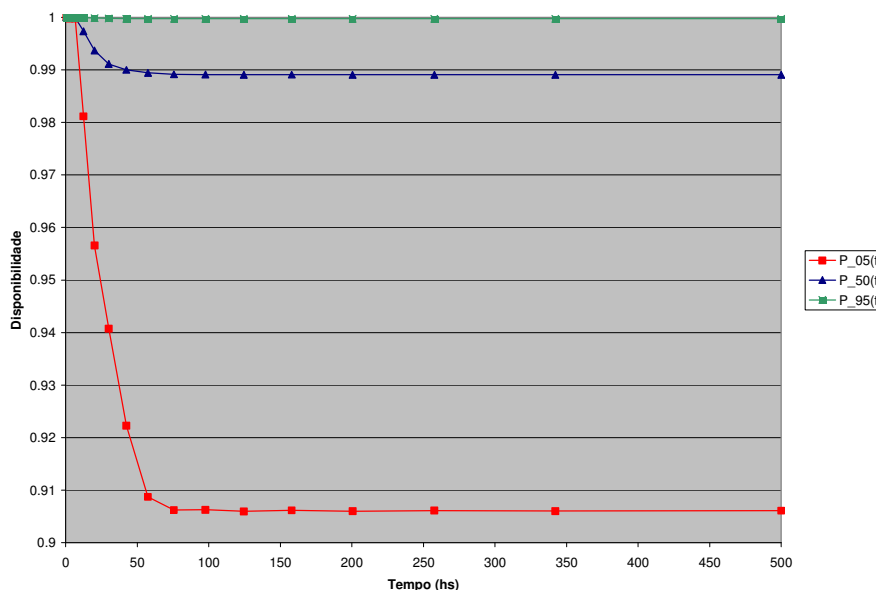


Figura 5-3 – Disponibilidade Operacional para o sistema de resfriamento

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 4.79 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE F.

5.3.3.3. Confiabilidade

O indicador Confiabilidade é calculado como na seção 2.14 assumindo que o estado 3 (sistema indisponível) é um estado absorvente. A partir desta suposição, o PSMH dado na Figura 5-2 não é mais um processo irreduzível, i.e., cada estado do sistema não é mais atingível a partir de qualquer outro estado direta ou indiretamente.

A Figura 5-4 apresenta os percentis de 5%, 50% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador Confiabilidade.

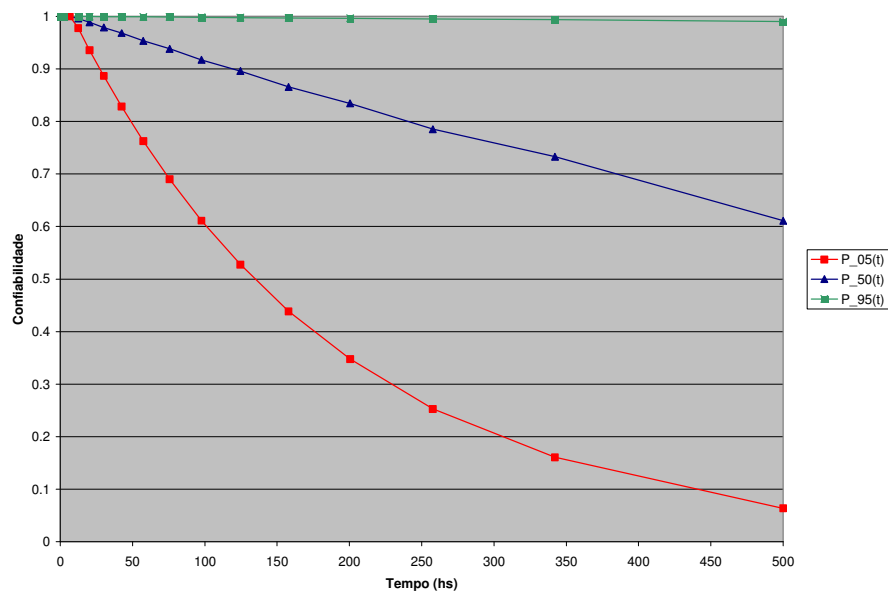


Figura 5-4 – Confiabilidade para o sistema de resfriamento

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 4.20 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE F.

5.3.3.4. Manutenibilidade

O indicador Manutenibilidade é calculado como na seção 2.15 considerando que em $t = 0$ o sistema encontra-se no estado 3 e assumindo que os estados 1 e 2 (sistema disponível) são estados absorventes. A partir desta última suposição, o PSMH dado na Figura 5-2 também não é mais um processo irreduzível.

A Figura 5-5 apresenta os percentis de 5%, 50% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador Manutenibilidade.

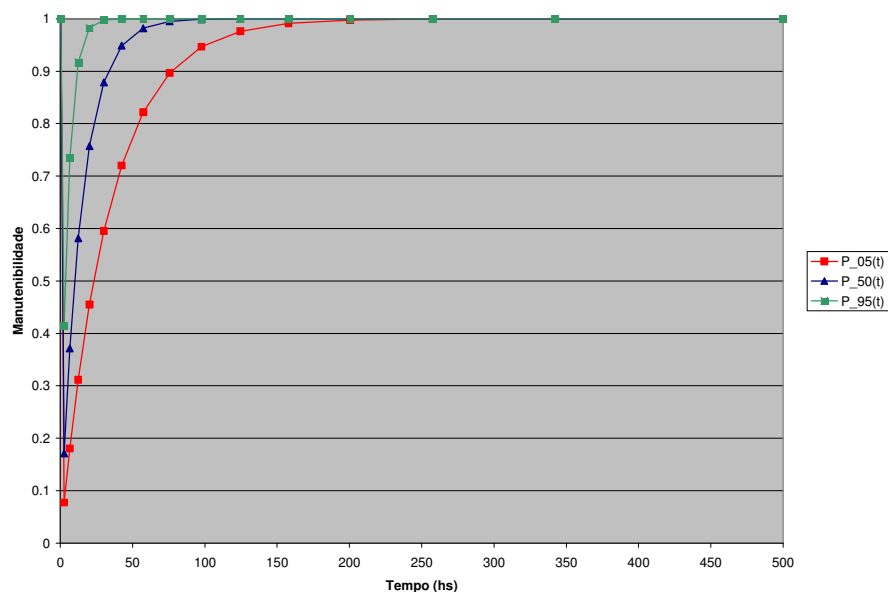


Figura 5-5 – Manutenibilidade para o sistema de resfriamento

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 0.05 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE F.

5.4. Exemplo 2: Sistema de aquecimento

O segundo exemplo de aplicação é uma versão modificada do estudo de caso apresentado em Becker *et al.* (2000). Entretanto, ao contrário do trabalho original, o presente exemplo é construído de forma a modelar explicitamente a influência de fatores externos sobre a evolução dos indicadores de desempenho de Confiabilidade através do hibridismo entre PSMs e RBs.

Além disso, o presente exemplo mostra como é possível realizar atualizações do conhecimento sobre o comportamento do sistema à medida que novas informações sobre tais fatores tornam-se disponíveis.

5.4.1. Descrição do problema

O exemplo é usado para descrever o comportamento de um sistema de aquecimento constituído de dois equipamentos. Uma rede de aquecimento possui um TDT, já que se o reparo ocorre rapidamente os usuários nem mesmo notarão uma interrupção do serviço. Porém, se o reparo demorar a ser executado a temperatura das casas cairá e os usuários no mínimo ficarão insatisfeitos.

Neste caso, o TDT é uma variável aleatória e dependerá da temperatura ambiente. Pode-se, por exemplo, ajustar uma curva de regressão ao tempo fora de serviço tolerável como uma função das médias da temperatura ambiente ao longo do tempo.

Na Figura 5-6, é apresentada a estrutura gráfica do sistema em questão a qual está dividida em três fases cada uma representando um período de aquecimento como na Tabela 5-9. A mudança de fase é assumida ocorrer em instantes de tempo pré-determinados, sendo indicadas na Figura 5-6 por linhas tracejadas. Foram designados dez estados conforme Tabela 5-10.

Tabela 5-9 – Fases do período de aquecimento

Fase	Estados	Duração (Horas)	Descrição
1	1, 2, 3	336.0	Início do período de aquecimento; Equipamento 2 em manutenção;
2	4, 5, 6	336.0	Como acima, mas unidade 1 em manutenção;
3	7, 8, 9, 10	672.0	Ambos equipamentos em serviço, mas apenas um é exigido;

Na primeira fase (estados 1, 2 e 3) apenas o equipamento 1 estará operando, estando o equipamento 2 em manutenção preventiva. Na fase 2 (estados 4, 5 e 6), o equipamento 2 está operando e o equipamento 1 em manutenção preventiva. Na fase 3 (estados 7, 8, 9 e 10), ambos os equipamentos estão disponíveis, porém apenas um é requerido.

Tabela 5-10 – Lista de estados do sistema de aquecimento

Estados	Fase	Descrição
1	1	Equipamento 1 operando;
2	1	Equipamento 1 falho, mas TDT ainda não excedeu;
3	1	Como acima, mas TDT excedeu;
4	2	Equipamento 2 operando;
5	2	Equipamento 2 falho, mas TDT ainda não excedeu;
6	2	Como acima, mas TDT excedeu;
7	3	Ambos equipamentos operando;
8	3	Um equipamento operando, o outro falho;
9	3	Ambos equipamentos falhos, TDT ainda não excedeu;
10	3	Como acima, mas TDT excedeu;

Na Figura 5-6, os estados 2, 5 e 9 representam a falha do sistema, onde o TDT ainda não foi excedido. Se o tempo tolerável for excedido, o sistema torna-se indisponível (estados 3, 6 e 10) o que é representado pelas linhas onduladas. As linhas sólidas correspondem a transições entre estados, onde f_{λ_i} e f_{μ_i} representam as distribuições de probabilidade dos parâmetros λ e μ na fase i , com $i = 1, 2, 3$.

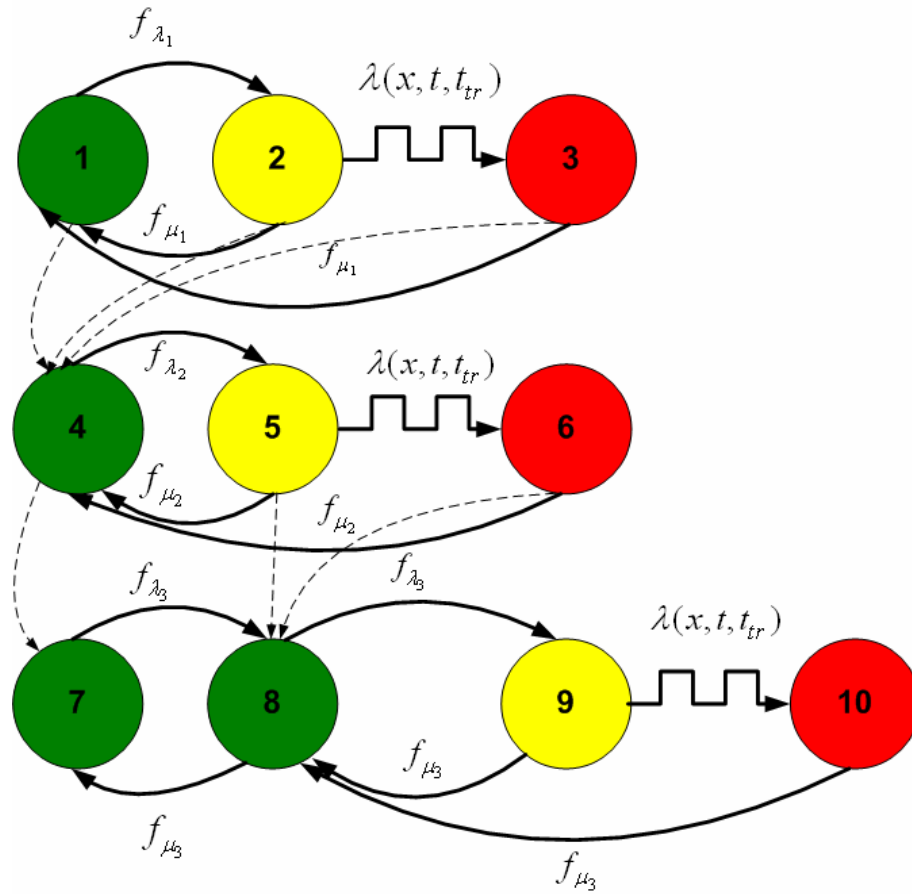


Figura 5-6 – Representação dos estados do PSMNH para a rede de aquecimento

5.4.2. Dados para o exemplo

As durações de cada fase estão de acordo com a Tabela 5-9 correspondendo a um total de 2016.0 hs. O TDT é uma variável aleatória que tem uma distribuição *Lognormal* dada na Equação 5-2:

$$f_{ikt}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \tau - \mu(t)}{\sigma(t)}\right], \quad \text{Equação 5-2}$$

onde t é o tempo de processo, $\mu(t) = E\{\ln(T(t))\}$, $\sigma(t) = \sqrt{\text{Var}\{\ln\{T(t)\}\}}$ e $T(\cdot)$ é o TDT.

