



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

CARLA SORAIA DA SILVA PEREIRA

ANÁLISE DE PROBLEMAS AXIAIS PLANOS: IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS E LINGUAGEM C.

Caruaru, Dezembro de 2011

CARLA SORAIA DA SILVA PEREIRA

**SOBRE A ANÁLISE DE PROBLEMAS AXIAIS PLANOS: IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS E LINGUAGEM C.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste - CAA, da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Engenharia/Engenharia Civil/ESTRUTURAS

Orientador: Prof. Msc. Raimundo Menezes Jr.

Caruaru, Dezembro de 2011

CARLA SORAIA DA SILVA FERREIRA

**SOBRE A ANÁLISE DE PROBLEMAS AXIAIS PLANOS: IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS E LINGUAGEM C.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico
do Agreste - CAA, da Universidade Federal de
Pernambuco - UFPE, como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Engenharia
Civil.

Área de concentração: Engenharia/Engenharia
Civil/ESTRUTURAS

Aprovado em: Caruaru, 19 de Dezembro de 2011.

Banca examinadora:

Prof. Msc. Raimundo A. de Menezes Jr. _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Orientador)

Prof. Msc. Roberto Evaristo de Oliveira _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. José Moura Soares _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. Anderson Luiz Ribeiro Paiva _____
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Coordenador da Disciplina de TCC)

Dedico este trabalho à minha família. Em especial à minha mãe Valdinete, pois foi com o esforço e o carinho destas pessoas que me permitiram escrever estas palavras, e também ao meu marido Mirow que sempre acreditou em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar força e determinação para dar prosseguimento a este trabalho.

Agradeço ao professor orientador Raimundo A. de Menezes Jr. pela dedicação e orientação, por me repassar os seus conhecimentos, e, principalmente, em me dar a chance de prosseguir com o meu trabalho quando tive que recomeçá-lo.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para o meu desenvolvimento intelectual e profissional.

Agradeço a todos os meus amigos pela parceria e coleguismo durante todos esses anos. Em particular aos meus amigos que sempre torceram por mim Clayne Costa, Martina Lins, Arthur Aurélio, Anderson Ricardo e Elaine Cristina que me acompanharam e me ajudaram nessa jornada.

Em especial, agradeço ao meu companheiro Mirele Silva Almeida, “*Mirow*”, em me apoiar incondicionalmente e estar ao meu lado quando sempre precisei.

Agradeço a minha mãe Valdinete Maria da Silva e ao meu pai José Pereira de Lucena por me educarem e me fazer o que hoje sou. E agradeço ao restante da família pelos incentivos e palavras de apoio.

RESUMO

SOBRE A ANÁLISE DE PROBLEMAS AXIAIS PLANOS: IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO-SE A LINGUAGEM C.

As estruturas reticulares treliçadas, cujo o campo de esforços é essencialmente axial, são usualmente projetadas para superar longos vãos sendo, portanto, aplicadas comumente como uma solução da engenharia estrutural para cobertas de galpões industriais ou pontes metálicas. Em problemas de treliças estáticas, a obtenção dos campos de esforços e deslocamentos exige a solução de sistemas lineares com um número grande de variáveis. Considerando que as estruturas reais apresentam em geral muitas barras, a montagem e resolução do sistema algébrico governante tornam-se uma tarefa que exige muito tempo, quando realizada sem o auxílio de uma ferramenta computacional para operar os repetitivos cálculos da análise. O presente trabalho aborda métodos de análise de problemas axiais planos no regime estático, com particular ênfase para a formulação do problema de treliças através da técnica de elementos finitos. Além disso, é discutida a implementação computacional de uma ferramenta chamada TRL2D, para a análise (processamento) de treliças planas através da linguagem de programação C onde são realizadas todas as etapas da marcha de cálculo, desde as matrizes de rigidezes de cada barra no sistema local, até o acúmulo das mesmas matrizes no sistema global, para compor a equação de equilíbrio do sistema elástico, passando pela solução do mesmo sistema e posterior informe dos valores de solução para os campos de esforços e deslocamentos. Diversos exemplos são analisados tendo seus valores de análise verificados através do software ANSYS para validação da formulação e da implementação computacional proposta.

Palavras-chave: Análise estrutural, Elementos Finitos, Treliças.

ABSTRACT

ON ANALYSIS OF AXIAL PROBLEMS: COMPUTATIONAL DEVELOPMENT USING THE FINITE ELEMENT METHOD AND C LANGUAGE.

The truss structures, that are usually designed to long spaces and whose field of work is essentially axial, are commonly applied as a solution for structural engineering. In static problems, finding the fields efforts and displacements requires the solution of linear systems with a large number of quantities. Whereas the actual structures generally have many bars, the assembly and resolution of the algebraic system becomes a task that requires much time, when performed without a computational tool to do the repetitive calculations. This work deals with methods to analysis static axial problems, with particular emphasis on finite element technique. Also, is discussed the implementation of a computational tool called TRL2D, for analysis (processing) static plane truss through the C programming language, where they are performed all steps of calculation, from the stiffness matrix of each bar in local system until the accumulation of these matrices in the global system, to form the equation balance of the elastic system, through the solution of the same system of values and subsequent report solution for the displacement and force fields. Several examples are analyzed with their values analysis verified by ANSYS software to validate the formulation and computational implementation proposal.

Keywords: Structural analysis, Finite Element, Truss.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Tipos de estruturas reticuladas	17
Figura 2 – Modelo de resolução pelo método dos nós.....	18
Figura 3 – Modelo de resolução pelo método das seções	19
Figura 4 – Treliça plana bidimensional.....	20
Figura 5 – Nó A da treliça plana bidimensional	20
Figura 6 – Formação do polígono de força	20
Figura 7 – Escala de Cremona	21
Figura 8 – Superposição de soluções pelo Método das Forças (MARTHA, 2000)	22
Figura 9 – Superposição de soluções do Método dos Deslocamentos (MARTHA, 2000).....	23
Figura 10 – Diagrama Tensão Deformação	23
Figura 11 – Elemento infinitesimal	25
Figura 12 – Esforço de tração, tensão e deformação	25
Figura 13 – Força x Deslocamento	27
Figura 14 – Elemento de barra	28
Figura 15 – Função de interpolação da barra	29
Figura 16 – Função de interpolação do elemento de barra	30
Figura 17 – Deslocamento linear	32
Figura 18 – Barra sob tração	34
Figura 19 – Barra sobre tração discretizada	34
Figura 20 – Elemento de barra representado na linha centroidal	35
Figura 21 – Equilíbrio dos nós	36
Figura 22 – Três elementos de barra usados na discretização da barra sob tração.....	40
Figura 23 – Elemento de barra inclinação em relação ao sistema x-y.....	45
Figura 24 – Sequência de operações.....	48
Figura 25 – Sub-rotina de um programa em C	50
Figura 26 – Esquema da ferramenta computacional TRL2D.....	52
Figura 27 – Treliça 01	61
Figura 28 – Treliça 01 enumerada	61
Figura 29 – Estrutura Deformada	70
Figura 30 – Treliça 02.....	71
Figura 31 – Treliça 02 enumerada	71
Figura 32 – Estrutura deformada	80
Figura 33 – Treliça 03.....	81

Figura 34 – Treliça 03	82
Figura 35 – Modelo de treliça deformada	91
Figura 36 – Treliça 04	92
Figura 37 – Treliça 04 enumerada	93
Figura 38 – Estrutura 04 deformada	102
Figura 39 – Treliça 05	103
Figura 40 – Treliça 05 enumerada	104
Figura 41 – Estrutura Deformada	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Matriz de Rigidez Local	53
Tabela 2- Matriz de Rotação Beta	54
Tabela 3- Matriz de Rotação Transposta	54
Tabela 4- Matriz de Rigidez Global.....	55
Tabela 5- Matriz de Rotação	55
Tabela 6- Solução do sistema linear	59
Tabela 7- Dados de entrada da treliça 1	62
Tabela 8- Arquivo de entrada treliça 01.....	63
Tabela 9- Execução do Programa TRL2D	64
Tabela 10- Solução do sistema linear	65
Tabela 11- Campos de Deslocamentos	66
Tabela 12- Esforços em cada barra da estrutura.....	67
Tabela 13- Resolução dada pelo Ansys	69
Tabela 14- Dados de entrada da treliça do exemplo2	72
Tabela 15- Arquivo de entrada da treliça 02	73
Tabela 16- Execução do Programa TRL2D	74
Tabela 17- Solução do sistema linear	74
Tabela 18- Campo de deslocamento	75
Tabela 19- Lista de esforços em cada barra da estrutura	77
Tabela 20- Resposta dada pelo Ansys do exemplo 02.....	79
Tabela 21- Dados de entrada da treliça da treliça 03	83
Tabela 22- Arquivo de entrada da estrutura 03	84
Tabela 23- Tela inicial do programa TRL2D	85
Tabela 24- Solução do Sistema Linear	86
Tabela 25- Campos de deslocamento	87
Tabela 26- Esforços nodais de cada barra	88
Tabela 27- Campos de deslocamento	90
Tabela 28- Dados de entrada da treliça 04	94
Tabela 29- Arquivo de entrada da treliça 04	95
Tabela 30- Tela inicial do programa TRL2D	96
Tabela 31- Solução do sistema linear	97
Tabela 32- Campo de deslocamentos	98

Tabela 33- Esforços internos das barras da estrutura.....	99
Tabela 34- Resultado apresentado pelo Ansys	101
Tabela 35- Dados de entrada da treliça 05	104
Tabela 36- Dados de entrada da treliça 05	105
Tabela 44- Tela Inicial do programa TRL2D	106
Tabela 38- Solução do sistema linear	107
Tabela 39- Campo de deslocamentos	108
Tabela 40- Valores dos esforços nodais de alguns elementos de Barra.....	109
Tabela 41- Resposta do Ansys.....	110

ABREVIATURAS E SIGLAS

TRL2D	Treliça Plana em duas dimensões
MEF	Método dos Elementos Finitos
IDE	Ambiente de Desenvolvimento Integrado
PTV	Princípio dos trabalhos Virtuais
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal
σ_x	Tensão no eixo x
ε_x	Deformação axial no eixo x
ε_y	Deformação axial no eixo y
ε_z	Deformação axial no eixo z
U_e	Energia externa
U_i	Energia interna
π_P	Energia Potencial de Deformação
W	Trabalho de cargas externas
φ_n	Funções de Interpolação
\bar{D}	Deslocamento virtual
\bar{d}	Deslocamento virtual interno
X_i	Redundantes estáticas
$\{P\}$	Vetor força
$[K]$	Matriz de rigidez
$[K_e]$	Matriz de rigidez local
$[K_G]$	Matriz de rigidez global
$\{P_G\}$	Vetor força global
$\{u_G\}$	Vetor deslocamento global
p_n	Pivô do elemento n

SUMÁRIO

1	Introdução	15
1.1	Justificativa.....	15
1.2	Motivação.....	16
1.3	Objetivos Geral e Específico	16
1.3.1	Objetivo Geral	16
1.3.2	Objetivos Específicos	16
2	Referencial Teórico	17
2.1	Estruturas Planas.....	17
2.2	Métodos Clássicos para a resolução de treliças planas	17
2.2.1	Métodos Isostáticos	18
2.2.2	Método Gráfico – Método de Cremona.....	19
2.2.3	Métodos Hiperestáticos.....	21
2.3	Introdução à Elasticidade Linear em problemas axiais.....	23
2.4	Tensões, Deformações e Deslocamentos	25
2.5	Princípio da conservação da energia potencial de deformação.....	26
2.6	Funcional de Energia Potencial	27
2.7	Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):	29
2.8	Teorema de Castigliano	32
2.9	O Método Matricial	34
2.10	O Método dos Elementos Finitos.....	37
2.10.1	Formulação Direta do Elemento de Barra: Matriz de Rigidez e Vetor de Carga	37
2.10.1	Matriz de Rigidez Global e Vetor de Carga.....	40
2.10.2	Condições de Contorno.....	43
2.10.3	Transformação de Coordenadas	44
2.11	Métodos computacionais para análise das estruturas	46
2.11.1	Programa ANSYS.....	47
2.12	A Linguagem C	48
2.12.1	Diretivas de compilação.....	49
2.12.2	Entrada e saída de dados	50
2.13	O Compilador <i>CodeBlocks</i>	50
3	Metodologia	51
3.1	Sequência a ser guiada	51

3.2	Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise de problemas	
Axiais Planos	52
3.3	Programação do aplicativo TRL2D (Análise de Treliças 2D)	53
3.4	Métodos de resolução de sistemas de equações	56
3.4.1	Método de Eliminação de Gauss	56
4	Resultados e Discussões	60
5	Considerações Finais / Conclusões	112
6	Sugestões para trabalhos futuros.....	112
7	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	113

1 INTRODUÇÃO

A análise de uma determinada estrutura é a etapa mais importante durante a concepção de um projeto, visto que é feita a idealização do comportamento da estrutura. De uma maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de forças internas e externas (cargas e reações de apoio), deslocamentos, tensões e deformações. Essa análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações a que estão submetidas a estrutura e que devem ser previamente determinados.

Alguns métodos já consagrados, tais como o método das forças e o método dos deslocamentos constituem a base da teoria de análise de estruturas, que quando fundamentadas e desenvolvidas no campo da álgebra matricial dão origem a técnica de análise matricial, amplamente utilizada para estudo de estruturas reticuladas. Posteriormente, este mesmo método matricial foi generalizado para solução de outros tipos estruturais, partindo-se de soluções de campos aproximados, servindo portanto de ponte para a criação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

1.1 Justificativa

A análise estrutural é um segmento da engenharia civil responsável pela concepção do cálculo de estruturas de edifícios, pontes, viadutos, barragens, entre outras. A etapa de cálculo de esforços e deslocamentos da estrutura, quando realizada manualmente, torna-se complexa e extensa. Esta necessidade leva o engenheiro civil a procurar no mercado softwares prontos, porém, os altos preços podem acabar impossibilitando a compra dos mesmos. Além disso, os softwares encontrados no mercado podem não contemplar funções específicas de cálculo estrutural que o engenheiro necessita. Estes são fatores determinantes para que o profissional da área motive-se a desenvolver os seus próprios softwares, sendo estes, simplificados e que atendam as particularidades desejadas. Neste trabalho, pretende-se desenvolver um software básico para análise de problemas axiais planos, no regime estático, através do método de elementos finitos.

1.2 Motivação

A presença dos computadores é um fato cada vez mais comum no nosso cotidiano e levando-se em conta os problemas usuais de estruturas na rotina da engenharia estrutural, por sua natureza de procedimentos repetitivos e cansativos surge a necessidade de otimizar computacionalmente o método de análise. Considerando essas questões, é de extrema importância a utilização e/ou desenvolvimento de softwares que auxiliem o projeto estrutural, em particular, o caso de problemas axiais, tema deste trabalho.

1.3 Objetivos Geral e Específico

1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma ferramenta computacional, aplicada na análise de problemas axiais planos, revisitando o método matricial e sua generalização para o método de elementos finitos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Aplicar conhecimentos adquiridos sobre elementos finitos aplicados a problemas axiais planos, no desenvolvimento de uma ferramenta computacional através da linguagem C.
- Determinar, através do software desenvolvido, os deslocamentos e esforços em treliças planas;
- Verificar os resultados obtidos através do software Ansys;

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Estruturas Planas

As estruturas são divididas basicamente em duas classes: reticuladas e não reticuladas. As estruturas reticuladas recebem esta classificação por serem constituídas de barras de eixo reto. A análise matricial das estruturas pelo método de rigidez compreende o estudo de cinco modelos estruturais básicos (Figura 1): treliça plana, treliça espacial, pórtico plano onde se inclui o caso particular da viga, pórtico espacial e grelha plana.

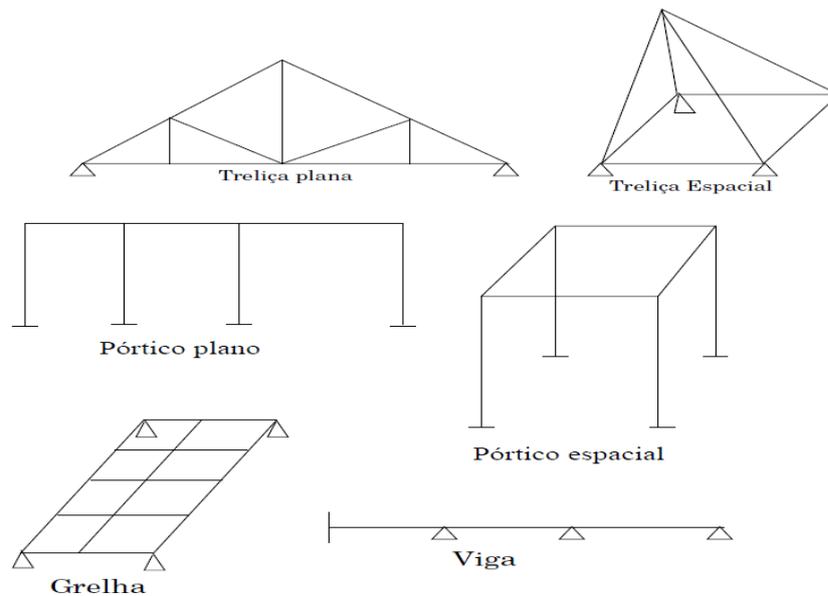


Figura 1 — Tipos de estruturas reticuladas

2.2 Métodos Clássicos para a resolução de treliças planas

Nos casos de estruturas reticuladas planas isostáticas e hiperestáticas é possível fazer o cálculo das reações de apoio, esforços normais e deslocamentos de uma maneira simplificada, ou seja, manualmente ou usando técnicas de resolução para estruturas hiperestáticas. Para isso são usados alguns métodos que auxiliem nesta resolução que serão mostrados abaixo:

2.2.1 Métodos Isostáticos

São os métodos que determinam esforços solicitantes de estruturas estaticamente determinadas. Vejamos abaixo os dois métodos no qual se pode recorrer.

2.2.1.1 Método dos Nós

A resolução de treliças planas isostáticas pelos métodos dos nós consiste em verificar o equilíbrio de cada nó. Pois os nós são articulações perfeitas sem força de atrito, e quando as forças são aplicadas apenas nos nós, as barras transmitem unicamente esforços axiais. Usando as equações básicas de equilíbrio da análise estrutural, equação 1 e 2, é possível resolver por etapas todos os nós da treliça plana, Figura 2.

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

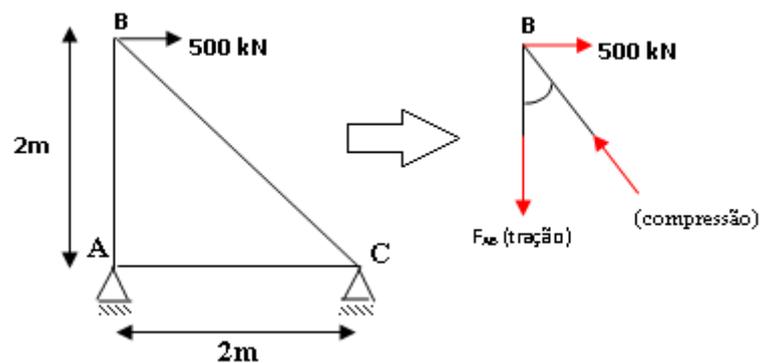


Figura 2 – Modelo de resolução pelo método dos nós

2.2.1.2 Método de Ritter ou Método das Seções

O método de Ritter permite o cálculo de esforços normais apenas em algumas barras, as quais possam interessar o resultado. Escolhe-se uma região de interesse da treliça que tenha no máximo três barras, e se passa um corte imaginário que separa a treliça em duas partes, pode - se substituir as partes retiradas pelos esforços normais a serem calculados por meio das equações de equilíbrio 1 e 2 além da equação 3, Figura 3.

$$\sum M_z = 0 \quad (3)$$

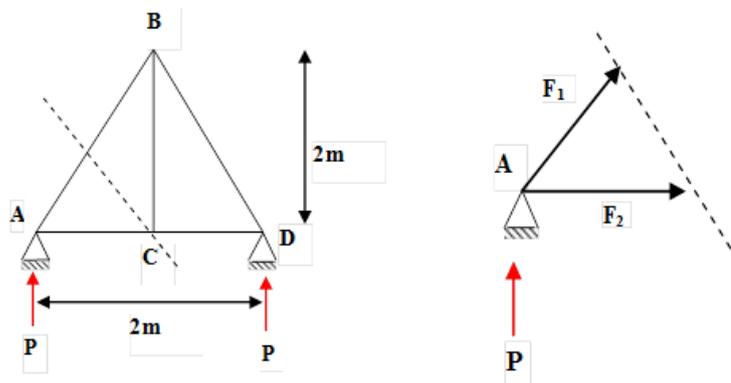


Figura 3 – Modelo de resolução pelo método das seções

2.2.2 Método Gráfico – Método de Cremona

O método de Cremona consiste em encontrar os esforços internos graficamente, a partir do equilíbrio dos nós da treliça, Figura 5. Inicialmente foi chamado de *Método das Figuras de Maxwell*, por ter sido apresentado por J. C. Maxwell. Cremona só o apresentou, por escrito em 1872, no trabalho *Le figure nella Statico Grafica*, fazendo com quê demais autores habituar-se a dar a este método o nome de Cremona. O teorema desenvolvido para o método diz que, se um nó está em equilíbrio, a soma vetorial de todas as forças que sobre ele será nula.

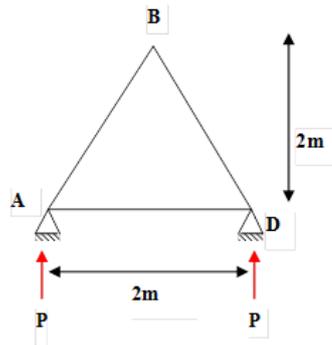


Figura 4 – Treliça plana bidimensional

Escolhe-se inicialmente um nó com duas barras para serem determinados os esforços.

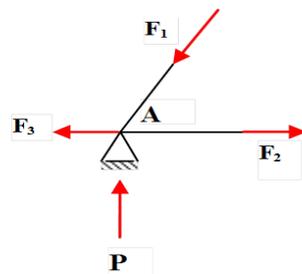


Figura 5 – Nó A da treliça plana bidimensional

É formado um polígono de forças de cada nó, com vetores paralelos às barras que concorrem no nó no qual se desejam conhecer os esforços.

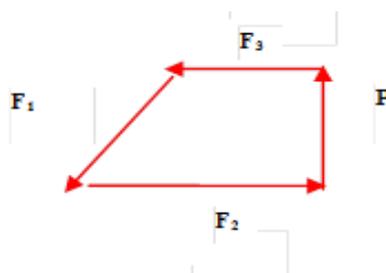


Figura 6 – Formação do polígono de força

Pelas extremidades deste polígono traçam-se a interseção destas paralelas que determinará o polígono fechado de equilíbrio; obtendo-se assim os módulos e sinais dos esforços nas barras.

