

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

LEMNISCATA BEZERRA FLORÊNCIO

ESTUDO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA RELATIVA À
EQUIDECOMPOSIÇÃO DE REGIÕES POLIGONAIS

RECIFE
2019

LEMNISCATA BEZERRA FLORÊNCIO

**ESTUDO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA RELATIVA À
EQUIDECOMPOSIÇÃO DE REGIÕES POLIGONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

RECIFE

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Florêncio, Lemniscata Bezerra.

ESTUDO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA RELATIVA À
EQUIDECOMPOSIÇÃO DE REGIÕES POLIGONAIS / Lemniscata Bezerra
Florêncio. - Recife, 2019.

202 p. : il., tab.

Orientador(a): Paulo Figueiredo Lima

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de
Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológicas,
2019.

Inclui referências.

1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. 2. ENGENHARIA DIDÁTICA.
3. GRANDEZAS E MEDIDAS. 4. TEOREMA DE BOLYAI. 5.
EQUIDECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PLANAS. I. Lima, Paulo Figueiredo.
(Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

LEMNISCATA BEZERRA FLORÊNCIO

**ESTUDO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA RELATIVA À
EQUIDECOMPOSIÇÃO DE REGIÕES POLIGONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em 20/05/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Airton Temistocles De Castro (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

À Deus, sempre ouvindo minhas orações.

À minha família, minha mãe, meu pai e sobretudo às minhas irmãs Nínive e Naline por me ajudarem em muitos momentos.

Ao meu orientador professor Dr. Paulo Figueiredo Lima, um grande professor, que me inspira a lutar pela educação e pela vida com garra e gentileza.

À professora Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, pelos ensinamentos e contribuições ao longo, tendo sido uma forte influência ao meu ingresso no mundo acadêmico e educacional.

Ao professor Dr. Airton Temistocles De Castro, pelas contribuições na minha banca de qualificação.

À Clara pela paciência, pela atenção e por sempre estar disposta a tirar nossas dúvidas na secretaria do EDUMATEC.

Aos amigos que o EDUMATEC me propiciou, Nathalia, Wellington, Valéria e todos os outros.

À minha amiga Katy Wellen, que está comigo nesta jornada desde a graduação.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudo durante todo o período de realização deste Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos uma sequência didática relativa à equidecomposição de regiões poligonais e ao Teorema de Bolyai. No citado teorema, é estabelecido que duas regiões poligonais que possuem a mesma área são equidecomponíveis. No campo da didática da matemática, adotamos um recorte da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008) e, nos procedimentos metodológicos, percorremos etapas de uma Engenharia Didática, como proposta por Artigue (1989): análise preliminar, elaboração da sequência didática, análises *a priori* e *a posteriori*. Diante do tempo disponível para nosso trabalho, optamos por não preencher todos os requisitos de cada uma das etapas acima mencionadas. Quanto à conceituação de área como grandeza geométrica nos amparamos no trabalho de Douady e Perrin-Glorian (1989). Os sujeitos foram dois estudantes do final do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco. Neste estudo, realizamos análises *a priori* e *a posteriori* da sequência didática proposta, com destaque para possíveis rupturas na aprendizagem, em particular, saltos informacionais e obstáculos. Na análise *a posteriori*, confirmamos algumas antecipações e identificamos momentos em que se fizeram necessárias modificações para o prosseguimento da sequência proposta. Nas considerações finais, reafirmamos a relevância do tema para a formação inicial de professores de Matemática e sugerimos modificações para futuros experimentos. O suporte tecnológico escolhido foi o *software GeoGebra-Geometria*, que se mostrou, no geral, adequado à realização dos procedimentos requeridos na sequência didática.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema de Bolyai. Teoria das Situações Didáticas. Sequência didática. GeoGebra-Geometria.

ABSTRACT

In this work, we have studied a didactic sequence related to the equidecomposition of polygonal regions and the Bolyai Theorem. In the mentioned theorem, it is established that two polygonal regions that have the same area are equidecomposable. In the field of didactics of mathematics, we have adopted a section of the Theory of Situations by Guy Brousseau (2008) and, in the methodological procedures, we have gone through stages of Didactic Engineering, as proposed by Artigue (1989): preliminary analysis, elaboration of the didactic sequence, analyzes a priori and a posteriori. Given the time available for our work, we have chosen not to fulfill all the requirements for each of the steps mentioned above. As for the conceptualization of area as a geometric magnitude, we have relied on the work of Douady and Perrin-Glorian (1989). The subjects were two students at the end of the degree course in Mathematics at the Federal University of Pernambuco. In this study, we have performed a priori and a posteriori analysis of the proposed didactic sequence, highlighting possible disruptions in learning, in particular, informational leaps and obstacles. In the a posteriori analysis, we have confirmed some anticipations and identified moments when modifications were necessary for the continuation of the proposed sequence. In the final remarks, we reaffirm the relevance of the topic for the initial formation of mathematics teachers and suggest modifications for future experiments. The technological support chosen was the GeoGebra-Geometry software, which proved, in general, to be suitable for carrying out the procedures required in the didactic sequence.

KEYWORDS: Bolyai theorem. Theory of Didactic Situations. Didactic sequence. GeoGebra-Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema do sistema educacional	23
Figura 2: Esquema sistema educacional proposto por Brousseau	26
Figura 3: Esquema de situação de ação.....	28
Figura 4: Esquema de situação de formulação.....	29
Figura 5 Esquema de situação de validação	30
Figura 6: União de duas figuras poligonais.....	40
Figura 7: Jogo de quadros.....	41
Figura 8: Linhas poligonais.....	43
Figura 9: Polígonos e não polígonos	44
Figura 10: Transformações isométricas.....	46
Figura 11: Tangram: regiões poligonais equidecomponíveis.....	47
Figura 12: Quadrado e elefante: regiões poligonais equidecomponíveis.	48
Figura 13: Quadrados - Stomachion.....	48
Figura 14 : Figuras equidecomponíveis.....	49
Figura 15: Interseção de duas regiões poligonais	53
Figura 16: Interseção de dois triângulos	58
Figura 17: Interseção mínima de dois triângulos contendo algum ponto do interior	58
Figura 18: Interseção máxima de dois triângulos contendo algum ponto do interior	59
Figura 19: Triangularização da interseção $X_i \cap Y_j$	59
Figura 20: Retângulos de mesma área.....	74
Figura 21: Retângulos de mesma área caso 1	76
Figura 22: Retângulos de mesma área caso 1, retas EB e DF	76
Figura 23: Complemento da figura 22.....	77
Figura 24: Retângulos de mesma área caso 1, parte final	79
Figura 25: Retângulos de mesma área caso 2	80
Figura 26: Retângulos de mesma área caso 3	81
Figura 27: Paralelogramos de mesma base	81
Figura 28: Paralelogramos de mesma base: posições relativas.....	82
Figura 29: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 2	83

Figura 30: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 3	84
Figura 31: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 1	85
Figura 32: Atividade 1	94
Figura 33: Possíveis soluções para cada polígono da atividade1	96
Figura 34: Atividade 2	96
Figura 35: Possível solução da atividade 2 (polígono da primeira tela da atividade 1)	98
Figura 36: Atividade 3	98
Figura 37: Atividade 4	100
Figura 38: Atividade 5	103
Figura 39: Atividade 6	106
Figura 40: Linhas poligonais aberta e fechada	111
Figura 41: Atividade 1	112
Figura 42: Polígono da janela 1	113
Figura 43: Polígono da janela 2	113
Figura 44: Operação de decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1	114
Figura 45: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1	115
Figura 46: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1	115
Figura 47: Operação de decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 2	116
Figura 48: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 2	116
Figura 49: Decomposição do polígono da janela 2 pelo sujeito 2	117
Figura 50: Atividade 2	118
Figura 51: Translação de parte de uma decomposição pelo sujeito 1 .	120
Figura 52: Rotação de um triângulo em torno de um ponto	121
Figura 53: Construção do polígono recomposto do original pelo sujeito 1	122
Figura 54: Construção do polígono recomposto do original pelo sujeito 2	123
Figura 55: Atividade 3 da sequência didática	124
Figura 56: Respostas do sujeito 1 para atividade 3	125
Figura 57: Respostas do sujeito 2 para atividade 3	126
Figura 58: Atividade 4	128

Figura 59: Translações e rotações que geraram os polígonos B e C ..	130
Figura 60: Sobreposição do polígono B1 no polígono B0	131
Figura 61: Pontos de interseção	132
Figura 62: Decomposição do quadrilátero formado	132
Figura 63: Translação de cada parte da nova decomposição de B	133
Figura 64: Atividade 5 da sequência didática	135
Figura 65: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 1	139
Figura 66: Construção de um retângulo de mesma área pelo sujeito 1	140
Figura 67: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 2	140
Figura 68: Translação das partes para compor o outro polígono pelo sujeito 2	141
Figura 69: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 1	142
Figura 70: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 2	143
Figura 71: Janela do sujeito 1 - polígonos de mesma área construídos pelo sujeito 2	143
Figura 72: Janela do sujeito 2 - polígonos de mesma área construídos pelo sujeito 1	144
Figura 73: Estratégia de resolução do sujeito 1	145
Figura 74: Estratégia de resolução do sujeito 2	145
Figura 75: Uma etapa da estratégia da comprovação: triângulos ~ retângulos	147
Figura 76: Atividade 6	147
Figura 77: Construção de um retângulo a partir de um triângulo pelo sujeito 1	148
Figura 78: Construção de um retângulo a partir de um triângulo pelo sujeito 2	149
Figura 79: Sujeito 2: construção de um retângulo a partir de um triângulo retângulo	150
Figura 80: Sujeito 1: construção de um retângulo a partir de um triângulo retângulo	151
Figura 81: Construção de um retângulo a partir de um triângulo acutângulo pelos dois sujeitos	152
Figura 82: Construção de um retângulo a partir de um triângulo obtusângulo pelos dois sujeitos	152

Figura 83: Esquema da validação do Teorema de Bolyai.....	153
Figura 84: Retângulos de mesma área.....	154
Figura 85: Resolução 1 – Retângulos de mesma área.....	155
Figura 86: Retângulos de mesma área - caso 1: $AB = 12AG1$	156
Figura 87: Retângulos de mesma área - caso 2: $AB > 12AG1$	156
Figura 88: Retângulos de mesma área - caso 3: $AB < 12AG1$	157
Figura 89: Resolução 1: retângulos de mesma área - caso 1.....	158
Figura 90: Retângulos de mesma área com paralelogramos destacados pelos sujeitos - caso 2 e caso 3	159
Figura 91: Paralelogramos: apenas o ponto G é comum a CE e FD . ..	161
Figura 92: Paralelogramos: o segmento FE é comum a CE e FD	162
Figura 93: Paralelogramos: os segmentos CE e FD não têm pontos em comum	162
Figura 94: Resolução do caso 2 pelo sujeito 2	163
Figura 95: Resolução do caso 1 pelo sujeito 2	163
Figura 96: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – rotações de 180^0	164
Figura 97: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 - translações.....	165
Figura 98: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo congruente	165
Figura 99: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2	166
Figura 100: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo1 de mesma base.....	167
Figura 101: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo 2 de mesma base.....	167
Figura 102: Resolução do caso 1 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2.....	168
Figura 103: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 1)	169
Figura 104: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 2)	170
Figura 105: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 2) – transladando o paralelogramo.....	170
Figura 106: Resolução do caso 3 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2.....	171

Figura 107: Apresentação do caso 2 ao sujeito 1	173
Figura 108: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1	176
Figura 109: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1 (continuação).....	177
Figura 110: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1 (continuação).....	178
Figura 111: Apresentação do caso 3 ao sujeito 1	179
Figura 112: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 1)	180
Figura 113: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 2)	180
Figura 114: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 2, continuação)	182
Figura 115: Resolução do caso 3 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 1.....	183
Figura 116: Retornando ao caso 1	184
Figura 117: Retornando ao caso 3	185
Figura 118: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1 (tentativa 2)	185
Figura 119: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1 (tentativa 2, continuação)	186
Figura 120: Retomando o problema, nova visualização	187
Figura 121: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1	187
Figura 122: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1(continuação).....	188

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resumo nas análises das atividades 1 e 2	190
Tabela 2: Resumo nas análises das atividades 3 e 4	191
Tabela 3: Resumo nas análises das atividades 5 e 6	192
Tabela 4: Resumo da atividade complementar	193
Tabela 5: Resumo das sessões	193

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	15
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	18
3. CONCEITOS PRELIMINARES SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	23
3.1. Situações didáticas e adidáticas	25
3.2. Tipos de situações didáticas	26
3.3 Adaptação às situações: as noções de saltos e obstáculos.....	31
3.4. Engenharia didática como metodologia de ensino e pesquisa....	34
4. A MATEMÁTICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA	39
4.1. Área como uma grandeza	39
4.2. Geometria dos polígonos: conceitos preliminares.....	42
4.3. Decomposição/composição de polígonos: equidecomposição ...	47
4.4. Teorema de Bolyai	65
5. OBJETIVOS.....	87
5.1. Objetivo geral	87
5.2. Objetivos específicos	87
6. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	88
6.1. Visão geral dos conteúdos da sequência didática.....	88
6.1.1. Geometria dos polígonos: definições iniciais, decomposição/composição	89
6.1.2. Relação de equidecomposição: transitividade, conexão com a grandeza área	90
6.1.3. Teorema de Bolyai.....	90
6.2. Planejamento geral das sessões de atividades.....	91
6.3. A sequência de atividades proposta: análise a priori	91

6.3.1 Atividade 1: Decomposição de polígonos.....	94
6.3.2 Atividade 2: Composição de polígonos.....	96
6.3.3 Atividade 3: Equidecomposição como relação de equivalência: reflexividade e simetria.....	98
6.3.4 Atividade 4: Transitividade da equidecomposição	100
6.3.5 Atividade 5: Teorema de Bolyai (parte 1)	102
6.3.6 Atividade 6: Teorema de Bolyai (parte 2)	105
7. DESCRIÇÃO E ANÁLISES DO EXPERIMENTO DIDÁTICO REALIZADO	110
7.1 Primeira sessão da sequência	110
7.1.1 Atividade 1: Decomposição de polígonos.....	112
7.1.2 Atividade 2: Composição de polígonos.....	118
7.1.3 Atividade 3: Equidecomposição como relação de equivalência	124
7.1.4 Atividade 4: Transitividade da equidecomposição	127
7.2 Segunda sessão do experimento didático.....	134
7.2.1 Atividade 5: Teorema de Bolyai (parte 1)	134
7.2.2 Atividade 6: Teorema de Bolyai (parte2)	146
7.3 Terceira sessão da sequência	160
7.3.1 Atividade Complementar-sujeito 2	162
7.3.2 Atividade Complementar - sujeito 1	172
7.4 Resumo da análise a posteriori.....	189
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	194
9. REFERÊNCIAS	198

1. INTRODUÇÃO

Um dos interesses centrais da Didática da Matemática é entender e explicar dificuldades inerentes à própria Matemática que alunos e professores enfrentam em diversos contextos. Segundo Pais (2002):

A Didática da Matemática é uma das tendências da grande área de Educação Matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2002)

As pesquisas desenvolvidas dentro do grupo Pró-grandezas, da UFPE, têm evidenciado as dificuldades, nos diversos anos escolares, na compreensão pelo aluno e no ensino dos conceitos relativos ao campo das grandezas e medidas. Dentro das questões estudadas pelo grupo acima citado, escolhemos uma, que julgamos essencial: como os professores estão sendo preparados, na universidade, para elaborar situações didáticas que promovam, nos seus futuros alunos, a aprendizagem de conceitos matemáticos? Ao lado disso, a trajetória que percorremos no nosso curso universitário de licenciatura em Matemática mostrou-nos que, nem sempre, o conteúdo específico das disciplinas que cursamos parece próximo ao que é abordado em sala de aula da escola básica. O presente estudo tem como uma de suas motivações estreitar a relação entre esses conteúdos.

Uma temática importante nos campos das grandezas e medidas e da geometria é a decomposição/composição de figuras planas, visto que é um assunto presente ao longo de todo o ensino básico. E que, além disso, está apoiado sobre resultados matemáticos relevantes para os conhecimentos dos alunos de licenciatura em Matemática. Uma de nossas hipóteses é a de que o referido tema pode servir de contribuição para a formação desses licenciandos.

O tema da decomposição/composição de figuras geométricas planas, extremamente vasto, torna-se mais acessível quando nos restringimos às figuras

geométricas que são regiões poligonais. Sobre elas é que vamos nos concentrar, convencidos de que há inegável riqueza matemática no tema escolhido.

Para tanto, vamos analisar alguns fenômenos que ocorrem quando se emprega uma sequência didática destinada ao ensino e aprendizagem de propriedades geométricas relevantes nas transformações de decomposição/composição de regiões poligonais.

Em suma, o contexto matemático de nosso interesse inclui a geometria dos polígonos, os conceitos de área e de decomposição/composição de regiões poligonais. O conceito-chave que integra esses três polos é o de equidecomposição de regiões poligonais. As regiões equidecomponíveis possuem a mesma área. Este é um fato de importância teórica e prática e que deriva, de modo quase imediato, dos princípios adotados para o conceito matemático de área. Em certo sentido, é um conhecimento que possui uma “base empírica” forte e por isso pode ser considerado de fácil compreensão. O mesmo não ocorre, quando nos propomos a examinar a validade da proposição recíproca: duas regiões de mesma área são equidecomponíveis. A resposta positiva a essa questão é o conhecido Teorema de Bolyai.

É importante observar que durante todo o trabalho será central o conceito de área para realização das atividades de decomposição/composição. Por isso, dedicamos atenção a conceituar área como grandeza geométrica, seguindo a abordagem defendida nos estudos das francesas Douady e Perrin-Glorian (1989) e que formam a base das pesquisas realizadas no Grupo Pró-grandezas, já citado.

Nesta pesquisa, nos apoiamos em alguns dos construtos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Guy Brousseau e que tem papel relevante nas pesquisas da Didática da Matemática. Brousseau, traz em seus estudos o conceito de *rupturas na aprendizagem*, com destaque para duas categorias: *saltos informacionais* e *obstáculos*.

Na metodologia de pesquisa, percorremos alguns dos requisitos de uma Engenharia Didática, proposta por Artigue (1989).

O objetivo geral de nossa dissertação, como detalhado adiante, é o de elaborar e analisar uma sequência didática para a aquisição do conceito e das propriedades da equidecomposição de regiões poligonais e do Teorema de Bolyai, uma das proposições matemáticas mais instigantes quando se estuda a

decomposição/composição de regiões poligonais. Além disso, procuramos investigar possíveis rupturas na aprendizagem da referida sequência didática.

Entre os recursos didáticos a serem mobilizados neste estudo incluímos o emprego do *software GeoGebra-Geometria*, para a resolução das atividades propostas.

No capítulo que segue, esboçamos uma revisão da literatura com a qual a presente dissertação está ligada, tanto os trabalhos na área da Didática da Matemática, quanto no campo da Matemática.

Na sequência, procuramos delinear as bases teóricas amparadas na Didática da Matemática (capítulo 3) e na Matemática (capítulo 4).

Os objetivos da pesquisa são apresentados no capítulo 5 e reservamos o capítulo 6, para uma descrição da análise preliminar da sequência e do experimento didático proposto.

O capítulo 7, o mais longo, traz o relato do experimento didático, acompanhado da análise *a posteriori* das atividades.

As considerações finais encerram os capítulos da presente dissertação, seguidas das referências.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, esboçamos uma visão panorâmica de outros estudos com os quais podemos estabelecer ligações com o presente trabalho.

Facco (2003) apresenta uma sequência de atividades envolvendo a decomposição e composição de figuras planas, com e sem auxílio do Tangram ou da malha quadriculada, como propostos no ensino do conceito de área. O objetivo da pesquisa foi o estudo dos fenômenos que interferem no ensino-aprendizagem desse conceito. Ao todo, a pesquisadora elaborou sete atividades que mostram como a escolha de algumas situações-problema possibilitam a compreensão de área como grandeza. Facco (2003) conclui que o uso da sequência de atividades proposta, voltada à decomposição e composição de figuras planas para alunos da 5ª série do Ensino Fundamental, facilita o processo ensino-aprendizagem do conceito de área. E ainda, traz também um estudo sobre a comparação de áreas por corte e colagem como facilitador desse processo.

Além disso, a pesquisadora ressalta que para trabalhar as figuras planas, o professor precisa refletir sobre as concepções que orientam e fundamentam as atividades que envolvem conceitos de área.

Secco (2007), assim como Facco, propõe uma sequência de atividades compreendendo decomposição e composição de figuras planas. O objetivo da pesquisa foi investigar, por meio do uso da decomposição e composição de figuras planas, como o conceito de área pode ser apresentado de maneira significativa e motivadora aos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, abrangendo no seu estudo a demonstração das fórmulas de área de figuras geométricas planas.

O pesquisador dividiu a sequência em três blocos de atividades que evidenciassem o aspecto bidimensional das figuras, voltadas ao processo de decomposição e composição das figuras planas. Os dois primeiros blocos mostram que o processo de decomposição e composição de figuras poligonais planas contribui para a apropriação do conceito de área de um polígono, utilizando material concreto e o *software* de geometria *Cabri-Géomètre*. Em relação ao uso do *software Cabri-Géomètre*, o estudo em questão conclui que o emprego desse recurso tecnológico permitiu aos alunos “fazer matemática”, isto

é, experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar. O terceiro bloco serviu para sistematizar o que foi verificado nos blocos anteriores e teve como objetivo introduzir as fórmulas para o cálculo de área de figuras geométricas planas mais comuns. O pesquisador conclui que esse processo de decomposição e composição favoreceu a passagem do empírico para o dedutivo.

Ferreira (2010), também interessada no ensino e na aprendizagem do conceito de área, realizou uma pesquisa que teve por objetivo investigar a construção desse conceito. Podemos destacar dois aspectos importantes em sua pesquisa: a preocupação na dissociação entre área e perímetro e o uso da técnica de decomposição e composição como meio para construção do conceito de área como grandeza. A pesquisadora defende que o conceito de área perpassa quatro tipos de situações: comparação, medida, mudança de unidade e de produção. Por ser do nosso interesse, destacamos um dos procedimentos que tratam das situações de comparação, mais especificamente a equidecomposição de figura planas. No referido trabalho, é sinalizado que nesse tipo de estratégia, não há a intervenção do quadro numérico, reforçando assim o conceito de área como grandeza.

Suas atividades foram realizadas com alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental e mostraram que eles tiveram avanços em relação ao procedimento de decomposição e recomposição de figuras.

Na mesma época, Pessoa (2010) realiza um estudo cujo objetivo foi fazer um diagnóstico sobre os procedimentos utilizados pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de atividades que envolvem o cálculo de área com o uso da malha quadriculada. No estudo, mostrou-se que o uso desse tipo de malha favorece a compreensão do conceito de área como grandeza, em especial por meio da decomposição/composição de figuras, o que evidencia a invariância da área por equidecomponibilidade.

Silva (2016) investiga o modo como alunos de 6º ano do Ensino Fundamental abordam as situações que dão sentido à área como grandeza (comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície) em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e *software* de geometria. Como Ferreira (2010), o pesquisador traz os procedimentos de decomposição e composição como parte das atividades

que devem ser propostas dentro das situações de comparação. Silva (2016) mostra como o *software Apprenti Géomètre 2* beneficiou a utilização de procedimentos de decomposição e composição, uma vez que permite ao aluno fazer várias transformações, ampliando as possibilidades de resolução.

Vimos, até aqui, que as pesquisas citadas, utilizam a noção de área como grandeza e utilizam a decomposição/composição em suas atividades como procedimento para o cálculo e/ou comparação de áreas. Fazem referência a essa técnica destacando como os alunos avançaram na realização dos problemas. Pontuam, ainda, a importância dessa estratégia na resolução das diversas atividades propostas, seja em papel e lápis ou *softwares* de geometria. Em todos os trabalhos, a decomposição/composição de figuras, ora ajudou, ora era o modo exigido para a realização da tarefa.

Acreditamos que esses trabalhos sejam suficientes para compreendermos a extensão e a relevância do uso da decomposição/composição de figuras planas, sendo essas uma das motivações para nos dedicarmos ao tema. Por outro lado, destacamos que essas pesquisas não têm a intenção de discutir o que sustenta essa operação de decomposição/composição. Mais especificamente, tal estratégia, amplamente utilizada é válida do ponto de vista da Matemática?

Os trabalhos citados amparam-se, em diversos graus, em teorias no campo da educação matemática, particularmente, da Didática da Matemática. Em todas essas pesquisas, a decomposição/composição de polígonos e suas relações com o conceito de área ocupam lugar central. Resulta disso que nosso estudo aproxima-se dessas investigações em vários pontos. No entanto, diferencia-se delas pela adoção da Teoria das Situações Didáticas como quadro teórico que dá suporte à presente pesquisa. Além disso, em nenhum deles é abordado o Teorema de Bolyai. A escolha do *software Geogebra-Geometria* é, também, um traço distintivo deste estudo em face das pesquisas citadas.

Quando buscamos estudos em língua portuguesa que tratam dos temas escolhidos na presente dissertação do ponto de vista predominantemente matemático, nos deparamos com poucas obras. A seguir citamos alguns desses trabalhos.

Lima (1985) traz uma breve exposição puramente matemática sobre polígonos equidecomponíveis, incluindo a demonstração do Teorema de Bolyai, numa abordagem que visa ao professor do ensino médio.

Fernandes (2018) realizou uma dissertação na qual se apresentam os conceitos e se demonstram proposições relacionadas à equidecomposição de polígonos e de poliedros, em especial o Teorema de Bolyai. Em relação ao presente estudo, outros temas matemáticos são abordados no texto citado, a exemplo, de um extenso estudo das isometrias na reta, no plano e no espaço, bem como da equidecomposição de poliedros.

Também é feito um levantamento de atividades de decomposição e composição em alguns livros didáticos. Por fim, são propostas atividades para ensino desse conteúdo. Nesse trabalho, não se discutem os fenômenos do ensino e da aprendizagem sob o ponto de vista da didática da matemática nos moldes adotados na presente dissertação, tampouco é feito um experimento didático com as atividades propostas, que se restringem a sugestões para o trabalho docente.

Sobre o tema central desta dissertação, a equidecomposição de polígonos, do ponto de vista estritamente matemático, existe uma numerosa bibliografia em língua estrangeira, da qual extraímos apenas uma pequena seleção.

O texto motivador de nosso trabalho é o conhecido *Figuras equivalentes y equicompuestas*, de V. G. Boltianski, que faz parte da série de divulgação científica, produzida por matemáticos russos de renome, editados pela Editorial MIR, de Moscou, aqui utilizado na tradução espanhola datada de 1981. Além da noção de equidecomposição de polígonos e do Teorema de Bolyai, que abordamos na presente dissertação, a obra citada estende-se por vários outros conteúdos matemáticos tais como; Teorema de Hadwiger-Glur; equidecomposição e noção de invariante aditivo; equidecomposição e noção de grupo; equidecomposição de poliedros, incluindo os Teoremas de Dehn e de Hadwiger.

Para um olhar mais rigoroso do ponto de vista da geometria, a literatura estrangeira nos oferece obras mais avançadas, como as de Greenberg (1997) e Hartshorne (2000). O primeiro é um dos melhores livros-texto, no qual o extenso trabalho de revisão dos *Elementos* de Euclides é apresentado, de modo

acessível a estudantes de graduação em Matemática, em uma abordagem estruturada e logicamente rigorosa da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica. O segundo, mais avançado, percorre caminho parecido, com mais proximidade às características do texto original euclidiano. Contém uma teoria de área, análoga à que se constrói em Moise (1963) e, além disso, aborda, com rigor, o tema de equidecomponibilidade de polígonos, conceito que será o centro das atenções do presente trabalho.

Esboçada a revisão de obras com os quais podemos estabelecer ligações com o presente trabalho, passamos, nos dois capítulos subsequentes a delinear nosso suporte teórico, tanto no campo da didática da matemática quanto no da própria matemática.

3. CONCEITOS PRELIMINARES SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

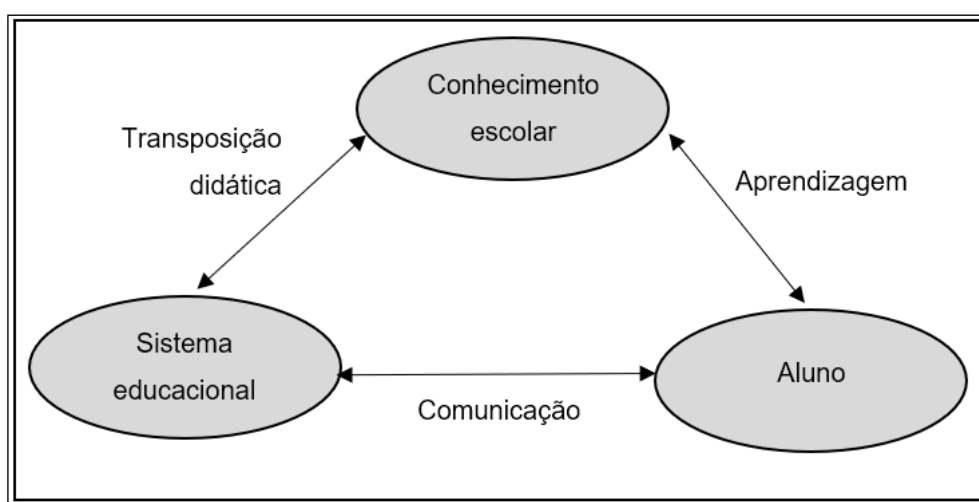
A teoria em epígrafe começou a ser desenvolvida por Guy Brousseau desde a década de 1970 e representa um significativo avanço para as pesquisas no campo da Didática da Matemática. Em seu livro *Introdução ao estudo das situações didáticas*, publicado em 2008, Brousseau inicia um diálogo com as seguintes questões:

[...] em que medida o sucesso da transmissão dos conhecimentos matemáticos depende das ciências da educação, da psicologia ou da própria Matemática? Que lugar ocupam nessa difusão os conhecimentos de didática e, mais precisamente, de didática da Matemática? [...] (BROUSSEAU, 2008, p.15)

Esses questionamentos motivaram e ainda motivam o estudo e a pesquisa na Didática da Matemática e sugerem um novo olhar sobre as concepções relativas à aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No início de seu texto, Brousseau apresenta um esquema para facilitar o entendimento da relação frequente entre o sistema educacional, o aluno e o conhecimento:

Figura 1: Esquema do sistema educacional



Fonte: Brousseau (2008, p. 17)

Esse esquema evidencia que o ensino é produto de uma comunicação entre aluno e sistema educacional atrelados a um conhecimento específico.

Brousseau prossegue com novas indagações: que condições podem ser propiciadas para que um sujeito qualquer tenha a necessidade de um conhecimento matemático determinado para tomar certas decisões? E como explicar de antemão a razão pela qual o faria? (BROUSSEAU, 2008). Ensinar e praticar era a resposta que o ensino tradicional reservava a essas questões.

Mas a pesquisa sobre a aquisição de conhecimento não avançaria apenas pelo estudo dos problemas e exercícios específicos para cada noção matemática existente.

Brousseau (2008) movido pela necessidade de responder a essas perguntas desenvolve a sua teoria cujos objetivos principais são: o estudo das condições que propiciam o conhecimento matemático e a criação de modelos que possibilitem a aquisição desses conhecimentos.

Uma noção essencial para o estudo dessa teoria é a noção de *situação* que será definida como:

[...] o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. Algumas dessas *situações* requerem a aquisição “anterior” de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial¹. (BROUSSEAU, 2008, p.19)

O autor ressalta que a palavra *situação* serve para descrever tanto o conjunto de condições que delimitam uma ação quanto um dos modelos usados para estudá-la.

Outra noção relevante é a noção de *meio*, à qual o autor se refere definindo-a como um subsistema autônomo, antagônico ao sujeito. Para o pesquisador:

Os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio, considerando como um sistema. Portanto, é o meio que deve ser modelado. Assim, um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que *responde ao sujeito*, segundo algumas regras. (BROUSSEAU, 2008, p. 19)

¹ O termo “gênese artificial” é usado para designar o processo pelo qual os alunos constroem por si mesmos o conhecimento.

Notemos que o investigador sugere o uso desse meio no processo de construção do conhecimento, meio que passa a ser utilizado em sala de aula como uma ferramenta.

A noção de engenharia didática, desenvolvida por Brousseau, surge no contexto da teoria das situações didáticas como um modo de elaboração e experimentação de situações, no contexto do ensino, que favoreçam a efetivação da aprendizagem. Tal metodologia, simultaneamente, foi estendida as investigações em didática da matemática.

3.1. Situações didáticas e adidáticas

Iniciemos recorrendo a Brousseau:

Uma interação torna-se didática, se e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimento do outro. (BROUSSEAU, 2008, p. 53).

Essa intencionalidade de ensino é o que marca o verdadeiro significado de uma situação didática, um cenário de uma sala de aula, mesmo bem equipada com vários materiais de ensino não determina uma situação didática. Diremos que uma situação didática é estabelecida num contexto escolar quando toda a interação dos indivíduos e o meio determinado foi pensada com a finalidade da aprendizagem de um certo conhecimento matemático.

Brousseau estabelece, também, uma outra noção que representa, em sua teoria, o principal momento da aprendizagem:

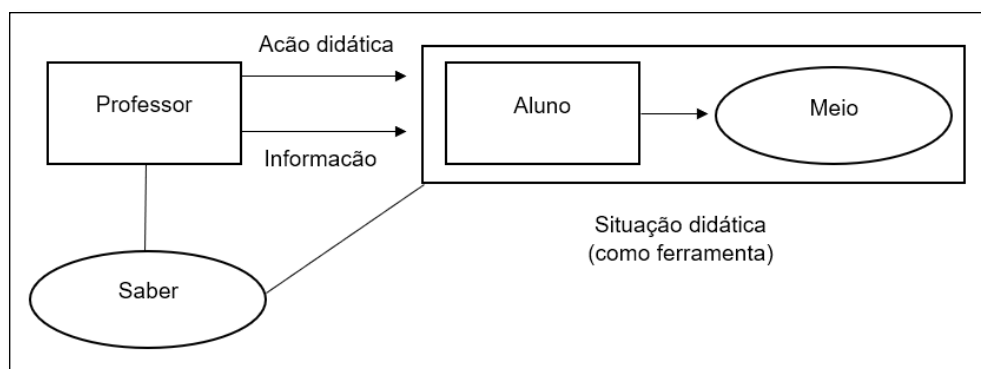
Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (BROUSSEAU, 1986 citado em PAIS, 2001, p.68)

É importante entender a ideia de uma situação não estar no controle do professor e ser parte fundamental do processo de aprendizagem. De fato, esta é a característica de uma situação adidática: toda a interação do aluno com o meio sem a influência do professor. Observamos uma situação adidática quando o aluno quer resolver o problema pelo desejo de cumprir o desafio e não por uma

cobrança do professor. O estudante consegue extrapolar a realidade de sala aula e aplicar seus conhecimentos nesse “novo meio”. Contudo, mesmo que o professor não controle esse meio, é função dele criá-lo, permitindo que o aluno interaja com esse meio de forma independente.

Brousseau propõe uma representação esquemática para o entendimento de tal relação:

Figura 2: Esquema sistema educacional proposto por Brousseau



Fonte: Brousseau (2008, p.54)

A representação triangular posta anteriormente das situações de ensino (Figura 1) em que se consideram apenas as relações entre professor, aluno e saber é recriada por Brousseau (2008), para incluir a relação do aluno com o *meio adidático*. Por isso, ele sugere uma configuração como a da Figura 2. Destacamos, ainda, que esses meios adidáticos são regidos pelas situações adidáticas.

3.2. Tipos de situações didáticas

Um professor/pesquisador para ensinar um conhecimento, controlar ou analisar sua aquisição utiliza alguns mecanismos que incluem peças materiais como as de um jogo, um desafio ou fichas de exercícios, além das regras de funcionamento desses mecanismos. Podemos dizer que um efeito de ensino começa a ser gerado à medida que esses mecanismos começam a sofrer interação, ou seja, quando o jogo começa a ser jogado. Devemos, portanto, incluir em nossas pesquisas

[...] o estudo da evolução da situação, visto pressupormos que a aprendizagem é alcançada pela adaptação do sujeito que assimila o meio criado por essa situação, independentemente de qualquer intervenção do professor ao longo do processo. Os conhecimentos se manifestam essencialmente como instrumentos de controle das situações. (BROUSSEAU, 2008, p. 22)

Numa primeira abordagem, o pesquisador francês classifica as situações em três tipos: *situação de ação*, *situação de formulação* e *situação de validação*, que são caracterizadas a seguir. Essas situações constituem fases que o aluno enfrenta na sua aprendizagem. De uma forma mais geral, essas relações do aluno com o meio são: troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisão); troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens); troca de opiniões (sentenças referentes a um conjunto de enunciados que exerce o papel de teoria).

Situação de ação

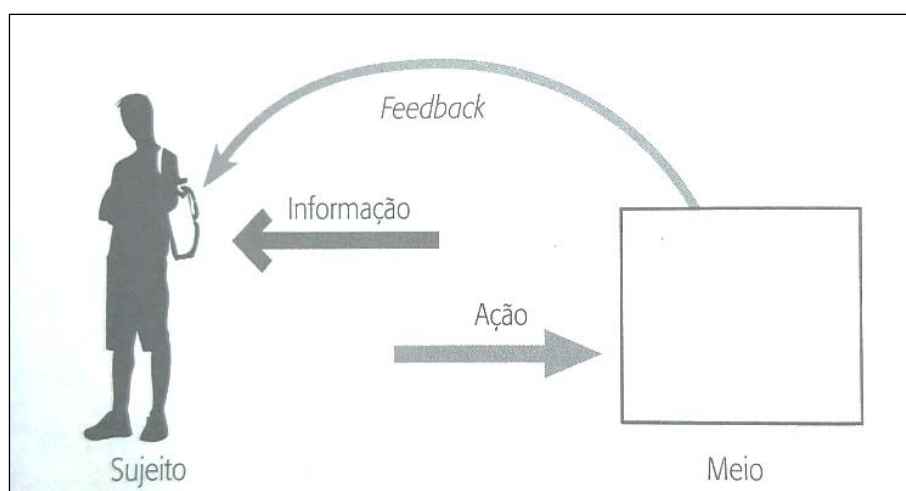
Uma situação de ação pode ser observada quando diante de uma tarefa, um jogo por exemplo, o aluno começa a agir e participar. Ela existe enquanto o sujeito executa a ação motivado por vontade própria.

Em um jogo, esse aluno será capaz de formular uma tática, esclarecê-la e deduzir informações conforme realiza várias partidas. Ele utiliza regras, nem sempre corretas, no domínio em que está inserido, baseadas em um certo raciocínio ou intuição. Essas regras, segundo as quais o aluno irá decidir como atuar, são chamadas, por Brousseau (2008), de *modelo implícito*. Ele explica, também:

A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema. (BROUSSEAU, 2008, p. 25)

Para uma situação de ação, o pesquisador sugere o seguinte esquema:

Figura 3: Esquema de situação de ação



Fonte: Brousseau (2008, p.28)

Nesse esquema, o sujeito troca informações, sem codificação ou linguagem, em meio a ações e decisões. Além disso:

Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (*feedback*), antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. (BROUSSEAU, 2008, p.28)

Os procedimentos que cada aluno aparenta tomar ou as afirmações sobre aquilo que aparenta considerar são projeções que permitem representar os conhecimentos. Tais conhecimentos são modificados, num processo que resultará na aprendizagem

Situação de formulação

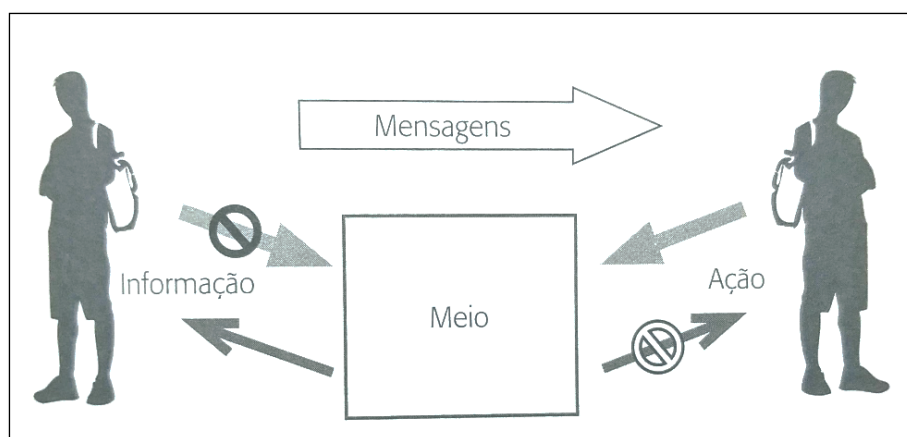
Voltando à ideia do jogo, em uma situação de formulação, o aluno deve entender como ele conseguiu vencer uma partida, que regras implícitas foram as que ele usou. Nessa situação, o aluno deve ser capaz de comunicar a um colega suas estratégias, isto é, pode, por meio da linguagem, informar como é possível ganhar, ou não, o jogo. Ele passa, então, a trabalhar na formulação das regras que antes ele entendia, apenas, que funcionavam.

O aluno, então, faz suas formulações a cada modificação do meio, no decorrer do jogo, de acordo com a interpretação de suas respostas nas jogadas anteriores.

Observou-se que a mera formulação não tinha influência alguma sobre os conhecimentos e as convicções dos alunos, mas impedia o desaparecimento dos *teoremas-em-ato*² (BROUSSEAU, 2008, p.26).

Para esta fase Brousseau apresenta o seguinte esquema geral:

Figura 4: Esquema de situação de formulação



Fonte: Brousseau (2008, p.29)

Podemos então afirmar, que ao resgatar, reconhecer, e reconstruir um conhecimento implícito dentro de uma linguagem, o sujeito está formulando esse conhecimento. Quando o meio impõe essa condição de formulação, surge, com ele, um outro sujeito (real ou fictício) a quem, por meio de mensagem, o primeiro sujeito irá passar suas informações. É a intenção da comunicação que exige a formulação e esta acontece à medida que o sujeito é capaz de retomar à ação inicial e gerar informações sobre o conhecimento anterior utilizado.

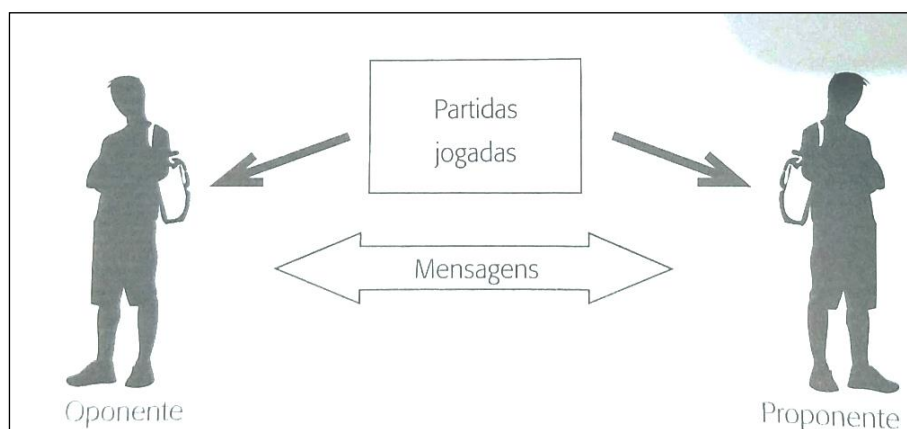
Situação de validação

Esta fase ocorre quando é preciso que, além de comunicar um fato, o sujeito saiba como comprová-lo. Nessa situação, o aluno deve mostrar o que sustenta suas afirmações ou demonstrá-las. Ele elabora, assim, teorias com a finalidade de provar suas argumentações. Nesse processo, o aluno passará por correções que assegurarão a pertinência dos conhecimentos mobilizados.

² “Teoremas-em-ato” é um conceito introduzido pela *Teoria dos campos conceituais* elaborada por Gérard Vergnaud e pode ser encontrada mais detalhada em Vergnaud (1990).

Para a situação de validação foi exibido um esquema como o da figura abaixo:

Figura 5 Esquema de situação de validação



Fonte: Brousseau (2008, p.30)

Brousseau descreve essa modelagem da seguinte maneira:

[...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. (BROUSSEAU, 2008, p.30)

Situação de institucionalização

Além das fases descritas, Brousseau considerou, com o aprofundamento posterior de suas pesquisas, a necessidade de conceber uma ampliação do modelo por ele proposto:

No passado, acreditávamos que, ao considerarmos as situações de ação, formulação e validação, dispúnhamos já de todos os tipos possíveis de situação. [...] Mas, no decorrer das experiências desenvolvidas na escola Jules Michelet, vimos que os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. Não queriam

passar de uma lição à seguinte, queriam parar para “rever o que já haviam feito” (BROUSSEAU, 2008, p.31)

Teorizando sobre essa observação empírica, o pesquisador francês estendeu sua modelização das situações didáticas possíveis, para incluir uma quarta fase, a *situação de institucionalização*.

Nessa fase, com interferência decisiva do professor, procuram-se; explicitar as produções dos alunos e as intervenções do professor; descrever organizadamente os fatos observados, atribuindo-lhes a importância pertinente a cada um deles; identificar o objeto de ensino, colocando-o no contexto do saber matemático culturalmente estabelecido, e indicando futuras utilizações desse objeto de ensino.

Um dos papéis dessa institucionalização é o de aumentar as possibilidades de permanência mais duradora dos conhecimentos adquiridos:

Tal como os *teoremas-em-ato* desapareceriam rapidamente diante da ausência de uma formulação e uma comprovação, os conhecimentos particulares, e até mesmo os públicos, continuariam contextualizados e tenderiam a desaparecer na maré das lembranças cotidianas, **caso não fossem recolocados em um repertório especial, cuja importância e uso não foram confirmados pela cultura e pela sociedade** (Grifo nosso). (BROUSSEAU, 2008, pp.31,32)

A institucionalização cumpre, assim, papel importante na evolução dos conhecimentos para que atinjam um *status* de saber culturalmente construído.

3.3 Adaptação às situações: as noções de saltos e obstáculos

De início, recorremos a Brousseau (2008):

A aprendizagem apresenta frequentes **rupturas** (grifo nosso) que podem ter origens e formas variadas: **saltos informacionais** (grifo nosso), mudanças nas formas de controle (proto, para ou matemático), origem ontogenética, escolha didática, contingência epistemológica, etc. Algumas das concepções não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então “obstáculos”. (BROUSSEAU, 2008, p.48)

A teoria proposta por Brousseau é um modelo teórico no qual se procura aprofundar o conhecimento sobre fenômenos do ensino e da aprendizagem, a exemplo dos mencionados acima, em particular as origens e consequências desses fenômenos.

Um passo nessa direção é a modelização das diversas situações possíveis:

Os sujeitos (e as instituições) se adaptam, às situações e, para tanto, fabricam conhecimentos e saberes. [...] as variantes de uma situação relativa a um mesmo saber matemático podem apresentar grandes diferenças de complexidade e, em consequência, levar a diferentes estratégias ótimas e, também, a diferentes maneiras de conhecer um mesmo saber. (BROUSSEAU, 2008, pp.44,45)

É assim que deve seguir o ensino, saindo de um ponto com certo grau de complexidade, para outro com um maior grau. Mas a pergunta que fazemos é: teria o aluno como passar de um grau para outro de modo natural? Ou seria melhor ajudá-lo a passar logo para uma situação mais complexa? A resposta que Brousseau nos propõe é: **depende**.

Em algumas situações, pode ser recomendado que façamos uso de uma progressão, por meio de *saltos informacionais*, buscando-se uma motivação maior para que ele descubra, por si mesmo, a solução de certo problema. Nesse caso, um modo a ser empregado pode ser: propor modificações de uma variável didática com características informacionais diferentes, o suficiente para lhe sugerir uma mudança de estratégia de abordagem do problema. Com isso, se procuraria diminuir a dificuldade de mudança de complexidade da situação.

Contudo, há dificuldades de aprendizagem que vão requerer uma discussão das ideias de **concepção** e de **obstáculo**:

Cada maneira organizada, mas particular, de considerar uma noção matemática constitui o que chamamos de *concepção*. Por exemplo, distinguimos várias concepções diferentes da divisão. A passagem de um conhecimento a outro, dentro de uma mesma concepção, não é difícil. O mesmo vale para a aprendizagem, visto que corresponde ao que Piaget identifica como uma assimilação. Já a passagem de uma concepção para outra é mais difícil, pois

corresponde a uma mudança significativa de repertório. Sua aprendizagem exige certa reorganização dos conhecimentos anteriores (uma acomodação). [...] Algumas das concepções adquiridas não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então “obstáculos” (BROUSSEAU, 2008, pp.47,48)

O conceito de “obstáculo epistemológico” surge inicialmente em 1938 com o pesquisador francês Gaston Bachelard. Para o pesquisador, o obstáculo constitui-se em um conhecimento já concretizado e resistente à implantação de novas concepções, pois causa instabilidade intelectual em quem o possui. Na época, esse pesquisador afirmou que na Matemática esse tipo de obstáculo não acontecia.

Guy Brousseau é responsável por estender ao contexto da educação matemática a noção de obstáculo epistemológico. Ao estudar a modelagem das situações Brousseau (2008), diferentemente do que pensava Bachelard, propõe a seguinte caracterização do conceito:

- Um obstáculo é um “conhecimento” no sentido que lhe demos de “forma regular de considerar um conjunto de situações”.
- Tal conhecimento dá resultados corretos ou vantagens observáveis em um determinado contexto, mas se revela falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo.
- O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado “de acordo com” o conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos etc. Entre eles, não existe relações “lógicas” evidentes que permitam desacreditar facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo. Ao contrário, a competição entre eles acontece no primeiro contexto.
- Os conhecimentos aqui considerados não são construções pessoais variáveis, mas, sim, respostas “universais” em contextos precisos. Portanto, surgem quase necessariamente na origem de um saber, seja ela histórica ou didática. (BROUSSEAU, 2008, p.49)

Podemos parafrasear parte do texto citado, dizendo que um obstáculo é um conhecimento adquirido pelo sujeito que é válido e útil em certas situações e

que se revelam errados ou inúteis noutras situações. Além disso, aparecem como dificuldades na aprendizagem, pela resistência dos sujeitos a abandonar o conhecimento anterior.

Brousseau (2008) acrescenta, ainda:

Os obstáculos não desaparecem com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, opõe resistência a sua aquisição, a sua compreensão, retarda a sua aplicação, subsiste em estado latente e reaparece de súbito em especial no contexto anterior, quando as circunstâncias o permitem. (BROUSSEAU, 2008, p.50)

Podemos compreender esses obstáculos como parte integrante do processo de aquisição do conhecimento.

Uma advertência final se faz necessária. Nos limites determinados para este trabalho, optamos por um emprego limitado da extensa e complexa Teoria das Situações Didáticas, com sua riqueza de conceitos marcantes para a didática da matemática.

De fato, nosso objetivo nesta investigação é nos restringirmos a analisar ocorrências **rupturas na aprendizagem**, fazendo, simultaneamente, propostas relativas à sua tipologia, seguindo as ideias apresentadas por Brousseau (2008, p.48).

Em estreita conexão com o modelo didático mais geral proposto pela Teoria das Situações Didáticas, evoluiu a metodologia de ensino e pesquisa, que se denominou **engenharia didática**. Sobre tal metodologia, discorreremos na seção seguinte.

3.4. Engenharia didática como metodologia de ensino e pesquisa

Tomemos separadamente os termos da expressão *engenharia didática*. Por *engenharia* entendemos como a aplicação de métodos científicos ou empíricos à utilização dos recursos da natureza em benefício do ser humano. Consideremos *didática* como a “arte de ensinar”, transmitir conhecimentos. Podemos adotar a seguinte formulação: *engenharia didática* é uma ferramenta metodológica, baseada em conhecimentos científicos ou empíricos com intuito de ensinar.

A origem dessa expressão remonta ao início da década de 1980 na França, inserida nos estudos da *Didática da Matemática*, quando pesquisadores

necessitavam de uma metodologia que os auxiliasse no preparo e análise de sequências didáticas em sala de aula. Era preciso considerar as especificidades do conteúdo matemático nas questões didáticas, o que as metodologias da educação não favoreciam de modo adequado.

Da comparação com o trabalho dos engenheiros, surge a expressão engenharia didática. Segundo Artigue (1988) citado em Machado (1999),

[...] este termo foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos específicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (MACHADO, 1999. p. 198)

A engenharia didática pode ser entendida como uma organização metodológica para pesquisas em sala de aula que tenham como objetivo a aprendizagem. Caracterizada por Artigue (1988) como um esquema experimental que se baseia em uma “realização didática” em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e análise de sequências didáticas. Entenderemos por *sequência didática* todos os mecanismos utilizados pelo professor no desenvolvimento de certo conteúdo escolar.

Segundo Artigue (1988), a engenharia didática como metodologia de pesquisa distingue-se de outras metodologias baseadas nas experimentações em sala de aula, não pelos seus objetivos, mas pelo seu funcionamento e modo de validação. Esta validação é essencialmente interna estabelecida pelo confronto da análise *a priori* com a análise *a posteriori*.

A pesquisadora divide a engenharia didática em quatro fases: a) análise preliminar, b) concepção e análise *a priori*, c) experimentação e d) análise *a posteriori* e validação da sequência aplicada.

A primeira fase é responsável por toda a base teórica necessária para a concepção da engenharia. Nela é realizado um vasto estudo sobre o objeto de pesquisa e todo o quadro teórico didático geral que é somado aos conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudados. Está apoiada, também, em um certo número de análises preliminares que consideram sobretudo os objetivos específicos da pesquisa:

- Análise epistemológica dos conteúdos propostos para o ensino;
- Análise do ensino usual e seus efeitos;
- Análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- Análise do campo de limitações no qual irá se situar a efetiva realização didática.

De acordo com Machado:

As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. É evidente que cada uma delas acontecerá ou não dependendo do objetivo da pesquisa, e é esse objetivo também que determinará o grau de profundidade dessas análises. (MACHADO, 1999, pp. 201,202)

Segundo Bittar (2017), é nessa fase preliminar que o pesquisador elabora suas hipóteses cognitivas e didáticas que fundamentarão a construção da sequência didática.