O valor médio $E[T(t)]$ do TDT decrementa linearmente entre os valores de 20 e 2hs no intervalo das primeiras 14 semanas permanecendo constante para $t > 14$ semanas, como ilustrado na Figura 5-7. Estes valores correspondem, como no trabalho original, a temperaturas ambientais entre +10 e -15°C. O valor do desvio padrão $\sigma(t)$ foi configurado igual a 10% do valor médio $\mu(t)$.

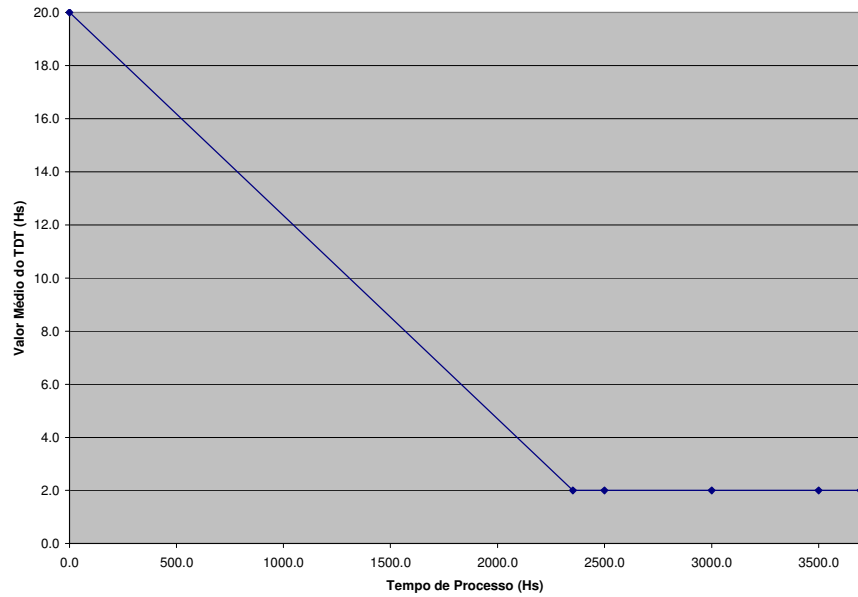


Figura 5-7 – Variação do valor médio $E[T(t)]$ do TDT em função do Tempo de Processo

Portanto, ao contrário do que ocorre no primeiro exemplo de aplicação, o TDT agora varia com o tempo de processo, fazendo com que o processo semi Markoviano Não Homogêneo possa ser utilizado para modelar o comportamento dinâmico de tal sistema.

Visto que o TDT varia com o tempo de processo, é bastante útil implementar o método de densidade de frequência desenvolvido por Becker *et al.* (2000) para PSMNHs definidos a partir de taxas de transição cujo método numérico de resolução é proposto e discutido neste trabalho na seção 4.3.

Porém, além do tempo de processo e do tempo de permanência em determinado estado, existem outras variáveis (fatores) que influenciam o comportamento dos indicadores de Confiabilidade ao longo do tempo. Estes fatores, os quais serão dados por redes Bayesianas, condicionam parâmetros das funções das taxas de transição do processo semi Markoviano não Homogêneo.

Na Figura 5-6, os parâmetros λ e μ os quais representam taxa de falha e reparo do equipamento, respectivamente são incertos e condicionados por determinados fatores. Será considerado aqui que os fatores que influenciam λ e μ são os mesmos do exemplo da seção 5.3. Porém, será permitido que a distribuição de probabilidades condicionais seja modificada ao longo das fases, conforme Figura 5-8.

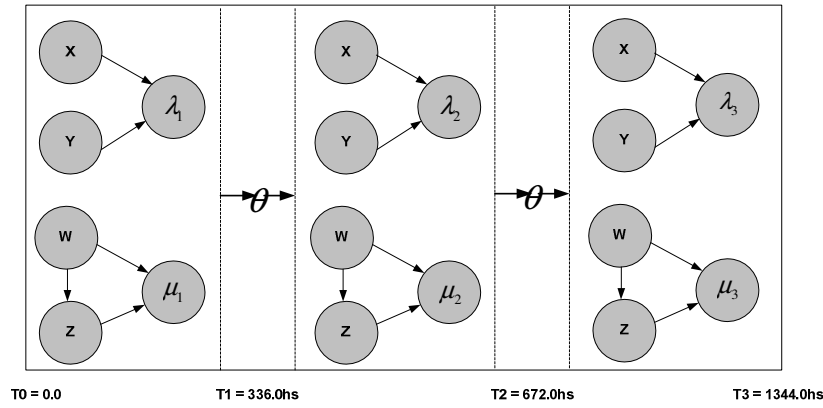


Figura 5-8 – Rede Bayesiana Dinâmica para os parâmetros λ_i e μ_i , com $i = 1, 2, 3$

A Figura 5-8 é uma RB dinâmica que representa a topologia entre as variáveis condicionantes e os parâmetros λ_i e μ_i , com $i = 1, 2, 3$. Uma RB dinâmica representa o comportamento das variáveis de interesse de determinado processo e suas respectivas relações de causa e efeito ao longo do tempo.

A variável θ corresponde a um processo estocástico desconhecido o qual é responsável pela modificação dos valores dos parâmetros λ e μ ao longo das fases. Segundo Kao *et al.* (2005), θ é definida como uma variável não contemporânea já que representa causalidades entre variáveis de diferentes fases.

As tabelas de probabilidades condicionais e marginais correspondentes a cada fase para os parâmetros λ e μ estão ilustradas nos APÊNDICES G e H. Foi considerado que as TPCs das fases 1 e 2 são exatamente as mesmas já que tais fases possuem características bastante semelhantes.

Medidas de desempenho bastante relevantes para este sistema são a Confiabilidade, a Manutenibilidade e a Indisponibilidade Operacional. Tais indicadores de desempenho serão avaliados na próxima seção.

5.4.3. Análise de resultados

O objetivo deste exemplo é avaliar indicadores de desempenho de Confiabilidade do sistema descrito para um horizonte de previsão $t = 1344.0hs$. O procedimento da Figura 5-1 que descreve o modelo híbrido proposto será repetido por um número $N = 10000$ iterações de forma a obter a incerteza dada pelas Redes Bayesianas sobre tais indicadores.

5.4.3.1. Indisponibilidade

A indisponibilidade do sistema pode ser ocasionada se o tempo fora de serviço exceder um intervalo decorrido tolerável o que pode ocorrer em qualquer uma das fases. De acordo com isto, a indisponibilidade operacional pode ser analisada conforme segue na Figura 5-9.

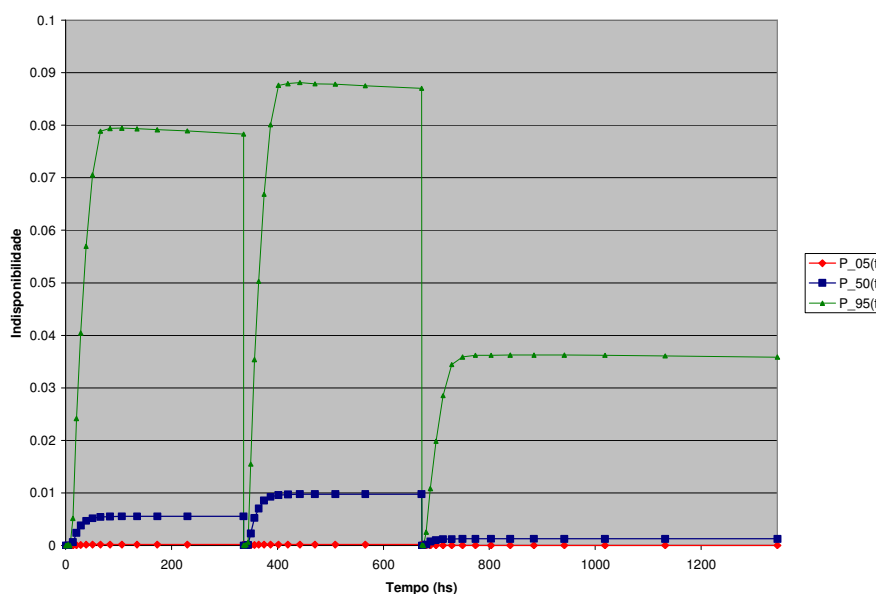


Figura 5-9 - Indisponibilidade operacional ocasionada se o TDT exceder

A figura acima ilustra os percentis de 5%, 50% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador indisponibilidade operacional ocasionada se o TDT exceder.

A incerteza dada pelos percentis representa a incerteza sobre os parâmetros do modelo os quais foram dados por RBs. A evolução temporal da indisponibilidade foi calculada a partir do procedimento numérico proposto e descrito na seção 4.3 para PSMNHs.

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 13.22 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE I.

5.4.3.2. Confiabilidade

O indicador Confiabilidade é calculado como na seção 2.14 assumindo que os estados 3, 6 e 10 (sistema indisponível) são estados absorventes. A partir desta suposição, o PSMNH dado na Figura 5-6 não é mais um processo irreduzível, i.e., cada estado do sistema não é mais atingível a partir de qualquer outro estado direta ou indiretamente.

A Confiabilidade do sistema será calculada considerando que o sistema pode vir a falhar se o TDT exceder pela primeira vez dentro do tempo de missão considerado. Além disso, é considerado aqui que o sistema sempre está operacional nos instantes de mudança de fase. A

figura abaixo apresenta os percentis de 5%, 50% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador Confiabilidade.

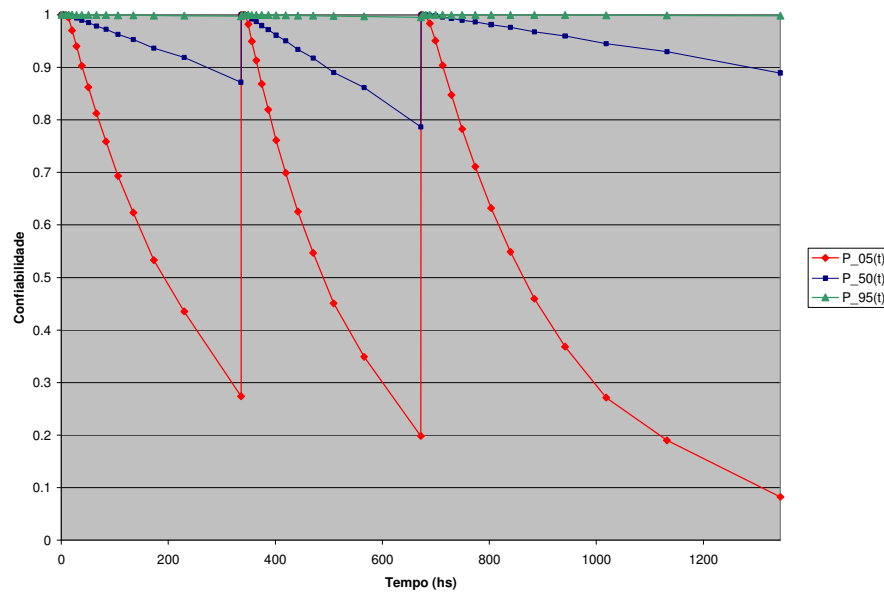


Figura 5-10 – Confiabilidade assumindo que a primeira falha do sistema ocorre se o TDT exceder

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 13.01 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE I.

5.4.3.3. Manutenibilidade

O indicador Manutenibilidade é calculado como na seção 2.15 considerando que nos instantes de mudança de fase o sistema encontra-se indisponível e assumindo que os estados 1, 2, 4, 5, 7, 8 e 9 (sistema disponível) são estados absorventes. A partir desta última suposição, o PSMNH dado na Figura 5-6 também não é mais um processo irreduzível.

A Figura 5-11 apresenta os percentis de 5% e 95% calculados através do modelo híbrido proposto para o indicador Manutenibilidade.

