



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ARTHUR CARNEIRO LEÃO MACHADO

**MODELO ARMA ESPACIAL LOG-SIMÉTRICO PARA EXTRAÇÃO DE
ATRIBUTOS EM IMAGENS SAR**

Recife

2024

ARTHUR CARNEIRO LEÃO MACHADO

**MODELO ARMA ESPACIAL LOG-SIMÉTRICO PARA EXTRAÇÃO DE
ATRIBUTOS EM IMAGENS SAR**

Trabalho apresentado ao Programa de pós-graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento

Coorientador: Francisco José de Azevedo Cysneiros

Recife

2024

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Luiza de Oliveira/CRB 1316

M149m Machado, Arthur Carneiro Leão
Modelo arma espacial log-simétrico para extração de atributos em imagens SAR /
Arthur Carneiro Leão Machado – 2024.
52 fls. il.

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.

Coorientador: Francisco José de Azevedo Cysneiros.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Programa de
Pós-Graduação em Estatística. Recife, 2024.

Inclui referências e apêndices.

1. Sensoriamento remoto . 2. Imagens SAR. 3. Log-simétrica. 4. 2-D LOGSYMARMA.
I. Nascimento, Abraão David Costa do. II. Cysneiros, Francisco José de Azevedo. III.
Título.

310

CDD (23. ed.)

UFPE - CCEN 2024 – 97

ARTHUR CARNEIRO LEÃO MACHADO

**MODELO ARMA ESPACIAL LOG-SIMÉTRICO PARA EXTRAÇÃO DE ATRIBUTOS EM
IMAGENS SAR**

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Estatística da Universidade Federal
de Pernambuco, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre em Estatística.

Aprovado em: 30 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco José de Azevedo Cysneiros
Presidente, UFPE

Prof. Dr. Fábio Mariano Bayer
Examinador Externo, UFSM

Prof. Dr. Francisco Alixandre Avila Rodrigues
Examinador Externo, UFCA

RESUMO

Resolver problemas de sensoriamento remoto (SR) é crucial para a sociedade quando se trata de dinâmica ambiental e climática, para citar apenas alguns exemplos. Uma fonte eficiente de SR é o uso de radar de abertura sintética (SAR) para descrever fenômenos naturais por meio de imagens. Esta dissertação adota um processamento de imagens considerando que os valores de intensidades associados a cada pixel de imagens SAR são possíveis realizações de variáveis aleatórias positivas. Em particular, a entrada de uma imagem SAR é estocástica, tendo argumento num espaço regular e descrevemos a natureza da intensidade SAR (que é uma característica estritamente positiva e assimétrica afetada pelo ruído *speckle*) usando uma nova proposta de modelo de regressão log-simétrica (LOGSYM) adaptado a duas dimensões, o modelo auto-regressivos de médias móveis 2-D LOGSYM (2-D LOGSYMARMA). Além de uma discussão sobre a relação física entre o modelo proposto e a intensidade do SAR, derivam-se algumas propriedades matemáticas do 2-D LOGSYMARMA: função escore e matriz informação de Fisher. Discutimos em detalhes a estimativa de máxima verossimilhança condicional (MVC) para os parâmetros do 2-D LOGSYMARMA. Realizamos um estudo de Monte Carlo para quantificar o desempenho das estimativas resultantes e verificar a velocidade de convergência ao que se espera assintoticamente dos estimadores de MVC. Por fim, realizamos uma aplicação a dados SAR reais. A flexibilidade do modelo proposto é avaliada para diferentes tipos de cenários, oceano, floresta e áreas urbanas. Os resultados de experimentos simulados e reais mostram que o modelo proposto nesta dissertação é uma ferramenta importante para extração de informações espaciais em imagens SAR.

Palavras-chave: sensoriamento remoto (SR); imagens SAR; log-simétrica; 2-D LOGSYMARMA.

ABSTRACT

Solving remote sensing (RS) problems is crucial for society when it comes to environmental and climate dynamics, to name just a few examples. An efficient RS source is the use of synthetic aperture radar (SAR) to describe natural and man-made phenomena through imagery. Our approach is to understand the data behind the SAR images as outcomes of random variables and then solve RS problems using statistics. In this thesis, we consider the input of a SAR image as a random variable in regular space and describe the nature of SAR intensity (which is a strictly positive and asymmetric feature that is affected by speckle noise) using a new proposal for a log-symmetric (LOGSYM) regression model adapted to two dimensions, the 2-D LOGSYM autoregressive moving-average (2-D LOGSYMARMA) model. Besides a discussion on the physical relationship between the proposed model and SAR intensity (mentioning that it can extend a commonly used model such as the lognormal law), we derive some mathematical properties of 2-D LOGSYMARMA: matrix-based score function and Fisher information. We discuss in detail the conditional maximum likelihood (CML) estimation for the 2-D LOGSYMARMA parameters. We perform a Monte Carlo study to quantify the performance of the resulting estimates and to verify that the asymptotic behavior expected from CML estimators is achieved. Finally, we perform an application to real SAR data where the models are applied using the versatility of the log-symmetric family for different types of contrasts, ocean, forest and urban areas. The results of both artificial and real experiments show that our model is an important tool for extracting spatial information in SAR images.

Keywords: remote sensing (RS); SAR images; log-symmetric; 2-D LOGSYMARMA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Simulações de contrastes utilizando o modelo com distribuição log-normal, sendo a) Oceano, b) Cidade.	11
Figura 2 – a) Imagem original da baía de São Francisco com as regiões destacadas. b) Região oceânica. c) Região de cidade	25
Figura 3 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-normal em contraste do tipo oceano.	33
Figura 4 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de oceano.	34
Figura 5 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-normal em região de cidade.	35
Figura 6 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de cidade.	36
Figura 7 – a) Imagem SAR da baía de São Francisco com canal de polarização associado a todos os canais da imagem. b) Imagem original da baía de São Francisco.	37
Figura 8 – Amostras da imagem principal da Baía de São Francisco, a) Oceano, b) Floresta e c) Cidade utilizando todos os canais da Imagem.	38
Figura 9 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2$ e região de oceano.	40
Figura 10 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2$ e região semelhante a uma floresta. . .	41
Figura 11 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders-t com $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ em região de cidade.	41
Figura 12 – Geração de imagens para cada tipo de região com base no melhor modelo, sendo a) Água, b) Floresta e c) Cidade.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Função de geração e função de peso para a família log-simétrica.	14
Tabela 2 – Estatísticas descritivas dos tipos de regiões presentes na imagem utilizando o canal HH da imagem SAR correspondente.	26
Tabela 3 – A estrutura espacial ARMA(1,0) escolhida para simulação para as regiões de oceano e cidade.	27
Tabela 4 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-normal em região de cidade.	28
Tabela 5 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de oceano.	29
Tabela 6 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-normal em região de cidade.	30
Tabela 7 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de cidade.	31
Tabela 8 – A estrutura espacial ARMA(1,1) escolhida para simulação para a região de oceano e cidade.	32
Tabela 9 – Qualidade do ajuste para a imagem SAR do tipo oceano de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.	38
Tabela 10 – Qualidade do ajuste para a imagem SAR do tipo floresta de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.	39
Tabela 11 – Qualidade de ajuste para a imagem SAR do tipo cidade de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.	39
Tabela 12 – Estimativas e erros padrão dos modelos selecionados para cada tipo de região.	42
Tabela 13 – Estatísticas descritivas para um canal das imagens geradas a partir das estimativas dos modelos finais.	42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	SUPORTE COMPUTACIONAL	11
1.2	ORGANIZAÇÃO	12
2	FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA E INTENSIDADE DE SAR	13
2.1	FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA	13
2.2	PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DA FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA	13
2.3	CONEXÃO COM OS FENÔMENOS FÍSICOS	15
3	MODELO 2-D LOGSYMARMA	17
3.1	ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA CONDICIONAL	19
3.2	MÉTODO DE ESTIMAÇÃO SCORING FISHER	22
3.3	RESÍDUOS COMPONENTE DO DESVIO	23
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	25
4.1	CENÁRIOS ESPACIAIS AUTORREGRESSIVOS	26
4.2	CENÁRIO ARMA	32
4.3	APLICAÇÃO EM DADOS REAIS	36
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45
	APÊNDICE A – FUNÇÃO DE LOG-VEROSSIMILHANÇA CON-	
	DICIONAL	48
	APÊNDICE B – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER CON-	
	DICIONAL	49