Sendo assim, verifica-se:

- Se o esforço normal aponta para o nó → negativo (compressão);
- Se o esforço normal foge do nó → positivo (tração);

O sentido do percurso de traçado de forças é arbitrário;

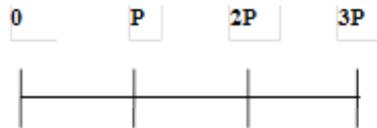


Figura 7 – Escala de Cremona

Após este processo, os valores são comparados na escala de Cremona, Figura 7, para serem obtidos os valores dos esforços.

2.2.3 Métodos Hiperestáticos

As estruturas hiperestáticas são as mais comuns no dia-a-dia de um engenheiro. Para serem obtidos os deslocamentos e as reações manualmente exige tempo e paciência, então para otimizar esses processos, usa-se um dos métodos virtuais abaixo.

2.2.3.1 Método das Forças

O método das forças é utilizado em estruturas hiperestáticas, que são transformadas em uma estrutura passível de determinar um conjunto de reações e/ou esforços seccionais superabundantes ao equilíbrio estático, permitindo que as outras reações e/ou esforços seccionais sejam calculados pelas leis de estática (SORIANO, 2005).

É selecionado um conjunto de redundantes estáticas X_i , formando um sistema principal, o qual, através do método da superposição, é formado um sistema de equações com incógnitas primárias, como é mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1N}X_N &= 0 \\
 \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2N}X_N &= 0 \\
 \vdots & \\
 \delta_{M0} + \delta_{M1}X_1 + \delta_{M2}X_2 + \dots + \delta_{MN}X_N &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Onde δ_M representa os deslocamentos dos nós. Após a obtenção das referidas redundantes é utilizada as leis da estática para a determinação das reações e deslocamentos reais.

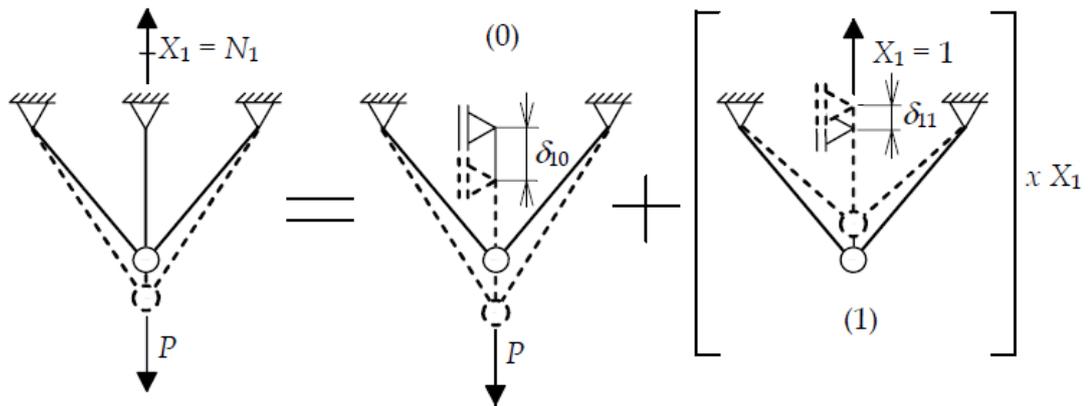


Figura 8 – Superposição de soluções pelo Método das Forças (MARTHA, 2000)

2.2.3.2 Método dos Deslocamentos

Nesse método as incógnitas principais do problema são deslocamentos e rotações. Todas as outras incógnitas são expressas em termos das incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de equilíbrio, que são então resolvidas.

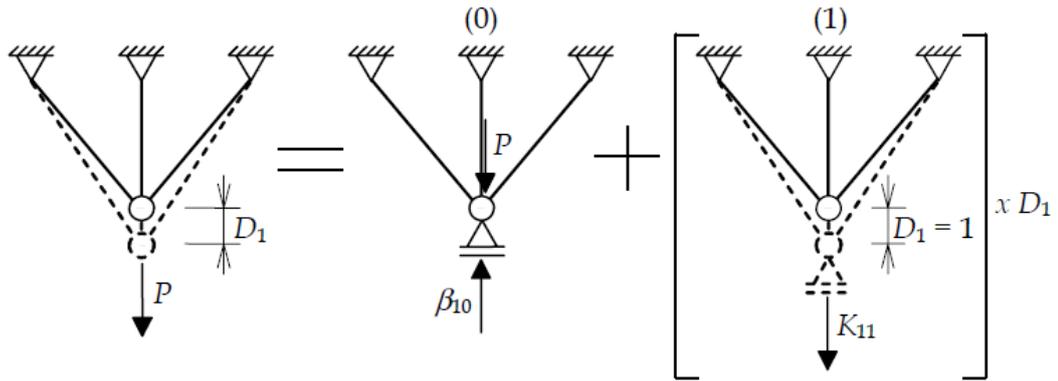


Figura 9 – Superposição de soluções do Método dos Deslocamentos (MARTHA, 2000)

Onde podemos usar o método de superposição,

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 = 0 \quad (5)$$

B_{10} : termo de carga que representa a força reação vertical no apoio fictício no caso (0).

K_{11} : coeficiente de rigidez que representa força vertical no apoio fictício do caso para impor uma configuração deformada tal que a deslocabilidade D_1 tenha um valor unitário.

2.3 Introdução à Elasticidade Linear em problemas axiais

Todos os corpos possuem um limite de deformação o qual pode ser estudado no diagrama tensão-deformação, Figura 10.

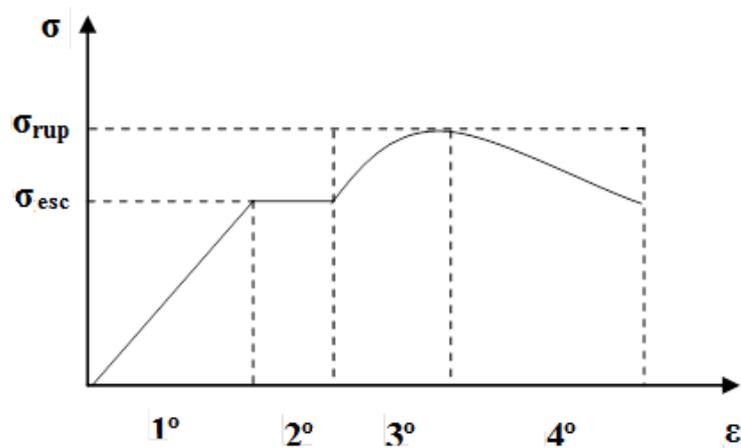


Figura 10 – Diagrama Tensão Deformação

1. **Comportamento Elástico:** O comportamento elástico de um material acontece quando ocorrem pequenas deformações de maneira linear, mantendo a proporcionalidade entre tensão e deformação através do *Módulo de Young*, E , que é expresso pela Lei de Hooke na forma matricial.

$$\{\sigma_{xx}\} = [E]\{\epsilon_{xx}\} \quad (6)$$

Esta condição se aplica até o material atingir o *limite de proporcionalidade* e o *limite de elasticidade*. Ao atingir este ponto, se a carga for removida do corpo, ele ainda volta ao seu estado original (HIBBELER, 2005).

2. **Escoamento:** Estágio no qual o material escoar, iniciando o comportamento plástico.
3. **Comportamento Elástico Não-Linear:** Uma vez atingindo o limite de escoamento, o corpo continuará a alongar-se sem qualquer aumento de carga, mas ocorrendo grandes deslocamentos, no qual se a carga for removida do corpo, ele não volta ao seu estado inicial.
4. **Estricção:** Ao atingir o limite de resistência, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada. O diagrama tensão-deformação encurva-se para baixo até que o corpo se quebre ao atingir a *tensão de ruptura*.

O vetor de deformações descrito em (6) pode ser escrito em função dos deslocamentos. Para os campos axiais obtêm-se:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad (7)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} \quad (8)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} \quad (9)$$

Já o vetor de tensões descrito na mesma equação fica:

$$\{\sigma_{ij}\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}\} \quad (10)$$

2.4 Tensões, Deformações e Deslocamentos

Para o estudo do estado de tensões no interior do corpo deformado, isola-se um elemento infinitesimal de um volume de dimensões dx , dy , dz . Este elemento, após ser sollicitado por forças externas, apresenta esforços no interior, que quando atuam na seção transversal produzem tensões e geram deformações (HIBBELER, 2005).

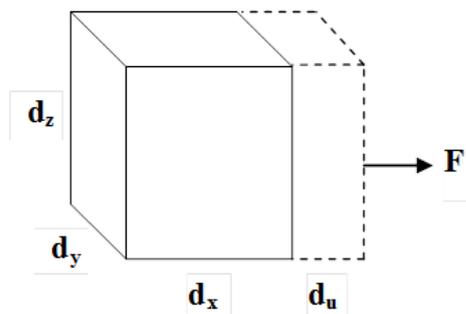


Figura 11 – Elemento infinitesimal

No caso de barras axialmente carregadas, observa-se apenas a presença de esforços internos axiais, com a mesma magnitude e direção da força externa. Assim, observam-se deformações axiais ao longo da barra, cuja magnitude irá depender das propriedades elásticas do material.

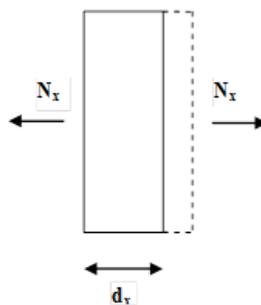


Figura 12 – Esforço de tração, tensão e deformação

O deslocamento é um movimento de translação ou rotação em algum ponto de uma estrutura. O deslocamento correspondente a uma força concentrada é uma translação, referindo-se à distância percorrida por um ponto da estrutura, agindo ao longo da linha de ação na força. Para o campo axial, a deformação em relação ao deslocamento pode ser descrita conforme as equações (7), (8) e (9). Já as tensões referentes a esforços axiais podem ser descritas pelo vetor em (10). Convém notar que as direções estarão associadas ao sistema de coordenadas local adotado para o elemento estrutural analisado.

2.5 Princípio da conservação da energia potencial de deformação.

Os métodos de energia são baseados no equilíbrio de energia, frequentemente denominado de *conservação de energia*. Se uma carga for aplicada vagarosamente em um corpo, da maneira que a energia cinética seja desprezada, as cargas externas tenderão a deformar este corpo, realizando trabalho externo U_e na medida que se deslocam. Esse trabalho externo provocado pelas cargas transformando em um trabalho interno U_i . Quando as cargas são removidas, a energia de deformação faz com que o corpo volte para a posição não deformada, desde que o limite elástico não tenha sido alcançado.

$$U_e = U_i \tag{11}$$

O princípio da conservação de energia desenvolvido por Isaac Newton é bastante intuitivo, mas tem uma aplicação muito limitada para o cálculo de deslocamentos em estruturas. Basicamente, este princípio só permite calcular deslocamentos para o caso de solicitação de uma força concentrada constante, e o deslocamento calculado tem que ser no ponto de aplicação e na direção da força. Newton também propôs que o trabalho pode também ser calculado através da área de um retângulo, Figura 13.

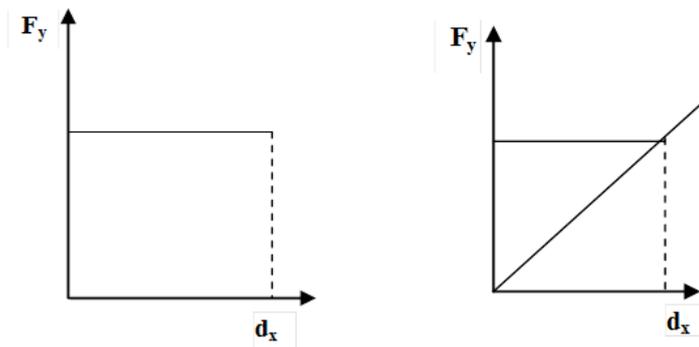


Figura 13 – Força x Deslocamento

$$U = F_y d_x \quad (12)$$

Porém, mais tarde Clayperon propôs uma relação que mais se aproximava da realidade, a qual as forças iriam assumir uma forma variável, sendo assim, o trabalho poderia ser calculado como a área de um triângulo, Figura 13.

$$U = \frac{F_y d_x}{2} \quad (13)$$

2.6 Funcional de Energia Potencial

Se um corpo elástico linear está em equilíbrio, pode-se mostrar que ele assume a energia potencial mínima. A energia potencial é definida como a soma da energia de deformação U com o trabalho realizado pelas forças externas W , isto é,

$$\pi = U + W \quad (14)$$

Onde π_p representa o funcional de energia potencial.

Ao aplicar o princípio de mínima energia potencial, essencialmente toma-se a derivada, ou variação, de π_p e iguala-se a mesma a zero. Assumindo que o carregamento permanece constante, tem-se

$$\delta \pi = \delta \int_{V} \sigma \epsilon \, dV \quad (15)$$

O símbolo δ indica a variação da energia potencial π_p . Esta variação pode ser interpretada como composta de uma série de derivadas parciais de π_p . δ é um símbolo compacto usado para indicar a variação ou uma série de derivadas parciais. Para o uso deste símbolo neste curso, interpreta-se δ como o símbolo que indica as derivadas de π_p em relação às coordenadas independentes ou variáveis em termos das quais ela é expressa.

$$\pi_p = \pi_p(u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xn}) \quad (16)$$

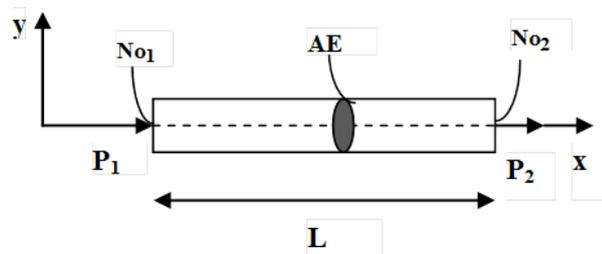


Figura 14 – Elemento de barra

Onde $u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xn}$ são o número total de variáveis no nós, então

$$\delta \pi_p = 0 \quad (17)$$

Implicando que

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial u_{x1}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial u_{x2}} = 0 \quad (19)$$

⋮

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial u_{xn}} = 0 \quad (20)$$

Onde n é o número total de variáveis.

O fato de que para corpos elásticos e lineares em equilíbrio o valor de πp é um mínimo, pode ser verificado mostrando-se que a segunda derivada ou variação de πp é maior que zero, isto é,

$$\delta^2 \pi p > 0 \tag{21}$$

2.7 Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

Este método foi desenvolvido em 1717 por Jonh Bernoulli, baseando-se na conservação de energia. O elemento de barra é um elemento reto - considerado aqui com secção constante - capaz de suportar apenas cargas axiais. O estado de tensões na barra é representado por

$$\sigma_{xx} \neq 0 \tag{22}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \tag{23}$$

Como o deslocamento u ao longo do elemento varia linearmente, pode-se substituir a função deslocamentos exata pela seguinte função aproximada:

$$u(x) = \bar{u}_1 \phi_1 + \bar{u}_2 \phi_2 \tag{24}$$

Onde ϕ_1 são as funções de interpolação. Para exemplificar, usamos as Figuras 15 e 16.

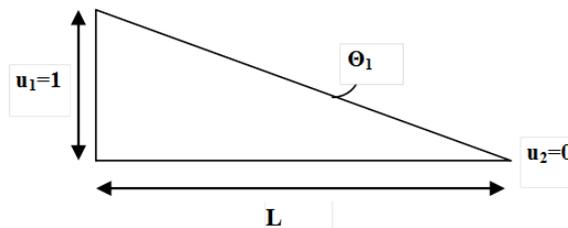


Figura 15 – Função de interpolação da barra

$$\varphi = ax + a_2 \tag{25}$$

~~$$\varphi(x=0) = 1 + a_2 \tag{26}$$~~

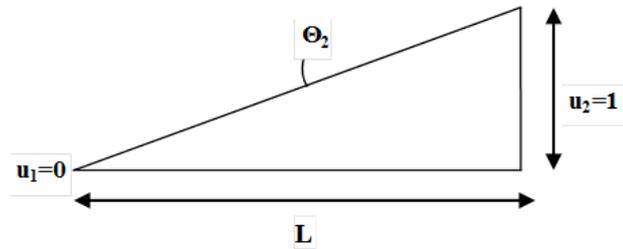


Figura 16 – Função de interpolação do elemento de barra

~~$$\varphi(x=L) = 0 + a_2 \tag{27}$$~~

$$\therefore \varphi = \frac{x}{L} + 1 \tag{28}$$

$$\varphi = bx + b_2 \tag{29}$$

~~$$\varphi(x=0) = 0 + b_2 \tag{30}$$~~

~~$$\varphi(x=L) = 1 + b_2 = \frac{1}{L} \tag{31}$$~~

$$\therefore \varphi_2 = \frac{x}{L} \tag{32}$$

Substituindo as equações 25 e 29, na equação 24, temos:

~~$$u(x) = \frac{x}{L} + 1 + \frac{x}{L} \tag{33}$$~~

Para um estado uniaxial de tensão a deformação ϵ_{xx} é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} \quad (34)$$

Assim

$$\varepsilon_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d} \quad (35)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{L} \frac{dU}{d} \quad (36)$$

O método aqui empregado para a obtenção da energia de deformação é baseado na energia potencial do sistema. Como foi definida na equação 14, cuja a energia de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV \quad (37)$$

E o trabalho externo, por:

$$W = \int_V \sigma \varepsilon dV \quad (38)$$

O princípio do trabalho virtual (PTV) é derivado da função de energia potencial total, assumindo que um deslocamento virtual é aplicado num estado de equilíbrio. O PTV estabelece então que a soma do trabalho realizado pelas forças aplicadas e da energia armazenada para este deslocamento é zero. Em forma de equação, o PTV fica assim escrito (FONSECA, 2002):

$$U' + W' = 0 \quad (39)$$

Onde U' é a variação na energia da deformação para o deslocamento virtual e W' é o trabalho virtual realizado pelo deslocamento virtual.

$$\int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dV \quad (40)$$

Tendo em vista apenas o estado de tensão axial, a expressão acima fica reduzida a:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{xx}^2 dV \quad (41)$$

2.8 Teorema de Castigliano

Em 1879, Alberto Castigliano, publicou um método que poderia determinar o deslocamento e a inclinação de um determinado ponto em um corpo. Esse método, se aplica, no entanto, apenas em corpos que possuem temperatura constante e material com comportamento elástico-linear, (HIBBELER, 2005).

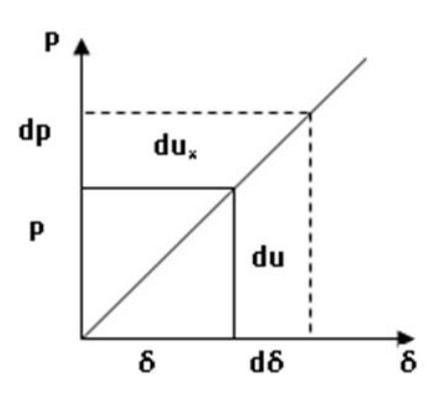


Figura 17 – Deslocamento linear

Partindo-se da relação descrita na figura 17, pode-se representar a energia de deformação du pela relação abaixo

$$du = dP \cdot \delta + \frac{dP d\delta}{2} \quad (42)$$

O segundo termo da equação pode ser reduzido a zero, pois apresenta um valor muito pequeno, considerando as hipóteses de material homogêneo, isotrópico e elastolinar, bem como campo de deslocamentos suaves. Assim a equação fica reduzida.

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \delta \quad (43)$$

A expressão em 41 diz que “A derivada da energia de deformação elástica armazenada no elemento estrutural relacionada a um deslocamento sofrido é igual a carga que provoca este deslocamento”. Aplicando-se a equação 41, convenientemente reescrita para o caso axial em 43 tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{N^2 L}{2EA} \right) = \delta \quad (44)$$

Portanto o deslocamento devido a um esforço axial fica.

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad (45)$$

Reescrevendo a expressão de forma a isolar deslocamento e esforço, obtem-se

$$\frac{EA}{L} \delta = N \quad (46)$$

Considerando a estrutura um sistema elasto-linear, a relação (46) fica:

$$K_e \cdot u_e = P_e \quad (47)$$

Onde:

$$K_e = \frac{EA}{L} \quad \text{Coeficiente de rigidez Axial}$$

$u_e = \delta$ Deslocamento na direção Axial

$P_e = N$ Força na direção Axial

2.9 O Método Matricial

O Método Matricial foi a primeira técnica desenvolvida para análise de estruturas com grande número de elementos. Essencialmente a técnica está baseada nas equações obtidas por generalização do método da conservação de energia através do PTV para deslocamentos e esforços, posteriormente são então encontrados tensões e deformações. O mecanismo da álgebra matricial é aplicado para a solução conjunta dos vários elementos estruturais que compõe a discretização do problema. A solução fundamental da técnica é obtida através da resolução da barra engastada, vide Figura 18, submetida ao esforço axial.

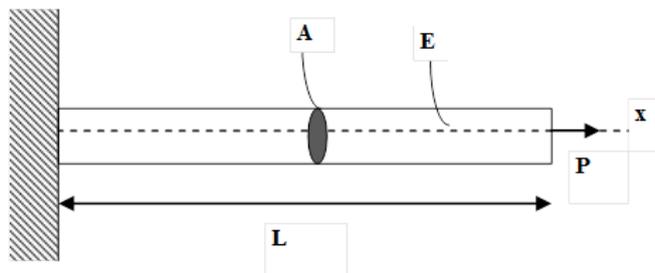


Figura 18 – Barra sob tração

A barra será então dividida em partes menores, conhecido como processo de discretização.

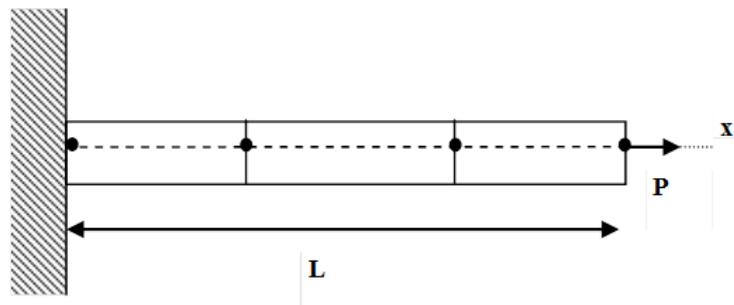


Figura 19 – Barra sobre tração discretizada

Cada parte da barra representa um elemento, conforme a Figura 20.

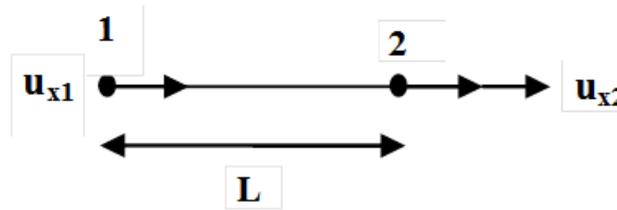


Figura 20 – Elemento de barra representado na linha centroidal

Cada elemento de barra tem dois nós, 1 e 2, área de seção transversal A , comprimento L e dois graus de liberdade u_{x1} e u_{x2} , os quais podem ser associados às forças axiais P_1 e P_2 .