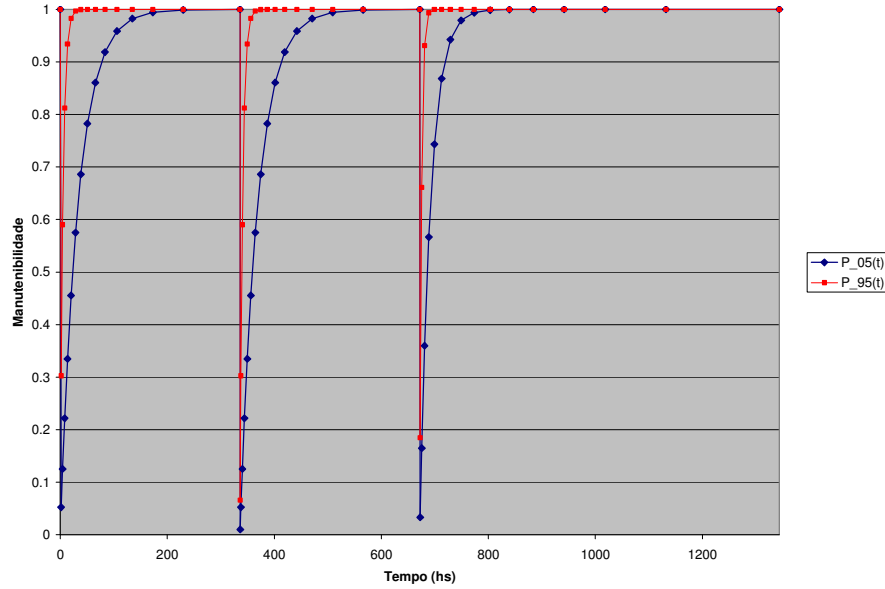


Figura 5-11 – Manutibilidade para o sistema de aquecimento

O tempo médio de simulação de cada iteração foi de aproximadamente 0.13 seg. Os valores calculados estão no APÊNDICE I.

5.4.4. Atualização de crenças probabilísticas

Suponha que no início de cada fase, os equipamentos 1 e 2 sejam substituídos por equipamentos novos. Esta nova informação (evidência) não modifica a estrutura dos estados do PSMNH nem a topologia da RB dinâmica. Entretanto, as RBs que possuem o parâmetro λ como nó de saída terão suas TPCs atualizadas, já que agora tem-se que $P(X = Novo) = 1$, $P(X = SemiNovo) = 0$ e $P(X = Desgastado) = 0$.

Esta evidência influenciará o comportamento futuro do sistema e consequentemente seus indicadores de desempenho de Confiabilidade. O comportamento do sistema dado esta nova evidência será denominado a posteriori. Os indicadores apresentados na subseção anterior de análise de resultados antes da nova informação ser evidenciada são denominados a priori.

5.4.4.1. Distribuições marginais

Utilizando os resultados descritos na subseção 3.5.4, as distribuições marginais de probabilidade f_{λ}^{Priori} e f_{λ}^{Post} do parâmetro λ a priori e a posteriori, respectivamente são dadas na Tabela 5-11 para as fases 1 e 2 e na Tabela 5-12 para a fase 3.

Tabela 5-11 – Distribuição marginal de probabilidade a priori e a posteriori do parâmetro λ_i , com $i = 1, 2$

$\lambda_i (h^{-1})$	$f_{\lambda_i}^{Priori}$	$f_{\lambda_i}^{Post}$
1.00E-04	0.180	0.300

1.00E-03	0.316	0.480
5.00E-03	0.350	0.130
1.00E-02	0.154	0.090
Valor esperado de $\lambda_i(h^{-1})$	3.62E-03	2.06E-03

Tabela 5-12 – Distribuição marginal de probabilidade a priori e a posteriori do parâmetro λ_3

$\lambda_3(h^{-1})$	$f_{\lambda_3}^{Priori}$	$f_{\lambda_3}^{Post}$
1.00E-03	0.296	0.470
1.00E-02	0.244	0.250
2.00E-02	0.308	0.140
5.00E-02	0.152	0.140
Valor esperado de $\lambda_3(h^{-1})$	1.65E-02	1.28E-02

Os gráficos correspondentes às distribuições marginais de probabilidade f_{λ}^{Priori} e f_{λ}^{Post} do parâmetro λ a priori e a posteriori, respectivamente são dados na Figura 5-12 para as fases 1 e 2 e na Figura 5-13 para a fase 3.

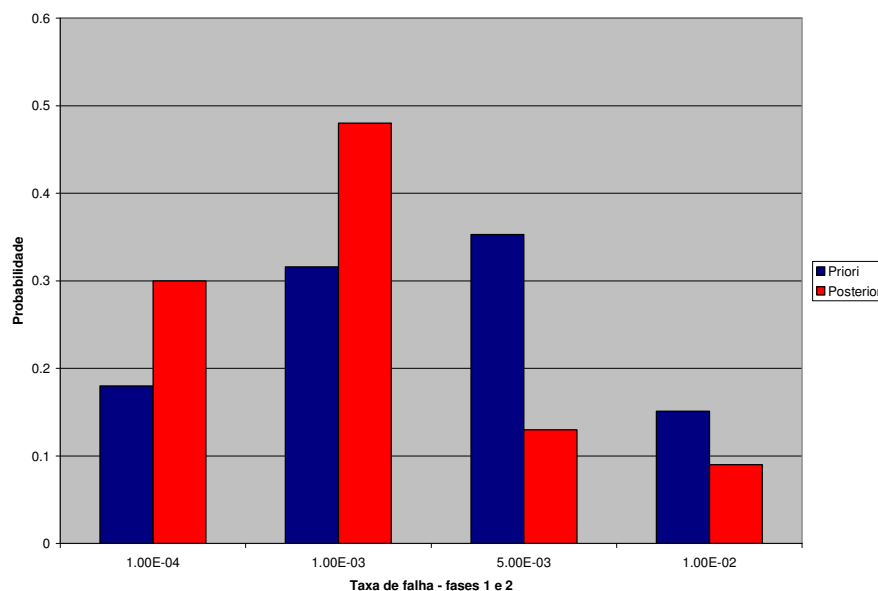


Figura 5-12 - Distribuição marginal de probabilidade a priori e a posteriori do parâmetro λ_i , com $i = 1, 2$

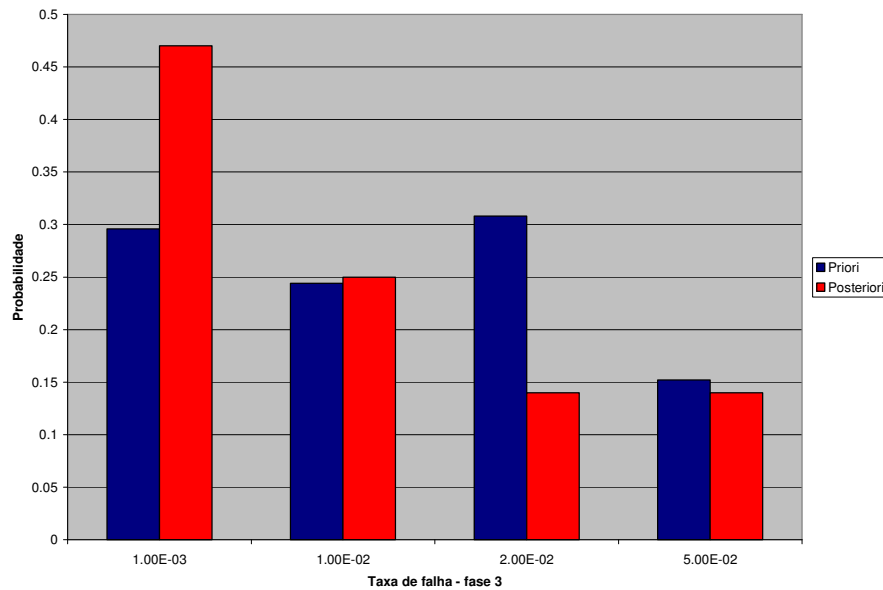


Figura 5-13 - Distribuição marginal de probabilidade a priori e a posteriori do parâmetro λ_3

Nota-se a partir da análise dos gráficos da Figura 5-12 e Figura 5-13 que houve um deslocamento de massa probabilística na direção da redução do valor do parâmetro λ .

Dado que a evidência apenas atualiza o conhecimento sobre o parâmetro λ e não sobre μ , o objetivo agora é analisar como a nova informação influencia os indicadores de desempenho de Confiabilidade do sistema.

5.4.4.2. Indisponibilidade a posteriori

Utilizando os valores esperados dos parâmetros λ e μ os quais constam na Tabela 5-11, Tabela 5-12 e nos APÊNDICES G e H, a comparação entre a indisponibilidade a priori e a posteriori pode ser analisada através da Figura 5-14.

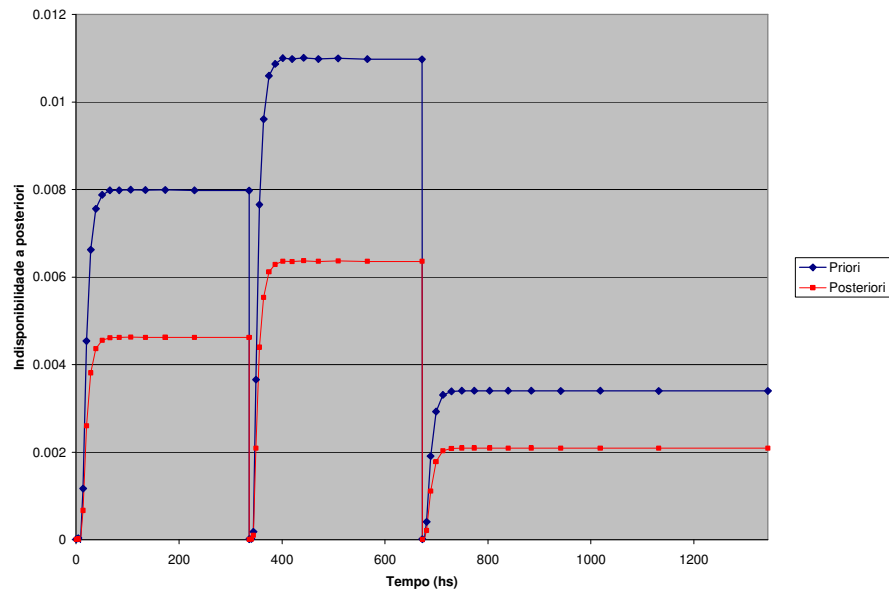


Figura 5-14 – Indisponibilidade a priori e a posteriori

Os valores calculados estão no APÊNDICE J.

5.4.4.3. Confiabilidade a posteriori

Utilizando os valores esperados dos parâmetros λ e μ os quais constam na Tabela 5-11, Tabela 5-12 e nos APÊNDICES G e H, a comparação entre o indicador Confiabilidade a priori e a posteriori pode ser analisada através da Figura 5-15.

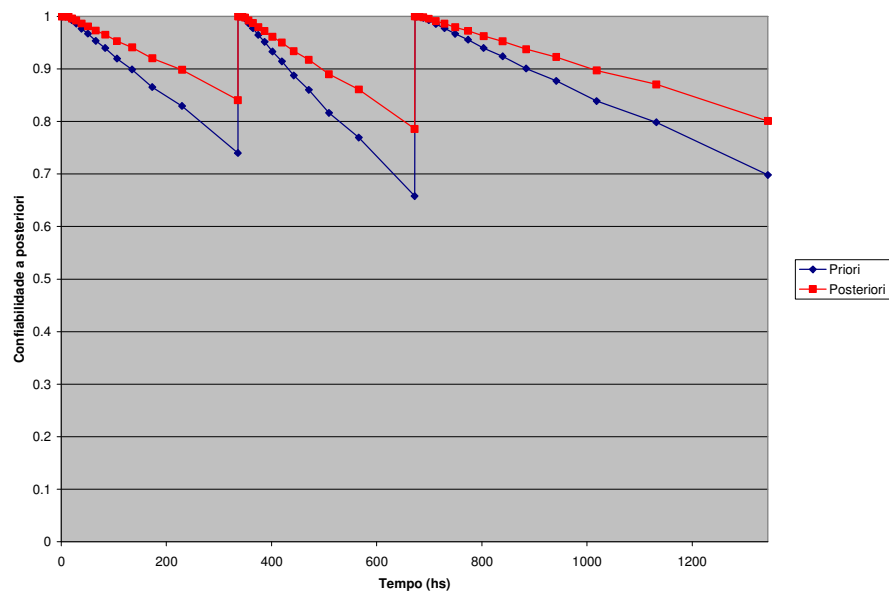


Figura 5-15 – Confiabilidade a priori e a posteriori

Os valores calculados estão no APÊNDICE J.