Na fase de concepção e análise *a priori*, o professor/pesquisador descreve propriamente a sequência e prepara uma análise antecipada dos fatos.

É nessa fase que o pesquisador começa a atuar sobre um certo número de variáveis do sistema que serão chamadas de *variáveis de comando* as quais ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado. Artigue (1988) citada em Machado (1999), para facilitar a análise da engenharia distingue dois tipos de variáveis de comando:

- variáveis macrodidáticas ou globais concernentes à organização global da engenharia;
- variáveis microdidáticas ou locais concernentes à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase. (MACHADO, 1999, p.203)

Dependendo do conteúdo didático a que se destina o ensino ambas podem ser de ordem geral ou específica. Artigue (1999) explica que, no caso em que a variável seja do tipo microdidático, existem as variáveis específicas do problema que são de ordem geral e as que dependem da situação, que estão relacionadas à organização e gestão do meio, que são específicas.

Lembraremos que o processo de validação, essencialmente interno, característica original desta metodologia, começa a ser traçado na análise *a priori*. Veremos que:

O objetivo da análise *a priori* é de determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e seus significados. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e estas são as hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto realizado na quarta fase entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (ARTIGUE, 1988 citada em MACHADO, 1999, p.205)

A análise *a priori* compõe-se, essencialmente, de uma parte descritiva e outra de previsão. Comporta, além disso, uma análise das características da situação a-didática que o professor/pesquisador deseja construir e que, a partir dela, irá buscar a devolução nos alunos. É, portanto, função desta análise:

- descrever cada escolha local feita (eventualmente relacionando-as às escolhas globais) e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;
- analisar qual o desafio da situação para o aluno decorrentes das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e validação que ele disporá durante a experimentação;
- prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrem, resultarão no desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (MACHADO, 1999, p.205)

A terceira fase é a da experimentação. É a fase de aplicação da sequência com a participação dos alunos. Ela tem início a partir do primeiro contato do realizador da engenharia com os alunos participantes da investigação. Nesta fase é preciso:

- explicitar os objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos que participarão da experimentação;
- identificação do contrato
- aplicar os instrumentos de pesquisa;
- registrar as observações feitas durante a experimentação. (MACHADO, 1999, p.207)

Essa fase sustentará a análise *a posteriori* e, para tanto, deve-se respeitar, ao máximo, as escolhas feitas na análise *a priori* para que a confrontação dessas duas análises não seja prejudicada.

A quarta fase – análise *a posteriori* e validação – Machado (1999) afirma apoiar-se sobre todos os dados colhidos durante a experimentação, constantes das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe ou fora dela.

Segundo Bittar (2017) a análise *a posteriori* deve ser feita sempre em confronto com o previsto na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados. Ainda segundo a pesquisadora, uma das características marcantes da engenharia didática é o confronto contínuo, ao longo da realização da sequência, entre análise *a priori* e análise *a posteriori*, uma vez que é esse confronto que permite redefinir rumos, quando necessário. Esse confronto tem a função, portanto, de validar ou refutar as hipóteses iniciais da pesquisa.

Pelo exposto, ficam evidentes a multiplicidade, a variedade e a extensão das etapas de uma engenharia didática, sem esquecer as imbricações mútuas entre essas etapas e, ainda, a necessidade de uma intensa e extensa fase de experimentação com os sujeitos da aprendizagem. Ainda que nós nos atenhamos a tratar de uma engenharia didática focalizada em um campo restrito do conhecimento, a exemplo do que propomos neste trabalho, a elaboração e a experimentação dessa metodologia, em sua integralidade, extrapolariam os limites desta dissertação. Daí porque, optamos por fazer um recorte na citada metodologia, restringindo-nos a abordar, na fase preliminar, a dimensão matemático-epistemológica do conteúdo alvo da nossa investigação – equidecomposição de figuras planas e Teorema de Bolyai – bem como de suas consequências sobre as análises *a priori* e *a posteriori* das situações propostas. Na fase de experimentação, optamos por um **estudo de caso** com uma dupla de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

4. A MATEMÁTICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

4.1. Área como uma grandeza

No presente trabalho, o conceito de área é fundamental. Nesta seção, dedicamos a atenção a esse conceito, que é básico na Matemática, nas atividades científicas, tecnológicas e, também, no nosso cotidiano.

Iniciamos por considerar uma família Φ de subconjuntos do plano da geometria euclidiana. Podemos chamar tais subconjuntos de **figuras geométricas**. Definimos uma função α que associa a todo subconjunto A pertencente a Φ de um número real $\alpha(A)$ tal que as condições abaixo se verificam:

- a) Se figura geométrica A tem interior não vazio, então, $\alpha(A) > 0$; se o interior de A é vazio, então, $\alpha(A) = 0$.
- b) Se A e B são figuras geométricas congruentes, então, $\alpha(A) = \alpha(B)$.
- c) Se A e B são figuras geométricas cujos interiores têm interseção vazia, então: $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$.

A uma tal função denominamos **função área** (MOISE, 1963). Se α é uma função área, o número real positivo $\alpha(A)$ é definido como a **medida de A segundo α** , ou mais simplesmente, a **α -medida** da região plana A .

Em Moise (1963) ou em Hartshorne (2000), encontram-se demonstrações de que é possível definir uma função área em uma família Φ à qual pertençam todas as **regiões poligonais** ou **polígonos**, que são as figuras geométricas de interesse neste trabalho.

Além disso, podemos provar que existem infinitas funções área definidas na classe dos polígonos³. Um fato importante é que, se A é um polígono qualquer, dadas duas funções área, α e β , existe uma constante $k, k > 0$, tal que $\alpha(A) = k \beta(A)$. Disso resulta que, se A e B são polígonos que possuem a mesma área segundo uma função α , também terão a mesma área segundo

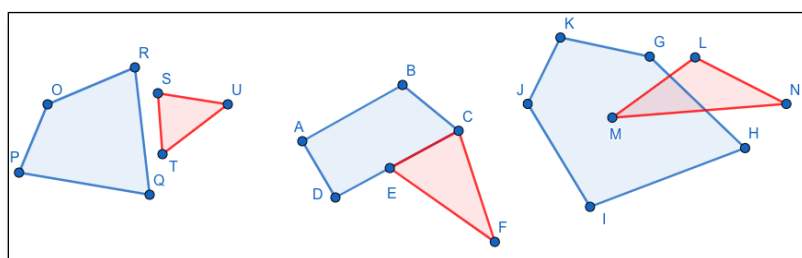
³ A esse respeito, ver Lima (1995).

qualquer outra função área⁴. Resulta, ainda, que a classe de equivalência dos polígonos de mesma área que um dado polígono A não depende da função área escolhida. Tal classe de equivalência (uma coleção de polígonos, todos com mesma área de A) que depende apenas de A e não da função área, pode ser definida como a **área A** . Trata-se, dessa forma, de um objeto matemático associado à região poligonal e que não é um número. Em verdade, tal objeto faz parte de um modelo matemático para o conceito da grandeza geométrica área, à qual nos referimos anteriormente neste trabalho.

Retornando à definição de área, o que estabelece a condição (b) é que uma função área assume os mesmos valores quando aplicadas às duas regiões poligonais acima apresentadas. Mais simplesmente, na condição (b), afirma-se que elas possuem a *mesma área*.

Na condição (c) da definição de uma função área, comumente designada por *aditividade da função área*, menciona-se um tipo especial de união de duas figuras geométricas em que os respectivos interiores dessas figuras não possuem ponto em comum. Em uma linguagem mais geométrica, poderíamos dizer que é uma união sem superposição de interiores das figuras. Permanecendo na classe das regiões poligonais, na condição (c), é estabelecido que, se efetuarmos uma união de duas regiões poligonais, respeitada a condição em foco, a área da união é a soma das áreas dessas regiões. Na Figura 6, a seguir, ilustram-se duas uniões sem superposição de interiores e uma união em que essa condição não é respeitada.

Figura 6: União de duas figuras poligonais

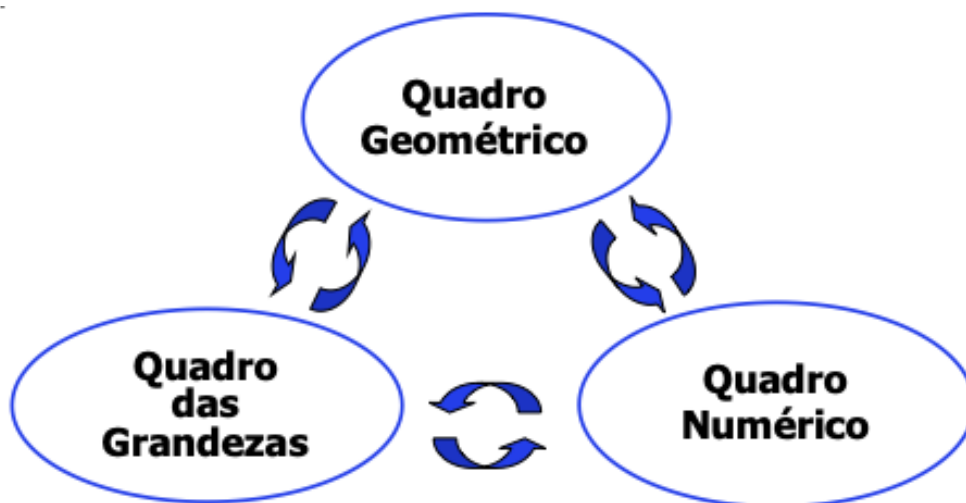


Fonte: Elaboração própria (2019)

⁴ Tal fato implica em podermos afirmar, por exemplo, que se dois polígonos possuem a mesma área em centímetros quadrados, também terão a mesma área em metros quadrados.

As pesquisadoras francesas Marie-Jeanne Perrin-Glorian e Régine Douady desenvolveram a ideia de *jogo de quadros*. Ao se referirem a área, as citadas pesquisadoras destacam três quadros o **quadro geométrico**, o **quadro numérico**, e o **quadro das grandezas**, representados na figura a seguir.

Figura 7: Jogo de quadros



Fonte: Elaborada de acordo com modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Continuando a nos restringir a regiões poligonais, o quadro geométrico é constituído pela família dessas regiões planas; o quadro numérico é composto pelos valores numéricos das medidas da área das regiões poligonais, em certa função área; e o quadro das grandezas é formado pelas classes de equivalência de regiões poligonais de mesma área segundo essa função.

Como as classes de equivalência de polígonos de mesma área não dependem da função área escolhida, vamos nos referir à área de um polígono, sem mencionar a função área particular que gerou tais classes de equivalência, a menos que tal distinção deva ser ressaltada.

Retomando a definição de função área de uma região poligonal, observamos que as condições impostas a essa função podem ser tomadas como axiomas, no decorrer das argumentações lógicas a serem empregadas no que se segue. Assim, não cabem demonstrações das citadas afirmações. Para efeito de citação posterior, escrevemos:

Axioma 1

Se a região poligonal A tem interior não vazio, então, $\alpha(A) > 0$; se o interior de A é vazio, então, $\alpha(A) = 0$.

Axioma 2

Se as regiões poligonais A e B são congruentes, então, $\text{área}(A) = \text{área}(B)$.

Empregando-se o método de indução matemática, podemos generalizar a propriedade de aditividade da área para uma união finita de n regiões poligonais desde que, duas a duas, respeitem a condição de não superposição de seus interiores. Por isso, podemos enunciar:

Axioma 3⁵

$$\text{área}(A_1 \cup A_2) = \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2),$$

em que as regiões A_1, A_2 possuem interiores disjuntos.

4.2. Geometria dos polígonos: conceitos preliminares

Como dissemos, vamos tratar da classe das regiões poligonais ou dos polígonos. Neste trabalho, região poligonal designa um subconjunto do plano formado por um polígono (convexo ou não), acrescido de seu interior. Para especificar melhor, iniciemos por uma caracterização precisa de **linha poligonal**:

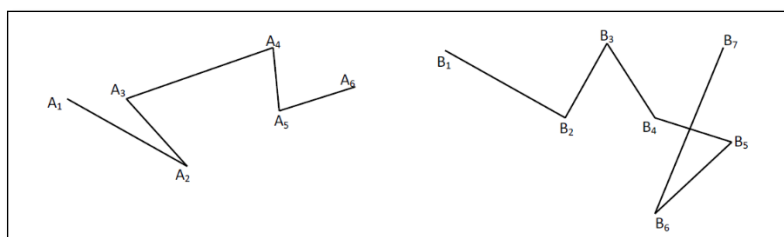
[...] uma linha poligonal (ou linha quebrada) é uma sequência especial de segmentos de reta, $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_6}$ ou $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \overline{B_3B_4}, \overline{B_4B_5}, \overline{B_5B_6}, \overline{B_6B_7}$, como mostrado nos exemplos a seguir:

⁵ Uma consequência imediata deste axioma é que vale a igualdade:

$$\text{área}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2) + \dots + \text{área}(A_n),$$

em que, duas a duas, as regiões têm interiores disjuntos.

Figura 8: Linhas poligonais



Fonte: Coleção Explorando o Ensino; v.17, p.156

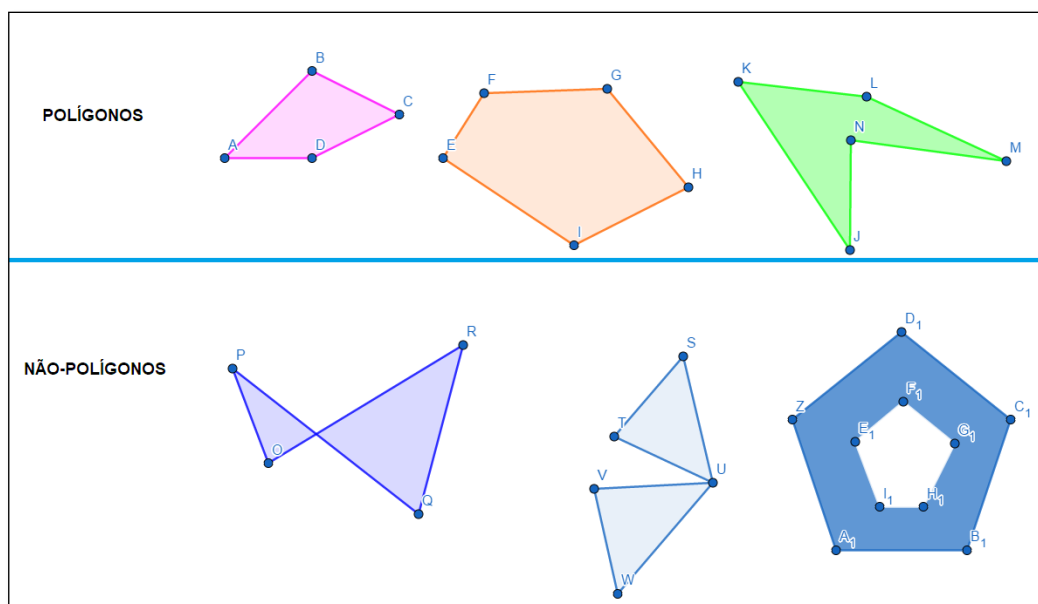
Esses exemplos são típicos de linhas poligonais: cada um dos segmentos e o seu sucessor na sequência têm em comum uma de suas extremidades e não são partes de uma mesma reta. No entanto, as duas poligonais acima distinguem-se em um aspecto. Na imagem à esquerda, cada segmento encontra (em suas extremidades) apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos na sequência de segmentos e, por isso, é chamada uma linha poligonal simples. Na imagem à direita, o segmento B_4B_5 encontra não apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos, mas também o segmento B_6B_7 . Neste caso, dizemos que a poligonal é não simples. Os sucessivos segmentos da poligonal são os seus lados e os pontos de encontro dos segmentos são seus vértices. (Coleção Explorando o Ensino; v.17, p.156)

Em seguida, definimos polígono:

Um polígono é uma linha poligonal simples e fechada, ou seja, uma linha poligonal simples em que o primeiro segmento da sequência tem uma extremidade em comum com o último segmento dessa sequência. [...] um polígono separa o plano em duas regiões, o seu interior e o seu exterior. **Em geometria, utiliza-se a mesma palavra ‘polígono’ tanto para denominar a figura constituída apenas pelos seus lados, conforme a definição acima, quanto para designar a reunião desses lados com a região interior por eles determinada no plano.** (Grifo nosso) (Coleção Explorando o Ensino; v.17, p.156,157)

Para permitir a visualização, são mostrados desenhos de polígonos e de não polígonos:

Figura 9: Polígonos e não polígonos



Fonte: Elaboração própria

Um conceito sempre presente na geometria dos polígonos é o de *convexidade*. Uma região poligonal A é dita convexa se, dados P e Q , dois quaisquer de seus pontos, todos os pontos do segmento de reta $\overline{PQ}$ estão contidos na região A . Nos exemplos apresentados na Figura 9, $HIJG$ e $ABCDEF$ são convexos, ao passo que $PKLMNO$ é não-convexo.

Duas regiões poligonais são consideradas *congruentes* quando “coincidem por superposição”.

Em linguagem mais formalizada, duas regiões poligonais são congruentes quando existe uma isometria que transforma uma na outra. Uma isometria é uma transformação do plano euclidiano Π , $\varphi: \Pi \rightarrow \Pi$, que satisfaz à condição, para todo par de pontos X, Y do plano:

$$\text{dist}[\varphi(X), \varphi(Y)] = \text{dist}(X, Y).$$

Resulta da definição que uma isometria é uma bijeção do plano e valem as afirmações reunidas no lema a seguir. As demonstrações do lema e podem ser encontradas em Lima (1976) e em Lima (1996):

Lema 1

O símbolo Π representa o plano euclidiano e seja $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$ uma isometria. É possível demonstrar que:

- a) $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma bijeção do plano sobre o plano.
- b) A isometria φ comuta com as operações de união e de interseção de conjuntos:

$$\varphi(\cup_i X_i) = \cup_i \varphi(X_i);$$

$$\varphi(\cap_i X_i) = \cap_i \varphi(X_i).$$

Suponhamos, agora, que A é uma região poligonal. Com base na definição de isometria, podemos provar que:

- c) A restrição de φ ao subconjunto A é uma bijeção $\varphi_A: A \rightarrow \varphi(A)$, com inversa denotada por φ_A^{-1} .
- d) A isometria φ preserva o interior da região poligonal:

$$\varphi(intR) = int[\varphi(A)].$$

- e) A isometria φ preserva a fronteira da região poligonal:

$$\varphi(frontR) = front[\varphi(A)].$$

- f) A imagem de A por φ , $\varphi(A)$, é uma região poligonal.

Em seguida, apresentamos a definição de congruência:

Definição 1

No plano euclidiano Π , dadas as regiões poligonais A e B dizemos que A é **congruente** a B , se existe uma isometria $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$, tal que $\varphi(A) = B$.

Resulta da definição, que podemos escrever:

$$\varphi_A(A) = B \text{ e } \varphi_A^{-1}(B) = A.$$

Além disso, se existe uma família de subconjuntos, $X_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, tal que

$$A = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_n ,$$

temos, então,

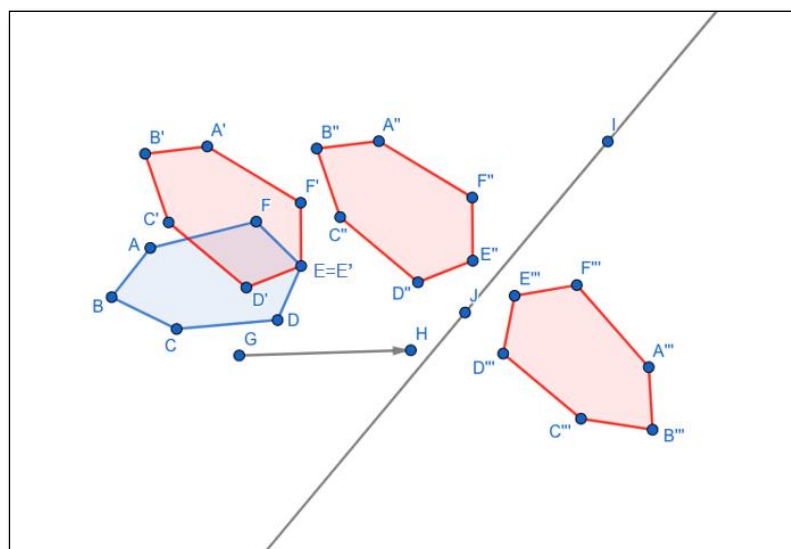
$$\varphi(A) = \varphi(X_1) \cup \varphi(X_2) \cup \varphi(X_3) \cup \dots \cup \varphi(X_n).$$

Ainda em Lima (1996), podemos extrair a informação de que há três tipos fundamentais de isometrias no plano: **rotação** em torno de um ponto, **reflexão** relativamente a uma reta e **translação** definida por um vetor. Mais ainda, toda isometria no plano é uma composição desses três tipos fundamentais.

No *software GeoGebra-Geometria*, que é utilizado no nosso experimento, essas transformações fundamentais fazem parte das ferramentas contidas no menu do programa.

Para ilustrar esses conceitos, apresentamos os desenhos a seguir, nos quais do polígono original são obtidos polígonos congruentes por meio de transformações isométricas.

Figura 10: Transformações isométricas



Fonte: Elaboração própria (2019)

Na figura acima, o polígono original $ABCDEF$ é congruente a $A'B'C'D'E'F'$, por uma rotação de 45° no sentido horário, que, por sua vez, é congruente a $A''B''C''D''E''F''$ por meio de uma translação segundo o vetor $\overrightarrow{GH}$ e, finalmente,

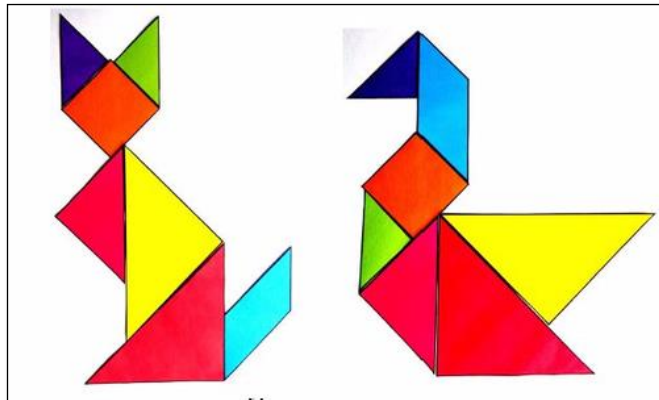
este último polígono é congruente a $A''B''C''D''E''$ por uma reflexão e relação à reta $\overleftrightarrow{II}$. Como a composição de duas isometrias é uma isometria, os polígonos mencionados são congruentes dois a dois.

4.3. Decomposição/composição de polígonos: equidecomposição

Um dos recursos de uso frequente em sala de aula desde os primeiros anos do ensino escolar é o conhecido jogo do Tangram

Começemos com as representações de figuras geométricas formadas nesse jogo, com suas sete peças, que são exemplos concretos de polígonos. Com essa família finita de polígonos, sem sobreposição, é possível formar polígonos distintos que lembram animais, flores, dançarinos ou letras e todas essas composições são regiões poligonais que são “feitas das mesmas partes” ou, como tornaremos mais preciso adiante, são ditos equidecomponíveis. A seguir, mostramos dois exemplos.

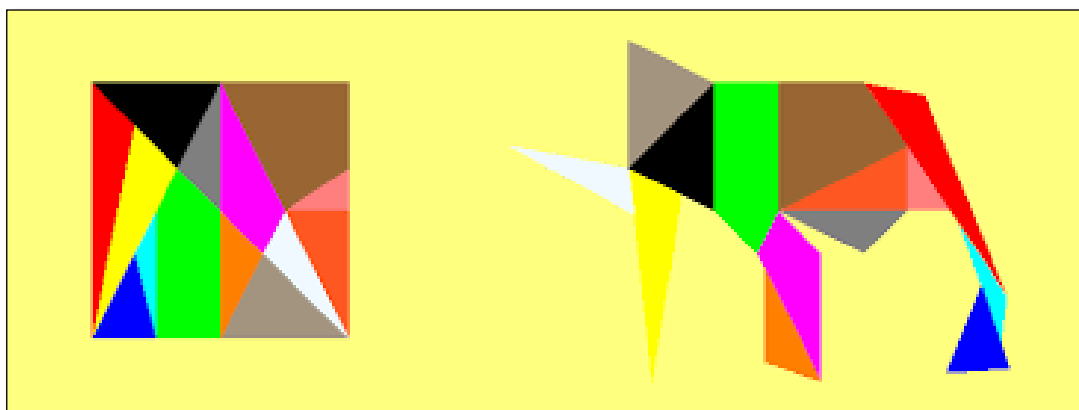
Figura 11: Tangram: regiões poligonais equidecomponíveis.



Fonte: Google Imagens

Outro jogo antigo, atribuído a Arquimedes, e que lida com a ideia de equidecomposição é o *Stomachion*. Esse quebra-cabeça geométrico é constituído por um conjunto de 14 peças planas de várias formas poligonais com as quais podemos construir figuras poligonais.

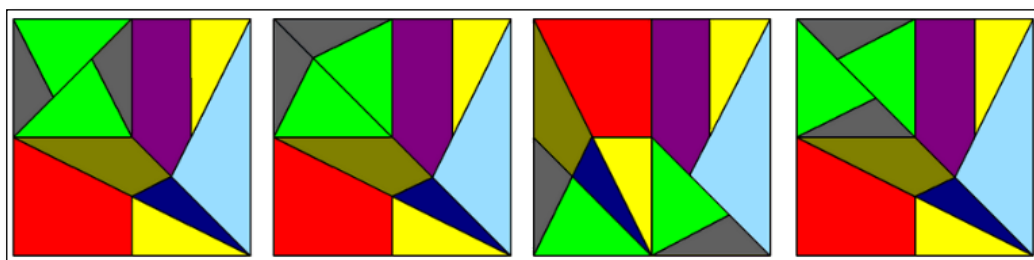
Figura 12: Quadrado e elefante: regiões poligonais equidecomponíveis.



Fonte: Google Imagens

Uma característica importante desse jogo é que, diferentemente do Tangram, podemos construir de modos distintos um mesmo quadrado recorrendo a todas as peças do Sтомachion, como é mostrado na Figura 13, a seguir.

Figura 13: Quadrados - Sтомachion

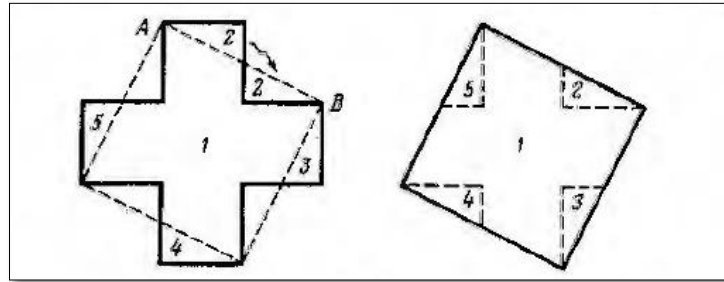


Fonte: Google Imagens

Apresentamos, em seguida, o conceito chave relativo ao Teorema de Bolyai. Recorrendo a Boltianski (1981), podemos ler:

Examinaremos as duas figuras mostradas abaixo (todos os segmentos que compõem a figura cruciforme são iguais entre si; e o lado do quadrado é igual ao segmento AB). As linhas tracejadas no desenho partem as figuras em um número idêntico de partes iguais (as partes iguais das duas figuras estão marcadas com números). Esta ação se expressa com as seguintes palavras: as figuras abaixo são *equidecompostas*.

Figura 14 : Figuras equidecomponíveis



Fonte: Boltianski, (1981, p. 9).

Falando de outra maneira, duas figuras são equidecomponíveis, se, cortando de certo modo uma delas em um número finitos de partes, pode-se (ao dispor essas partes de outra forma) compor com essas a segunda figura. (BOLTIANSKI, 1981, tradução nossa)

Mais formalmente, temos:

Definição 1

Dada uma região poligonal A , se existem regiões poligonais

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_m,$$

tais que

$$A = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_m; \text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset, i \neq j,$$

dizemos que $R_1, R_2, R_3, \dots, R_m$ é uma **decomposição** de A , ou que A é decomposta pela sequência de regiões poligonais $R_1, R_2, R_3, \dots, R_m$.

Definição 2

Se A e B são regiões poligonais, dizemos que A é **equidecomponível a** B se existe uma família finita de regiões poligonais $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor A e uma família $R_1^B, R_2^B, R_3^B, \dots, R_m^B$, de regiões poligonais respectivamente congruentes a $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor B . Em linguagem simbólica, podemos escrever (o símbolo $\cong$ representa a relação de congruência entre polígonos):

$$R_i^A \cong R_i^B, i = 1, 2, 3, \dots m.$$

$$A = R_1^A \cup R_2^A \cup R_3^A \cup \dots \cup R_m^A ;$$

$$B = R_1^B \cup R_2^B \cup R_3^B \cup \dots \cup R_m^B;$$

$$\text{int}(R_i^A) \cap \text{int}(R_j^A) = \emptyset, \quad \text{int}(R_i^B) \cap \text{int}(R_j^B) = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots m, \quad i \neq j.$$

Aplicando o que dissemos anteriormente sobre as congruências, sabemos que, se Π representa o plano euclidiano, existe uma isometria $\varphi_i : \Pi \rightarrow \Pi$ e sua restrição à região R_i^A é uma isometria, $\varphi_i : R_i^A \rightarrow R_i^B$, com inversa $\varphi_i^{-1} = R_i^B \rightarrow R_i^A$. Podemos, então, escrever:

$$R_i^B = \varphi_i(R_i^A) \quad ; \quad R_i^A = \varphi_i^{-1}(R_i^B) \quad , i = 1, 2, 3, \dots m.$$

É possível, então, recorrer ao que já sabemos sobre isometrias para provar a proposição que segue, sem dificuldade, motivo pelo qual omitimos tal prova.

Proposição 1

Se regiões poligonais A e B são congruentes, então, A e B são equidecomponíveis.

A existência de regiões poligonais equidecomponíveis que não são congruentes é um dos fatos que dão importância ao conceito de equidecomposição e nos indica que a recíproca da proposição 1 é falsa.

Outro fato importante é que as isometrias preservam a equidecomposição, como podemos provar recorrendo, essencialmente, à definições dos conceitos envolvidos:

Proposição 2

As regiões poligonais A e B são equidecomponíveis se e somente se as regiões poligonais $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ são equidecomponíveis.

Da própria definição de equidecomposição e do Lema 1, resulta:

Proposição 3

Se A_1 e B_1 são equidecomponíveis, A_2 e B_2 são equidecomponíveis, então, $A_1 \cup A_2$ e $B_1 \cup B_2$ são equidecomponíveis.

Uma proposição análoga à proposição 3, agora relativa à interseção de regiões poligonais, também é verdadeira. No entanto, sua demonstração é bem mais elaborada e, como não a empregaremos em nossa argumentação, o seu enunciado será omitido.

A etapa seguinte é deduzirmos as propriedades da relação de equidecomposição que a fazem uma relação de equivalência, na classe das regiões poligonais. Primeiro, tratamos da reflexividade, depois da simetria e, finalmente, da transitividade dessa relação.

Proposição 4

- (a) A é equidecomponível a A , para qualquer região poligonal A . (reflexividade)
- (b) Se a região poligonal A é congruente à região poligonal B , então B é equidecomponível a A . (simetria)

Demonstração:

(a) Basta considerarmos, na definição de equidecomposição, a família composta pela própria região poligonal A .

(b) Basta tomar A e B como decomposições, respectivamente de A e B , e observar que a relação de congruência é simétrica: se $A \cong B$, então, $B \cong A$.

Resulta da simetria que, se uma região poligonal A é equidecomponível a B , então B é equidecomponível a A e podemos dizer que elas são **equidecomponíveis entre si**, ou mais simplesmente, **equidecomponíveis**. Vamos utilizar a expressão simbólica $A \sim B$ para representar a relação de equidecomposição entre as regiões poligonais A e B .

Para que a equidecomposição seja uma relação de equivalência entre regiões poligonais é preciso provar que ela é, também, transitiva. Para isso, é necessário demonstrar a proposição seguinte, que é uma etapa mais difícil de ser cumprida.

Proposição 5

Se a região poligonal A é equidecomponível à região poligonal B , e B é equidecomponível a uma região poligonal C , então A é equidecomponível a C .

A demonstração da proposição demanda alguns comentários preliminares.

Suponhamos que A e B são equidecomponíveis, e que B e C são equidecomponíveis. Precisamos demonstrar que A e C são equidecomponíveis.

A hipótese implica na existência de regiões poligonais que permitem escrever as igualdades a seguir:

$$A = X_1^A \cup X_2^A \cup X_3^A \cup \dots \cup X_m^A;$$

$$B = X_1^B \cup X_2^B \cup X_3^B \cup \dots \cup X_m^B;$$

$$B = Y_1^B \cup Y_2^B \cup Y_3^B \cup \dots \cup Y_n^B;$$

$$C = Y_1^C \cup Y_2^C \cup Y_3^C \cup \dots \cup Y_n^C.$$

Para provar a proposição visada devemos encontrar uma família de regiões poligonais $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_p$, tal que:

$$A = Z_1^A \cup Z_2^A \cup Z_3^A \cup \dots \cup Z_p^A;$$

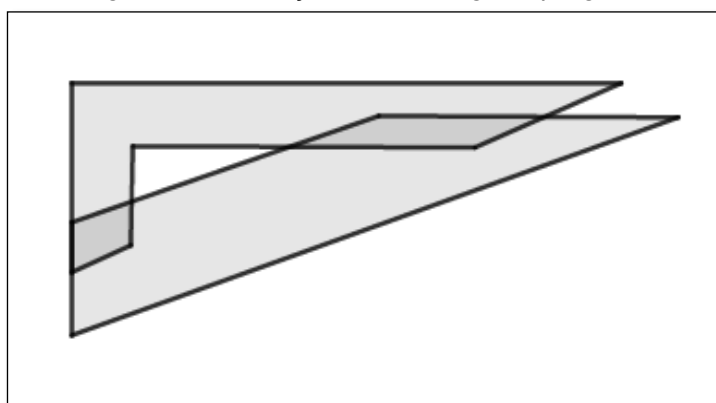
$$C = Z_1^C \cup Z_2^C \cup Z_3^C \cup \dots \cup Z_p^C.$$

Para resolver o problema posto acima, poderíamos tentar produzir a decomposição de A e C a partir das decomposições de A e de B fornecidas pela hipótese. Como a região B é decomposta de dois modos, podemos buscar superpor essas decomposições, ou seja, considerar a região B repartida, simultaneamente, pelas decomposições $X_1^B, X_2^B, X_3^B, \dots, X_m^B$, e $Y_1^B, Y_2^B, Y_3^B, \dots, Y_n^B$. Poderíamos, então, escrever:

$$\begin{aligned} B &= B \cap B = (X_1^B \cup X_2^B \cup X_3^B \cup \dots \cup X_m^B) \cap (Y_1^B \cup Y_2^B \cup Y_3^B \cup \dots \cup Y_n^B) = \\ &= \cup_{i,j} (X_i^B \cap Y_j^B), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

No entanto, surge uma dificuldade: provar que as regiões $X_i^B \cap Y_j^B$ são regiões poligonais ou podem ser decompostas em regiões poligonais resultado muito laborioso. Apenas para ilustrar, na figura a seguir, é mostrada a interseção de duas regiões poligonais que é composta de partes disjuntas e, portanto, não é uma região poligonal, embora possa ser decomposta em duas regiões poligonais:

Figura 15: Interseção de duas regiões poligonais



Fonte: Elaboração própria (2019)

Uma solução matemática para tal dificuldade, é adotar uma nova definição do próprio conceito de equidecomposição, originalmente adotado sem restrição alguma sobre o tipo de sub-região com as quais decompomos uma região poligonal. Nessa nova definição, exigimos que as sub-regiões componentes sejam todas triangulares. Para simplificar a linguagem, denominaremos **triangularização** de um polígono uma decomposição do tipo mencionado.

Contudo, adotar esse caminho requer que se provem dois fatos matemáticos:

- para qualquer região poligonal existe uma triangularização;
- a nova definição é equivalente à original; noutros termos, não perdemos generalidade ao adotar essa nova definição, que resulta equivalente à original.

Nesta dissertação, vamos omitir a prova da primeira proposição, remetendo o leitor a (Corrêa, s/d) (Fernandes, 2018) e a enunciamos como um lema, para futura referência:

Lema 2

Para toda região poligonal, existe uma triangularização.

Quanto à segunda afirmação, iniciemos pela proposição a seguir.

Proposição 6

Se as regiões poligonais são equidecomponíveis por meio de sub-regiões poligonais, também são equidecomponíveis por meio de sub-regiões triangulares.

Demonstração:

Retomemos a definição de equidecomposição, na qual é dito que A e B são regiões poligonais equidecomponíveis se existe uma família finita de regiões poligonais $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor A e uma família $R_1^B, R_2^B, R_3^B, \dots, R_m^B$, de regiões poligonais respectivamente congruentes a $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor B . Sabemos, também que esses

Se, agora, empregarmos o Lema 2, podemos triangularizar cada uma das regiões $R_i^A, i = 1, 2, 3, \dots, m$:

$$R_i^A = R_{i1}^A \cup R_{i2}^A \cup R_{i3}^A \cup \dots \cup R_{im_i}^A.$$

Cada um dos polígonos $R_{ik}^A, k = 1, 2, 3, \dots, m_i$, é um triângulo. Além disso, sabemos que, se Π representa o plano euclidiano, existe uma isometria $\varphi_i : \Pi \rightarrow \Pi$, cuja restrição a R_i^A é uma isometria $\varphi_i : R_i^A \rightarrow R_i^B$, que possui a inversa $\varphi_i^{-1} = R_i^B \rightarrow R_i^A$, tais que podemos escrever:

$$R_i^B = \varphi_i(R_i^A) ; R_i^A = \varphi_i^{-1}(R_i^B) , i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

O Lema 1 nos permite afirmar que as imagens $\varphi_i(R_{ik}^A)$, para $k = 1, 2, 3, \dots, m_i$ são triângulos e formam uma triangularização da região poligonal $R_i^B = \varphi_i(R_i^A)$. Uma vez mais, o Lema 1 nos permite concluir que a família a seguir escrita é uma triangularização da região A :

$$R_{ik}^A, i = 1, 2, 3, \dots, m; k = 1, 2, 3, \dots, m_i.$$

Além disso, a família abaixo é uma triangularização da região B :

$$\varphi_i(R_{ik}^A), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad k = 1, 2, 3, \dots, m_i.$$

Fica assim, completada a demonstração visada.

Provada a proposição 6, consideremos a seguinte definição:

Definição 2'

Se A e B são regiões poligonais, dizemos que A é **equidecomponível a** B se existe uma família finita de triângulos $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor A e uma família $R_1^B, R_2^B, R_3^B, \dots, R_m^B$, de triângulos respectivamente congruentes a $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_m^A$, com as quais podemos decompor B :

$$R_i^A \cong R_i^B, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

$$A = R_1^A \cup R_2^A \cup R_3^A \cup \dots \cup R_m^A;$$

$$B = R_1^B \cup R_2^B \cup R_3^B \cup \dots \cup R_m^B;$$

$$\text{int}(R_i^A) \cap \text{int}(R_j^A) = \emptyset, \quad \text{int}(R_i^B) \cap \text{int}(R_j^B) = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad i \neq j.$$

Como os triângulos são regiões poligonais, fica estabelecida, uma consequência útil da proposição 6:

Corolário 1

As definições 2 e 2' são equivalentes, do ponto de vista lógico.

Doravante, podemos tomar qualquer das duas definições acima mencionadas em nossas demonstrações.

Uma outra observação a fazer diz respeito ao fato de que há infinitas triangularizações de uma região poligonal. Isso nos adverte para não deduzir

afirmações gerais sobre regiões poligonais que dependam da triangularização particular escolhida para essa região.

Para tratar do procedimento de superposição de duas triangularizações de uma mesma região poligonal, que surge na demonstração da transitividade da relação de equidecomposição, introduzimos uma definição:

Definição 3

Sejam T^1 e T^2 duas triangularizações de uma região poligonal A .

Denominamos **refinamento** de T^1 e T^2 uma triangularização de A , simbolizada por $T^1 \wedge T^2$, que triangulariza, também, cada um dos triângulos de T^1 e cada um dos triângulos de T^2 .

Em símbolos, podemos tornar mais precisa a definição:

$$T^1 = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\};$$

$$A = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m; \text{int}(X_i) \cap \text{int}(X_j) = \emptyset, i \neq j;$$

$$T^2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\};$$

$$A = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \dots \cup Y_n; \text{int}(Y_i) \cap \text{int}(Y_j) = \emptyset, i \neq j.$$

$$T^1 \wedge T^2 = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_p\},$$

$$A = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup \dots \cup Z_p; \text{int}(Z_i) \cap \text{int}(Z_j) = \emptyset, i \neq j,$$

$$X_i = \cup_k Z_k; i = 1, 2, 3, \dots, m; k = 1.2.3 \dots k_i,$$

$$Y_j = \cup_k Z_k; j = 1, 2, 3, \dots, n; k = 1.2.3 \dots k_j.$$

Podemos observar que $p \geq \max\{m, n\}$. Da definição de refinamento, resulta, também, que, dado Z_k , um dos triângulos do refinamento $Z = T^1 \wedge T^2$, podemos concluir que Z_k está contido em um e um só dos triângulos da triangulação T^1 e está contido em um e um só dos triângulos de T^2 .

A proposição seguinte é intuitiva, mas sua demonstração é laboriosa e embora apresentada a seguir, pode ser omitida em uma primeira leitura deste texto.

Lema 3

Sejam T^1 e T^2 duas triangularizações de uma região poligonal A :

$$T^1 = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\};$$

$$T^2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\};$$

$$A = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m; \text{int}(X_i) \cap \text{int}(X_j) = \emptyset, i \neq j;$$

$$A = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \dots \cup Y_n; \text{int}(Y_i) \cap \text{int}(Y_j) = \emptyset, i \neq j.$$

Então, existe uma triangularização de A ,

$$T^1 \wedge T^2 = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_p\},$$

$$A = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup \dots \cup Z_p; \text{int}(Z_i) \cap \text{int}(Z_j) = \emptyset, i \neq j,$$

que triangulariza, também, cada um dos triângulos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ e cada um dos triângulos $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$.

Demonstração:

Da hipótese, resulta que

$$A = A \cap A = (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m) \cap (Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \dots \cup Y_n) = \cup_{i,j} (X_i \cap Y_j).$$

Consideremos um dos conjuntos

$$X_i \cap Y_j; i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Trata-se da interseção de dois triângulos.

Iniciamos por considerar o caso em que o conjunto $X_i \cap Y_j$ não possui pontos no interior do triângulo X_i .

Isso pode ocorrer de dois modos. O conjunto $X_i \cap Y_j$ é vazio (os pontos do triângulo Y_j são pontos exteriores a X_i). Outra possibilidade são os pontos da interseção pertencerem à fronteira do triângulo (a interseção é um ponto ou um segmento de reta). Em ambas as possibilidades, podemos desprezar o conjunto $X_i \cap Y_j$.

Figura 16: Interseção de dois triângulos



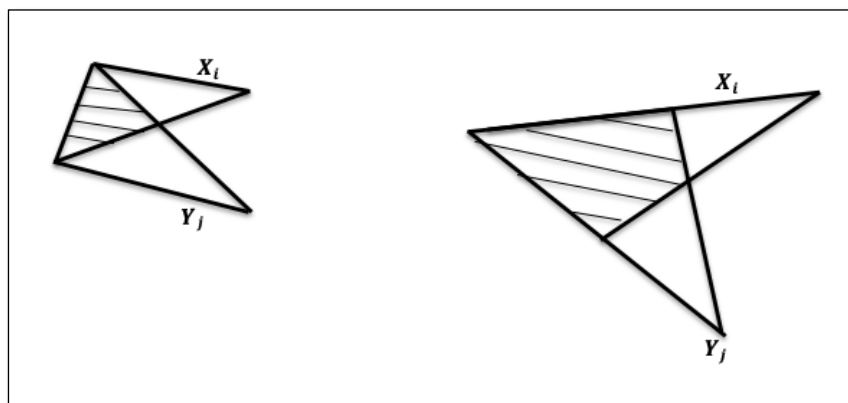
Fonte: Elaboração própria (2019)

Em seguida, suponhamos que a interseção $X_i \cap Y_j$ contém algum ponto do interior do triângulo X_i .

Neste caso, temos uma interseção, não vazia, de dois triângulos, que são polígonos convexos, e, portanto, essa interseção é um polígono convexo. Conclui-se, ainda, por tratarmos de triângulos, que tal interseção possui, no mínimo três lados e, no máximo, seis lados.

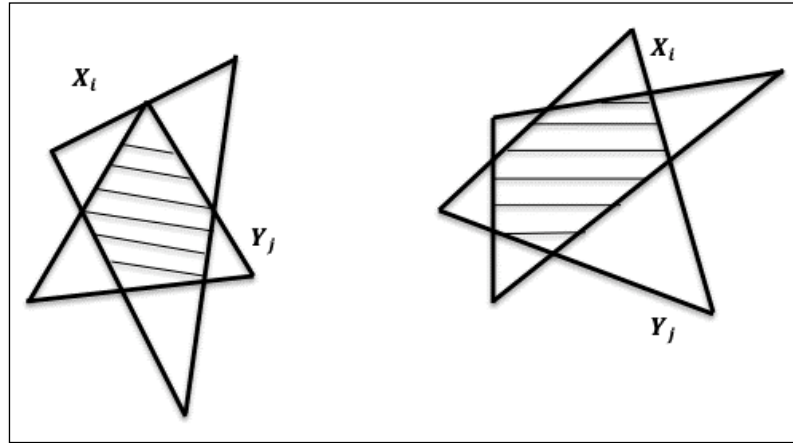
Os desenhos a seguir são exemplos da citada interseção:

Figura 17: Interseção mínima de dois triângulos contendo algum ponto do interior



Fonte: Elaboração própria (2019)

Figura 18: Interseção máxima de dois triângulos contendo algum ponto do interior

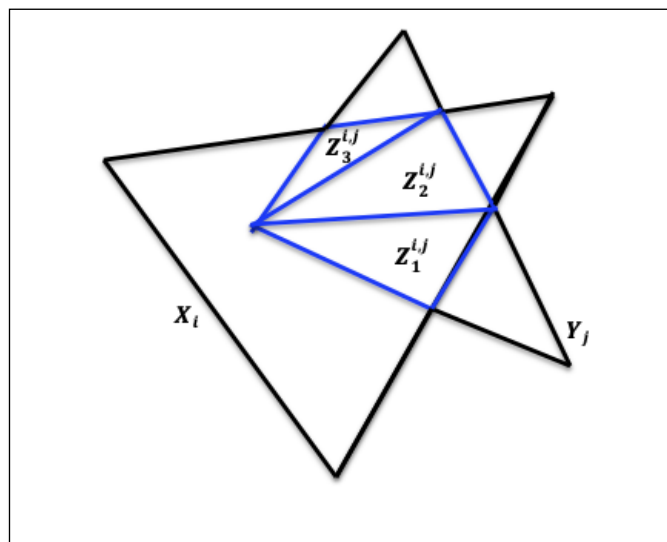


Fonte: Elaboração própria (2019)

Como vimos, a interseção $X_i \cap Y_j$ é um polígono convexo com, no máximo, seis lados. Para triangularizar esse polígono, é suficiente escolher um de seus n vértices e ligá-lo aos $(n - 2)$ vértices não adjacentes a ele, por meio de segmentos de reta. No exemplo a seguir, temos:

$$X_i \cap Y_j = Z_1^{i,j} \cup Z_2^{i,j} \cup Z_3^{i,j}.$$

Figura 19: Triangularização da interseção $X_i \cap Y_j$



Fonte: Elaboração própria (2019)

Para cada par (i, j) , então, vamos triangularizar a interseção $X_i \cap Y_j$, construindo triângulos que serão nossas peças básicas daqui em diante, na demonstração:

$$Z_{i,j,k}, k = 1, 2, 3, \dots, k_{i,j}.$$

Temos, assim:

$$X_i \cap Y_j = Z_{i,j,1} \cup Z_{i,j,2} \cup Z_{i,j,3} \cup \dots \cup Z_{i,j,k_{i,j}}$$

Esses triângulos formam uma família que representamos por:

$$Z = \{ Z_{i,j,k} ; i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, 3, \dots, k_{i,j} \}$$

Sabemos que $k_{i,j} \leq 4$, e, portanto, Z é uma família finita de triângulos e a família triangulariza a região poligonal A . De fato,

$$A = \cup_{i,j} (X_i \cap Y_j) = \cup_{i,j} (\cup_k Z_{i,j,k}) = \cup_{i,j,k} Z_{i,j,k}.$$

Além disso, cada triângulo X_i da triangularização

$$T^1 = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\}$$

é triangularizado por uma subfamília da família Z .

Para provar tal afirmação, tomemos um triângulo qualquer X_i da triangularização T^1 . Podemos escrever

$$X_i = X_i \cap A = X_i \cap (\cup_j Y_j) = \cup_j (X_i \cap Y_j) = \cup_{j,k} Z_{i,j,k}.$$

De modo análogo, concluímos que cada um dos triângulos Y_j da triangularização

$$T^2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\}$$

é triangularizado por uma subfamília da família Z :

$$Y_j = \cup_{i,k} Z_{i,j,k}.$$

Fica, assim, demonstrada a existência de um refinamento das triangularizações T^1 e T^2 da região poligonal A .

Com base nos Lemas 1 (propriedades das isometrias), 2 (existência de triangularizações) e 3 (existência de refinamentos), vamos retornar à proposição 5, em que se estabelece a transitividade da relação de equidecomposição de regiões poligonais. Repete-se seu enunciado, para facilitar a fluência da leitura:

Proposição 5

Se a região poligonal A é equidecomponível à região poligonal B , e B é equidecomponível a uma região poligonal C , então A é equidecomponível a C .

Demonstração:

Suponhamos que A e B são equidecomponíveis, e que B e C são equidecomponíveis. Precisamos demonstrar que A e C são equidecomponíveis.

Por definição, da hipótese, $A \sim B$, resulta que existe uma triangularização do polígono A ,

$$\mathbf{T}_X^A = \{X_1^A, X_2^A, X_3^A, \dots, X_m^A\},$$

e uma triangularização do polígono B ,

$$\mathbf{T}_X^B = \{X_1^B, X_2^B, X_3^B, \dots, X_m^B\},$$

tais que podemos escrever, simbolizando por $\varphi_i, i = 1.2.3, \dots, m$, uma família de isometrias:

$$A = X_1^A \cup X_2^A \cup X_3^A \cup \dots \cup X_m^A; \text{int}(X_i^A) \cap \text{int}(X_j^A) = \emptyset, i \neq j,$$

$$B = X_1^B \cup X_2^B \cup X_3^B \cup \dots \cup X_m^B; \text{int}(X_i^B) \cap \text{int}(X_j^B) = \emptyset, i \neq j,$$

$$X_i^B = \varphi_i(X_i^A) ; X_i^A = \varphi_i^{-1}(X_i^B) , \quad i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Analogamente, a hipótese $B \sim C$, implica que existe uma triangularização do polígono B ,

$$\mathbf{T}_Y^B = \{Y_1^B, Y_2^B, Y_3^B, \dots, Y_n^B\},$$

e uma triangularização do polígono C ,

$$\mathbf{T}_Y^C = \{Y_1^C, Y_2^C, Y_3^C, \dots, Y_n^C\},$$

tais que podemos escrever, simbolizando por $\psi_i, i = 1.2.3, \dots, m$, uma família de isometrias:

$$B = Y_1^B \cup Y_2^B \cup Y_3^B \cup \dots \cup Y_n^B; \text{int}(Y_i^B) \cap \text{int}(Y_j^B) = \emptyset, i \neq j,$$

$$C = Y_1^C \cup Y_2^C \cup Y_3^C \cup \dots \cup Y_n^C; \text{int}(Y_i^C) \cap \text{int}(Y_j^C) = \emptyset, i \neq j,$$

$$Y_i^C = \psi_i(Y_i^B) ; \quad Y_i^B = \psi_i^{-1}(Y_i^C) , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Do exposto acima, vemos que existem duas triangularizações a região B :

$$\begin{aligned} T_X^B &= \{X_1^B, X_2^B, X_3^B, \dots, X_m^B\}, \\ T_Y^B &= \{Y_1^B, Y_2^B, Y_3^B, \dots, Y_n^B\}. \end{aligned}$$

Vamos construir um refinamento Z , $Z = T_X^B \wedge T_Y^B$, dessas duas triangularizações, formado por uma família de triângulos:

$$T_Z^B = \{Z_1^B, Z_2^B, Z_3^B, \dots, Z_p^B\}.$$

Da definição de refinamento, resulta que

$$B = Z_1^B \cup Z_2^B \cup Z_3^B \cup \dots \cup Z_p^B; \quad \text{int}(Z_i) \cap \text{int}(Z_j) = \emptyset, i \neq j,$$

e, além disso,

$$X_i^B = \cup_{j,k} Z_{i,j,k}^B; \quad j = 1, 2, 3, \dots, m; \quad k = 1, 2, 3, \dots, k_{i,j}.$$

$$Y_j^B = \cup_{i,k} Z_{i,j,k}^B; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad k = 1, 2, 3, \dots, k_{i,j}$$

Convém observar que cada triângulo $Z_{i,j,k}^B$ está contido em um único triângulo X_i^B da triangularização T_X^B e em um único triângulo Y_j^B da triangularização T_Y^B :

$$\begin{aligned} Z_{i,j,k}^B &\subseteq X_i^B; \\ Z_{i,j,k}^B &\subseteq Y_j^B. \end{aligned}$$

A etapa seguinte é transportar os triângulos do refinamento T_Z^B para triangularizar tanto a região poligonal A , quanto a região poligonal C .