1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas de sensoriamento remoto (SR) é fundamental para a compreensão de questões ambientais, como processos de urbanização e climatologia (ENNOURI; SMAOUI; TRIKI, 2021). Entre as fontes de SR, os sistemas de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar-SAR*) têm sido muito utilizados por suas várias vantagens: (i) capacidade de penetração através de nuvens e condições atmosféricas terrestres adversas, (ii) sua operacionalidade independentemente da luz solar, tornando-o útil para monitoramento contínuo durante o dia e a noite, (iii) sua oferta de boa resolução espacial, permitindo a detecção de alvos menores (LEE; POTTIER, 2009). Os sistemas SAR utilizam iluminação coerente para adquirir seus dados e isso torna as imagens SAR suscetíveis a um padrão de interferência conhecido como *speckle* (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2009). O padrão *speckle* faz com que as mensurações dos componentes presentes em uma imagem SAR sejam não Gaussianos e tenham uma natureza multiplicativa.

Muitos dos problemas de imagens SAR foram resolvidos usando modelos baseados em dependência espacial para explicar o fenômeno. A representação paramétrica de campos aleatórios homogêneos bidimensionais também é frequentemente utilizada no processamento de imagens, como discutido por Bustos, Ojeda e Vallejos (2009); Kizilkaya e Kayran (2005); Ojeda, Vallejos e Bustos (2010); Bustos et al. (2009). Em particular, os modelos bidimensionais autoregressivos de médias móveis (2-D ARMA) são amplamente utilizados em diversas aplicações, incluindo modelagem (BUSTOS; OJEDA; VALLEJOS, 2009), compactação (NIJIM; STEARNS; MIKHAEL, 1996), codificação (CHUNG; KANEFSKY, 1992) e restauração de imagens (LIM, 1990). O modelo 2-D ARMA é uma extensão espacial do modelo autoregressivo unidimensional (1-D ARMA) Brockwell e Davis (2002) e é frequentemente usado na detecção de bordas (OJEDA; VALLEJOS; BUSTOS, 2010) e na análise estocástica de textura (HALL; GIANNAKIS, 1995). Assim, um dos objetivos desse trabalho é produzir ferramentas com potenciais de colaboração nestas duas direções, descrevendo campos homogêneos assistidos por modelos de regressão.

No contexto dos modelos de regressão, é comum encontrar dados que requerem uma variável resposta contínua, estritamente positiva e assimétrica. Para descrever este tipo de dados, um modelo de regressão baseado na distribuição log-simétrica proposto por Vane-gas e Paula (2015) provou ser muito útil quando se objetiva modelar a mediana e/ou assi-

metria (ou dispersão relativa) da distribuição da variável resposta em funções do conjunto de variáveis explicativas. A classe de distribuição log-simétrica contém algumas distribuições tais como a distribuição log-normal, log-Student-t, log-power-exponential, log-slash, log-hyperbolic, log-contaminated-normal, Birnbaum-Saunders, Birnbaum-Saunders-t, entre outras. Posteriormente, outros trabalhos foram desenvolvidos, ocasionando outras representações dessa família: Representação bivariada (VILA et al., 2022) e versão inflacionada em zero (RISCO-COSVALENTE; CYSNEIROS, 2023).

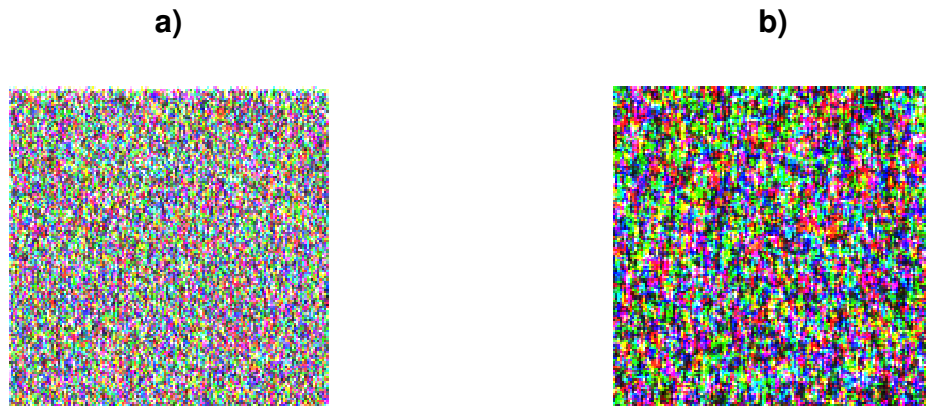
Os dados relacionados a imagens SAR são obtidos obedecendo a seguinte dinâmica: Pulsos polarizados nas direções horizontal, H, e vertical, V, são enviados pelo SAR a uma região que se quer estudar. Depois, esses pulsos são retornados para o SAR também polarizados nas direções H e V. No final, uma imagem é formatada tal que cada entrada da imagem é associada a valores complexos representando os pares de estados HH, HV, VH e VV. Dois atributos importantes são a amplitude, a norma dos valores complexos, e a intensidade, a norma quadrada.

Dados de amplitude e intensidade, exibem distribuições não Gaussianas, assimétricas e positivas, Bayer, Fábio M. and Bayer, Débora M. and Marinoni, Andrea and Gamba, Paolo (2020) propuseram o modelo 1-D ARMA baseado na distribuição Rayleigh (1-D RARMA). A distribuição Rayleigh é frequentemente usada em regiões homogêneas de dados de amplitude SAR. Recentemente, modelos ARMA com distribuições marginais $\mathcal{G}_I^0$ (ALMEIDA-JUNIOR; NASCIMENTO, 2021) e $G-I$ (SILVA; ALMEIDA-JUNIOR; NASCIMENTO, 2023) foram propostas para descrever desordens mais heterogêneas em dados de intensidade. Em Palm, Bayer e Cintra (2022) a versão 2-D RARMA foi desenvolvida, visando modelar e detectar anomalias em amplitudes de imagens SAR e forneceu resultados competitivos em relação aos modelos 2-D ARMA. Neste trabalho, é proposto uma classe de modelos espaciais ARMA para dados de intensidade SAR usando esta mesma abordagem.