5.4.4.4. Manutenibilidade a posteriori

Utilizando os valores esperados dos parâmetros λ e μ os quais constam na Tabela 5-11, Tabela 5-12 e nos APÊNDICES G e H, a comparação entre o indicador Manutenibilidade a priori e a posteriori pode ser analisada através da Figura 5-16.

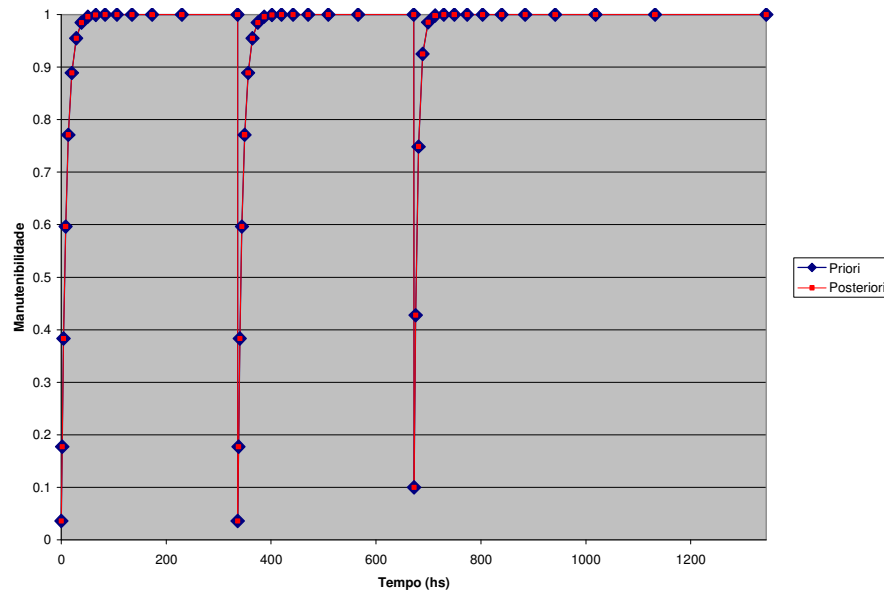


Figura 5-16 – Manutenibilidade a priori e a posteriori

Nota-se a partir da análise dos gráficos da Figura 5-14 e Figura 5-15 que houve uma redução da indisponibilidade do sistema e aumento da Confiabilidade como era de se esperar. Os resultados calculados podem ser utilizados em algum processo de tomada de decisão sobre a política de custos e de manutenção a ser adotada.

Já em relação à Manutenibilidade, nota-se que os dados a priori e a posteriori coincidem já que a nova informação não atualiza o conhecimento sobre tal indicador. Uma informação sobre o aumento ou a redução do número de equipes de manutenção, por exemplo, poderia atualizar o conhecimento sobre a Manutenibilidade.

A mesma análise de incerteza que fora realizada na subseção de análise de resultados também pode ser feita para os indicadores a posteriori, bastando para isto executar o procedimento referente ao modelo híbrido proposto o qual foi descrito na seção 5.1.

Os modelos híbridos dos exemplos de aplicação 1 e 2 foram executados em ambiente *Microsoft Windows Professional XP* versão 2002 em um computador AMD Athlon (TM) XP 2200+ 1.36GHz, 256MB de memória RAM.

6. CONCLUSÕES

6.1. Considerações Finais

O desenvolvimento de uma metodologia de modelagem e estimação de indicadores de desempenho de Confiabilidade de sistemas complexos foi a principal motivação do presente trabalho. A metodologia foi fundamentada na integração entre os processos semi Markovianos e as Redes Bayesianas.

Os processos semi Markovianos possuem uma flexibilidade superior na modelagem de sistemas dinâmicos do que os processos Markovianos já que aqueles são uma generalização destes e de outros processos estocásticos. Já as Redes Bayesianas são estruturas que representam causalidades entre variáveis de interesse de um dado sistema. A integração entre tais modelos probabilísticos originou um processo estocástico híbrido o qual é capaz de representar a dinamicidade de um sistema ao mesmo tempo que trata como as relações de causa e efeito influenciam tal evolução. Além disso, através da utilização do modelo híbrido proposto é possível realizar atualizações sobre o comportamento do sistema à medida que novas informações tornam-se disponíveis.

O modelo híbrido proposto é destinado a sistemas para os quais o comportamento futuro é influenciado (condicionado) por variáveis temporais, ora o tempo de permanência ora o tempo de processo ou ambos, e não temporais como por exemplo as condições ambientais (temperatura, umidade, pressão, etc.), operacionais, fisiológicas, etc. A dependência do tempo foi então modelada por PSMs e das variáveis não temporais por RBs.

Para a consecução do presente trabalho, foi necessário o desenvolvimento dos métodos numéricos dos PSMs definidos a partir de taxas de transição assim como a sua implementação em linguagem computacional. A resolução das equações das probabilidades de transição baseou-se no aproveitamento numérico da convolução existente, na aplicação das transformadas de Laplace e posterior inversão. Os exemplos mostraram que o método numérico apresentou-se bastante veloz em relação à solução Monte Carlo e preciso quando comparado com a solução analítica.

A partir daí, a integração entre PSMs e RBs foi realizada. A incerteza dada pelas RBs, as quais neste trabalho possuem como nós de saída parâmetros de funções das taxas de transição, determina a incerteza sobre os valores das probabilidades de transição a qual é representada por percentis de probabilidade. Possíveis exemplos de aplicação foram realizados a sistemas

tolerantes à falha com o objetivo de avaliar a incerteza sobre alguns indicadores de Confiabilidade ((In)Disponibilidade, Confiabilidade e Manutenibilidade).

Como em todo trabalho científico, limitações existem e merecem ser citadas. Os desafios e sugestões de trabalhos futuros que terão o objetivo de superar tais limitações também serão apresentados e comentados na próxima seção.

6.2. Limitações e Desafios Futuros

6.2.1. Processos semi Markovianos

A primeira limitação que merece ser considerada diz respeito ao método utilizado de inversão de transformadas de Laplace para resolução das probabilidades de transição intervalares dos PSMs. Segundo Csenki (1994), não existe nenhum método de inversão de TLs que seja capaz de inverter com uma dada precisão todo e qualquer tipo de função.

Geralmente, um problema inverso é mal condicionado (instável). Isto em grande parte se deve à perda de informação (provocada pela máquina) que ocorre no processo de inversão. Pesquisas recentes na área merecem ser citadas: Press *et al.* (2002), por exemplo, sugerem a utilização de opiniões de especialistas na resolução de problemas inversos.

Abate e Valkó (2004) argumentam que nos desenvolvimentos tradicionais em métodos de inversão, cada vez mais esforços estão direcionados em controlar erros de ponto flutuante da máquina. Isto se deve porque o processo é numericamente instável na precisão fixa do ambiente computacional. Em tal trabalho, é sugerido combater tal problema através da aplicação de computação multi precisão. O que acontece é que algoritmos de inversão não têm meios de controlar a exatidão da saída do programa. O problema é que o usuário tenta incrementar a exatidão do método, mas há um ponto limitante no qual a propagação de erros de ponto flutuante causa erro nos resultados de saída. Isto é, o procedimento é numericamente instável quando se usa a precisão fixa da máquina. Para superar este problema, deve-se ter a capacidade de variar a precisão da máquina em tempo de simulação o que muitas vezes não é possível.

Segundo Press *et al.* (2002), uma desvantagem de um método baseado em quadraturas Gaussianas é que não há um simples caminho para obter uma estimativa do erro absoluto cometido em se aproximar os valores reais das probabilidades pelo método fornecido. Como sugestão de trabalhos futuros, tem-se adequar e incluir no algoritmo o trabalho desenvolvido por Cuomo *et al.* (2007) o qual fornece estimativas dos erros cometidos em inverter TLs a partir de um método baseado na expansão da série polinomial de *Laguerre*.

Outra sugestão de trabalho futuro é específica aos PSMs Não Homogêneos. Basicamente, os PSMNHs são modelos destinados à modelagem de sistemas complexos que possuem probabilidades de transição dependentes do instante desde a última transição e que sofrem envelhecimento, i.e., que estão sujeitos a algum processo dinâmico de deterioração seja este físico, químico ou biológico. Esta capacidade dos PSMNHs é possível devido ao fato que neste caso as taxas de transição entre estados dependem do tempo de calendário do sistema.

Entretanto, esta característica é apenas verdadeira quando a hipótese de que os tempos de reparo são desprezíveis é cabível o que justificaria a obtenção de uma taxa de transição, em particular taxa de falha, em função do tempo de calendário. Em sistemas complexos formados por vários componentes que estão sujeitos a processos de deterioração, a hipótese de tempos de reparo instantâneos não é real. Na verdade, para estes sistemas a taxa de falha somente evolui quando o mesmo está funcionando, i.e., a taxa de falha depende do tempo x de operação acumulada do sistema e não do tempo t total de processo. Kalashnikov (1994) e Singh e Billington (1977) argumentam que esta é uma das motivações para o emprego de variáveis suplementares. De certa forma, se a evolução da taxa de falha de um sistema puder ser obtida ou projetada como função do seu tempo de operação x , e não do seu tempo de calendário t , então x pode ser utilizado como variável suplementar.

Outra justificativa da utilização de variáveis suplementares na modelagem de sistemas complexos é o fato que em $t = 0$ (início da observação do sistema) o tempo de funcionamento efetivo x_0 do sistema é não nulo, i.e., o sistema inicia seu período de operação em um estado de desempenho pior do que era quando novo. Esta é uma característica verdadeira em sistemas que possuem uma política de manutenção segundo a qual quando um equipamento falha o mesmo não é renovado ou substituído por outro completamente novo.

Portanto, a sugestão é desenvolver um modelo probabilístico para avaliação de indicadores de desempenho operacionais o qual será destinado a sistemas que possuem taxas de transição dependentes do tempo de permanência em determinado estado e que possuem vários componentes sofrendo envelhecimento para os quais as taxas de falha evoluem de acordo com o tempo real de funcionamento x , o qual representa a variável suplementar.

6.2.2. Redes Bayesianas

Uma das limitações que podem ser citadas em relação às RBs é a necessidade de discretização de variáveis aleatórias contínuas, como os parâmetros λ e μ dos exemplos de aplicação. Uma das alternativas para superar esta restrição é trabalhar com Redes Bayesianas Contínuas, como em Castillo *et al.* (1997) por exemplo. Isto exigiria que ao invés de

distribuições de probabilidades, a incerteza sobre as variáveis aleatórias de interesse fosse dada através de funções densidade.

6.2.3. Modelo Híbrido: PSMs e RBs

Em relação ao modelo híbrido propriamente dito, uma limitação merece ser citada. O modelo proposto exige que os nós de saída das RBs sejam sempre parâmetros de funções densidade de probabilidade. Geralmente, tais parâmetros possuem um sentido físico. Entretanto, parece ser difícil extrair conhecimento, seja de especialistas seja de base de dados, e se montar uma RB que possua necessariamente como nó de saída um parâmetro de uma função densidade de probabilidade.