Sabe-se que

$$u_{x1} = -u_{x2} \quad (48)$$

Portanto, tem-se

$$P_1 = -P_2 \quad (49)$$

O estudo de barras sobre carregamento axial realizado mostra que a equação constitutiva (equação tensão - deformação), para este caso, é a lei de Hooke para tensão unidimensional, ou seja,

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad (50)$$

O termo ϵ_{xx} é a deformação axial, sendo dada ao longo do elemento da barra. Considerando esta deformação constante em todo o comprimento do elemento, temos

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (51)$$

Onde ΔL é a variação do comprimento do elemento, devido à ação das forças nodais. Esta equação pode ser reescrita utilizando a definição dos deslocamentos nodais (graus de liberdade) u_{x1} e u_{x2} , em termos das variáveis nodais, isto é:

$$\epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (52)$$

Fazendo o equilíbrio dos nós 1 e 2, Figura 21 abaixo, obtém-se, respectivamente

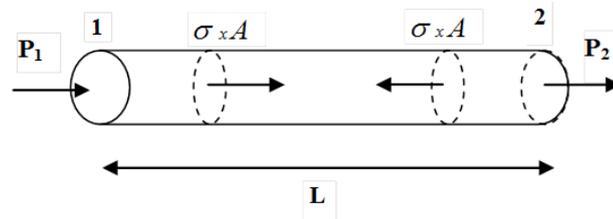


Figura 21 – Equilíbrio dos nós

$$P_1 = -EA\epsilon_x \quad (53)$$

$$P_2 = EA\epsilon_x \quad (54)$$

Substituindo as equações 52 e 53 pelas equações encontradas acima, teremos:

$$P_1 = -\frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (55)$$

$$P_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (56)$$

As quais podem ser reescritas na forma generalizada matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} EA & -1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Esta é a equação do elemento de barra, na forma matricial. Isolando-se a matriz e o produto tem-se:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Onde $[K_e]$ representa a matriz de rigidez local do elemento de barra, que estabelece relações entre forças e deslocamentos definidos pelas coordenadas locais (MARTHA,1993), com a estrutura coincidindo com o eixo ortogonal centroidal, Figura 20.

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

O vetor $\{P_e\}$ é denominado elemento de barra e o vetor $\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix}$, representa o deslocamento nodal. A equação 57 pode ser reescrita como:

$$[K_e]\{u_e\} = \{P_e\} \quad (60)$$

2.10 O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é seguramente o processo que mais tem sido usado para a discretização de meios contínuos. A sua larga utilização se deve também ao fato de poder ser aplicado em problemas clássicos da mecânica estrutural elástico-linear.

As publicações de Argyris & Kelsey e de Turner, Clough, Martin & Topp marcaram o início dos estudos referente à discretização e de análise estrutural do contínuo, e lançaram os procedimentos resultantes na forma matricial. Em 1960, Clough deu o nome ao método desenvolvido de Elementos Finitos. O procedimento do Método dos Elementos Finitos consiste, inicialmente, em dividir o domínio da estrutura analisada em subdomínios ou elementos não superpostos, de dimensões finitas, denominados de elementos finitos, que são interligados por meio de pontos nodais em seu contorno.

2.12.1 Formulação Direta do Elemento de Barra: Matriz de Rigidez e Vetor de Carga

A representação do modelo de barras é feita a partir das hipóteses (Petyt, 1990):

- Uma das dimensões bem maior que as demais (barra): o problema 3D pode ser reduzido ao espaço 1D, desde que uma das dimensões (vão do elemento, L) seja suficientemente superior às dimensões (a,b) da seção transversal, ou seja, $L \gg a, b$;
- Seções transversais uniformes (barra prismática): A barra é prismática quando não existe variação de forma das seções ao longo do eixo da barra;
- Carregamentos estaticamente aplicados: o carregamento é aplicado de tal forma que os efeitos da energia cinética podem ser desprezados;
- Material homogêneo: qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo;
- Material Isótropo: implica em mesmas propriedades em todas as direções;
- Material elasto-linear: implica que em um ciclo de carga-descarga, não há surgimento de deformações residuais; esse material é linear, quando a relação tensão-deformação for linear;
- Supressão do efeito de Poisson: deformações transversais da seção desprezadas;
- Conservação da planicidade original das seções transversais durante o processo de deformação;
- Campos pequenos de deslocamentos e deformações.

Partindo-se da expressão da energia de deformação axial, tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P}{EA} (\frac{dU}{dx})^2 dx \tag{61}$$

Como σ_{xx} é constante na área e $dV=Adx$. Então, como u_{x1} e u_{x2} são independentes de x , pode-se escrever a equação da seguinte forma matricial:

$$U = \frac{1}{2} \{u_1 \ u_2\} \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{62}$$

Que integrando fornece:

$$U = \frac{1}{2} \{u_1 \ u_2\} \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{63}$$

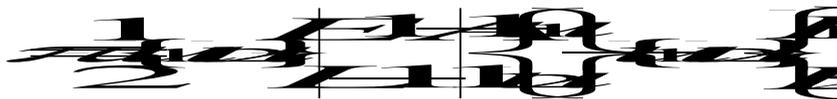
Como a barra em estudo está submetida apenas a forças discretas, e nenhuma força de corpo atua, a expressão do trabalho fica reduzida a:

$$W = - \sum_{i=1}^N P_i u_i \quad (64)$$



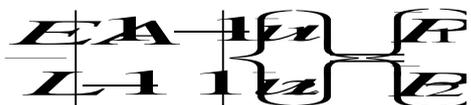
$$\quad (65)$$

Desta forma, o funcional de energia potencial total da barra é:



$$\quad (66)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, PTV, ou seja, aplicando a variação $U' + W' = 0$, vem:



$$\quad (67)$$

Obtendo-se, portanto a matriz de rigidez no sistema local de coordenadas:



$$\quad (68)$$

O vetor deslocamento no sistema local,

$$\{u\} = \{u \quad \bar{u}\} \quad (69)$$

E o vetor carga.

$$\{P\} = \{P \quad \bar{P}\} \quad (70)$$

Podendo escrever a equação resultante como:

$$\{P_e\} = [K_e] \{u\} \tag{71}$$

2.10.1 Matriz de Rigidez Global e Vetor de Carga

Depois de obtidas as equações para o elemento de barra, será verificado o problema da estrutura global, isto é, a barra tracionada, discretizada, da Figura 19. Para representar esta estrutura modelada por elementos de barra, necessita-se superpor os três elementos em série para ser feita a discretização. O processo de superposição de elementos finitos é direto e o meio de visualizá-lo é considerar os três elementos de barra separadamente, e então uni-los, Figura 22.

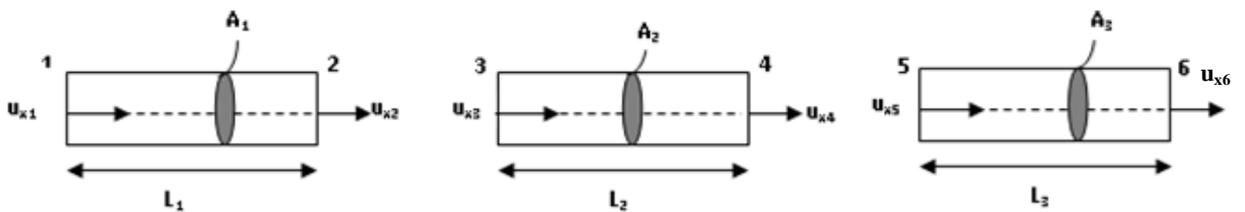


Figura 22 – Três elementos de barra usados na discretização da barra sob tração

As equações equivalentes à equação 71 para cada um dos elementos de barra são:

$$\begin{Bmatrix} EA \\ L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \end{Bmatrix} \tag{72}$$

$$\begin{Bmatrix} EA \\ L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \end{Bmatrix} \tag{73}$$

$$\begin{Bmatrix} EA \\ L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \end{Bmatrix} \tag{74}$$

Para superpor estas equações, cria-se uma matriz grande o suficiente para que cada elemento possa ser inserido nela. Como após a superposição $ux_3 = ux_2$ e $ux_4 = ux_5$, existirão apenas quatro deslocamentos nodais independentes. Então escreve-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}_{4 \times 1} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} ux_1 \\ ux_2 \\ ux_4 \\ ux_6 \end{array} \right\} \end{array} \quad (75)$$

Este é a fórmula lógica para a matriz que representa o sistema suposto. Usando esta formulação, temos para o primeiro elemento:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} ux_1 \\ ux_2 \\ ux_4 \\ ux_6 \end{array} \right\} \end{array} \quad (76)$$

Para o segundo elemento

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ R \\ R \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} ux_1 \\ ux_2 \\ ux_4 \\ ux_6 \end{array} \right\} \end{array} \quad (77)$$

E para o terceiro elemento

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ R \\ R \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} ux_1 \\ ux_2 \\ ux_4 \\ ux_6 \end{array} \right\} \end{array} \quad (78)$$

Realizando a soma das equações 76, 77 e 78, obtém-se a equação representando os três elementos superpostos, ou seja, a equação de elementos finitos para a barra sob tração modelada por três elementos de barra, isto é,

$$\{P_G\} = [K_G] \{u_G\} \quad (79)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} P \\ P_2 + P_3 \\ P_4 + P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (80)$$

A matriz obtida

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (81)$$

É denominada matriz de rigidez global $[K_G]$ de uma estrutura. O vetor $\{P_G\}$ é denominado vetor de carga da estrutura.

$$\{P_G\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 + P_3 \\ P_4 + P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad (82)$$

O vetor $\{u_G\}$ é o vetor global de deslocamentos nodais, ou vetor solução do problema.

$$\{u_G\} = \begin{Bmatrix} ux_1 \\ ux_2 \\ ux_4 \\ ux_6 \end{Bmatrix} \quad (83)$$

Para o caso particular em que a barra sob tração foi discretizada por elementos iguais, ou seja, com a mesma área de seção transversal, o mesmo comprimento e o mesmo material, a matriz de rigidez global pode ser escrita como:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

A matriz obtida é simétrica e apresenta valores não nulos apenas na diagonal principal e nas diagonais adjacentes a esta, caracterizando o que se chama de matriz banda.

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (85)$$

O sistema de equações acima não pode ser resolvido, pois a matriz de rigidez global é singular. Esta propriedade é comum a todas as matrizes globais obtidas pelo processo de superposição de matrizes de rigidez de elementos finitos. Fisicamente, a razão para tal é o fato de não se ter imposto ao modelo a sua vinculação, ou seja, é como se a barra sob tração estivesse livre no espaço. Portanto, é necessário impor condições de contorno sobre o sistema de equações para possibilitar a solução do mesmo.

2.10.2 Condições de Contorno

Levando em consideração a figura 18 da barra sob tração, foi obtido de maneira simultânea o sistema de equações 85. Se este sistema for escrito separadamente, resulta em:

$$\begin{aligned}
u_{x1} - u_{x2} &= 0 \\
-u_{x1} + 2u_{x2} - u_{x4} &= 0 \\
-u_{x2} + 2u_{x4} - u_{x6} &= 0 \\
-u_{x4} + u_{x6} &= \frac{PL}{EA}
\end{aligned} \tag{86}$$

Como a barra que está sob tração está engastada no seu extremo esquerdo, o deslocamento do nó 1 deve ser zero.

$$u_{x1} = 0 \tag{87}$$

Sendo assim, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
u_{x1} &= 0 \\
-0 + 2u_{x2} - u_{x4} &= 0 \\
-u_{x2} + 2u_{x4} - u_{x6} &= 0 \\
-u_{x4} + u_{x6} &= \frac{PL}{EA}
\end{aligned} \tag{88}$$

Se $u_{x1} \neq 0$, a forma matricial seria

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x4} \\ u_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \tag{89}$$

2.10.3 Transformação de Coordenadas

Quando o elemento de barra não coincide com o sistema ortogonal de coordenadas, Figura 23, sendo necessário realizar uma transformação de coordenadas como será descrito a seguir.

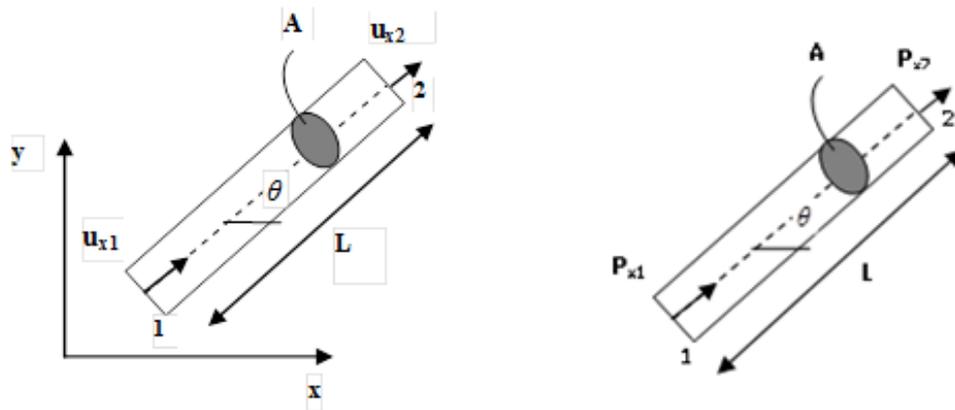


Figura 23 – Elemento de barra inclinação em relação ao sistema x-y

A coordenada ao longo do eixo centroidal do elemento de barra é s e que o deslocamento ao longo do elemento de barra é dado por u_s , sendo u_{s1} e u_{s2} os deslocamentos nodais. θ é o ângulo entre o eixo s e o eixo x . A relação entre o deslocamento u_s ao longo do elemento e suas componentes u_x e u_y nas direções x e y , respectivamente, é

$$u_s = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \tag{90}$$

Uma força axial F pode ser decomposta em componentes x e y como:

$$P_x = P \cos \theta \tag{91}$$

$$P_y = P \sin \theta \tag{92}$$

Pode-se então escrever as relações entre os deslocamentos nodais e suas componentes nas direções x e y como:

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s1} \\ u_{s2} \end{Bmatrix} \tag{93}$$

Entre as forças nodais e suas componentes nas direções x e y temos:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ R \\ R \\ R \end{Bmatrix} \quad (94)$$

Introduzindo as equações 92 e 93 na equação correspondente à equação do elemento de barra da figura 20, agora reescrita em termos de us_1 e us_2 (FONSECA, 2002), ou seja:

$$\begin{bmatrix} EA & -1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Como a submatriz de rotação $[R]$ é ortogonal, a sua transposta também o é. Este fato pode ser visto multiplicando $[RT]$ pela sua transposta, como se segue.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Após as multiplicações, obtemos a matriz de rigidez no sistema global:

$$\begin{bmatrix} EA \cos^2\theta & EA \sin\theta \cos\theta & 0 & 0 \\ EA \sin\theta \cos\theta & EA \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA \cos^2\theta & EA \sin\theta \cos\theta \\ 0 & 0 & EA \sin\theta \cos\theta & EA \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \\ F \\ E \end{Bmatrix} \quad (97)$$

A equação acima representa a forma generalizada do elemento de barra em relação a um sistema de coordenadas $x-y$ que esteja deslocada em seu eixo centroidal, o qual está inclinado em relação ao eixo x de um ângulo θ .

2.11 Métodos computacionais para análise das estruturas

O avanço computacional viabilizou a aplicação de procedimentos sofisticados que consideram a interação entre os diversos elementos componentes da estrutura, como também,

o comportamento específico de cada material. Estas considerações possibilitaram aproximações mais exatas do comportamento real da estrutura.

Nas últimas décadas, este avanço possibilitou o desenvolvimento de programas computacionais para análise de estruturas. Diversos programas comerciais foram desenvolvidos e, mais recentemente, programas de pré e pós-processadores para geração automática de malhas e representação gráfica dos resultados, vêm sendo incorporados.

Dada a ampla disponibilidade de computadores e programas comerciais, o MEF se popularizou com eficientes ferramentas de pré e de pós-processamento, o que facilitou o seu uso em modelos com grande número de graus de liberdade. Atualmente, o MEF está consolidado, tem suas bases matemáticas perfeitamente esclarecidas e é rotineiramente utilizado nos mais diversos programas de engenharia, sendo alguns dos principais: *ANSYS*, *SAP*, *ABAQUS*, *ADINA* e *NASTRAN*, entre outros.

2.11.1 Programa ANSYS

ANSYS é um software comercial de análise de elementos finitos com a capacidade de analisar uma grande variedade de problemas diferente que funciona como pré, processador e pós-processador. Como qualquer software de elementos finitos, este software resolve equações diferenciais regentes quebrando o problema em pequenos elementos. As equações de elasticidade, o fluxo de fluidos, transferência de calor, e eletromagnetismo são exemplos de casos da engenharia que podem ser resolvidas pelo método de elementos finitos no ANSYS, que também pode resolver problemas transientes, assim como problemas não lineares. Para este trabalho, o já consagrado software ANSYS, será usado como referência para verificar a validade dos resultados obtidos por meio do programa TRL2D, que analisará diversos problemas axiais, informando ao fim campos de esforços e deslocamentos. Em seguida o mesmo problema será analisado no ANSYS, partindo-se de um arquivo (COMMAND FILE) gerado automaticamente pelo TRL2D usando-se para discretização do problema o elemento LINK1.

2.12 A Linguagem C

A linguagem C foi criada por Dennis Ritchie, em 1972, no centro de Pesquisas da Bell Laboratories. Sua primeira utilização importante foi a reescrita do Sistema Operacional UNIX, que até então era escrito em assembly. Sendo uma linguagem de propósito geral, adequada à programação estruturada. No entanto é mais utilizada escrever compiladores, analisadores léxicos, bancos de dados, editores de texto, etc. A linguagem C pertence a uma família de linguagens cujas características são: portabilidade, modularidade, compilação separada, recursos de baixo nível, geração de código eficiente, confiabilidade, regularidade, simplicidade e facilidade de uso (FONSECA). A geração do programa executável a partir do programa fonte obedece a uma seqüência de operações antes de tornar-se um executável. Depois de escrever o módulo fonte em um editor de textos, o programador aciona o compilador que no UNIX é chamado pelo comando cc. Essa ação desencadeia uma seqüência de etapas, cada qual traduzindo a codificação do usuário para uma forma de linguagem de nível inferior, que termina com o executável criado pelo lincador (FONSECA), vide Figura 24.

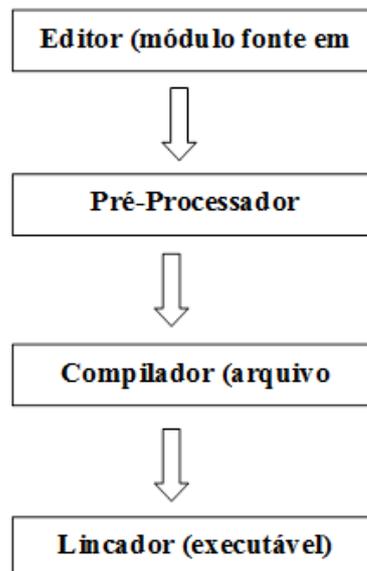


Figura 24 – Sequência de operações

Entre as principais características do C, podemos citar:

- O C é uma linguagem de alto nível com uma sintaxe bastante estruturada e flexível tornando sua programação bastante simplificada.
- Programas em C são compilados, gerando programas executáveis.
- O C compartilha recursos tanto de alto quanto de baixo nível, pois permite acesso e programação direta do microprocessador. Com isto, rotinas cuja dependência do tempo é crítica, podem ser facilmente implementadas usando instruções em Assembly.
- O C é uma linguagem estruturalmente simples e de grande portabilidade. O compilador C gera códigos mais enxutos e velozes do que muitas outras linguagens.
- Embora estruturalmente simples (poucas funções intrínsecas) o C não perde funcionalidade pois permite a inclusão de uma farta quantidade de rotinas do usuário. Os fabricantes de compiladores fornecem uma ampla variedade de rotinas pré-compiladas em bibliotecas.

2.12.1 Diretivas de compilação

Em C, existem comandos que são processados durante a compilação do programa. Estes comandos são genericamente chamados de diretivas de compilação. Estes comandos informam ao compilador do C basicamente quais são as constantes simbólicas usadas no programa e quais bibliotecas devem ser anexadas ao programa executável. A diretiva `#include` diz ao compilador para incluir na compilação do programa outros arquivos. Geralmente estes arquivos contêm bibliotecas de funções ou rotinas do usuário.

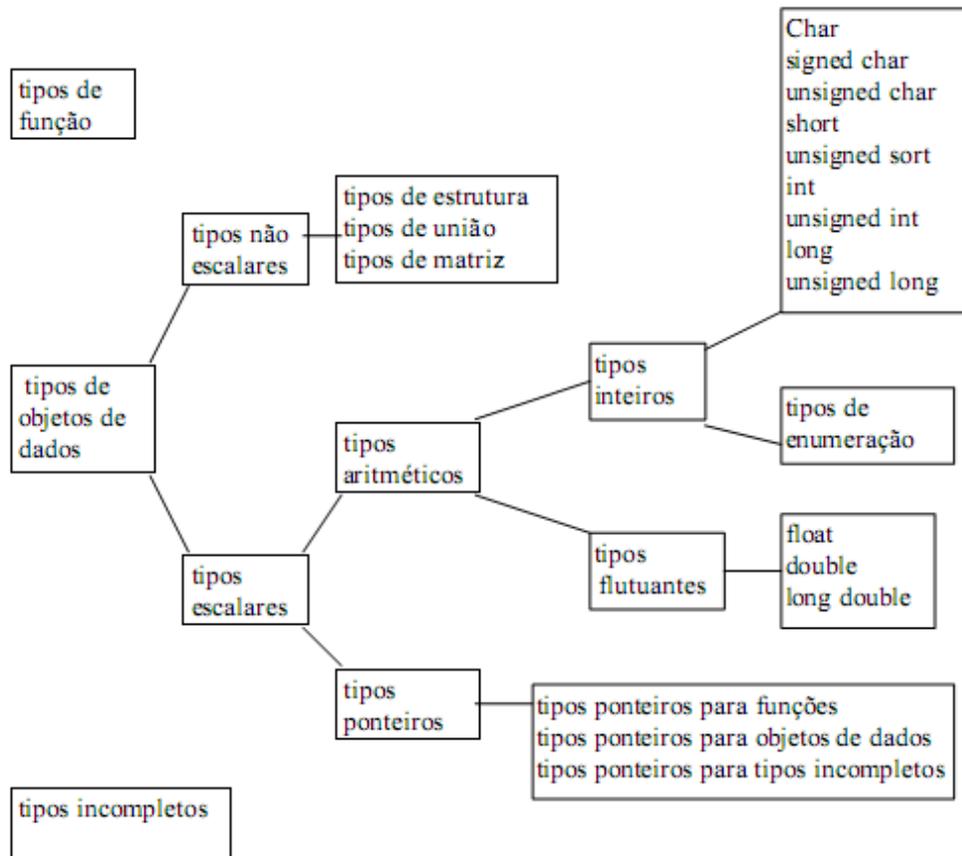


Figura 25 – Sub-rotina de um programa em C

2.12.2 Entrada e saída de dados

Em C existem varias maneiras de fazer a leitura e escrita de informações, que são as operações de entrada e saída. As funções de entrada e saída podem ser por via teclado e tela. Os mais utilizados para a escrita e leitura de dados em arquivos são *fprintf* e *fscanf*.