Podemos escrever, para cada i , $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$,

$$X_i^A = \varphi_i^{-1}(X_i^B) = \varphi_i^{-1}(\cup_{j,k} Z_{i,j,k}^B) = \cup_{j,k} \varphi_i^{-1}(Z_{i,j,k}^B).$$

Observamos que φ_i^{-1} , um dos movimentos rígidos indicados nas igualdades acima é uma isometria do plano e, como tal, é uma bijeção que transforma um triângulo qualquer T em um triângulo $\varphi_i^{-1}(T)$. Como uma isometria, φ_i^{-1} também preserva interiores e fronteiras desses triângulos:

$$\varphi_i^{-1}[\text{int}(T)] = \text{int}[\varphi_i^{-1}(T)]; \varphi_i^{-1}[\text{front}(T)] = \text{front}[\varphi_i^{-1}(T)].$$

Formemos, então, a família

$$T^i = \{\varphi_i^{-1}(Z_{i,j,k}^B); j = 1, 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, 3, \dots, k_{ij}\}.$$

Já provamos que X_i^A é uma união dos triângulos da família acima representada. Para demonstrarmos que temos uma triangularização de X_i^A , basta provarmos que os interiores desses triângulos são, dois a dois, disjuntos. De fato, isso ocorre, pois, $a \neq b$:

$$\text{int}[\varphi_i^{-1}(Z_{i,a,k}^B)] \cap \text{int}[\varphi_i^{-1}(Z_{i,b,k}^B)] = \varphi_i^{-1}\{[\text{int}(Z_{i,a,k}^B)] \cap [\text{int}(Z_{i,b,k}^B)]\} = \emptyset.$$

Do que foi exposto,

$$T^A = \{\varphi_i^{-1}(Z_{i,j,k}^B); i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, 3, \dots, k_{ij}\},$$

é uma triangularização de A .

Para prosseguir, escolhamos um triângulo Z_h^B da triangularização T^B da região poligonal B . Sabemos que $Z_h^B = Z_{i,j,k}$ para algum triplo (i,j,k) . Além disso, $Z_h^B \subseteq X_i^B$. O triângulo $\varphi_i^{-1}(Z_h^B) = \varphi_i^{-1}(Z_{i,j,k}^B)$ é um dos que compõem a triangularização T^A da região poligonal A . Denotemos por V_h^A esse triângulo:

$$V_h^A = \varphi_i^{-1}(Z_h^B).$$

Pelo procedimento adotado, tomando, sucessivamente, os triângulos da triangularização T_Z^B , obteremos a triangularização T_V^A . Podemos, então, resumir:

Triangularização da região poligonal B :

$$T_Z^B = \{Z_1^B, Z_2^B, Z_3^B, \dots, Z_p^B\},$$

Triangularização da região poligonal A :

$$T_V^A = \{V_1^B, V_2^B, V_3^B, \dots, V_p^B\}.$$

Relação entre as duas triangularizações, φ_i^{-1} representado um movimento rígido (isometria):

$$V_h^A = \varphi_i^{-1}(Z_h^B); Z_h^B = \varphi_i(V_h^A).$$

Com procedimento análogo, obteremos:

Triangularização da região poligonal B :

$$T_Z^B = \{Z_1^B, Z_2^B, Z_3^B, \dots, Z_p^B\},$$

Triangularização da região poligonal C :

$$T_W^C = \{W_1^C, W_2^C, W_3^C, \dots, W_p^C\}.$$

Relação entre as duas triangularizações, ψ_i^{-1} representado um movimento rígido (isometria):

$$W_h^C = \psi_i^{-1}(Z_h^B); Z_h^B = \psi_i(W_h^C).$$

Da definição de equidecomposição, resulta, então que as regiões poligonais A e C são equidecomponíveis, como queríamos provar.

4.4. Teorema de Bolyai

O teorema acima foi demonstrado, em 1832, pelo matemático húngaro Farkas Wolfgang Bolyai, pai do célebre Janos Bolyai, um dos criadores da geometria hiperbólica. Quase na mesma época, em 1833, de forma independente, o matemático alemão Phillip Gerwien também provou o teorema, que ficou conhecido como Teorema de Bolyai-Gerwien. Tempos depois, descobriu-se que outro matemático, William Wallace já o havia provado, muito antes, em 1807. Como reconhecimento aos três matemáticos, esse teorema passou a ser o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Nesta dissertação, para simplificar, nos referimos ao Teorema de Bolyai, como é feito no texto base para a sequência didática proposta, a obra de Boltianski (1981).

Nas seções anteriores deste capítulo, estudamos duas relações que podem existir entre dois polígonos: igualdade de áreas e equidecomposição.

Uma indagação que se impõe é a de sabermos se há equivalência lógica entre essas duas relações:

$$\text{Igualdade de áreas} \quad \rightleftarrows \quad \text{Equidecomposição}$$

Em um sentido, a implicação é fácil de ser estabelecida:

Proposição 7

Se as regiões poligonais A e B são equidecomponíveis, então elas possuem a mesma área.

Demonstração:

Decorre da definição de equidecomposição que existem regiões poligonais, $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_n^A$ e $R_1^B, R_2^B, R_3^B, \dots, R_n^B$, tais que podemos escrever:

$$A = R_1^A \cup R_2^A \cup R_3^A \cup \dots \cup R_n^A ;$$

$$B = R_1^B \cup R_2^B \cup R_3^B \cup \dots \cup R_n^B.$$

Nas igualdades acima, $R_1^A, R_2^A, R_3^A, \dots, R_n^A$, são regiões poligonais respectivamente congruentes às da família $R_1^B, R_2^B, R_3^B, \dots, R_n^B$. Além disso, duas quaisquer das regiões poligonais da família que formam A não possuem ponto interior em comum, o mesmo acontecendo com as regiões que compõem B .

O Axioma 2 (congruência implica igualdade de áreas) permite-nos concluir que:

$$\text{área}(R_1^A) = \text{área}(R_1^B);$$

$$\text{área}(R_2^A) = \text{área}(R_2^B);$$

.....

$$\text{área}(R_n^A) = \text{área}(R_n^B).$$

Por sua vez, do Axioma 3, resulta:

$$\text{área}(A) = \text{área}(R_1^A \cup R_2^A \cup \dots \cup R_n^A) = \text{área}(R_1^A) + \text{área}(R_2^A) + \dots + \text{área}(R_n^A),$$

$$\text{área}(B) = \text{área}(R_1^B \cup R_2^B \cup \dots \cup R_n^B) = \text{área}(R_1^B) + \text{área}(R_2^B) + \dots + \text{área}(R_n^B).$$

Portanto,

$$\text{área}(A) = \text{área}(B).$$

Sabemos que uma proposição é logicamente equivalente à sua contrapositiva. Fica estabelecida, dessa forma, a proposição a seguir, que é a contrapositiva da proposição 7:

Proposição 7'

Duas regiões poligonais que não possuem a mesma área não são equidecomponíveis.

Como vimos, os exemplos do Tangram e do Stomachion são modelos concretos adequados para os axiomas de área, em particular a invariância por isometrias (Axioma 2) e a aditividade (Axioma 3). Esses axiomas são a base para a demonstração da proposição 7. Por isso, é provável que as dificuldades de aprendizagem dessa proposição não sejam frequentes. No entanto, o mesmo não deve ocorrer quando se trata da aprendizagem relativa à recíproca da proposição 7, o teorema que é o tema principal da sequência didática proposta neste trabalho:

Teorema de Bolyai

Se duas regiões poligonais possuem a mesma área, então, elas são equidecomponíveis.

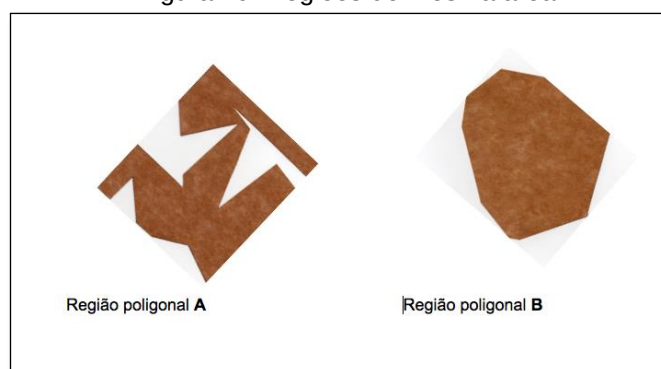
O Teorema de Bolyai, juntamente com a proposição 7 (já demonstrada), permite-nos afirmar, então:

Proposição 8

A condição necessária e suficiente para que duas regiões poligonais sejam *equidecomponíveis* é que elas possuam a *mesma área*.

Como vimos, na proposição 7, provamos que se dois polígonos são equidecomponíveis, necessariamente eles têm a mesma área. Já no Teorema de Bolyai, se requer a demonstração, mais difícil, de que é suficiente que os dois polígonos tenham a mesma área para que sejam equidecomponíveis.

Figura 20: Regiões de mesma área



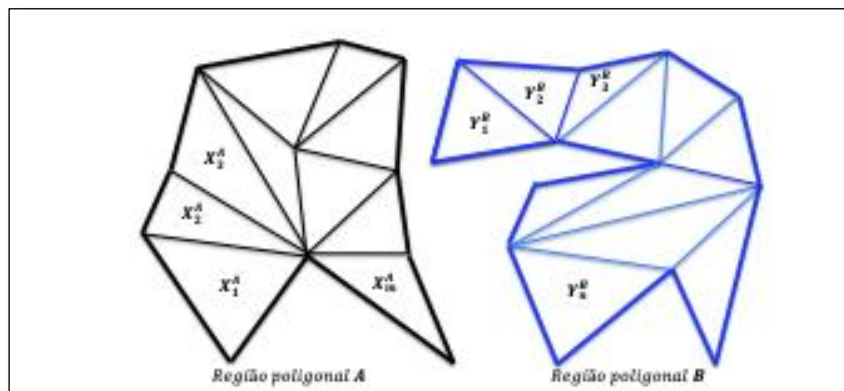
Fonte: Elaboração própria (2019)

Dadas duas regiões poligonais, **A** e **B**, de mesma área, mas de formas distintas, como no exemplo acima, o problema é o de demonstrar que esses dois polígonos são equidecomponíveis.

Tomemos um outro exemplo, e vamos seguir os passos dessa demonstração:

Seja, agora, **A** e **B**, duas regiões poligonais de mesma área. Sabemos que existem triangularizações para esses polígonos. Tomemos, em cada um deles, uma triangularização arbitrária, que está indicada na figura a seguir.

Figura 21: Triangularização de duas regiões de mesma área



Fonte: Elaboração própria (2019)

Podemos escrever, então:

$$A = X_1^A \cup X_2^A \cup X_3^A \cup \dots \cup X_m^A;$$

$$B = Y_1^B \cup Y_2^B \cup Y_3^B \cup \dots \cup Y_n^B.$$

Nas igualdades acima, a família de regiões triangulares que compõem **A** é tal que, duas a duas, não possuem pontos interiores comuns, o mesmo ocorrendo com a família de regiões triangulares que compõe a região **B**.

De início, observamos que, em geral, os triângulos $X_1^A, X_2^A, X_3^A, \dots, X_m^A$ não guardam nenhuma relação com os triângulos $Y_1^B, Y_2^B, Y_3^B, \dots, Y_n^B$.

A estratégia a ser adotada na prova (Boltianski, s/d) consiste em recorrermos ao conjunto de triângulos que compõem **A** para construir, por composição, um polígono mais simples, por exemplo, um retângulo **C** que possua uma base congruente a um segmento pré-fixado. Poderemos, assim,

escrever: $A \sim C$. Repetindo o procedimento com o polígono B , obteremos um retângulo D , tal que $D \sim B$.

Em virtude da proposição 7, os quatro polígonos acima referidos devem possuir a mesma área, em particular, os dois retângulos C e D . Vamos, nesta etapa, necessitar de uma proposição muito importante:

Proposição 9

Se dois retângulos possuem mesma área e bases congruentes, terão alturas congruentes e, portanto, são retângulos congruentes.

Comumente, a prova de tal afirmação é considerada fácil, porque se recorre à conhecida fórmula da área de um retângulo. No entanto, o fato de que seja necessário utilizar a fórmula é uma questão matemática que ocupou os matemáticos ao longo da evolução da geometria, desde o tempo de Euclides. Para facilitar a fluência da leitura, adiaremos para um momento posterior tal discussão, aceitando a proposição 9, sem demonstração.

Da proposição 9, acima comentada e da proposição 1 (congruência implica equidecomposição), concluímos que os retângulos C e D são, também, equidecomponíveis.

Teríamos, então,

$$A \sim C; C \sim D; D \sim B;$$

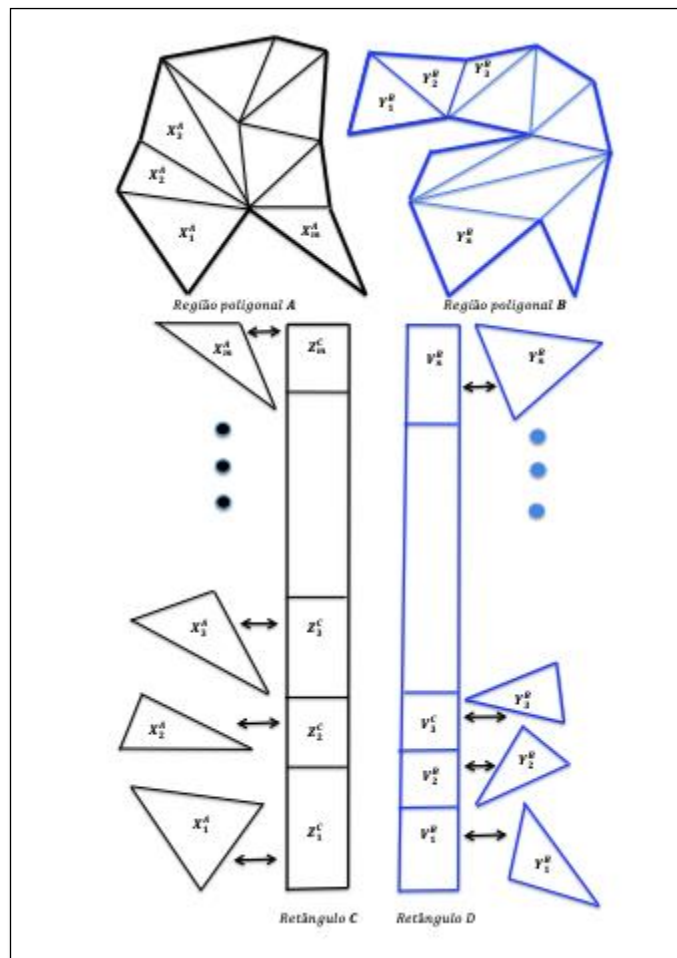
e, portanto, resultaria provada a proposição 8:

$$A \sim B.$$

A questão a ser respondida é, então, como obter a partir de uma triangularização de uma região poligonal A , um retângulo equidecomponível a A , com uma base pré-estabelecida. Se formos capazes de resolver o problema para cada triângulo da triangularização adotada, construiremos uma família de retângulos de mesma base, respectivamente equidecomponíveis aos triângulos dessa triangularização de A . Como esses retângulos possuem a mesma base, podemos recorrer a isometrias no plano e empilhar tais retângulos obtendo um retângulo que é a reunião deles. Com isso, é possível completar a prova da proposição 8, como foi exposto acima.

Na figura a seguir, esquematizamos a estratégia da demonstração.

Figura 22: Esquema da demonstração



Fonte: Elaboração própria (2019)

Do exposto, para a demonstração do Teorema de Bolyai, basta-nos provar que dado um triângulo qualquer T , podemos encontrar um retângulo R de base pré-fixada que seja equidecomponível a T .

Um primeiro passo nessa direção é provarmos que podemos construir um retângulo equidecomponível a um triângulo, o que é feito a seguir.

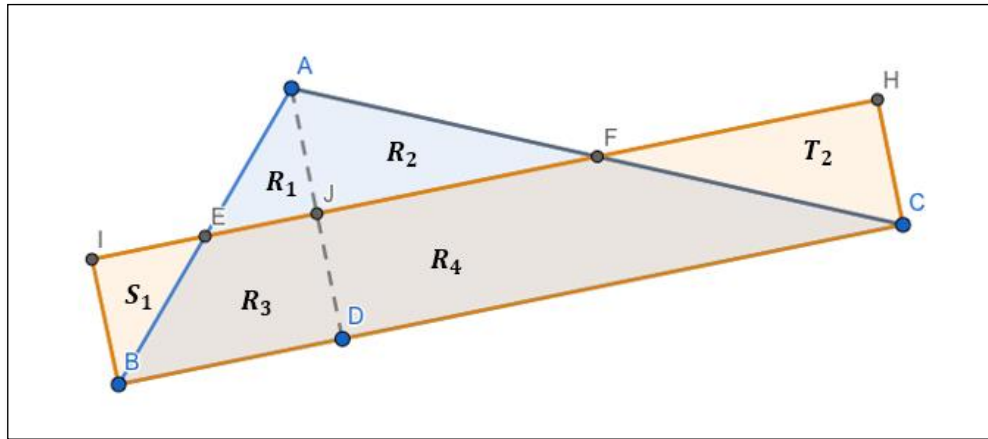
Proposição 10

Todo triângulo é equidecomponível a um retângulo.

Demonstração:

Consideremos um triângulo qualquer ΔABC

Figura 23: Triângulo equidecomponível a um retângulo



Fonte: Elaboração própria (2019)

A demonstração da proposição 9 inclui várias etapas que são mencionadas a seguir. As provas destes fatos podem ser encontradas em Greenberg (2007).

a) Dado uma região triangular qualquer $\triangle ABC$, podemos escolher o vértice A de tal maneira que o pé da altura relativa a A é um ponto D que está entre B e C .

b) A reta que passa nos pontos médios, E e F , respectivamente, dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é paralela à reta que contém o lado $\overline{BC}$ e é perpendicular à reta que contém a altura $\overline{AD}$.

c) Se traçarmos as perpendiculares à reta que passa pelo lado $\overline{BC}$, respectivamente nos pontos B e C , essas retas encontram a reta que passa por E e F em dois pontos I e H , do mesmo lado de A com respeito à reta que passa por $\overline{BC}$.

d) $BCHI$ é um retângulo.

e) Os triângulos $\triangle AEJ$ e $\triangle IEB$ são congruentes.

f) Os triângulos $\triangle AFJ$ e $\triangle CFH$ são congruentes.

Podemos, então, concluir a demonstração da proposição 9. De fato, escolhamos as seguintes regiões poligonais:

$$\begin{aligned} R_1 &= AEJ; S_1 = IEB; \\ R_2 &= AFJ; T_2 = CFH; \end{aligned}$$

$$R_3 = EJDB;$$

$$R_4 = JFCD.$$

Agora, consideremos as famílias de regiões poligonais:

$$R_1, R_2, R_3, R_4 ;$$

$$S_1, R_3, R_4, T_2.$$

Temos, então:

$$\Delta ABC = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4;$$

$$\square BCHI = S_1 \cup R_3 \cup R_4 \cup T_2.$$

Como R_1 é congruente a S_1 e R_2 é congruente a T_2 , fica demonstrado o que desejávamos.

Completada a demonstração de que podemos construir um retângulo equidecomponível a um dado triângulo, para provar o Teorema de Bolyai resta a etapa de provar que podemos obter um retângulo de base pré-fixada equidecomponível a um dado retângulo.

Proposição 11

Dados um retângulo $ABCD$ e um segmento de reta $\overline{MN}$, existe um retângulo $MNOP$ equidecomponível a $ABCD$.

Como antecipamos, a simplicidade do enunciado não traduz as dificuldades conceituais envolvidas na demonstração da proposição. Na verdade, esse é um problema que remonta à fundação da geometria no período grego e pode ser estudado em toda a sua amplitude e profundidade em Hartshorne (2000).

Se observarmos a prova da proposição 10, ela repousa apenas nos axiomas da geometria euclidiana das categorias de incidência, de ordem e de congruência, em particular, de congruência de triângulos. Poderíamos dizer, que se trata de uma prova puramente geométrica.

Já para obter a demonstração da proposição 11, vamos precisar recorrer ao campo algébrico (campo das fórmulas de área), construindo o conceito de

área como uma função numérica, nos moldes definidos na Seção 4.1 desta dissertação.

Como já dissemos, com base nos axiomas de área é possível construir uma função área e, além disso, demonstrar a conhecida fórmula da área de um retângulo: “a medida da área de um retângulo é o produto das medidas dos comprimentos de dois de seus lados adjacente”. Assim, dado um retângulo $ABCD$, representando por AB e AD as medidas de comprimento dos respectivos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ do retângulo, podemos escrever:

$$\text{medida de área } (ABCD) = AB \times AD.$$

Convém lembrar que as regiões poligonais em causa têm interior não vazio, o que nos permite acrescentar:

$$\text{medida de área } (ABCD) = AB \times AD > 0;$$

$$\text{medida de área } (MNMP) = MN \times MP > 0;$$

$$AB > 0; AD > 0; MN > 0; MP > 0.$$

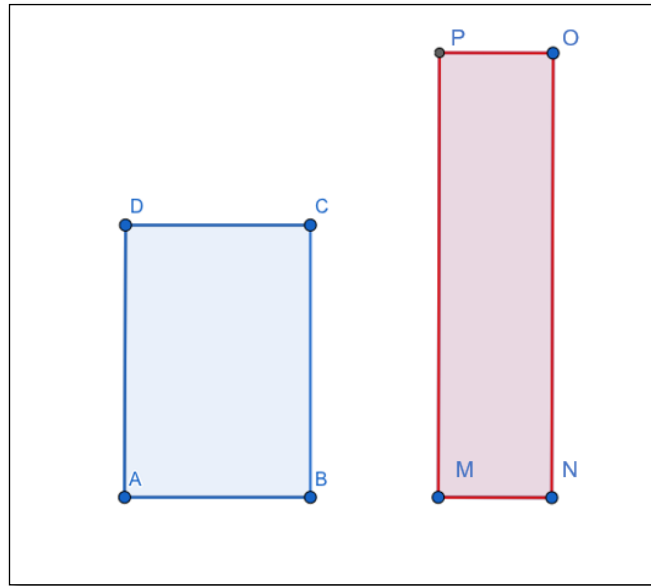
Essas últimas igualdades serão úteis adiante, para podermos tomar esses números reais como divisores.

Nas demonstrações a seguir vamos precisar utilizar o elenco completo dos axiomas da geometria euclidiana, em especial, o famoso Postulado das Paralelas, que vai ser suporte da teoria de semelhança de triângulos, empregada em várias passagens da demonstração em questão. Vamos empregar, ainda mais em etapa fundamental, o axioma de Arquimedes para os números reais.

Pelo exposto, fica evidenciado que a prova da proposição 11 é uma etapa de considerável complexidade do ponto de vista da epistemologia da matemática.

Para iniciar a abordagem do problema, suponhamos dado um retângulo $ABDC$ e seja $\overline{MN}$ um segmento de reta qualquer:

Figura 20: Retângulos de mesma área



Fonte: Elaboração própria (2019)

Sabemos que o retângulo procurado deverá ter a mesma área de $ABCD$, em virtude da proposição 7. Pelo fato de que os dois retângulos devem ter a mesma área, a fixação da base $\overline{MN}$ implica que a medida do comprimento do outro lado do segundo retângulo fica definida, pelo emprego da fórmula de área mencionada anteriormente:

$$AB \times AD = MN \times MP \rightarrow MP = \frac{AB \times AD}{MN}.$$

Assim, o segundo retângulo fica determinado, a menos de uma isometria. O problema, então, é encontrar uma família $X_1^A, X_2^A, X_3^A, \dots, X_m^A$ de polígonos que decomponham $ABCD$ e uma família $Y_1^B, Y_2^B, Y_3^B, \dots, Y_m^B$, de polígonos respectivamente congruentes aos da primeira família que decomponham $MNOP$. Convém observar que, nesta e em provas seguintes, iremos empregar o Corolário 1, da Proposição 6, em que estabelecemos a equivalência lógica entre equidecomposição por decomposição por meio de polígonos ou por meio de triangularizações.

Como os dois retângulos possuem a mesma medida de área, podemos escrever as igualdades:

$$AB \times AD = MN \times MP,$$

$$\frac{AD}{MN} = \frac{MP}{AB}.$$

Há três possibilidades:

$$a) \frac{AD}{MN} = \frac{MP}{AB} = 1$$

$$b) \frac{AD}{MN} = \frac{MP}{AB} > 1$$

$$c) \frac{AD}{MN} = \frac{MP}{AB} < 1$$

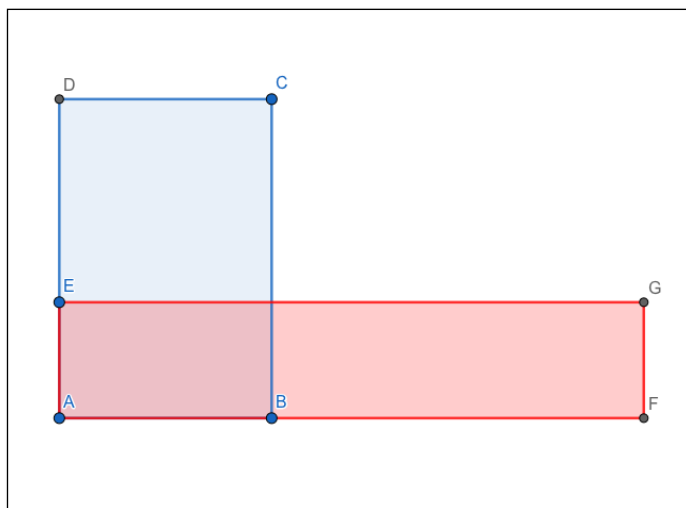
No primeiro caso, temos

$$AD = MN; MP = AB,$$

e podemos concluir que os dois retângulos são congruentes e, portanto, equidecomponíveis. Resta, então, em examinar as duas últimas possibilidades: $MN < AD$ ou $AD < MN$. Deste último caso e da desigualdade (c), resulta $MP < AB$. Dessa forma, em ambos os casos, temos um dos lados do retângulo $MNOP$ estritamente menor do que um dos lados do retângulo $ABCD$. A argumentação desenvolvida para qualquer um dos dois casos é a mesma. Escolhamos, então, o caso $MN < AD$.

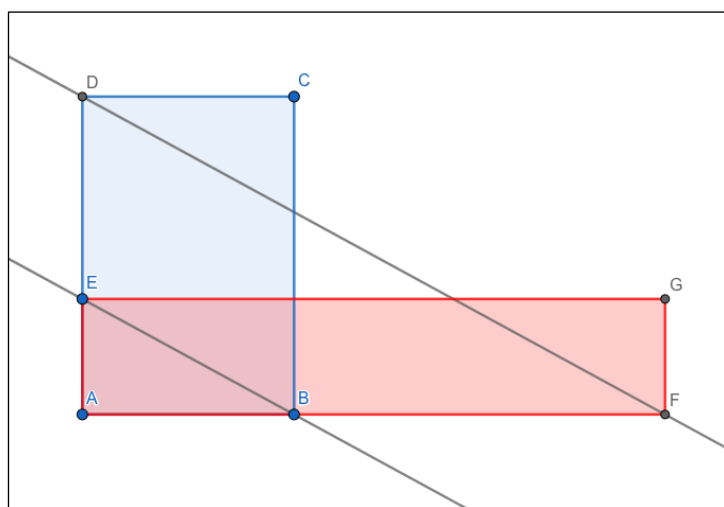
Sendo assim, tomando o ponto E entre A e D tal que $AE \cong MN$, podemos construir o retângulo $AFGE$ congruente ao retângulo $MNOP$. A figura a seguir permite-nos visualizar essas operações.

Figura 21: Retângulos de mesma área caso 1



Fonte: Elaboração própria (2019)

Com referência à figura acima, uma primeira observação importante é que as retas que passam por $\overline{EB}$ e $\overline{DF}$ são paralelas:

Figura 22: Retângulos de mesma área caso 1, retas $\overline{EB}$ e $\overline{DF}$ 

Fonte: Elaboração própria (2019)

A prova desse fato baseia-se na hipótese de que os retângulos $ABCD$ e $AFGE$ possuem a mesma área. Com efeito, dessa hipótese resulta:

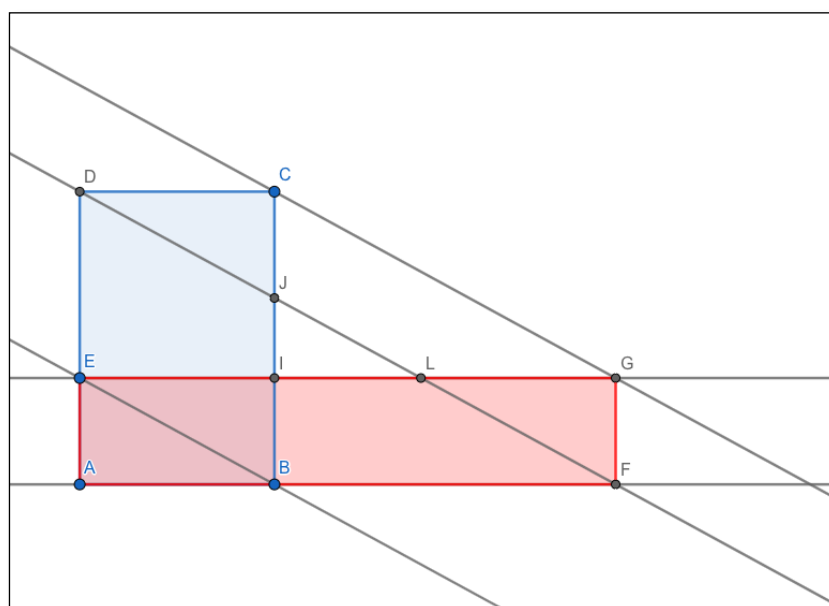
$$AB \times AD = AF \times AE$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AB}$$

Agora, considerando os triângulos ABE e AFD , verificamos que são válidas as hipóteses do caso LAL de semelhança de triângulos, o que implica a congruência dos ângulos ABE e AFD e, como esses ângulos são ângulos correspondentes formados pela transversal $\overleftrightarrow{BF}$ ao cortar as retas $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{FD}$, estas últimas retas são paralelas, em consequência do Teorema do Ângulos Alternos Internos. (Greenberg, 2007).

Retornando à Figura 22, observamos que as retas definidas pelos segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{DF}$ induzem decomposições dos retângulos $ABCD$ e $AFGE$. Para explorar essas decomposições, é conveniente complementar a Figura 22:

Figura 23: Complemento da figura 22



Fonte: Elaboração própria (2019)

Com referência à Figura 27, podemos extrair as conclusões:

a) A reta que passa por C e G é paralela à reta que passa por E e B .

Iniciamos a prova dessa afirmação recorrendo a conhecida propriedade das proporções:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{AD - AE}{AF - AB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{ED}{BF} = \frac{AE}{AB}$$

As hipóteses adotadas implicam que **EICD** e **BFGI** são retângulos, do que decorre as igualdades: **ED = IC**; **BF = IG**. Podemos escrever, então:

$$\frac{IC}{IG} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{IC}{AE} = \frac{IG}{AB}.$$

Tal igualdade nos permite concluir que os triângulos retângulos **EAB** e **CIG** são semelhantes por terem um ângulo congruente formado por lados respectivamente proporcionais. Tal semelhança nos permite escrever as congruências de ângulos:

$$\hat{\text{ang}}(AEB) \cong \hat{\text{ang}}(ICG) ;$$

$$\hat{\text{ang}}(ABE) \cong \hat{\text{ang}}(IGC).$$

Consideremos, a reta definida pelo segmento de reta **EB** e a reta definida pelo segmento de reta **CG**, cortadas pela transversal definida pelo segmento de reta **EG**. Essa transversal forma com as citadas retas os ângulos alternos internos **BEG** e **EGC**. Como tais ângulos são, respectivamente, complementares aos ângulos **AEB** e **ICG** e estes últimos são congruentes, podemos escrever: $\hat{\text{ang}}(BEG) \cong \hat{\text{ang}}(EGC)$. O Teorema dos Ângulos Alternos Internos (Greenberg (2007) implica que as retas definidas pelos segmentos **EB** e **CG** são paralelas, como desejávamos provar.

b) Os triângulos retângulos DCJ e LGF são congruentes.

De fato, o paralelismo de retas demonstrado acima, permite-nos concluir as seguintes congruências entre segmentos de reta:

$$\overline{DC} \cong \overline{LG} ; \overline{CJ} \cong \overline{GF}.$$

Dessas relações resulta a congruência dos triângulos retângulos **DCJ** e **LGF**, por terem catetos correspondentes congruentes.

Retornando à questão da equidecomposição dos retângulos **ABCD** e **AFGE**, observamos que:

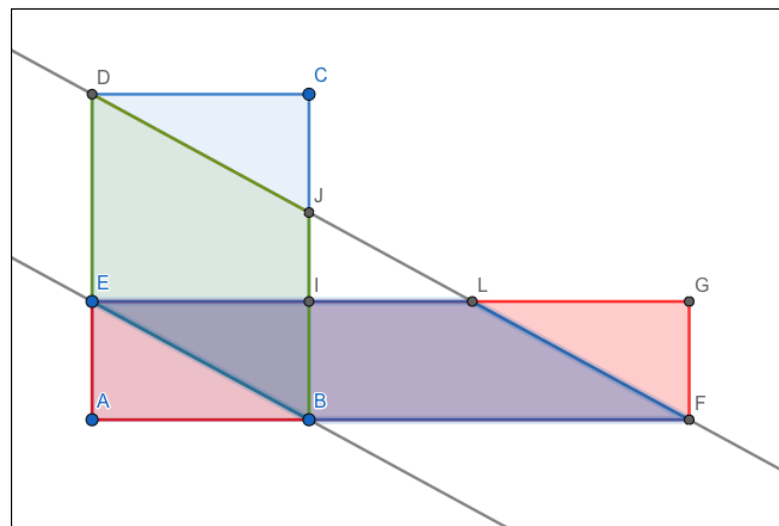
$$ABCD = ABE \cup EBJD \cup DJC;$$

$$AFGE = ABE \cup EBFL \cup LFG.$$

Como $ABE \cong ABE$ e já provamos que $DJC \cong LFG$, para provar que BCD e $AFGE$ são equidecomponíveis, basta-nos provar que $EBJD$ e $EBFL$ são equidecomponíveis.

De início, observamos que os dois quadriláteros acima mencionados são paralelogramos, em decorrência do paralelismo de retas já demonstrado. Além disso, têm a mesma área, o que decorre das igualdades de conjuntos acima apresentada. Por fim, esses paralelogramos possuem uma base em comum:

Figura 24: Retângulos de mesma área caso 1, parte final

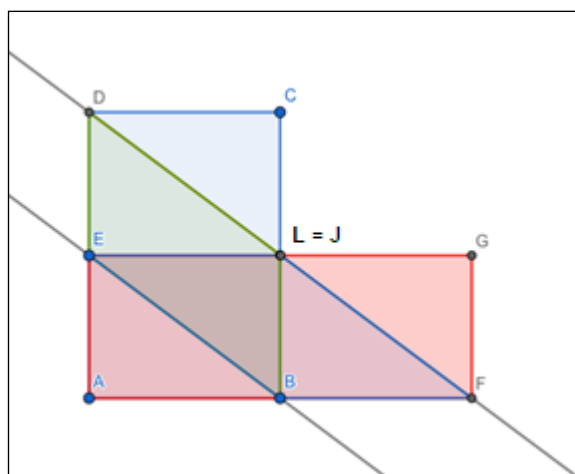


Fonte: Elaboração própria (2019)

No entanto, cabe observar que as afirmações feitas até este ponto não dependem da posição que o ponto E ocupa entre os extremos do segmento de reta $\overline{AD}$. No entanto, os paralelogramos $EBFL$ e $EBJD$ podem ter posições relativas distintas, uma delas a que foi tratada nos parágrafos acima. As outras duas possibilidades são, a seguir, examinadas.

A primeira ocorre quando ponto E é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AD}$:

Figura 25: Retângulos de mesma área caso 2



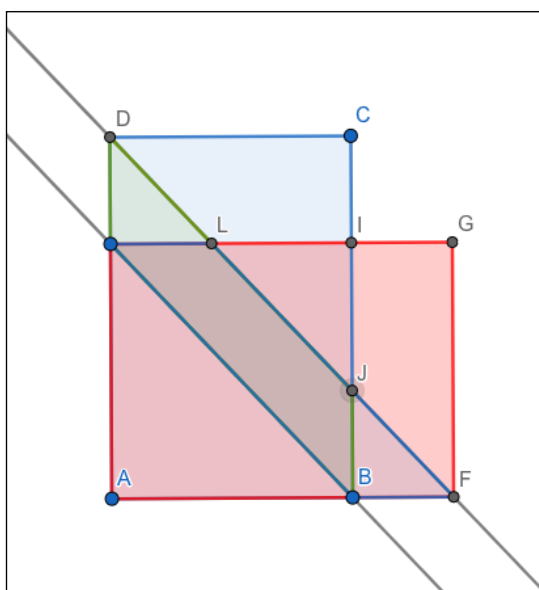
Fonte: Elaboração própria (2019)

Neste último caso, observamos que os dois pontos J e L do caso previamente estudado, fundem-se num ponto único⁶ e como provamos anteriormente os triângulos DCJ e LGF são congruentes.

A terceira e última possibilidade ocorre quando o ponto E se situa mais próximo à extremidade D do segmento AD :

⁶ Neste caso, já poderíamos concluir diretamente a equidecomposição dos retângulos $ABCD$ e $AFGE$, em face da congruência entre dois quaisquer dos triângulos que fazem parte da decomposição desses retângulos. Preferimos, no entanto, remeter ao Lema 3, a finalização conjunta da proposição 10, com a demonstração da equidecomposição de dois paralelogramos de mesma área e com uma base comum, nos três casos possíveis para as posições relativas desses paralelogramos, na presente argumentação.

Figura 26: Retângulos de mesma área caso 3



Fonte: Elaboração própria (2019)

Analogamente ao primeiro caso temos a congruência dos triângulos DCJ e LGF . E a prova da equidecomposição dos retângulos $ABCD$ e $AFGE$ ficará completada se provarmos o seguinte lema:

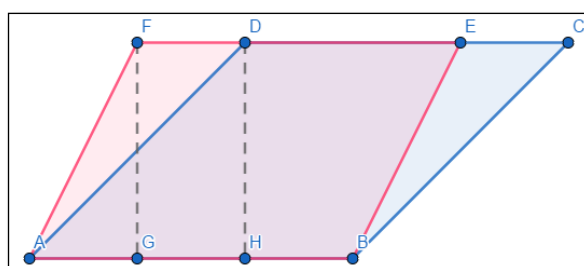
Lema 4

Dois paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$, com uma base comum e de mesma área são equidecomponíveis.

Demonstração:

Se recorrermos, mais uma vez, à função área, é possível deduzir (Moise, 1963) a conhecida fórmula da área de um paralelogramo qualquer $ABCD$:

Figura 27: Paralelogramos de mesma base



Fonte: Elaboração própria (2019)

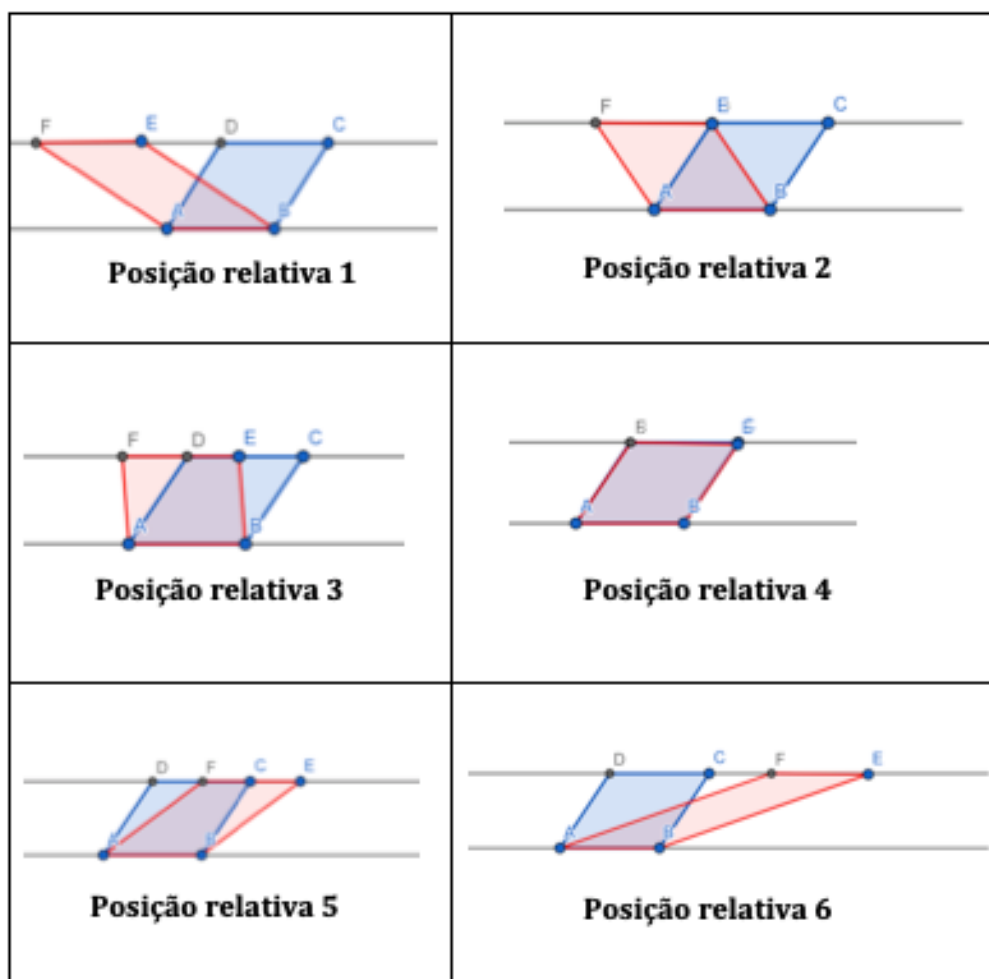
$$\text{Área}(ABCD) = AB \times HD$$

e

$$\text{Área}(ABEF) = AB \times GF$$

A suposição de que $ABCD$ e $ABEF$ possuem a mesma área implica, em face da fórmula acima, que os paralelogramos possuem a mesma altura, isto é, $\overline{HD} = \overline{GF}$ que por sua vez implica dizer que os vértices C , D , E e F estão todos em uma mesma paralela à reta definida pela base comum AB dos paralelogramos em foco. É preciso, no entanto, examinar as seis possíveis posições relativas entre os dois segmentos de reta $\overline{DC}$ e $\overline{FE}$:

Figura 28: Paralelogramos de mesma base: posições relativas

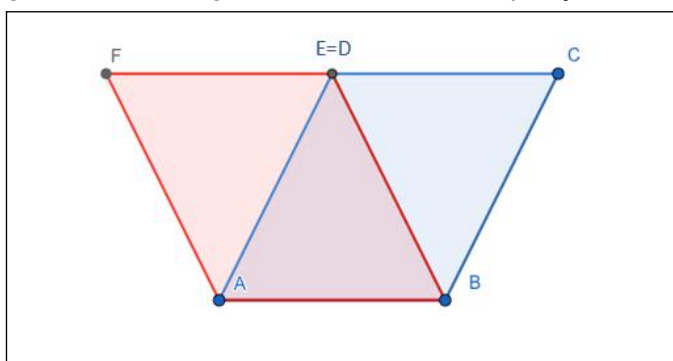


Fonte: Elaboração própria (2019)

Observamos que as posições relativas 1 e 6, uma troca dos rótulos dos paralelogramos permite utilizar a mesma argumentação na prova do lema, o que torna essas posições logicamente equivalentes. Analogamente, as posições relativas 3 e 5 são equivalentes. Na posição relativa 4, os paralelogramos são congruentes e, portanto, equidecomponíveis.

Resta-nos, portanto, examinar as posições relativas 1, 2 e 3. Começemos pela posição relativa 2:

Figura 29: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 2



Fonte: Elaboração própria (2019)

Observamos que os triângulos ADB e AEF são congruentes: a) lado comum, $\overline{AD} = \overline{AE}$; b) $\overline{AB} \cong \overline{FE}$, por serem lados opostos de um paralelogramo; c) $\overline{BD} \cong \overline{AF}$, pelo mesmo argumento. Analogamente, os triângulos DBA e DBC são congruentes. Por transitividade, temos $DBC \cong FAE$

Resulta do parágrafo anterior que valem as igualdades de conjuntos:

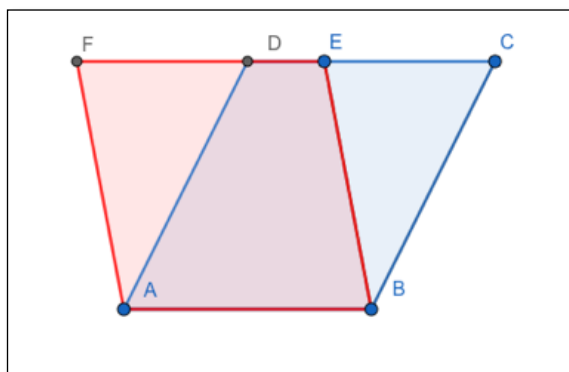
$$ABCD = ABD \cup DBC,$$

$$ABEF = ABE \cup FAE,$$

Como $ABD = ABE$ e $DBC \cong FAE$ e os interiores desses triângulos têm interseção vazia, fica demonstrado, neste caso, que $ABCD$ e $ABEF$ são equidecomponíveis.

Examinemos a posição relativa 3:

Figura 30: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 3



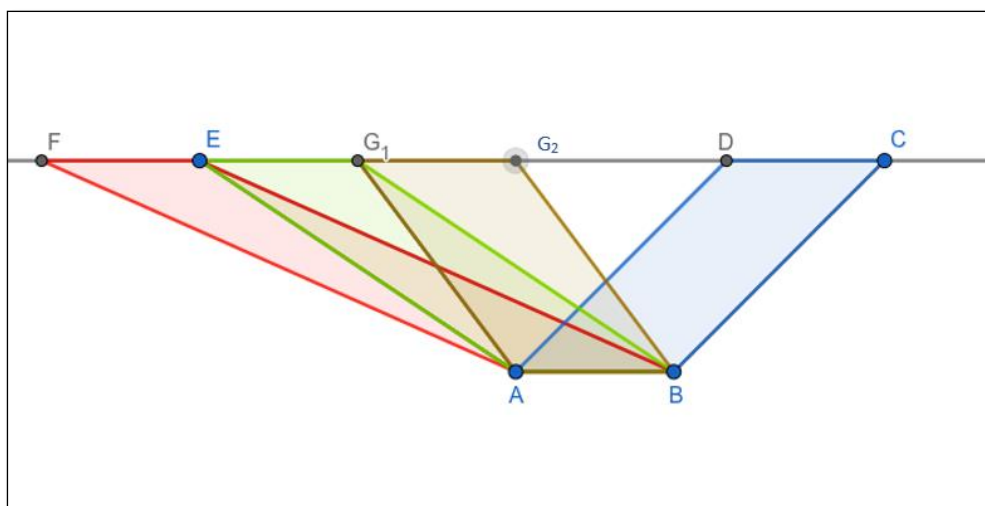
Fonte: Elaboração própria (2019)

Neste caso, o ponto E está entre os pontos D e C . Afirmamos que os triângulos ADF e BCE são congruentes. De fato, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, por serem lados opostos de um paralelogramo. O mesmo argumento vale para justificar a congruência $\overline{AF} \cong \overline{BE}$. Além disso, $\overline{EF} \cong \overline{BA} \cong \overline{CD}$. Se considerarmos as medidas de comprimento desses segmentos de reta, podemos escrever $EF = CD$, o que implica $ED + DF = CE + ED$ e $DF = CE$. Da última igualdade, podemos concluir que $\overline{DF} \cong \overline{CE}$. Os triângulos ADF e BCE possuem lados correspondentes congruentes e, portanto, são congruentes como afirmamos.

Observamos que para provar a equidecomposição dos dois paralelogramos $ABEF$ e $ABCD$ podemos unir o trapézio $ABED$ com o triângulo ADF , para compor o primeiro paralelogramo e o mesmo trapézio unido com o triângulo BCE , para formar o paralelogramo $ABDC$ recorrendo à definição 2 de equidecomposição. Se preferirmos utilizar a definição equivalente (definição 2') basta decompor o citado trapézio em dois triângulos e teríamos uma equidecomposição que utiliza apenas triangularizações.

Por fim, consideremos a posição relativa 1.

Figura 31: Paralelogramos de mesma base: posição relativa 1



Fonte: Elaboração própria (2019)

Iniciamos pela construção do paralelogramo $EABG_1$. Observamos, então, que $FABE$ e $EABG_1$ são dois paralelogramos que estão na posição relativa 2 e, portanto, são equidecomponíveis. Repetindo a construção obtemos um paralelogramo ABG_2G_1 equidecomponível a $EABG_1$ e, por transitividade, equidecomponível a $FABE$. É possível, então, construir uma sequência de pontos $G_i, i = 2, 3, \dots$, tais que os paralelogramos ABG_iG_{i-1} , são equidecomponíveis a $ABEF$.

Neste ponto da demonstração, é necessário recorrer a um axioma dos números reais:

Axioma de Arquimedes para os números reais

Dados os números reais positivos α e β , existe um número natural n , tal que $\beta < n \cdot \alpha$.

Se empregarmos axioma aos números reais positivos EG_1 e ED , sabemos que existe um número natural n , tal que $ED < n \cdot EG_1$. Se tomarmos k como o menor dos números n que satisfazem a essa desigualdade, podemos afirmar que o ponto G_k pertence ao segmento de reta $\overline{ED}$. Assim, os paralelogramos ABG_kG_{k-1} e $ABCD$ estarão na posição relativa 2 ou na posição relativa 3. Portanto, são equidecomponíveis. Como ABG_kG_{k-1} é equidecomponível a

$ABEF$, resulta, por transitividade, que $ABCD$ e $ABEF$ são equidecomponíveis, o que completa a demonstração da proposição 10.

Do exposto, fica demonstrado o Teorema de Bolyai.

Antes de passar para o próximo capítulo convém fazer alguns comentários. Recorremos ao denominado axioma de Arquimedes para os números reais, mas sabemos que existe uma versão geométrica do axioma. Escolhemos a versão para números reais, para abreviar nossa apresentação e remetemos à referência Greenberg (2008) para as definições da relação “menor do que” ($<$) no conjunto dos segmentos de uma reta e de múltiplo inteiro de um segmento dessa reta. Uma versão geométrica é apresentada a seguir:

Axioma de Arquimedes para segmentos de uma semirreta

Dado um segmento de reta $\overline{AU}$ em uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ e dado um segmento de reta qualquer, $\overline{AB}$, existe um número natural n , tal que

$$\overline{AB} < n \cdot \overline{AU}.$$

A versão geométrica do Axioma de Arquimedes é aqui lembrada porque nos parece mais próxima da intuição ancorada na percepção visual. Tal princípio geométrico nos assegura que, dados um segmento qualquer $\overline{AU}$ em uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ e um segmento arbitrário $\overline{AB}$, nessa semirreta, podemos obter um segmento $\overline{AC}$, em $\overrightarrow{AX}$, tal que B esteja entre A e C , para isso, construindo $\overline{AC}$ como um múltiplo do segmento $\overline{AU}$, $\overline{AC} = n \cdot \overline{AU}$, para n suficientemente grande:



5. OBJETIVOS

5.1. Objetivo geral

Elaborar e analisar uma sequência didática relativa à equidecomposição de regiões poligonais e ao Teorema de Bolyai, com apoio em conceitos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

5.2. Objetivos específicos

- Elaborar uma sequência didática sobre decomposição/composição de regiões poligonais, visando à validação do Teorema de Bolyai.
- Realizar uma análise preliminar das situações propostas na sequência, focalizada na dimensão matemático-epistemológica.
- Analisar, na sequência proposta, possíveis rupturas na aprendizagem, em particular, saltos informacionais e obstáculos.

6. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Convém, neste início, nos referirmos ao capítulo 3 desta dissertação, no qual esboçamos as bases teóricas adotadas e delineamos o caminho metodológico escolhido na presente investigação. No citado capítulo, optamos por adotar recortes tanto na Teoria das Situações Didáticas, quanto nas etapas da Engenharia Didática.

Lembramos, também, como foi dito no capítulo 3, que os sujeitos da pesquisa foram dois discentes do final do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPE.

De início, retomemos as questões didáticas tratadas no capítulo 3, para indicar os focos de nosso trabalho, repetindo, para maior fluidez da leitura, a citação inicial da seção 3.3:

A aprendizagem apresenta frequentes **rupturas** (grifo nosso) que podem ter origens e formas variadas: **saltos informacionais** (grifo nosso), mudanças nas formas de controle (proto, para ou matemático), origem ontogenética, escolha didática, contingência epistemológica, etc. Algumas das concepções não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então “obstáculos”. (BROUSSEAU, 2008, p.48)

Como vemos, o pesquisador francês propõe um elenco complexo de rupturas na aprendizagem. Em face disso, limitamo-nos, no presente estudo, a analisar possíveis rupturas na aprendizagem tipificadas como saltos informacionais e obstáculos, com base, seja na análise preliminar, seja nos dados obtidos durante o experimento realizado.

Seguindo as escolhas acima referidas, na fase de **análises preliminares** de uma Engenharia Didática, demos ênfase à dimensão matemático-epistemológica.

Para tanto, fazemos, a seguir, uma visão geral de capítulos anteriores, em especial o capítulo 4, dedicado à matemática da sequência didática proposta.

6.1. Visão geral dos conteúdos da sequência didática

Um olhar mais geral sobre o que escrevemos no capítulo 4, permite-nos identificar três grandes blocos, nos quais podemos agrupar os conceitos e o processo de validação lógica das proposições:

- Geometria dos polígonos: definições iniciais, decomposição/composição.
- Relação de equidecomposição: transitividade, conexão com área.
- Teorema de Bolyai

Em seguida, comentamos brevemente cada um desses agrupamentos.

6.1.1. Geometria dos polígonos: definições iniciais, decomposição/composição

A geometria dos polígonos é estudada em níveis diversos em todas as fases do ensino básico. Por isso, supusemos que os sujeitos, alunos de licenciatura em Matemática, deviam ter adquirido conhecimentos sobre tais conteúdos, sem esquecer que traziam conhecimentos provenientes das suas atividades do cotidiano, com a linguagem que, necessariamente, os acompanha. A etapa da sequência visava destacar aqueles conceitos que iriam surgir com maior frequência no experimento didático. Incluímos entre eles:

- linha poligonal;
- região poligonal/polígono;
- interior, exterior, fronteira (ou contorno) de um polígono;
- decomposição de um polígono;
- composição de um polígono;

Nessa fase, previmos estabelecer o diálogo para convencionar os significados adotados para esses termos. Na teoria das situações didáticas, o momento seria de estabelecimento das “regras do jogo”, ou de delimitação de parte do meio a ser oposto aos sujeitos no decorrer das atividades do experimento.