Um problema ao lidar com imagens SAR é reproduzir a estrutura espacial de um terreno. Uma forma de lidar com essa questão é utilizar geradores de imagens sintéticas a partir de um modelo ajustado para obter réplicas de imagens reais onde se tenha o conhecimento das propriedades teóricas do terreno, tais como tipo de estrutura espacial e distribuição marginal. A fim de ilustrar como contribuição à comunidade de processamento de imagens SAR, a Figura 1 apresenta duas imagens sintéticas reproduzidas a partir de cenários de oceano e cidades, assumindo que as intensidades SAR seguem uma distribuição log-normal proposta por Ai et al. (2010). Isso foi feito com o método que estamos propondo neste material. Pode-se observar um aumento da heterogeneidade do trecho de oceano para aquele de cidade, como

é esperado na prática (FRERY; NASCIMENTO; CINTRA, 2014). No que segue, apresentam-se detalhes teóricos e aplicados da proposição desta dissertação.

Figura 1 – Simulações de contrastes utilizando o modelo com distribuição log-normal, sendo a) Oceano, b) Cidade.



Fonte: O autor (2024)

Seguindo essa motivação, um novo modelo espacial baseado em uma grade regular para processamento de imagens SAR é proposto. Em particular um modelo ARMA bidimensional para dados SAR espaciais não Gaussianos é introduzido usando a família de distribuições log-simétricas, denotado como 2-D LOGSYMARMA. Algumas das propriedades matemáticas do 2-D LOGSYMARMA são desenvolvidas, por exemplo, expressões explícitas para o vetor escore e a matriz de informação de Fisher condicionais. Também discutimos como obter estimativas para os parâmetros do 2-D LOGSYMARMA usando máxima verossimilhança condicional. O comportamento das estimativas é quantificado por experimentos de Monte Carlo. Por fim, o modelo é aplicado a dados reais da imagem de São Francisco (EUA) capturada pelo sensor AIRSAR.

1.1 SUPORTE COMPUTACIONAL

Dentre os *softwares* de domínio público (gratuitos) para análise de dados, utilizamos a linguagem R. Este ambiente é *open source* e tem abertura para publicação de pacotes fundamentados por novas metodologias estatísticas. Para o desenvolvimento deste texto foi utilizado

em essência o template em LaTeX disponibilizado pelo Programa de Pós-Graduação em Estatística da UFPE encontrado no *site* do *Overleaf*.

1.2 ORGANIZAÇÃO

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 é a introdução, no qual é mencionado o tema trabalhado, algumas referências de outros autores e a principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho. O Capítulo 2 introduz o leitor à definição da família log-simétrica, como parâmetros, propriedades e membros que compõem essa família, etc. O Capítulo 3 apresenta o modelo proposto nesta dissertação, utilizando a família log-simétrica com uma estrutura ARMA 2-D, 2-D LOGSYMARMA; suas propriedades matemáticas como a função log-verossimilhança condicional, vetor escore e matriz de Informação de Fisher condicionais. O Capítulo 4 apresenta as simulações de Monte Carlo para validar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança condicional do modelo, testando diferentes tipos de textura, modelo e distribuições. Além disso, também são mostradas aplicações em dados reais do modelo 2-D LOGSYMARMA, testando diferentes texturas e modelos. Por fim, o Capítulo 5 apresenta a conclusão do trabalho, revisitando os resultados obtidos.

2 FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA E INTENSIDADE DE SAR

2.1 FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA

Nesta seção, apresenta-se brevemente a suposição estocástica incondicional, a família de distribuições log-simétricas (LOGSYM). A classe LOGSYM segue da família simétrica (SYM) discutida por Fang (2018) denotada por $Y \sim \mathcal{S}(\mu, \varphi, g(\cdot))$ e com densidade $f_Y(y) = g[(y - \mu)^2/\varphi]/\sqrt{\varphi}$, para $y \in (-\infty, \infty)$, $\mu \in (-\infty, \infty)$ é o parâmetro de localização, $\varphi > 0$ é o parâmetro de escala e $g(\cdot)$ é a função geradora de densidade que satisfaz $g(u) > 0$, para $u > 0$ e $\int_0^\infty g(u)/\sqrt{u} du = 1$. Uma variável aleatória $T = e^Y \in (0, \infty)$ é dita pertencer a classe LOGSYM se a função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_T(t) = \frac{g(\tilde{t}^2)}{t\sqrt{\varphi}}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

em que $\tilde{t} = \log \left[(t/\eta)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right]$, $\eta = e^\mu$ é a mediana de T e φ é o parâmetro de escala. Esta classe é denotada por $T \sim \mathcal{LS}(\eta, \varphi, g(\cdot))$. Ressalta-se que $g(\cdot)$ é uma função geradora que define o tipo de membro da família a ser utilizado. Algumas distribuições pertencentes a esta classe dependem de parâmetros extras denominados ζ , os quais, neste trabalho, serão considerados como desconhecidos, mas fixados.

2.2 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DA FAMÍLIA LOG-SIMÉTRICA

Algumas propriedades estatísticas sobre a classe log-simétrica (VANEGAS; PAULA, 2015) são dada abaixo, se $T \sim \mathcal{LS}(\eta, \varphi, g(\cdot))$, temos:

(P1) A função de distribuição acumulada (fda) de T pode ser escrita como $F_T(t) = F_Z(\tilde{t})$, em que $F_Z(\cdot)$ é o fda de $Z = (Y - \mu)/\sqrt{\varphi} \sim \mathcal{S}(0, 1, g(\cdot))$.

(P2) $T^* = (T/\eta)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \sim \mathcal{LS}(1, 1, g(\cdot))$, ou seja, T^* segue a distribuição log-simétrica padrão.

(P3) $cT \sim \mathcal{LS}(c\eta, \varphi, g(\cdot))$ para todas as constantes $c > 0$.

(P4) $T^c \sim \mathcal{LS}(\eta^c, c^2\varphi, g(\cdot))$ para todas as constantes $c \neq 0$.

(P5) (T/η) e (η/T) são variáveis aleatórias que são distribuídas de forma idêntica.

(P6) Se $\mathbb{E}(T^r)$ e $\mathbb{E}(Z)$ existem, então $\mathbb{E}(T^r) \geq \eta^r$.

(P7) Se $M_Y(r)$ existe, então $\mathbb{E}(T^r) = M_Y(r)$, em que $M_Y(r)$ é a função geradora de momento de $Y = \log(T)$.

A Tabela 1 mostra alguns membros desta classe que utilizamos neste trabalho. Algumas características sobre essas distribuições podem ser mencionadas como (i) Log Student-t: Se $\varphi > (\zeta + 1)^2/4\zeta$, temos que a função $f_T(t)$ é monotonicamente decrescente; (ii) Log-power-exponential: As distribuições log-normal($\zeta = 0$) e log-Laplace($\zeta = 1$) são casos especiais. Se $\zeta = 1$ e $\varphi > 1/4$, então a função $f_T(t)$ é monotonicamente decrescente. A distribuição de $Y = \log(T)$ é uma Power-exponential (BOX; TIAO, 1973); (iii) Log-hiperbólica: Se $\varphi \geq \zeta^2$, então a função $f_T(t)$ é monotonicamente decrescente; (iv) Log-Birnbaum-Saunders: A função de ponderação $W(t)$ da distribuição Birnbaum-Saunders aumenta à medida que $|t|$ também aumenta. A distribuição LOGSYM com densidade (2.1) é denotada como $T \sim \mathcal{LS}(\eta, \varphi, g(\cdot))$.

Tabela 1 – Função de geração e função de peso para a família log-simétrica.