A alternativa que se tem aqui é que se forneça ao analista de Confiabilidade a flexibilidade de utilizar RBs com outros nós de saída, como por exemplo realizações de tempo de falha ou reparo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABATE, J. e P. P. VALKÓ. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.60, p.979-993. 2004.
- ABATE, J. e W. WHITT. The Fourier-Series Methods for Inverting Transforms of Probability Distributions. *Queueing systems*, v.10, nº1-2, p.5-87. 1992.
- AFCHAIN, A. L. Non-parametric estimation of lifetime and repair time criteria for a semi-Markov process. *Comptes Rendus Mathematic*, v.339, p.137-140. 2004.
- BARROS JR., P. F. D. R. *Uma metodologia para análise de Disponibilidade de sistemas complexos via hibridismo de redes Bayesianas e Processos Markovianos*. Engenharia de Produção, Centro de Tecnologia e Geociências, UFPE, Recife, PE-Brasil, 2006.
- BECKER, G., L. CAMARINOPOULOS e G. ZIOUTAS. A semi-Markovian model allowing for inhomogenities with respect to process time. *Reliability Engineering & System Safety*, v.70, p.41-48. 2000.
- BOYCE, W. E. e R. C. DIPRIMA. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC. 2002.
- CASTILLO, E., J. M. GUTIÉRREZ, A. S. HADI e C. SOLARES. Symbolic Propagation and sensitivity analysis in Gaussian Bayesian Networks with application to damage assessment. *Artificial Intelligence in Engineering*, v.11, p.173-181. 1997.
- CHEN, D. e K. S. TRIVEDI. Optimization for condition-based maintenance with semi-Markov decision process. *Reliability Engineering & System Safety*, v.90, p.25-29. 2005.
- CHUKOVA, S., R. ARNOLD e D. Q. WANG. Warranty analysis: An approach to modeling imperfect repairs. *International Journal of Production Economics*, v.89, p.57-68. 2004.
- ÇINLAR, E. *Introduction to Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. 1975.
- CORRADI, G., J. JANSSEN e R. MANCA. Numerical Treatment of Homogeneous semi Markov Processes in Transient Case - a Straightfoward Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, v.6, p.233-246. 2004.
- CSENKI, A. On the interval reliability of systems modelled by finite semi-Markov processes. *Microelec. Reliability*, v.34, p.1319-35. 1994.
- CSENKI, A. An integral equation approach to the interval reliability of systems modelled by finite semi-Markov processes. *Reliability Engineering and System Safety*, v.47, p.37-45. 1995.
- CUOMO, S., L. D'AMORE, A. MURLI e M. RIZZARDI. Computation of the inverse Laplace transform based on a collocation method which uses only real values. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.198, p.98 – 115. 2007.

- D'AMICO, G., J. JANSSEN e R. MANCA. Homogeneous Semi-Markov reliability models for credit risk management. *Decisions in Economics and Finance*, v.28, p.79-93. 2005.
- DAWID, A. P., J. MORTERA e P. VICARD. Representing and solving complex DNA identification cases using Bayesian networks. *International Congress Series*, v.1288, p.484-491. 2006.
- DEGROOT, M. H. e M. J. SCHERVISH. *Probability and Statistics*. Boston: Addison Wesley. 2002.
- DOYEN, L. e O. GAUDOIN. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering and System Safety*, v.84, p.45-56. 2004.
- DROGUETT, E. L. e A. MOSLEH. Análise Bayesiana da Confiabilidade de produtos em desenvolvimento. *Revista Gestão & Produção*, v.13. 2006.
- EL-GOHARY, A. Bayesian estimations of parameters in a three state reliability semi-Markov models. *Applied Mathematics and Computation*, v.154, p.53-67. 2004.
- FELLI, J. C., W. H. ANDERSON, J. P. KREMIDAS e S. J. RUBERG. A semi-Markov model for patient progression through clinical trials. *European Journal of Operational Research*, v.176, p.542-549. 2007.
- FIRMINO, P. R. A. *Redes Bayesianas para parametrização da confiabilidade em sistemas complexos*. Engenharia de Produção, Centro de Tecnologia e Geociências, UFPE, Recife, PE-Brasil, 2004.
- FIRMINO, P. R. A., R. D. C. S. MENEZES e E. L. DROGUETT. Eliciting Engineering Judgments in Human Reliability Assessment. *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. 2006.
- GALVANI, L. V. *Metodologia para minimizar o impacto da indisponibilidade não programada sobre a receita do serviço de transmissão de energia elétrica*. Programa de pós graduação em energia elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2003.
- GARCÍA, P., A. AMANDI, S. SCHIAFFINO e M. CAMPO. Evaluating Bayesian networks' precision for detecting students' learning styles. *Computers & Education*. 2005.
- GE, X. *Segmental Semi-Markov Models and Applications to Sequence Analysis*. Department of Information and Computer Science, University of California, Irvine, 2002.
- GRABSKI, F. The reliability of an object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, v.135, p.1-16. 2003.
- HOWARD, R. A. *Dynamic Probabilistic Systems*. California: John Wiley & Sons, v.2, SemiMarkov and Decision Processes. 1971a.
- HOWARD, R. A. *Dynamic Probabilistic Systems*. California: John Wiley & Sons, v.1, Markov Models. 1971b.

IEZZI, G. e S. HAZZAN. *Fundamentos da Matemática Elementar - Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas*, v.4. 1983.

IOSIFESCU, M. Non homogeneous semi-Markov processes. *Stud. Lere. Mat.*, v.24, p.529-533. 1972.

JANSSEN, J. e R. MANCA. *Non-Homogeneous semi - Markov Reward Process for the Management of Health insurance models*. The ASTIN Colloquium Washington. DC, United States of America. July 8-11, 2001a.

JANSSEN, J. e R. MANCA. Numerical solution of Non Homogeneous semi Markov processes in Transient Case. *Methodology and Computing in Applied Probability*, v.3, p.271-293. 2001b.

JENAB, K. e B. S. DHILLON. Assessment of reversible multi-state k-out-of-n:G/F/Load-Sharing systems with flow-graph models. *Reliability Engineering and System Safety*, v.91, p.765-771. 2006.

KALASHNIKOV, V. V. *Mathematical Methods in Queuing Theory*. Dordrecht: Kluwer. 1994.

KAO, H.-Y., C.-H. HUANG e H.-L. LI. Supply chain diagnostics with dynamic Bayesian networks. *Computers & Industrial Engineering*, v.49, p.339-347. 2005.

KORB, K. B. e A. E. NICHOLSON. *Bayesian artificial intelligence*. Florida: Chapman & Hall/CRC. 2003.

LANGSETH, H. e L. PORTINALE. Bayesian networks in reliability. *Reliability Engineering and System Safety*, v.92, p.92-108. 2007.

LAURÍA, E. J. M. e P. J. DUCHESSI. A Bayesian Belief Network for IT implementation decision support. *Decision Support Systems*. 2006.

LIMNIOS, N. Dependability analysis of semi-Markov systems. *Reliability Engineering and System Safety*, v.55, p.203-207. 1997.

LIMNIOS, N. e G. OPRISAN. *Semi-Markov processes and reliability*. Boston: Birkhauser. 2001.

LIMNIOS, N. e G. OPRISAN. Semi-Markov processes and reliability - Book Review. *Reliability Engineering and System Safety*, v.79, p.117. 2003.

LIMNIOS, N. e B. OUHBI. Nonparametric estimation of some important indicators in reliability for semi-Markov processes. *Statistical Methodology*, v.In Press. 2005.

MARTZ, H. F. e R. A. WALLER. *Bayesian Reliability Analysis*. Florida: Krieger Publishing Company. 1982.

- MATHIEU, E., Y. FOUCHER, P. DELLAMONICA e J.-P. DAURES. *Parametric and Non Homogeneous semi-Markov Process for HIV Control*. XIth International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2005). Brest, France. May, 17-20, 2005.
- MENÊZES, R. C. *Uma metodologia para a Avaliação da Confiabilidade Humana em atividades de substituição de cadeias de isoladores em linhas de transmissão*. Engenharia de Produção, Centro de Tecnologia e Geociências, UFPE, Recife, PE-Brasil, 2005.
- MENÊZES, R. D. C. E. S. e E. L. DROGUETT. Análise da Confiabilidade Humana via Redes Bayesianas: uma aplicação à manutenção de linhas de transmissão. *Aceito para publicação na Revista Produção*, v.17, nº 01. 2007.
- MENÊZES, R. D. C. S. e E. L. DROGUETT. *Uma metodologia para análise de confiabilidade de sistemas complexos*. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Goiânia, GO, 2006.
- MILOVANOVIC, G. V. e A. S. CVETKOVIC. Numerical Inversion of the Laplace Transform. *ELEC. ENERG.*, v.18, nº 3, p.515-530. 2005.
- MOURA, M. C., H. H. L. DINIZ, E. L. DROGUETT e C. M. C. JACINTO. *Análise comparativa da disponibilidade de duas malhas de completação inteligente em poços de petróleo*. Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Porto Alegre, RS, 2005.
- MOURA, M. C. e E. L. DROGUETT. *Determinação do nível de eficácia de equipes de manutenção via Processo de Renovação Generalizado*. XXVI ENEGEP. Fortaleza, CE, Brasil. 9 a 11 de Outubro, 2006a.
- MOURA, M. C. e E. L. DROGUETT. *Modelagem da Confiabilidade de sistemas sujeitos a envelhecimento via Processos Markovianos Não-Homogêneos e Redes Bayesianas*. XIII CLAIO - Latin IberoAmerican Operations Research Conference. Montevideo, Uruguay. November 27 – 30, 2006b.
- OLIVEIRA, E. A. *Uso de variáveis suplementares e inversão de transformadas de Laplace no cálculo de Confiabilidade de sistemas sujeitos a envelhecimento e sob reparo mínimo*. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.
- OLIVEIRA, E. A., A. C. M. ALVIM e P. F. FRUTUOSO E MELO. *A Queueing Model for the Reliability Analysis of a System Considering its Age as a Supplementary Variable*. Anais do XI Encontro de Física de Reatores e Termohidráulica. Poços de Caldas. Agosto, 1997.
- OLIVEIRA, E. A., A. C. M. ALVIM e P. F. FRUTUOSO E MELO. Unavailability analysis of safety systems under aging by supplementary variables with imperfect repair. *Annals Nuclear Energy*, v.32, p.241-252. 2005.
- OLIVEIRA, F. A. G. D. *Avaliação Probabilística de Risco via Modelo Causal Híbrido em Cirurgia: o caso da Histerectomia Vaginal*. Engenharia de Produção, Centro de Tecnologia e Geociências, UFPE, Recife, PE, Brasil, 2006.

- OUHBI, B. e N. LIMNIOS. Reliability estimation of semi-Markov systems: a case study. *Reliability Engineering & System Safety*, v.58, p.201-204. 1997.
- OUHBI, B. e N. LIMNIOS. The rate of occurrence of failures for semi-Markov processes and estimation. *Statistics & Probability Letters*, v.59, p.245-255. 2002.
- OUHBI, B. e N. LIMNIOS. Nonparametric reliability estimation of semi-Markov processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v.109, p.155-165. 2003.
- PEARL, J. *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers. 1988.
- PEARL, J. *Causality, Reasoning, and Inference*. New York: Cambridge University Press. 2000.
- PERMAN, M., A. SENEKAENIK e M. TUMA. Semi-Markov Models with an Application to Power-Plant Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, v.46, No.4. 1997.
- PHAM, H. e H. WANG. Imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, v.94, p.425-438. 1996.
- PIEVATOLO, A. e I. VALADÈ. UPS reliability analysis with non-exponential duration distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, v.81, p.183-189. 2003.
- PLATIS, A., N. LIMNIOS e M. L. DU. Dependability analysis of systems modeled by Non-Homogeneous Markov Chains. *Reliability Engineering & System Safety*, v.61, p.235-249. 1998.
- PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING e B. P. FLANNERY. *Numerical Recipes in C++*. Cambridge: Cambridge University Press. 2002.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. Berkeley, California: Academic Press. 1997.
- ROSS, S. M. *Simulation*. Berkeley, California: Academic Press. 2002.
- SANTOS, W. *Análise probabilística de riscos via redes Bayesianas: Uma aplicação na construção de poços multilaterais*. Engenharia de Produção, Centro de Tecnologia e Geociências, UFPE, Recife, PE-Brasil, 2005.
- SINGH, C. e R. BILLINGTON. *System Reliability Modelling and Evaluation*. London: Hutchinson. 1977.
- SINGPURWALLA, N. D. *Reliability and Risk: a Bayesian perspective*: Wiley series in Probability and Statistic. 2006.
- SMOTHERMAN, M. e K. ZEMOUDEH. A Non Homogeneous Markov Model for Phased-Mission Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, v.38, nº 5, December. 1989.

SOSZYNSKA, J. Reliability evaluation of a port oil transportation system in variable operation conditions. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v.83, p.304-311. 2006.

VALKÓ, P. P. e J. ABATE. Comparison of Sequence Accelerators for the Gaver Method of Numerical Laplace Transform Inversion. *An International Journal Computers & Mathematic with applications*, v.48, p.629-636. 2004.

VAURIO, J. K. Reliability characteristics of components and systems with tolerable repair times. *Reliability Engineering and System Safety*, v.56, p.43-52. 1997.

XIE, W., Y. HONG e K. TRIVEDI. Analysis of a two-level software rejuvenation policy. *Reliability Engineering & System Safety*, v.87, p.13-22. 2005.

YAÑEZ, M., F. JOGLAR e M. MODARRES. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. *Reliability Engineering & System Safety*, v.77, p.167-180. 2002.