6.1.2. Relação de equidecomposição: transitividade, conexão com a grandeza área

Partimos da hipótese de que a ideia de equidecomposição possui uma base empírica nas atividades escolares, nas quais, desde cedo, são realizados trabalhos de corte e colagem, bem como, se utilizam, com frequência, os jogos de Tangram e outros análogos. Por isso, num primeiro momento, proporíamos a realização de operações de decomposição/composição de regiões poligonais que favorecessem a aquisição do conceito de equidecomposição.

Num segundo momento, proporíamos a passagem do emprego dessas operações para a compreensão de que a equidecomposição é uma relação de equivalência definida no conjunto dos polígonos. Nessa etapa, trataríamos da reflexividade e da simetria dessa relação.

Em um terceiro momento, o tratamento da propriedade de transitividade da equidecomposição, iria se constituir em etapa de maior complexidade do ponto de vista da aprendizagem, como detalharemos adiante.

6.1.3. Teorema de Bolyai

Como apoio na intuição geométrica e nos conhecimentos escolares era esperado que os sujeitos afirmassem, sem dificuldades, que duas regiões poligonais equidecomponíveis possuíssem a mesma área. No entanto, era presumível que não formulassem a questão: duas regiões poligonais quaisquer de mesma área, seriam, necessariamente, equidecomponíveis?

Como vemos, tratava-se aqui de indagar a validade da recíproca da proposição discutida anteriormente na seção anterior deste capítulo, em que mencionamos que duas regiões poligonais equidecomponíveis possuíam a mesma área.

Como dissemos no capítulo 4, a recíproca mencionada é o que denominamos Teorema de Bolyai, objeto da parte final da sequência didática.

Com base nas considerações acima, procuramos planejar as sessões do experimento e as atividades que a comporiam.

6.2. Planejamento geral das sessões de atividades

Para a realização das tarefas, foi usada uma versão do aplicativo *GeoGebra-Geometria*, que é específico para atividades no campo da geometria. Nessa versão, o menu do aplicativo (traduzido em português) é simplificado, uma vez que se limita a ferramentas de geometria.

A realização do experimento foi prevista para **duas sessões, com duração média de três horas**. As sessões para execução das atividades pelos sujeitos, com nossa presença, seriam gravadas em áudio e vídeo, para posterior transcrição ou assistência.

Na primeira sessão, planejamos abranger as etapas 6.1.1 e 6.1.2, mencionadas na visão geral dos conteúdos da sequência, por meio das atividades 1, 2, 3 e 4. Simultaneamente, seria procedida à familiarização com o *GeoGebra-Geometria*.

A segunda sessão foi prevista para a validação do Teorema de Bolyai, com base nas atividades 5 e 6.

6.3. A sequência de atividades proposta: análise a priori

Para prosseguir, apresentamos a sequência de seis atividades, com seus enunciados e análises *a priori*. Há, ainda, uma atividade complementar, planejada como opcional na sequência.

Uma observação inicial diz respeito à argumentação que os sujeitos poderiam utilizar no experimento. Previmos que, na apresentação do *software GeoGebra-Geometria*, seria destacado que, em seu menu, existem ferramentas que permitem realizar translações, rotações e reflexões axiais em figuras geométricas desenhadas em sua tela. Para analisar questões didáticas que surgem com o recurso a essas operações, vamos nos apoiar em um exemplo.

Tomemos a questão de provar que dois triângulos são congruentes. Na análise *a priori*, previmos que o sujeito adotaria, como argumentação, a verificação empírica de que, transladando um dos triângulos via *GeoGebra-Geometria*, seria possível fazê-lo coincidir, **visualmente**, com o outro triângulo.

Fizemos a hipótese de que tal escolha iria predominar como ação do sujeito. Por isso, fizemos a escolha se aceitar, no decorrer da resolução das atividades da sequência didática pelos sujeitos esse tipo de validação. Adotamos essa escolha porque avaliamos que a complexidade das atividades propostas requeria uma atenuação das exigências de rigor formal, sob o risco de ser alongada, excessivamente, sua duração.

Em decorrência de nossa escolha, para preservar a compatibilidade com a linguagem matemática utilizada no capítulo 4, na redação desta dissertação, vamos reservar os termos “prova” e “demonstração” para as validações puramente matemáticas. Para outros tipos de validação, recorreremos a termos como “argumentação”, “confirmação”, “comprovação”, “validação”, “verificação”, entre outros. Julgamos justificada tal distinção para valorizar o seu sentido epistemológico em um texto no campo da didática da matemática. No entanto, na análise *a priori*, refletimos que esse cuidado terminológico poderia gerar dificuldades adicionais junto aos sujeitos, que utilizam frequentemente o termo “prova” para designar vários tipos de validação. Decidimos, então, aceitar, no **decorrer dos diálogos** com os sujeitos, empregar livremente os termos “prova” e “demonstração” como sinônimos daqueles outros acima mencionados. Amparamos essa escolha no fato de que a distinção em foco não é o objetivo principal deste trabalho e, sim, a aquisição do conteúdo do Teorema de Bolyai.

Nas etapas finais do experimento, a depender da evolução dos sujeitos, poderíamos complementar as validações apoiadas no emprego do *software*, provocando um diálogo com eles. Nesse diálogo, procuraríamos explicar, por exemplo, que a superposição visualmente obtida via *software*, seria distinta da congruência entre os dois triângulos demonstrada logicamente, com base nas proposições da geometria euclidiana. Na primeira, estaríamos diante de uma argumentação empírica, afetada pelas imprecisões inerentes às ações no mundo físico. Na segunda, estaríamos no âmbito abstrato próprio das validações lógico-matemáticas.

Prosseguindo na análise *a priori*, comentamos outra questão. O menu do *GeoGebra-Geometria* também inclui **ferramentas de medição**, particularmente de comprimento, de ângulo e de área. Aliás, *no software*, para utilizar a ferramenta de rotação do desenho de uma figura geométrica em torno de um ponto, muitas vezes, precisamos primeiro efetuar uma medição de ângulo, para,

em seguida, efetuar a rotação cujo valor seja o obtido por medição desse ângulo. Como sabemos, qualquer processo de medição, mesmo aqueles realizados nos computadores, contém, inevitavelmente, incerteza no resultado dessa medição, o que torna esse procedimento inválido como uma prova lógico-matemática.

Em face do emprego da medição via *software*, previmos uma atitude diferente da que mencionamos sobre o uso das transformações geométricas do menu do *GeoGebra-Geometria*. Proporíamos desestimular o emprego da medição como argumento de prova matemática, procurando com isso, incentivar a busca de argumentos matemáticos no processo de validação. No entanto, tal recomendação não seria válida no caso do uso da ferramenta de rotação em torno de um ponto, no *software* pois, em alguns casos, é indispensável efetuar uma medição.

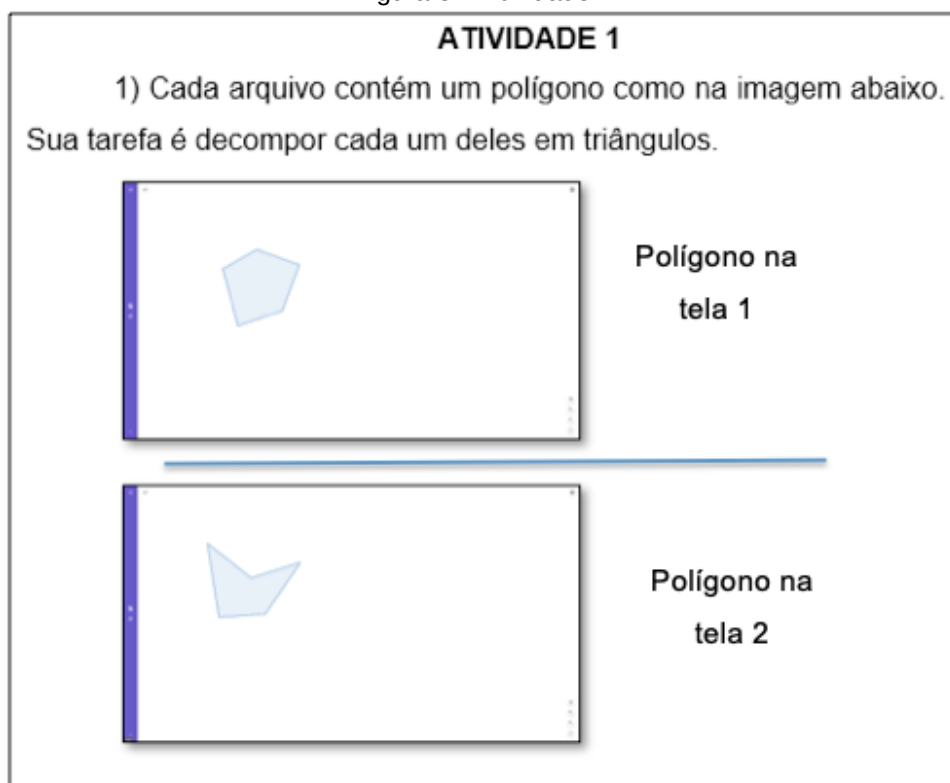
Mais uma questão relativa às validações refere-se ao emprego de exemplos, construídos com recurso ao *GeoGebra-Geometria*, como argumento de validação de uma proposição matemática. Previmos que manteríamos, durante a realização da sequência, uma vigilância com relação ao emprego por parte dos sujeitos de casos particulares para a verificação de proposições de caráter geral. Essa vigilância poderia ser exercida com intervenções nossas, em que salientaríamos o caráter geral do procedimento adotado ou, em alguns casos, “desestabilizando” o argumento utilizado com um caso não incluído no procedimento particular adotado pelo sujeito.

Uma última observação é que, antes de iniciar as atividades, estabeleceríamos um vocabulário junto aos sujeitos para nos certificarmos do entendimento que eles teriam sobre algumas definições básicas. Entre elas: linha poligonal aberta e fechada; polígonos; polígono convexo; e não convexo; ponto interior e de fronteira; vértices; lados; diagonais e decomposição.

A seguir, apresentamos as atividades.

6.3.1 Atividade 1: Decomposição de polígonos

Figura 32: Atividade 1



Fonte: Elaboração própria (2019)

A atividade 1 ofereceria aos sujeitos a oportunidade de se familiarizarem com o uso do *software*, e de retomarem noções geométricas básicas.

Nesse momento do experimento, informamos aos sujeitos que as sub-regiões em que podemos repartir uma região poligonal dada poderiam ser regiões poligonais quaisquer. No entanto, para simplificar a resolução de das atividades 1,2,3, e 4, iríamos iniciar apenas com sub-regiões triangulares. Advertimos, também, que é possível provar que essa exigência não traz perda de generalidade. Noutros termos, podemos utilizar os dois tipos de decomposição, que são, de fato, logicamente equivalentes. Sabemos que essa advertência está amparada pelas demonstrações apresentadas no capítulo 4 desta dissertação.

Portanto, a operação de decompor um polígono significaria, nas citadas atividades, **decompor os polígonos em triângulos**, ou seja, **triangularizar um polígono**. Além disso, nós tomaríamos, sem necessidade de validação, como verdadeira a proposição: **todo polígono pode ser triangularizado**.

Para isso, o sujeito poderia traçar segmentos de reta que dividissem um polígono dado em triângulos ou poderia construir triângulos diretamente sobre o polígono dado, com a ferramenta “construir polígonos”.

Ao aplicar a atividade, esperávamos que os sujeitos fizessem algumas perguntas como:

Posso colocar um ponto no interior e ligar aos vértices? Devo usar apenas a ferramenta de desenhar polígonos? Devo fazer o menor número de triângulos ou a quantidade é livre? Tenho que manter a figura original? Devo nomear os triângulos formados?

Na atividade, as variáveis didáticas que levamos em conta foram:

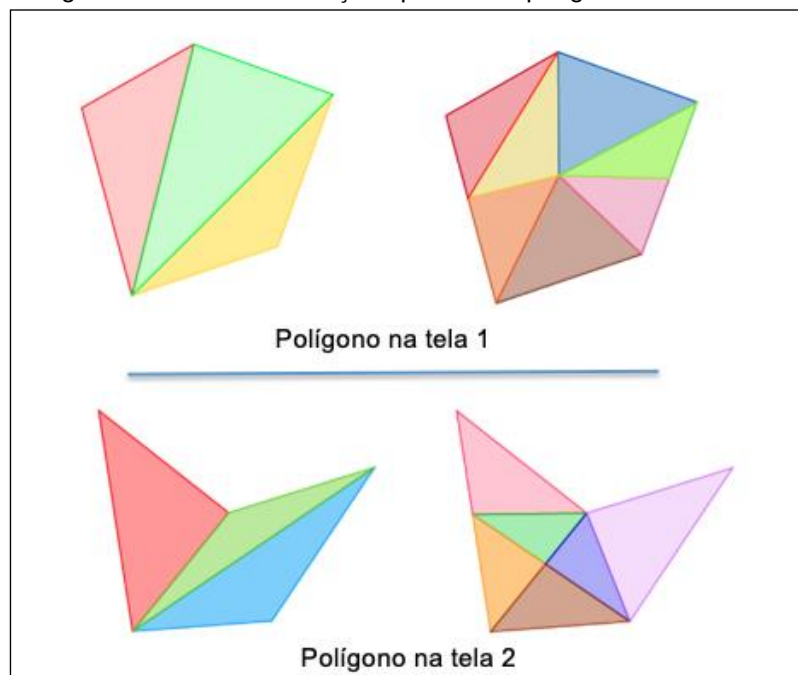
- v_1 : polígonos convexos/não convexos
- v_2 : malha quadriculada exibida/não exibida na tela do *GeoGebra-Geometria*.

Decidimos propor atividades nas quais haveria os dois valores da primeira variável, ou seja, atividades com polígonos convexos e outras com polígonos não convexos. Apoiamos essa escolha no fato de que as propriedades da equidecomposição e o Teorema de Bolyai são igualmente válidos nos dois tipos de polígonos. Além disso, avaliamos não haver variação significativa de complexidade na triangularização, nessas duas categorias de polígonos. Quanto à segunda variável, decidimos propor apenas a tela sem a exibição da malha quadriculada. Amparamos a escolha na hipótese de que a malha quadriculada, possivelmente, induzirá decomposições das regiões poligonais em sub-regiões não-triangulares, o que demandaria mais intervenções nossas.

Previmos que esta atividade não iria acarretar **rupturas na aprendizagem**. No entanto, supusemos que seriam esperadas dificuldades no uso do *software*, motivo pelo qual a consideramos uma atividade que contribuiria para familiarizar os sujeitos com esse recurso didático.

A seguir, mostraremos algumas resoluções que eram esperadas para a atividade 1:

Figura 33: Possíveis soluções para cada polígono da atividade1



Fonte: Elaboração própria (2019)

6.3.2 Atividade 2: Composição de polígonos

Figura 34: Atividade 2

ATIVIDADE 2

2) Escolha umas das decomposições feitas na questão anterior para compor uma nova figura com as partes obtidas.

Fonte: Elaboração própria (2019)

A atividade 2 possibilitaria aos sujeitos trabalharem com as isometrias: reflexão, translação e rotação. O objetivo da questão seria construir um novo polígono com as partes da decomposição feita na atividade 1. Nessa etapa, trataríamos da noção de equidecomposição para, então, formalizar esse conceito. Eles poderiam usar ferramentas de translação, reflexão e rotação disponíveis no *software* que deveriam investigar e entender seu uso⁷. O próprio

⁷ No menu do *GeoGebra-Geometria* existe também a ferramenta reflexão em torno de um ponto, que pode ser entendida como uma rotação de 180° em torno desse ponto.

software indica o que cada ferramenta faz e como deve ser utilizada, quando selecionada.

Relativamente a essa tarefa, poderiam acontecer questionamentos sobre: os movimentos que poderiam realizar, ou sobre limitações relativas ao uso de alguma ferramenta; se poderiam sobrepor as figuras, juntar apenas pelos vértices ou deixar a figura “solta” (ou seja, desconexa); se seria possível mover o objeto utilizando a ferramenta do cursor chamada *mover* que deixa implícita a ação de transladar; o uso do recurso *duplicar*, que faz uma cópia do objeto matemático selecionado e armazena todo o percurso que deu origem ao objeto.

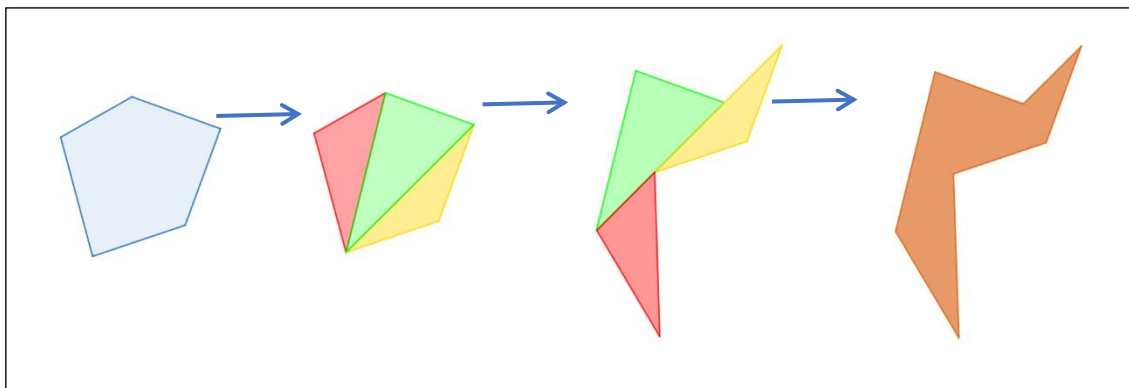
Na atividade, eram previstas dificuldades com relação ao emprego das ferramentas de translação, rotação e reflexão disponíveis no *GeoGebra-Geometria* dos recursos desse *software* para permitir a “colagem” das sub-regiões poligonais para formar a nova região composta. Era previsível uma dificuldade especial no emprego das rotações necessárias em algumas “colagens”. Tais isometrias realizam-se no *software* adotado, recorrendo-se a uma medição de ângulo. Disso decorre que a operação é necessariamente de resultado aproximado. Apesar disso, avaliamos que o emprego do *software* não ficaria invalidado, mas seria um recurso heurístico a demandar posterior justificativa com base nos conceitos envolvidos.

As **rupturas na aprendizagem** no decorrer da resolução da atividade poderiam ocorrer na composição de novos polígonos pela justaposição das partes obtidas na decomposição dos polígonos originais. Deveriam estar relacionadas ao próprio conceito de polígono, pois os sujeitos poderiam formar regiões não poligonais. Avaliamos que a distinção entre polígonos e não polígonos implica de certo grau de complexidade, como ilustramos nos exemplos no capítulo 4, em que figuras, tidas por muitos como polígonos, não cumprem os requisitos da definição matemática usual, que é a adotada neste trabalho.

Propusemos que ocorreria, nesse momento, um fenômeno de **salto informacional** e optamos por uma intervenção mais direta, caso os sujeitos produzissem figuras não poligonais. Tal decisão amparou-se na necessidade de nos focalizarmos nos conteúdos centrais, o conceito de equidecomposição e o Teorema de Bolyai, e diante da limitação do tempo disponível para o experimento.

A seguir, a imagem mostra uma possível solução da atividade 2:

Figura 35: Possível solução da atividade 2 (polígono da primeira tela da atividade 1)



Fonte: Elaboração própria (2019)

6.3.3 Atividade 3: *Equidecomposição como relação de equivalência: reflexividade e simetria.*

Figura 36: Atividade 3

ATIVIDADE 3

3) Chamaremos a figura inicial de **A** e a nova figura, feita na atividade 2, de **B**.

- a) O que a figura **B** tem em comum com a **A**?
- b) Uma decomposição **A** pode compor novamente a figura **A**?
- c) Podemos compor **A** com partes de **B**?

Fonte: Elaboração própria (2019)

Após a realização de operações de decomposição/composição de regiões poligonais para a aquisição do conceito de equidecomposição, a atividade 3 visava à passagem do emprego dessas operações para a compreensão de que a equidecomposição é uma relação de equivalência definida no conjunto dos polígonos.

Vencida a etapa da compreensão das operações de equidecomposição de regiões poligonais, era muito provável que a compreensão da **equidecomposição como uma relação de equivalência** no conjunto das regiões poligonais, devesse encontrar dificuldades para ser adquirida pelos sujeitos. Previmos, em nossa análise *a priori*, várias rupturas na aprendizagem na realização da atividade 3, na qual, como vemos, trataríamos da reflexividade e da simetria da equidecomposição.

No item (a), os sujeitos poderiam responder, por exemplo, que as figuras são: congruentes; semelhantes; equivalentes; a união das mesmas partes; de mesma área. Era presumível, também, que mencionassem outras características comuns: as duas têm o mesmo número de lados e/ou vértices; ambas são polígonos convexos ou não convexos.

Conjecturamos que além disso, o conhecimento adquirido sobre o conceito de igualdade de área é presente no ensino básico a tal ponto de ser destacado com uma denominação própria: duas regiões planas de mesma área são denominadas **equivalentes**. Dessa forma, a equivalência de duas regiões planas, por terem a mesma área, é muito mais presente no contexto escolar do que a equivalência por serem equidecomponíveis.

Ao adotarmos a proposta por Brousseau, fizemos a hipótese de que se trataria, nesse caso, de uma ruptura na aprendizagem do tipo **obstáculo de origem didática**.

O segundo momento de ruptura poderia ocorrer na resolução do item (b) quando iniciássemos o diálogo para uma validação lógica de que a equidecomposição é uma relação reflexiva: “O polígono *A* é equidecomposto ao polígono *A*”. Fizemos a hipótese de que os sujeitos considerariam tal afirmação “evidente por si mesma e que dispensaria validação”. Além disso, como vimos no capítulo 4, a prova é feita com apoio apenas na definição em questão e recorrendo-se ao próprio polígono *A* como uma decomposição de *A*. Conjecturamos tratar-se de uma argumentação lógica que, apesar de correta, é pouco usual. Nesse momento, avaliamos que estaríamos diante de um **salto informacional**. Previmos, então, que, se necessário, poderíamos fornecer, aos sujeitos, um contraexemplo: a relação não-reflexiva “ser parte própria de”, definida no conjunto dos polígonos.

Um terceiro momento em que avaliamos que ocorreria uma ruptura na aprendizagem seria o tratamento da simetria da relação de equidecomposição: “Se o polígono *A* é equidecomposto ao polígono *B*, então, o polígono *B* é equidecomposto ao polígono *A*”. Teríamos, aqui, um novo **salto informacional**. Neste caso, o contraexemplo a ser invocado poderia ser a relação não-simétrica: “ser filho ou filha de”, definida entre pessoas.

Mesmo aceita a necessidade de comprovação das propriedades de reflexividade e de simetria, os argumentos a serem invocados poderiam não ser

produzidos pelos sujeitos, e estaríamos diante de mais saltos informacionais motivo pelo qual previmos intervenções nossas para “destravar” o andamento da sequência de ensino.

A atividade 4 deveria tratar da transitividade da equidecomposição, concluindo a validação de que tal relação, de fato, é uma equivalência no conjunto das regiões poligonais. Decidimos separá-la em uma atividade específica pela maior complexidade de sua validação quando comparamos com as comprovações da reflexividade e da simetria.

6.3.4 Atividade 4: Transitividade da equidecomposição

Figura 37: Atividade 4

ATIVIDADE 4:

4) São dadas três figuras como na imagem abaixo. Sendo A equidecomponível a B e B equidecomponível a C .

A



B



C



a) A é equidecomponível a C ?

b) De que modo você pode mostrar isso ao seu colega?

Fonte: Elaboração própria (2019)

Como sabemos, a transitividade expressa-se na proposição: “Se o polígono A é equidecomposto ao polígono B e este é equidecomposto ao polígono C , então, o polígono A é equidecomposto ao polígono C ”.

Várias rupturas na aprendizagem poderiam surgir na resolução dessa atividade. Uma primeira ruptura possivelmente seria análoga a que indicamos no caso da reflexividade e da simetria: “isso é evidente, não precisamos provar”. Uma origem possível desse tipo de conhecimento do senso comum poderia ser o fato de que são muito frequentes as relações transitivas entre entidades do

cotidiano e mesmo da matemática. Se necessário, poderíamos apresentar o contraexemplo da relação “ser antecessor imediato de”, definida no conjunto dos números naturais, porque 1 é antecessor imediato de 2, 2 é antecessor imediato de 3, mas 1 não é antecessor imediato de 3.

Com respeito à elaboração de uma comprovação correta da transitividade, previmos que poderiam surgir dificuldades na aprendizagem por serem comuns na escola (e até mesmo fora dela) os quebra-cabeças do tipo Tangram, em que as peças com as quais se decompõem e se compõem todas as regiões poligonais são os mesmos polígonos – sete polígonos no caso do Tangram clássico. Dito de outra maneira, nesse caso, as figuras poligonais componentes já são dadas e, com elas, formam-se todas as figuras. Isso poderia conduzir ao argumento errôneo de que, com as peças disponíveis, podemos formar as regiões poligonais **A**, **B** e **C**. Convém observarmos que, o trabalho pedagógico amparado apenas no jogo do Tangram, pode induzir a um conhecimento falso de que uma região poligonal admite apenas uma decomposição em regiões poligonais.

Além disso, observamos que, em muitos textos matemáticos, possivelmente por razões de simplificação da abordagem, os(as) autores(as) contentam-se em justificar a transitividade da relação de equidecomposição com base na apresentação de um exemplo em que se recorre à validação visual da propriedade em causa. Em particular, isso ocorre em Boltianski (1981).

Para comprovar a transitividade da relação de equivalência, insistiríamos que a definição de equidecomposição que iríamos empregar era a equidecomposição por meio de triangularizações. Assim, conhecida a triangularização que garante que **A** e **B** são equidecomponíveis, e a triangularização que permite afirmarmos que **B** e **C** são equidecomponíveis, o problema que os sujeitos deveriam resolver é o de construir uma triangularização de **A** que permitisse construir **C**.

Deveriam notar que, com triângulos da decomposição de **A**, com os quais é possível montar **B**, dificilmente conseguiríamos compor, também, **C**. É essencial compreender que não há nenhuma garantia de que os triângulos que tornam **A** e **C** equidecomponíveis são os mesmos que tornam **B** e **C** equidecomponíveis.

Sendo assim, seria necessário encontrar outra triangularização de B com a qual pudéssemos construir tanto C quanto A . A estratégia para conseguir esse objetivo seria a sobreposição das duas triangularizações encontradas para B , para gerar uma terceira triangularização de B que sirva tanto para compor A quanto C , provando o que se queria.

Tendo em conta as várias possíveis dificuldades comentadas nos parágrafos precedentes é que optamos por formular a atividade 4 de tal modo que ficassem evidenciadas as triangularizações “intermediárias” e restasse o problema de encontrar a triangularização de B que fornecesse a equidecomposição de A e de C . Com isso, esperávamos contornar as referidas dificuldades e, assim, garantir que o conteúdo essencial da sequência didática, o Teorema de Bolyai, fosse atingido.

Mesmo com essas escolhas, a demonstração da transitividade da equidecomposição apresentada no capítulo 4 levou-nos a considerar o problema acima descrito possuía um nível de complexidade que geraria uma **ruptura na aprendizagem** do tipo **salto informacional**, na resolução da atividade 4.

Com o final dessa atividade, teríamos concluído a primeira etapa da sequência. Pretendíamos, assim, ter dado os elementos necessários para realização das próximas atividades da sequência que conduziriam à validação do Teorema de Bolyai.

6.3.5 Atividade 5: Teorema de Bolyai (parte 1)

Na atividade 5, pretendíamos tratar o Teorema de Bolyai como uma proposição recíproca da afirmação de que polígonos equidecomponíveis possuem a mesma área.

Figura 38: Atividade 5

ATIVIDADE 5:

5) O que podemos dizer a respeito da equidecomposição de acordo com que já foi visto nas atividades passadas, vamos colocar em prática usando o GeoGebra Geometria.

- a) Figuras equidecomponíveis tem a mesma área? Prove.
- b) Figuras de mesma área são equidecomponíveis? Prove.

Fonte: Elaboração própria (2019)

No item (a), era esperado que os sujeitos verbalizassem, sem dificuldade, que “Se o polígono A é equidecomposto ao polígono B , então A e B possuem a mesma área”, porque “os polígonos são feitos das mesmas partes”. Amparávamos essa suposição no fato de os sujeitos já trazerem de sua formação escolar anterior certa familiaridade com equidecomposição de figuras planas e com a ideia intuitiva de área.

Contudo, em conformidade com o que afirmamos anteriormente, nos início do presente capítulo, fizemos a escolha se aceitar, no decorrer da resolução do item (a) da atividade, uma comprovação apoiada na emprego das operações propiciadas pelo *GeoGebra-Geometria* e na argumentação verbal que expressasse as propriedades da grandeza área, em especial a aditividade e a invariância por isometrias. Não era esperado que os sujeitos recorressem a uma prova dessa implicação nos moldes da que apresentamos no capítulo 4. Apesar disso, planejamos realizar uma intervenção, caso necessária, explicitando as propriedades matemáticas da função medida de área que intervêm na prova.

Com relação ao item (b), previmos que a primeira parte da questão seria logo respondida afirmativamente pelos sujeitos. No entanto, supusemos que ocorreria uma ruptura com relação à validação dessa proposição. Conjecturamos que a validade da implicação expressa no item (a) levaria os sujeitos a considerar válida, também, sua recíproca, contida no item (b). Nossa justificativa baseava-se na suposição de que, no ensino da geometria euclidiana, na escola e até mesmo na formação do professor, estudam-se com maior ênfase, implicações cujas recíprocas também são proposições verdadeiras, a

exemplo dos teoremas: dos ângulos da base de um triângulo isósceles; de Pitágoras; dos ângulos alternos internos; e de Tales. Adotando a tipificação proposta por Brousseau, julgamos que nesse caso, a ruptura na aprendizagem seria um **obstáculo de origem didática**. Planejamos, então, que faríamos uma intervenção confirmando a necessidade de validação dessa proposição, que denominamos de Teorema de Bolyai.

Além disso, se recorrermos capítulos 3 e 4, podemos ver que as dificuldades presentes na própria estrutura lógica da prova ali apresentada, de considerável complexidade para a aprendizagem, conduziu-nos a supor que, ao construir validação do teorema citado, ocorreria uma ruptura na aprendizagem do tipo **salto informacional**. Diante disso, decidimos que estabeleceríamos um diálogo com os sujeitos para delineamento dos passos dessa validação.

Para iniciar o diálogo mencionado acima, planejamos solicitar dos sujeitos a construção de duas regiões poligonais de mesma área e, em seguida, pediríamos que comprovassem que tais regiões eram equidecomponíveis. Como dissemos anteriormente, aceitaríamos a argumentação verbal amparada na realização de operações sobre os polígonos em jogo, com recurso ao *GeoGebra-Geometria*.

Construídos os dois polígonos, esperávamos que eles decompusessem em triângulos uma das regiões e tentassem, a partir dessas sub-regiões, efetuar translações ou rotações, com o intuito de montar, com elas, a outra região. No entanto, previmos que, dessa maneira, dificilmente seria possível compor a outra região. Antecipamos que, nesse momento, deveríamos prosseguir no diálogo visando à apresentação da estrutura da validação.

Do capítulo 4, extraímos a estrutura lógica da demonstração, esquematizada a seguir.

Suponhamos que são dados dois polígonos **A** e **B**, possuindo a mesma área. Os passos da validação são a seguir descritos.

- I. triangularizar **A**;
- II. comprovar que um triângulo e um retângulo de base fixada, de mesma área, são equidecomponíveis, o que resulta de dois fatos:
 - um triângulo é equidecomponível a um retângulo;

- um retângulo é equidecomponível a um retângulo de base pré-fixada $\overline{MN}$, o que é implicado pela afirmação:
 - dois paralelogramos de mesma área e mesma base são equidecomponíveis.
- III. Construir um retângulo C , de base $\overline{MN}$, equicomposto ao polígono A , o que permite escrever que $A \sim C$ e $\text{área}(A) = \text{área}(C)$;
- IV. Repetir o procedimento acima descrito com respeito ao polígono B , o que permite construir um retângulo D , de base $\overline{MN}$, e equicomposto ao polígono B . Isso permite escrever:

$$D \sim B \text{ e } \text{área}(B) = \text{área}(D);$$

- V. Observar que a igualdade das áreas de A e de B acarreta a igualdade das áreas dos retângulos, que por terem a mesma base $\overline{MN}$ são necessariamente congruentes e, em consequência, equidecomponíveis: $C \sim D$.
- VI. Recorrer à transitividade da relação de equidecomposição para finalizar a validação:

$$A \sim C ; C \sim D ; D \sim B \Rightarrow A \sim B.$$

No esquema da validação, observamos que as passagens fundamentais estão concentradas nos itens I, II e III. Os itens seguintes (IV, V, VI) são repetições dos procedimentos seguidos nos três primeiros. Diante da necessidade de limitar o número de sessões, bem como a duração de cada uma delas, previmos enfatizar apenas os itens I, II e III da validação.

A atividade 6, a seguir foi prevista como uma situação didática capaz de permitir o prosseguimento da resolução da sequência didática proposta.

6.3.6 Atividade 6: Teorema de Bolyai (parte 2)

A seguir, o texto da atividade 6:

Figura 39: Atividade 6

ATIVIDADE 6

Propomos as etapas abaixo, usando o software GeoGebra Geometria, como um caminho para respondermos a atividade anterior.

6) Dados dois polígonos de mesma área, iremos decompondo cada um deles. A ideia é que cada triângulo da decomposição pode ser também decomposto para compor uma figura mais simples que as iniciais dadas.

a) Mostre que qualquer triângulo, e conseqüentemente cada triângulo da decomposição acima pode ser decomposto em algum retângulo.

b) Decomponha um retângulo qualquer de forma que possamos construir um outro retângulo de base conhecida.

Fonte: Elaboração própria (2019)

De acordo com a demonstração feita no capítulo 4, o item (a) refere-se à proposição 10, na qual demonstramos que qualquer triângulo é equidecomponível a um retângulo.

Em nossa análise *a priori*, previmos que os sujeitos não deveriam ter dificuldades maiores para a resolução desse problema nos moldes de uma validação informal, apoiada na visualização das operações de decomposição/composição e da realização de isometrias, com recurso ao *GeoGebra-Geometria*.

Adotamos essa hipótese ao considerar que os sujeitos, estudantes de licenciatura, já haviam adquirido tal conhecimento ao se defrontarem, nas várias etapas de sua formação básica e universitária, com a dedução da fórmula da área de um triângulo a partir da fórmula da área de um retângulo, que supusemos ser um conhecimento já adquirido pelos sujeitos. Como sabemos, uma das maneiras de obter a primeira fórmula da segunda é provar que qualquer triângulo possui a mesma área que um retângulo, recorrendo à relação de equidecomposição dessas duas figuras geométricas.

Como vemos, no item (b), propusemos aos sujeitos comprovar que, dado um retângulo qualquer, existe um retângulo, com lado predeterminado,

equidecomponível ao retângulo original. Esse é o conteúdo da proposição 11 do capítulo 4 desta dissertação.

De início, observamos que, dado um retângulo qualquer, se procuramos um retângulo de lado fixado que seja equidecomponível ao retângulo original, o outro lado desse segundo retângulo fica determinado, porque essas duas figuras geométricas deverão possuir a mesma área.

Nesse caso, a análise *a priori* que deveriam ocorrer rupturas na aprendizagem que supusemos recaírem na categoria de **saltos informacionais**, originados na complexidade dessa validação.

Uma primeira ruptura deveria ocorrer porque avaliamos que haveria tendência a comprovar a equidecomposição de retângulos recorrendo às malhas (quadradas ou triangulares) disponíveis no *GeoGebra-Geometria*. Tal procedimento iria requerer nossa intervenção para dialogar com os sujeitos sobre a validade geral desse tipo de procedimento. Um modo de “desestabilizar” tal argumento seria propor dois retângulos de mesma área, mas “fora da malha” escolhida no *GeoGebra-Geometria*.

Outra estratégia que levaria ao insucesso na resolução do problema, mas que seria atraente, é “fatiar” um retângulo em sub-regiões retangulares e tentar compor, por justaposição, o outro retângulo. Tal procedimento poderia ser “desestabilizado” pela proposição de um retângulo com lados de medidas, por exemplo, $1cm \times 5cm$, e outro com lados de medidas $\sqrt{5}cm \times \sqrt{5}cm$. Nesse caso, poderia até mesmo perdurar a resistência dos sujeitos a abandonar a estratégia de “fatiamento” ao recorrerem ao argumento de que é possível efetuarmos um “fatiamento infinito”. Como sabemos, tal apelo ao conceito de infinito não é compatível com o de equidecomposição adotado no capítulo 4 deste trabalho, em que é finito o número de sub-regiões com as quais podemos efetuar uma equidecomposição.

Em face dessas previsões, planejamos uma intervenção em que apresentaríamos um roteiro para a validação do item (b), composto de três casos, com base na relação entre os comprimentos dos lados do retângulo original e o lado fixado do segundo retângulo. Além disso, em todos os casos, os dois retângulos já seriam “encaixados um no outro” de modo apropriado para a resolução da validação da proposição 11, do capítulo 4.

Ainda na fase de análise *a priori*, observamos que o lema 4, do capítulo 4, desempenha um papel central na demonstração da proposição 11. Diante disso, teríamos, então duas possibilidades, a depender do transcorrer do experimento.

A primeira possibilidade seria tomar o lema 4 como verdadeiro, dispensando sua validação, e concluir a segunda e última sessão do experimento com uma retomada completa do experimento, a ser realizada por nós, para cumprir a etapa de institucionalização do conhecimento visado na sequência.

A segunda possibilidade seria propor uma **atividade complementar**, na qual solicitaríamos a comprovação do lema 4, após o término da resolução do item (b) da atividade 6. Essa foi a escolha que fizemos no capítulo 4, na prova matemática da proposição 11.

Sabemos que, na ordem de apresentação em muitos textos de matemática, a prova de um lema precede a demonstração da proposição em que esse lema é utilizado. Preferimos empregar a ordem inversa por entender que, dessa maneira, favorecemos a compreensão do papel do lema 4 na validação da proposição 11.

Com respeito a essa segunda opção – comprovação do lema 4 – seguem-se observações de nossa análise *a priori*.

Quando examinamos a demonstração do lema 4, no capítulo 4, identificamos um nível de complexidade que deveria gerar uma ruptura na aprendizagem do tipo **salto informacional**. Planejamos, então, intervir e apresentar aos sujeitos uma estruturação da comprovação que deveriam realizar. Ainda com essa intervenção inicial, poderiam surgir rupturas adicionais na aprendizagem em vários casos em que se pode dividir a validação completa do lema 4.

Além disso, cabe um comentário especial sobre uma etapa da validação do lema 4, que fazemos a seguir.

Podemos observar que, na prova do citado lema, no capítulo 4, recorreremos ao denominado axioma de Arquimedes para os números reais e, além disso, mencionamos uma versão geométrica desse axioma:

Axioma de Arquimedes para segmentos de uma semirreta

Dado um segmento de reta $\overline{AU}$ em uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ e dado um segmento de reta qualquer, $\overline{AB}$, existe um número natural n , tal que

$$\overline{AB} < n \cdot \overline{AU}.$$

Na demonstração do Teorema de Bolyai, é frequente, nas obras, que haja apenas uma breve referência a alguma versão do axioma de Arquimedes. Noutras, como Boltianski (1981), não há sequer menção ao referido axioma.

Um possível argumento para tal opção seria o de que o axioma de Arquimedes é suficientemente intuitivo e fácil de ser aceito e poderíamos dispensar maior atenção a ele em uma abordagem inicial do Teorema de Bolyai. Tudo se passa como se fosse óbvio que, justapondo seguidamente um dado segmento de reta ao longo de uma semirreta, poderíamos formar um segmento de reta “tão grande quanto quisermos”.

Além disso, concorre para a opção de não mencionar a necessidade de emprego do axioma de Arquimedes, o fato de que os contraexemplos obtidos em geometrias não-arquimedianas contrariam fortemente a intuição que se origina da percepção visual dos objetos geométricos reais ou desenhados: precisamos, por exemplo, de um segmento de reta de comprimento “inalcançável” por múltiplos inteiros de um dado segmento de reta (Hartshorne, 2000, p.198).

Em vista do exposto, previmos apenas mencionar a validade da operação de obter um segmento de reta de comprimento arbitrariamente grande por justaposição de outro segmento de reta.

7. DESCRIÇÃO E ANÁLISES DO EXPERIMENTO DIDÁTICO REALIZADO

Neste capítulo, descrevemos como transcorreu cada atividade e fazemos, simultaneamente, análises didáticas sobre o experimento.

Como é indicado em uma engenharia didática, na fase da experimentação devem ser feitas análises *a posteriori*, com base nos dados empíricos observados, mas também, podem ser realizadas análises que derivam dos fatos matemáticos envolvidos, por isso, análises *a priori*, suscitadas por ocorrências durante o experimento. Essa conjunção de análises e outros fatos observados no decorrer da resolução das atividades, nos levou, em alguns casos, a adaptações na sequência proposta, além dar origem a propostas de modificações para futuras investigações.

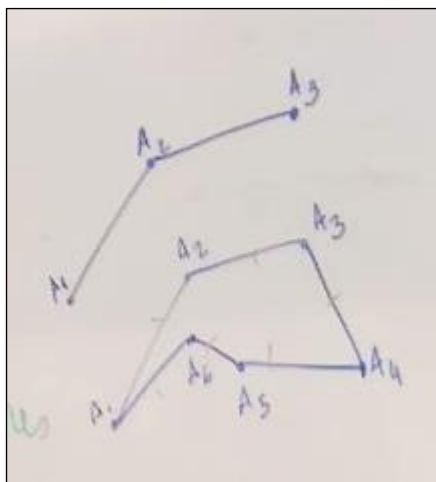
Como dissemos no capítulo anterior, a previsão era realizar o experimento em duas sessões, com três horas de duração, aproximadamente. A primeira sessão ocorreu de acordo com esse planejamento. No entanto, não foi possível seguir o planejamento original e concluir a resolução da sequência ao fim da segunda sessão. Decidimos, então, realizar uma terceira sessão, para conclusão do experimento didático.

No experimento, verificamos que os sujeitos já conheciam o *software GeoGebra-Geometria* bem como outros, a exemplo do *Apprenti Géomètre*, ao qual eles se referiram em alguns momentos das sessões.

7.1 Primeira sessão da sequência

Antes de iniciarmos as atividades, estabelecemos o vocabulário necessário para o desenrolar da sequência. Usamos o quadro branco para ir anotando as palavras e as discutindo. Brevemente, foi explicado aos sujeitos que o trabalho tratava de polígonos e a primeira pergunta que iniciou a construção desse vocabulário foi: o que é uma linha poligonal? O interesse era saber qual a noção que eles tinham de linha poligonal aberta e linha poligonal fechada. Em resposta, disseram que era aquilo que formava o polígono e que tinham que ser retas. Associados a essas ideias, nós fizemos os desenhos a seguir, no quadro branco:

Figura 40: Linhas poligonais aberta e fechada



Fonte: Registro próprio (2019)

Tais desenhos foram feitos com o intuito de esclarecer que a primeira imagem ilustra uma linha poligonal, mas não é um polígono e a segunda sim. De acordo com essas escolhas, prosseguimos para definir o que são polígonos. Por ter sido mencionado, foi discutido o conceito de polígono regular, a despeito de não ser um conceito pertinente em nenhuma parte do experimento.

Igualmente, o conceito de polígono convexo foi trazido pelos sujeitos. Como dissemos, as proposições matemáticas envolvidas no experimento são válidas, também, para polígonos não convexos.

Definimos o que são **vértices** e **lados**. Para esta última definição, foi relembrada a definição de segmento de reta. Nesse momento, outro conceito estabelecido foi o de **interior de um polígono**.

No passo seguinte, estabelecemos que o termo polígono iria ser utilizado para designar a região do plano composta de uma linha poligonal fechada reunida com seu interior. Ficou também esclarecido que usaríamos, indistintamente, as expressões **polígono** ou **região poligonal**, para designar o objeto geométrico constituído por uma linha poligonal reunida com seu interior.

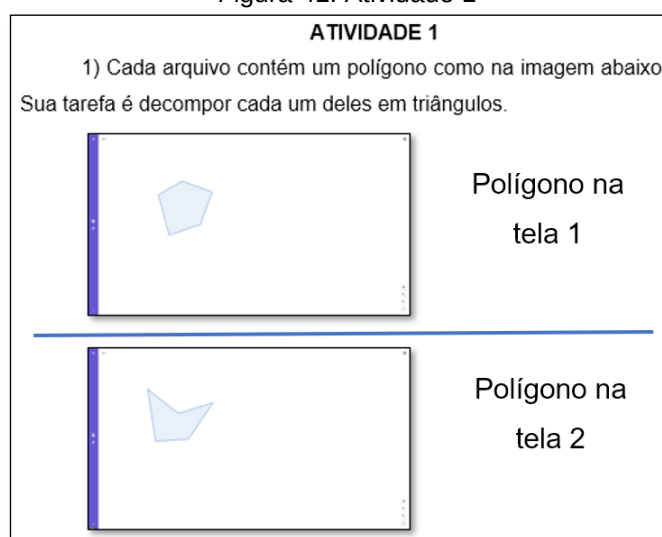
A etapa seguinte consistiu no estabelecimento do conceito de **decomposição de um polígono**. Ao ser perguntado aos sujeitos o que eles entendiam por decompor uma figura, eles responderam que “*decompor seria repartir uma figura*”.

Com base nessa ideia, explicitamos a restrição de que, na **composição de um novo polígono**, a intersecção entre duas partes quaisquer da decomposição do polígono original não contivesse nenhum ponto interior dessas partes. Adicionalmente, explicamos que, por razões a serem tornadas mais claras posteriormente, iríamos adotar, nas atividades 1, 2, 3 e 4, a definição de decomposição em que as partes fossem apenas triângulos. Dessa forma, ficou estabelecido que iríamos tratar, nessas atividades, apenas de **triangularizações** de regiões poligonais.

Após essa discussão, pudemos iniciar a sequência. Cada sujeito estava com um computador e foram colocados em lados opostos da mesa, para que não pudessem ver o que o outro fazia. A escolha foi feita para favorecer o surgimento de soluções distintas no decorrer da resolução das atividades.

7.1.1 Atividade 1: Decomposição de polígonos

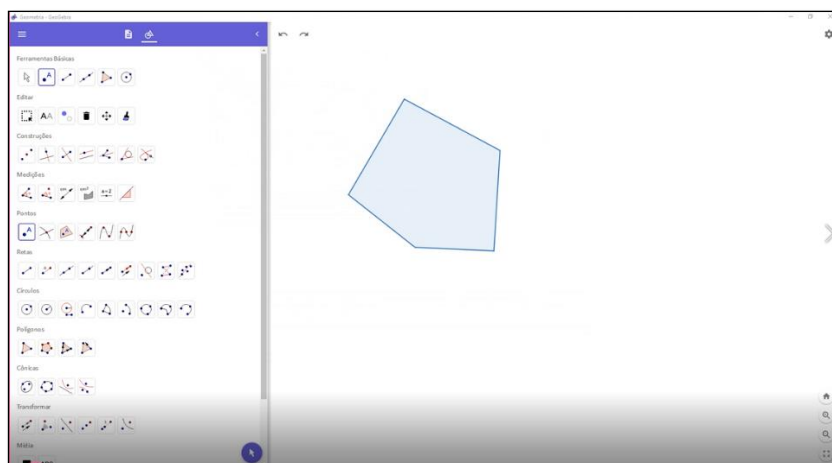
Figura 41: Atividade 1



Fonte: Elaboração própria (2019)

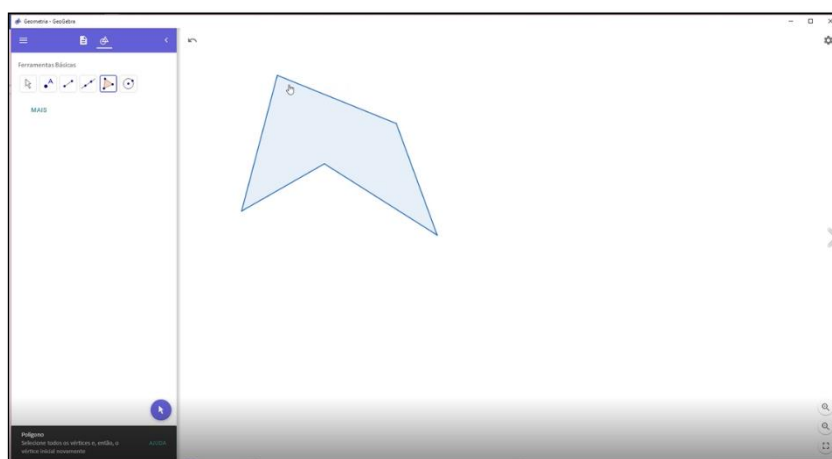
Em cada computador, foram abertas duas janelas do *GeoGebra-Geometria* e, em cada uma, deixamos construídas uma figura para que os sujeitos apenas tivessem que a decompor. A seguir, temos as imagens de cada uma dessas janelas:

Figura 42: Polígono da janela 1



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 43: Polígono da janela 2



Fonte: Registro próprio (2019)

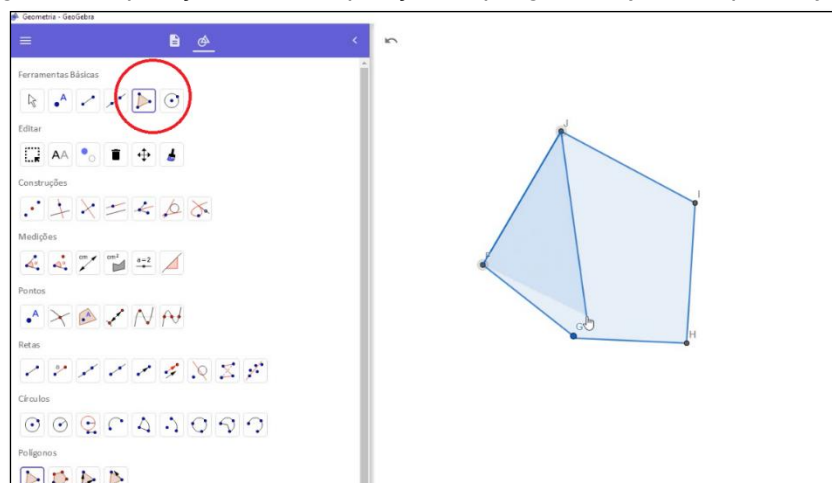
No *software*, não existe uma ferramenta específica para a ação de decomposição. Os sujeitos ficaram livres para decompor como achassem melhor.

Uma dúvida que surgiu no início da atividade: é possível fazer movimentos de rotação, reflexão ou translação de figuras com o *GeoGebra-Geometria*? Possivelmente, tal dúvida surgiu pela comparação com o que se pode fazer com ferramentas específicas do *software Apprenti Géomètre*, conhecido pelos sujeitos, e não por terem sentido a necessidade de realizar tais movimentos, para a realização da atividade. Em resposta, foi explicado que é possível, sim,

fazer todas essas transformações, mas de maneira diferente do que pode ser feito com o *software Apprenti Géomètre*.

Os dois sujeitos escolheram caminhos diferentes para resolver a questão. O sujeito 1, começou por marcar os vértices do primeiro polígono dado por meio da ferramenta do *software* para esse fim e, em seguida, começou a triangularizá-los. Criar pontos nos vértices previamente usados para gerar um polígono não é uma operação necessária no *GeoGebra-Geometria*, uma vez que o *software* reconhece tais vértices como objetos geométricos a partir do momento em que foram criados, na construção do polígono. Em face dessa informação, o sujeito 1 passou a dispensar a operação de criar pontos nos vértices. Vejamos, no protocolo abaixo, o uso da ferramenta selecionada pelo sujeito 1:

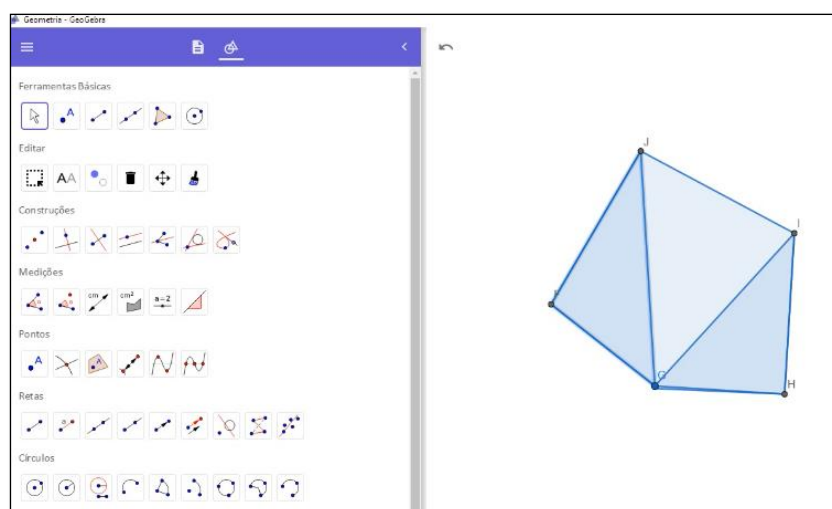
Figura 44: Operação de decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

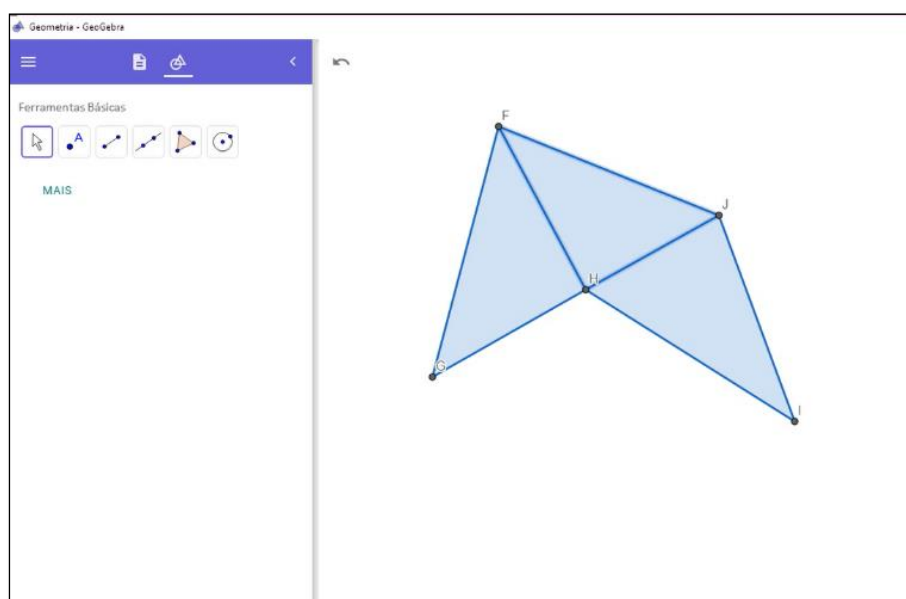
O sujeito fez operações análogas no polígono da janela 2. Ao final, obteve as seguintes triangularizações:

Figura 45: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

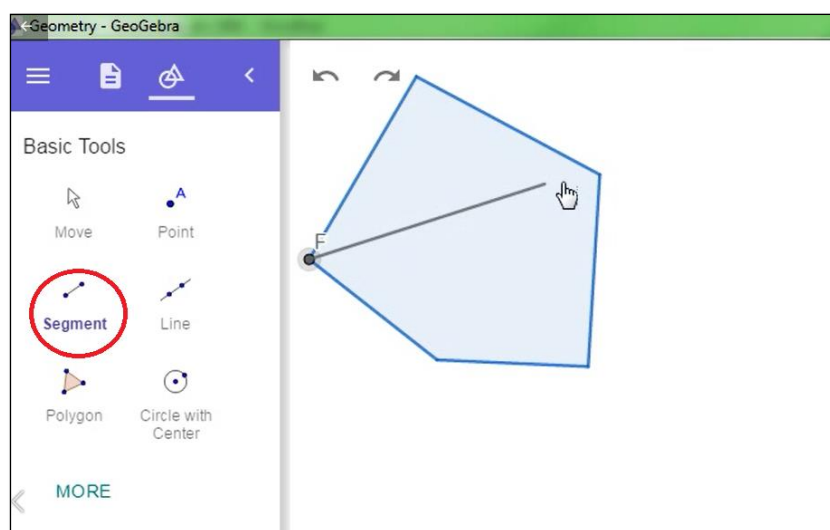
Figura 46: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito 2 decompôs os polígonos de forma diferente. Decidiu criar segmentos para recortá-lo e não procurou criar pontos nos vértices. Registramos as operações realizadas pelo sujeito 2, e a ilustramos na figura a seguir.