Distribuição	$g(u)$	$W(t)$
Log-normal (η, φ)	$\exp\left\{-\frac{1}{2}u\right\}$	1
Log-Student-t (η, φ, ζ)	$\left[1 + \frac{u}{\zeta}\right]^{-\frac{\zeta+1}{2}}$	$\frac{\zeta+1}{\zeta+t^2}$
Log-power-exponential (η, φ, ζ)	$\exp\left[-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{1+\zeta}}\right], -1 < \zeta \leq 1$	$\frac{ t ^{-\frac{2\zeta}{\zeta+1}}}{1+\zeta}$
Log-hiperbólica (η, φ, ζ)	$\exp\left[-\zeta\sqrt{1+u}\right], \quad \zeta > 0$	$\frac{\zeta}{\sqrt{1+t^2}}$
Log-Birnbaum-Saunders (η, φ, ζ)	$\cosh(u^{\frac{1}{2}}) \exp\left[-\frac{2}{\zeta^2} \sinh^2(u^{\frac{1}{2}})\right], \quad \zeta > 0$	$\frac{\sinh(t)}{t} \left[\frac{4 \cosh(t)}{\zeta^2} - \frac{1}{\cosh(t)} \right]$
Log-Birnbaum-Saunders-t $(\eta, \varphi, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^\top)$	$\cosh(u^{\frac{1}{2}}) \left[\zeta_2 \zeta_1^2 + 4 \sinh^2(u^{\frac{1}{2}}) \right]^{-\frac{\zeta_2+1}{2}},$ $\zeta_1 > 0 \quad \text{e} \quad \zeta_2 > 0$	$\frac{\sinh(t)}{t} \left[\frac{4(\zeta_2 + 1) \cosh(t)}{\zeta_2 \zeta_1^2 + 4 \sinh^2(t)} - \frac{1}{\cosh(t)} \right]$

Fonte: O autor (2024)

O r -ésimo momento não central de T tem a forma (VANEGAS; PAULA, 2016):

$$\mathbb{E}[T^r] = \eta^r \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \varphi r^2}} \frac{K_1(\sqrt{\zeta^2 - \varphi r^2})}{K_1(\zeta)},$$

para $|r| < \zeta/\sqrt{\varphi}$, do qual segue o valor esperado e a variância do LOGSYM, respectivamente:

$$\mathbb{E}[T] = \eta \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \varphi}} \frac{K_1(\sqrt{\zeta^2 - \varphi})}{K_1(\zeta)} \text{ e } \mathbb{V}\text{ar}[T] = \frac{\eta^2 \zeta}{K_1(\zeta)} \left[\frac{K_1(\sqrt{\zeta^2 - 4\varphi})}{\sqrt{\zeta^2 - 4\varphi}} - \frac{\zeta K_1^2(\sqrt{\zeta^2 - \varphi})}{|\zeta^2 - \varphi| K_1(\zeta)} \right],$$

no qual $K_a(b)$ representa a função de Bessel modificada de segundo tipo no argumento b e ordem a (BOWMAN, 1958).

Seja $t_1, \dots, t_n$ uma amostra observada de tamanho n obtida de uma amostra aleatória de $T \sim \mathcal{LS}(\eta, \varphi, g(\cdot))$ e cada ζ fixo. As estimativas de máxima verossimilhança (MLEs) de η e φ são dadas por (VANEGAS; PAULA, 2016):

$$\hat{\eta} = \left\{ \prod_{k=1}^n t_k^{W(\hat{t}_k)} \right\}^{1/\sum_{k=1}^n W(\hat{t}_k)} \quad \text{and} \quad \hat{\varphi} \propto \frac{\sum_{k=1}^n W(\hat{t}_k) [\log(t_k/\hat{\eta})]^2}{\sum_{k=1}^n W(\hat{t}_k)},$$

em que $\hat{t}_k = \log \left[(t_k/\hat{\eta})^{\frac{1}{\sqrt{\hat{\varphi}}}} \right]$ e $W(t) = -2g'(t^2)/g(t^2)$ é uma função de peso induzida por $g(\cdot)$ e $g'(\cdot)$ significa a derivada de primeira ordem de $g(\cdot)$.

2.3 CONEXÃO COM OS FENÔMENOS FÍSICOS

Agora podemos relacionar T com a componente de intensidade no processamento de imagens SAR. Conforme discutido por Vanegas e Paula (2015), $T \sim \mathcal{LS}(\eta, \varphi, g(\cdot))$ pode ser expresso em termos da LOGSYM padronizada $\xi \sim \mathcal{LS}(0, 1, g(\cdot))$ como $T = \eta \times \xi \sqrt{\varphi}$. Pode-se ver que a lei LOGSYM descreve fenômenos nos quais o sinal é contaminado por um ruído multiplicativo. Da mesma forma, o retorno da imagem SAR é um valor complexo cuja norma quadrática é chamada de intensidade e é dada pelo produto de duas variáveis: uma aborda o relevo e a outra descreve o speckle. No curso deste trabalho, propomos associar η e ξ com o relevo e o *speckle*, respectivamente. A seguir, argumentamos por que essa associação é aceitável na literatura.

Para ajustar a intensidade para esse tipo de imagem, é frequentemente utilizado um modelo multiplicativo com a lei gama como suposição para o speckle. Por outro lado, consideramos a família LOGSYM para lidar com a intensidade, que tem a log-normal como lei comum. Um debate interessante, em um sentido não restrito à física do SAR, sobre qual erro multiplicativo

usar entre a lei gama e a lei lognormal, foi conduzido por Firth (1988). Num contexto aplicado de sensoriamento remoto, Cho, Bowman e North (2004) chegaram à conclusão de que o uso da lei gama supera a distribuição lognormal em regiões chuvosas, enquanto a distribuição lognormal é melhor do que a distribuição gama em regiões secas. Portanto, procuraremos casos em que a distribuição lognormal e algumas de suas extensões funcionem melhor.

3 MODELO 2-D LOGSYMARMA

Para capturar as características da superfície da Terra, o sistema SAR assume que cada célula de resolução contém um número discreto de dispersores. Quando os pulsos eletromagnéticos do SAR interagem com a região de interesse, cada dispersor causa uma reflexão, resultando em uma onda retroespalhada cuja fase e amplitude são alteradas. O retroespalhamento da onda incidente na posição $[n, m]$ é dado por:

$$R[n, m] = A[n, m] \exp\{\sqrt{-1} \psi[n, m]\} = \sum_{k=1}^{N(n, m)} A_k[n, m] \exp\{\sqrt{-1} \psi_k[n, m]\} \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

em que $A[n, m]$ é a amplitude da onda, $\psi[n, m]$ é a fase da onda, $N[n, m]$ é o número de espalhamentos da célula de resolução $[n, m]$ e $A_k[n, m]$ e $\psi_k[n, m]$ são a amplitude e a fase do k -ésimo espalhamento da célula de resolução $[n, m]$ respectivamente. Neste ponto, $A_k[n, m]$ e $\psi_k[n, m]$ são estatisticamente independentes um do outro e de $(A_{k'}[n, m], \psi_{k'}[n, m])$ para todos $k \neq k'$ (DAINTY, 2013, p. 25). Com a Equação (3.1), podemos relacionar as observações com as propriedades físicas da camada de dispersão. Matematicamente, a Equação (3.1) é um movimento aleatório no plano complexo, de modo que qualquer espalhamento de comprimento $A_k[n, m]$ toma uma direção completamente aleatória. Vale a pena notar que a Equação (3.1) é o resultado de um dos quatro canais complexos gerados com relação à seguinte dinâmica: As medições registram a amplitude e a fase dos sinais retroespalhados para possíveis combinações de recepção e transmissão linear polarização: HH, HV, VH e VV (H para polarização horizontal e V para polarização vertical). Para $N[n, m]$, que é suficientemente grande, temos de (OLIVER; QUEGAN, 1998, p. 88) que: *i*) as partes real e imaginária de $R[n, m]$ são variáveis aleatórias independentemente distribuídas normalmente, *ii*) $\psi[n, m]$ é uniformemente distribuído em $[-\pi, \pi]$ e *iii*) $A[n, m]$ segue a distribuição Rayleigh. Uma propriedade física importante é o conceito de intensidade (em termos de potência ou energia), $I[n, m]$, dado por (assumindo que diferentes dispersores são independentes)

$$I[n, m] = |R[n, m]|^2 = R[n, m]R^*[n, m] = \sum_{k=1}^{N[n, m]} A_k^2[n, m],$$

em que $|\cdot|$ e $(\cdot)^*$ são o módulo e os operadores conjugados complexos.