2.13 O Compilador *CodeBlocks*

O *Code::Blocks* é um IDE (ambiente de desenvolvimento integrado) que permite a escrita do código, edição, compilação e correção de erros e depuração integradas numa única aplicação. Os vários arquivos de código com extensão .c e .h formam uma aplicação

agrupados em um projeto. O código fonte do programa TRL2D foi compilado no *CodeBlocks*, gerando um arquivo executável.

3 METODOLOGIA

O programa de análise desenvolvido através do método dos elementos finitos é dividido convenientemente em várias fases, utilizando todos os dados pertencentes à estruturas, tais como: números de membros e de nós, números de grau de liberdade e as propriedades elásticas do material. Estas etapas serão brevemente discutidas a seguir.

3.1 Sequência a ser guiada

- *Reunião dos dados da estrutura:* etapa que são inseridas todas as informações pertencentes à estrutura. Estas informações incluem o número dos membros, número de nós, número de graus de liberdade e as propriedades elásticas do material. As localizações dos nós da estrutura são da estrutura são especificadas por meio de coordenadas geométricas. Devem-se dar as propriedades das seções de cada membro da estrutura. Finalmente, devem ser identificadas as condições de restrição nos apoios.
- *Geração e inversão da matriz de rigidez:* A matriz de rigidez é uma propriedade inerente à estrutura e está baseada unicamente nos dados dela. Num programa de computação é conveniente obter a matriz de rigidez de nó, somando as contribuições das matrizes de rigidezes de membros individuais.
- *Reunião dos dados de carga:* Todas as cargas que atuam em uma estrutura devem ser dadas tanto em cargas nodais, como as cargas nos membros. As cargas nodais são manejadas diretamente, mas as cargas nos membros podem ser manejadas indiretamente, fornecendo como dados às ações de engastamento causadas pelas cargas nos membros.

- *Geração de vetores associados com cargas.* Essas ações podem-se converter em cargas nodais equivalentes que são somadas às cargas nodais reais para produzir um problema no qual a estrutura está virtualmente carregada apenas nos nós.
- *Cálculo de resultados.* Esta é a etapa final, cujos deslocamentos nodais, as reações e as ações de extremidade do membro são calculados. Estes cálculos são executados a cada membro separadamente através de suas respectivas matrizes de rigidezes.

3.2 Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise de problemas Axiais Planos

Ao desenvolver uma ferramenta computacional, deve-se inicialmente, elaborar um roteiro com os passos a serem seguidos, ou seja, um algoritmo. Irá ser mostrado o desenvolvimento de uma ferramenta que, em um arquivo de entrada, o usuário informa todos os dados da estrutura. A sub rotina ao abrir este arquivo irá compilar todos os dados e gerar resultados dos deslocamentos e dos esforços nodais. Segue abaixo o fluxograma do algoritmo desenvolvido para a análise de treliças planas.

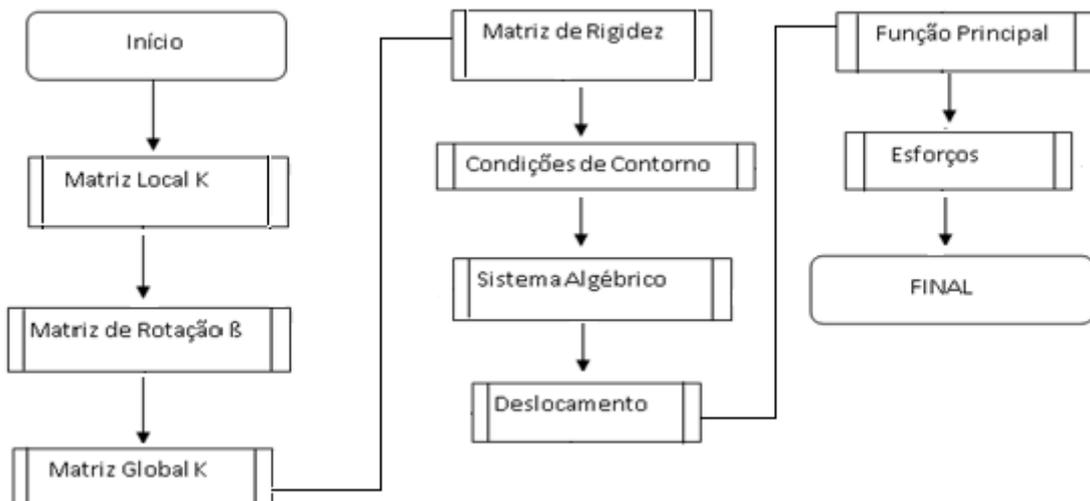


Figura 26 – Esquema da ferramenta computacional TRL2D

3.3 Programação do aplicativo TRL2D (Análise de Treliças 2D)

Após as declarações das variáveis globais, é dado início ao cálculo das matrizes que irão ser utilizadas no algoritmo. Serão mostrados trechos da rotina que programou o aplicativo TRL2D, tendo seus principais trechos demonstrados na sequência. A sub-rotina abaixo mostra como é determinado os elementos da matriz local K, sendo calculados os comprimentos e o termo da rigidez axial EA/L .

Tabela 1- Matriz de Rigidez Local

```
// Matriz K e Local//
void MatrizKeLocal(int NumBarra)
{
    int il, j1, Noi, Noj;
    double RigidezAxial, Comprimento;
    Noi = Barras[NumBarra].NoInicial;
    Noj = Barras[NumBarra].NoFinal;

    Comprimento = sqrt (pow((Nos[Noj].Cx - Nos[Noi].Cx),2) + pow((Nos[Noj].Cy - Nos[Noi].Cy),2)
    );

    RigidezAxial = (Barras[NumBarra].ModuloElasticidade * Barras[NumBarra].AreaSecao)/Comprimento;

    //zera a matrizKE
    for(il=0;il<=3;il++)
    {
        for(j1=0;j1<=3;j1++)
        {
            MatrizKE[il][j1] = 0.00F;
        }

        MatrizKE[0][0] = RigidezAxial;
        MatrizKE[0][2] = -RigidezAxial;
        MatrizKE[2][0] = MatrizKE[0][2];
        MatrizKE[2][2] = MatrizKE[0][0];
    }
}
```

A matriz apresentada acima é a matriz de rigidez axial do elemento no sistema local, mas como bem se sabe, o sistema mais geral o qual se pode adotar é o sistema global, para isso o sistema de referência local deverá ser rotacionado com o auxílio dos cossenos diretores, presentes na matriz RE .

Tabela 2- Matriz de Rotação Beta

```

//Matriz Beta//
void MatrizBeta(int NumBarra)
{
    int ib, jb, Noi, Noj;
    double Comprimento, CossenoDirX, CossenoDirY;
    Noi = Barras[NumBarra].NoInicial;
    Noj = Barras[NumBarra].NoFinal;
    Comprimento = sqrt (pow((Nos[Noj].Cx - Nos[Noi].Cx),2) + pow((Nos[Noj].Cy - Nos[Noi].Cy),
));
    CossenoDirX = (Nos[Noj].Cx - Nos[Noi].Cx)/Comprimento;
    CossenoDirY = (Nos[Noj].Cy - Nos[Noi].Cy)/Comprimento;

    //zera a matrizRE, matrizRET
    for(ib=0;ib<=3;ib++)
    {
        for(jb=0;jb<=3;jb++)
        {
            MatrizRE[ib][jb] = 0.00f;
            MatrizRET[ib][jb] = 0.00f;
        }

        MatrizRE[0][0] = CossenoDirX;
        MatrizRE[0][1] = CossenoDirY;
        MatrizRE[1][0] = -MatrizRE[0][1];
        MatrizRE[1][1] = MatrizRE[0][0];

        for (ib=0; ib<=1; ib++)
        {
            for (jb=0; jb<=1; jb++)
            {
                MatrizRE[ib+2][jb+2] = MatrizRE[ib][jb];
            }
        }
    }
}

```

Com a matriz de rotação *RE*, obtem-se a matriz de rotação transposta *RET*. Sendo uma matriz ortogonal, a matriz transposta também é inversa, isso será importante considerar para dar prosseguimento ao cálculo da matriz de rigidez global.

Tabela 3- Matriz de Rotação Transposta

```

//monta a transposta da matrizRE
for(ib=0;ib<=3;ib++)
{
    for(jb=0;jb<=3;jb++)
    {
        MatrizRET[jb][ib] = MatrizRE[ib][jb];
    }
}

```

Com o código abaixo é possível calcular a matriz de rigidez global de cada elemento de qualquer estrutura plana.

Tabela 4- Matriz de Rigidez Global

```

//Matriz K e Global//

void MatrizKeGlobal (int NumBarra)
{
    double MatrizRET_KE[4][4];
    int ig, jg, kg;
    MatrizRota (NumBarra);
    MatrizKeLocal (NumBarra);

    //zera a MatrizKG, MatrizRET_KE, MatrizRET
    for (ig=0; ig<=3; ig++)
    {
        for (jg=0; jg<=3; jg++)
        {
            MatrizKG[ig][jg] = 0.00f;
            MatrizRET_KE[ig][jg] = 0.00f;
        }
    }
}

```

Para o cálculo da matriz de rigidez global foram multiplicadas as matrizes locais *KE*, pelas de rotação *RE* e *RET*, resultando na equação abaixo.

Tabela 5- Matriz de Rotação

```

// Multiplicando MatrizRE transp * MatrizKE
for (ig=0; ig<=3; ig++) {
    for (jg=0; jg<=3; jg++) {
        for (kg=0; kg<=3; kg++) {
            MatrizRET_KE[ig][kg] += MatrizRET[ig][jg] * MatrizKE[jg][kg];
        }
    }
}

// Multiplicando MatrizRET*KE * MatrizRE = MatrizKG
for (ig=0; ig<=3; ig++)
{
    for (jg=0; jg<=3; jg++)
    {
        for (kg=0; kg<=3; kg++)
        {
            MatrizKG[ig][kg] += MatrizRET_KE[ig][jg] * MatrizRE[jg][kg];
        }
    }
}

```

Após a determinação da matriz de rigidez global, poderemos montar a matriz de rigidez da estrutura usando o princípio da superposição de matrizes. Este trecho que foi mostrado demonstra a cálculo da matriz da estrutura. Quando são justapostas as matrizes de cada barra, uma única matriz é formada, representando toda a estrutura em análise. A

resolução dos vetores e das forças nodais do sistema obtido será determinada através da utilização do Método de Gauss.

3.4 Métodos de resolução de sistemas de equações

Os métodos de resolução do sistema de equações algébricas lineares podem ser classificados em iterativos ou diretos. Nos métodos iterativos, arbitra-se uma “solução tentativa” (SORIANO), para chegar-se à solução procurada por meio de sucessivas aproximações. Nos métodos diretos, utilizam-se algoritmos que fornecem diretamente a solução procurada, mostrando-se na maioria das aplicações ser o método que apresenta maior eficiência, pois usa-se menos equações do que o método iterativo. Visando isso, neste trabalho será usado o Método Direto de Eliminação de Gauss para a resolução dos sistemas lineares que irá determinar os valores das variáveis de interesse.

3.4.1 Método de Eliminação de Gauss

Este é o método de resolução de sistemas de equações algébricas lineares mais utilizados em procedimento manual de cálculo e o que requer o menor número de operações aritméticas (SORIANO). Possui aplicação em qualquer sistema cuja matriz de coeficientes seja quadrada e não singular.

A equação de elementos finitos possui a fórmula genérica como foi visto na equação 78.

$$\{P\} = [K] \{U\} \quad (78)$$

Sendo um sistema de equações lineares, escrito como:

$$a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, N \quad (98)$$

Na forma expandida, o sistema de equações é:

$$\begin{aligned}
a_{11(1)}x_1 + a_{12(1)}x_2 + a_{13(1)}x_3 + \dots + a_{1N(1)}x_N &= b_{1(1)} \\
a_{21(1)}x_1 + a_{22(1)}x_2 + a_{23(1)}x_3 + \dots + a_{2N(1)}x_N &= b_{2(1)} \\
a_{31(1)}x_1 + a_{32(1)}x_2 + a_{33(1)}x_3 + \dots + a_{3N(1)}x_N &= b_{3(1)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{N1(1)}x_1 + a_{N2(1)}x_2 + a_{N3(1)}x_3 + \dots + a_{NN(1)}x_N &= b_{N(1)}
\end{aligned} \tag{99}$$

E na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11(1)} & a_{12(1)} & a_{13(1)} & \dots & a_{1N(1)} \\ a_{21(1)} & a_{22(1)} & a_{23(1)} & \dots & a_{2N(1)} \\ a_{31(1)} & a_{32(1)} & a_{33(1)} & \dots & a_{3N(1)} \\ \vdots & & & & \\ a_{N1(1)} & a_{N2(1)} & a_{N3(1)} & \dots & a_{NN(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1(1)} \\ b_{2(1)} \\ b_{3(1)} \\ \vdots \\ b_{N(1)} \end{pmatrix} \tag{100}$$

O método de eliminação de Gauss padrão é dividido em duas partes, a eliminação progressiva e a retro-substituição. Inicialmente temos que eliminar os termos $a_{21}x_1 + a_{31}x_1 + \dots + a_{N1}x_1$ do sistema de equações 98. Sendo assim temos que determinar o pivô, equação 100.

$$p_n = \frac{a_{n1(1)}}{a_{11(1)}} \tag{101}$$

$$\tag{102}$$

$$\begin{aligned}
a_{11(1)}x_1 + a_{12(1)}x_2 + a_{13(1)}x_3 + \dots + a_{1N(1)}x_N &= b_{1(1)} \\
(a_{21(1)} - p_2a_{11(1)})x_1 + (a_{22(1)} - p_2a_{12(1)})x_2 + \dots + (a_{2N(1)} - p_2a_{1N(1)})x_N &= b_{2(1)} - p_2b_{1(1)} \\
(a_{31(1)} - p_3a_{11(1)})x_1 + (a_{32(1)} - p_3a_{12(1)})x_2 + \dots + (a_{3N(1)} - p_3a_{1N(1)})x_N &= b_{3(1)} - p_3b_{1(1)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
(a_{N1(1)} - p_Na_{11(1)})x_1 + (a_{N2(1)} - p_Na_{12(1)})x_2 + \dots + (a_{NN(1)} - p_Na_{1N(1)})x_N &= b_{N(1)} - p_Nb_{1(1)}
\end{aligned}$$

Denotando os coeficientes das novas equações por $a_{ij(2)}$ onde

$$b_{2(2)} = b_{2(1)} - p_2b_{1(1)} : b_{3(2)} = b_{3(1)} - p_3b_{1(1)} \tag{103}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 a_{11(1)}x_1 + a_{12(1)}x_2 + a_{13(1)}x_3 + \dots + a_{1N(1)}x_N &= b_{1(1)} \\
 a_{22(2)}x_2 + a_{23(2)}x_3 + \dots + a_{2N(2)}x_N &= b_{2(2)} \\
 a_{32(2)}x_2 + a_{33(2)}x_3 + \dots + a_{3N(2)}x_N &= b_{3(2)} \\
 \vdots & \\
 \vdots & \\
 \vdots & \\
 a_{N2(2)}x_2 + a_{N3(2)}x_3 + \dots + a_{NN(2)}x_N &= b_{N(2)}
 \end{aligned} \tag{104}$$

O segundo passo é eliminar os termos $a_{32(2)}x_2, a_{42(2)}x_2, \dots, a_{N2(2)}x_2$. Usando a segunda equação:

$$\begin{aligned}
 a_{11(1)}x_1 + a_{12(1)}x_2 + a_{13(1)}x_3 + \dots + a_{1N(1)}x_N &= b_{1(1)} \\
 a_{22(2)}x_2 + a_{23(2)}x_3 + \dots + a_{2N(2)}x_N &= b_{2(2)} \\
 a_{32(2)}x_2 + a_{33(2)}x_3 + \dots + a_{3N(2)}x_N &= b_{3(2)} \\
 \vdots & \\
 \vdots & \\
 \vdots &
 \end{aligned} \tag{105}$$

Finalmente, ao se terminar (N-1) passos do processo da eliminação progressiva, portanto:

$$\begin{aligned}
 a_{11(1)}x_1 + a_{12(1)}x_2 + a_{13(1)}x_3 + \dots + a_{1N(1)}x_N &= b_{1(1)} \\
 a_{22(2)}x_2 + a_{23(2)}x_3 + \dots + a_{2N(2)}x_N &= b_{2(2)} \\
 a_{33(2)}x_3 + \dots + a_{3N(2)}x_N &= b_{3(2)} \\
 \vdots & \\
 \vdots & \\
 \vdots & \\
 a_{NN(N)}x_N &= b_{N(N)}
 \end{aligned} \tag{106}$$

Cada um dos passos acima apresenta um sistema de equações com a mesma solução, a qual pode ser obtida diretamente a partir da última equação, caracterizando o processo de retro-substituição, que começa com:

$$x_N = \frac{b_{N(N)}}{a_{NN(N)}} \quad (107)$$

E a solução para $N-1$ pode ser obtida da equação (N-1), ou seja:

$$x_{N-1} = \frac{b_{N-1(N-1)}}{a_{(N-1)N-1(N-1)}} - \frac{a_{N-1, N(N-1)}}{a_{(N-1)N-1(N-1)}} x_N \quad (108)$$

Ou qualquer valor de x_k pode ser obtido através da expressão genérica:

$$x_k = \frac{b_{k(k)}}{a_{kk(k)}} - \sum_{j=k+1}^N \frac{a_{kj(k)}}{a_{kk(k)}} x_j \quad (109)$$

A implementação computacional do algoritmo da solução de Gauss pode ser visualizada na tabela 6, são obtidos após a sua aplicação os campos de deslocamentos das barras axialmente carregadas.

Tabela 6- Solução do sistema linear

```

void ResolveSistemaAlgebrico()
{
    double m, s;
    int i, j, k;

    //escalonamento da matriz A (MatrizDeRigidezDaEstrutura)
    //montagem da matriz triangular
    for (k=0;k<=9;k++)
    {
        for (i=k+1;i<=9;i++)
        {
            m = MatrizDeRigidezDaEstrutura[i][k]/MatrizDeRigidezDaEstrutura[k][k];
            MatrizDeRigidezDaEstrutura[i][k] = 0;
            for (j=k+1;j<=9;j++)
            {
                MatrizDeRigidezDaEstrutura[i][j] = MatrizDeRigidezDaEstrutura[i][j] - (m * MatrizDeRigidezDaEstrutura[k][j]);
            }
            VetorForcaNodal[i] = VetorForcaNodal[i] - (m * VetorForcaNodal[k]);
        }
    }

    //solucao do sistema linear
    //montagem da matriz X (VetorDeslocamentos)
    VetorDeslocamentoNodal[9] = VetorForcaNodal[9]/MatrizDeRigidezDaEstrutura[9][9];
    for (k=10-2;k>=0;k--)
    {
        s = 0;
        for (j=k+1;j<=9;j++)
        {
            s = s + MatrizDeRigidezDaEstrutura[k][j] * VetorDeslocamentoNodal[j];
        }
        VetorDeslocamentoNodal[k] = (VetorForcaNodal[k] - s)/MatrizDeRigidezDaEstrutura[k][k];
    }
}

```

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão discutidos os resultados das estruturas planas que foram compilados com a ferramenta TRL2D, aonde mostra os resultados dos deslocamentos nodais de cada elemento de barra da estrutura em análise. O sistema de numeração adotado, tanto dos nós como das barras, foi no sentido horário e de cima pra baixo da estrutura.

Exemplo 01 - Treliça plana biapoada nas extremidades, com uma força de 50kN aplicada na extremidade livre. Determinar os deslocamentos e esforços nodais.

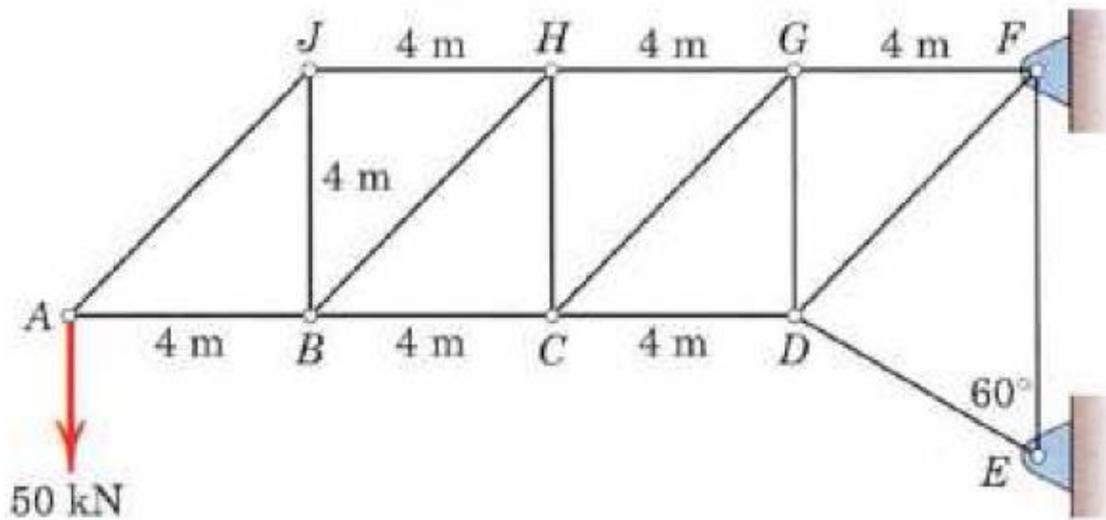


Figura 27 – Treliça 01

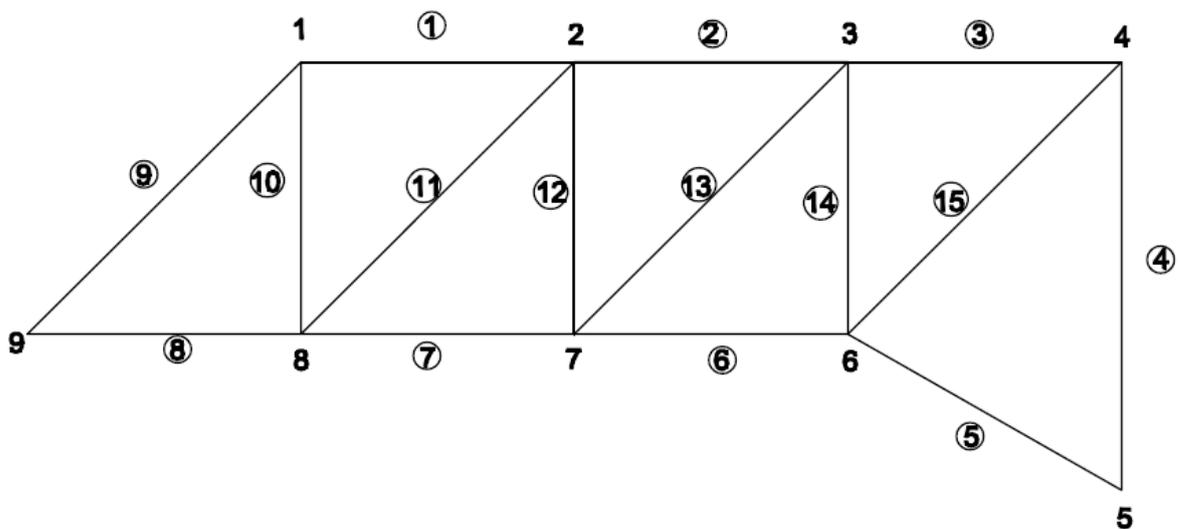


Figura 28 – Treliça 01 enumerada

Tabela 7- Dados de entrada da treliça 1

Barra	Nó I	Nó J	L	E	A
1	1	2	4.0	1000	0.5
2	2	3	4.0	1000	0.5
3	3	4	4.0	1000	0.5
4	4	5	4.61	1000	0.5
5	5	6	6.3	1000	0.5
6	6	7	4.0	1000	0.5
7	7	8	4.0	1000	0.5
8	8	9	4.0	1000	0.5
9	1	9	5.65	1000	0.5
10	1	8	4.0	1000	0.5
11	2	8	5.65	1000	0.5
12	2	7	4.0	1000	0.5
13	3	7	5.65	1000	0.5
14	3	6	4.0	1000	0.5
15	4	6	5.65	1000	0.5

Arquivo de entrada por meio de arquivo txt, aonde o usuário insere os dados iniciais da treliça, tais como: coordenadas dos nós, área da seção transversal, módulo de elasticidade, número de nós e de barras. tabela 8.