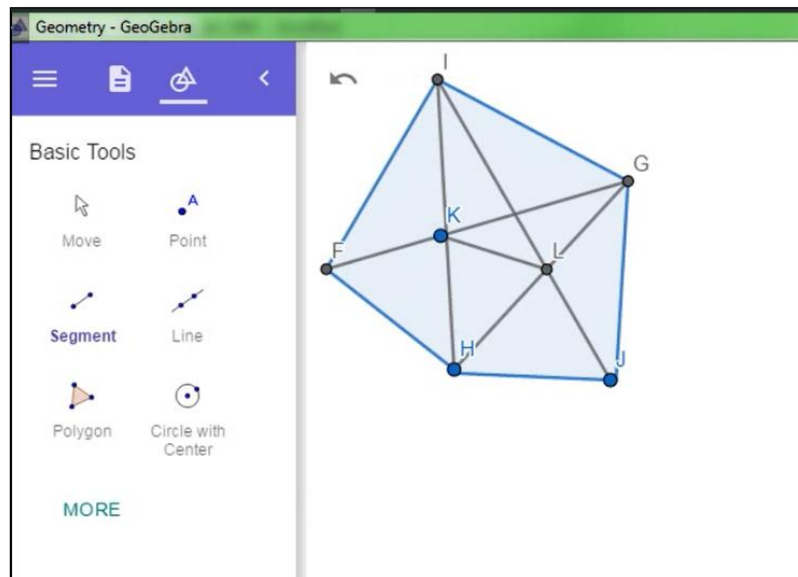
Figura 47: Operação de decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

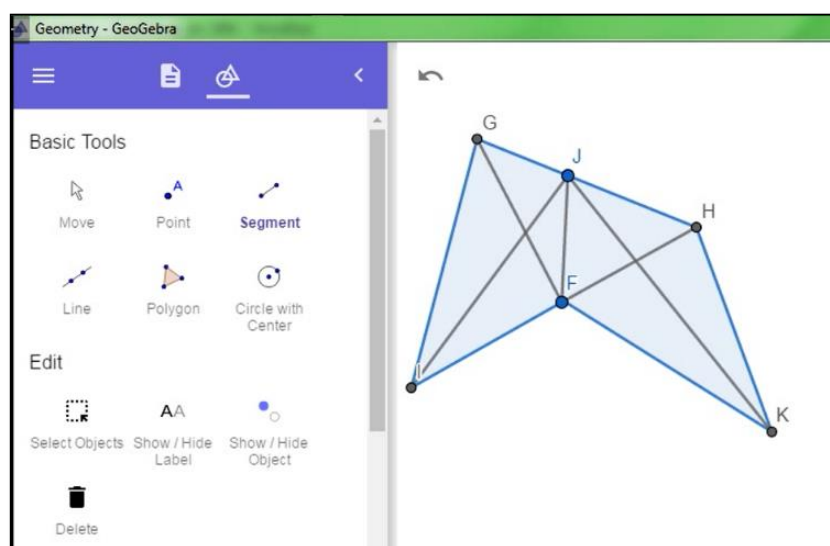
O sujeito 2 também usou a mesma operação com o polígono da janela 2. Ao final, obteve as seguintes decomposições:

Figura 48: Decomposição do polígono da janela 1 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 49: Decomposição do polígono da janela 2 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Na Atividade 1, pode ser observado que o sujeito 2 escolheu uma decomposição com mais sub-regiões do que a adotada pelo sujeito 1.

Os sujeitos tiveram oportunidade de conhecer as duas soluções encontradas, a sua e do outro sujeito. Essa foi uma etapa relevante, porque foram produzidas duas triangularizações distintas para cada um dos polígonos propostos na atividade. Tal fato é fundamental para a aquisição do conceito de triangularização. Não é incomum conceber-se, erroneamente, que só há uma triangularização para um dado polígono.

Como previsto na análise *a priori*, não foram verificadas rupturas na aprendizagem na resolução da atividade 1, ocorrendo, como esperávamos, certas dificuldades no uso do *GeoGebra-Geometria*, que foram, gradativamente, sendo superadas.

7.1.2 Atividade 2: Composição de polígonos

Figura 50: Atividade 2

ATIVIDADE 2 2) Escolha umas das decomposições feitas na questão anterior para compor uma nova figura com as partes obtidas.
--

Fonte: Elaborada pela autora (2019)

A atividade é uma continuação da atividade anterior. Nela, os sujeitos deviam escolher um dos polígonos decompostos para, com as peças formadas, criar outro polígono. Na etapa, surgiu a necessidade do uso da translação para movimentar as partes da decomposição. Foi vedado o uso do recurso “duplicar” do menu do *GeoGebra-Geometria*, porque, ao executar a duplicação, o programa armazena todo o histórico das operações realizadas na figura original, o que sobrecarrega, desnecessariamente, a memória do *GeoGebra-Geometria*. A opção de “transladar por um vetor”, existente no menu, foi, então, empregada pelos sujeitos. Para facilitar o procedimento, os sujeitos foram instruídos a colorir as partes da decomposição realizada por ele, assim como os vetores que “comandam” a translação de cada “peça”.

Vejamos um recorte do diálogo transcrito a seguir:

- **Sujeito1:** Não é pra ser um polígono?
- **Pesquisadora:** Sim, deve ser um polígono. Que condições a gente vai ter que impor a essas figuras para que sejam polígonos?
[...]
- **Pesquisadora:** O que a gente pode ou não pode fazer pra montar essa nova figura?
- **Sujeito 2:** Não pode sobrar triângulos, eu tenho que usar todos.
- **Pesquisadora:** Outra coisa que eu não posso é sobrepor as peças.
- **Sujeito 2:** Porque senão vai mudar, por exemplo, a área.

No diálogo acima, a fala do sujeito 1 revela que ele fora levado a cogitar de figuras que não fossem polígonos.

Em nossa análise *a posteriori* da etapa da sequência, verificamos que a previsão que havíamos feito no item 6.3.2, de que ocorreria, nesse momento do experimento, uma **ruptura na aprendizagem** do tipo **salto informacional** ficou

prejudicada por uma falha no enunciado da atividade. Com efeito, como não explicitamos que a nova figura a ser composta fosse um polígono não pudemos avaliar se os sujeitos apresentariam resoluções não compatíveis com a definição de polígono.

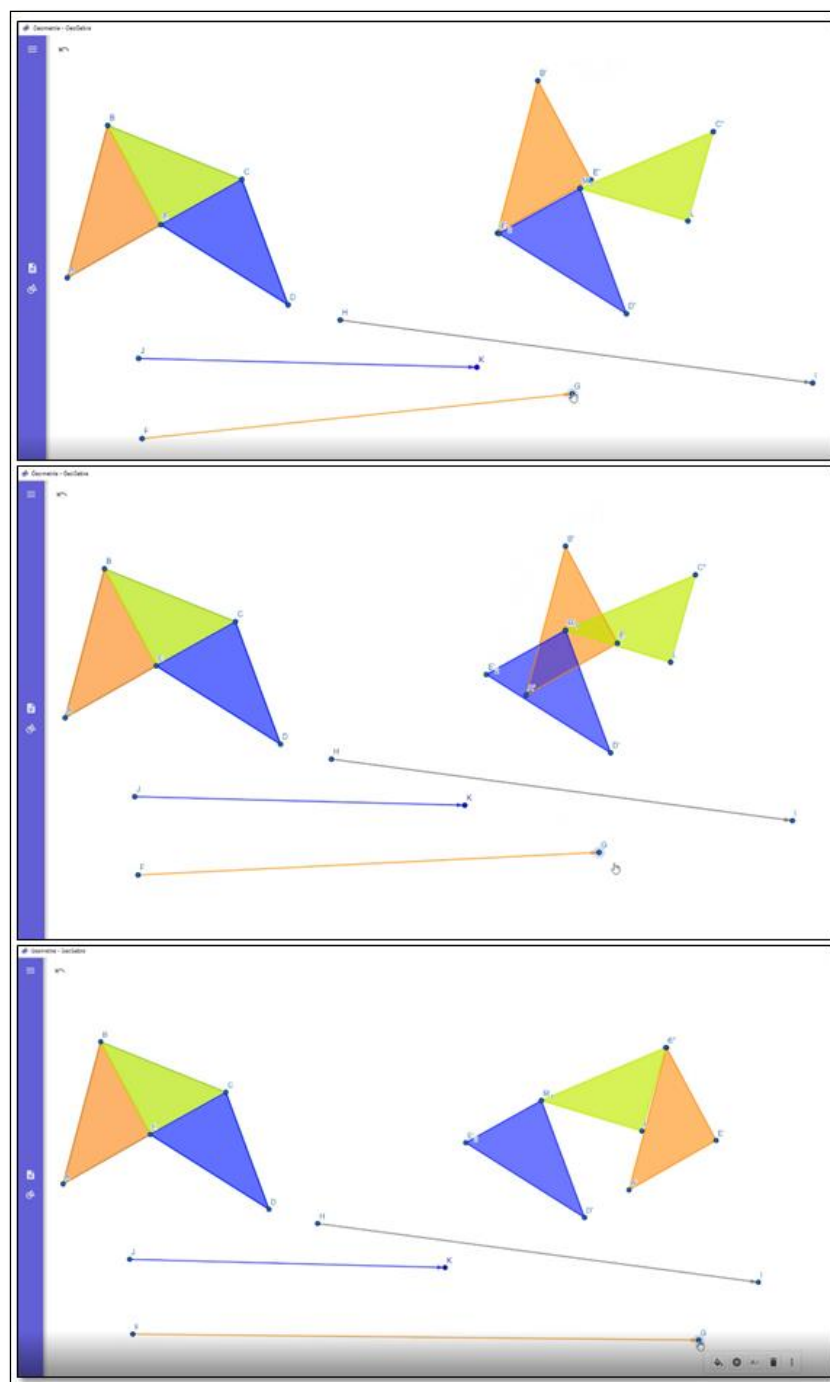
A presente análise sugere-nos que, em futuros experimentos, tal especificação deveria constar do enunciado. De fato, as propriedades matemáticas definidoras de um polígono não são um conhecimento a que possamos recorrer facilmente, o que pode ser comprovado na figura 9 do capítulo 4.

Para prosseguirmos no experimento, entrevistamos, retomando a definição de polígono. Em particular, foi discutido que a nova figura não poderia ser ligada apenas pelos vértices, pois, assim, não formaríamos polígonos.

Na última fala acima, do sujeito 2, observamos como o estudo da decomposição e composição de figuras planas está entrelaçado ao estudo do conceito de área, uma vez que esse conceito não havia sido mencionado em nenhum momento anterior.

No começo, os sujeitos tiveram um pouco de dificuldade para transportar as partes decompostas, mas, com algumas tentativas, conseguiram criar os vetores e até colori-los, para facilitar a movimentação. Observemos abaixo a sequência realizada pelo sujeito 1, no decorrer do procedimento: ele selecionou o vetor laranja, para efetuar a translação desejada no triângulo de mesma cor.

Figura 51: Translação de parte de uma decomposição pelo sujeito 1

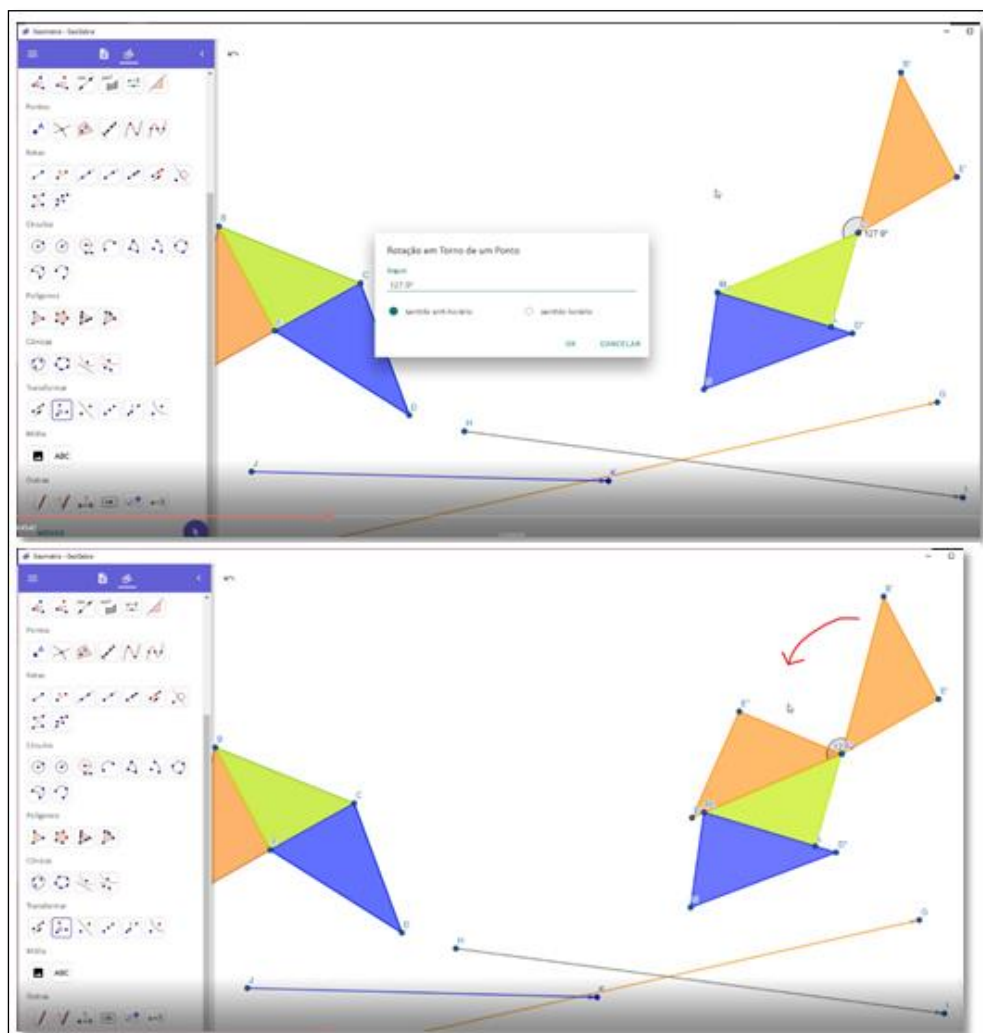


Fonte: Registro próprio (2019)

Além da translação, os sujeitos tiveram de efetuar uma rotação em algumas peças. Essa opção foi feita usando a ferramenta de rotação em torno de um ponto. Para o emprego dessa ferramenta, o usuário deve selecionar primeiro o objeto, depois o centro da rotação e, então, o ângulo de rotação. Nesse momento, foi indicado que poderiam medir o ângulo que desejavam para

efetuar a rotação. Esse ângulo foi medido e a ferramenta de rotação foi selecionada com os dados: $127,9^\circ$, sentido anti-horário:

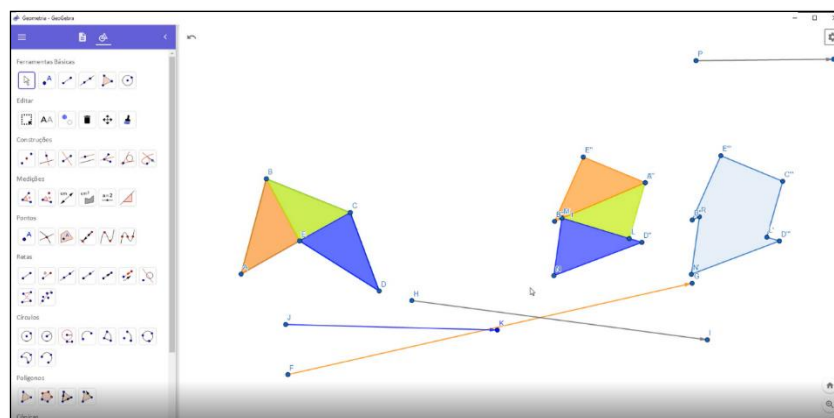
Figura 52: Rotação de um triângulo em torno de um ponto



Fonte: Registro próprio (2019)

Construído o novo polígono, para que ele não exibisse a decomposição que a originou, orientamos para os sujeitos transladarem cada vértice desse novo polígono por um mesmo vetor e depois ligarem esses pontos usando a ferramenta de composição de polígonos. Vejamos:

Figura 53: Construção do polígono recomposto do original pelo sujeito 1

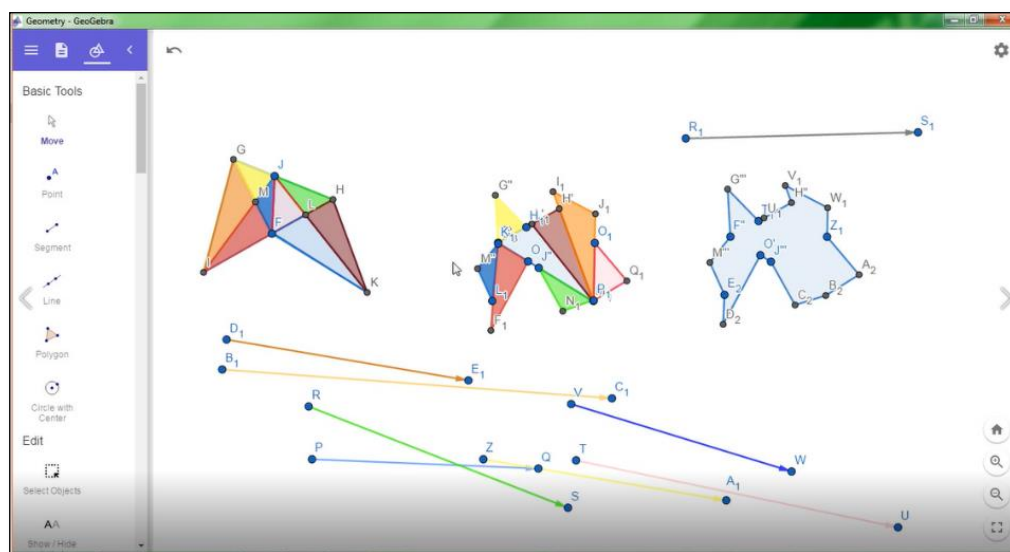


Fonte: Registro próprio (2019)

Assim, com o emprego do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que escolhemos previamente e mostrado no canto direito superior da janela, cada vértice do polígono original foi transladado e foi criado um novo polígono, sem a exibição da triangularização subjacente. A escolha prévia do vetor que determina a translação, feita por nós, foi justificada para que os sujeitos não tivessem dificuldades com a localização, na tela, do polígono transladado.

De forma análoga, mas com muitos mais passos devido ao elevado número de partes, o sujeito 2 também conseguiu criar a segunda figura. Igualmente, ele usou a ferramenta de translação, criando vários vetores para movimentar cada parte, além da ferramenta de rotação e reflexão. Podemos observar a seguir:

Figura 54: Construção do polígono recomposto do original pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Nesse momento, torna-se claro que a escolha da triangularização do polígono original pode resultar em dificuldades para a aprendizagem da etapa posterior de produzir uma recomposição das partes em que o polígono foi decomposto.

Essas duas atividades mostraram-se fundamentais para a realização das etapas seguintes. Foi com essas atividades que os sujeitos avançaram na compreensão das noções de decomposição e composição. Assim como reforçaram os conceitos matemáticos de translação, rotação e reflexão de figuras planas. Com uso da ferramenta “translação por um vetor”, os sujeitos conseguiram mover os objetos matemáticos apenas alterando o vetor (em módulo, direção e sentido), além de permitir a inversão da operação.

Como previmos na *análise a priori*, surgiram dificuldades na atividade 2, ligadas ao “transporte” a posterior “colagem” das sub-regiões para a formação de um novo polígono. Isso nos indica que deveríamos ter planejado mais tempo para a resolução da atividade 2. Tal escolha poderia favorecer mais o trabalho autônomo do sujeito em face do meio proposto, tão importante no processo de aprendizagem.

7.1.3 Atividade 3: Equidecomposição como relação de equivalência

O objetivo da atividade 3 era o de compreender a equidecomposição – ideias exploradas nas atividades 1 e 2 – como uma relação de equivalência. A atividade consistiu em uma discussão guiada por um questionário. Abaixo a atividade 3:

Figura 55: Atividade 3 da sequência didática

ATIVIDADE 3
3) Chamaremos a figura inicial de A e a nova figura, feita na atividade 2, de B .
a) O que a figura B tem em comum com a A ?
b) Uma decomposição A pode compor novamente a figura A ?
c) Podemos compor A com partes de B ?

Fonte: Elaboração própria (2019)

Explicamos que, na atividade, não seria realizada no *GeoGebra-Geometria* e que o interesse estava na argumentação em cada quesito. As falas foram registradas como respostas. Vejamos um trecho do diálogo:

- **Pesquisadora:** Essa questão a gente não vai precisar usar o *GeoGebra-Geometria*. A gente vai discutir um pouco.
- **Sujeito 2:** Então quer dizer que é uma questão teórica?
- **Pesquisadora:** Isso, é uma questão teórica.
- **Sujeito 2:** Hum. Que bom.

Diante da pergunta do item (a), os dois sujeitos respondem, de imediato, que as duas figuras têm a mesma área. Em seguida, abrem novamente a tela do *GeoGebra-Geometria* para observar as construções feitas e comparar as figuras inicial e final mais detalhadamente. O sujeito 1 conta o número de vértices dos dois polígonos e verifica que são diferentes. O sujeito 2, não necessita fazer a contagem pois visualmente percebe que são bem diferentes nesse aspecto. Podemos verificar isto nas falas transcritas abaixo:

- **Sujeito 1:** Mesma área e eu acho que tem outra coisa também...
- **Sujeito 2:** Mesma área... Eu tenho que ver, não sei exatamente (O sujeito 2 abre a janela do *GeoGebra-Geometria*, figura 58, em que estavam feitas as suas construções.)
- **Sujeito 2:** Umas, duas, três, quatro, cinco, com certeza não tem a mesma quantidade de vértices.
- **Sujeito 2:** Eu sei que a mesma área tem. Quantidade de lados também não é a mesma porque a minha tem muito mais vértices. Quantidade de diagonais também não tem com certeza. Em relação ao perímetro também não. Eu só vejo a mesma área.
- **Pesquisadora:** Os dois pontuaram logo que as duas figuras têm a mesma área. Mas o que mais eu posso falar a respeito dessas figuras?
- **Sujeito 2:** Não tem a mesma quantidade de ângulos.
- **Sujeito 1:** Eu sei que a área é comum porque a gente mudou, mas não sobrepôs.
- **Pesquisadora:** Foram apenas transformações ...
- **Sujeito 1:** Isométricas.

Além da discussão, foi pedido para que os sujeitos respondessem com suas próprias palavras cada uma das perguntas no próprio documento do *Word* aberto nos computadores que eles estavam trabalhando. Abaixo as imagens correspondem as respostas escritas dadas pelos sujeitos:

Figura 56: Respostas do sujeito 1 para atividade 3

ATIVIDADE 3	
3) Chamaremos a figura inicial de A e a nova figura, feita na atividade 2, de B .	
a) O que a figura B tem em comum com a A ?	<i>Tem a mesma área interior.</i>
b) Uma decomposição A pode compor novamente a figura A ?	<i>Sim, pois poderia ser feita uma translação com todos os pontos de A através de um mesmo vetor, formando uma figura equivalentes.</i>
c) Uma decomposição qualquer de B pode compor novamente a figura A ?	<i>Sim, pois poderia ser feita a figura A através da decomposição da figura formada em B.</i>

Fonte: Elaboração própria (2019)

Figura 57: Respostas do sujeito 2 para atividade 3

ATIVIDADE 3
3) Chamaremos a figura inicial de A e a nova figura, feita na atividade 2, de B .
a) O que a figura B tem em comum com a A ?
<i>Mesma área.</i>
b) Uma decomposição A pode compor novamente a figura A ?
<i>Sim, pois podemos decompor a mesma e por meio de uma translação levar todas as partes de maneira que forme a própria figura A. Ou mesmo usar a figura A como uma decomposição dela mesma e assim realizar uma translação.</i>
c) Uma decomposição qualquer de B pode compor novamente a figura A ?
<i>Sim, pois compomos B com partes de A. No entanto, esse é apenas um exemplo dessa decomposição, porque deve existir outro ao considerar a decomposição da figura B para compor a figura A.</i>

Fonte: Elaboração própria (2019)

Embora eles já tivessem construído polígonos equidecompostos nas atividades precedentes, tanto na fala quanto nas respostas escritas, nenhum dos sujeitos mencionou o fato de que polígonos equidecompostos seriam aqueles “compostos pelas mesmas partes”. Prevaleceu a ideia: os dois polígonos têm a mesma área. Além disso, outras propriedades comuns, não pertinentes à questão em foco, também foram examinadas.

Na análise *a posteriori*, ficou confirmada nossa previsão feita na análise *a priori* quando indicamos um possível **obstáculo de origem didática**, nesse momento da resolução da atividade 3.

Tudo se passou como se os sujeitos, tendo construído a equidecomposição entre polígonos, não a compreendiam como uma relação no conjunto desses polígonos. E quando a entendiam com uma relação entre polígonos, não formularam o critério de equivalência pertinente.

Esse obstáculo suscitou nossa intervenção, para dar seguimento à sequência didática. Informamos que o objetivo da atividade 3 era o de comprovação de que a equidecomposição era uma relação entre polígonos,

ancorada nos conceitos de decomposição e de composição, e que, além disso, era uma relação de equivalência.

A menção a esse último conceito, estudado no curso de Licenciatura, favoreceu a que os sujeitos identificassem, nos itens (b) e (c), as propriedades de reflexividade e de simetria de uma relação de equivalência. Na análise *a priori*, havíamos feito a suposição de que ocorreriam **saltos informacionais**, no momento em que os sujeitos procurassem validar essas propriedades da relação de equidecomposição. No entanto, pudemos observar que tal previsão não se confirmou, na medida em que as comprovações escritas pelos sujeitos, embora com pequenas imprecisões, foram argumentações aceitáveis, como podemos observar na reprodução nas respostas escritas pelos sujeitos.

A título de exemplo, transcrevemos o diálogo referente ao item (b):

- **Sujeito 1:** Podemos compor A com partes de A? O que quer dizer?
- **Pesquisadora:** Posso montar novamente a figura A com partes de A?
- **Sujeito 1 e sujeito 2:** Sim, sim. Claro!
- **Sujeito 1:** Sim, pois ela seria uma reflexão. As partes formariam o próprio todo
- **Pesquisadora:** E poderíamos ter outra decomposição e ainda assim montar A novamente?
- **Sujeito 2:** Sim.
- **Sujeito 1:** Sim, porque eu continuaria tirando aquelas mesmas partes para formar a inicial.
- **Pesquisadora:** Poderíamos levar todas elas num mesmo vetor.
- **Sujeito 1:** Seria só transladar tudo e faria **A** em **A**.

Depois da discussão promovida na atividade 3, o objetivo seguinte visado pela sequência didática era o de envolver os sujeitos na argumentação de que a equidecomposição é uma relação transitiva, o que completaria a validação de que a equidecomposição é, de fato, uma relação de equivalência. Esse é o tema da atividade 4, a seguir.

7.1.4 Atividade 4: Transitividade da equidecomposição

Nesse momento, voltamos a usar o *GeoGebra-Geometria*, mas, agora, os sujeitos foram colocados lado a lado, para realização da atividade. A intenção foi fazer com que os dois trabalhassem juntos elaborando estratégias de acordo

com o que já haviam realizado nas questões anteriores. A atividade foi apresentada da seguinte forma:

Figura 58: Atividade 4

ATIVIDADE 4:

4) São dadas três figuras como na imagem abaixo. Sendo A equidecomponível a B e B equidecomponível a C .

A



B



C



a) A é equidecomponível a C ?

b) De que modo você pode mostrar isso ao seu colega?

Fonte: Registro próprio (2019)

Como vemos, os sujeitos puderam visualizar a triangularização de A que permitiu construir B e uma outra triangularização de B que permitiu construir C .

Um dos sujeitos mostrou-se surpreso ao notar que a decomposição do polígono laranja que gera o polígono verde é totalmente diferente da que gerou esse polígono partindo do inicial, azul. Em nossa avaliação o comentário do sujeito indicou que o meio proposto havia favorecido a aquisição desse conhecimento, indispensável para validação da transitividade da equidecomposição.

A despeito disso, após conversaram entre si, eles não conseguiram esboçar nenhuma ação que se mostrasse eficiente para o prosseguimento da resolução do problema diante deles. A seguir, vejamos uma tentativa de argumentação.

Um dos sujeitos diz que, talvez, se pudéssemos cortar o polígono de uma “maneira infinitesimal” poderíamos mostrar, algo como no cálculo integral e chegar à conclusão de que **“eles têm a mesma área”**. Mas disse que não

conseguiria fazer isso pois haviam sido estimulados a não utilizar a medição de áreas.

Ao nosso ver, o conhecimento anterior sobre área e sobre a ligação da área com o cálculo integral (estudada na Licenciatura), revelam-se como uma resistência ao conhecimento novo, o da relação de equidecomposição. Eles continuaram a pensar que, na atividade proposta, havíamos pedido para validar que os dois polígonos tinham a mesma área.

Na análise *a posteriori*, observamos que o conhecimento de que polígonos equidecompostos possuem a mesma área transformou-se, para os sujeitos, em uma **ruptura na aprendizagem** do tipo **obstáculo**. Nessa análise, observamos, aliás, a característica de um obstáculo já citada por nós, mas que convém repetir para maior fluência da leitura:

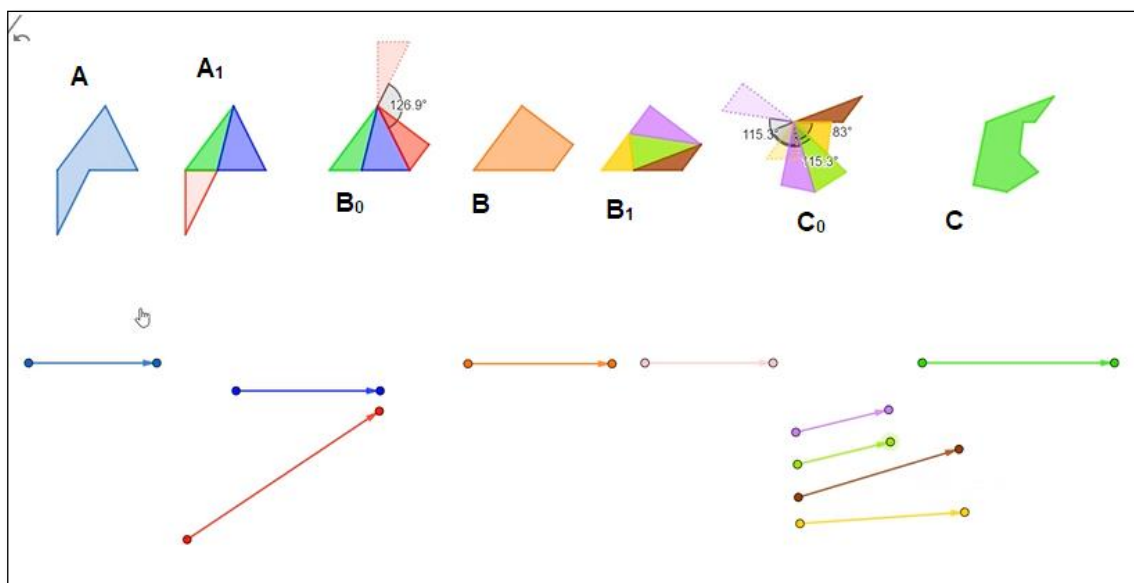
Os obstáculos não desaparecem com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, opõe resistência a sua aquisição, a sua compreensão, retarda a sua aplicação, subsiste em estado latente e reaparece de súbito em especial no contexto anterior, quando as circunstâncias o permitem. (BROUSSEAU, 2008, p.50)

De fato, já havíamos, na atividade 3, tratado da equidecomposição como uma relação entre polígonos que se distinguiu da relação de igualdade de áreas, mas isso não impediu que reaparecesse o equívoco nos sujeitos, quando tentaram resolver a atividade 4.

Em face das limitações de tempo, não nos propusemos a aprofundar o experimento para que pudéssemos tipificar esse obstáculo, se era de natureza didática, se era de natureza epistemológica.

Diante disso, resolvemos fazer uma intervenção, procurando chamar a atenção dos sujeitos para as triangularizações e as isometrias utilizadas, e com isso, favorecer que se voltassem para o conceito de equidecomposição.

Figura 59: Translações e rotações que geraram os polígonos B e C



Fonte: Registro próprio (2019)

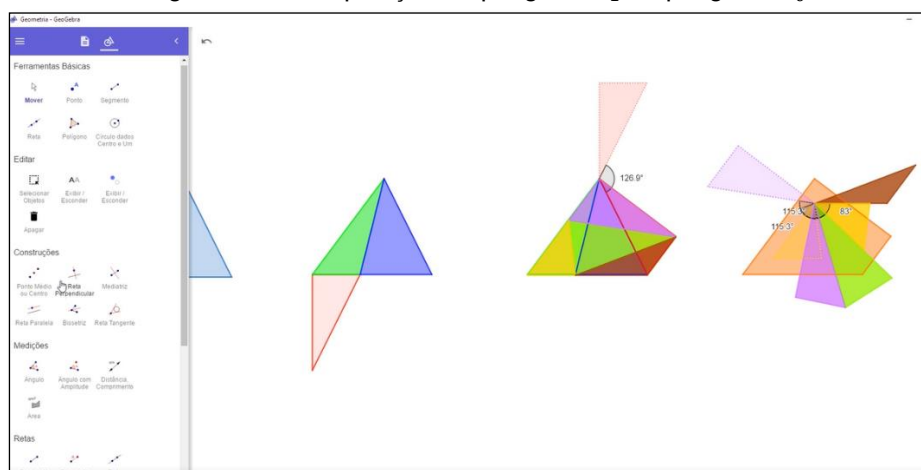
O sujeito 1 explica que poderia haver uma mudança de ordem. Usando a reflexão e a simetria da equidecomposição. Ele escreve: $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, por definição, e $C \rightarrow B$, por simetria. A seguir, o trecho do diálogo:

- **Pesquisadora:** Mudando a ordem ficou de **A** pra **B**, depois ficou de **C** pra **B₁**.
- **Sujeito 1:** Isso já é o segundo passo, certo?
- **Pesquisadora:** Essa decomposição aqui (refere-se a **B₁**) é igual a essa decomposição aqui (refere-se a **C₀**). É fácil a gente ver que são as mesmas partes.
- **Sujeito 1:** Então eu posso usar ela.
- **Pesquisadora:** - Como eu faço pra usar ela?
- [...]
- **Sujeito 1:** Corta do vértice da marrom para o vértice do roxo.
- **Pesquisadora:** Vamos usar o *GeoGebra*, ele ajuda a gente a mexer nas figuras. Então tentem.
- **Sujeito 1:** Mas não era a partir de novos cortes que queria?
- **Sujeito 2:** Não necessariamente. No caso pode trazer desse (refere-se a **B₁**) para esse (refere-se a **A**).
- **Pesquisadora:** Isso. E o que temos aí no meio do caminho que pode facilitar? Que desse pra esse temos a simetria? (refere-se às figuras **C** e **B₁**).
- E desse pra esse? (refere-se às figuras **B₀** e **B₁**).
- **Sujeito 1:** Reflexão. Então esse é igual a esse que é igual a esse (refere-se às figuras **B₀**, **B** e **B₁**).
- **Pesquisadora:** Se sabemos passar de **A** pra **B₀**, então sabemos passar de **B₀** pra **A**, e como faz pra passar de **B₁** pra **B₀**?
- **Sujeito 1:** Cortar aqui, como havia dito antes.
- **Pesquisadora:** Mas o software faz umas coisas, o que podemos fazer?
- **Sujeito 2:** Sobrepor. Translada ele aí, diz ao outro sujeito.

A primeira observação do sujeito 1, recorre à simetria da relação de equidecomposição, já tratada na atividade 3. Tal estratégia é insuficiente para a validação da transitividade, mas permitiu, com nossa intervenção, “aproximar” as regiões poligonais A e C , por meio das regiões B_0 (equidecomposta a A) e B_1 (equidecomposta a C). Esse procedimento, que emprega a simetria, conduz a B_0 e B_1 , ambas equidecompostas à região intermediária, B , que é a chave da argumentação.

A sobreposição indicada pelo sujeito 2, revelou maior grau de autonomia e foi registrada na imagem a seguir:

Figura 60: Sobreposição do polígono B_1 no polígono B_0



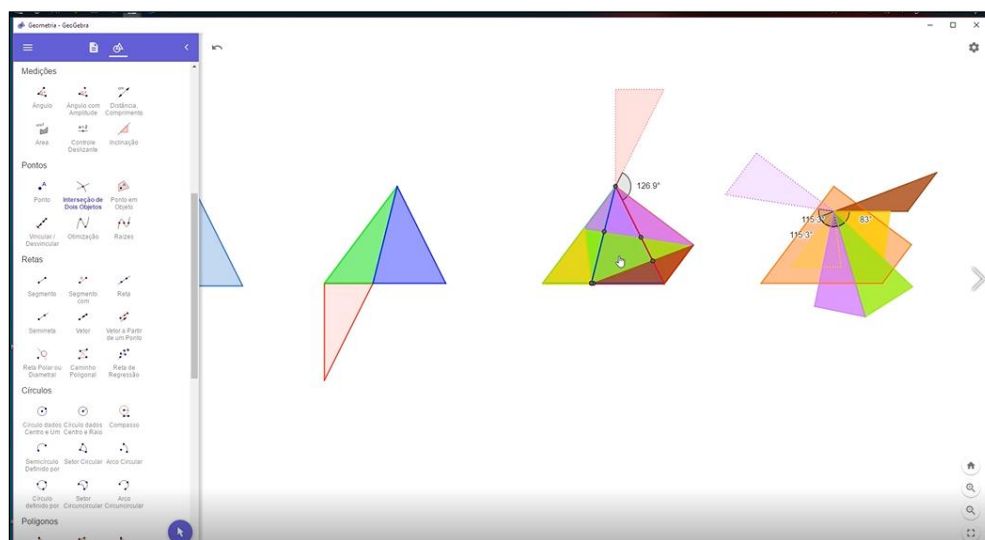
Fonte: Registro próprio (2019)

Continuamos incentivando os sujeitos a explicarem o que foi feito e o que eles pretendem fazer:

- **Pesquisadora:** O que é que aconteceu aí? O que a gente tem agora? É uma nova figura?
- **Sujeito 2:** Uma nova decomposição né?
- [...]
- **Sujeito 1:** Ela tem mais divisões dentro.
- **Sujeito 2:** Só que tem uma aqui que não é triângulo.
- **Pesquisadora:** Bem observado.
- **Sujeito 1:** Não tinha notado. Então dessa forma eu vou ter que dividir em outro triângulo? A ideia inicial era ser sempre em triângulos.
- **Pesquisadora:** Isso vai dificultar vocês de alguma forma?
- **Sujeito 1:** Não.

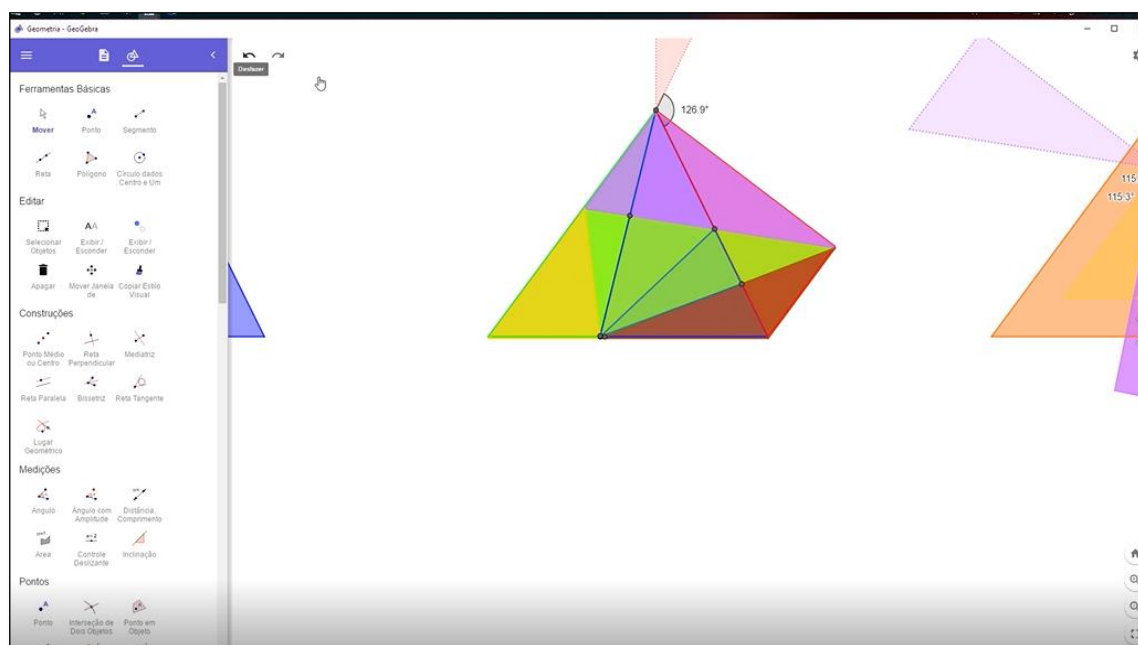
Os sujeitos, então, dão um passo importante, pois triangularizam o quadrilátero formado. Antes, eles marcaram todos os pontos de interseção entre as duas decomposições sobrepostas.

Figura 61: Pontos de interseção



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 62: Decomposição do quadrilátero formado

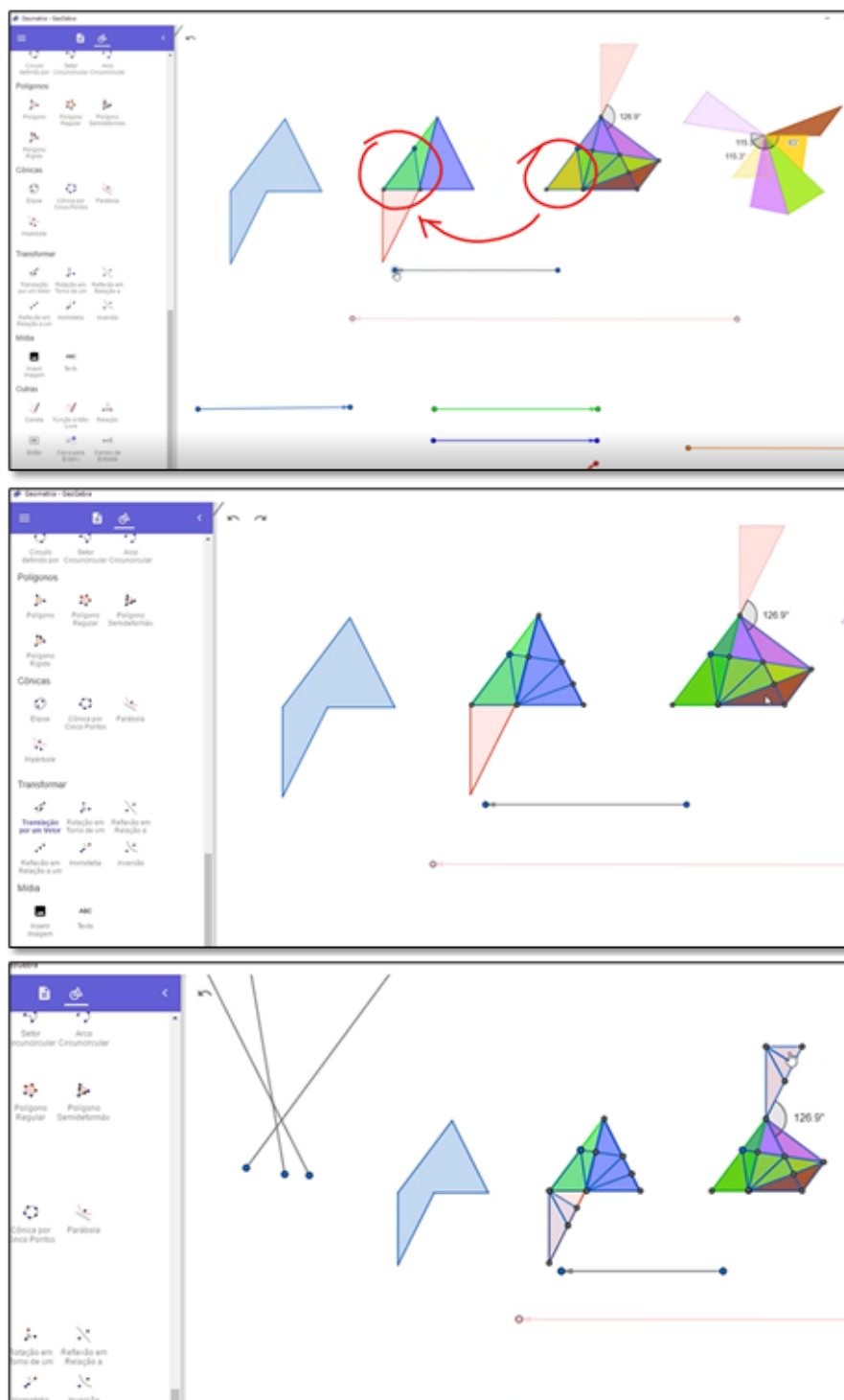


Fonte: Registro próprio (2019)

Com essa nova triangularização de B , os sujeitos percebem que podem construir tanto A quanto C . Isso os levou à conclusão visada: existe uma

triangularização de A que pode ser recomposta de tal maneira a gerar o polígono C . Nas figuras a seguir, podemos seguir as operações realizadas com o *GeoGebra-Geometria* que, a partir da triangularização de A permite a construção de C .

Figura 63: Translação de cada parte da nova decomposição de B



Fonte: Registro próprio (2019)

Nesta última parte, os sujeitos movimentam cada parte da decomposição para encaixar no polígono A_1 . Na última imagem da figura 67, notamos que foi preciso realizar uma rotação em algumas partes e transladá-la, seguindo assim uma operação inversa da que gerou tais composições.

Com isso fica verificado que vale a transitividade para equidecomposição que, portanto, é uma relação de equivalência.

Como já observamos anteriormente, as transcrições mostram que os sujeitos atuaram mais autonomamente e construíram uma superposição de duas triangularizações de B . Eles descobriram, então, que essa superposição não era uma triangularização de B : surge um quadrilátero na superposição da duas **triangularizações**, a de B_0 e a de B_1 . É um momento importante da aprendizagem, e os sujeitos, logo, decidiram triangularizar esse quadrilátero obtendo uma nova triangularização de B , na verdade, essa nova triangularização foi denominada, no capítulo 4, de **refinamento** das triangularização de B . Com esse refinamento os sujeitos foram capazes de prosseguir para chegar à verificação da transitividade da equidecomposição.

O fato descrito acima, corrobora o acerto de nossa escolha de adotar a equidecomposição definida com base em triangularizações e não em decomposições em polígonos quaisquer, para tratar da equidecomposição como relação de equivalência. A superposição de duas decomposições por meio de polígonos arbitrários pode demandar um processo laborioso para obter um refinamento dessas duas decomposições.

Como dito antes essa primeira sessão ocorreu de acordo com o planejado, tendo concluídas todas as atividades previstas para esse primeiro momento durando cerca de três horas.

7.2 Segunda sessão do experimento didático

7.2.1 Atividade 5: Teorema de Bolyai (parte 1)

A quinta atividade foi realizada no segundo dia do experimento didático. Iniciamos relembando alguns dos termos usados nas atividades anteriores, como polígono, decomposição, composição e equidecomposição. Depois disso,

os sujeitos leram a descrição da atividade. Abaixo temos a atividade 5 como foi apresentada aos sujeitos:

Figura 64: Atividade 5 da sequência didática

ATIVIDADE 5: 5) O que podemos dizer a respeito da equidecomposição de acordo com que já foi visto nas atividades passadas: a) Figuras equidecomponíveis têm a mesma área? b) Figuras de mesma área são equidecomponíveis?
--

Fonte: Elaboração própria (2019)

Nesta etapa, os sujeitos deveriam distinguir as duas implicações contidas na atividade 5.

Baseados em particular nas atividades iniciais, discorreram sobre o item (a), como podemos ver na transcrição a seguir:

- **Sujeito 2:** Figuras equidecomponíveis têm a mesma área? Significa que, por exemplo, a figura **A** é equidecomponível a figura **B** e que **B** é equidecomponível a **A**.
 - **Pesquisadora:** Você está usando a simetria, né?
 - **Sujeito 2:** Isso.
 - **Pesquisadora:** A gente já entendeu o que significa dizer que elas são equidecomponíveis, né? E a gente entende o que quer dizer que elas têm a mesma área? O que é dizer que duas figuras têm a mesma área?
 - **Sujeito 2:** Mesma região interna.
 - **Pesquisadora:** Vou anotar isso aqui. E o quê mais?
 - **Sujeito 1:** A figura **B** ela vai ser composta de **A** pela mesma quantidade de partes. Não quantidade porque eu posso dividir de formas diferentes. Mas pela mesma medida, a mesma área de uma eu formo a outra. Porque as partes vão refazer aquele todo. Se eu refizer aquele todo e colocar em outro local vai ser o mesmo valor de área.
 - **Pesquisadora:** “Valor de área”, medida né?
 - **Sujeito 1:** Isso! Medida. Eu não poderia falar que tem a mesma quantidade porque eu poderia separar em partes diferentes.
 - **Sujeito 2:** Nesse processo não se perde e não se acrescenta região a mais.
 - **Sujeito 1:** Isso! Porque não tem nenhuma sobreposição e nem sobra entre os encaixes.
- [...]

Notamos que o sujeito 1 argumenta de modo correto, ainda que em linguagem imprecisa: *“A figura B ela vai ser composta de A pela mesma quantidade de partes. Não quantidade, porque eu posso dividir de formas*

diferentes. Mas pela mesma medida, a mesma área de uma eu formo a outra. Porque as partes vão refazer aquele todo. Se eu refizer aquele todo e colocar em outro local vai ser o mesmo valor de área". Adiante, ele confirma: *"Isso! Porque não tem nenhuma sobreposição e nem sobra entre os encaixes."*

O sujeito 2, analogamente, expressa um raciocínio válido: *"Nesse processo não se perde e não se acrescenta região a mais"*.

No diálogo que segue, procuramos sistematizar um pouco mais as ideias que os sujeitos expressaram de modo informal:

- **Pesquisadora:** Mas elas são equivalentes por equidecomposição.
 - **Sujeito 1:** Como aqueles cortes fazem parte da figura anterior e a figura anterior tem a área x , então a figura **B** vai ter a mesma área que **A**...
 - **Sujeito 2:** A gente fez a decomposição de uma figura e levou essas partes para a figura **B**, por exemplo, então toda área da figura **A**, toda região interna foi usada para fazer a figura **B**.
 - **Pesquisadora:** Você falou levamos as mesmas partes e o que é isso?
 - **Sujeito 2:** É translação.
 - **Pesquisadora:** - E o que mais vocês fizeram?
 - **Sujeito 1:** Translação, rotação, reflexão.
 - **Sujeito 2:** As isometrias.
 - **Pesquisadora:** As isometrias me garantem que tenham a mesma área. E tem mais uma coisa: o princípio aditivo das áreas. Cada parte tem uma área e que o todo vai ser a soma das áreas de cada parte.
- [..]

Como vimos na análise *a priori*, era previsível que o conhecimento escolar, ou mesmo empírico, intuitivo, seria utilizado, no item (a), para os sujeitos afirmarem que "tais polígonos têm a mesma área", porque "eles são formados pelas mesmas partes".

No diálogo transcrito, observamos que tal previsão ocorreu, apesar de, nas falas dos sujeitos, haver certa ambiguidade entre os conceitos de região plana, grandeza área e medida de área. Um exemplo disso aparece em uma das falas do sujeito 2, que afirma: *"Nesse processo não se perde e não se acrescenta região a mais"*. Decidimos, não intervir para esclarecer a distinção entre esses conceitos, segundo o quadro teórico adotado para a grandeza área, nos moldes apresentados no capítulo 4, para não despender mais tempo nessa fase da sequência didática.