ANEXOS

ANEXO A – Equações Diferenciais de *Chapman-Kolmogorov*

De fato, pode-se mostrar que para cada $\forall i$ e $\forall j$, com $i \neq j$, existe uma função contínua e não negativa $\lambda_{ij}(t)$, conhecida como taxa de transição do estado i para o estado j , definida como:

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{\partial p_{ij}(v, t)}{\partial t} \Big|_{v=t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t) - p_{ij}(t, t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Então, as probabilidades de transição e as taxas de transição são relacionadas como mostrado na equação (2):

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (2)$$

para $i \neq j$ e $o(\Delta t)$ é o *little oh* definido como uma função de Δt que tende a zero mais rapidamente do que Δt , veja Ross (1997):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (3)$$

Substituindo t por $t + \Delta t$ na Equação 3-3 de *Chapman-Kolmogorov*, tem-se que:

$$p_{ij}(v, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^N p_{ik}(v, u) \cdot p_{kj}(u, t + \Delta t). \quad (4)$$

Logo,

$$p_{ij}(v, t + \Delta t) - p_{ij}(v, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N p_{ik}(v, u) \cdot p_{kj}(u, t + \Delta t) - [1 - p_{jj}(u, t + \Delta t)] p_{ij}(v, u). \quad (5)$$

Dividindo ambos os lados da equação (5) por Δt e fazendo o limite para $\Delta t \rightarrow 0$ e $u \rightarrow t$, obtém-se as Equações Diferenciais de *Kolmogorov*. Para $0 \leq v < t$ e $i, j \in X$:

$$\frac{\partial p_{ij}(v, t)}{\partial t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N p_{ik}(v, t) \cdot \lambda_{kj}(t) - p_{ij}(v, t) \cdot \lambda_{jj}(t). \quad (6)$$

Então, a equação diferencial para a probabilidade de estado incondicional $P_j(t)$ é dada por:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N P_i(t) \cdot \lambda_{ij}(t) + P_j(t) \cdot \lambda_{jj}(t). \quad (7)$$

ANEXO B – Cálculo da matriz inversa através de determinantes

Tal demonstração é dada em Iezzi e Hazzan (1983).

– Matriz dos cofatores

Seja M uma matriz quadrada de ordem n . Denomina-se matriz dos cofatores de M , indicada por M' , a matriz que se obtém de M substituindo cada um de seus elementos por seu cofator.

Assim, se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$M' = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ já que

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |4| = 4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |3| = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |2| = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |1| = 1.$$

– Matriz adjunta

Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M . Denomina-se matriz adjunta de M , indicada por $\overline{M}$, à transposta da matriz M' , i.e., $\overline{M} = (M')^T$.

– Teorema 1

“Seja M uma matriz quadrada de ordem n e I_n a matriz Identidade de ordem n , então $M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n$ ”.

Demonstração:

Seja $M \cdot \overline{M} = (b_{ik})$. Por definição de produto de matrizes,

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot B_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj}.$$

Logo, se $i = k \Rightarrow b_{ik} = \det(M)$ (teorema de Laplace) e $i \neq k \Rightarrow b_{ik} = 0$ (teorema de Cauchy).

Portanto,

$$M \cdot \overline{M} = \det(M) \cdot I_n \tag{8}$$

Analogamente, seja $\overline{M} \cdot M = (c_{ik})$. Por definição de produto de matrizes,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n B_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \cdot A_{ji}.$$

Logo, se $i = k \Rightarrow c_{ik} = \det(M)$ (teorema de Laplace) e $i \neq k \Rightarrow c_{ik} = 0$ (teorema de Cauchy).

Portanto,

$$\overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n \quad (9)$$

De (8) e (9), conclui-se que:

$$M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n.$$

– Teorema 2

“Seja M uma matriz quadrada de ordem n e $\det(M) \neq 0$, então a inversa de M é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \overline{M}.”$$

Demonstração:

Usando o teorema 1, tem-se:

$$M \cdot \left(\frac{1}{\det(M)} \overline{M} \right) = \frac{1}{\det(M)} \cdot (M \cdot \overline{M}) = \frac{\det(M)}{\det(M)} \cdot I_n \quad (10)$$

$$\left(\frac{1}{\det(M)} \overline{M} \right) \cdot M = \frac{1}{\det(M)} \cdot (\overline{M} \cdot M) = \frac{\det(M)}{\det(M)} \cdot I_n \quad (11)$$

De (10) e (11), segue por definição de matriz inversa que $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \overline{M}$.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Transformadas de Laplace

Tabela A. 1 – Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	Equação A. 1
$\delta(t)$	1	Equação A. 2
$u(t)=1$	$1/s$	Equação A. 3
$af(t)$	$a \tilde{f}(s)$	Equação A. 4
$f_1(t) + f_2(t)$	$\tilde{f}_1(s) + \tilde{f}_2(s)$	Equação A. 5
$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$	$\tilde{f}_1(s) * \tilde{f}_2(s)$	Equação A. 6
$e^{-at} f(t)$	$\tilde{f}(s+a)$	Equação A. 7
e^{-at}	$1/(s+a)$	Equação A. 8
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	Equação A. 9
$f(K+at), K > 0, a > 0$	$\frac{\exp(sK/a)}{a} \left[\tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^K e^{-\frac{s}{a}t} f(t) dt \right]$	Equação A. 10
$\frac{d}{dt} f(t), t \geq 0$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$	Equação A. 11
$F_x(x_c) = \int_0^{x_c} f_x(x_0) dx_0$	$\frac{\tilde{f}_x(s)}{s}$	Equação A. 12
$1 - F_x(x_c) = \int_{x_c}^{\infty} f_x(x_0) dx_0$	$\frac{1}{s} - \frac{\tilde{f}_x(s)}{s}$	Equação A. 13

A Equação A. 1 é a definição de transformada de Laplace. A Equação A. 2 segue da própria definição e significa que a transformada de Laplace da função impulso $\delta(t)$ é igual a um.

A Equação A. 3 apresenta a transformada de Laplace da função de passo unitário a qual é igual a um para argumentos reais positivos e zero para argumentos negativos. A Equação A. 3 segue de:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{Equação A. 14}$$

A Equação A. 4 declara que o resultado de multiplicar uma função por um valor constante é equivalente a multiplicar sua transformada pela mesma constante.

A Equação A. 5 expressa que a transformada da soma de duas funções é igual à soma de suas transformadas individuais. Tal relação pode ser estendida para o somatório de n funções e segue da própria definição.

A Equação A. 6 declara o fato que a convolução de duas funções de tempo contínuo tem transformada de Laplace igual ao produto das transformadas individuais de tais funções. Tal relação pode ser demonstrada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau &= \int_0^{\infty} dt \int_0^t f_1(\tau) e^{-s\tau} f_2(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} f_2(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \\
 &= \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} f_2(u) e^{-su} du \quad (u = t - \tau) \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-su} f_2(u) du \\
 &= \tilde{f}_1(s) * \tilde{f}_2(s) \quad \text{Equação A. 15}
 \end{aligned}$$

A Equação A. 7 mostra que multiplicar uma função por uma função exponencial de taxa $-a$ exige que sua variável transformada seja substituída por $(s+a)$. Isto pode ser provado como:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = \tilde{f}(s+a) \quad \text{Equação A. 16}$$

A Equação A. 8 mostra o resultado de aplicar a transformada de Laplace à uma função exponencial. Tal relação segue diretamente da Equação A. 3 e da Equação A. 7 como:

$$e^{-at} = e^{-at} u(t) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Equação A. 17}$$

A Equação A. 9 mostra que a transformada de uma função que tem seu argumento multiplicado por uma constante real positiva é igual a dividir tanto a variável transformada quanto a própria transformada por tal constante e pode ser provada como:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt &= \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)t} f(u) \frac{du}{a} \quad \left(u = at \Rightarrow du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a} \right) \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)t} f(u) du \\
 &= \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{Equação A. 18}
 \end{aligned}$$

A Equação A. 10 apresenta a transformada de Laplace de uma função $f(K + at)$, onde $K > 0$ e $a > 0$. A Equação A. 10 pode ser demonstrada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} f(K + at) dt &= \int_K^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)(u-K)} f(u) \frac{du}{a} & \left(u = K + at \Rightarrow t = \frac{u-K}{a} \Rightarrow du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a} \right) \\ &= \frac{\exp\left(\frac{sK}{a}\right)}{a} \left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du - \int_0^K e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du \right] \\ &= \frac{\exp\left(\frac{sK}{a}\right)}{a} \left[\tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^K e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du \right] \end{aligned} \quad \text{Equação A. 19}$$

A Equação A. 11 mostra a transformada de Laplace da derivada de uma função: a transformada deve ser multiplicada pela variável transformada e então subtrair o valor da função em $t = 0$. Pode ser provado, utilizando integração por partes, como segue:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} f(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = s \tilde{f}(s) - f(0) \quad \text{Equação A. 20}$$

A Equação A. 12 mostra que a transformada de Laplace de uma função de distribuição acumulada de tempo contínuo é igual à transformada de Laplace da função densidade de probabilidade dividida pela variável transformada. A demonstração de tal relação segue diretamente da Equação A. 20 e que o valor da função de distribuição acumulada em $t = 0$ é nulo.

$$\begin{aligned} f_x(t) = \frac{d}{dx} F(t) &= \tilde{f}_x(s) = s \tilde{F}_x(s) - F(0) \\ &= \tilde{F}_x(s) = \frac{\tilde{f}_x(s)}{s} \end{aligned} \quad \text{Equação A. 21}$$

A Equação A. 13 apresenta a transformada de Laplace do complementar da função de distribuição acumulada. Tal relação segue diretamente da Equação A. 3, Equação A. 5 e Equação A. 12.

APÊNDICE B – Resultados Exemplo 1

Tabela B. 1 - Resultados de $\phi_{11}(t)$

T	Método Proposto	Solução Analítica	Erro
0.008	0.9967510	0.9967512	2.49E-07
0.043	0.9827460	0.9827455	5.24E-07
0.106	0.9571160	0.9571152	8.14E-07
0.199	0.9195660	0.9195649	1.14E-06
0.324	0.8704720	0.8704705	1.48E-06
0.483	0.8113140	0.8113129	1.13E-06
0.679	0.7448090	0.7448074	1.63E-06

0.920	0.6746720	0.6746706	1.41E-06
1.211	0.6051070	0.6051055	1.55E-06
1.563	0.5401880	0.5401864	1.62E-06
1.993	0.4833110	0.4833122	1.18E-06
2.527	0.4368470	0.4368450	1.96E-06
3.208	0.4019520	0.4019556	3.62E-06
4.123	0.3786090	0.3786033	5.69E-06
5.474	0.3655780	0.3655888	1.08E-05
8.000	0.3606110	0.3605911	1.99E-05

Tabela B. 2 – Resultados de $\phi_{22}(t)$

T	Método Proposto	Solução Analítica	Erro
0.008	0.9927790	0.9927783	6.82E-07
0.043	0.9635350	0.9635354	3.92E-07
0.106	0.9168890	0.9168867	2.29E-06
0.199	0.8611870	0.8611868	1.66E-07
0.324	0.8051450	0.8051418	3.23E-06
0.483	0.7556400	0.7556395	5.47E-07
0.679	0.7165100	0.7165065	3.52E-06
0.920	0.6884390	0.6884389	9.69E-08
1.211	0.6698710	0.6698674	3.64E-06
1.563	0.6582150	0.6582155	5.25E-07
1.993	0.6509950	0.6509927	2.32E-06
2.527	0.6463930	0.6463946	1.57E-06
3.208	0.6433920	0.6433899	2.10E-06
4.123	0.6414880	0.6414893	1.34E-06
5.474	0.6404470	0.6404466	3.69E-07
8.000	0.6400480	0.6400472	7.69E-07

APÊNDICE C – Resultados Exemplo 2

Tabela C. 1 – Resultados para $P_1(t)$

T	Método Proposto	Solução Analítica	Erro
1.01402	0.990405	0.990404877	1.23E-07
5.36317	0.959487	0.959486884	1.16E-07
13.2721	0.930205	0.930204755	2.45E-07
24.894	0.91497	0.914970693	6.93E-07
40.4632	0.910152	0.910151587	4.13E-07
60.3171	0.90921	0.90921034	3.40E-07
84.9281	0.9091	0.909098878	1.12E-06
114.955	0.90909	0.909091202	1.20E-06
151.328	0.909092	0.909090914	1.09E-06
195.392	0.90909	0.909090909	9.09E-07
249.167	0.909092	0.909090909	1.09E-06
315.862	0.90909	0.909090909	9.09E-07
401	0.909092	0.909090909	1.09E-06
515.314	0.90909	0.909090909	9.09E-07
684.309	0.909092	0.909090909	1.09E-06