Tabela 8- Arquivo de entrada treliça 01

```

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
// numero de nos
[numeronos]
9
// numero de elementos
[numeroelementos]
15
// num nó, cx, cy
[coordenadas]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 4.0000E+00 0.0000E+00
3 8.0000E+00 0.0000E+00
4 1.2000E+01 0.0000E+00
5 1.6000E+01 -2.3000E+00
6 1.6000E+01 4.0000E+00
7 1.2000E+01 4.0000E+00
8 8.0000E+00 4.0000E+00
9 4.0000E+00 4.0000E+00
// num nó, fx, fy
[carregamentosnodais]
1 0.0000E+01 -5.0000E+01
2 0.0000E+00 0.0000E+00
3 0.0000E+00 0.0000E+00
4 0.0000E+00 0.0000E+00
5 0.0000E+00 0.0000E+00
6 0.0000E+00 0.0000E+00
7 0.0000E+00 0.0000E+00
8 0.0000E+00 0.0000E+00
9 0.0000E+00 0.0000E+00
// num nó, px, py
[prescricao]
1 0 0
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 1 1
6 1 1
7 0 0
8 0 0
9 0 0
// num barra, no inicio, no fim, area, modE
[elementos]
1 1 2 5E-01 1.0000E+03
2 2 3 5E-01 1.0000E+03
3 3 4 5E-01 1.0000E+03

```

Execução do programa TRL2D, onde o qual determina o cálculo das matrizes globais, de todos os elementos de barra. Pode-se perceber que o *Ansys* não demonstrada nenhum tipo de cálculo como estes abaixo, tabela 9.

Tabela 9- Execução do Programa TRL2D

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo02\Trelica.exe
=====
UFPE - Universidade Federal do Pernambuco
Centro Academico do Agreste - Nucleo de Tecnologia
=====
Analise de Problemas Axiais - Trelicas : Versao 1.0 - 2011
Arquivo de Entrada : TrelicaExemplo02.est
Dados Carregados=====
Numero de Nos: 9
Numero de Barras: 15
=====

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.250000e+002  0.000000e+000  -1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<2,J> -1.250000e+002  0.000000e+000  1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 2 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.250000e+002  0.000000e+000  -1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<2,J> -1.250000e+002  0.000000e+000  1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 3 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.250000e+002  0.000000e+000  -1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<2,J> -1.250000e+002  0.000000e+000  1.250000e+002  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

```

Após a montagem das matrizes globais, é formado um sistema linear de equações, que usando os recursos mostrados na tabela 06, é resolvido pelo sistema do Método de Gauss, tabela 10.

Tabela 10- Solução do sistema linear

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo02\Trelica.exe
Pressione uma tecla para continuar...
Matriz de rigidez da barra : 15 (Sistema Global)
Kg<0,J> 4.419417e+001    4.419417e+001    -4.419417e+001    -4.419417e+001
Kg<1,J> 4.419417e+001    4.419417e+001    -4.419417e+001    -4.419417e+001
Kg<2,J> -4.419417e+001   -4.419417e+001    4.419417e+001    4.419417e+001
Kg<3,J> -4.419417e+001   -4.419417e+001    4.419417e+001    4.419417e+001
Pressione uma tecla para continuar...
Vetor de Solucao do sistema algebrico
Dn<0,J> 3.580146e+000
Dn<1,J> -1.999391e+001
Dn<2,J> 3.180146e+000
Dn<3,J> -1.248239e+001
Dn<4,J> 2.380146e+000
Dn<5,J> -5.770873e+000
Dn<6,J> 1.180146e+000
Dn<7,J> -6.593562e-001
Dn<8,J> 0.000000e+000
Dn<9,J> 0.000000e+000
Dn<10,J> 0.000000e+000
Dn<11,J> 0.000000e+000
Dn<12,J> -1.200000e+000
Dn<13,J> -1.059356e+000
Dn<14,J> -2.000000e+000
Dn<15,J> -6.170873e+000
Dn<16,J> -2.400000e+000
Dn<17,J> -1.288239e+001
Pressione uma tecla para continuar...

```

São determinados os campos de deslocamentos nodais de cada elemento, tabela11.

Tabela 11- Campos de Deslocamentos

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo02\Trelica.exe

Pressione uma tecla para continuar...

Deslocamentos dos Nos (Sistema Global)

No	Dx	Dy
1	3.580146e+000	-1.999391e+001
2	3.180146e+000	-1.248239e+001
3	2.380146e+000	-5.770873e+000
4	1.180146e+000	-6.593562e-001
5	0.000000e+000	0.000000e+000
6	0.000000e+000	0.000000e+000
7	-1.200000e+000	-1.059356e+000
8	-2.000000e+000	-6.170873e+000
9	-2.400000e+000	-1.288239e+001

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 1 (Sistema Local)

Ke<0,J>	Ke<1,J>	Ke<2,J>	Ke<3,J>
1.250000e+002	0.000000e+000	-1.250000e+002	0.000000e+000
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
-1.250000e+002	0.000000e+000	1.250000e+002	0.000000e+000
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rotacao da barra : 1

Re<0,J>	Re<1,J>	Re<2,J>	Re<3,J>
1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
0.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Também são calculados os esforços nodais de boca barra através da matriz de estrutura que é demonstrado na tabela 06.

Tabela 12- Esforços em cada barra da estrutura				
Esforços da barra : 1 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	5.000000e+001	0.000000e+000	-5.000000e+001	0.000000e+000
Esforços da barra : 2 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.000000e+002	0.000000e+000	-1.000000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 3 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.500000e+002	0.000000e+000	-1.500000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 4 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.464796e+002	0.000000e+000	-1.464796e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 5 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 6 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.500000e+002	0.000000e+000	1.500000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 7 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.000000e+002	0.000000e+000	1.000000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 8 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-5.000000e+001	0.000000e+000	5.000000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 9 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-7.071068e+001	0.000000e+000	7.071068e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 10 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
5.000000e+001	0.000000e+000	-5.000000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 11 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-7.071068e+001	0.000000e+000	7.071068e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 12 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
5.000000e+001	0.000000e+000	-5.000000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 13 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-7.071068e+001	0.000000e+000	7.071068e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 13 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-7.071068e+001	0.000000e+000	7.071068e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 14 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
5.000000e+001	0.000000e+000	-5.000000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 15 (Sistema Local)

FxI	FyI	FxJ	FyJ
3.254936e+001	0.000000e+000	-3.254936e+001	0.000000e+000

A tabela 13 mostra os resultados que foram obtidos pelo o simulador *Ansys* da mesma estrutura em análise. Podemos perceber que os resultados são basicamente iguais, ou seja, a ferramenta desenvolvida TRL2D gera resultados tão confiáveis como o programa comercial que está no mercado há muito tempo.

Tabela 13- Resolução dada pelo Ansys

```

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

  NODE      UX      UY      UZ      USUM
    1      3.5801    -19.994    0.0000    20.312
    2      3.1801    -12.482    0.0000    12.881
    3      2.3801     -5.7709    0.0000     6.2424
    4      1.1801    -0.65936    0.0000     1.3518
    5      0.0000     0.0000    0.0000     0.0000
    6      0.0000     0.0000    0.0000     0.0000
    7     -1.2000    -1.0594    0.0000     1.6007
    8     -2.0000    -6.1709    0.0000     6.4869
    9     -2.4000    -12.882    0.0000    13.104

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          1          1          0          1
VALUE      3.5801    -19.994    0.0000    20.312
  
```

Estrutura deformada devido a ação da carga de 50kN aplicada na extremidade.

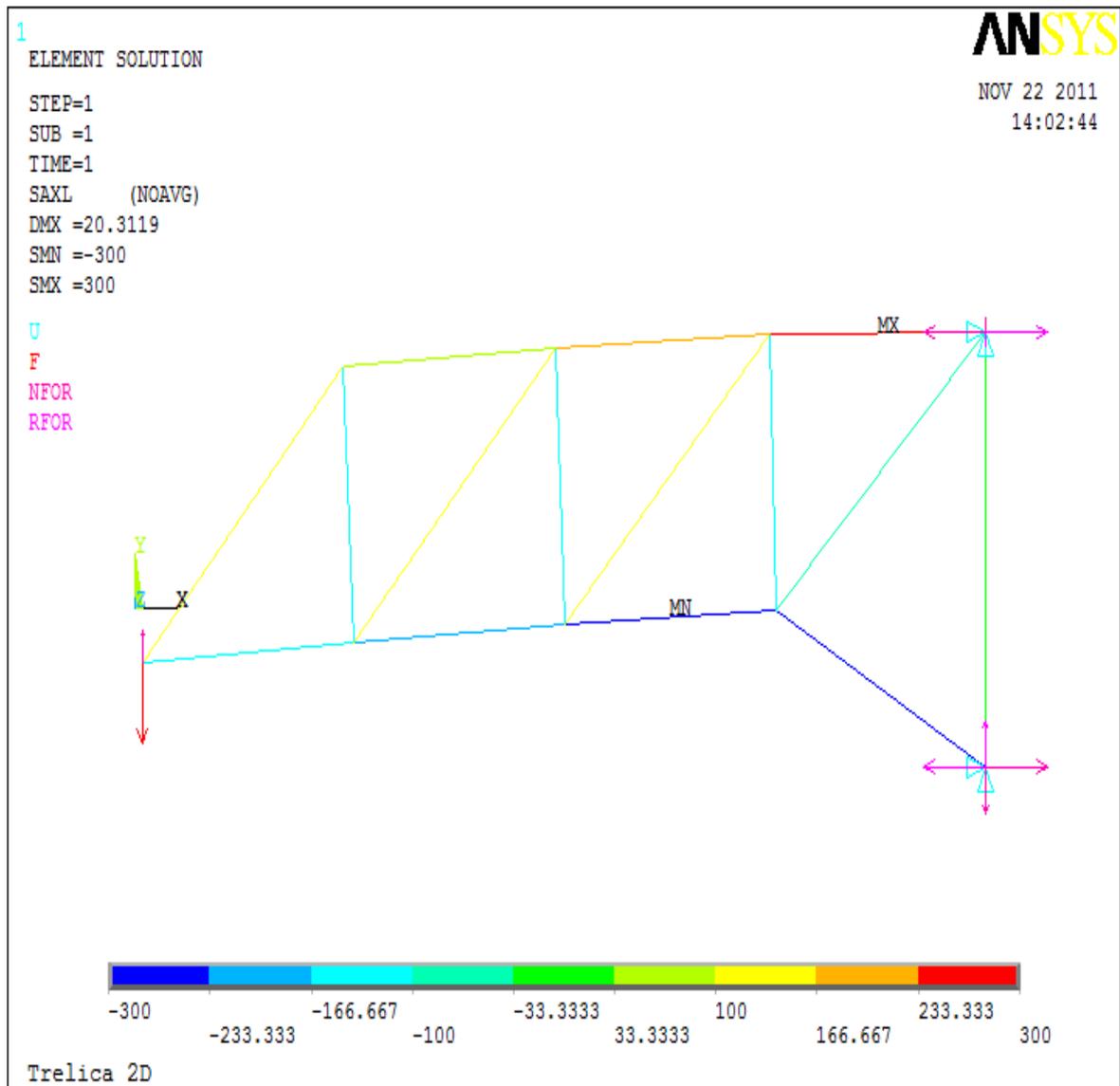


Figura 29 – Estrutura Deformada

Exemplo 02- Treliça plana biapoada nas extremidades, com uma força de intensidade L .
Calcular o deslocamento os esforços nos nós i e j .

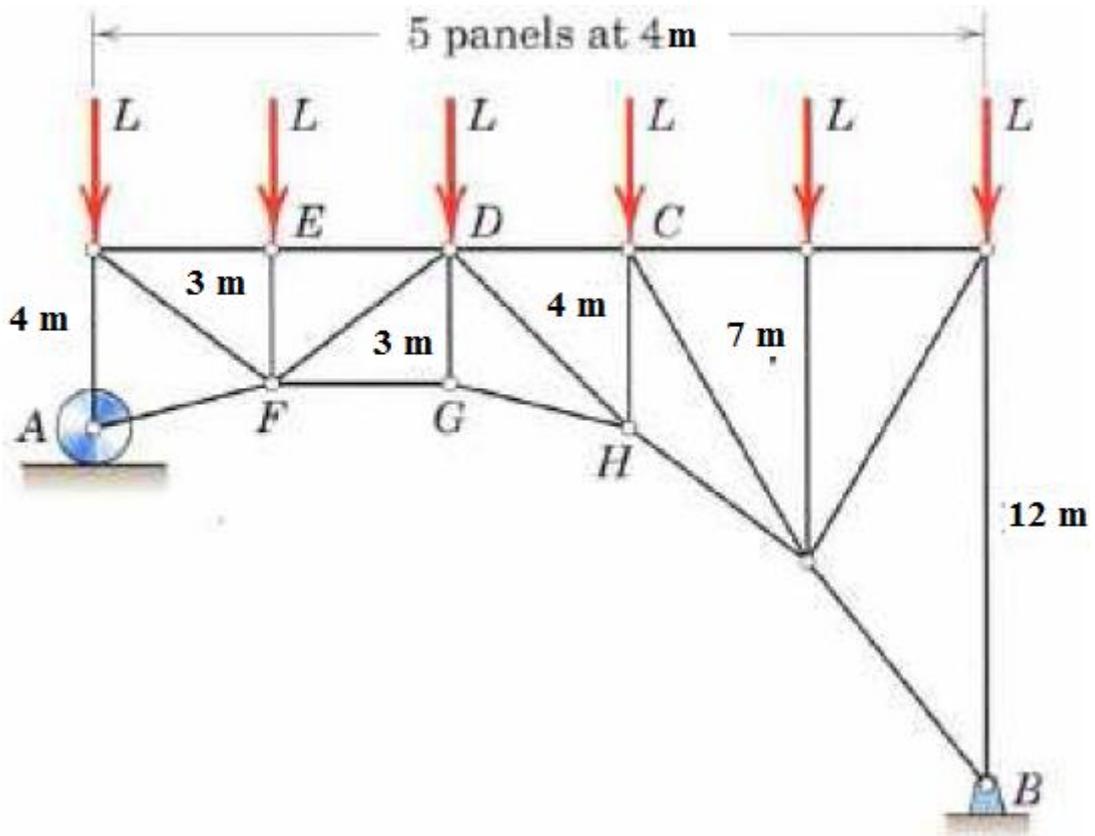


Figura 30 – Treliça 02

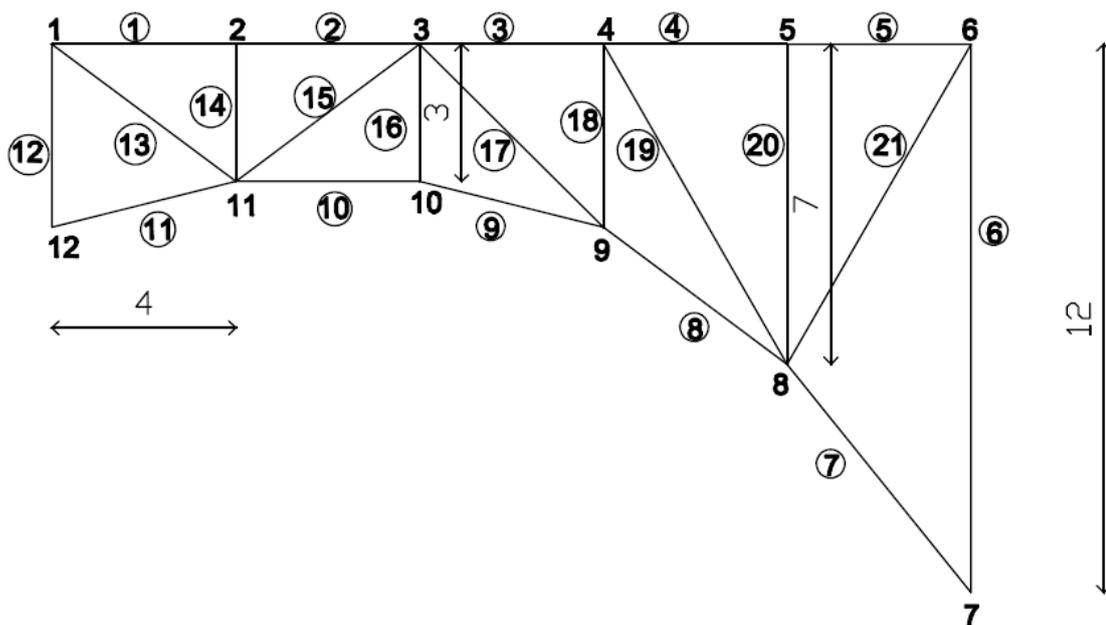


Figura 31 – Treliça 02 enumerada

Tabela 14- Dados de entrada da treliça do exemplo2

Barra	Nó I	Nó J	L	E	A
1	1	2	4.0	1000	0.5
2	2	3	4.0	1000	0.5
3	3	4	4.0	1000	0.5
4	4	5	4.0	1000	0.5
5	5	6	4.0	1000	0.5
6	6	7	12.0	1000	0.5
7	7	8	6.40	1000	0.5
8	8	9	5.0	1000	0.5
9	9	10	4.12	1000	0.5
10	10	11	4.0	1000	0.5
11	11	12	4.12	1000	0.5
12	1	11	4.0	1000	0.5
13	2	11	5.65	1000	0.5
14	3	11	4.0	1000	0.5
15	4	6	5.0	1000	0.5
16	3	10	3.0	1000	0.5
17	3	9	5.0	1000	0.5
18	4	9	4.0	1000	0.5
19	4	8	8.0	1000	0.5
20	5	8	7.0	1000	0.5
21	6	8	8.06	1000	0.5

A tabela 15 mostra o arquivo de entrada por meio de arquivo. Esta estrutura possui 12 nós e 21 elementos de barras.

Tabela 15- Arquivo de entrada da treliça 02

```

TrelicaExemplo03 - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
// numero de nos
[numeronos]
12
// numero de elementos
[numeroelementos]
21
// num nó, cx, cy
[coordenadas]
1 0.0000E+00 8.0000E+00
2 4.0000E+00 9.0000E+00
3 8.0000E+00 9.0000E+00
4 1.20E+01 8.0000E+00
5 1.60E+01 5.0000E+00
6 2.0000E+01 0.0000E+00
7 2.0000E+01 1.2000E+01
8 1.6000E+01 1.2000E+01
9 1.2000E+01 1.2000E+01
10 8.0000E+00 1.2000E+01
11 4.0000E+00 1.2000E+01
12 0.0000E+00 1.2000E+01
// num nó, fx, fy
[carregamentosnodais]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.0000E+00 0.0000E+00
3 0.0000E+00 0.0000E+00
4 0.0000E+00 0.0000E+00
5 0.0000E+00 0.0000E+00
6 0.0000E+00 0.0000E+00
7 0.0000E+00 -1.0000E+00
8 0.0000E+00 -1.0000E+00
9 0.0000E+00 -1.0000E+00
10 0.0000E+00 -1.0000E+00
11 0.0000E+00 -1.0000E+00
12 0.0000E+00 -1.0000E+00
// num nó, px, py
[prescricao]
1 0 1
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 0 0
6 1 1
7 0 0
8 0 0
9 0 0
10 0 0
11 0 0

```

Execução do programa TRL2D, onde o qual determina o cálculo das matrizes globais, de todos os elementos de barra, tabela 16.

Tabela 16- Execução do Programa TRL2D

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo03\Trelica.exe
=====
UFPE - Universidade Federal do Pernambuco
Centro Academico do Agreste - Nucleo de Tecnologia
=====
Analise de Problemas Axiais - Trelicas : Versao 1.0 - 2011
Arquivo de Entrada : TrelicaExemplo03.est
Dados Carregados=====
Numero de Nos: 12
Numero de Barras: 21
=====

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.141344e+002   2.853360e+001   -1.141344e+002   -2.853360e+001
Kg<1,J> 2.853360e+001   7.133401e+000   -2.853360e+001   -7.133401e+000
Kg<2,J> -1.141344e+002   -2.853360e+001   1.141344e+002   2.853360e+001
Kg<3,J> -2.853360e+001   -7.133401e+000   2.853360e+001   7.133401e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 2 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.250000e+002   0.000000e+000   -1.250000e+002   0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000   0.000000e+000   0.000000e+000   0.000000e+000
Kg<2,J> -1.250000e+002   0.000000e+000   1.250000e+002   0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000   0.000000e+000   0.000000e+000   0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 3 <Sistema Global>

Kg<0,J> 1.141344e+002   -2.853360e+001   -1.141344e+002   2.853360e+001
Kg<1,J> -2.853360e+001   7.133401e+000   2.853360e+001   -7.133401e+000
Kg<2,J> -1.141344e+002   2.853360e+001   1.141344e+002   -2.853360e+001
Kg<3,J> 2.853360e+001   -7.133401e+000   -2.853360e+001   7.133401e+000
Pressione uma tecla para continuar...

```

A tabela 17 mostra o vetor solução dos deslocamentos, obtido através do método de Gauss.

Tabela 17- Solução do sistema linear

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo03\Trelica.exe
Pressione uma tecla para continuar...
Vetor de Solucao do sistema algebrico
Dn<0,J> -6.166014e-001
Dn<1,J> 0.000000e+000
Dn<2,J> -5.504409e-001
Dn<3,J> -2.646419e-001
Dn<4,J> -5.184409e-001
Dn<5,J> -4.266172e-001
Dn<6,J> -4.835526e-001
Dn<7,J> -4.272497e-001
Dn<8,J> -2.906010e-001
Dn<9,J> -2.324808e-001
Dn<10,J> 0.000000e+000
Dn<11,J> 0.000000e+000
Dn<12,J> -4.965785e-001
Dn<13,J> -7.200000e-002
Dn<14,J> -4.874356e-001
Dn<15,J> -2.464808e-001
Dn<16,J> -4.782928e-001
Dn<17,J> -4.092497e-001
Dn<18,J> -4.542928e-001
Dn<19,J> -4.206172e-001
Dn<20,J> -4.329595e-001
Dn<21,J> -2.706419e-001
Dn<22,J> -4.116261e-001
Dn<23,J> -2.400000e-002
Pressione uma tecla para continuar...