Da mesma maneira, havíamos planejado não exigir uma prova escrita mais rigorosa da questão posta no item (a), com base nos axiomas da função

medida de área. Iríamos nos contentar com as justificativas verbais dos sujeitos e com o recurso à visualização das representações das figuras. A despeito disso, fizemos uma intervenção, como podemos ver na transcrição do diálogo ocorrido, para retomar as propriedades de invariância da área por isometrias.

Os sujeitos seguem para o item (b) e são orientados a usar novamente o *software*, de forma individual, para que pudessem surgir ideias diferentes.

Observemos a transcrição do diálogo inicial:

- **Pesquisadora:** Beleza, a gente então já entendeu que se duas figuras são equidecomponíveis elas têm a mesma área.
- **Sujeito 2:** Agora o contrário não garante não né? Se tem mesma área então é equidecomponível.
- **Pesquisadora:** A letra (b) é justamente isso.
- **Sujeito 2:** Vê se a volta vale...
- **Sujeito 1:** É que pra mim tá parecendo tão óbvio. Se elas são equidecomponíveis têm mesma área, então figuras de mesma área são equidecomponíveis. Porque a gente usou as relações de equivalência: reflexão, simetria e transitividade.

O sujeito 2, contrariamente ao previsto na nossa análise *a priori*, revela dúvida quanto à validade da proposição (b), o que é um fato positivo.

No entanto, diante da questão, o sujeito 1 argumenta que **a implicação parece óbvia**. Para ele, isso já teria sido comprovado nas questões iniciais.

Confirmou-se para o sujeito 1, dessa forma, nossa previsão de que haveria resistência, por parte dos sujeitos, para compreender a necessidade de uma validação do Teorema de Bolyai, em vista de que sua validade seria “óbvia”. Em nossa análise *a priori*, tipificamos essa resistência como um **obstáculo de origem didática**.

Na realização do experimento, fizemos a intervenção que planejamos para confirmar a necessidade de validação desse teorema.

- **Pesquisadora:** Presta atenção aqui. Quando a gente tá vendo reflexão, simetria e transitividade da relação de equidecomposição. Se de uma eu posso montar outra e da outra eu posso recortar novamente e montar de volta a outra. Em momento algum a gente tá aqui falando de área, ela é intrínseca ao problema, mas a gente não tá falando dela.
- **Sujeito 1:** Mas quando você fala disso a área tá incluída, certo? – ele aponta da figura **A** para figura **B** da atividade 4: - Essa figura aqui, por exemplo, saiu daqui e veio pra cá. Tu diz que isso é equidecomponível a isso.
- **Pesquisadora:** Isso.
- **Sujeito 1:** Assim como o **B** é equidecomponível a **A**, então houve aqui a simetria a ida e a volta, certo? Se o **A** ele tem uma quantidade de partes que em medida de área é a mesma da de **B**. E a **B** ele tem uma quantidade de partes que em medida de área é igual a **A**, então as

áreas são iguais. Foi o que a gente constatou na letra (a). Mas se eu fizer qualquer outra figura a partir dessa, vai voltar a ser equidecomponível a essa. – Ele aponta da figura **C** para as figuras **A** e **B** da atividade 4: - E essa figura **C** aqui também vai continuar tendo a mesma área que essa e essa aqui também. Então eu tô presupondo que a área não altera a equidecomponibilidade. Entendeu o que eu tô querendo dizer?

- **Pesquisadora:** Sim, entendi sim.

- **Sujeito 1:** Então dessa forma eu estou presupondo que toda figura que contém mesma área são equidecomponíveis.

- **Pesquisadora:** Vou propor que você faça com novas figuras aí no *GeoGebra* numa janela limpa isso que você está me falando.

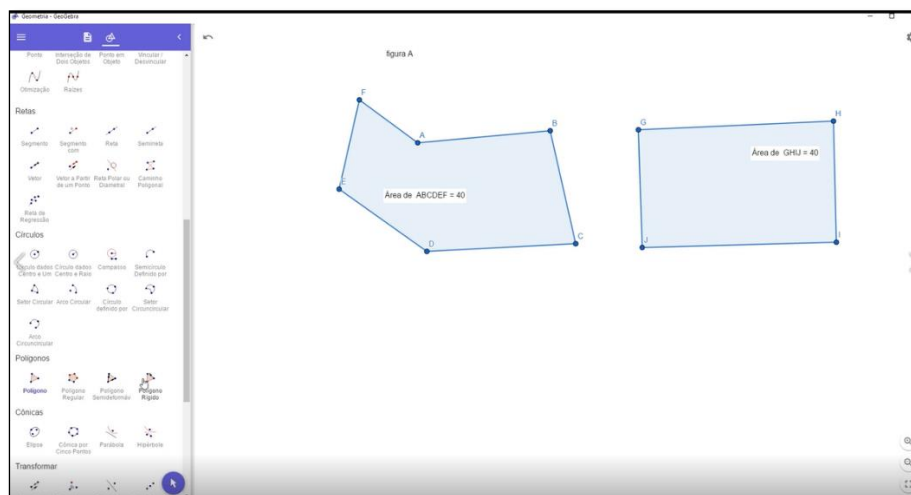
Novamente recorrendo à nossa análise *a priori*, na qual previmos dificuldades na aprendizagem da própria estrutura geral da validação do teorema, que julgamos constituir-se em um **salto informacional**. Para iniciar o diálogo previsto em nosso planejamento didático, solicitamos dos sujeitos a construção de duas regiões poligonais de mesma área e, seguida, pediríamos que comprovassem que tais regiões eram equidecomponíveis.

No momento seguinte, ocorreu um fato relacionado a um tema estudado em nossa análise *a priori*: os sujeitos nos indagaram se poderiam construir os polígonos de mesma área recorrendo à ferramenta de medição propiciada pelo *GeoGebra-Geometria*. Havíamos antecipado na análise *a priori* e informamos no início do experimento, que para as validações as medições não seriam estimuladas. Entretanto, como comentamos após a atividade 4, julgamos que seria pertinente reestudar essa decisão. Além disso, no caso específico do Teorema de Bolyai, deveríamos partir de duas regiões poligonais de mesma área, sem recorrer à decomposição de uma delas para a composição da outra. Sabemos que a ferramenta de medição de área do *GeoGebra-Geometria*, favorece a obtenção das duas regiões nessas condições, sem que usemos a decomposição/composição. Em vista disso, decidimos deixar os sujeitos livres para utilizarem a ferramenta de medição de área do *GeoGebra-Geometria*.

O fato acima mencionado nos trouxe um bom exemplo de como, na execução de um experimento didático nos moldes de uma engenharia didática, surgem ocasiões de readaptação das previsões feitas no planejamento dessa experiência. A despeito disso, no nosso julgamento, deveríamos, na fase final do experimento, trazer de volta a discussão da validade ou não das operações realizadas como o recurso a um *software*, como argumentos para provas lógicas.

Cada sujeito abriu uma nova janela do *GeoGebra-Geometria* e iniciou o processo de criar dois polígonos de mesma área, recorrendo à ferramenta de medição de área, como podemos observar nos registros a seguir:

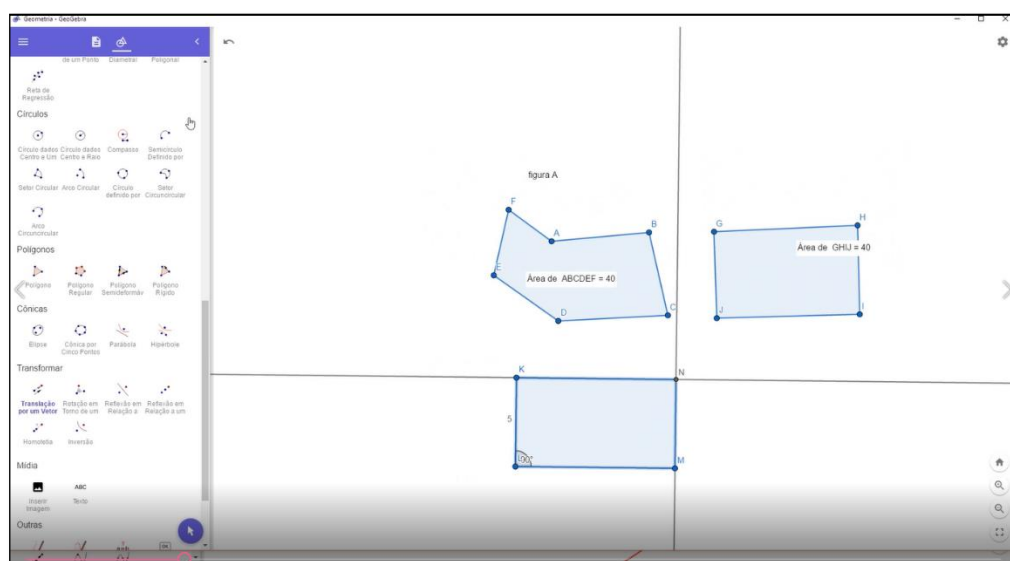
Figura 65: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 1



Fonte: Registrada pela autora (2019)

O sujeito 1 construiu um hexágono e um quadrilátero, como vemos na figura 73. Em seguida, resolveu substituir o quadrilátero construído na primeira tentativa por um retângulo. Vejamos a figura 66:

Figura 66: Construção de um retângulo de mesma área pelo sujeito 1

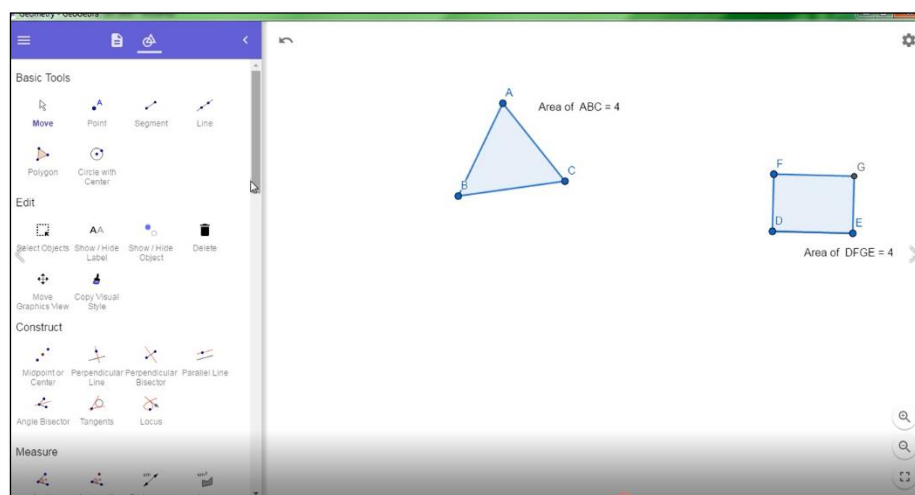


Fonte: Registro próprio (2019)

Ele explicou que queria encaixar um polígono no outro, mas não avançou nessa estratégia pois consumiu seus esforços na construção desse retângulo.

Quanto ao sujeito 2, ele construiu um triângulo e um retângulo de mesma área (figura 67):

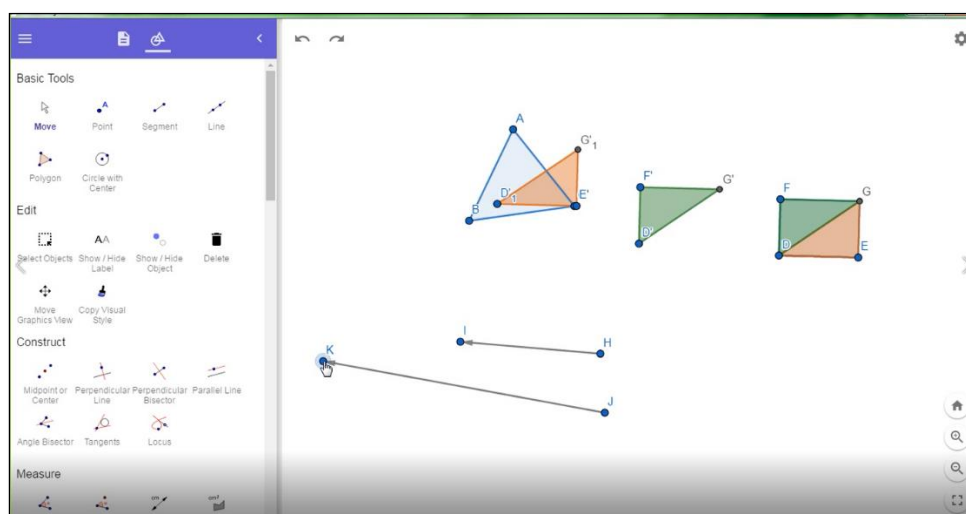
Figura 67: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Em seguida, explica que precisa equidecompor as figuras. Ele usa a translação e rotação, mas logo percebe que a decomposição escolhida não é apropriada para resolver o problema. Abaixo podemos notar como ele tentou resolver a questão:

Figura 68: Translação das partes para compor o outro polígono pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Na análise *a priori* previmos que eles decomporiam em triângulos uma das regiões e tentariam, a partir dessas sub-regiões, efetuar translações ou rotações, com o intuito de montar, com elas, a outra região. Pela análise *a posteriori* realizada sobre os dados obtidos no experimento, confirmou-se nossa suposição de que, dessa maneira, dificilmente seria possível compor a outra região.

Antecipamos que, nesse momento, deveríamos prosseguir nossa intervenção, retomando o diálogo visando à estrutura geral da argumentação. Propusemos, então, recomeçar propondo um meio diferente, que consistiu na produção, pelos sujeitos, de dois polígonos de mesma área por meio de equidecomposição, sem que um sujeito não tivesse acesso à decomposição/composição utilizada, pelo outro, nessa operação. Esperamos, dessa maneira, trazer o foco das atenções dos sujeitos para a relação de equidecomposição, superando a invocação frequente do conceito de área. Vejamos os excertos do diálogo:

- **Pesquisadora:** Abram uma nova janela e faça duas figuras que você garanta que tenham a mesma área sem medir.
- **Sujeito 2:** Usando os que a gente já fez?
- **Pesquisadora:** - A gente já sabe construir duas figuras que tenham a mesma área sem medir.
- **Sujeito 2:** - Ok.

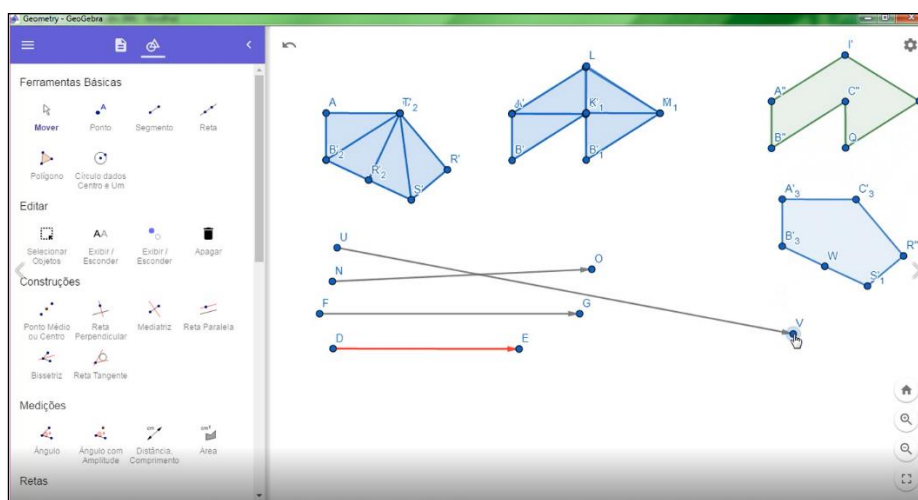
De maneira análoga ao que foi feito nas atividades 1 e 2, sem que um pudesse ver a construção do outro, solicitamos a cada um dos sujeitos construir dois polígonos equidecomponíveis e, portanto, de mesma área.

Durante a realização desta etapa, os sujeitos foram estimulados a criar estratégias para resolver o problema. O sujeito 2 faz a seguinte observação:

- **Sujeito 2:** Quando a gente faz isso já dá a entender que pode fazer a volta, né? A gente já sabe que tem uma que chegou nela.
- **Pesquisadora:** [...], mas o que a gente quer saber é como argumentar isso. E entender que não é tão trivial.

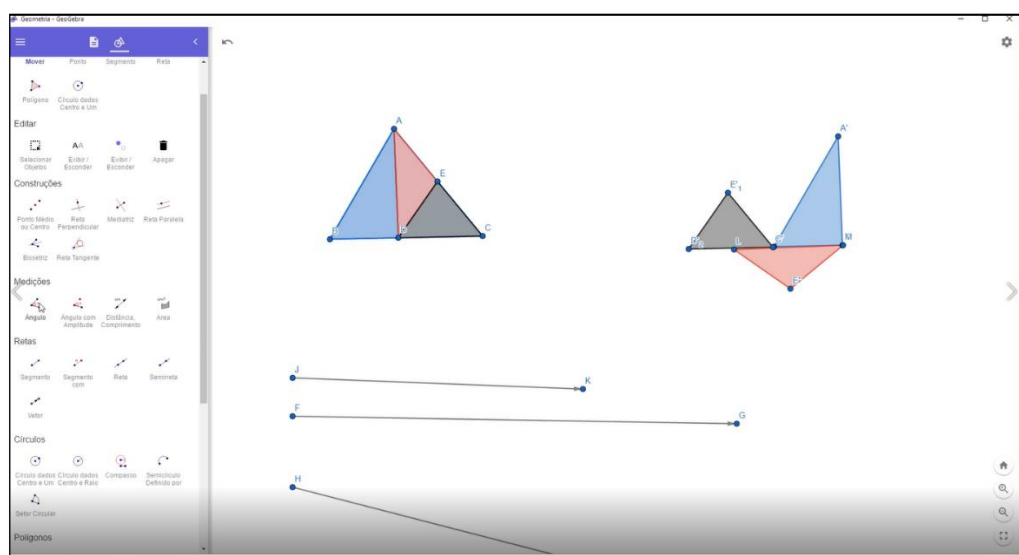
As figuras 73 e 74 apresentam o registro de como cada estudante fez essas construções:

Figura 69: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

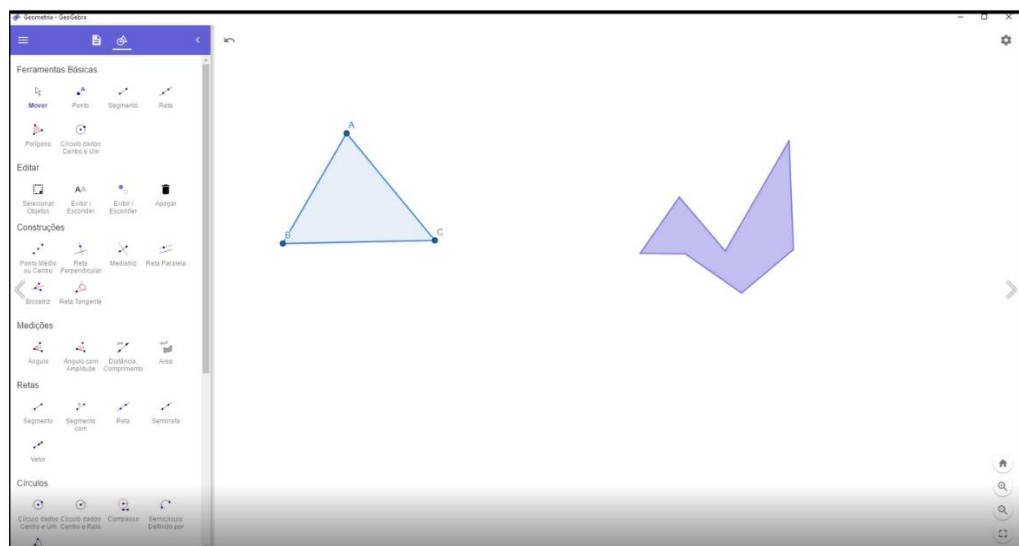
Figura 70: Construção de polígonos de mesma área pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

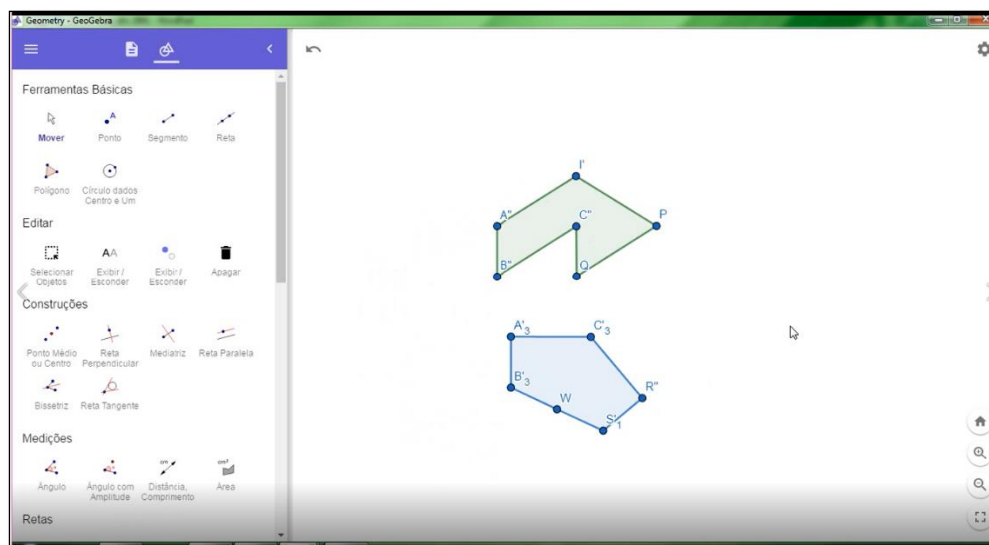
Depois, os sujeitos “esconderam” os passos da decomposição deixando visível apenas os dois polígonos e foram trocados de posição. As janelas dos sujeitos ficaram como nas imagens a seguir:

Figura 71: Janela do sujeito 1 - polígonos de mesma área construídos pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 72: Janela do sujeito 2 - polígonos de mesma área construídos pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

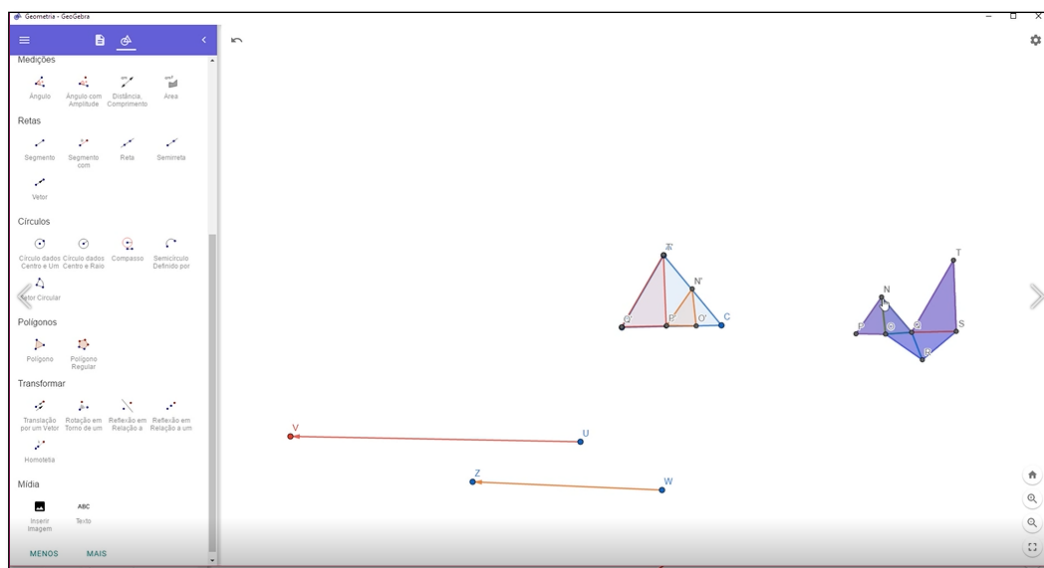
Ao iniciarem, insistimos em que as duas figuras tivessem a mesma área, por construção, e solicitamos que traçassem um plano para resolver a questão. Destacamos também que as resoluções devem servir para resolver quaisquer duas figuras de mesma área. Como podemos verificar no registro a seguir:

- **Pesquisadora:** A argumentação que vai servir pra essas duas tem que servir pra essas e pra aquelas.
- **Sujeito 2:** Para todas, né?
- **Pesquisadora:** Então se você fizer de um jeito aí e der certo você tem que chegar pro colega e dizer “faz assim que dá certo”. Então nesse momento vocês estão fazendo sozinhos, mas depois eu quero que vocês expliquem como vocês estão fazendo.
- **Sujeito 2:** Tem que ser um jeito que generalize.

Neste momento da análise *a posteriori*, convém observar que durante o experimento didático pode ser indicado a mudança do meio proposto originalmente para favorecer a aprendizagem. Foi o que ocorreu com nossa proposta acima descrita.

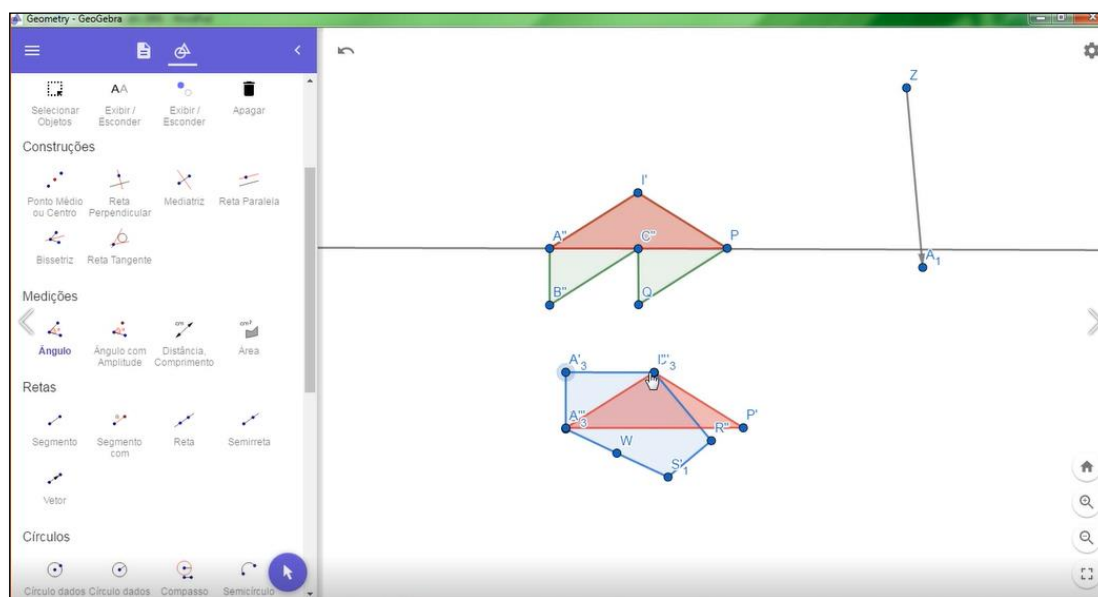
No entanto, os sujeitos continuaram usando a mesma ideia anterior: escolheram um dos polígonos para decompor e transladar cada parte a fim de encaixar no outro. Abaixo, temos o registro de tais tentativas:

Figura 73: Estratégia de resolução do sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 74: Estratégia de resolução do sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Como mencionamos em parágrafo anterior desta seção, previmos um **salto informacional** na aprendizagem da estratégia da comprovação do Teorema de Bolyai. Observando as dificuldades que se revelaram na resolução da segunda parte do item (b) da atividade, confirmamos nossa previsão e procuramos intervir de modo a direcionar os sujeitos para a referida estratégia da argumentação.

- **Pesquisadora:** Esse mecanismo está sendo viável?
- **Sujeito 1:** Sim, estou conseguindo achar.
- **Sujeito 2:** Por enquanto sim
- **Pesquisadora:** - Esse mecanismo sempre vai ser viável?
- **Sujeito 2:** Aí já é difícil. Pode ser feito, mas não vai ser fácil.
- **Sujeito 1:** Não sei.
- **Pesquisadora:** Se tivermos uma figura muito grande e cheia de pontas.
- **Sujeito 2:** Pra você conseguir ia demorar um tempão, né?
- **Sujeito 1:** Tinha que picotar até conseguir.
- **Pesquisadora:** Mas seria uma montagem de quebra-cabeça quase infinito, né?
- **Sujeito 1:** Tá pensando em fazer uma terceira figura?
- **Pesquisadora:** O que é que a gente sempre consegue em relação as figuras aqui?
- **Sujeito 2:** E formar uma outra.
- **Pesquisadora:** Sempre consegue picotar ...
- **Sujeito 2:** Em triângulos.
- **Sujeito 1:** E se os triângulos feitos por nós não fossem muito fáceis de encaixar?
- **Pesquisadora:-** Exato! Muito dificilmente eles serão triângulos congruentes. Tem que fazer como foi falado tentar uma terceira figura que seja algo simples. Eu posso transformar esse triângulo em quê?
- **Sujeito 2:** Em um retângulo.
- **Pesquisadora:** E será que sempre posso fazer isso?
- **Sujeito 2:** Sempre eu não sei.
- **Sujeito 1:** Teríamos que ter vários triângulos.
- **Pesquisadora:** É isso que quero que vocês pensem, como passamos de um triângulo para um retângulo.

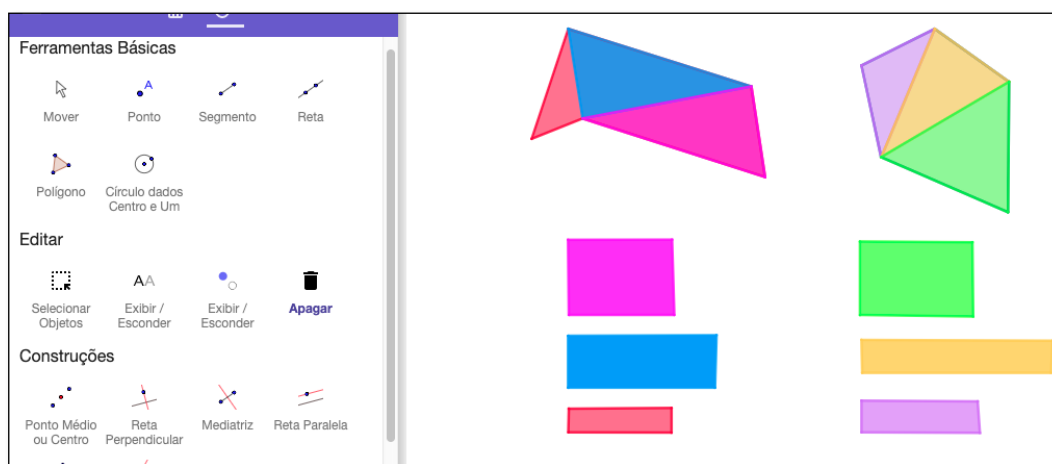
O primeiro item da atividade 6, a seguir apresentada, foi previsto como uma situação didática capaz de permitir o prosseguimento da resolução da sequência didática proposta.

7.2.2 Atividade 6: Teorema de Bolyai (parte2)

Antes de prosseguir para a resolução da atividade 6, fizemos uma intervenção para avançar na estratégia da validação do Teorema de Bolyai, com base nas etapas anteriores da sequência, em particular, no estágio atingido no nosso diálogo com eles, expresso na transcrição anterior.

Apresentamos uma tela do *GeoGebra-Geometria*, em que buscamos sintetizar o que já havia sido estabelecido e apontamos para um novo passo da estratégia:

Figura 75: Uma etapa da estratégia da comprovação: triângulos ~ retângulos



Fonte: Elaboração própria (2019)

Dissemos que já havíamos realizado triangularizações nas duas regiões poligonais de mesma área. Em seguida, deveríamos partir para transformar por equidecomposição cada um dos triângulos dessas decomposições em um retângulo, como ilustramos na tela da figura 75.

A atividade 6 (figura 76), prevista para ser resolvida na 2ª sessão, era composta de dois itens.

Figura 76: Atividade 6

ATIVIDADE 6

Propomos as etapas abaixo, usando o software GeoGebra Geometria, como um caminho para respondermos a atividade anterior.

6) Dados dois polígonos de mesma área, iremos decompondo cada um deles. A ideia é que cada triângulo da decomposição pode ser também decomposto para compor uma figura mais simples que as iniciais dadas.

a) Mostre que qualquer triângulo, e conseqüentemente cada triângulo da decomposição acima pode ser decomposto em algum retângulo.

b) Decomponha um retângulo qualquer de forma que possamos construir um outro retângulo de base conhecida.

Fonte: Elaboração própria (2019)

Como vemos, no primeiro item os sujeitos eram desafiados a verificar que um triângulo qualquer é equidecomponível a um retângulo. Eles dedicaram-se, com o auxílio do *GeoGebra-Geometria*, a verificar tal proposição.

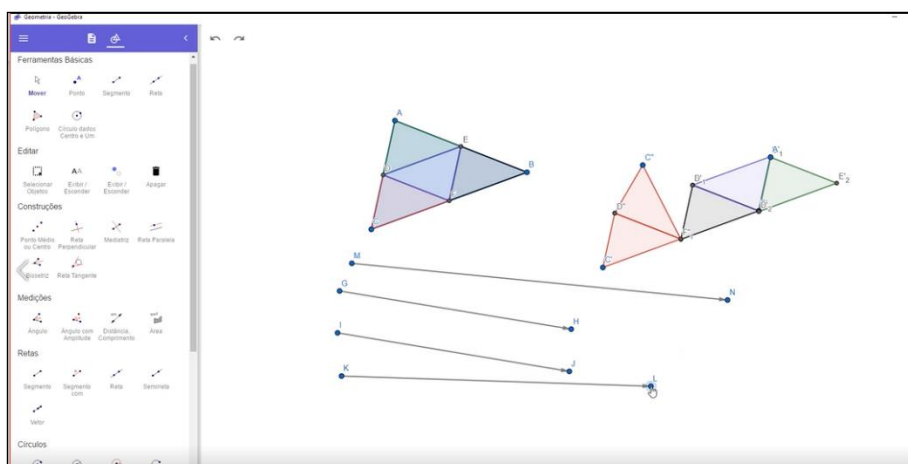
Os diálogos a seguir permitem acompanhar suas tentativas.

- **Sujeito 2:** Aí a gente faz um triângulo qualquer e tenta transformá-lo?
- **Sujeito 1:** Se for retângulo é mais fácil.
- **Sujeito 2:** É, mas é qualquer, né?
- **Pesquisadora:** Aí vocês mostram pra mim se isso é sempre possível
- **Sujeito 2:** Ok.
- **Pesquisadora:** Pra qualquer triângulo.
- **Sujeito 1:** Não. É possível para um triângulo retângulo.
- **Pesquisadora:** Se não for um triângulo retângulo não tem como transformar?
- **Sujeito 1:** Não, não foi isso que eu disse. Aí eu precisaria de mais triângulos para formar. Por exemplo, se eu tiver um triângulo retângulo eu só preciso fazer uma reflexão para formar.
- **Pesquisadora:** Mas ó a gente não tá usando assim não. Temos que decompor um triângulo em um retângulo de forma que preserve a área. Porque a gente quer poder pegar cada triangulozinho desse aqui e transformar em um retangulozinho aqui.

Os dois sujeitos começam decompondo um triângulo e, conforme feito antes, usando as ferramentas de isometria, tentam construir um retângulo. Nas figuras 77 e 78, abaixo, vemos que eles não conseguem construir um retângulo dessa forma.

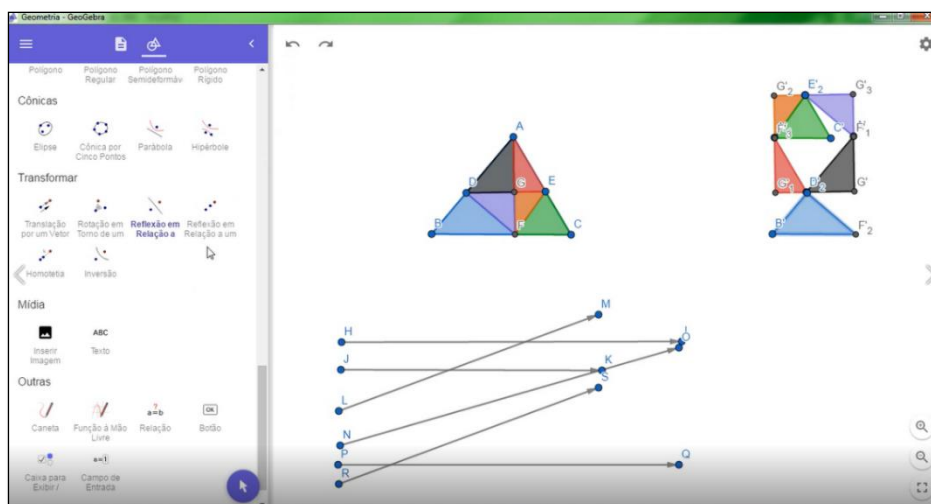
A seguir os registros das telas do *GeoGebra-Geometria* das tentativas dos sujeitos.

Figura 77: Construção de um retângulo a partir de um triângulo pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 78: Construção de um retângulo a partir de um triângulo pelo sujeito 2

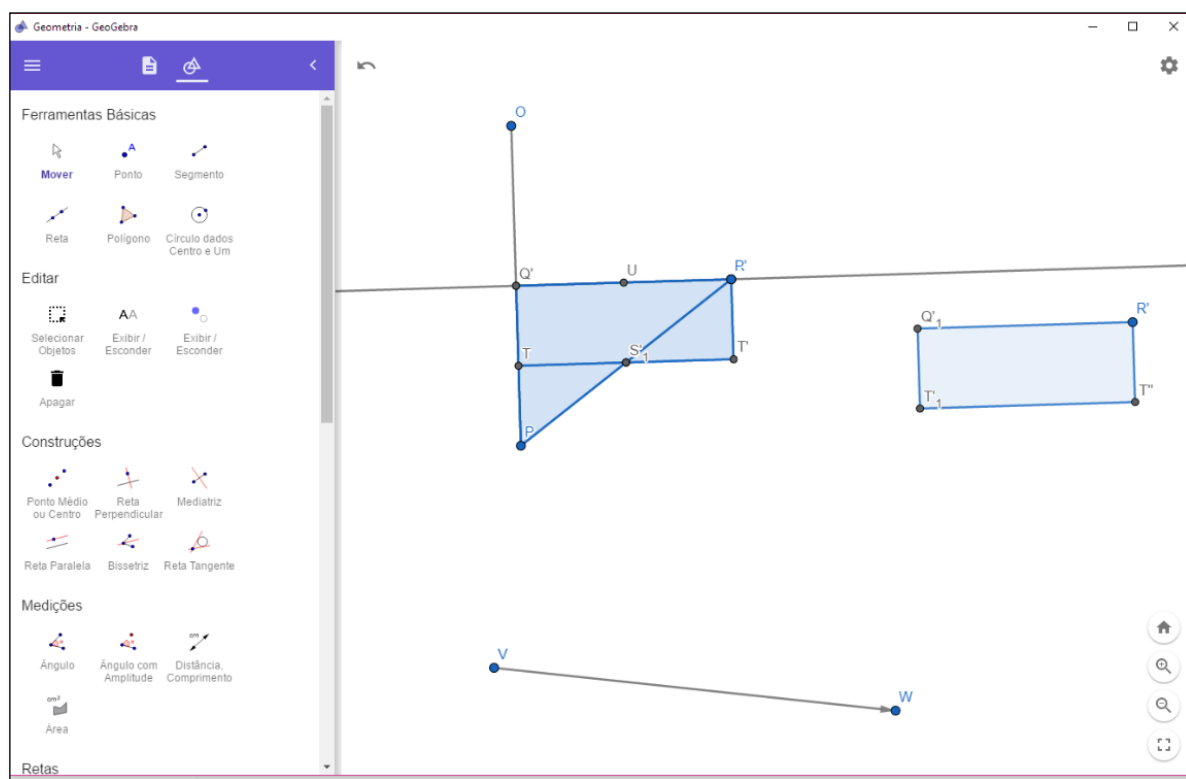


Fonte: Registro próprio (2019)

Em nossa análise *a posteriori*, observamos que, mesmo para a equidecomposição de duas regiões poligonais simples – no caso, um triângulo e um retângulo –, ocorreu uma ruptura na aprendizagem, que pudemos caracterizar como **salto informacional**. Recorrendo à análise *a priori*, vemos que não havíamos previsto tal dificuldade na resolução desse item da atividade 6. Temos, assim, um exemplo em que o experimento didático requer um replanejamento do que foi previsto com base nos conhecimentos teóricos em que se amparam tal experimento e que compõem a análise *a priori*.

Diante disso, decidimos levar em conta a fala do sujeito 1, acima transcrita, na qual ele afirmara: “*Se for retângulo é mais fácil*”. Propusemos, então, que os sujeitos recomeçassem a resolução da atividade tomando um triângulo retângulo. A figura 79, a seguir, registra o que realizou o sujeito 2.

Figura 79: Sujeito 2: construção de um retângulo a partir de um triângulo retângulo

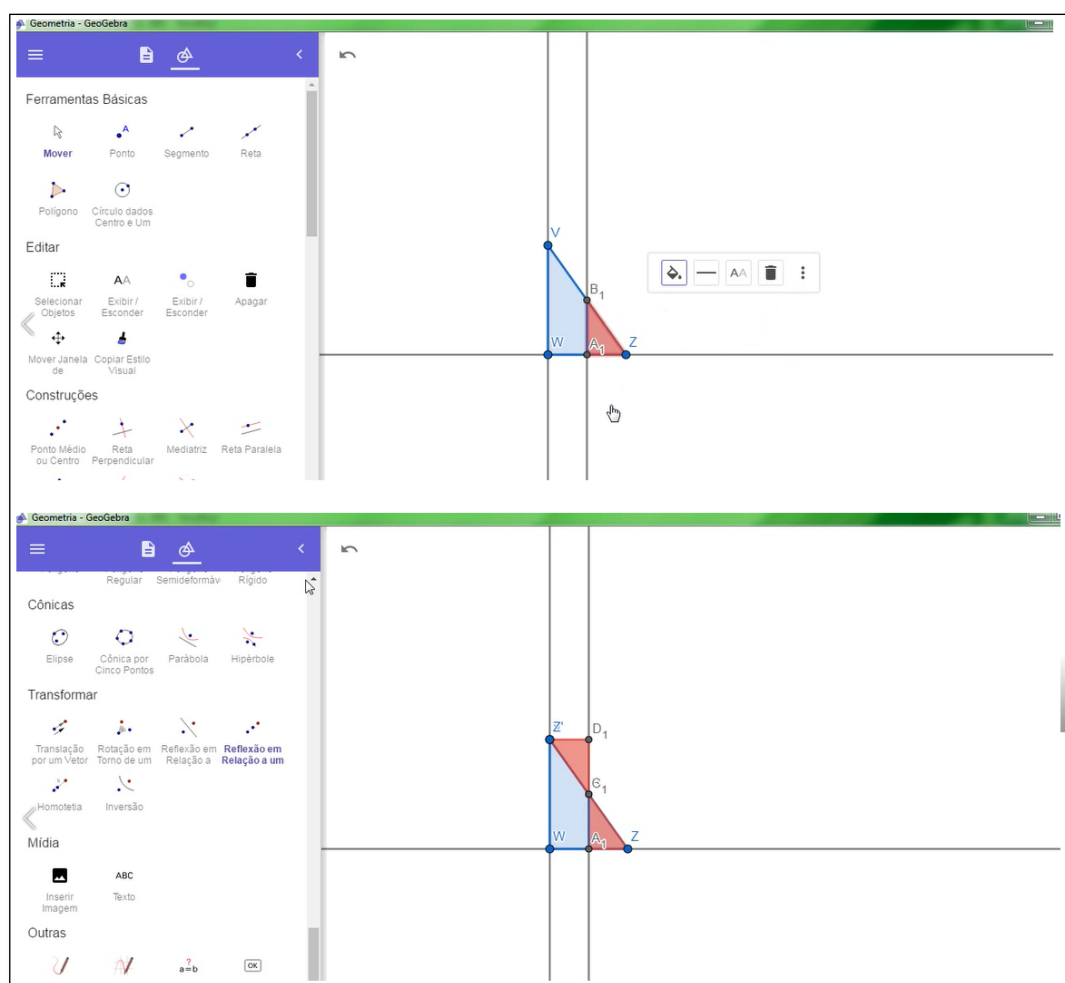


Fonte: Registro próprio (2019)

Como vemos, o sujeito 2 construiu um triângulo retângulo, ΔPQR e marcou os pontos médios dos lados desse triângulo. Depois, ligou dois desses pontos médios e girou uma parte do triângulo original de um ângulo de 180° , no sentido anti-horário, para formar o retângulo. Por fim, transladou o retângulo construído para uma melhor visualização.

Na figura 82, podemos acompanhar o caminho adotado pelo sujeito 1, que, essencialmente, foi o mesmo que o adotado pelo sujeito 2.

Figura 80: Sujeito 1: construção de um retângulo a partir de um triângulo retângulo

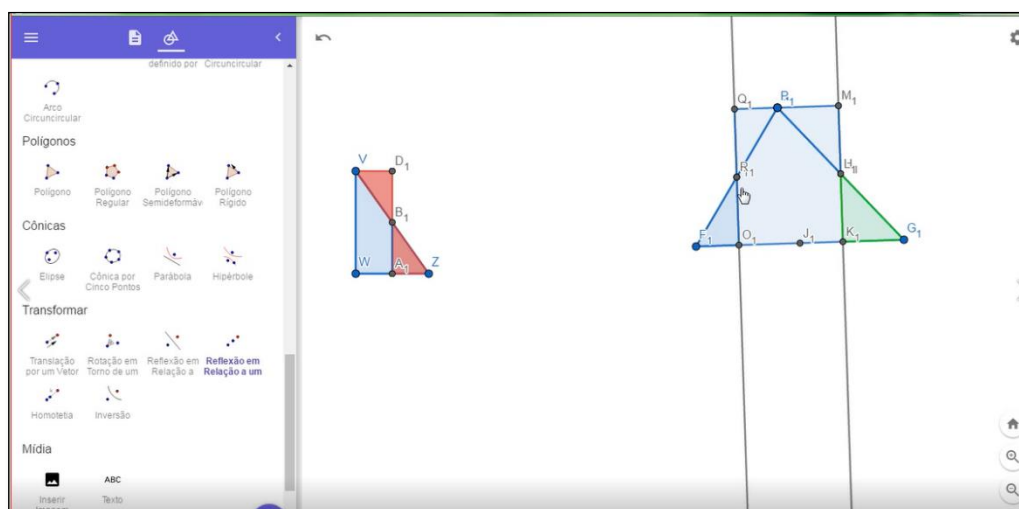


Fonte: Registro próprio (2019)

De acordo com nossas decisões relativas ao tipo de argumentação a ser aceita no experimento, consideramos que os dois sujeitos haviam conseguido resolver a questão proposta. Fizemos, então, uma intervenção, ressaltando que a solução encontrada por eles estava correta e valia para qualquer triângulo retângulo. No entanto, dissemos, deveríamos voltar a enfrentar a questão para um triângulo não retângulo. Para conseguir chegar ao item (b) da atividade 6 ainda na segunda sessão, decidimos propor que eles tentassem resolver a questão trabalhando em dupla.

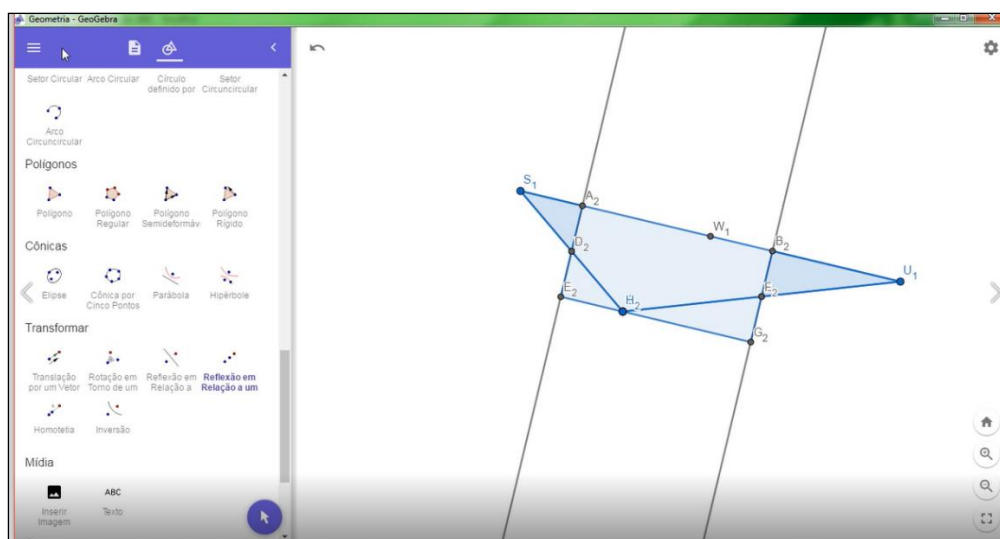
Eles criaram dois triângulos, um acutângulo e um obtusângulo e seguindo passos sugeridos pelo caso do triângulo retângulo, conseguiram comprovar como o uso do *software*, que cada um deles era equicomponível a um retângulo. Podemos verificar as soluções encontradas nas imagens a seguir:

Figura 81: Construção de um retângulo a partir de um triângulo acutângulo pelos dois sujeitos



Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 82: Construção de um retângulo a partir de um triângulo obtusângulo pelos dois sujeitos

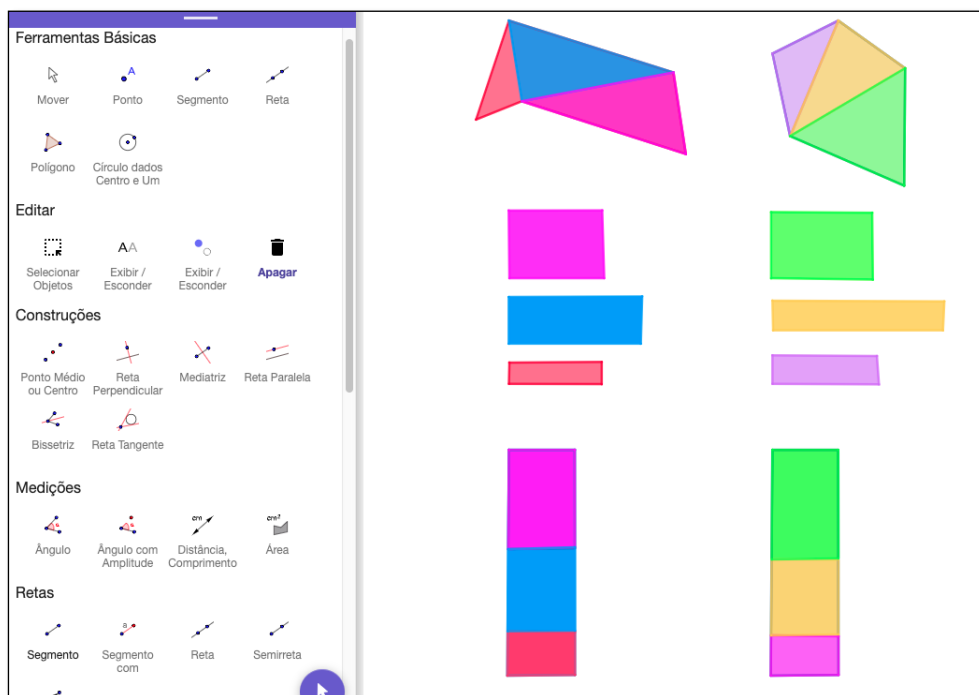


Fonte: Registro próprio (2019)

Concluída essa etapa, com base na imagem da figura 75, fizemos uma intervenção em que procuramos resumir o que já havia sido obtido: obter para cada triângulo da decomposição do primeiro polígono um retângulo equidecomposto a ele (e, portanto, ambos de mesma área). Observamos, no entanto, que esses retângulos não são, necessariamente, iguais (congruentes) dois a dois. Esse fato dificultaria obtermos, por composição, um retângulo maior

que, por consequência, seria equidecomposto ao primeiro polígono. Essa composição desejada seria possível se pudéssemos assegurar que todos os retângulos tivessem uma base comum pois comporíamos um empilhamento desses retângulos como mostramos na figura 87, a seguir.

Figura 83: Esquema da validação do Teorema de Bolyai



Fonte: Elaboração própria (2019)

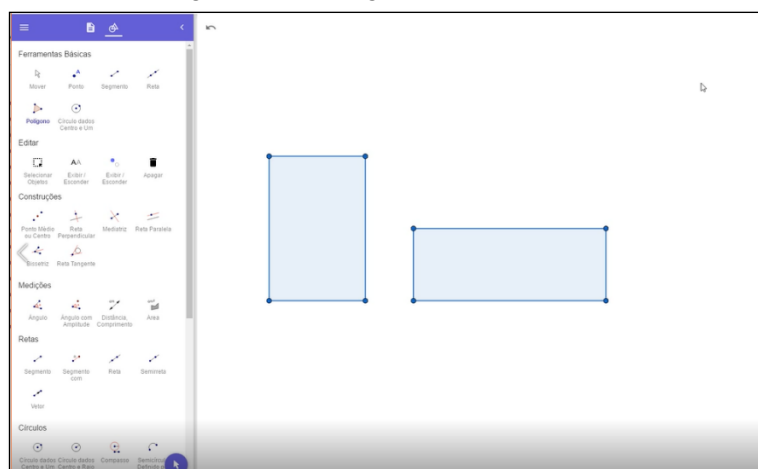
Prosseguindo, esclarecemos que, obtido esse retângulo “maior” equidecomposto ao primeiro polígono, efetuaríamos as mesmas operações no segundo polígono. Como vemos na figura 87, seriam construídos dois retângulos “maiores”. Tais retângulos possuíam a mesma área, pela hipótese de que os dois polígonos originais tinham a mesma área e, além disso, bases iguais (congruentes). Recorrendo à fórmula da área de um retângulo, tais polígonos teriam as mesmas alturas e, por isso, seriam congruentes. Retomamos o fato que dois polígonos iguais (congruentes) são equidecompostos. Chegaríamos a uma etapa em que concluiríamos a validação do Teorema de Bolyai, apoiados na transitividade da relação de equidecomposição de polígonos já comprovada na atividade 4.