1000	0.90909	0.909090909	9.09E-07
------	---------	-------------	----------

Tabela C. 2 – Resultados para $P_2(t)$

T	Método Proposto	Solução Analítica	Erro
1.01402	0.00959523	0.009595123	1.07E-07
5.36317	0.040513	0.040513116	1.16E-07
13.2721	0.0697954	0.069795245	1.55E-07
24.894	0.0850291	0.085029307	2.07E-07
40.4632	0.0898486	0.089848413	1.87E-07
60.3171	0.0907895	0.09078966	1.60E-07
84.9281	0.0909013	0.090901122	1.78E-07
114.955	0.0909086	0.090908798	1.98E-07
151.328	0.0909094	0.090909086	3.14E-07
195.392	0.0909088	0.090909091	2.91E-07
249.167	0.0909094	0.090909091	3.09E-07
315.862	0.0909088	0.090909091	2.91E-07
401	0.0909094	0.090909091	3.09E-07
515.314	0.0909088	0.090909091	2.91E-07
684.309	0.0909093	0.090909091	2.09E-07
1000	0.0909089	0.090909091	1.91E-07

APÊNDICE D – Resultados Exemplo 3

Tabela D. 1– Resultados para $P_0(t)$

T	Método Proposto	Monte Carlo	Erro
2.02805	0.9998	0.999796	4.00E-06
10.7263	0.998982	0.99898	2.00E-06
26.5442	0.997674	0.997754	8.00E-05
49.788	0.996084	0.995922	1.62E-04
80.9265	0.994474	0.994534	6.00E-05
120.634	0.993023	0.993136	1.13E-04
169.856	0.991884	0.991944	6.00E-05
229.911	0.991066	0.990812	2.54E-04
302.657	0.990569	0.99038	1.89E-04
390.784	0.990286	0.990466	1.80E-04
498.333	0.990168	0.99021	4.20E-05
631.723	0.990111	0.990332	2.21E-04
802.001	0.990107	0.99005	5.70E-05
1030.63	0.990095	0.989878	2.17E-04
1368.62	0.990103	0.989966	1.37E-04
2000	0.990097	0.98997	1.27E-04

Tabela D. 2 - Resultados para $I(t)$

T	Método Proposto	Monte Carlo	Erro
2.02805	-3.07817E-05	0	3.08E-05
10.7263	0.000321864	0.000046	2.76E-04
26.5442	0.00163784	0.00111	5.28E-04
49.788	0.00321249	0.002914	2.98E-04
80.9265	0.00483787	0.004236	6.02E-04

120.634	0.00627711	0.005684	5.93E-04
169.856	0.00742979	0.00695	4.80E-04
229.911	0.00823626	0.008062	1.74E-04
302.657	0.00874518	0.008482	2.63E-04
390.784	0.00901711	0.008414	6.03E-04
498.333	0.00914621	0.00863	5.16E-04
631.723	0.00919204	0.008494	6.98E-04
802.001	0.00920749	0.008708	4.99E-04
1030.63	0.00920881	0.008938	2.71E-04
1368.62	0.00921021	0.008768	4.42E-04
2000	0.00920941	0.00887	3.39E-04

APÊNDICE E – Resultados Exemplo 4

Tabela E. 1 – Resultados para D(t)

T	Método Proposto	Monte Carlo	Erro
0.507012	1.00001	1	1E-05
2.68158	0.999979	1	2.1E-05
6.63606	1.00006	1	6E-05
12.447	0.999127	0.999932	0.000805
20.2316	0.993399	0.998212	0.004813
30.1586	0.985757	0.992338	0.006581
42.4641	0.977514	0.984232	0.006718
57.4776	0.968795	0.974402	0.005607
75.6642	0.960027	0.965986	0.005959
97.696	0.951485	0.956552	0.005067
124.583	0.943527	0.948076	0.004549
157.931	0.936421	0.940658	0.004237
200.5	0.930436	0.933776	0.00334
257.657	0.925773	0.928542	0.002769
342.154	0.922564	0.92389	0.001326
500	0.920936	0.920362	0.000574

Tabela E. 2 – Resultados para I(t)

T	Método Proposto	Monte Carlo	Erro
0.507012	-9.44E-06	0	9.43834E-06
2.68158	2.13E-05	0	2.13234E-05
6.63606	-5.98E-05	0	5.98349E-05
12.447	0.000873	0.000068	0.000805374
20.2316	0.006601	0.001788	0.00481327
30.1586	0.014243	0.007662	0.0065807
42.4641	0.022486	0.015768	0.0067175
57.4776	0.031205	0.025598	0.005607
75.6642	0.039973	0.034014	0.0059593
97.696	0.048515	0.043448	0.005067
124.583	0.056474	0.051924	0.0045495
157.931	0.063579	0.059342	0.0042369
200.5	0.069564	0.066224	0.0033402

257.657	0.074227	0.071458	0.002769
342.154	0.077436	0.07611	0.0013263
500	0.079064	0.079638	0.000574

APÊNDICE F – Indicadores de Confiabilidade para o Exemplo de Aplicação 1

Tabela F. 1 – Disponibilidade Operacional para o exemplo de aplicação 1

T	P_05(t)	P_50(t)	P_95(t)
0.507012	1	1	1
2.68158	0.999758	0.999969	0.999999
6.63606	0.999745	0.999936	0.999998
12.447	0.981149	0.997349	0.999931
20.2316	0.956577	0.993689	0.999841
30.1586	0.940739	0.991126	0.999785
42.4641	0.922264	0.990002	0.999749
57.4776	0.90874	0.989422	0.999734
75.6642	0.906236	0.989146	0.999727
97.696	0.90627	0.989106	0.999725
124.583	0.905971	0.989064	0.999724
157.931	0.906177	0.989083	0.999725
200.5	0.906001	0.989065	0.999724
257.657	0.906146	0.98908	0.999725
342.154	0.90603	0.989068	0.999724
500	0.906114	0.989076	0.999725

Tabela F. 2 – Confiabilidade para o exemplo de aplicação 1

T	P_05(t)	P_50(t)	P_95(t)
0.507012	1	1	1
2.68158	0.999661	0.999783	0.999993
6.63606	0.999922	1.000126	1.000194
12.447	0.977795	0.995723	0.999909
20.2316	0.935734	0.988746	0.999777
30.1586	0.886512	0.978856	0.999562
42.4641	0.828273	0.968194	0.999354
57.4776	0.762703	0.953525	0.999029
75.6642	0.690168	0.938271	0.998721
97.696	0.611239	0.917391	0.998245
124.583	0.527526	0.895947	0.997793
157.931	0.438672	0.865633	0.997066
200.5	0.347804	0.834387	0.996366
257.657	0.252925	0.785451	0.99509
342.154	0.160728	0.732836	0.993781
500	0.063733	0.611113	0.989991

Tabela F. 3 – Manutenibilidade para o exemplo de aplicação 1

T	P_05(t)	P_50(t)	P_95(t)
0.507012	1	1	1
2.68158	0.077296	0.171146	0.415101
6.63606	0.180518	0.371566	0.734785

12.447	0.311617	0.581588	0.917039
20.2316	0.454989	0.757369	0.982514
30.1586	0.595359	0.878895	0.997597
42.4641	0.720268	0.948824	0.999796
57.4776	0.821707	0.982108	0.999988
75.6642	0.896681	0.994991	1
97.696	0.946649	0.998928	0.999998
124.583	0.976187	0.999837	1
157.931	0.991242	0.999984	0.999998
200.5	0.997559	0.999999	1
257.657	0.99956	0.999998	1
342.154	0.999966	1	1
500	0.999999	0.999999	1

APÊNDICE G – TPCs das Fases 1 e 2 do exemplo de aplicação 2

Tabela G. 1 – TPC para a variável X

X	$P(X = x)$
Novo (N)	0.30
Semi-Novo (S)	0.50
Desgastado (D)	0.20

Tabela G. 2 – TPC para a variável Y

Y	$P(Y = y)$
Apropriada (A)	0.80
Não Apropriada (N)	0.20

Tabela G. 3 – TPC para a variável λ_i , com $i = 1, 2$

X	N		S		D	
Y	A	N	A	N	A	N
$P(\lambda_i = 10^{-4} X, Y)$	0.30	0.30	0.20	0.10	0.00	0.00
$P(\lambda_i = 10^{-3} X, Y)$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.20	0.00
$P(\lambda_i = 5 \cdot 10^{-3} X, Y)$	0.10	0.20	0.40	0.50	0.50	0.60
$P(\lambda_i = 10^{-2} X, Y)$	0.10	0.10	0.10	0.20	0.30	0.40

Tabela G. 4 – TPC da variável W

W	$P(W = w)$
Manhã (M)	0.50
Tarde (T)	0.30
Noite (N)	0.20

Tabela G. 5 – TPC da variável Z

W	M	T	N
$P(Z = A W)$	0.70	0.60	0.50

$P(Z = B W)$	0.30	0.40	0.50
----------------	------	------	------

Tabela G. 6 – TPC da variável μ_i , com $i = 1, 2$

Z	A			B		
W	M	T	N	M	T	N
$P(\mu_i = 0.2 Z, W)$	0.50	0.40	0.40	0.20	0.30	0.10
$P(\mu_i = 0.07 Z, W)$	0.30	0.45	0.40	0.50	0.40	0.40
$P(\mu_i = 0.03 Z, W)$	0.20	0.15	0.20	0.30	0.30	0.50

Tabela G. 7 – Distribuição marginal de probabilidade da variável λ_i , com $i = 1, 2$

$\lambda_i (hr^{-1})$	$P(\Lambda_i = \lambda_i)$
1.00E-04	0.180
1.00E-03	0.316
5.00E-03	0.35
1.00E-02	0.154
Valor esperado de $\lambda_i (hr^{-1})$	3.62E-03

Tabela G. 8 – Distribuição marginal de probabilidade da variável μ_i , com $i = 1, 2$

μ_i	$P(\Psi_i = \mu_i)$
2.00E-01	0.371
7.00E-02	0.3845
3.00E-02	0.2445
Valor esperado de $\mu_i (hr^{-1})$	1.08E-01

APÊNDICE H – TPCs da Fase 3 do exemplo de aplicação 2

Tabela H. 1 – TPC para a variável X

X	$P(X = x)$
Novo (N)	0.30
Semi-Novo (S)	0.50
Desgastado (D)	0.20

Tabela H. 2 – TPC para a variável Y

Y	$P(Y = y)$
Apropriada (A)	0.80
Não Apropriada (N)	0.20

Tabela H. 3 – TPC para a variável λ_3

X	N		S		D	
Y	A	N	A	N	A	N
$P(\lambda_3 = 10^{-3} X, Y)$	0.50	0.35	0.25	0.15	0.10	0.60

$P(\lambda_3 = 10^{-2} X, Y)$	0.20	0.45	0.25	0.25	0.20	0.30
$P(\lambda_3 = 2 \cdot 10^{-2} X, Y)$	0.15	0.10	0.40	0.40	0.40	0.05
$P(\lambda_3 = 5 \cdot 10^{-2} X, Y)$	0.15	0.10	0.10	0.20	0.30	0.05

Tabela H. 4 – TPC da variável W

W	$P(W = w)$
Manhã (M)	0.50
Tarde (T)	0.30
Noite (N)	0.20

Tabela H. 5 – TPC da variável Z

W	M	T	N
$P(Z = A W)$	0.70	0.60	0.50
$P(Z = B W)$	0.30	0.40	0.50

Tabela H. 6 – TPC da variável μ_3

Z	A			B		
W	M	T	N	M	T	N
$P(\mu_3 = 0.3 Z, W)$	0.40	0.45	0.45	0.20	0.30	0.15
$P(\mu_3 = 0.09 Z, W)$	0.30	0.45	0.35	0.50	0.45	0.45
$P(\mu_3 = 0.05 Z, W)$	0.30	0.10	0.20	0.30	0.25	0.40

Tabela H. 7 – Distribuição marginal de probabilidade da variável λ_3

λ_3	$P(\Lambda_3 = \lambda_3)$
1.00E-03	0.296
1.00E-02	0.244
2.00E-02	0.308
5.00E-02	0.152
Valor esperado de $\lambda_3 (hr^{-1})$	1.65E-02

Tabela H. 8 – Distribuição marginal de probabilidade da variável μ_3

μ_3	$P(\Psi_3 = \mu_3)$
3.00E-01	0.3575
9.00E-02	0.3855
5.00E-02	0.257
Valor esperado de $\mu_3 (hr^{-1})$	1.55E-01