```

Campos deslocamentos determinados a partir da matriz de estrutura da treliça analisada.

Tabela 18- Campo de deslocamento

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo03\Trelica.exe
No          Dx          Dy
1           -6.166014e-001  0.000000e+000
2           -5.504409e-001  -2.646419e-001
3           -5.184409e-001  -4.266172e-001
4           -4.835526e-001  -4.272497e-001
5           -2.906010e-001  -2.324808e-001
6           0.000000e+000   0.000000e+000
7           -4.965785e-001  -7.200000e-002
8           -4.874356e-001  -2.464808e-001
9           -4.782928e-001  -4.092497e-001
10          -4.542928e-001  -4.206172e-001
11          -4.329595e-001  -2.706419e-001
12          -4.116261e-001  -2.400000e-002

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 1 (Sistema Local)

Ke<0,J> 1.212678e+002  0.000000e+000  -1.212678e+002  0.000000e+000
Ke<1,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Ke<2,J> -1.212678e+002  0.000000e+000  1.212678e+002  0.000000e+000
Ke<3,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rotacao da barra : 1

Re<0,J> 9.701425e-001  2.425356e-001  0.000000e+000  0.000000e+000
Re<1,J> -2.425356e-001  9.701425e-001  0.000000e+000  0.000000e+000
Re<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  9.701425e-001  2.425356e-001
Re<3,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  -2.425356e-001  9.701425e-001

Pressione uma tecla para continuar...

```

Os esforços nodais internos são calculados em cada barra, apresentando os resultados na direção x e y em cada nó i e j .

Tabela 19- Lista de esforços em cada barra da estrutura

Esforços da barra : 1 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.421085e-014	0.000000e+000	1.421085e-014	0.000000e+000
Esforços da barra : 2 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-4.000000e+000	0.000000e+000	4.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 3 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-4.123106e+000	0.000000e+000	4.123106e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 4 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-3.750000e+000	0.000000e+000	3.750000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 5 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	2.167346e-014	0.000000e+000	-2.167346e-014	0.000000e+000
Esforços da barra : 6 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.000000e+000	0.000000e+000	-3.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 7 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.142857e+000	0.000000e+000	-1.142857e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 8 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.142857e+000	0.000000e+000	-1.142857e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 9 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.000000e+000	0.000000e+000	-3.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 10 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	2.666667e+000	0.000000e+000	-2.666667e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 11 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	2.666667e+000	0.000000e+000	-2.666667e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 12 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.000000e+000	0.000000e+000	-3.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 13 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-3.333333e+000	0.000000e+000	3.333333e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 14 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.000000e+000	0.000000e+000	-1.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 15 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.666667e+000	0.000000e+000	-1.666667e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 16 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 16 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 17 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.414214e+000	0.000000e+000	-1.414214e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 19 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.743191e+000	0.000000e+000	-3.743191e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 20 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.000000e+000	0.000000e+000	-1.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 21 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-2.303502e+000	0.000000e+000	2.303502e+000	0.000000e+000

A tabela 20 mostra novamente que a ferramenta TRL2D resulta em valores exatamente iguais aos do obtidos pelo *Ansys*.

Tabela 20- Resposta dada pelo *Ansys* do exemplo 02

```

RespostaAnsys03 - Bloco de notas
Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

  NODE      UX          UY          UZ          USUM
  1 -0.61660      0.0000      0.0000      0.61660
  2 -0.55044     -0.26464      0.0000      0.61075
  3 -0.51844     -0.42662      0.0000      0.67140
  4 -0.48355     -0.42725      0.0000      0.64526
  5 -0.29060     -0.23248      0.0000      0.37215
  6  0.00000      0.0000      0.0000      0.00000
  7 -0.49658     -0.72000E-01  0.0000      0.50177
  8 -0.48744     -0.24648      0.0000      0.54621
  9 -0.47829     -0.40925      0.0000      0.62948
 10 -0.45429     -0.42062      0.0000      0.61911
 11 -0.43296     -0.27064      0.0000      0.51059
 12 -0.41163     -0.24000E-01  0.0000      0.41233

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      1      4      0      3
VALUE -0.61660  -0.42725  0.0000  0.67140

```

Os campos de tensões máximas e mínimas da treliça 02 são mostrados na figura 30, mostrando o deslocamento da estrutura.

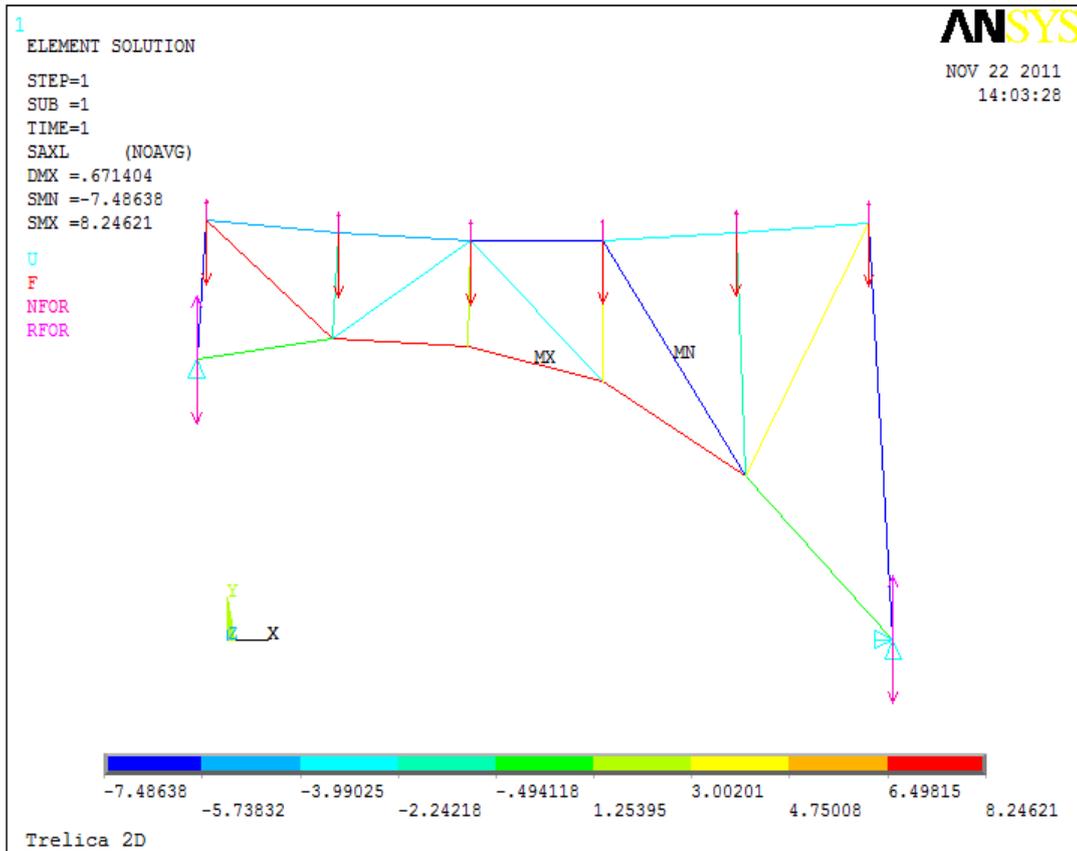


Figura 32 – Estrutura deformada

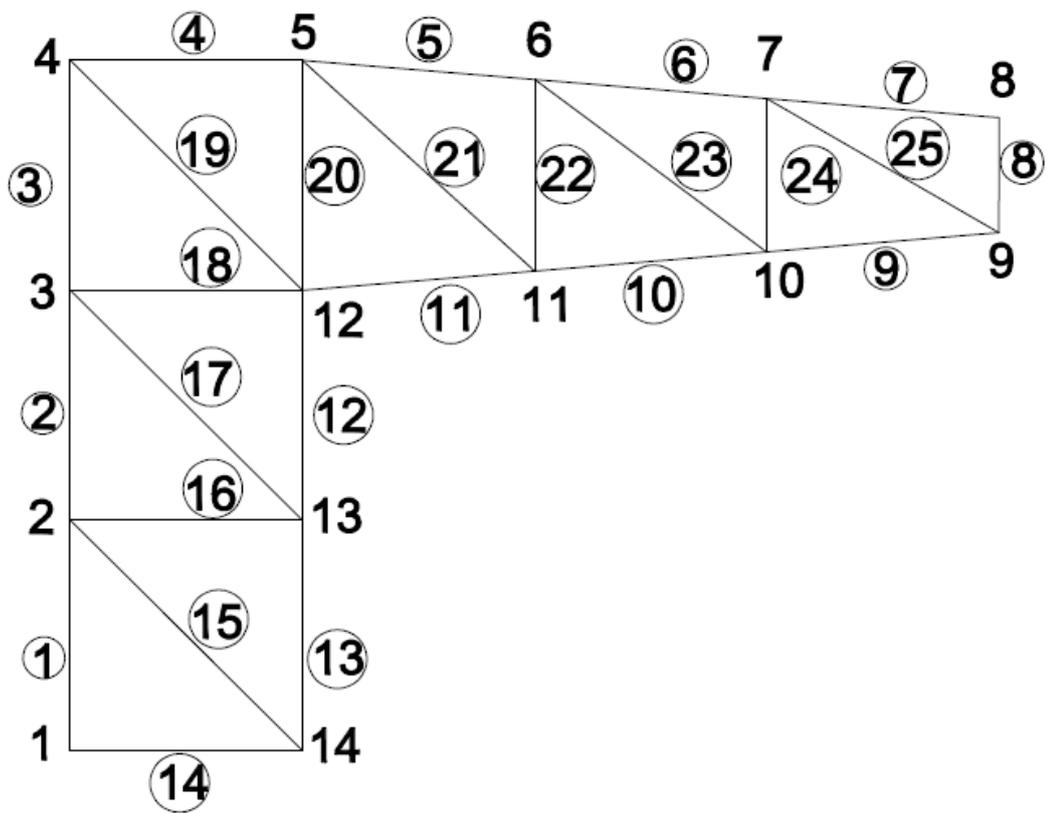


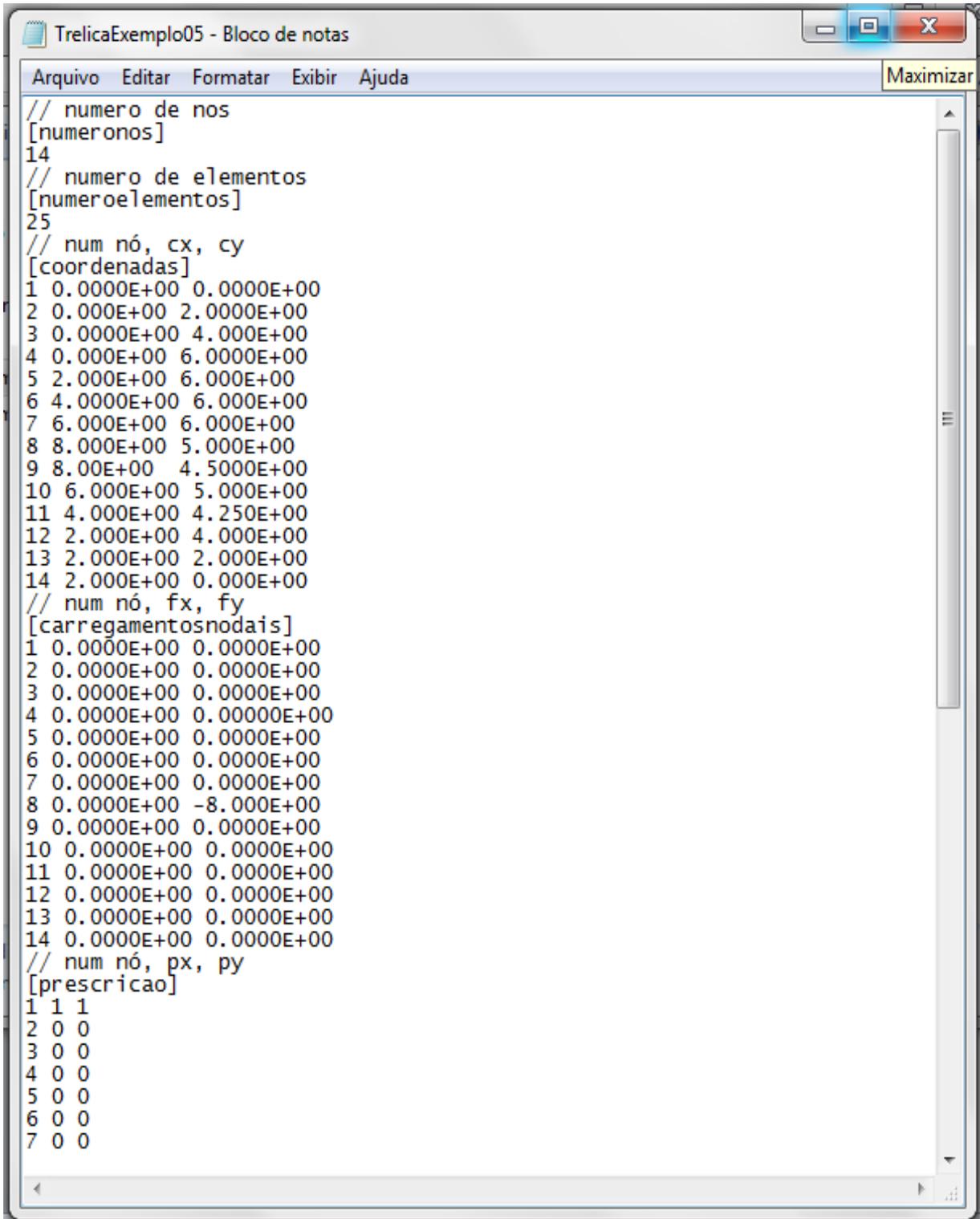
Figura 34 – Treliça 03

Tabela 21- Dados de entrada da treliça da treliça 03

Barra	Nó I	Nó J	L	E	A
1	1	2	2,00	1000	0.50
2	2	3	2,00	1000	0.50
3	3	4	2,00	1000	0.50
4	4	5	2,00	1000	0.50
5	5	6	2,00	1000	0.50
6	6	7	2,00	1000	0.50
7	7	8	2,00	1000	0.50
8	8	9	1,00	1000	0.50
9	9	10	2,00	1000	0.50
10	10	11	2,00	1000	0.50
11	11	12	2,00	1000	0.50
12	12	13	2,00	1000	0.50
13	13	14	2,00	1000	0.50
14	1	14	2,00	1000	0.50
15	2	14	2,83	1000	0.50
16	2	13	2,83	1000	0.50
17	3	13	2,83	1000	0.50
18	3	12	2,83	1000	0.50
19	4	12	2,83	1000	0.50
20	5	12	2,00	1000	0.50
21	5	11	2,83	1000	0.50
22	6	11	1,50	1000	0.50
23	6	10	2,24	1000	0.50
24	7	10	1,15	1000	0.50
25	7	9	2,23	1000	0.50

A tabela 22 mostra o arquivo de entrada usado pelo usuário.

Tabela 22- Arquivo de entrada da estrutura 03



```

TrelicaExemplo05 - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda Maximizar
// numero de nos
[numeronos]
14
// numero de elementos
[numeroelementos]
25
// num nó, cx, cy
[coordenadas]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.000E+00 2.0000E+00
3 0.0000E+00 4.000E+00
4 0.000E+00 6.0000E+00
5 2.000E+00 6.000E+00
6 4.0000E+00 6.000E+00
7 6.000E+00 6.000E+00
8 8.000E+00 5.000E+00
9 8.00E+00 4.5000E+00
10 6.000E+00 5.000E+00
11 4.000E+00 4.250E+00
12 2.000E+00 4.000E+00
13 2.000E+00 2.000E+00
14 2.000E+00 0.000E+00
// num nó, fx, fy
[carregamentosnodais]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.0000E+00 0.0000E+00
3 0.0000E+00 0.0000E+00
4 0.0000E+00 0.00000E+00
5 0.0000E+00 0.0000E+00
6 0.0000E+00 0.0000E+00
7 0.0000E+00 0.0000E+00
8 0.0000E+00 -8.000E+00
9 0.0000E+00 0.0000E+00
10 0.0000E+00 0.0000E+00
11 0.0000E+00 0.0000E+00
12 0.0000E+00 0.0000E+00
13 0.0000E+00 0.0000E+00
14 0.0000E+00 0.0000E+00
// num nó, px, py
[prescricao]
1 1 1
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 0 0
6 0 0
7 0 0

```

Execução do programa TRL2D, onde o qual determina o cálculo das matrizes globais, de todos os elementos de barra, tabela 23.

Tabela 23- Tela inicial do programa TRL2D

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo05\Trelica.exe
=====
UFPE - Universidade Federal do Pernambuco
Centro Academico do Agreste - Nucleo de Tecnologia
=====
Analise de Problemas Axiais - Trelicas : Versao 1.0 - 2011
Arquivo de Entrada : TrelicaExemplo05.est
Dados Carregados=====
Numero de Nos: 14
Numero de Barras: 25
=====

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  2.500000e+002  0.000000e+000 -2.500000e+002
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -2.500000e+002  0.000000e+000  2.500000e+002
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 2 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  2.500000e+002  0.000000e+000 -2.500000e+002
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -2.500000e+002  0.000000e+000  2.500000e+002
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 3 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  2.500000e+002  0.000000e+000 -2.500000e+002
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -2.500000e+002  0.000000e+000  2.500000e+002
Pressione uma tecla para continuar...

```

Solução dos vetores deslocamentos através do Método de Gauss.

Tabela 24- Solução do Sistema Linear

The screenshot shows a text-based output window with the following data:

Label	Value
Dn<0,J>	0.000000e+000
Dn<1,J>	0.000000e+000
Dn<2,J>	9.600000e-002
Dn<3,J>	9.600000e-002
Dn<4,J>	4.160000e-001
Dn<5,J>	1.920000e-001
Dn<6,J>	1.231529e+000
Dn<7,J>	2.880000e-001
Dn<8,J>	1.327529e+000
Dn<9,J>	-2.760000e-001
Dn<10,J>	1.400672e+000
Dn<11,J>	-1.340913e+000
Dn<12,J>	1.464672e+000
Dn<13,J>	-2.562851e+000
Dn<14,J>	6.093876e-001
Dn<15,J>	-4.273420e+000
Dn<16,J>	3.127454e-001
Dn<17,J>	-4.265420e+000
Dn<18,J>	8.144804e-001
Dn<19,J>	-2.538851e+000
Dn<20,J>	4.528554e-001
Dn<21,J>	-1.336913e+000
Dn<22,J>	4.160000e-001
Dn<23,J>	-2.560000e-001
Dn<24,J>	9.600000e-002
Dn<25,J>	-1.280000e-001
Dn<26,J>	1.391243e-015
Dn<27,J>	0.000000e+000

Campos de deslocamentos determinados pela matriz de estrutura, o que detalha a tabela 11, na seção 3.3.

Tabela 25- Campos de deslocamento

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo05\Trelica.exe

Deslocamentos dos Nos (Sistema Global)

No	Dx	Dy
1	0.000000e+000	0.000000e+000
2	9.600000e-002	9.600000e-002
3	4.160000e-001	1.920000e-001
4	1.231529e+000	2.880000e-001
5	1.327529e+000	-2.760000e-001
6	1.400672e+000	-1.340913e+000
7	1.464672e+000	-2.562851e+000
8	6.093876e-001	-4.273420e+000
9	3.127454e-001	-4.265420e+000
10	8.144804e-001	-2.538851e+000
11	4.528554e-001	-1.336913e+000
12	4.160000e-001	-2.560000e-001
13	9.600000e-002	-1.280000e-001
14	1.391243e-015	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 1 (Sistema Local)

Ke(0,J)	2.500000e+002	0.000000e+000	-2.500000e+002	0.000000e+000
Ke(1,J)	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Ke(2,J)	-2.500000e+002	0.000000e+000	2.500000e+002	0.000000e+000
Ke(3,J)	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rotacao da barra : 1

Re(0,J)	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
---------	---------------	---------------	---------------	---------------

Com o sistema de vetores dos deslocamentos solucionados, é possível determinar os esforços dos nós através da equação 78.

Tabela 26- Esforços nodais de cada barra

Esforços da barra : 1 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-2.400000e+001	0.000000e+000	2.400000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 2 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-2.400000e+001	0.000000e+000	2.400000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 3 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-2.400000e+001	0.000000e+000	2.400000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 4 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-2.400000e+001	0.000000e+000	2.400000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 5 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-1.828571e+001	0.000000e+000	1.828571e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 6 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-1.600000e+001	0.000000e+000	1.600000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 7 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 8 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
8.000000e+000	0.000000e+000	-8.000000e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 9 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
1.649242e+001	0.000000e+000	-1.649242e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 10 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
1.952915e+001	0.000000e+000	-1.952915e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 11 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
2.418677e+001	0.000000e+000	-2.418677e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 12 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
3.200000e+001	0.000000e+000	-3.200000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 13 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
3.200000e+001	0.000000e+000	-3.200000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 14 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-3.478107e-013	0.000000e+000	3.478107e-013	0.000000e+000

Esforços da barra : 15 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
4.860242e-013	0.000000e+000	-4.860242e-013	0.000000e+000

Esforços da barra : 16 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-3.481659e-013	0.000000e+000	3.481659e-013	0.000000e+000

Esforços da barra : 17 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
4.867218e-013	0.000000e+000	-4.867218e-013	0.000000e+000

Esforços da barra : 18 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-3.552714e-013	0.000000e+000	3.552714e-013	0.000000e+000

Esforços da barra : 19 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
3.394113e+001	0.000000e+000	-3.394113e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 20 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
5.000000e+000	0.000000e+000	-5.000000e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 21 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
-7.592961e+000	0.000000e+000	7.592961e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 22 <Sistema Local>

FxI	FyI	FxJ	FyJ
1.142857e+000	0.000000e+000	-1.142857e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 23 (Sistema Local)

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-2.555506e+000	0.000000e+000	2.555506e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 24 (Sistema Local)

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.200000e+001	0.000000e+000	-1.200000e+001	0.000000e+000

Esforços da barra : 25 (Sistema Local)

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-2.000000e+001	0.000000e+000	2.000000e+001	0.000000e+000

Deslocamentos dos nós na direção x e y , determinados pelo *Ansys*, o qual é igual os deslocamentos da tabela 25 encontrados pelo software TRL2D.