Ao lidar com ruído *speckle*, é comum obter $L \in \mathbb{N}$ imagens de um terreno investigado em diferentes pontos no tempo, o que é chamado de *processo multilook*. A amplitude e

intensidade do visual L são definidas como $A_L[n, m] = L^{-1} \sum_{k=1}^L A^{(k)}[n, m]$ e $I_L[n, m] = L^{-1} \sum_{k=1}^L I^{(k)}[n, m]$, em que L é o *number of looks* (NL), $A^{(k)}[n, m]$ e $I^{(k)}[n, m]$ denotam a amplitude e intensidade de a entrada $[n, m]$ na k -ésima captura. Para dar sequencia na definição do modelo, outro componente é importante a ser definido é a região fortemente causal do modelo em um ponto $[n, m]$, dada por $S[n, m] = \{[k, l] \in \mathcal{Z}^2 : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m\} - \{[n, m]\}$ (BUSTOS; OJEDA; VALLEJOS, 2009). Existem outros tipos de definições de vizinhança de um ponto $[m, n]$ no plano, que são fortemente motivadas pelo sistema físico de aquisição dos dados, sendo o caso das imagens captadas por satélites. Mais discussões sobre tipos de regiões causais podem ser vistas em Jain (1989).

Suponhamos que, dada uma vizinhança em torno do pixel denominada por $S[n, m]$, e $T[n, m] := I_L[n, m]$ seja distribuído de acordo com a família log-simétrica. Como mencionado anteriormente, esta lei tem como parâmetro de locação a mediana η , o que é interessante para regiões heterogêneas porque a estrutura associada a este parâmetro tende a ser robusta (comparada com a da componente sistemática associada à média). A função de densidade de probabilidade condicional é definida por:

$$f_T(t[n, m] | S[n, m]) = \frac{g(\tilde{t}^2[n, m])}{t[n, m] \sqrt{\varphi}}, \quad t[n, m] > 0, \quad (3.2)$$

em que $\tilde{t}[n, m] = \log \left[(t[n, m] / \eta[n, m])^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right]$ e $g(\cdot)$ é a função geradora que em alguns casos envolve um parâmetro extra ζ .

Um modelo 2-D ARMA log-simétrico, denominado por 2-D LOGSYMARMA($\mathbf{p}, \mathbf{q}$), é proposto por meio de uma relação única entre a mediana $\eta[n, m]$, um preditor linear $\xi[n, m]$ através de uma função de ligação estritamente monotônica e duas vezes diferenciável $h(\cdot)$,

$$h(\eta[n, m]) = \xi[n, m] = \alpha + \mathbf{x}^\top[n, m] \boldsymbol{\beta} + \tau[n, m] \quad (3.3)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_l)^\top$ é um conjunto de parâmetros desconhecidos, $\mathbf{x}[n, m]$ é $l \times 1$ vetor contendo informações externas para cada entrada da imagem $[n, m]$ (por exemplo, matrizes de recursos, informações sobre níveis de cinza, variáveis espaciais, etc.) e $\alpha \in \mathbb{R}$ é o intercepto. O componente dinâmico $\tau[n, m]$ representa os termos espaciais autorregressivos (AR) e/ou média móvel (MA), sendo $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} \tau[n, m] &= \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0: (i,j) \neq (0,0)}^{p_2} \phi_{(i,j)} \left\{ h(t[n-i, m-j]) - \mathbf{x}^\top[n-i, m-j] \boldsymbol{\beta} \right\} \\ &+ \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{l=0: (k,l) \neq (0,0)}^{q_2} \theta_{(k,l)} e[n-k, m-l] \end{aligned}$$

e $e[n-k, m-l] = h(t[n-k, m-l]) - h(\eta[n-k, m-l])$ é o termo de erro recursivo, associado a componente de médias móveis. Embora a Equação (3.3) seja o modelo a ser utilizado, de (a) configuração $\alpha = (1 - \sum_i \sum_j \phi_{(i,j)})\beta_0$, $\tilde{\mathbf{x}}^\top[n-i, m-j] = [1, \mathbf{x}^\top[n-i, m-j]]$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^\top = [\beta_0, \boldsymbol{\beta}^\top]$ e $\dot{h}(t[n, m]) = h(t[n, m]) - \tilde{\mathbf{x}}^\top[n, m]\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ e (b) adicionando $e[n-k, m-l]$ para ambos os lados de (3.3), tem-se

$$\dot{h}(t[n, m]) = \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0: (i,j) \neq (0,0)}^{p_2} \phi_{(i,j)} \dot{h}(t[n-i, m-j]) + \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{l=0: (k,l) \neq (0,0)}^{q_2} \theta_{(k,l)} e[n-k, m-l] + e[n, m] \Leftrightarrow$$

$$\Phi(z_1, z_2) \dot{h}(t[n, m]) = \Theta(z_1, z_2) e[n, m] \Leftrightarrow$$

$$\Phi(z_1, z_2) h(t[n, m]) = \alpha + \mathbf{x}^\top[n, m]\boldsymbol{\beta} + \Theta(z_1, z_2) e[n, m],$$

em que

$$\Phi(z_1, z_2) = 1 - \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0: (i,j) \neq (0,0)}^{p_2} \phi_{(i,j)} z_1^i z_2^j \quad \text{e} \quad \Theta(z_1, z_2) = 1 + \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{l=0: (k,l) \neq (0,0)}^{q_2} \theta_{(k,l)} z_1^k z_2^l$$

representam os polinômios AR e MA espaciais, as quantidades $z_1^i h(t[n, m]) = h(t[n-i, m])$, $z_2^j h(t[n, m]) = h(t[n, m-j])$, $z_1^k e[n, m] = e[n-k, m]$, e $z_2^l e[n, m] = e[n, m-l]$ são os operadores defasagem; (p_1, p_2) e (q_1, q_2) são as ordens do modelo; as quantidades $\phi_{(i,j)}$ e $\theta_{(k,l)}$, são, respectivamente, os parâmetros autoregressivos e de médias móveis a serem estimados com base nos valores de intensidade da imagem.