Então, precisaríamos investigar se, conhecida uma sequência $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ de retângulos, poderíamos obter outra sequência de retângulos,

$T_1, T_2, T_3, \dots T_n$, respectivamente equidecompostos aos primeiros e todos esses novos retângulos com bases iguais (congruentes).

Sabíamos que, dado um retângulo qualquer e um retângulo de mesma área e base fixada, precisaríamos verificar que esses dois retângulos seriam equidecompostos, independentemente da relação entre os comprimentos dos lados do primeiro retângulo e o comprimento da base fixada do segundo retângulo. No entanto, era previsível uma ruptura na aprendizagem dos sujeitos com respeito a essa etapa da argumentação. Tratando essa ruptura como mais um **salto informacional** propusemos, inicialmente, um caso particular em que a base do primeiro retângulo fosse metade da base fixada para o segundo retângulo. Da igualdade das áreas resulta que o outro lado do primeiro retângulo seria o dobro do outro lado do segundo retângulo. A ideia foi fazer com que os sujeitos conseguissem verificar um caso particular e assim pudessem encontrar estratégias para evoluir na argumentação.

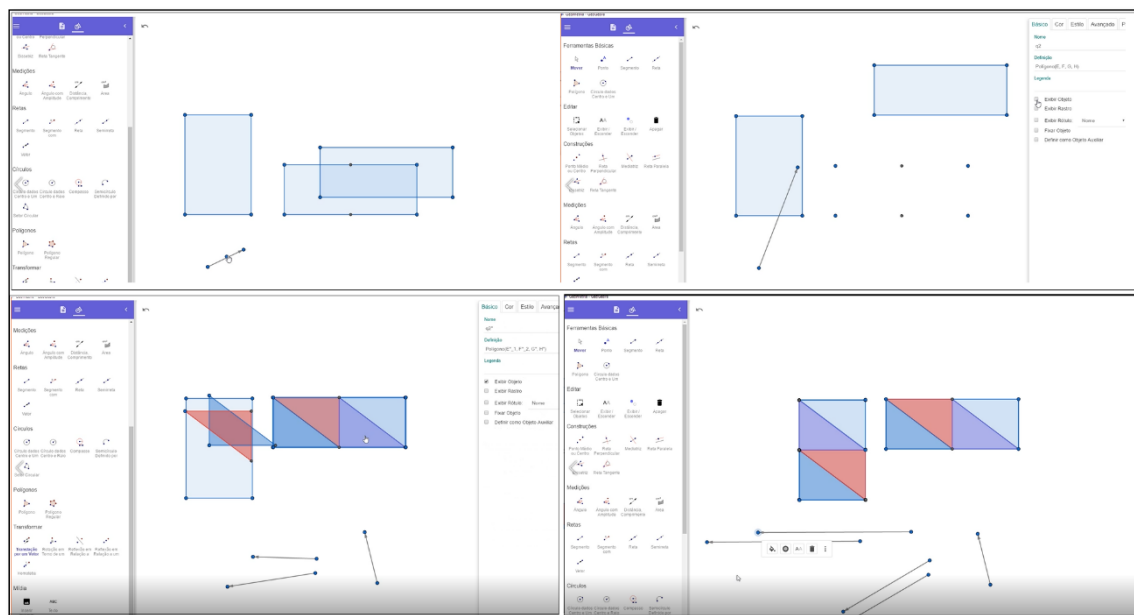
Figura 84: Retângulos de mesma área



Fonte: Registro próprio (2019)

Eles decompuseram o retângulo da direita em triângulos e, um a um, os transladaram, de modo a se encaixarem no retângulo da esquerda. A figura abaixo mostra os passos realizados pelos sujeitos para efetuar tais operações:

Figura 85: Resolução 1 – Retângulos de mesma área



Fonte: Registro próprio (2019)

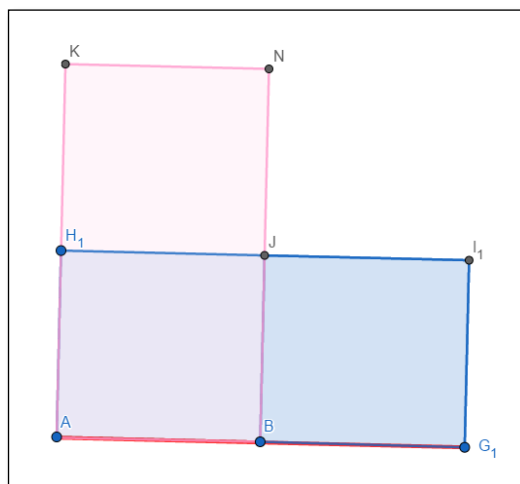
Como vemos, os sujeitos finalizam a questão de acordo com nossas expectativas. No entanto, a estratégia utilizada possivelmente não os permitiria tratar do caso geral. Essa previsão foi confirmada, pois, quando propusemos um caso no qual não se verificava a hipótese acima adotada, os sujeitos despenderam bastante tempo sem progredir na comprovação desejada. Dessa maneira, a tentativa de modificar o meio proposto para os sujeitos resolverem o problema revelou-se ineficaz. Noutros termos, iniciar apenas pela proposição de um caso particular não foi suficiente para “destravar” a resolução por parte dos sujeitos. Fizemos, então outra tentativa para tratar ruptura informacional em causa.

Apresentamos um conjunto de três casos, que dissemos esgotarem as possibilidades de relação entre os comprimentos dos lados do retângulo original e o comprimento fixado para um dos lados do segundo retângulo. Além disso, os três casos possíveis foram apresentados com os dois retângulos já dispostos na posição apropriada para o desenvolvimento da prova que expusemos no capítulo 4 desta dissertação.

A seguir os três casos possíveis:

Caso 1: os dois retângulos possuem a mesma medida de área e o retângulo inicial, $ABNK$, possui um lado com medida de comprimento, AB , igual à metade da medida de comprimento do lado fixado do outro retângulo.

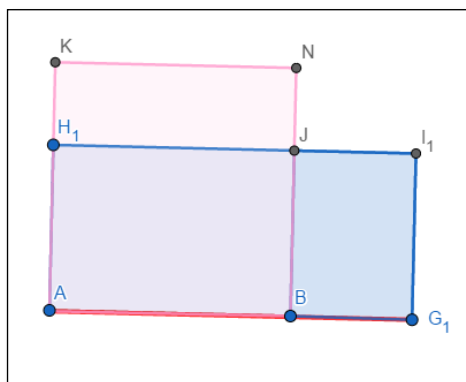
Figura 86: Retângulos de mesma área - caso 1: $AB = \frac{1}{2}AG_1$



Fonte: Registro próprio (2019)

Caso 2: os dois retângulos possuem a mesma medida de área e o retângulo inicial, $ABNK$, possui um lado com medida de comprimento, AB , maior do que a metade da medida de comprimento do lado fixado do outro retângulo.

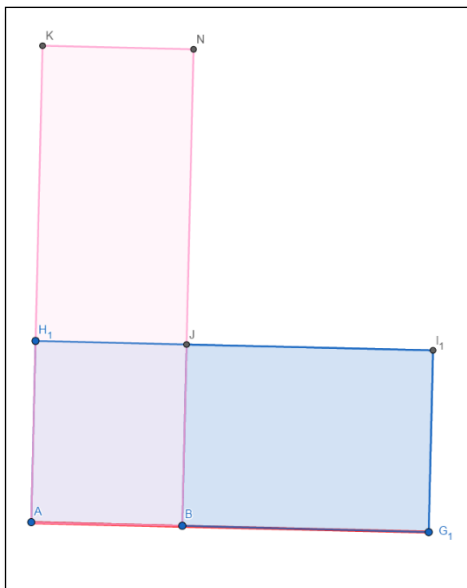
Figura 87: Retângulos de mesma área - caso 2: $AB > \frac{1}{2}AG_1$



Fonte: Registro próprio (2019)

Caso 3: os dois retângulos possuem a mesma medida de área e o retângulo inicial, $ABNK$, possui um lado com medida de comprimento, AB , menor do que a metade da medida de comprimento do lado fixado do outro retângulo

Figura 88: Retângulos de mesma área - caso 3: $AB < \frac{1}{2}AG_1$



Fonte: Registro próprio (2019)

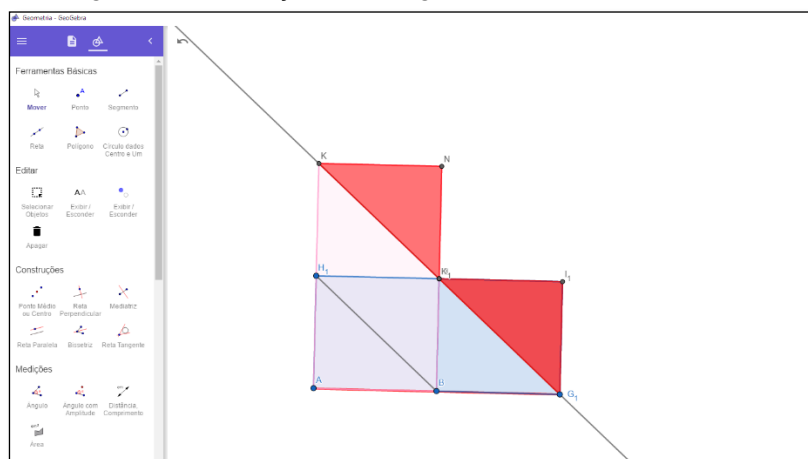
Os três casos esgotam todas as possibilidades porque:

- a) se $AB = AG_1$, a igualdade das áreas, $AB \times AK = AG_1 \times AH_1$ implicaria que $AK = AH_1$ e os retângulos seriam congruentes e, portanto, equidecomponíveis, não restando nada a comprovar;
- b) se $AB > AG_1$, a igualdade das áreas, $AB \times AK = AG_1 \times AH_1$ implicaria que $AK < AH_1$ e a mesma argumentação empregada nos casos 2 e 3 é válida, apenas considerando uma mudança nas designações dos vértices dos retângulos em causa.

Os sujeitos foram orientados a iniciar pelo primeiro caso.

Usando as estratégias que já haviam usado anteriormente, eles decompuseram os retângulos em triângulos da seguinte maneira: traçaram uma reta passando por K e por G_1 e o segmento $\overline{H_1B}$, como na figura abaixo:

Figura 89: Resolução 1: retângulos de mesma área - caso 1



Fonte: Registro próprio (2019)

Os sujeitos, como antes, comprovaram que os dois retângulos eram equidecomponíveis e prosseguiram para a resolução dos outros casos.

Nesse momento, um fato relevante a ser observado é que a hipótese de que os dois triângulos possuem a mesma área – o que os sujeitos conseguiram obter recorrendo à medição no *software* – implicou que, visualmente, eram perceptíveis os paralelismos demonstrados matematicamente no capítulo 4, com suas consequências relativas às congruências envolvidas na argumentação. Entreviemos, em vários momentos, solicitando a prova matemática desses fatos. A despeito disso, os sujeitos não conseguiram atender a nossas solicitações e prosseguiram em suas tentativas de resolução da questão, recorrendo ao *software*.

Movendo a figura, os sujeitos notaram que, nas duas novas configurações, os dois triângulos vermelhos continuaram aparecendo. Dessa vez, pedimos que explicassem, matematicamente, por que os triângulos vermelhos são, de fato, congruentes.

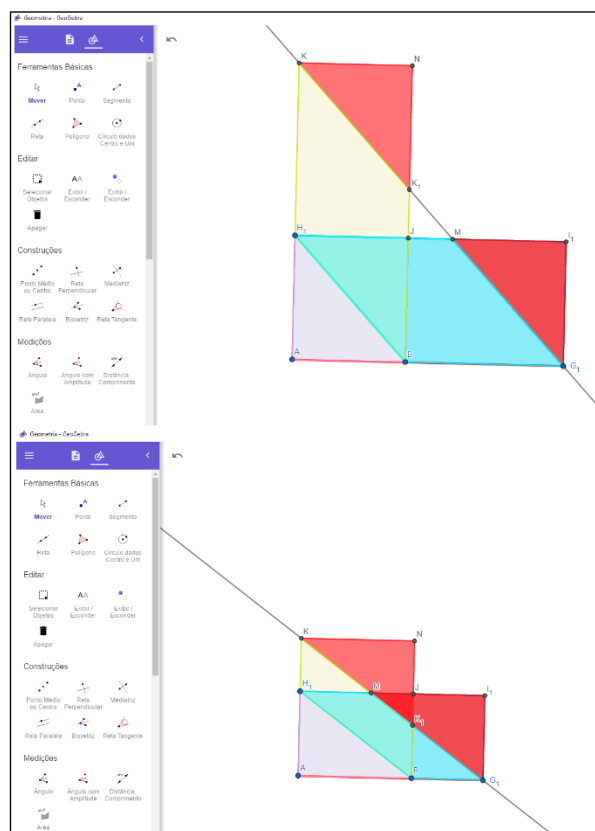
No experimento, apesar de nossas solicitações, os sujeitos não responderam às nossas solicitações de validação lógica das relações de paralelismo entre retas e de congruência de triângulos observadas visualmente na tela do *software*.

O fato acima mencionado nos conduz a identificar, no *software*, um recurso útil, na medida em que favorece a aquisição de um conhecimento. No entanto, esse conhecimento gera uma resistência nos sujeitos a buscar outro

tipo de validação além daquela propiciada pela percepção visual. Reconhecemos, neste momento da nossa análise *a posteriori* a existência de um possível **obstáculo de natureza epistemológica** a ser investigado em maior profundidade.

As construções que os sujeitos estão registradas a seguir:

Figura 90: Retângulos de mesma área com paralelogramos destacados pelos sujeitos - caso 2 e caso 3



Fonte: Registro próprio (2019)

Nessas construções, os sujeitos visualizaram dois quadriláteros que supuseram ser dois paralelogramos. Como esses paralelogramos seriam importantes para a argumentação, sugerimos dar-lhe destaque, como o uso de cores. Apesar de terem reconhecido os paralelogramos, os sujeitos não conseguiram progredir na resolução da questão, pela verificação de que tais paralelogramos eram equidecomponíveis.

Tal dificuldade já havia sido prevista na análise *a priori*, na qual antecipamos a possibilidade de tomar essa equidecomposição como objeto de uma **atividade complementar**. Também consideramos a opção de encerrar o

experimento nesse momento, admitindo a equidecomposição dos paralelogramos em causa como verdadeira e dispensando a validação dessa proposição, passando à fase de institucionalização do experimento.

Observamos que a passagem da apropriação visual das propriedades geométricas em jogo não havia ocorrido de modo satisfatório e que não seria possível fazê-la no tempo previsto para a segunda sessão, pois até o momento já havíamos chegado a quase três horas de atividades. Para sanar essa deficiência e, além disso, proceder a uma institucionalização adequada, decidimos por agendar uma terceira sessão para retomar e prosseguir o experimento.

7.3 Terceira sessão da sequência

Como dissemos, decidimos propor uma terceira sessão, não prevista no planejamento original, para retomar e aprofundar a resolução da atividade 6, propor uma **atividade adicional** e realizar a fase de institucionalização do experimento.

Diferentemente do que ocorreu nas duas primeiras sessões, só foi possível realizar a terceira sessão com cada sujeito atuando individualmente, em dias distintos. Os efeitos de tal modificação no método previsto, não serão analisados com as necessárias ferramentas conceituais, nesta dissertação, por resultar de fatores não previstos na análise preliminar. Apesar disso, o favorecimento do diálogo mais frequente entre nós e cada sujeito, certamente criou um contexto mais propício a intervenções nossas do que nas fases anteriores.

A análise *a posteriori*, a seguir apresentada, é organizada separadamente por sujeito, segundo a ordem de realização dos experimentos.

Retomando a resolução da atividade 6, vimos que na prova do item (b) dessa atividade, surgiu a necessidade da validação da seguinte proposição matemática:

Dois paralelogramos, ABEC e ABDF, de mesma base e mesma área são equidecomponíveis.

De acordo com a análise *a priori*, era previsto que haveria uma ruptura na aprendizagem dos sujeitos diante da complexidade da mencionada validação.

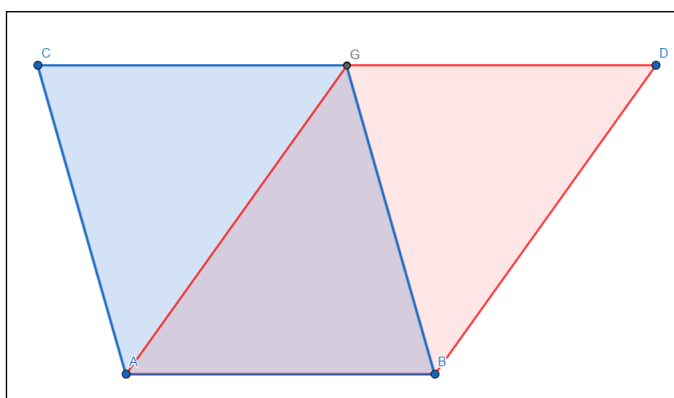
Considerando essa ruptura como um **salto informacional**, optamos por intervir no início do processo, apresentando o problema já estruturado em três casos, com base na demonstração descrita no capítulo 4 desta dissertação.

Antes, porém, cabe dar mencionar o fato de que uma etapa fundamental da validação da proposição enunciada é a de concluir que as bases superiores dos dois paralelogramos nas condições indicadas têm suas bases superiores contidas em uma paralela à base inferior comum. Sabemos que o modo usual de provar isso na geometria euclidiana é recorrer à fórmula da área do paralelogramo, que implica a igualdade das alturas dos dois paralelogramos. Esse fato foi comunicado aos sujeitos, mas não demonstrado.

Os três casos citados são.

Caso 1: **ABEC** e **ABDF** são dois paralelogramos cujos lados superiores, **CE** e **FD**, possuem apenas um ponto em comum, $G = E = F$.

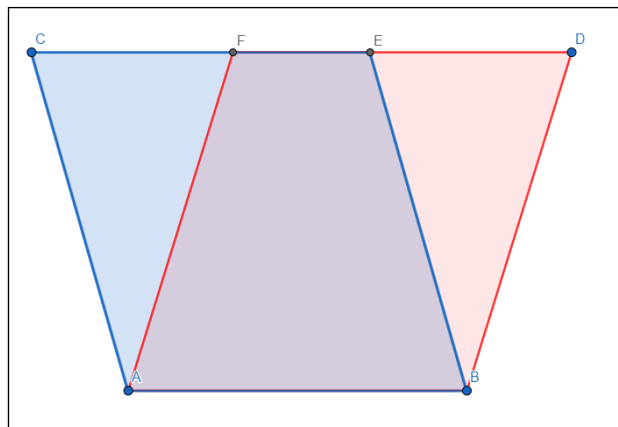
Figura 91: Paralelogramos: apenas o ponto **G** é comum a **CE** e **FD**.



Fonte: Elaboração própria (2019)

Caso 2: **ABEC** e **ABDF** são dois paralelogramos, cujos lados superiores, **CE** e **FD**, dos paralelogramos possuem um segmento, **FE**, como interseção.

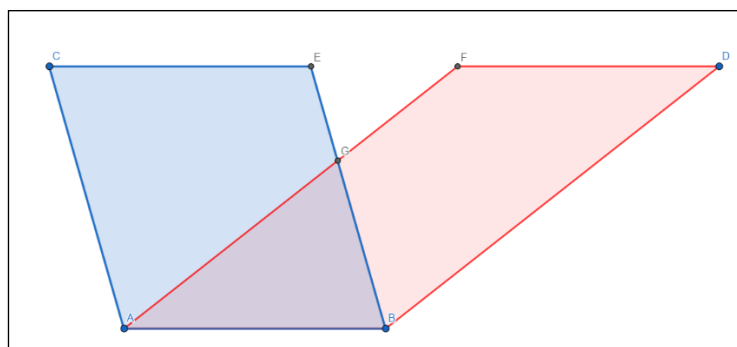
Figura 92: Paralelogramos: o segmento FE é comum a CE e FD



Fonte: Elaboração própria (2019)

Caso 3: $ABEC$ e $ABDF$ são dois paralelogramos cujos lados superiores, CE e FD , possuem interseção vazia.

Figura 93: Paralelogramos: os segmentos CE e FD não têm pontos em comum



Fonte: Elaboração própria (2019)

7.3.1 Atividade Complementar-sujeito 2

Apresentamos o problema, oralmente, como podemos analisar pela transcrição abaixo:

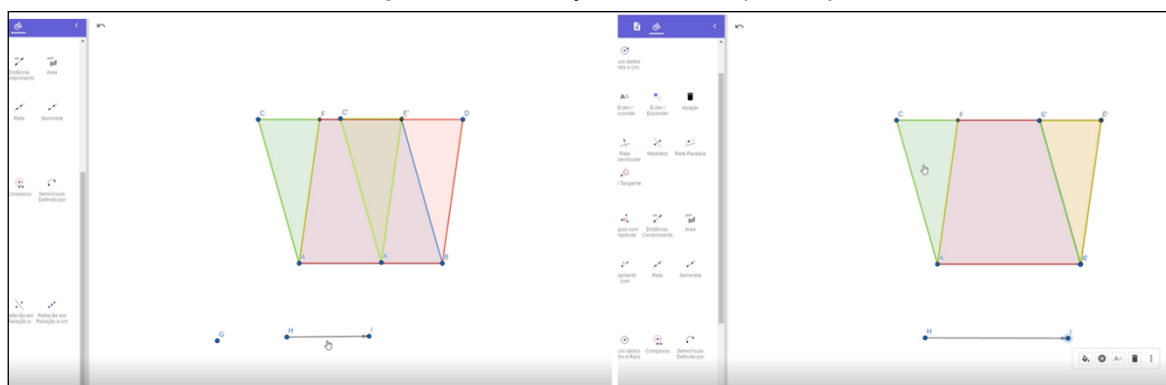
- **Pesquisadora:** Temos a seguinte situação, são dois paralelogramos.
- **Sujeito 2:** A mesma base, a mesma altura, né?
- **Pesquisadora:** Eles têm a mesma área e eles têm a mesma base, isso é garantido, certo?
- **Sujeito 2:** Certo!
- **Pesquisadora:** [...] já sabe, você já até falou aí uma coisa, que eles têm a mesma...
- **Sujeito 2:** Base né, mesma altura.
- **Pesquisadora:** [...] eles têm uma mesma altura também, se não for desse jeito...
- **Sujeito 2:** Não têm a mesma área, não fazia sentido dizer isso.

- **Pesquisadora:** Então, é uma conclusão direta que já vem da fórmula [...] E como é que a gente faz essa primeira parte aí? Para provar que eles são equidecomponíveis [...] pelas relações geométricas que você já conhece e tudo mais. E aí tem os recursos do *GeoGebra-Geometria* para ajudar. Mas, teoricamente, se isso aqui fosse uma questão no papel também daria para provar, né?

O sujeito 2 iniciou pelo caso 2 e, realizando uma translação, ele fez o triângulo **ACF** (Figura 94) coincidir com o triângulo **BED**. Como o quadrilátero **AFEB** era parte comum aos dois paralelogramos, ficaria justificado que eles eram equidecomponíveis. Nesse momento, não fizemos uma intervenção para solicitar que, recorrendo a critérios de congruência de triângulos, seria possível provar matematicamente que **ACF** e **BED** são congruentes.

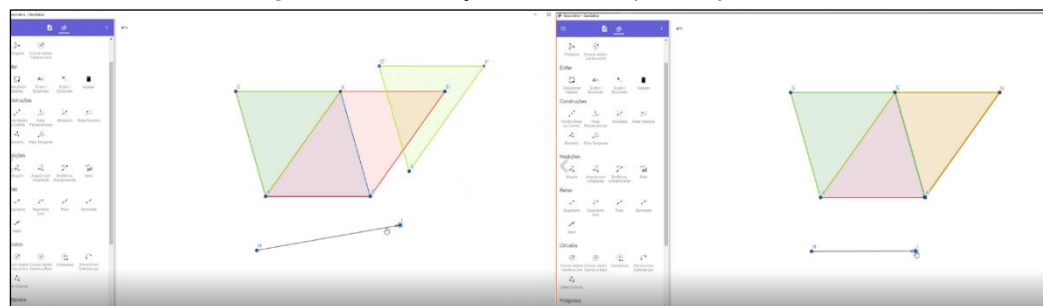
Argumento análogo foi usado pelo sujeito para resolver o caso 1, em que a parte comum aos dois paralelogramos é o triângulo **AGB** (Figura 95). Podemos seguir a argumentação utilizada por meio das imagens registradas na tela do *GeoGebra-Geometria*:

Figura 94: Resolução do caso 2 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

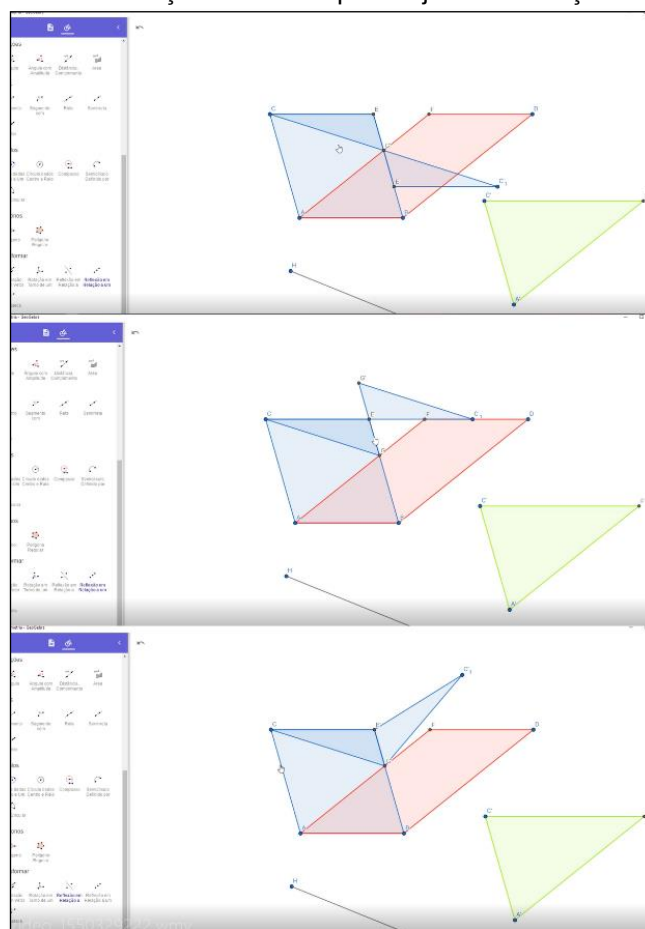
Figura 95: Resolução do caso 1 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

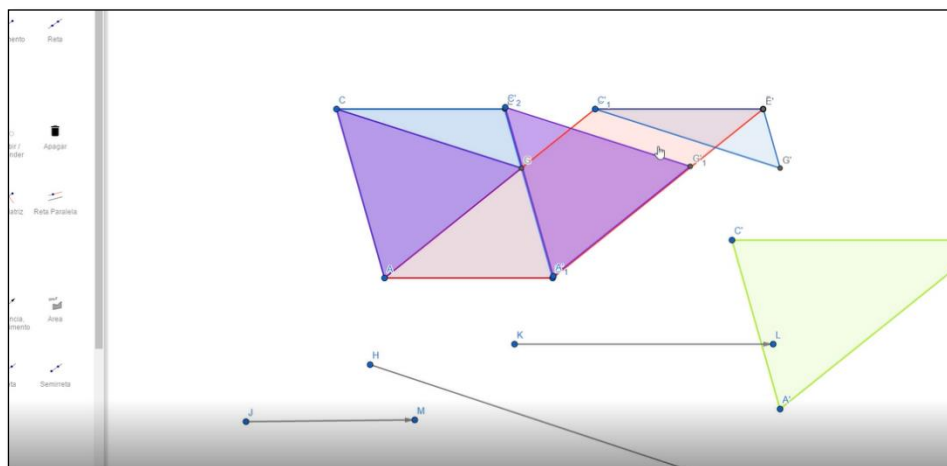
No terceiro caso, o sujeito 2 começou tentando fazer uma triangularização do paralelogramo **ACEB**. Em seguida, toma um dos triângulos da decomposição do paralelogramo **ACEB** e procura realizar rotações, reflexões e translações, buscando com isso transportar esse triângulo para recobrir parte do paralelogramo **AFDB**. Suas tentativas não produzem o efeito desejado e podem ser observadas nas imagens contidas nas figuras 96 e 97, a seguir.

Figura 96: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – rotações de 180°



Fonte: Registro próprio (2019)

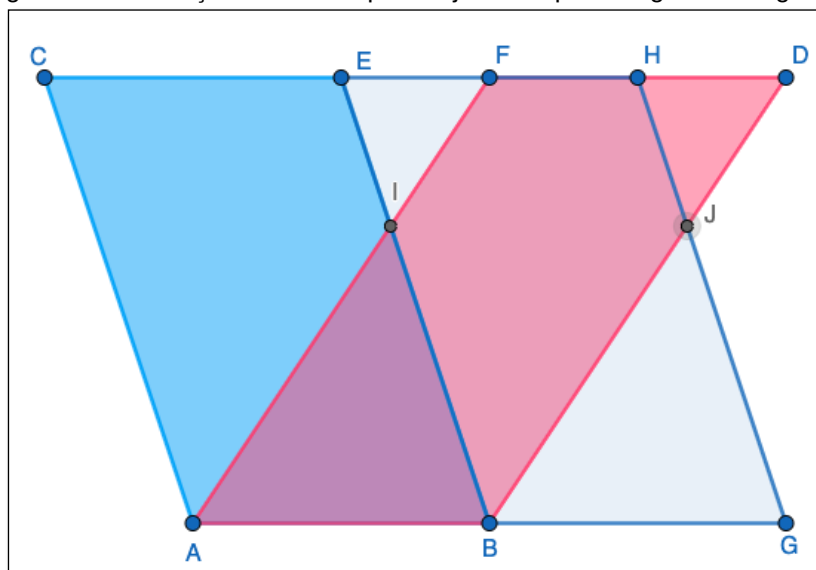
Figura 97: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 - translações



Fonte: Registro próprio (2019)

Não obtendo êxito com a estratégia adotada, o sujeito 2 recomeça a resolução da questão, agora buscando transladar todo o paralelogramo **ACEB** para formar um novo paralelogramo **BEHG**. A configuração que resulta dessa operação é mostrada na figura 98:

Figura 98: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo congruente



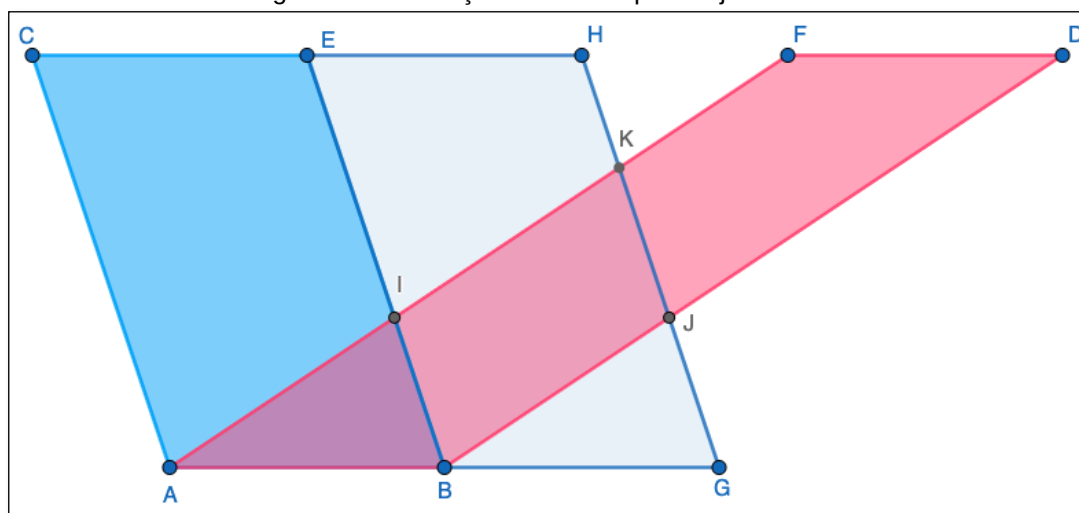
Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito 2 argumenta que o paralelogramo **ACEB** e o seu transladado **BEHG** são congruentes e, portanto, equidecomponíveis. Usando a transitividade da relação de equidecomposição, bastaria mostrar, então, que os paralelogramos **BEHG** e **AFDB** são equidecomponíveis. Ele prosseguiu argumentando que o triângulo **IEF** pode ser transladado para coincidir com o

triângulo JHD . Do mesmo modo, o triângulo AIB pode ser transladado para coincidir com o triângulo BJG . Como o polígono $BIFHJ$ é comum aos paralelogramos $BEHG$ e $AFDB$, ficaria, dessa forma, confirmada a equidecomposição visada.

Percebemos que o sujeito 2 evoluiu em sua argumentação, em relação a suas tentativas iniciais. No entanto, ficou claro que havia feito uma justificação que era válida apenas para configuração que obtivera com a citada translação do paralelogramo $ACEB$. Para “desestabilizar” sua argumentação, deslocamos o ponto D e propusemos a seguinte situação para ser considerada pelo sujeito 2:

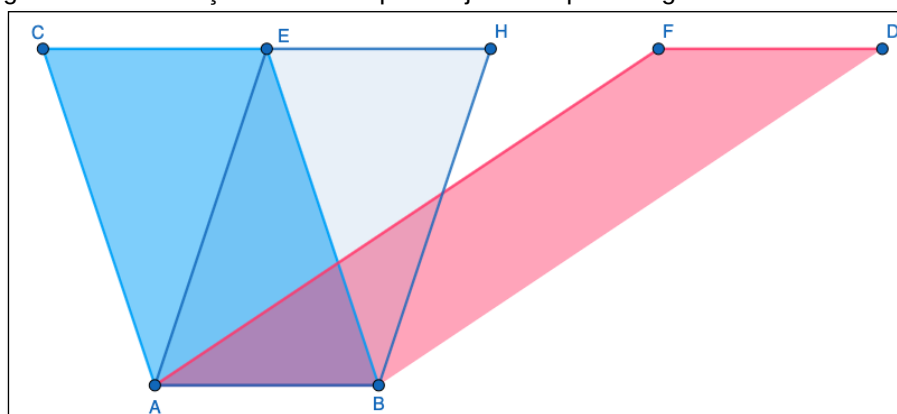
Figura 99: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Como o sujeito 2 compreendeu que não eram mais válidos os argumentos empregados anteriormente, ele retomou a questão partir do início, “apagando” o paralelogramo $BEHG$. Criou, em seguida, o paralelogramo $AEHB$, que é equidecomposto ao paralelogramo $ACEB$, pelo primeiro caso, já demonstrado

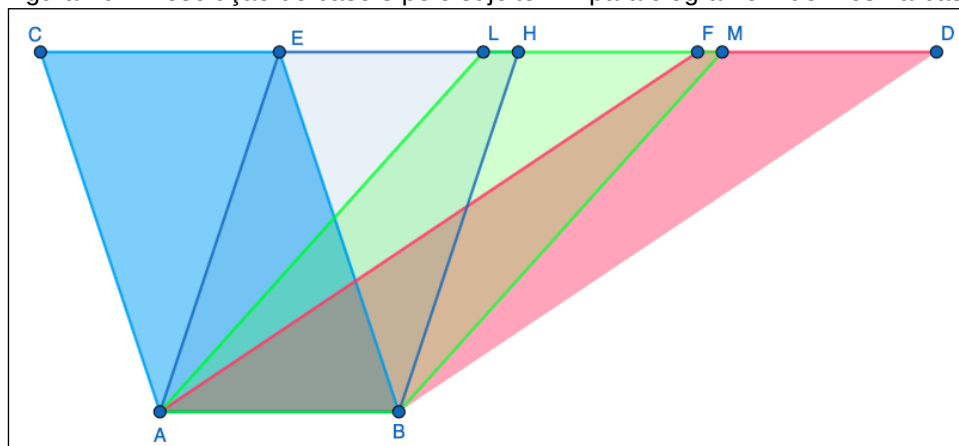
Figura 100: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo1 de mesma base



Fonte: Registro próprio (2019)

Em seguida, construiu o paralelogramo **ALMB**, que pode ser visualizado na figura 101:

Figura 101: Resolução do caso 3 pelo sujeito 2 – paralelogramo 2 de mesma base



Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito 2 argumentou que os paralelogramos **AEHB** e **ALMB** enquadram-se no caso 2, já comprovado e que, portanto, são equidecomponíveis. O mesmo ocorre com relação aos paralelogramos **ALMB** e **AFDB**. Pela transitividade da equidecomposição, ficaria validado o que era visado.

Neste momento da análise *a posteriori*, convém comentar que o axioma de Arquimedes é necessário para a validade matemática do procedimento acima: tal axioma vai assegurar que a configuração mostrada acima pode ser obtida, quaisquer que sejam as posições originais dos paralelogramos **ABCE** e **ABFD**. Em linguagem menos precisa, podemos dizer que o axioma de

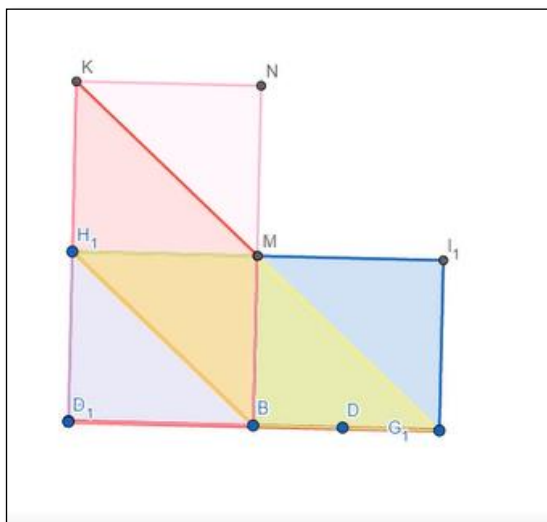
Arquimedes garante que, repetindo um número finito de vezes o procedimento acima, os paralelogramos “deslocados” a partir de **ABEH** podem ser levados a “atingir” o paralelogramo **ABFD**.

Concluída a atividade complementar com o sujeito 2, procuramos continuar a terceira sessão do experimento, visando a dois objetivos: a) retomar a comprovação do item (b) da atividade 6, requerendo do sujeito validar suas afirmações, não apenas no plano da utilização do *GeoGebra-Geometria*, mas também apoiando-se em proposições matemáticas; b) cumprir uma fase de institucionalização de todo o conhecimento envolvido no Teorema de Bolyai.

Voltamos então a discutir com o sujeito 2 o item (b) da atividade 6 que havia sido subdividido em 3 casos.

Lembramos que no caso 1, tínhamos que um dos retângulos possuía a base igual à metade da base do outro retângulo. Observamos que os dois paralelogramos formados nessa construção eram como o **caso 1** dos paralelogramos e, por isso, equidecomponíveis. Restava, assim, confirmarmos que os triângulos **NMK** e **I₁G₁M** eram equidecomponíveis. Vejamos a seguir a imagem da composição trabalhada pelo sujeito 2:

Figura 102: Resolução do caso 1 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2



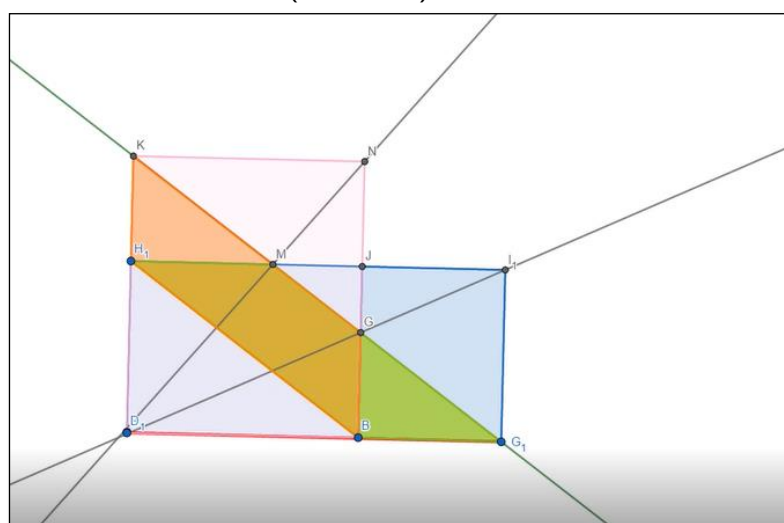
Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito 2, por solicitação nossa, justificou que os triângulos eram, de fato, congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado), pois o lado $\overline{KN}$ é congruente ao lado $\overline{H_1M}$ pois eram lados opostos de um mesmo retângulo; $\overline{H_1M}$ por sua vez

era congruente a $\overline{BG_1}$, pois eram os lados opostos do paralelogramo verde ($\overline{BH_1MG_1}$); e o lado $\overline{BG_1}$ era congruente ao lado $\overline{MI_1}$ pois eram lados opostos de um mesmo retângulo. Por transitividade, tínhamos $\overline{KN}$ congruente a $\overline{MI_1}$. De maneira análoga, os lados $\overline{NM}$ e $\overline{IG_1}$ também eram congruentes. Os lados $\overline{KM}$ e $\overline{MG_1}$ eram congruentes pois $\overline{KM}$ e $\overline{H_1B}$ eram os lados opostos do paralelogramo vermelho ($\overline{BH_1KM}$) assim como $\overline{MG_1}$ e $\overline{H_1B}$ eram os lados opostos do paralelogramo verde ($\overline{BH_1MG_1}$).

No **caso 2**, para ajudar o prosseguimento da resolução exibimos a reta que passa por $\overline{KG_1}$ e o sujeito 2 fez outras retas na tentativa de encontrar uma decomposição favorável. Neste ponto ele verifica que os paralelogramos verde e laranja são como no caso 2 dos paralelogramos e sendo então equidecomponíveis. Vejamos:

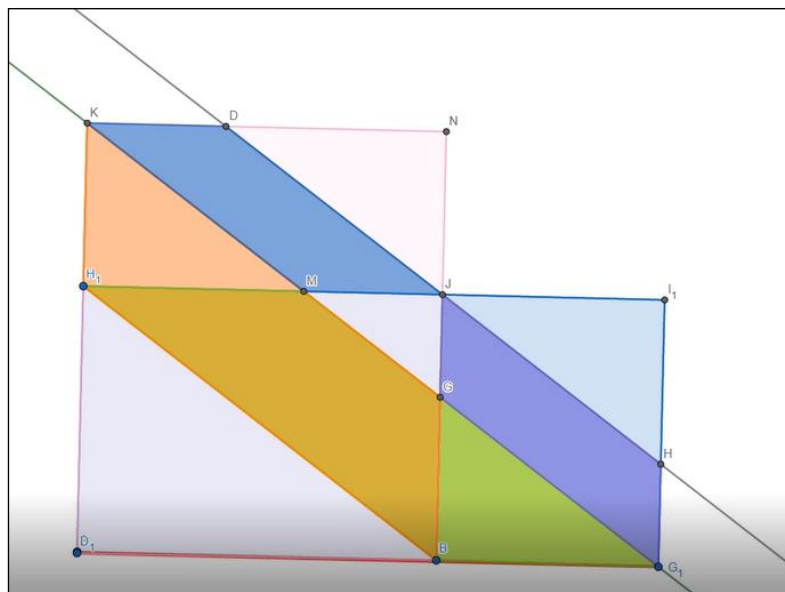
Figura 103: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 1)



Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito 2 não consegue avançar depois disso. Então, ele apaga as duas retas criadas por último e traça, recorrendo ao *GeoGebra-Geometria*, outra reta, uma paralela à reta que passa por $\overline{KG_1}$. Depois disso, ele nota que surgem novamente: os triângulos rosa e azul como no caso anterior e que analogamente são congruentes; e dois novos paralelogramos que dessa forma têm a mesma área. Bastaria mostrar que eles são equidecomponíveis.

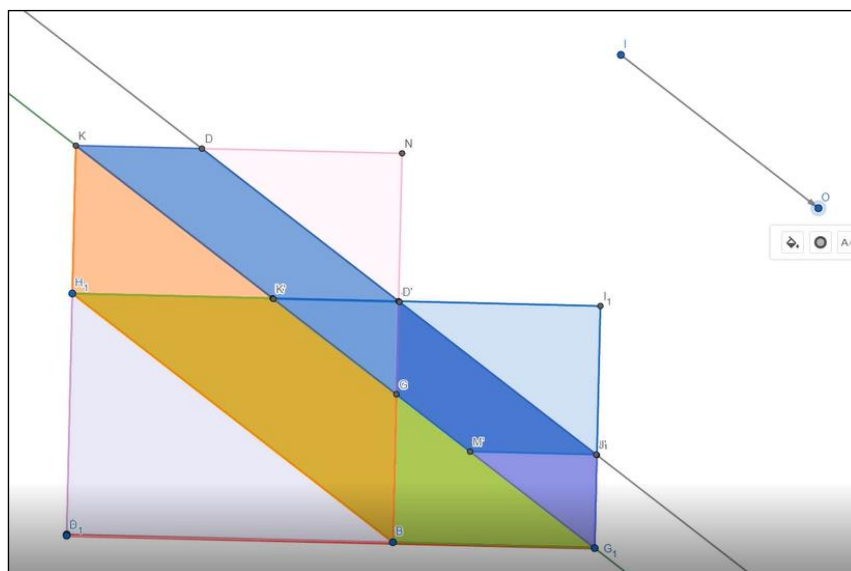
Figura 104: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 2)



Fonte: Registro próprio (2019)

Ele translada um desses paralelogramos como na figura abaixo:

Figura 105: Resolução do caso 2 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2 (tentativa 2) – transladando o paralelogramo



Fonte: Registro próprio (2019)

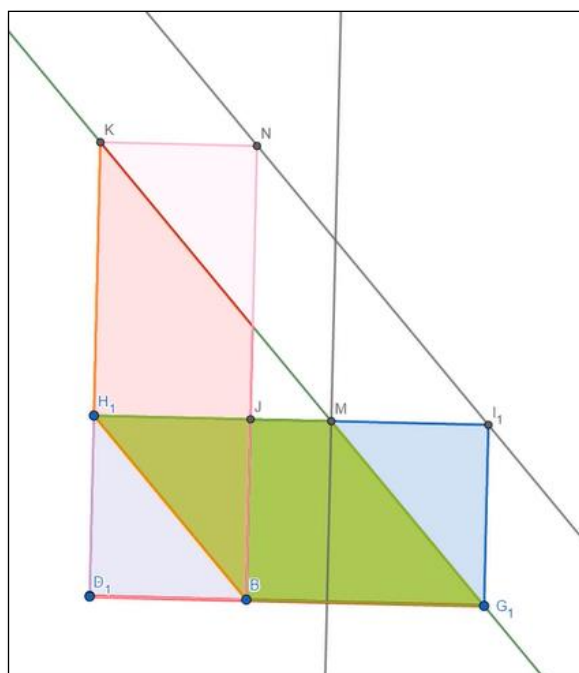
Por construção o paralelogramo transladado é congruente ao paralelogramo azul original e é equidecomponível ao paralelogramo lilás pelo caso 2 dos paralelogramos já provado.

No caso 3, ele percebe que os paralelogramos rosa e verde recaem no caso 3 dos paralelogramos que já foi comprovado, logo são equidecomponíveis. Sobram apenas os triângulos rosa e azul como no caso 1. Ao traçar as retas como na imagem a seguir, o sujeito mostra que novamente os triângulos são congruentes pelo caso LLL. O diálogo a seguir relata essa passagem:

- **Pesquisadora:** Se fizer isso, facilita um pouco? – se refere ao traçar a reta paralela a $\overline{NJ}$ passando por M . O objetivo é saber se esse pedaço aqui é congruente a esse – se refere aos triângulos rosa e azul.
- **Sujeito 2:** A gente tem como eu saber isso se eu traçar uma reta paralela a essa aqui - Ele traça a reta paralela a $\overline{KM}$ passando por N . – Aí sim eu garanto que esse segmento $\overline{J_1I_1}$ é congruente a esse N e esse que tá sem o ponto E da mesma forma esses outros aqui – Se referindo aos outros dois lados $\overline{KN}$ e $\overline{MI_1}$.

Como os outros dois lados, que são as hipotenusas dos triângulos rosa e azul são também lados dos paralelogramos facilmente foi verificado pelo sujeito como no caso 1. A próxima imagem mostra como se foram realizadas essas construções.

Figura 106: Resolução do caso 3 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 2



Fonte: Registro próprio (2019)

Na presente análise *a posteriori*, observamos que na resolução da atividade adicional, o sujeito 2, estimulado por nós, empregou justificativas que são necessárias nas provas lógico-matemáticas. Contudo, tais justificativas restringiram-se ao apelo aos axiomas e teoremas relativos, essencialmente, à congruência de triângulos e à recíproca do teorema dos ângulos alternos internos. Esse fato nos dá um indício do tipo de conhecimento adquirido pelos sujeitos em sua formação matemática anterior ao experimento.

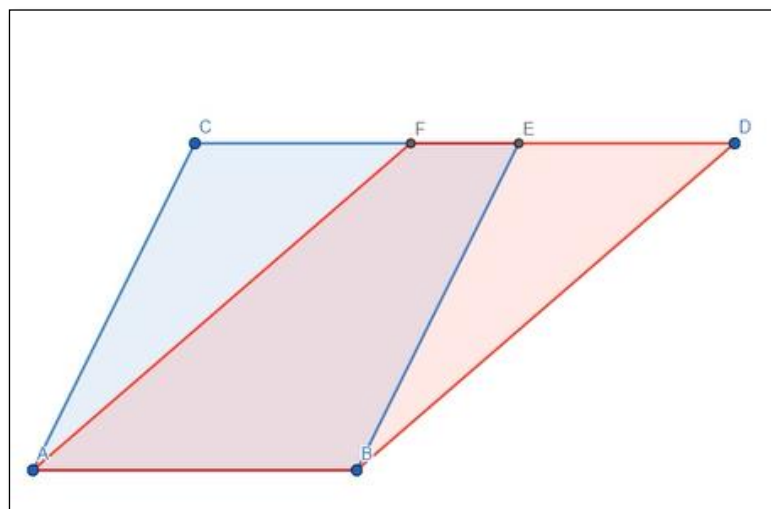
Cumprida a resolução por parte do sujeito 2, voltamos para a atividade 5 para realizar a fase de institucionalização. Pudemos discorrer sobre o que havia sido estudado e concluir que, de fato, duas figuras de mesma área são equidecomponíveis, como estabelece o Teorema de Bolyai.

7.3.2 Atividade Complementar - sujeito 1

Com o sujeito 1, começamos lembrando as atividades que foram realizadas até aquele momento. Explicamos ao sujeito que o primeiro exercício desta etapa é um passo intermediário que visa facilitar a resolução do item (b) da atividade anterior. O objetivo da atividade seria mostrar que dados dois paralelogramos de mesma área e mesma base, então, eles são equidecomponíveis.

O sujeito 1 inicia a atividade no *GeoGebra-Geometria* em uma janela com dois paralelogramos construídos previamente por nós, de forma análoga aos que foram apresentados ao sujeito 2 e se enquadram no segundo caso dos paralelogramos citados antes. Vejamos a figura 107, a seguir:

Figura 107: Apresentação do caso 2 ao sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

Ao ver a imagem, explica que o triângulo azul, ACF , pode levado a superpor o vermelho, BED , por meio do *software*. Incentivamos que formalize a ideia, então o sujeito explica:

- **Sujeito 1:** É pensar que essa figura azul ela tem uma altura que é a mesma altura da figura vermelha certo? E a única coisa que precisamos saber é se o $\overline{CF}$ tem o mesmo tamanho, mesma medida do $\overline{ED}$.
 - **Pesquisadora:** Certo, e a gente pode descobrir isso?
 - **Sujeito 1:** Deixa eu pensar aqui ... tem alguma informação sobre esses pontos?
 - **Pesquisadora:** Não. Só que o vermelho é um paralelogramo e o azul é um paralelogramo e que $\overline{AB}$ é a mesma base pros dois.
 - **Sujeito 1:** [...] $\overline{AF}$ é igual a $\overline{BD}$ certo? Temos alguma coisa a mais? $\overline{AF}$ é igual a $\overline{BD}$.
 - **Pesquisadora:** Por que que $\overline{AF}$ é igual a $\overline{BD}$?
 - **Sujeito 1:** Porque ele é um paralelogramo. Um paralelogramo, lados opostos tem a mesma medida. Agora eu queria saber uma coisa: esse $\overline{EB}$ é congruente a $\overline{CA}$?
 - **Pesquisadora:** O azul é um paralelogramo. São dois paralelogramos nessa questão.
 - **Sujeito 1:** O azul também é um paralelogramo. Ah! É verdade... Então, $\overline{EF}$ também é igual a $\overline{CA}$. [...] aí falta uma coisa, descobrir se o ângulo também é.... ah não, mas eu tenho que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CE}$ por ser um paralelogramo, que também é congruente a $\overline{FD}$. Ou seja, os dois paralelogramos têm mesma área.
 - **Pesquisadora:** Têm mesma área desde o começo.
 - **Sujeito 1:** - Ah, desculpa! Esses dois paralelogramos têm a mesma medida "aqui aqui daqui pra cá", pode não parecer visualmente [...], mas como isso aqui é um paralelogramo $\overline{AB}$ vai ser congruente a $\overline{FD}$, como esse azul também é um paralelogramo, $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CE}$, então $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{FD}$. Certo?
 - **Pesquisadora:** Isso.
 - **Sujeito 1:** E a altura dos dois também são congruentes.
- [...]

- **Sujeito 1:** São iguais porque eu não tô olhando a altura como se fosse $\overline{BD}$ e sim a projeção de B até a reta... o segmento $\overline{FD}$. Então esse segmento aqui é o mesmo que tá em $\overline{CE}$, então a gente tem alturas iguais. Se formos olhar por fórmula... A área do paralelogramo vai ser a altura vezes a base, e a altura dos dois são iguais como a base também. Então os dois têm a mesma área. Por ter a mesma área e a gente já provou que os dois paralelogramos são congruentes... então tá OK.

- **Pesquisadora:** Calma, eu te dei dois paralelogramos e disse que eles têm a mesma área e têm essa mesma base. Eles são equidecomponíveis?

Notamos nas falas do sujeito 1, uma frequente necessidade de medir. As estratégias que ele toma estavam ligadas à ideia de medir lados ou ângulos. Tal fato reforça as considerações, feitas anteriormente nesta dissertação, com respeito à persistência dos sujeitos em recorrer às medições propiciadas pelo *software*.