Tabela 27- Campos de deslocamento

```

RespostaAnsys05 - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE
  NODE      UX      UY      UZ      USUM
    1      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
    2  0.96000E-01  0.96000E-01  0.0000      0.13576
    3  0.41600      0.19200      0.0000      0.45817
    4  1.2315      0.28800      0.0000      1.2648
    5  1.3275      -0.27600      0.0000      1.3559
    6  1.4007      -1.3409      0.0000      1.9391
    7  1.4647      -2.5629      0.0000      2.9519
    8  0.60939      -4.2734      0.0000      4.3167
    9  0.31275      -4.2654      0.0000      4.2769
   10  0.81448      -2.5389      0.0000      2.6663
   11  0.45286      -1.3369      0.0000      1.4115
   12  0.41600      -0.25600      0.0000      0.48846
   13  0.96000E-01 -0.12800      0.0000      0.16000
   14  0.82920E-15  0.0000      0.0000      0.82920E-15
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      7      8      0      8
VALUE  1.4647      -4.2734      0.0000      4.3167

```

A figura 32 representa a treliça 04 deformada, devidamente com os campos de deslocamentos mínimos e máximos.

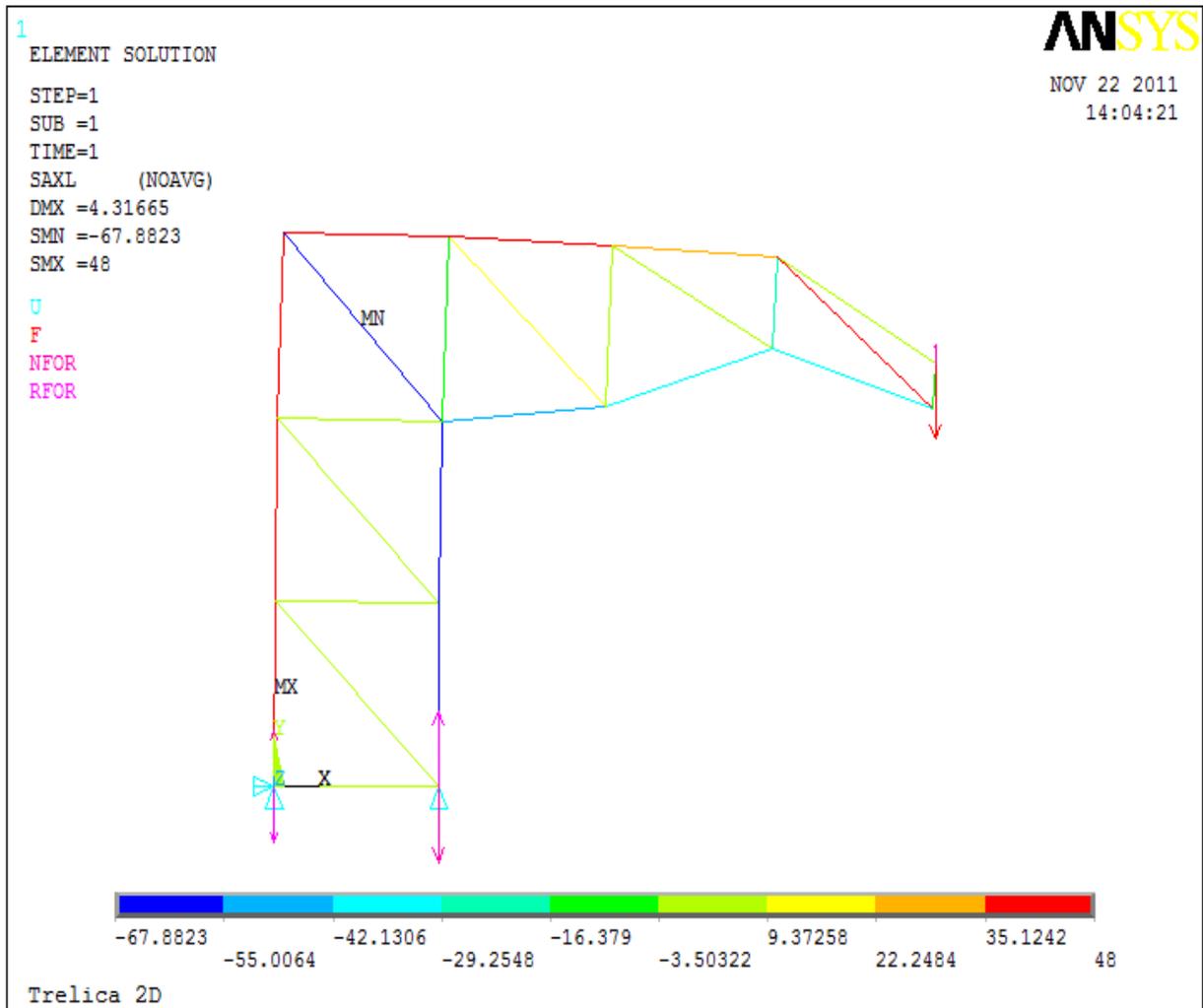


Figura 35 – Modelo de treliça deformada

Exemplo04 – Treliça plana biapoada submetida a cargas horizontais de 300, 200 e 100 lb. Determinar os deslocamentos e esforços nodais.

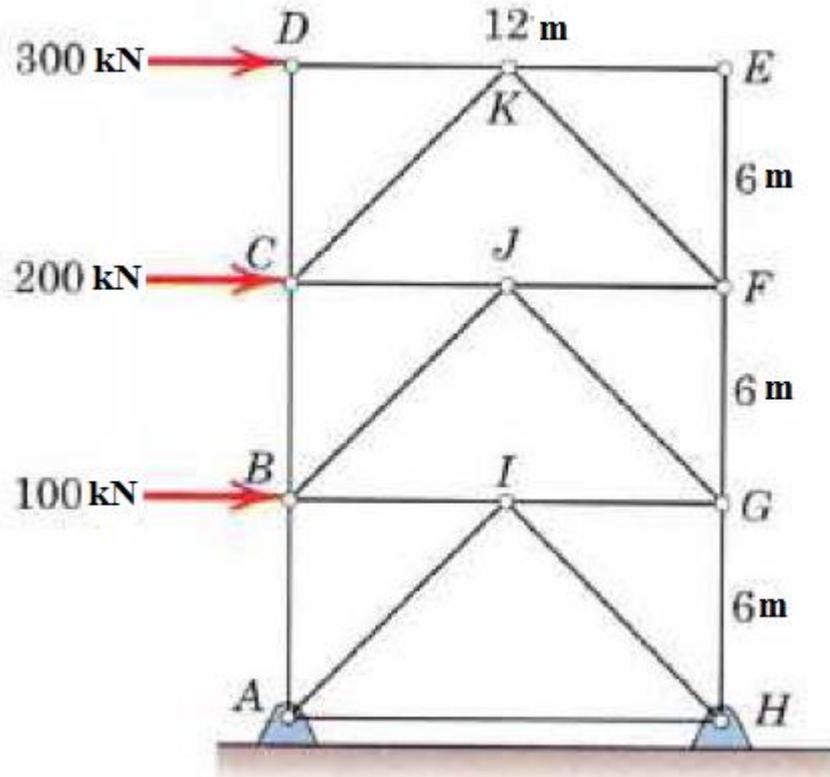


Figura 36 – Treliça 04

Os dados da treliça 04 são inseridos pelo usuário em um arquivo de entrada, onde são informadas as quantidades de barras e nós, conectividade de cada elemento e os dados geométricos das barras.

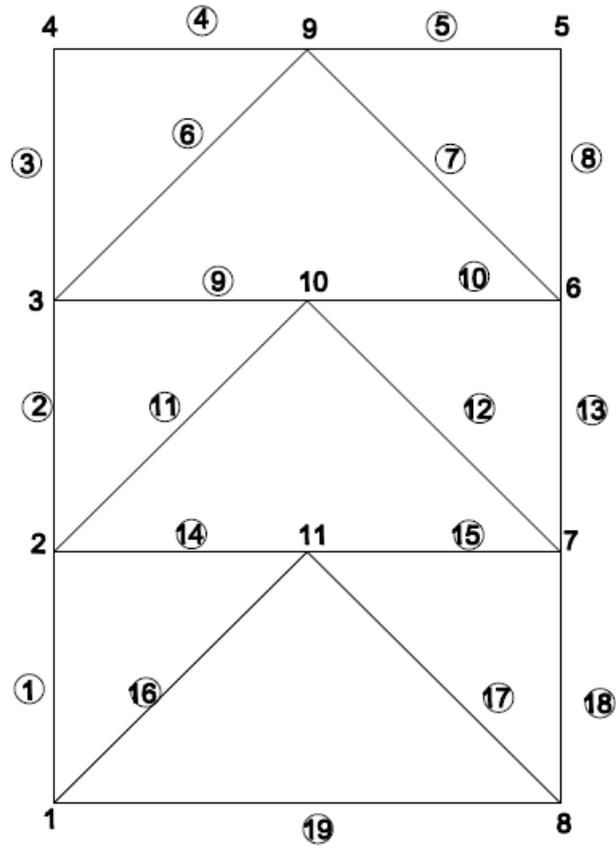


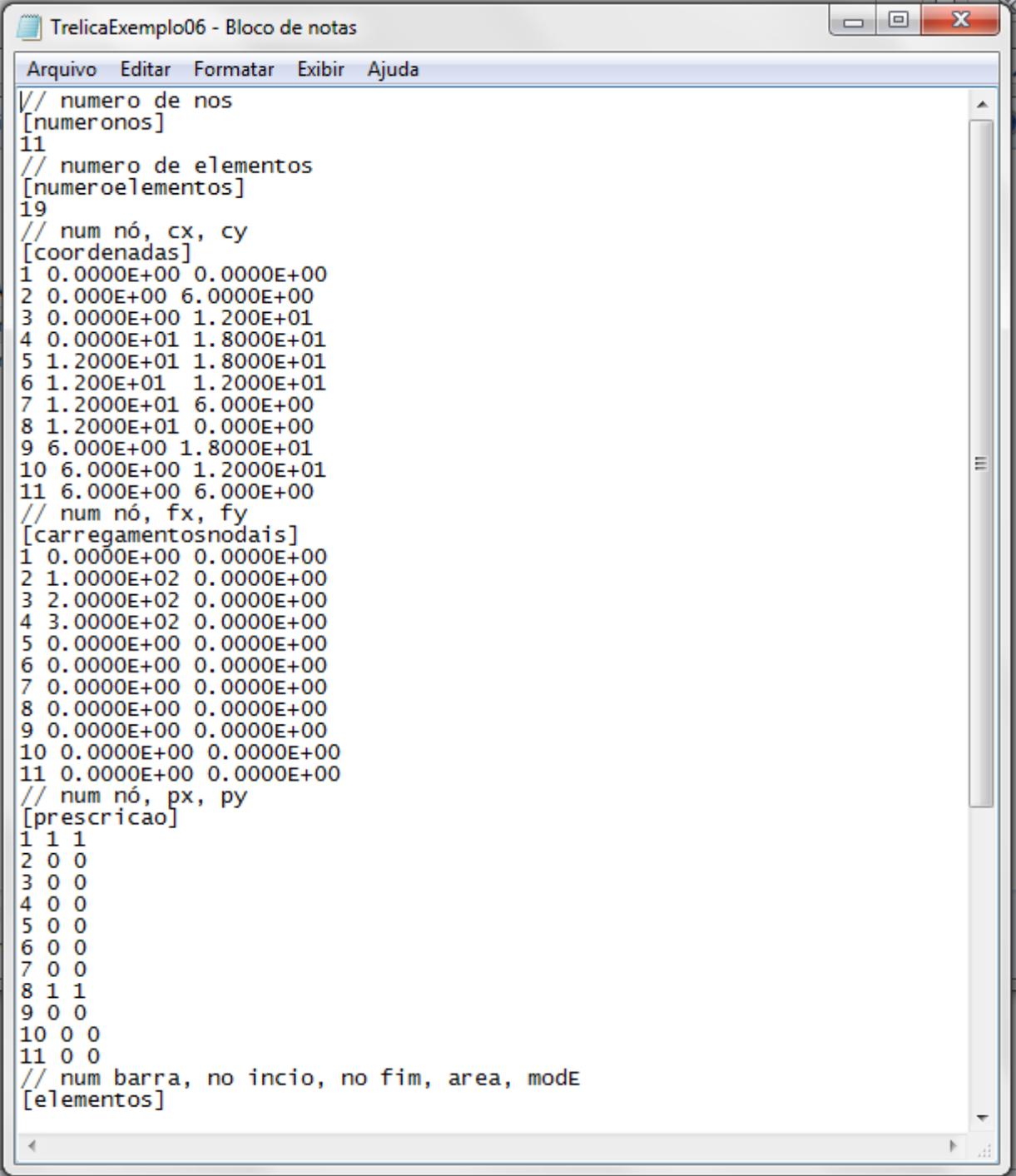
Figura 37 – Treliça 04 enumerada

Tabela 28- Dados de entrada da treliça 04

Barra	Nó I	Nó J	L	E	A
1	1	2	6,00	1000	0.50
2	2	3	6,00	1000	0.50
3	3	4	6,00	1000	0.50
4	4	9	6,00	1000	0.50
5	9	5	6,00	1000	0.50
6	3	9	8,50	1000	0.50
7	9	6	8,50	1000	0.50
8	5	6	6,00	1000	0.50
9	3	10	6,00	1000	0.50
10	10	6	6,00	1000	0.50
11	2	10	8,50	1000	0.50
12	10	7	8,50	1000	0.50
13	6	7	6,00	1000	0.50
14	2	11	6,00	1000	0.50
15	11	7	6,00	1000	0.50
16	1	11	8,50	1000	0.50
17	11	8	8,50	1000	0.50
18	7	8	6,00	1000	0.50
19	1	8	12,0	1000	0.50

Dados de entrada da treliça 04 informados pelo usuário.

Tabela 29- Arquivo de entrada da treliça 04



```

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
// numero de nos
[numeronos]
11
// numero de elementos
[numeroelementos]
19
// num nó, cx, cy
[coordenadas]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.000E+00 6.0000E+00
3 0.0000E+00 1.200E+01
4 0.0000E+01 1.8000E+01
5 1.2000E+01 1.8000E+01
6 1.200E+01 1.2000E+01
7 1.2000E+01 6.000E+00
8 1.2000E+01 0.000E+00
9 6.000E+00 1.8000E+01
10 6.000E+00 1.2000E+01
11 6.000E+00 6.000E+00
// num nó, fx, fy
[carregamentosnodais]
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 1.0000E+02 0.0000E+00
3 2.0000E+02 0.0000E+00
4 3.0000E+02 0.0000E+00
5 0.0000E+00 0.0000E+00
6 0.0000E+00 0.0000E+00
7 0.0000E+00 0.0000E+00
8 0.0000E+00 0.0000E+00
9 0.0000E+00 0.0000E+00
10 0.0000E+00 0.0000E+00
11 0.0000E+00 0.0000E+00
// num nó, px, py
[prescricao]
1 1 1
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 0 0
6 0 0
7 0 0
8 1 1
9 0 0
10 0 0
11 0 0
// num barra, no inicio, no fim, area, modE
[elementos]

```

Execução do programa TRL2D, onde o qual determina o cálculo das matrizes globais, de todos os elementos de barra, tabela 23.

Tabela 30- Tela inicial do programa TRL2D

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo06\Trelica.exe
=====
UFPE - Universidade Federal do Pernambuco
Centro Academico do Agreste - Nucleo de Tecnologia
=====
Analise de Problemas Axiais - Trelicas : Versao 1.0 - 2011
Arquivo de Entrada : TrelicaExemplo06.est
Dados Carregados=====
Numero de Nos: 11
Numero de Barras: 19
=====

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  8.333333e+001  0.000000e+000 -8.333333e+001
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -8.333333e+001  0.000000e+000  8.333333e+001
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 2 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  8.333333e+001  0.000000e+000 -8.333333e+001
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -8.333333e+001  0.000000e+000  8.333333e+001
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 3 <Sistema Global>

Kg<0,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<1,J> 0.000000e+000  8.333333e+001  0.000000e+000 -8.333333e+001
Kg<2,J> 0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000  0.000000e+000
Kg<3,J> 0.000000e+000 -8.333333e+001  0.000000e+000  8.333333e+001
Pressione uma tecla para continuar...

```

Vetor deslocamento determinado pelo Método de Gauss.

Tabela 31- Solução do sistema linear

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo06\Trelica.exe
Pressione uma tecla para continuar...

Vetor de Solucao do sistema algebrico
Dn<0,J> 0.000000e+000
Dn<1,J> 0.000000e+000
Dn<2,J> 1.438234e+001
Dn<3,J> 4.800000e+000
Dn<4,J> 3.126762e+001
Dn<5,J> 6.600000e+000
Dn<6,J> 4.535879e+001
Dn<7,J> 6.600000e+000
Dn<8,J> 4.175879e+001
Dn<9,J> -6.600000e+000
Dn<10,J> 2.886762e+001
Dn<11,J> -6.600000e+000
Dn<12,J> 1.318234e+001
Dn<13,J> -4.800000e+000
Dn<14,J> 0.000000e+000
Dn<15,J> 0.000000e+000
Dn<16,J> 4.175879e+001
Dn<17,J> 1.200000e+000
Dn<18,J> 2.706762e+001
Dn<19,J> 6.000000e-001
Dn<20,J> 1.018234e+001
Dn<21,J> 0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Deslocamentos dos Nos <Sistema Global>
No          Dx          Dy

```

Campos de deslocamentos determinados pelo software TRL2D.

Tabela 32- Campo de deslocamentos

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo06\Trelica.exe

Deslocamentos dos Nos <Sistema Global>

No	Dx	Dy
1	0.000000e+000	0.000000e+000
2	1.438234e+001	4.800000e+000
3	3.126762e+001	6.600000e+000
4	4.535879e+001	6.600000e+000
5	4.175879e+001	-6.600000e+000
6	2.886762e+001	-6.600000e+000
7	1.318234e+001	-4.800000e+000
8	0.000000e+000	0.000000e+000
9	4.175879e+001	1.200000e+000
10	2.706762e+001	6.000000e-001
11	1.018234e+001	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Local>

Ke<0,J>	8.333333e+001	0.000000e+000	-8.333333e+001	0.000000e+000
Ke<1,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Ke<2,J>	-8.333333e+001	0.000000e+000	8.333333e+001	0.000000e+000
Ke<3,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rotacao da barra : 1

Re<0,J>	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Re<1,J>	-1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Re<2,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000
Re<3,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	-1.000000e+000	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Com as matrizes no sistema local, pode-se determinar os esforços internos no nós i e j.

Tabela 33- Esforços internos das barras da estrutura				
Esforços da barra : 1 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-4.000000e+002	0.000000e+000	4.000000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 2 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.500000e+002	0.000000e+000	1.500000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 3 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.136868e-013	0.000000e+000	1.136868e-013	0.000000e+000
Esforços da barra : 4 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.000000e+002	0.000000e+000	-3.000000e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 5 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 6 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-2.121320e+002	0.000000e+000	2.121320e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 7 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	2.121320e+002	0.000000e+000	-2.121320e+002	0.000000e+000
Esforços da barra : 8 <Sistema Local>				
	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Esforços da barra : 9 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.500000e+002	0.000000e+000	-3.500000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 10 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-1.500000e+002	0.000000e+000	1.500000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 11 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-3.535534e+002	0.000000e+000	3.535534e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 12 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.535534e+002	0.000000e+000	-3.535534e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 13 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	1.500000e+002	0.000000e+000	-1.500000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 14 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	3.500000e+002	0.000000e+000	-3.500000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 15 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-2.500000e+002	0.000000e+000	2.500000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 16 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	-4.242641e+002	0.000000e+000	4.242641e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 17 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	4.242641e+002	0.000000e+000	-4.242641e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 18 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	4.000000e+002	0.000000e+000	-4.000000e+002	0.000000e+000

Esforços da barra : 19 <Sistema Local>

	FxI	FyI	FxJ	FyJ
	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Os resultados obtidos pelo *Ansys*, ao serem comparados com os resultados obtidos pelo TRL2D, são exatamente idênticos, mostrando mais uma vez a veracidade da ferramenta desenvolvida.

Tabela 34- Resultado apresentado pelo Ansys

```

ResultadoAnsys06 - Bloco de notas
Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=    1    SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000    LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE

   NODE      UX      UY      UZ      USUM
   1      0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   2     14.382    4.8000    0.0000    15.162
   3     31.268    6.6000    0.0000    31.957
   4     45.359    6.6000    0.0000    45.836
   5     41.759    1.2000    0.0000    41.776
   6     41.759   -6.6000    0.0000    42.277
   7     28.868   -6.6000    0.0000    29.612
   8     27.068    0.60000    0.0000    27.074
   9     13.182   -4.8000    0.0000    14.029
  10     10.182    0.0000    0.0000    10.182
  11      0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      4      6      0      4
VALUE     45.359   -6.6000    0.0000    45.836

```

Representação da estrutura deformada feita pelo *Ansys* com a aplicação das forças externas.