3.1 ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA CONDICIONAL

Seja $T[n, m]$ um processo espacial 2-D LOGSYMARMA($\mathbf{p}, \mathbf{q}$) em uma grade retangular regular de tamanho $N \times M$. A estimativa dos parâmetros do modelo 2-D LOGSYMARMA($\mathbf{p}, \mathbf{q}$) pode ser feita maximizando a função de log-verossimilhança condicional, resultando no que se conhece por estimador de máxima verossimilhança condicional (CMLE). Os parâmetros que entram no modelo são os que já foram discutidos: coeficiente de regressão, parâmetros autoregressivos e de médias móveis do modelo 2-D ARMA, e parâmetro de escala, que está associado à família log-simétrica. Por simplicidade, a partir de agora, assumir-se-á $p_1 = p_2 = p$ e $q_1 = q_2 = q$. Então, seja $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_1^\top, \varphi)^\top$, tal que $\boldsymbol{\gamma}_1 = (\alpha, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top)^\top$, e φ é o vetor de parâmetros a serem estimados, em que $\boldsymbol{\phi} = (\phi_{(0,1)}, \phi_{(0,2)}, \dots, \phi_{(p,p)})^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{(0,1)}, \theta_{(0,2)}, \dots, \theta_{(q,q)})^\top$, com dimensões $(p+1)^2 - 1$ e $(q+1)^2 - 1$.

Para desenvolver esta seção matematicamente, necessita-se definir e encontrar algumas expressões: A seguir, $T[n, m]$ representa o processo espacial e $t[n, m]$ representa um de seus possíveis resultados.

▪ **Log verossimilhança condicional:**

$$\ell(\gamma) = \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \log \left(f_T(t[n, m] | S[n, m]) \right) = \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \ell[n, m](\eta[n, m]),$$

com $w = \max(p, q)$,

$$\ell[n, m](\eta[n, m]) = \log[g(\tilde{t}^2[n, m])] - \log[t[n, m]\sqrt{\varphi}],$$

com $\tilde{t}[n, m] = \log \left[(t[n, m]/\eta[n, m])^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right]$.

▪ **Vetor escore condicional:**

Seja $\mathbf{U}(\gamma)$ o vetor escore condicional com dois componentes definidos em termos de $\gamma_1^\top$ e φ :

$$\mathbf{U}(\gamma) = \left(\mathbf{U}(\gamma_1)^\top, U(\varphi) \right)^\top = \frac{\partial \ell}{\partial \gamma^\top} = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \gamma_1^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} \right)^\top \quad (3.4)$$

em que

$$\mathbf{U}(\gamma_1) = \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_1^\top} = \left(U(\alpha), \mathbf{U}(\beta)^\top, \mathbf{U}(\phi)^\top, \mathbf{U}(\theta)^\top \right)^\top$$

O componente $\mathbf{U}(\gamma_1)$ definido em 3.4 é calculado da seguinte forma:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \gamma_1} = \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \gamma_1}.$$

Em notação matricial temos:

$$U(\alpha) = \mathbf{a}^\top \mathbf{T} \mathbf{v}, \quad \mathbf{U}(\beta) = \mathbf{M}^\top \mathbf{T} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{U}(\phi) = \mathbf{P}^\top \mathbf{T} \mathbf{v}, \quad \text{e} \quad \mathbf{U}(\theta) = \mathbf{R}^\top \mathbf{T} \mathbf{v}$$

com $\mathbf{T} = \text{diag} \{ \partial \eta[w+1, w+1] / \partial \xi[w+1, w+1], \dots, \partial \eta[N, M] / \partial \xi[N, M] \}$ uma matriz diagonal com as dimensões $[(N-w)(M-w)] \times [(N-w)(M-w)]$ e $\mathbf{v} = (\partial \ell[w+1, w+1](\eta[w+1, w+1]) / \partial \eta[w+1, w+1], \dots, \partial \ell[N, M](\eta[N, M]) / \partial \eta[N, M])^\top$ e $\mathbf{a} = (\partial \xi[w+1, w+1] / \partial \alpha, \dots, \partial \xi[N, M] / \partial \alpha)^\top$ como vetores com as dimensões $[(N-w)(M-w)] \times 1$. Os (i, j) -ésimos elementos das matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ com dimensões $[(N-w)(M-w)] \times l$, $[(N-w)(M-w)] \times [(p+1)^2 - 1]$, e $[(N-w)(M-w)] \times [(q+1)^2 - 1]$, respectivamente, é dado como

$$\mathbf{M}[i, j] = \frac{\partial \xi[i+w, j+w]}{\partial \beta_j}, \quad \mathbf{P}[i, j] = \frac{\partial \xi[i+w, j+w]}{\partial \phi_{(i,j)}}$$

e

$$\mathbf{R}[i, j] = \frac{\partial \xi[i+w, j+w]}{\partial \theta_{(i,j)}}.$$

O segundo componente de $U(\gamma)$ é calculado como:

$$\begin{aligned}
 U(\varphi) &= \frac{\partial \ell}{\partial \varphi^\top} \\
 &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} \\
 &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \left(-\frac{1}{2\varphi} + \frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m]}{2\varphi} \right) \\
 U(\varphi) &= \frac{1}{2\varphi} \mathbf{1}^\top \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

em que $\mathbf{S} = \left(W(\tilde{t}[w+1, w+1])\tilde{t}^2[w+1, w+1] - 1, \dots, W(\tilde{t}[N, M])\tilde{t}^2[N, M] - 1 \right)^\top$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$ como vetores com as dimensões $[(N-w)(M-w)] \times 1$ e a função peso $W(\tilde{t}[n, m]) = -2g'(\tilde{t}^2[n, m])/g(\tilde{t}^2[n, m])$. Todas as expressões acima que compõem o vetor escore condicional podem ser encontradas no Apêndice A.

- **Matriz de informação de Fisher condicional:** A matriz de informação de Fisher (MIF) é um dos elementos mais importantes da inferência Estatística, em pode ser utilizado para obter a matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Aqui tratamos da MIF condicional (MIFC), definida como

$$\mathbf{K}(\gamma) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma^\top} \middle| S[n, m] \right] = \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma_r} \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma_s} \middle| S[n, m] \right] \right\}_{r,s=1, \dots, l+(p+1)^2+(q+1)^2}$$

ou, equivalente, a uma expressão que geralmente é melhor de tratar,

$$\mathbf{K}(\gamma) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma^\top \partial \gamma} \middle| S[n, m] \right] = \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma_r \partial \gamma_s} \middle| S[n, m] \right] \right\}_{r,s=1, \dots, l+(p+1)^2+(q+1)^2}.$$

Agora considere $K_{r,s}$ como a entrada (r,s) de $\mathbf{K}(\gamma)$. A MIFC tem a dimensão $[l + (p+1)^2 + (q+1)^2] \times [l + (p+1)^2 + (q+1)^2]$ e é representado em uma forma explícita para o nosso problema da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} & 0 & \mathbf{K}_{\alpha\phi} & \mathbf{K}_{\alpha\theta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} & 0 & \mathbf{K}_{\beta\phi} & \mathbf{K}_{\beta\theta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\phi\alpha} & \mathbf{K}_{\phi\beta} & 0 & \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{K}_{\phi\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta\alpha} & \mathbf{K}_{\theta\beta} & 0 & \mathbf{K}_{\theta\phi} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix}.$$