Além disso, percebemos que a fórmula da área é um conhecimento adquirido pelo sujeito 1, como havíamos previsto em nossa análise *a priori*.

Em razão das últimas falas do sujeito apresentada acima, em que ele diz ter “provado” que os dois paralelogramos têm a mesma área, foi preciso retomar a ideia inicial da argumentação, pois não era isso que se pretendia comprovar na atividade. Para tal, usamos o quadro branco e explicamos que, inicialmente, havia dois polígonos de mesma área, que eram cheios de “pontas” e que, apesar disso, queríamos mostrar que eram, de fato, equidecomponíveis. Relembramos que, para isso, uma das regiões poligonais foi decomposta em vários triângulos, mas que ficou bem difícil encaixá-los para montar a outra região. Dissemos, também, que a atividade 6 continha a sugestão de recorrermos a um terceiro polígono – um retângulo – criado a partir dos triângulos, com o objetivo de usar a transitividade da equidecomposição para comprovar que os dois polígonos originais eram equidecomponíveis. Visando criar esse retângulo, buscamos construir, para cada triângulo que faz parte da decomposição de um dos polígonos originais, um retângulo equidecomposto a esse triângulo. Construído dessa forma, o retângulo teria a mesma área do triângulo de onde se originara. Mas surgia a dificuldade de que os vários retângulos assim obtidos poderiam ter bases distintas, o que nos impediria de compor com eles, por empilhamento, um único retângulo “maior”. Por isso, fomos levados a verificar se seria possível construir, a partir de um retângulo original qualquer, um retângulo

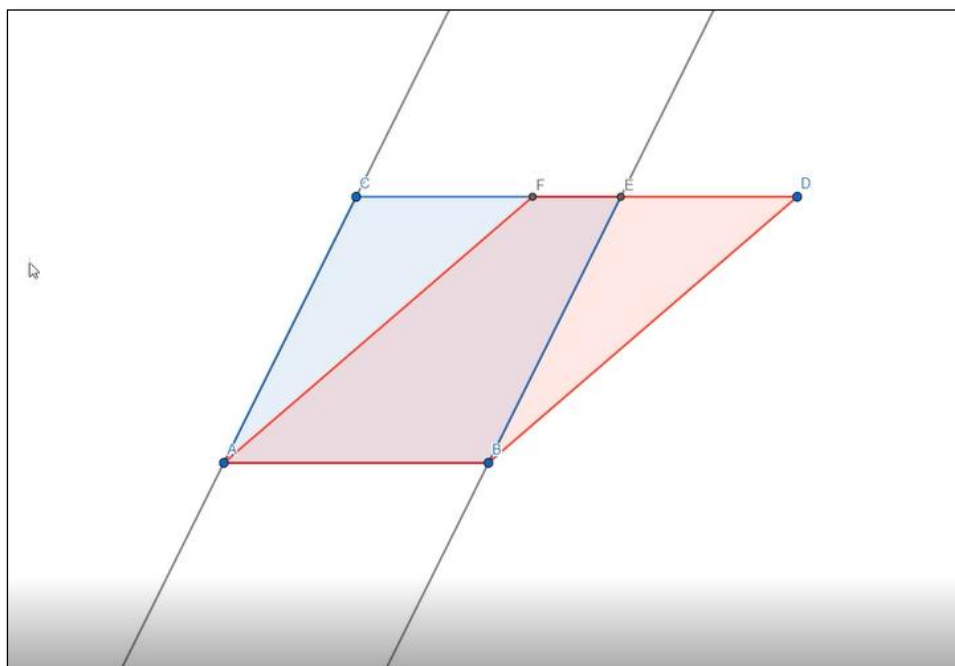
equidecomposto a ele, mas de base fixada. Foi nessa etapa que fomos conduzidos a buscar comprovar que dois paralelogramos de mesma base e mesma área são equidecomponíveis. Portanto, dissemos, os paralelogramos têm mesma por hipótese e que precisamos verificar é se são equidecomponíveis.

Podemos ler a seguir uma parte de como essa discussão prosseguiu:

- **Sujeito 1:** É dizer que eles têm.. que eles podem ser equidecomponíveis.
- **Pesquisadora:** Isso, ou seja, que eu posso pegar...
- **Sujeito 1:** Essa parte aqui, **FEBA**., ela é uma interseção entre o paralelogramo **CABE** e **FABG**.
- [...]
- **Pesquisadora:** Ou seja, essa parte aí já é equidecomponível... certo?
- **Sujeito 1:** Equidecomponível... então o que eu preciso mostrar é que **FCA**, que é o triângulo azul, pode ser colocado no mesmo espaço que **DEB**, certo?
- **Pesquisadora:** Isso. Que matematicamente falando, isso quer dizer o quê?
- **Sujeito 1:** Que eles são congruentes. O primeiro passo eu já sei que é $\overline{EB}$ é congruente de $\overline{CA}$, porque eles fazem parte do mesmo paralelogramo. Certo? $\overline{DB}$ ele é congruente a $\overline{FA}$ porque também fazem parte do mesmo paralelogramo que nesse caso é o vermelho.
- [...]
- **Sujeito 1:** Agora... deixa eu ver aqui. O que eu podia fazer... com o triângulo... quando ele é congruente ao outro, eu posso fazer tipo lado – lado – lado, que são lados iguais, lado – ângulo - lado. Então a ideia era conseguir saber se o ângulo **EBD** é congruente ao ângulo **CAF**
- **Pesquisadora:** Ou?
- **Sujeito 1:** Ou lado, lado, ângulo oposto.
- [...]
- **Pesquisadora:** São três maneiras então?
- **Sujeito 1:** Sim.
- **Pesquisadora:** Isso. Qual que tá mais fácil de descobrir.
- [...]
- **Sujeito 1:** Lado, lado, lado é o que a gente quer saber, então a gente não pode usar essa definição
- **Pesquisadora:** É o que a gente quer saber?
- **Sujeito 1:** É, porque se a gente conseguir descobrir que eles são congruentes, a gente vai ter certeza que lado-lado-lado, então, é **D**...
- **Pesquisadora:** Não, se a gente conseguir mostrar que esses lados são congruentes, então... a gente vai descobrir que é um triângulo são. Né isso?
- **Sujeito 1:** Não, eu tô pensando ao contrário. Tô pensado que tipo, eu quero descobrir que esses triângulos são congruentes por uma das duas formas e dessa forma eu vou ter certeza que aqui o lado é congruente.
- **Pesquisadora:** Ah tô entendendo, mas será que não teria uma outra forma de descobrir?

Depois disso, o sujeito prolonga as retas suportes dos lados **AC** e **BE** como mostra a imagem a seguir:

Figura 108: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1



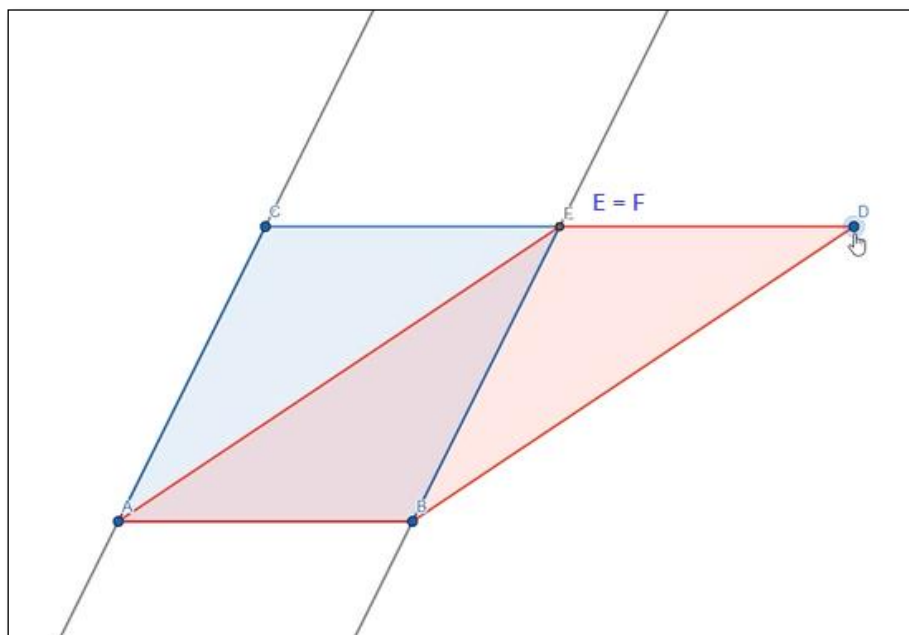
Fonte: Registro próprio (2019)

A intenção do sujeito foi mostrar que os ângulos $\widehat{ACF}$ e $\widehat{BED}$ eram iguais e, portanto, pelo caso LLA (lado, lado, ângulo oposto) o triângulo azul ACF e o vermelho BED eram congruentes. E dessa forma, pela proposição LLL (lado, lado, lado) os segmentos $\overline{CF}$ e $\overline{ED}$ eram congruentes. Em seguida, ele argumenta que:

- **Sujeito 1:** Dessa forma, triângulo azulzinho aqui, que é o ACF , ele é equidecomponível ao triângulo BED .
- **Pesquisadora:** Pronto.
- **Sujeito 1:** Pronto.

Concluído este caso solicitamos ao sujeito para abordar o caso 1, movendo a construção pelo ponto D , como podemos analisar na imagem abaixo:

Figura 109: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1 (continuação)



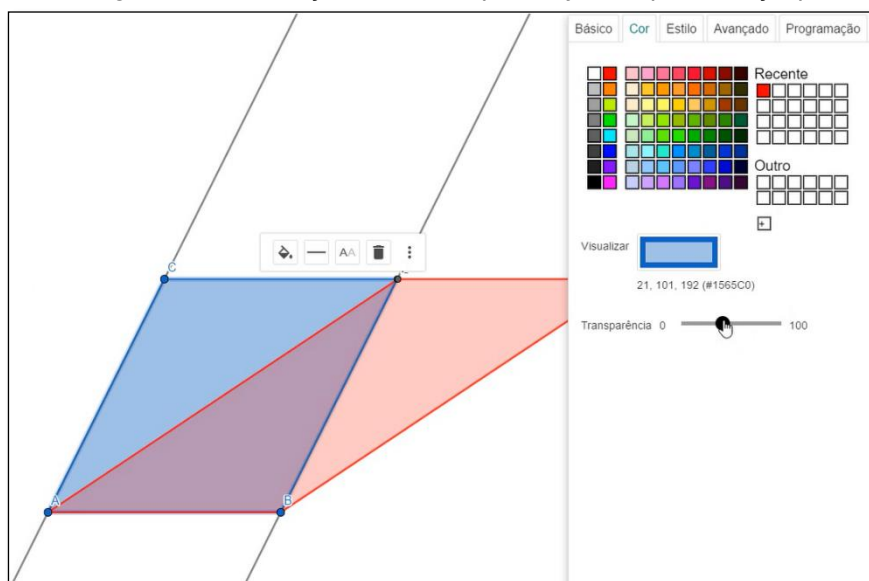
Fonte: Registro próprio (2019)

Pelo diálogo a seguir, podemos entender como foi provado também este caso:

- **Pesquisadora:** O que é que acontece se a gente fizer isso aqui? – fala ao movimentar o ponto D obtendo a imagem acima
- **Pesquisadora:** [...] antes a gente tinha os dois paralelogramos com a mesma área, com a mesma base e um segmento em comum $\overline{EF}$. Agora a gente só tem um ponto em comum com os dois, isso é, o ponto E aí?
- **Sujeito 1:** Certo. Nesse caso você quer comprovar que o triângulo ACE é equidecomponível ao triângulo BED , certo?
- **Pesquisadora:** Isso.
- **Sujeito 1:** Temos aqui que pela mesma relação que a medida do lado $\overline{AE}$ é igual à de $\overline{BD}$, então o lado $\overline{AE}$ é congruente a $\overline{BD}$, assim como $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BE}$, que fazem parte do triângulo azul. Que foi a mesma relação do triângulo da questão anterior. Certo?
- **Pesquisadora:** Na questão anterior você usou ângulo também, nessa você vai usar também? Ou não?
- **Sujeito 1:** O E ele é um ponto médio entre C e D ou não? Tá definindo não né?
- **Pesquisadora:** Não está definido, mas olhe direitinho.

O sujeito 1 encontra dificuldade de visualizar os lados dos paralelogramos e leva um tempo até concluir que $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{ED}$. Para ajudar na visualização escurecemos a cor dos paralelogramos, como vemos na figura 110, abaixo:

Figura 110: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1 (continuação)



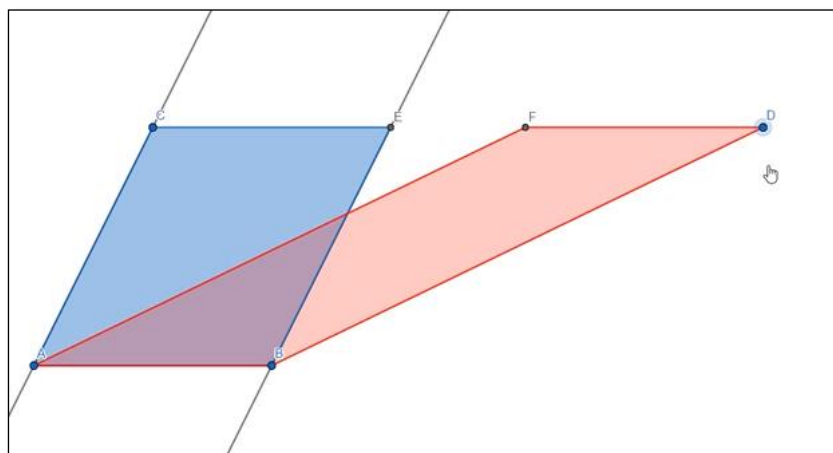
Fonte: Registro próprio (2019)

O diálogo continua:

- **Sujeito 1:** [...] $\overline{BD}$ é igual $\overline{AE}$. Falta descobrir que...
- **Pesquisadora:** Quem mais é igual aí?
- **Sujeito 1:** O $\overline{CE}$, ele é realmente congruente a $\overline{ED}$. Porque o $\overline{AB}$ ele é congruente a $\overline{ED}$, mas também o $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CE}$. Então, $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{ED}$.
- **Pesquisadora:** Isso mesmo. Foi mais fácil né?
- **Sujeito 1:** É verdade. Por lado, lado, lado esses dois triângulos são congruentes, são equidecomponíveis. Verdade, esse é mais fácil do que o outro.
- **Pesquisadora:** É. Esse é mais fácil do que o outro. E o que acontece se a gente fizer assim agora?

Mais uma vez, concluído esse caso, movemos a construção pelo ponto **D** para provar o caso 3 como podemos analisar na imagem abaixo:

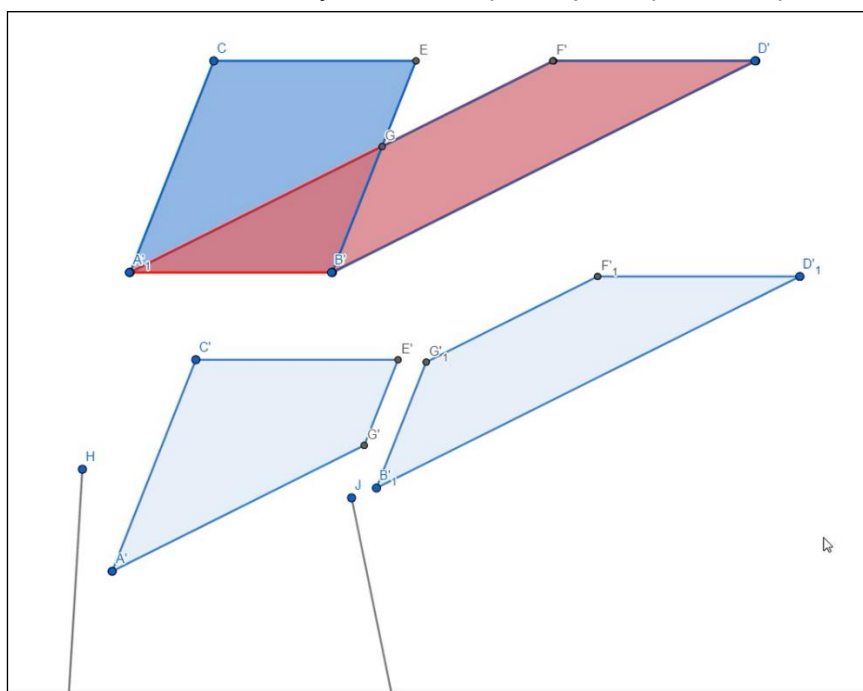
Figura 111: Apresentação do caso 3 ao sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

O sujeito teve liberdade para usar as ferramentas e escolher como utilizá-las. Ele começou explicando que, agora, são dois quadriláteros e acha que deve dividi-los em triângulos. Ele começou marcando um ponto de interseção G entre os lados $\overline{AF}$ e $\overline{BE}$. Depois, ele translada os quadriláteros $ACEG$ e $BGFD$ e tenta trabalhar com apenas essas partes. Então, explicamos que, dessa forma, ele acabaria voltando para questão inicial, em que eram dados dois polígonos quaisquer de mesma área e queríamos provar que eles eram são equidecomponíveis. Podemos observar na Figura 112, a seguir, como ficou essa construção:

Figura 112: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 1)

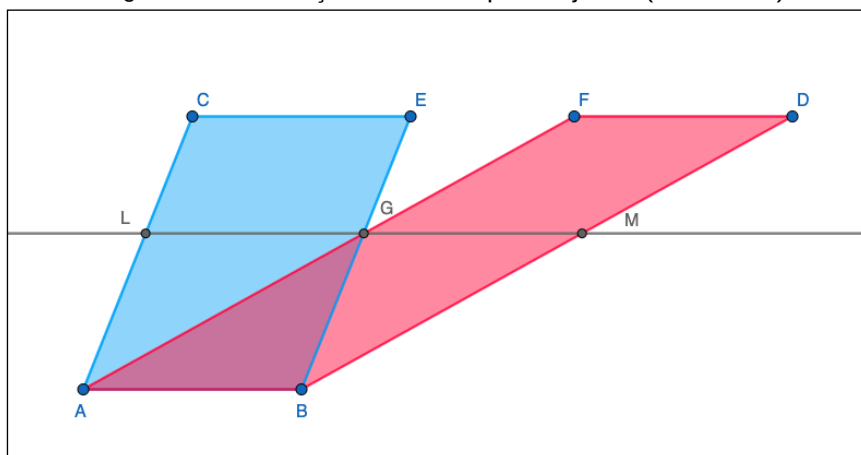


Fonte: Registro próprio (2019)

Nessa ocasião, o sujeito 1 é orientado a utilizar resultados que foram comprovados nas questões anteriores. Fomos ao quadro e, em tópicos, relembramos todos os pontos, incluindo os casos 1 e 2 validado na mesma sessão.

O sujeito 1 apagou o havia feito, traçou uma reta paralela à base comum aos paralelogramos, passando pelo ponto G . Vejamos a seguir:

Figura 113: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 2)



Fonte: Registro próprio (2019)

Ele explica que o lado $\overline{AL}$ é congruente ao lado $\overline{BG}$ porque eles fazem parte do mesmo paralelogramo $LABG$. De acordo com a transcrição a seguir, ele explica ainda que:

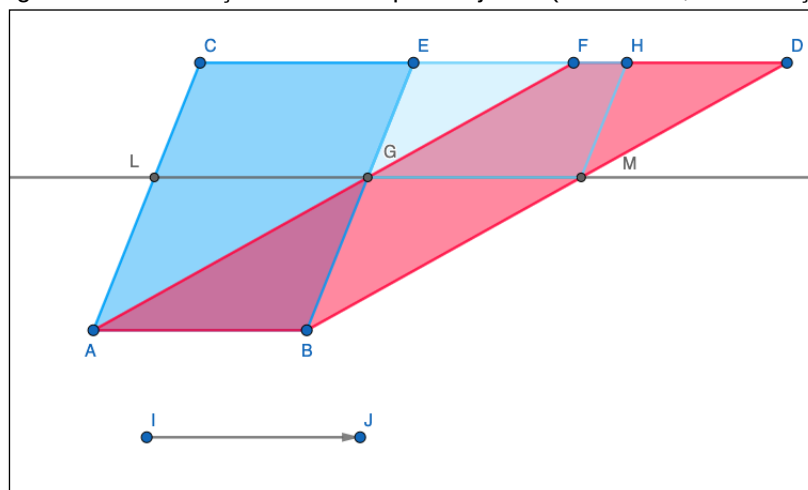
- **Sujeito 1:** Agora eu quero provar o quê? Que $CLGE$ é congruente a $FGMD$.
- **Pesquisadora:** E o que a gente sabe deles?
- **Sujeito 1:** Que são dois paralelogramos.
- **Pesquisadora:** A gente sabe o que mais sobre eles?
- **Sujeito 1:** Que os dois... eles têm os lados... as bases iguais.
- **Pesquisadora:** O quê mais?
- **Sujeito 1:** [...] $\overline{FD}$ ele está no mesmo paralelogramo de $\overline{AB}$. E é paralelo a $\overline{GM}$, então $\overline{GM}$ também é congruente a $\overline{AB}$. Dessa forma $\overline{GM}$ é congruente a $\overline{LG}$. Assim, como $\overline{FD}$ é congruente a $\overline{CE}$ também pelo fato deles terem em comum o lado oposto $\overline{AB}$. Então, $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{FD}$. Ou seja, as bases de ambos são congruentes. O que precisa comprovar é que... é em relação a esse lado aqui. Porque eu não quero provar que as áreas são iguais porque é elas já são.

Como vemos, diferentemente do que ocorreu no início, o sujeito 1 afirmou que a área já é conhecida e que esse não é o resultado que ele buscava, mostrando um avanço na compreensão do problema. Ainda assim, o sujeito 1 não conseguiu prosseguir, tendo ocorrido uma intervenção nossa sugerindo que ele fizesse uma nova construção de modo a aparecer um dos casos já validados da questão visada. Vejamos esta parte do diálogo:

- **Pesquisadora:** Mas a gente poderia pegar eles e desenhar de outra forma que ele recaia em um desses outros casos?
- **Sujeito 1:** Eu poderia transpor isso aqui...Posso quebrar eles agora? Vou usar o polígono, quebrar os dois ângulos, na verdade, e quando eu quebrar, eu vou colocar um do lado do outro.

Essa construção ficou da seguinte forma:

Figura 114: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1(tentativa 2, continuação)



Fonte: Registro próprio (2019)

Como se depreende da figura 114, o sujeito 1 realizou uma translação do paralelogramo $LGCE$, obtendo o paralelogramo $GMEH$. Ele afirmou, então, que $GMEH$ e $GMFD$ eram equidecomponíveis porque estavam em uma posição relativa já comprovada no caso 2, com segmento de reta $\overline{FH}$ comum aos lados superiores $\overline{EH}$ e $\overline{FD}$. Por transitividade, $LGCE$ e $GMFD$ eram equidecomponíveis e, pelo caso 1, $ABLG$ e $ABGM$ eram equidecomponíveis e consequentemente, $ABCE$ e $ABFD$ resultavam equidecomponíveis, que era a validação buscada.

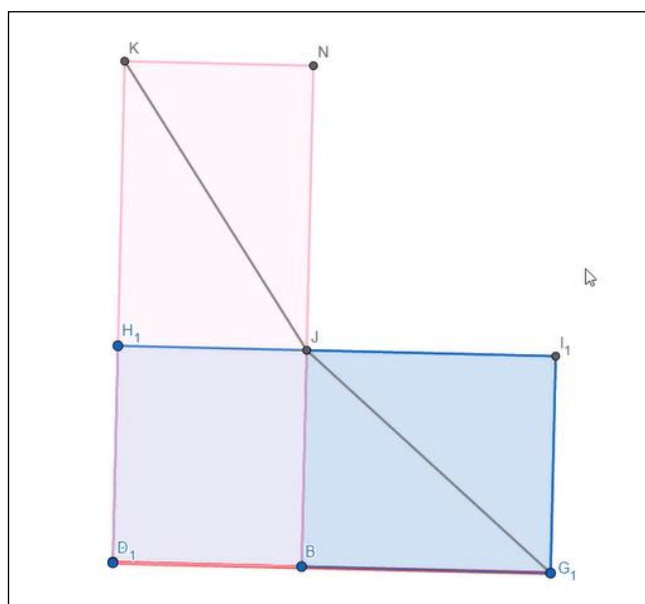
Como comentamos anteriormente na resolução da atividade pelo sujeito 2, seria necessário recorrermos ao axioma de Arquimedes para que o procedimento acima empregado pelo sujeito 1 pudesse ser formalizado do ponto de vista lógico-matemático. Seria preciso ter a garantia de que, transladando um número finito de vezes o paralelogramo $LGCE$, poderíamos “atingir” o paralelogramo $ABFD$. Como sabemos, para obter isso, necessitaríamos empregar o axioma de Arquimedes.

Do mesmo modo que atuamos como sujeito 2, após a conclusão da atividade complementar, retomamos o item (b) da atividade 6, em diálogo com o sujeito 1, visando aos objetivos mencionados anteriormente, quando tratamos desta fase no caso do sujeito 2.

Ao iniciar a finalização da atividade 6, recordamos até que ponto havíamos atingido na sessão anterior. Fizemos uma intervenção para retomar os três casos propostos para a resolução do item (b) da atividade 6.

No caso 3, o sujeito começou traçando alguns segmentos a fim de decompor os retângulos, como feito na sessão anterior, em triângulos. Logo o sujeito afirmou que os triângulos formados são bem distintos como mostra a figura 115, adiante.

Figura 115: Resolução do caso 3 dos retângulos de mesma área pelo sujeito 1



Fonte: Registro próprio (2019)

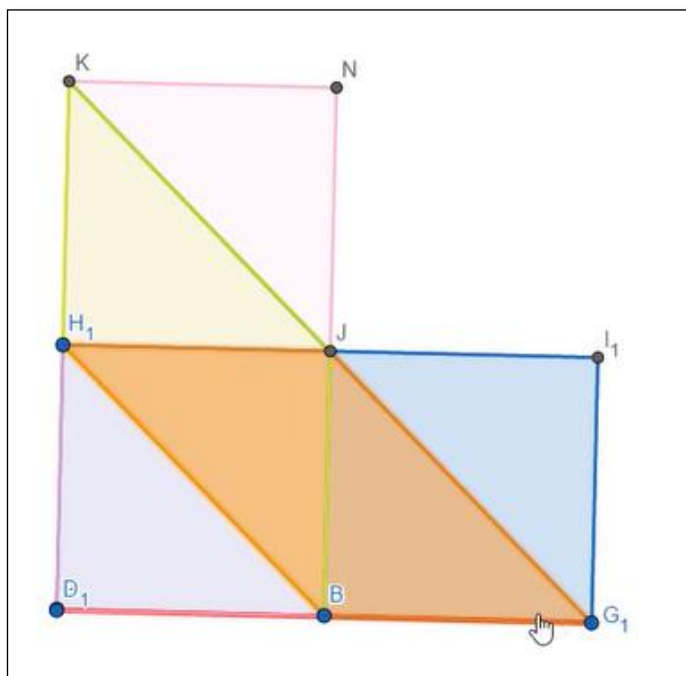
Ele imaginou uma maneira de decompor os retângulos rosa H_1KNJ e azul BJI_1G_1 . E fez algumas perguntas, transcritas a seguir, e nelas notamos, novamente, a tendência em medir:

- **Sujeito 1:** Visivelmente dá para ver que eles não têm a mesma altura. Então, eu sei que as bases são diferentes também. Eu separei em dois triângulos para ajudar de alguma forma, mas [...] A ideia seria transformar esse retângulo rosa H_1KNJ em dois triângulos. Se eu transformar esse retângulo... no mesmo retângulo que esse azul seria... aí seria o certo. Ajudaria?
- **Pesquisadora:** É... ajudaria, só que é justamente esse problema que a gente quer resolver, né? No final das contas.
- **Sujeito 1:** Ah é verdade. Daí isso seria andar em círculos, né? Entendi. Certo, certo. Tem como eu saber qual a medida disso aqui? Quanto vale esse JB?
- **Pesquisadora:** Deixa eu fazer assim... e aí como você faria?

Fizemos uma intervenção, retomando o **caso 1** ($\overline{D_1H_1} = \frac{1}{2} \overline{D_1K}$) com o objetivo de tornar a estratégia de medir irrelevante e de ajudar o sujeito 1 no

prosseguimento da resolução da atividade, uma vez que ele já havia resolvido esse caso na sessão anterior. O sujeito 1 traçou dois segmentos $\overline{KG_1}$ e $\overline{H_1B}$, fazendo surgir os dois paralelogramos a seguir:

Figura 116: Retornando ao caso 1



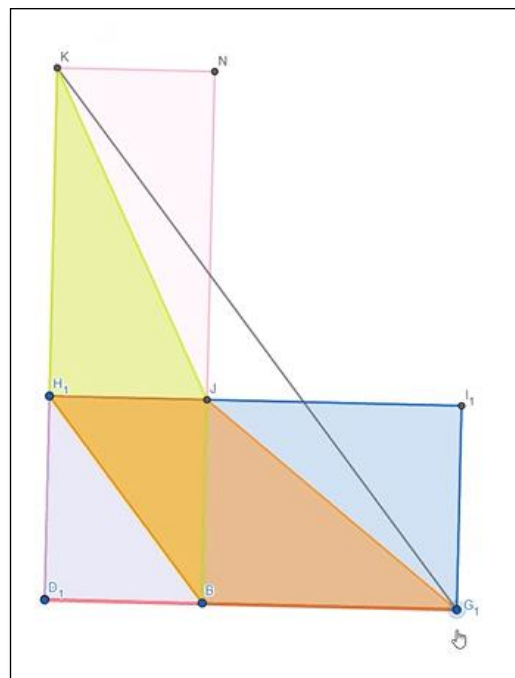
Fonte: Registro próprio (2019)

Ele consegue identificar que o que já havia comprovado na sessão anterior:

- **Sujeito 1:** Dessa forma aqui, eu sei que pelas coisas que a gente tinha feito antes. Eu sei que esse triângulo H_1JB é comum a ambos. E que KH_1J tem que ser congruente a JBG_1 [...]. E como esse triângulo KH_1J é congruente a esse KNJ e esse JBG_1 é congruente a esse JI_1G_1 , então, os quatro triângulos são congruentes, ou seja, os dois retângulos são congruentes, KH_1JN é congruente a JBG_1I_1 . Pronto.
- **Pesquisadora:** Isso.

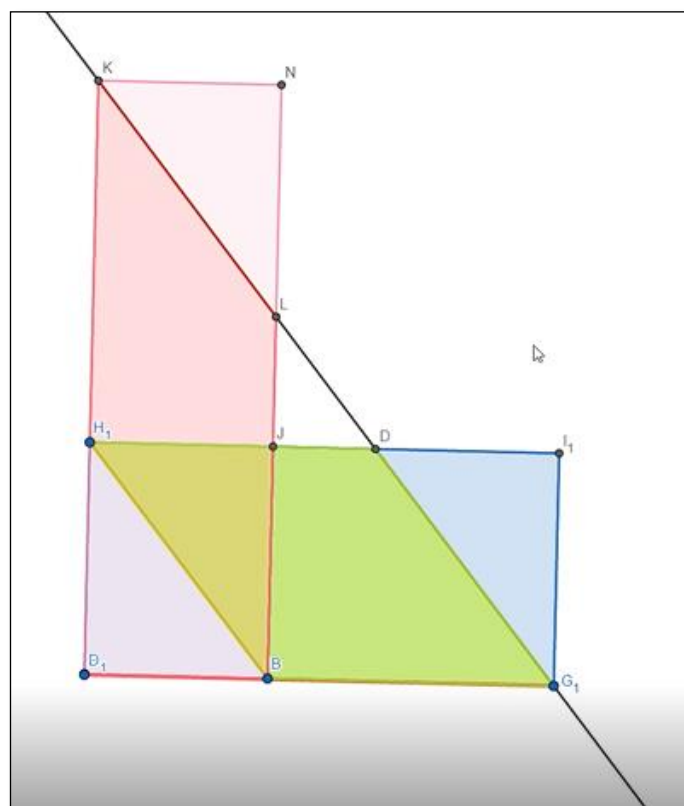
Terminado esse caso, voltamos para o **caso 3** ($\overline{D_1H_1} < \frac{1}{2} \overline{D_1K}$). O segmento de reta $\overline{KG_1}$ já não passava mais pelo ponto J . O sujeito 1 construiu, então, os segmentos de reta $\overline{KJ}$ e $\overline{JG_1}$, que deram origem a dois quadriláteros que, visualmente, não foram identificados com paralelogramos, o que levou a sujeito 1 a abandonar esse caminho, apagando esses quadriláteros. Observemos as figuras 117 e 118:

Figura 117: Retornando ao caso 3



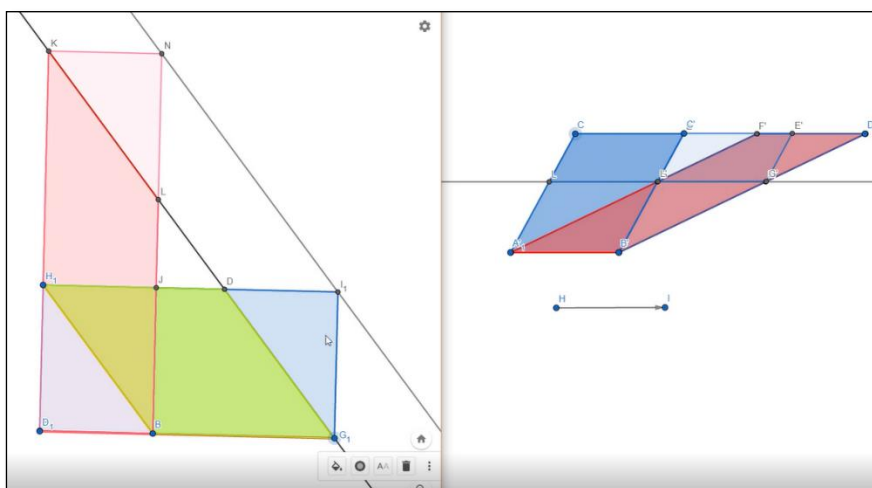
Fonte: Registro próprio (2019)

Figura 118: Resolução do caso 3 pelo sujeito 1 (tentativa 2)



Fonte: Registro próprio (2019)

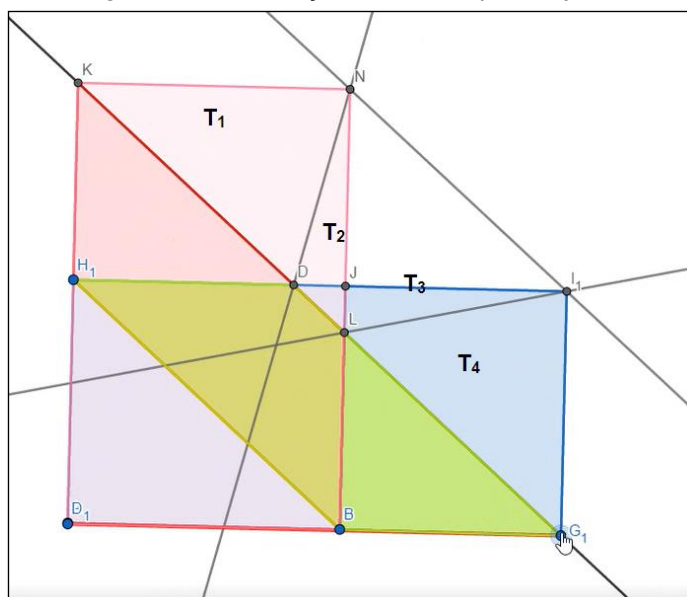
Figura 120: Retomando o problema, nova visualização



Fonte: Registro próprio (2019)

Feito isto, o sujeito 1 foi solicitado a resolver o **caso 2** ($\overline{D_1H_1} > \frac{1}{2} \overline{D_1K}$), mostrado na figura 121:

Figura 121: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1



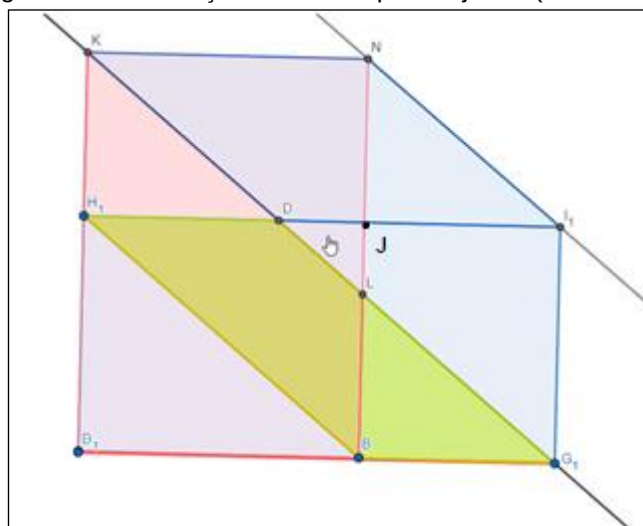
Fonte: Registro próprio (2019)

Diante da configuração correspondente a esse caso, o sujeito 1, inicialmente, traçou duas retas, como mostramos na figura 121. Em seguida, procurou argumentar que os triângulos rosa, KNL , e azul, DI_1G_1 , eram, realmente, congruentes. Para isso, ele traçou dois quadriláteros, DI_1KN e LG_1NI_1 , que ele tomou como dois paralelogramos de mesma base, $\overline{NI_1}$,

apoiando-se na percepção visual (vejamos a figura 121). Disso, decorria, que os segmentos $\overline{KN}$ e $\overline{DI_1}$ eram congruentes, como lados opostos de um paralelogramo e os segmentos $\overline{NL}$ e $\overline{I_1G_1}$ eram congruentes, pelo mesmo argumento. Os triângulos KNL e DI_1G_1 eram, então, congruentes (LAL).

Em seguida, o sujeito prefere apagar as duas retas que havia construído em sua primeira tentativa e recomeça a questão. Repete o procedimento do caso anterior apoiando-se nos dois quadriláteros DI_1KN e LG_1NI_1 , que ele tomou como dois paralelogramos de mesma base, $\overline{NI_1}$, apoiado, novamente, na percepção visual, como podemos observar a seguir:

Figura 122: Resolução do caso 2 pelo sujeito 1(continuação)



Fonte: Registro próprio (2019)

Tal argumento o conduz a concluir que os triângulos KNL e DI_1G_1 são congruentes. E como isso, é possível comprovar que os trapézios $DJKN$ e LG_1JI_1 são congruentes, o que permite completar a argumentação de que os dois retângulos $D_1G_1H_1I_1$ e D_1BKN são equidecomponíveis.

Para finalizar, fizemos uma retrospectiva das atividades realizadas, procurando cumprir a etapa de institucionalização.

Como dito anteriormente essa etapa não havia sido prevista na análise *a priori* e por isso precisou, para fins de conclusão, ser realizada com cada sujeito separadamente. Apesar disso, cada sessão ocorreu de forma satisfatória e durou cerca de duas horas e meia.

7.4 Resumo da análise a posteriori

Nesta seção, iniciamos com a apresentação dos quadros resumo da análise *a posteriori* das atividades.

Uma observação preliminar é que, exceto pela atividade 3, todas as demais são atividades propostas para serem resolvidas com o emprego do *software GeoGebra-Geometry*. Dessa forma, no item “Descrição” das demais atividades deve-se subentender essa solicitação.

Tabela 1: Resumo nas análises das atividades 1 e 2

	ATIVIDADE 1		ATIVIDADE 2	
Descrição	- Triangularização de um polígono dado.		- Composição de um polígono com base na decomposição do polígono da atividade 1.	
Conteúdos	- Familiarização com o <i>GeoGebra-Geometria</i>. - Conceitos iniciais da geometria dos polígonos. - Conceito de triangularização de um polígono.		- Familiarização com o <i>GeoGebra-Geometria</i>. - Conceito de composição de um polígono.	
Rupturas na Aprendizagem	- Não previstos na análise <i>a priori</i> e não observados no experimento.		- Na análise <i>a priori</i> foi previsto um salto informacional envolvendo a definição de polígono. A observação dessa suposição foi prejudicada por falha no enunciado no qual foi escrito: “compor uma nova figura” e não “um novo polígono”.	
Comentários	- Ocorreram dificuldades na aprendizagem, relacionadas com o emprego do <i>software</i>, previstas na análise <i>a priori</i>.		- Foram observadas dificuldades na aprendizagem do emprego das ferramentas de isometrias no <i>software</i>, previstas na análise <i>a priori</i>. - Um dos sujeitos escolheu decomposições com números elevados de 8 e 9 triângulos. Por isso, teve muita dificuldade ao resolver a atividade. - Em face das dificuldades no uso das ferramentas de isometrias no <i>GeoGebra-Geometria</i> deveria ser previsto mais tempo para atividades do tipo analisado.	
Páginas	Capítulo 6: 94-96	Capítulo 7: 112-118	Capítulo 6: 96-98	Capítulo 7: 118-123

Tabela 2: Resumo nas análises das atividades 3 e 4

	ATIVIDADE 3		ATIVIDADE 4	
Descrição	- Questionário com três itens, para resposta por escrito.		- Comprovação da transitividade da relação de equidecomposição.	
Conteúdos	- (a) Equidecomposição como relação entre polígonos. - (b) Reflexividade da equidecomposição. - (c) Simetria da equidecomposição.		- Propriedade de transitividade da relação de equidecomposição.	
Rupturas na Aprendizagem	- Na análise <i>a priori</i>, foi previsto um obstáculo de origem didática na resolução do item (a): o conhecimento sobre igualdade de áreas resiste ao da equidecomposição. Na análise <i>a posteriori</i> a previsão foi confirmada. - As previsões, na análise <i>a priori</i>, de saltos informacionais na necessidade de comprovação da reflexividade e da simetria, não foram confirmadas no experimento. - Igualmente as rupturas previstas na própria comprovação, também não foram confirmadas, pois os sujeitos conseguiram resolver satisfatoriamente os itens (b) e (c) da atividade.		- Embora não previsto na análise <i>a priori</i>, para esta atividade, o obstáculo indicado na análise <i>a posteriori</i>, atividade 3, volta a ocorrer: a igualdade de área prevalece sobre a equidecomposição. - Na análise <i>a priori</i> foi prevista um salto informacional, por considerarmos a complexidade da demonstração apresentada no capítulo 4, em particular, a superposição de duas triangularizações de um mesmo polígono. A análise do experimento confirmou a previsão e, durante o processo de comprovação, houve várias intervenções nossas.	
Comentários	Nesta atividade, os sujeitos foram informados que não iriam utilizar o <i>GeoGebra-Geometria</i> , e que deveriam procurar construir argumentações escritas.		A existência de mais de uma triangularização do polígono “intermediário” foi citada por um dos sujeitos, o que foi um fato positivo.	
Páginas	Capítulo 6: 98-100	Capítulo 7: 124-127	Capítulo 6: 100-102	Capítulo 7: 127-134

Tabela 3: Resumo nas análises das atividades 5 e 6

	ATIVIDADE 5		ATIVIDADE 6	
Descrição	- Dados dois polígonos, é pedido validar: a) equidecomposição implica igualdade de áreas b) igualdade de áreas implica equidecomposição.		É pedida a validação de que: a) Todo triângulo é equidecomponível a um retângulo; b) Todo retângulo é equidecomponível a um retângulo de mesma área e base pré-fixada.	
Conteúdos	- Equivalência entre equidecomposição e igualdade de áreas.		- Proposições que são o núcleo de uma validação do Teorema de Bolyai.	
Rupturas na Aprendizagem	- Na análise <i>a priori</i> do item (b), previmos um obstáculo de origem didática para a aceitação da necessidade de validação desse item. A suposição confirmou-se apenas em um dos dois sujeitos. - Quanto à comprovação propriamente dita, foi previsto um salto informacional, que foi confirmado no experimento.		- Na análise <i>a priori</i> não previmos ruptura na aprendizagem na resolução do item (a). No entanto, no experimento, verificou-se que ocorreu um salto informacional, que requereu nossa intervenção. - Na análise <i>a priori</i> o item (b), foi previsto um salto informacional, confirmado na realização do experimento.	
Comentários	A suposição de que os sujeitos apresentariam uma comprovação da implicação do item (a) foi confirmada no experimento.		- Os sujeitos conseguiram resolver o item (a) com nossa intervenção. Alteramos o problema: iniciamos com um triângulo retângulo, que foi resolvido e, em seguida, propusemos o caso geral, também resolvido por eles.	
Páginas	Capítulo 6: 102-105	Capítulo 7: 134-146	Capítulo 6: 105-109	Capítulo 7: 146-160

Tabela 4: Resumo da atividade complementar

	ATIVIDADE COMPLEMENTAR	
Descrição	- Solicita-se a comprovação de que dois paralelogramos de mesma base e mesma área são equidecomponíveis	
Conteúdos	- Equidecomposição entre dois paralelogramos de mesma base e mesma área.	
Rupturas na Aprendizagem	- Na análise <i>a priori</i> da atividade previmos um salto informacional em face da complexidade da comprovação visada. Tal previsão confirmou-se na realização do experimento.	
Comentários	- Após a conclusão da atividade complementar, houve uma retomada do item (b) da atividade 6 e uma institucionalização do conhecimento sobre o Teorema de Bolyai.	
Páginas	Capítulo 6: 108-109	Capítulo 7: 162-188

Para finalizar o resumo da análise *a posteriori*, apresentamos um quadro com as durações das sessões do experimento didático.

Tabela 5: Resumo das sessões

SESSÕES DO EXPERIMENTO DIDÁTICO		
SESSÃO	DURAÇÃO PREVISTA	DURAÇÃO
Primeira	3h00	2h40
Segunda	3h00	3h30
Terceira – Sujeito 1	2h00	2h00
Terceira – Sujeito 2	2h00	2h30

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma visão retrospectiva deste trabalho deve começar por lembrar a motivação inicial dos tópicos matemáticos escolhidos. Tendo em conta a formação do professor de matemática, supúnhamos que seria relevante estudar a equidecomposição de regiões poligonais e o Teorema de Bolyai porque esses tópicos situavam-se na confluência de, pelo menos, três grandes temas da geometria da escola básica: a geometria dos polígonos, o conceito de equidecomposição de polígonos e o conceito de área de figuras geométricas planas. Esses temas perpassam a matemática escolar básica e seria fundamental que o futuro professor tivesse a oportunidade de estudá-los de um ponto de vista que o permitisse integrar a variedade de ideias matemáticas, ao mesmo tempo em que compreendesse melhor os fenômenos didáticos que surgiriam quando procurasse ensinar com a preocupação central na aprendizagem dos alunos.

Cada um dos temas mencionados acima é bastante rico em subtemas e seria impossível abordá-los em toda a sua extensão e profundidade em um único trabalho acadêmico. Fizemos, então, nossas escolhas, nas vertentes matemáticas e nas da didática da matemática.

Na matemática, concentramos nossa atenção no conceito de equidecomposição de polígonos e no Teorema de Bolyai. Procuramos, neles, escolher algum tópico relevante, mas de acesso mais difícil aos que lidam com o ensino da matemática escolar. Um exemplo é o tratamento matemático detalhado da equidecomposição como uma relação de equivalência no conjunto dos polígonos. Nossas referências bibliográficas mostram que há vários trabalhos sobre esse tópico. No entanto, a prova pormenorizada da transitividade da relação de equidecomposição, ao nosso conhecimento, só é disponível em língua inglesa, como em Hartshorne (2000). Quanto à prova do Teorema de Bolyai, podemos dizer que o nível de detalhamento que propusemos neste estudo não é frequente na literatura mais acessível ao professor da escola básica e aos licenciandos em matemática.

Simultaneamente, no campo da didática da matemática escolhemos recortes na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e adotamos parte da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. No que tange ao campo

teórico da didática, escolhemos investigar os fenômenos que esse pesquisador francês denomina de **rupturas na aprendizagem**. Entre essas rupturas, variadas e de complexa tipificação, focalizamos naquelas classificadas como **saltos informacionais e obstáculos**.

Os quadros resumos que finalizam o capítulo 7 desta dissertação permitem uma visão panorâmica dessas rupturas, tanto as que foram alvo de suposições em nossa análise *a priori*, quanto as que foram observadas na análise *a posteriori*.

No campo da didática da matemática, apresentamos, a seguir, um sumário das observações que consideramos como resultados do experimento.

Em cinco momentos, ao longo da realização da sequência didática, pudemos observar rupturas da aprendizagem que propusemos tipificar como **saltos informacionais**: situações de dificuldades na aprendizagem decorrentes de aumento da complexidade do problema proposto, que criam barreiras ao trabalho autônomo do sujeito da investigação. Nesses casos, para que o sujeito pudesse continuar suas tentativas de resolução, fizemos intervenções, nas quais reformulamos o meio proposto, permitindo a continuidade da sequência. Exceto em um caso, no item (a) da atividade 6, essas intervenções foram previstas em nossa análise *a priori*. Tais momentos foram: a) na atividade 4, na transitividade da equidecomposição; b) na atividade 5, item (b), na elaboração da comprovação do Teorema de Bolyai: igualdade de área implica equidecomposição; c) na atividade 6, item (a) a proposição: todo triângulo é equidecomponível a um retângulo; d) na atividade 6, item (b) a proposição: todo retângulo é equidecomponível a um retângulo de mesma área e base pré-fixada; e) na atividade complementar: dois paralelogramos de mesma base e mesma área são equidecomponíveis.

Além desses, observamos três momentos nos quais propomos ter havido **obstáculos de origem didática**: a) na atividade 3, em que o conhecimento sobre a igualdade de áreas resiste ao novo conhecimento da equidecomposição; b) na atividade 4, na comprovação da transitividade da equidecomposição, verificamos a persistência do obstáculo anterior, aliás, não previsto em nossa análise *a priori*; c) na atividade 5, item (b), verificado em um dos sujeitos, quando incorre no equívoco: se uma proposição é verdadeira, sua recíproca também é verdadeira.

Convém que apresentemos, também, uma consideração de caráter geral sobre o uso do *software GeoGebra-Geometria*, advertindo que esse emprego não foi objeto de nossa investigação. O que observamos é que o emprego do *software* favorece as operações de decomposição dos polígonos e o transporte dos polígonos da decomposição por intermédio de isometrias. No entanto, na operação de recomposição das partes em novo polígono surgem, de fato, dificuldades que prejudicam bastante a realização das “colagens” necessárias. Levando em conta tais dificuldades, seria indicado, em próximas investigações do tipo que realizamos, reservar uma fase de maior duração para a familiarização dos sujeitos com o *GeoGebra-Geometria*. Alternativamente, poderiam ser experimentados outros *softwares* mais apropriados para as operações de decomposição e recomposição de regiões poligonais.

Numa avaliação global, consideramos que este estudo – incluída sua parte experimental – permite-nos reafirmar a validade de nossa motivação inicial sobre a relevância do tema escolhido. De fato, houve engajamento significativo dos sujeitos nas resoluções das atividades e nelas foram mobilizados vários conhecimentos nos três temas da geometria mencionados no início destas considerações finais.

Além disso, tanto as análises preliminares quanto as realizadas no decorrer e após o experimento, nos permitiram um entendimento mais aprofundado dos conceitos relativos à equidecomposição de regiões poligonais e do Teorema de Bolyai, bem como do processo de validação das proposições matemáticas pertinentes. Simultaneamente, tais análises favoreceram o conhecimento dos fenômenos didáticos referentes às dificuldades na aprendizagem observadas nos licenciandos que participaram do estudo.

No terreno das sugestões para futuros estudos, avaliamos que o tempo destinado ao estudo da equidecomposição, em especial da transitividade dessa relação de equivalência entre polígonos, foi excessivo em face do que foi previsto para as demais etapas da sequência didática. Esse fato, em parte, foi responsável por termos estendido por mais uma sessão o experimento planejado originalmente. Em que pese a importância matemática da justificativa da transitividade da citada relação de equivalência, propomos que ela seja admitida como verdadeira para o prosseguimento da sequência em direção às etapas da validação do Teorema de Bolyai. Afinal, nessa prova, a transitividade é essencial,

mas é evidente em face da particularidade das equidecomposições nela envolvidas. Outra alternativa seria planejar uma sequência didática específica para o estudo da equidecomposição de regiões poligonais e outra para o do Teorema de Bolyai.

9. REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherche em Didactique des Mathématiques, Vol. 9, nº3, pp. 281-308, 1988

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática. Investigações em didática da Matemática. Vol 2, Recife, 2017. <https://goo.gl/ZC3DL2>

BOLTIANSKI, V. G. Lecciones populares de Matemáticas. Figuras equivalentes y equicompuestas. Moscú: Mir, 1981.

BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRASIL: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 248 p. il. (Coleção Explorando o Ensino; v. 17)

CORRÊA, L. P. R., **Teorema da Galeria de Arte e Triangularização de Polígonos e Pontos no Plano**, UME/USP, cópia PDF acessível, em 19/04/2019, em:

<https://www.ime.usp.br/.../14%20Lucas%20Piva%20Rocha%20Cor>

DOUADY, R.; GLORIAN, M. J. P. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, Netherlands, v. 20, n 4, p. 387-424, 1989. Tradução não publicada produzida pelo grupo Pró-grandezas, sob a coordenação da professora Paula Baltar.

FACCO, Sônia Regina. **Conceito de área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

FERNANDES, F. M., **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**, Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT, Curitiba, 2018.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão. **A construção do conceito de área e da relação de área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2010.

GREENBERG, A. J., **Euclidean non-Euclidean Geometry**, W.H. Freeman and Company, New York, 2007.

HARTSHORNE, R., **Geometry: Euclid and Beyond**, Springer, Berkely, USA, 2000.

LIMA, E. L., **Curso de Análise**, Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1976.

LIMA, E. L. , Conceitos e controvérsias – polígonos equidecomponíveis, 1985. Disponível em <<http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm>>. Acesso em: 06 de junho de 2019.

LIMA, E. L., **Isometrias**, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1996.

LIMA, P. F., Considerações sobre o conceito de área, in: **Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática, Livro de Resumos**, p.49 a p.57, Recife, 1995.

MACHADO, S.D.A. et al Engenharia Didática. In: **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MOISE, E., **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, USA, 1963.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2 ed – Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PESSOA, Gracivane da Silva. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo de área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2010.

SECCO, Anderson. **Conceito de área**: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas. (Mestrado Profissional) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

SILVA, Anderson Douglas Pereira Rodrigues da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica**: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental. (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2016