APÊNDICE I – Indicadores de Confiabilidade para o Exemplo de Aplicação 2

Tabela I. 1 – Indisponibilidade Operacional para o exemplo de aplicação 2

T	P_05(t)	P_50(t)	P_95(t)
---	---------	---------	---------

0.340712	0	0	0
1.80202	-0.0001	-1E-05	-2.2E-07
4.45943	3.5E-07	1.72E-05	0.000166
8.36438	-0.00026	-2.5E-05	-4.3E-07
13.5956	1.36E-05	0.000636	0.005178
20.2666	5.72E-05	0.002412	0.024177
28.5359	0.000103	0.003807	0.040446
38.625	0.000146	0.004712	0.056941
50.8463	0.000183	0.0052	0.070529
65.6517	0.000202	0.005441	0.078844
83.72	0.000201	0.005526	0.079381
106.129	0.000202	0.005558	0.079438
134.736	0.000201	0.00556	0.079319
173.145	0.000202	0.005563	0.079139
229.928	0.000201	0.005559	0.078909
336	0.000201	0.005559	0.078316
336.341	1.54E-07	7.6E-06	6.94E-05
337.802	-0.00011	-1.2E-05	-2.3E-07
340.459	2.19E-07	1.33E-05	0.00013
344.364	2.86E-06	0.000137	0.000642
349.596	4.78E-05	0.002295	0.015493
356.267	0.000107	0.005265	0.035374
364.536	0.000148	0.007051	0.050285
374.625	0.000176	0.008578	0.06684
386.846	0.00019	0.009266	0.08007
401.652	0.000198	0.009624	0.087581
419.72	0.000201	0.009734	0.087899
442.129	0.000202	0.009787	0.08811
470.736	0.000202	0.009782	0.087876
509.145	0.000202	0.009791	0.087806
565.928	0.000202	0.009781	0.087508
672	0.000202	0.00978	0.087001
672.681	7.96E-08	6.03E-06	0.000112
675.604	-0.00026	-1.7E-05	-3.9E-07
680.919	5.37E-06	0.000205	0.002557
688.729	2.19E-05	0.00078	0.010839
699.191	2.46E-05	0.001055	0.019841
712.533	2.58E-05	0.001232	0.028526
729.072	2.54E-05	0.001244	0.03446
749.25	2.58E-05	0.001276	0.035884
773.693	2.54E-05	0.001279	0.036201
803.303	2.62E-05	0.001285	0.03622
839.44	2.54E-05	0.001279	0.03625
884.259	2.61E-05	0.001286	0.036252
941.472	2.55E-05	0.00128	0.036247
1018.29	2.59E-05	0.001284	0.03621
1131.86	2.57E-05	0.00128	0.036091
1344	2.58E-05	0.001281	0.035869

Tabela I. 2 – Confiabilidade para o exemplo de aplicação 2

T	P_05(t)	P_50(t)	P_95(t)
0.340712	1	1	1
1.80202	0.999847	0.999931	0.999998
4.45943	1.000002	1.00008	1.000179
8.36438	0.999818	0.999904	0.999998
13.5956	0.994612	0.99943	0.999989
20.2666	0.970196	0.996635	0.999931
28.5359	0.940007	0.993752	0.999874
38.625	0.90287	0.989386	0.999782
50.8463	0.861988	0.985063	0.999697
65.6517	0.812368	0.978589	0.999563
83.72	0.758899	0.972304	0.999437
106.129	0.693457	0.962559	0.999234
134.736	0.623524	0.952979	0.999038
173.145	0.533076	0.936273	0.998681
229.928	0.43542	0.918851	0.998314
336	0.274052	0.871546	0.997249
336.341	1.000002	1.000051	1.000095
337.802	0.999856	0.999923	0.999997
340.459	1.000004	1.0001	1.000191
344.364	0.99918	0.999736	0.999992
349.596	0.9822	0.997558	0.99995
356.267	0.949495	0.992235	0.999841
364.536	0.913172	0.987147	0.99974
374.625	0.868448	0.979534	0.999579
386.846	0.819516	0.972044	0.999428
401.652	0.761459	0.961083	0.999192
419.72	0.69906	0.950283	0.99897
442.129	0.625333	0.933979	0.998611
470.736	0.546967	0.917718	0.998266
509.145	0.450985	0.890268	0.997635
565.928	0.349056	0.861343	0.996989
672	0.198342	0.786515	0.995113
672.681	1.000001	1.000032	1.000126
675.604	0.999815	0.999957	0.999999
680.919	0.998819	0.999999	1.000065
688.729	0.983796	0.999352	0.999983
699.191	0.950785	0.998347	0.999963
712.533	0.903978	0.995968	0.999928
729.072	0.847472	0.993297	0.999894
749.25	0.782448	0.989608	0.999842
773.693	0.710874	0.986326	0.999792
803.303	0.632221	0.981375	0.999715
839.44	0.548911	0.975992	0.999642
884.259	0.45965	0.967598	0.999524
941.472	0.368192	0.959371	0.999411
1018.29	0.271532	0.944928	0.999204

1131.86	0.190101	0.929899	0.998989
1344	0.082479	0.889285	0.998346

Tabela I. 3 – Manutenibilidade para o exemplo de aplicação 2

T	P_05(t)	P_95(t)
0.340712	1	1
1.80202	0.052625	0.302606
4.45943	0.12522	0.590119
8.36438	0.221924	0.812293
13.5956	0.334934	0.934068
20.2666	0.455559	0.982635
28.5359	0.575174	0.996679
38.625	0.686121	0.999558
50.8463	0.782464	0.999963
65.6517	0.86048	0.999997
83.72	0.918862	1
106.129	0.958575	0.999999
134.736	0.982439	1
173.145	0.994452	0.999999
229.928	0.99899	1
336	0.999958	1
336.341	0.010169	0.065873
337.802	0.052625	0.302606
340.459	0.12522	0.590119
344.364	0.221924	0.812293
349.596	0.334934	0.934068
356.267	0.455559	0.982635
364.536	0.575174	0.996679
374.625	0.686121	0.999558
386.846	0.782464	0.999963
401.652	0.86048	0.999997
419.72	0.918862	1
442.129	0.958575	0.999999
470.736	0.982439	1
509.145	0.994452	0.999999
565.928	0.99899	1
672	0.999958	1
672.681	0.033497	0.184835
675.604	0.164899	0.660888
680.919	0.35978	0.93106
688.729	0.566749	0.993464
699.191	0.743228	0.999641
712.533	0.868224	1.00006
729.072	0.942363	0.999942
749.25	0.978984	1.00005
773.693	0.993809	0.999956
803.303	0.998591	1.00004
839.44	0.999769	1
884.259	0.999975	1.00003

941.472	0.999976	1
1018.29	0.999998	1.00002
1131.86	0.999984	1
1344	0.999999	1.00001

APÊNDICE J – Indicadores de Confiabilidade a posteriori para o Exemplo de Aplicação 2

Tabela J. 1 – Indisponibilidade Operacional a priori e a posteriori para o exemplo de aplicação 2

T	Priori	Posteriori
0.340712	1.27E-05	7.22E-06
1.80202	-2.19E-05	-1.25E-05
4.45943	3.64E-05	2.08E-05
8.36438	-5.55E-05	-3.17E-05
13.5956	0.00117333	0.000671113
20.2666	0.00453933	0.00260469
28.5359	0.00662564	0.00381573
38.625	0.00756188	0.0043664
50.8463	0.0078763	0.00455511
65.6517	0.00797842	0.00461717
83.72	0.00798498	0.00462222
106.129	0.00799518	0.00462861
134.736	0.0079857	0.00462365
173.145	0.00798929	0.00462641
229.928	0.00798072	0.00462229
336	0.00797535	0.00462139
336.341	1.47E-05	8.43E-06
337.802	-2.26E-05	-1.30E-05
340.459	2.42E-05	1.39E-05
344.364	0.000185871	0.000106013
349.596	0.00365878	0.00209504
356.267	0.00765598	0.00439881
364.536	0.00960596	0.00553736
374.625	0.0105971	0.006122
386.846	0.0108669	0.00628607
401.652	0.0109979	0.00636502
419.72	0.0109805	0.0063565
442.129	0.0110083	0.00637324
470.736	0.010983	0.00635939
509.145	0.0109973	0.00636862
565.928	0.0109776	0.00635849
672	0.0109746	0.00636003
672.681	1.60E-05	7.68E-06
675.604	-3.80E-05	-1.91E-05
680.919	0.000412539	0.000215994
688.729	0.00191176	0.0011135
699.191	0.00293001	0.00178384
712.533	0.00330982	0.00203301

729.072	0.00338896	0.0020881
749.25	0.00340555	0.00209663
773.693	0.00340259	0.00209647
803.303	0.00340563	0.00209709
839.44	0.0034025	0.00209634
884.259	0.00340442	0.00209671
941.472	0.00340189	0.00209605
1018.29	0.00340275	0.00209613
1131.86	0.00340047	0.00209546
1344	0.0033989	0.00209473

Tabela J. 2 – Confiabilidade a priori e a posteriori para o exemplo de aplicação 2

T	Priori	Posteriori
0.340712	1.00008	1.00005
1.80202	0.999882	0.999919
4.45943	1.00014	1.0001
8.36438	0.999839	0.999886
13.5956	0.998889	0.99939
20.2666	0.992869	0.99588
28.5359	0.986263	0.992134
38.625	0.976739	0.986549
50.8463	0.967174	0.981076
65.6517	0.953473	0.97297
83.72	0.939791	0.965049
106.129	0.919533	0.952897
134.736	0.899117	0.94088
173.145	0.865382	0.920178
229.928	0.829602	0.8985
336	0.739836	0.840671
336.341	1.00009	1.00007
337.802	0.999867	0.9999
340.459	1.00017	1.00013
344.364	0.99957	0.999718
349.596	0.995676	0.997568
356.267	0.986749	0.992342
364.536	0.977722	0.987235
374.625	0.964762	0.979588
386.846	0.951631	0.972067
401.652	0.933205	0.96106
419.72	0.914569	0.950216
442.129	0.887693	0.933847
470.736	0.860269	0.91752
509.145	0.816435	0.889967
565.928	0.76956	0.860932
672	0.657924	0.785851
672.681	1.0001	1.00007
675.604	0.999857	0.999895
680.919	0.99998	1.00001
688.729	0.997166	0.998246

699.191	0.992742	0.995584
712.533	0.985417	0.990984
729.072	0.977725	0.986286
749.25	0.96674	0.979347
773.693	0.955591	0.972472
803.303	0.939841	0.96243
839.44	0.92397	0.952525
884.259	0.900799	0.937534
941.472	0.87728	0.922596
1018.29	0.839025	0.897248
1131.86	0.79827	0.870572
1344	0.698382	0.80091

Tabela J. 3 – Manutenibilidade a priori e a posteriori para o exemplo de aplicação 2

T	Priori	Posteriori
0.340712	0.036276	0.036276
1.80202	0.177519	0.177519
4.45943	0.383455	0.383455
8.36438	0.596314	0.596314
13.5956	0.771094	0.771094
20.2666	0.888966	0.888966
28.5359	0.954711	0.954711
38.625	0.984838	0.984838
50.8463	0.99597	0.99597
65.6517	0.999193	0.999193
83.72	0.999885	0.999885
106.129	0.999991	0.999991
134.736	0.999998	0.999998
173.145	1	1
229.928	0.999999	0.999999
336	1	1
336.341	0.036276	0.036276
337.802	0.177519	0.177519
340.459	0.383455	0.383455
344.364	0.596314	0.596314
349.596	0.771094	0.771094
356.267	0.888966	0.888966
364.536	0.954711	0.954711
374.625	0.984838	0.984838
386.846	0.99597	0.99597
401.652	0.999193	0.999193
419.72	0.999885	0.999885
442.129	0.999991	0.999991
470.736	0.999998	0.999998
509.145	1	1
565.928	0.999999	0.999999
672	1	1
672.681	0.100108	0.100108
675.604	0.427584	0.427584

680.919	0.748571	0.748571
688.729	0.924945	0.924945
699.191	0.98514	0.98514
712.533	0.998116	0.998116
729.072	0.999854	0.999854
749.25	0.999994	0.999994
773.693	1	1
803.303	1	1
839.44	1	1
884.259	1	1
941.472	1	1
1018.29	1	1
1131.86	1	1
1344	1	1