em que os elementos desta matriz acima são definidos por:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\alpha} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{a}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}, & K_{\alpha\beta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{a}^\top \mathbf{W} \mathbf{M}, & K_{\alpha\phi} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{a}^\top \mathbf{W} \mathbf{P}, & K_{\alpha\theta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{a}^\top \mathbf{W} \mathbf{R}, \\ K_{\beta\alpha} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{M}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}, & K_{\beta\beta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{M}^\top \mathbf{W} \mathbf{M}, & K_{\beta\phi} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{M}^\top \mathbf{W} \mathbf{P}, & K_{\beta\theta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{M}^\top \mathbf{W} \mathbf{R}, \\ K_{\phi\alpha} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{P}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}, & K_{\phi\beta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{P}^\top \mathbf{W} \mathbf{M}, & K_{\phi\phi} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{P}^\top \mathbf{W} \mathbf{P}, & K_{\phi\theta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{P}^\top \mathbf{W} \mathbf{R}, \\ K_{\theta\alpha} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{R}^\top \mathbf{W} \mathbf{a}, & K_{\theta\beta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{R}^\top \mathbf{W} \mathbf{M}, & K_{\theta\phi} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{R}^\top \mathbf{W} \mathbf{P}, & K_{\theta\theta} &= \frac{d_g}{\varphi} \mathbf{R}^\top \mathbf{W} \mathbf{R} \end{aligned}$$

e

$$K_{\varphi\varphi} = (N - w)(M - w) \frac{(f_g - 1)}{4\varphi^2},$$

em que as matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ são definidas como antes. Além disso, temos $d_g = \mathbb{E} [W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m] \mid S[n, m]]$ e $f_g = \mathbb{E} [W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^4[n, m] \mid S[n, m]]$, em que $\tilde{t}[n, m] \sim S(0, 1, g(\cdot))$, esses valores dependem da distribuição utilizada. E finalmente, temos que

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \left(\frac{1}{\eta[w + 1, w + 1]} \frac{\partial \eta[w + 1, w + 1]}{\partial \xi[w + 1, w + 1]} \right)^2, \dots, \left(\frac{1}{\eta[N, M]} \frac{\partial \eta[N, M]}{\partial \xi[N, M]} \right)^2 \right\}$$

uma matriz diagonal com $[(N - w)(M - w)] \times [(N - w)(M - w)]$. Por exemplo, a quantidade d_g é igual a 1, $(\zeta + 1)/(\zeta + 3)$, $\{2^{1-\zeta}\Gamma[(3 - \zeta)/2]\} / \{(1 + \zeta)^2\Gamma[(1 + \zeta)/2]\}$ e $2 + \frac{4}{\zeta^2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\zeta} \left\{ 1 - \text{erf} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\zeta} \right) \right\} \exp \left(\frac{2}{\zeta^2} \right)$ quando T é dado como log-normal, log-Student-t, log-power-exponential e Birnbaum-Saunders, respectivamente. Para a quantidade f_g temos 3, $3(\zeta + 1)/(\zeta + 3)$, $(\zeta + 1)/(\zeta + 3)$ quando T é log-normal, log-Student-t e log-power-exponencial, respectivamente (ver, por exemplo, Cordeiro et al. (2000); Villegas et al. (2013))

3.2 MÉTODO DE ESTIMAÇÃO SCORING FISHER

Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo 2-D LOGSYMARMA é necessário resolver $\mathbf{U}(\gamma) = \mathbf{0}$. Neste caso, temos uma expressão de forma fechada para a matriz de informação de Fisher para γ . Então podemos aplicar o método de Scoring Fisher. Este método é baseado no método de Newton-Raphson, em que a matriz de derivadas parciais de segunda ordem é substituída pela matriz de valores esperados das derivadas parciais, ou seja, usando a matriz de informação de Fisher previamente definida

como $\mathbf{K}(\gamma)$. O método de estimação é definido da seguinte forma: Dado um ponto de partida, digamos $\hat{\gamma}^{(0)}$, o vetor de estimativas da $(i+1)$ -ésima iteração, digamos $\hat{\gamma}^{(i+1)}$, é determinado em relação aos da (i) -ésima iteração da seguinte forma:

$$\hat{\gamma}^{(i+1)} = \hat{\gamma}^{(i)} + \mathbf{K}^{-1}(\hat{\gamma}^{(i)})\mathbf{U}(\hat{\gamma}^{(i)}).$$

Este processo iterativo funciona até que algum critério seja satisfeito; por exemplo, $||\ell(\hat{\gamma}^{(i+1)}) - \ell(\hat{\gamma}^{(i)})|| < \epsilon$ ou $||\ell(\hat{\gamma}^{(i+1)}) - \ell(\hat{\gamma}^{(i)})|| \leq \epsilon$. Como ponto de partida, sugerimos usar:

$$\hat{\gamma}^{(0)} = \arg \min_{\gamma} \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \left\{ \dot{h}(t[n, m]) - \sum_{i=0}^p \sum_{j=0, (i,j) \neq (0,0)}^p \phi_{(i,j)} \dot{h}(t[n-i, m-j]) - \sum_{k=0}^q \sum_{l=0, (k,l) \neq (0,0)}^q \theta_{(k,l)} e[n-k, m-l] \right\}.$$

3.3 RESÍDUOS COMPONENTE DO DESVIO

A análise residual é uma etapa crucial na modelagem usando regressão e conceitos de resíduos são fundamentais nesta etapa. Entre os diferentes tipos de resíduos (por exemplo, ordinários, padronizados, Cox-Snell, ...), os resíduos componente do desvio são uma abordagem amplamente utilizada em modelos lineares generalizados (GLMs) ou em outros modelos de regressão não Gaussianos que seguem o mesmo caminho teórico do GLMs. O resíduo componente do desvio é uma medida da falta de ajuste do modelo aos dados, levando em consideração a distribuição das variáveis resposta e a função de ligação utilizada. Ao utilizar esta medida, procura-se minimizar esta função de desvio, a fim de obter estimativas para os parâmetros do modelo que melhor se ajustam aos dados. Este tipo de resíduos pode ser utilizado para identificar observações ligeiramente diferentes e avaliar a adequação do submodelo proposto. Mais detalhes sobre esta medida podem ser vistos em DAVISON e GIGLI (1989).

Nesta dissertação, um processo espacial regular baseado em grade, os resíduos são representados por uma matriz $\mathbf{D}$ cuja entrada (n, m) é definida como:

$$d_{(n,m)}(\hat{t}[n, m]) = \text{sign}(\hat{t}[n, m]) \left\{ 2 \log[g(0)/g(\hat{t}[n, m]^2)] \right\}$$

em que sign é uma função sinal, $\hat{t}[n, m] = (t[n, m] - \hat{\eta}[n, m])/[\hat{\varphi}]^{\frac{1}{2}}$,

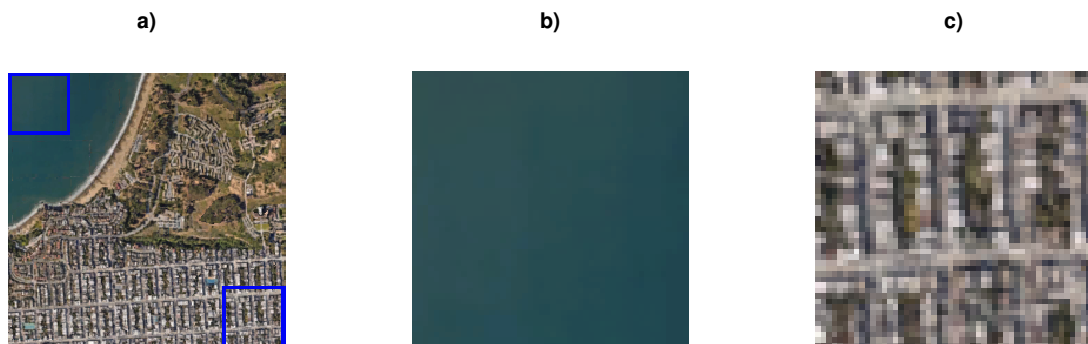
$$\hat{\eta}[n, m] = h^{-1} \left(\hat{\alpha} + \mathbf{x}^{\top}[n, m] \hat{\beta} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \hat{\phi}_{(i,j)} \left[h(t[n-i, m-j]) - \mathbf{x}^{\top}[n-i, m-j] \hat{\beta} \right] + \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q \hat{\theta}_{(k,l)} e[n-k, m-l] \right),$$