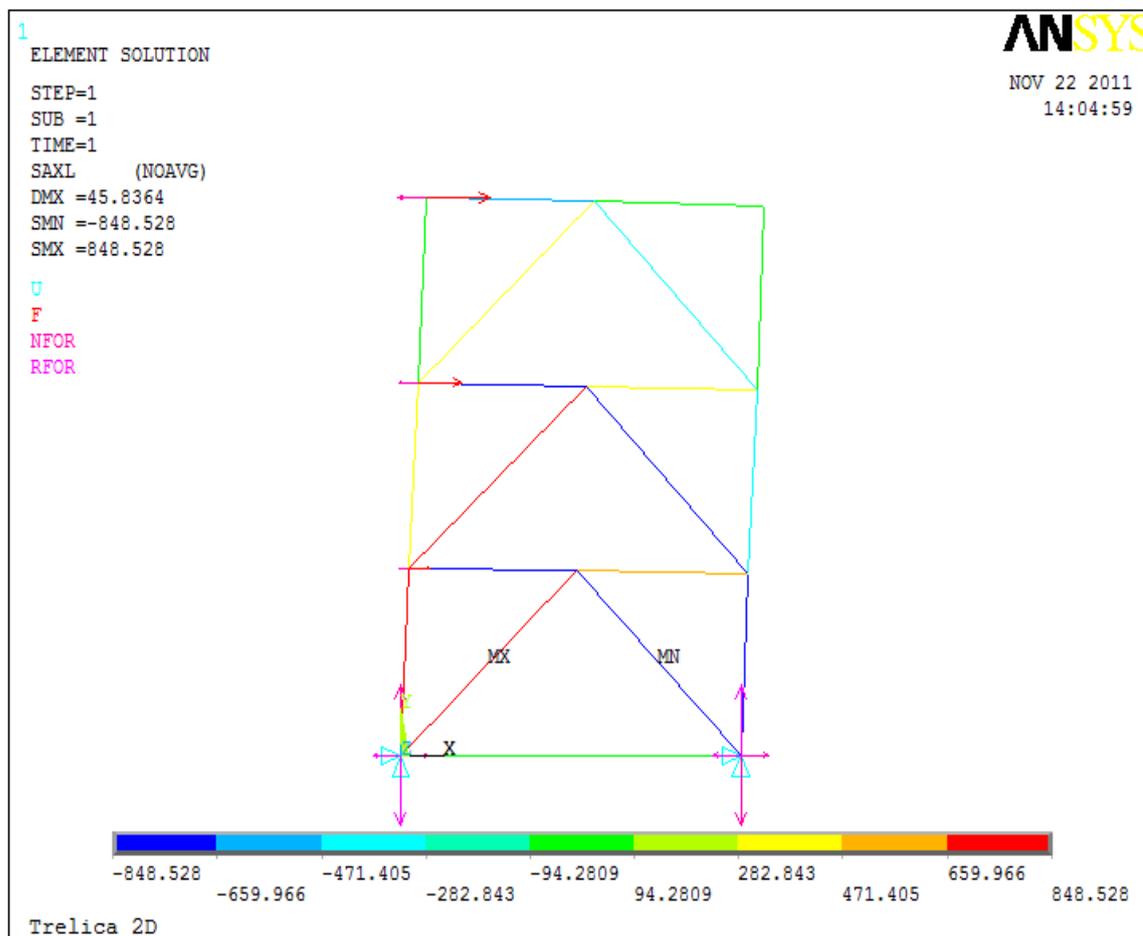


Figura 38 – Estrutura 04 deformada

Exemplo 05 – Treliça plana biapoada, a qual é submetida a uma carga inclinada no nó A de intensidade 6 kN, a uma carga vertical no nó G de 8 kN, uma carga vertical no nó H de 10 kN e outra carga vertical de 4 kN aplicada no nó I. Determinar os esforços e os deslocamentos internos.

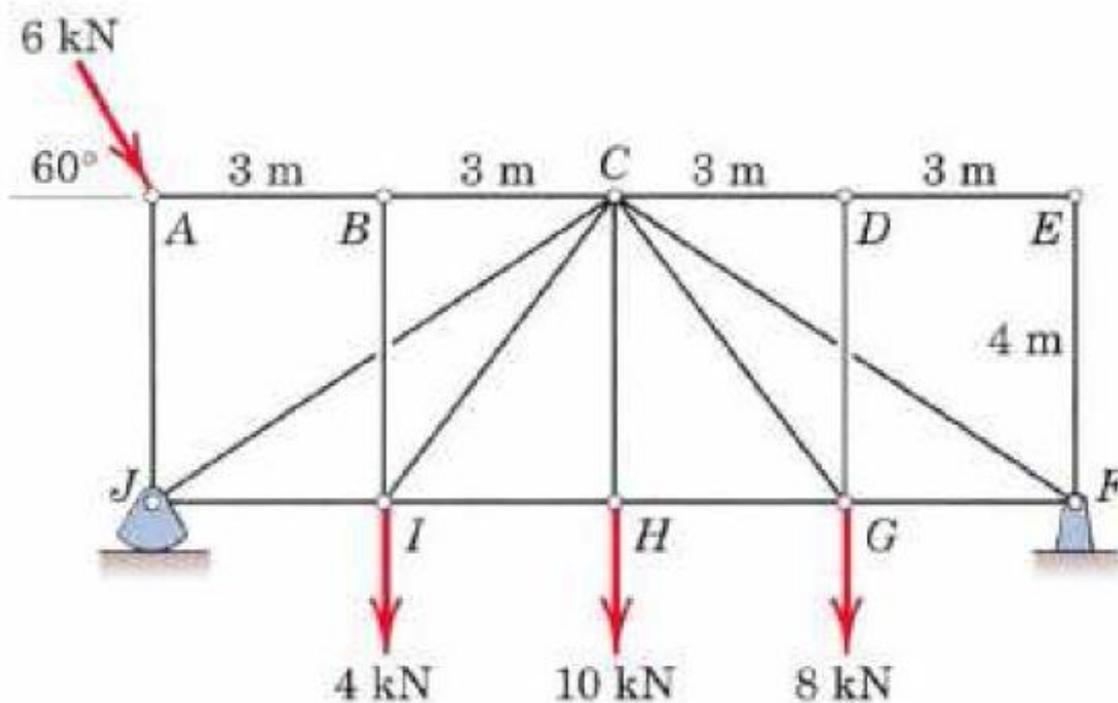


Figura 39 – Treliça 05

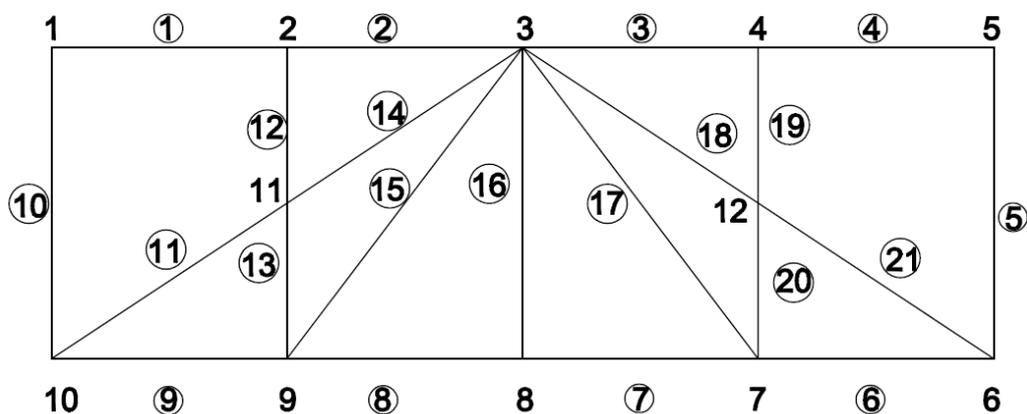


Figura 40 – Treliza 05 enumerada

Tabela 35- Dados de entrada da treliça 05

Barra	Nó I	Nó J	L	E	A
1	1	2	3,00	1000	0.50
2	2	3	3,00	1000	0.50
3	3	4	3,00	1000	0.50
4	4	5	3,00	1000	0.50
5	5	6	4,00	1000	0.50
6	6	7	3,00	1000	0.50
7	7	8	3,00	1000	0.50
8	8	9	3,00	1000	0.50
9	9	10	3,00	1000	0.50
10	1	10	4,00	1000	0.50
11	10	11	3,60	1000	0.50
12	2	11	2,00	1000	0.50
13	9	11	2,00	1000	0.50
14	3	11	3,60	1000	0.50
15	3	9	5,00	1000	0.50
16	3	8	4,00	1000	0.50
17	3	7	5,00	1000	0.50
18	3	12	3,60	1000	0.50
19	4	12	2,00	1000	0.50
20	7	12	2,00	1000	0.50
21	6	12	3,60	1000	0.50

Dados da treliça 05 que são inseridos pelo usuário por meio de um arquivo de leitura para ser lido pela ferramenta TRL2D.

Tabela 36- Dados de entrada da treliça 05

```

TrelizaExemplo12 - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
// numero de nos
[numeronos]
12
// numero de elementos
[numeroelementos]
21
// num nó, cx, cy
[coordenadas]
1 0.0000E+00 4.0000E+00
2 3.0000E+00 4.0000E+00
3 6.0000E+00 4.0000E+00
4 9.0000E+00 4.0000E+00
5 1.2000E+01 4.0000E+00
6 1.2000E+01 0.0000E+00
7 9.0000E+00 0.0000E+00
8 6.0000E+00 0.0000E+00
9 3.0000E+00 0.0000E+00
10 0.0000E+00 0.0000E+00
11 3.0000E+00 2.0000E+00
12 9.0000E+00 2.0000E+00
// num nó, fx, fy
[carregamentosnodais]
1 0.0000E+00 -3.0000E+00
2 0.0000E+00 0.0000E+00
3 0.0000E+00 0.0000E+00
4 0.0000E+00 0.0000E+00
5 0.0000E+00 0.0000E+00
6 0.0000E+00 0.0000E+00
7 0.0000E+00 -8.0000E+00
8 0.0000E+00 -1.0000E+01
9 0.0000E+00 -4.0000E+00
10 0.0000E+00 0.0000E+00
11 0.0000E+00 0.0000E+00
12 0.0000E+00 0.0000E+00
// num nó, px, py
[prescricao]
1 0 0
2 0 0
3 0 0
4 0 0
5 0 0
6 1 1
7 0 0
8 0 0
9 0 0
10 0 1
11 0 0
12 0 0
// num barra, no inicio, no fim, area, modE

```

Através das matrizes de globais das barras, é possível calcular a rigidez dos elementos de barra em qualquer eixo de sistema referencial.

Tabela 37- Tela Inicial do programa TRL2D

```

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo12\Trelica.exe
=====
UFPE - Universidade Federal do Pernambuco
Centro Academico do Agreste - Nucleo de Tecnologia
=====
Analise de Problemas Axiais - Trelicas : Versao 1.0 - 2011
Arquivo de Entrada : TrelicaExemplo12.est
Dados Carregados=====
Numero de Nos: 12
Numero de Barras: 21
=====

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Global>

Kg(0,J) 1.666667e+002    0.000000e+000    -1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(1,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Kg(2,J) -1.666667e+002    0.000000e+000    1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(3,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 2 <Sistema Global>

Kg(0,J) 1.666667e+002    0.000000e+000    -1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(1,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Kg(2,J) -1.666667e+002    0.000000e+000    1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(3,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 3 <Sistema Global>

Kg(0,J) 1.666667e+002    0.000000e+000    -1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(1,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Kg(2,J) -1.666667e+002    0.000000e+000    1.666667e+002    0.000000e+000
Kg(3,J) 0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000    0.000000e+000
Pressione uma tecla para continuar...

```

Vetor deslocamento calculado seguindo a metodologia descrita na seção 3.3 e na tabela 11, por meio do Método de Gauss.

Tabela 38- Solução do sistema linear



```
C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo12\Trelica.exe

Pressione uma tecla para continuar...

Vetor de Solucao do sistema algebrico
Dn<0,J> -1.397519e-001
Dn<1,J> -2.400000e-002
Dn<2,J> -1.397519e-001
Dn<3,J> -7.504077e-001
Dn<4,J> -1.397519e-001
Dn<5,J> -7.720938e-001
Dn<6,J> -1.397519e-001
Dn<7,J> -8.732799e-001
Dn<8,J> -1.397519e-001
Dn<9,J> 0.000000e+000
Dn<10,J> 0.000000e+000
Dn<11,J> 0.000000e+000
Dn<12,J> -1.000000e-001
Dn<13,J> -8.732799e-001
Dn<14,J> -1.800000e-001
Dn<15,J> -8.520938e-001
Dn<16,J> -2.520000e-001
Dn<17,J> -7.504077e-001
Dn<18,J> -3.420000e-001
Dn<19,J> 0.000000e+000
Dn<20,J> 2.031277e-003
Dn<21,J> -7.504077e-001
Dn<22,J> -3.946979e-001
Dn<23,J> -8.732799e-001

Pressione uma tecla para continuar...
```

A tabela 46 representa o campo de deslocamento dos nós i e j no sistema global de referência.

Tabela 39- Campo de deslocamentos

C:\Users\Carla Soraia\Desktop\Soraya\Lista com 20\Exemplo12\Trelica.exe

Dn<21,J> -7.504077e-001
Dn<22,J> -3.946979e-001
Dn<23,J> -8.732799e-001
Pressione uma tecla para continuar...

Deslocamentos dos Nos <Sistema Global>

No	Dx	Dy
1	-1.397519e-001	-2.400000e-002
2	-1.397519e-001	-7.504077e-001
3	-1.397519e-001	-7.720938e-001
4	-1.397519e-001	-8.732799e-001
5	-1.397519e-001	0.000000e+000
6	0.000000e+000	0.000000e+000
7	-1.000000e-001	-8.732799e-001
8	-1.800000e-001	-8.520938e-001
9	-2.520000e-001	-7.504077e-001
10	-3.420000e-001	0.000000e+000
11	2.031277e-003	-7.504077e-001
12	-3.946979e-001	-8.732799e-001

Pressione uma tecla para continuar...

Matriz de rigidez da barra : 1 <Sistema Local>

Ke<0,J>	1.666667e+002	0.000000e+000	-1.666667e+002	0.000000e+000
Ke<1,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Ke<2,J>	-1.666667e+002	0.000000e+000	1.666667e+002	0.000000e+000
Ke<3,J>	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Pressione uma tecla para continuar...

Calculado o vetor deslocamento e a matrizes de rigidez e de rotação, é possível determinar o vetores de esforços nos nós i e j de cada elemento.

Tabela 40- Valores dos esforços nodais de alguns elementos de Barra

Esforços da barra : 1 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 2 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 3 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 4 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 5 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 6 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
2.163331e+001	0.000000e+000	-2.163331e+001	0.000000e+000
Esforços da barra : 7 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
Esforços da barra : 8 <Sistema Local>			
FxI	FyI	FxJ	FyJ
0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000

Valores coerentes e compatíveis com o mostrado na solução do software TRL2D.

Tabela 41- Resposta do Ansys

```

Resposta Ansys12 - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

```

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	-0.13975	-0.24000E-01	0.0000	0.14180
2	-0.13975	-0.75041	0.0000	0.76331
3	-0.13975	-0.77209	0.0000	0.78464
4	-0.13975	-0.87328	0.0000	0.88439
5	-0.13975	0.0000	0.0000	0.13975
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	-0.39470	-0.87328	0.0000	0.95833
8	-0.10800	-0.87328	0.0000	0.87993
9	-0.18000	-0.85209	0.0000	0.87090
10	-0.25200	-0.75041	0.0000	0.79159
11	0.20313E-02	-0.75041	0.0000	0.75041
12	-0.34200	0.0000	0.0000	0.34200

```

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      7      4      0      7
VALUE -0.39470 -0.87328 0.0000 0.95833

```

Estrutura deformada pelos esforços e carregamentos externos.

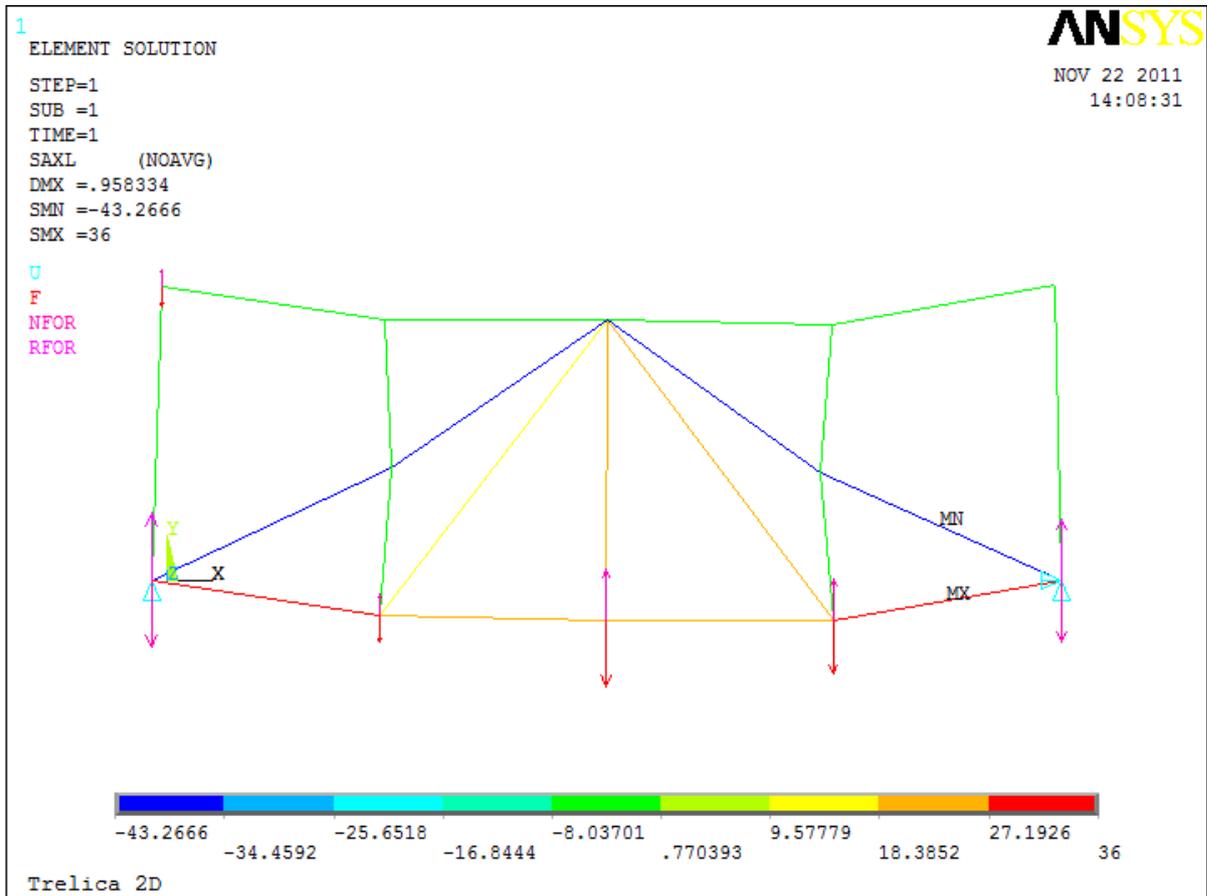


Figura 41 – Estrutura Deformada

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS / CONCLUSÕES

No transcorrer desta pesquisa desenvolveu-se o software TRL2D, sendo este uma ferramenta de simples utilização que permite analisar problemas axiais planos, em particular determinar os deslocamentos dos nós e as ações dos elementos de treliças. Além disso, neste trabalho também foi apresentado uma comparação entre os resultados obtidos com o software TRL2D e o software comercial ANSYS e constatou-se que os dois programas geram os mesmos resultados. Tal constatação já era esperada, uma vez que a técnica empregada, o MEF, produz resultados exatos para os campos de deslocamentos e esforços de estruturas reticuladas no regime estático.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Devido ao desempenho satisfatório do software TRL2D espera-se que outros acadêmicos tenham iniciativa de contribuir futuramente com esta pesquisa implementando a solução de problemas axiais espaciais nos regimes estático e dinâmico bem como o dimensionamento das barras que compõem as estruturas.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**: Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto. Portugal, 2003.

BEER, F. P; JOHNSTON JÚNIOR, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros**. 5. ed. rev. São Paulo: Makron Books, 1994. 2 v.

FONSECA, J.S.O. **Ferramentas de Simulação Mecânica: Elementos Finitos**. UFRGS, Rio Grande do Sul, 2002.

MEDEIROS, F. ; MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. ; Oliveira Queiroz . ENGENHARIA - AUTOCAD CUSTOMIZADO PARA ANÁLISE VIBRATORIA DE TRELIÇAS. Revista Tecnológica (UEM), v. 2009, p. 127/12-136, 2009.

MEDEIROS, F. ; MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. ; Oliveira Queiroz . ENGENHARIA - AUTOCAD COSTUMIZADO PARA ANÁLISE VIBRATÓRIA DE TRELIÇAS. In: ENTECA - Encontro Tecnológico de Engenharia Civil e Arquitetura, 2009, Londrina. ENTECA - Encontro Tecnológico de Engenharia Civil e Arquitetura, 2009.

MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. . ENGENHARIA - AMBIENTE AMIGÁVEL PARA ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA E VIBRATÓRIA DE TRELIÇAS.. In: VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC 2008, 2008, Natal. ERMAC 2008, 2008.

MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. ; BATISTA PAIVA, M. D. E. . ENGENHARIA - A USER-FRIENDLY ENVIRONMENT FOR PLANAR AND SPACE FRAMES USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD. In: ECT 2010 - Seventh International Conference on Engineering Computational Technology, 2010, Valência. ECT 2010 - Seventh International Conference on Engineering Computational Technology, 2010.

MENEZES JUNIOR, R. A. ; SALVINO, M. M. ; MENDONCA, A. V. . **ENGENHARIA - UMA PROPOSTA DE BIBLIOTECAS EM C++ PARA ANÁLISE ESTRUTURAL. PARTE I. ESTRUTURAS RETICULADAS**. In: ERMAC, 2006, João Pessoa. ERMAC, 2006. p. 1-8.

MENEZES JUNIOR, R. A. ; SALVINO, M. M. ; MENDONCA, A. V. . **ENGENHARIA - AMATE: UM AMBIENTE CUSTOMIZADO DO AUTOCAD PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS**. In: ERMAC, 2006, João Pessoa. ERMAC, 2006. p. 1-8.

RIBEIRO, F. L. B. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

MARTHA, F. L. **O Método Da Rigidez Direta Sob o Enfoque Matricial**. PUC, Rio de Janeiro, 1993.

MARTHA, F. L. **Métodos Básicos da Análise de Estruturas**. PUC, Rio de Janeiro, 2000.

SALVINO, M. M. ; MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. .
ENGENHARIA - **APPLETS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS
RETICULADAS VIA ELEMENTOS FINITOS**. In: IX Encontro de
Modelagem Computacional, 2006, Belo Horizonte. IX Encontro de Modelagem
Computacional, 2006. p. 1-10.

SALVINO, M. M. ; MENEZES JUNIOR, R. A. ; MENDONCA, A. V. .
ENGENHARIA - **EFEITO DA DEFORMAÇÃO POR CORTANTE EM
ESTRUTURAS RETICULADAS**. In: IX Encontro de Modelagem
Computacional, 2006, Belo Horizonte. IX Encontro de Modelagem
Computacional, 2006. p. 1-10.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas**. 1ª ed. Rio de Janeiro. Ciência
Moderna, 2005.

SÜSSEKIND, J.C. **Curso de Análise Estrutural**. 4ª ed. Porto Alegre. Globo,
1980.2v

SCHILDT H. **C Completo e Total**. 1ª ed. Makron Books. São Paulo, 1997.

MIZRAHI, V. V. **Treinamento em Linguagem C++Módulo 1**. Makron Books,
SP, 1995.

UFMG. **Curso de Linguagem C**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo
Horizonte, 1996.

Mecatrônica, C.T. **Curso de Linguagem C**. Centro tecnológico de Mecatrônica.
Caixias do Sul 1997

Guerra, M. **Desenvolvimento de um software para a Análise de Pórticos
Espaciais Utilizando o Método da Rigidez**. Universidade Comunitária de
chapecó, Chapecó, santa Catarina, 2009.

D. H. Norrie, G. De Vries, **THE FINITE ELEMENT METHOD,
Fundamentals and Applications**, New York: Academic Press, 1973.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 7ª ed. Pearse Prentice Hall, são
Paulo, 2009.