para $n = w+1, w+2, \dots, N$ e $m = w+1, w+2, \dots, M$, e $\hat{\eta}[n, m]$ representa o sinal ajustado da imagem SAR.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para avaliar o desempenho das estimativas de máxima verossimilhança condicional, foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo com mil réplicas e diferentes tamanhos de amostra sob as imagens simuladas com dimensões 9×9 , 19×19 e 39×39 são usados. O (i) Viés, (ii) Viés percentual relativo ($VR\%$) e (iii) Erro quadrático médio (MSE) são usados como critérios de comparação e calculados para cada cenário. Dois cenários são considerados: O primeiro é um modelo 2-D LOGSYMARMA(1,0) e o segundo é um modelo 2-D LOGSYMARMA(1,1). Em termos de escolha das distribuições marginais na família log-simétrica, foi selecionado as distribuições log-normal e log-Student-t com ζ graus de liberdade. Essa escolha é justificada pelo fato de a distribuição log-Student-t permitir simular dados com diferentes espessuras em termos de curtose, variando o número de graus de liberdade. Assim, podemos avaliar o impacto de caudas mais pesadas (para graus de liberdade menores) e mais leves (para graus de liberdade maiores), aproximando-se do comportamento da distribuição log-normal. Além disso, também são considerados dois tipos de regiões presentes na imagem, de oceano e cidade. Os parâmetros utilizados foram obtidos através de ajustes desses modelos para dados reais, essas regiões podem ser observados na Figura 2.

Figura 2 – a) Imagem original da baía de São Francisco com as regiões destacadas. b) Região oceânica. c) Região de cidade



Fonte: O autor (2024)

Para enriquecer a discussão sobre a diferença entre essas duas regiões, foi realizada uma análise descritiva usando o canal HH da imagem SAR análoga a Figura 2 a), podendo ser vista na Tabela 2. Os valores na região oceânica têm uma distribuição concentrada em torno

de valores baixos, como indicado por uma média de 0.0080 e uma mediana de 0.0069. A baixa diferença entre os quartis e a pequena amplitude de 0.0375 sugerem uma distribuição mais uniforme com poucos outliers. Essas características mencionadas como homogêneas da região de oceano são evidenciadas por uma distribuição concentrada e baixa variabilidade. Isso pode indicar que a região está sendo dominada por um fundo uniforme, com pouca variação na superfície do mar. A região de cidade mostra uma distribuição mais dispersa e uma amplitude muito maior (7.1754). A média de 0.3058 é mais alta que a mediana que é 0.1453, indicando uma distribuição possivelmente assimétrica com uma cauda longa à direita, sugerindo a presença de valores muito elevados que distorcem o valor da média. O desvio padrão e a presença de outliers na região de cidade refletem a diversidade estrutural presente nesse tipo de dados.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas dos tipos de regiões presentes na imagem utilizando o canal HH da imagem SAR correspondente.

Região	Medidas descritivas						
	Mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Desvio Padrão
Oceano	0.0004	0.0044	0.0069	0.0080	0.0102	0.0379	0.0050
Cidade	0.0046	0.0731	0.1453	0.3057	0.3180	7.1801	0.5076

Fonte: O autor (2024)

4.1 CENÁRIOS ESPACIAIS AUTORREGRESSIVOS

Para o primeiro cenário, os valores verdadeiros dos parâmetros foram selecionados com base nas estimativas do modelo 2-D LOGSYMARMA(1,0) ajustado na Seção 3, sendo.

$$h(t[n, m]) = \alpha + \underbrace{\phi_{(1,0)}h(t[n-1, m]) + \phi_{(0,1)}h(t[n, m-1]) + \phi_{(1,1)}h(t[n-1, m-1])}_{\text{Parte observada, } S[n, m] = \{t[n-1, m], t[n, m-1], t[n-1, m-1]\}} + e[n, m]$$

para a vizinhança observada $S[n, m]$ usando sub imagens 50×50 de uma imagem SAR da Baía de São Francisco, levando em consideração regiões oceânicas e de cidade, podendo ser visualizadas na Figura 2. Discutiremos esta imagem com mais detalhes posteriormente. A lei log-normal pode ser entendida como uma distribuição básica para dados homogêneos, enquanto a distribuição log-Student-t é adequada para desordem mais heterogênea, uma vez que as caudas pesadas indicam cenários com alta desordem, como nas cidades. Os parâmetros utilizados podem ser vistos na Tabela 3:

Tabela 3 – A estrutura espacial ARMA(1,0) escolhida para simulação para as regiões de oceano e cidade.

Parâmetros	Distribuição			
	Região de oceano		Região de cidade	
	Log-normal	Log-Student-t	Log-normal	Log-Student-t
α	-2.3683	-2.2921	-0.5206	-0.4870
$\phi_{(0,1)}$	0.1139	0.1223	0.3641	0.3778
$\phi_{(1,0)}$	0.3857	0.3914	0.5690	0.5773
$\phi_{(1,1)}$	0.0262	0.0208	-0.2142	-0.2089
φ	0.3304	0.1980	0.6913	0.4148
ζ	-	3.0000	-	3.0000

Fonte: O autor (2024)

A Tabela 4 apresenta os resultados para o modelo simulado 2-D ARMA (1,0) log-normal. Em geral, pode-se observar que as estimativas ficam mais próximas dos valores verdadeiros quando o tamanho da amostra aumenta. Algumas estimativas evidenciaram a consistência esperada mais lentamente, como $\hat{\alpha}$ (intercepto), cujo viés e VR% só foram reduzidos a partir do tamanho amostral de 19×19 . Nos termos autorregressivos, mesmo com amostras menores, as estimativas ficaram muito próximas dos valores verdadeiros em termos de viés. No entanto, $\hat{\phi}_{(0,1)}$ e $\hat{\phi}_{(1,1)}$ tiveram um VR% relativamente alto em comparação com os outros, ou seja, 26.1633% e 24.0458% respectivamente, para o tamanho 9×9 . No entanto, quando analisamos os resultados das imagens 19×19 , tanto pelo viés quanto pelo VR%, percebemos uma redução desses valores, o que é esperado quando o tamanho da amostra é aumentado. A estimativa para o parâmetro de escala φ , também evidenciou a consistência esperada apenas para valores de tamanhos de amostra elevados. Para simulações de imagens 39×39 , todas as estimativas dos parâmetros do modelo apresentaram vieses e VR% menores, indicando que amostras maiores apresentam menos erros nas estimativas.

No segundo estudo de simulação, apresentam-se valores na Tabela 5 para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Student-t com $\zeta = 3$ semelhante ao anterior estudo de simulação. Os vieses diminuem quando o tamanho da amostra aumenta. Para simulações com tamanho 9×9 , as estimativas $\hat{\phi}_{(0,1)}$ e $\hat{\phi}_{(1,0)}$ tiveram um VR% relativamente alto em comparação com os demais tamanhos de amostra, com 13,4096% e 12,9808%, respectivamente. No entanto, quando olhamos para os resultados das imagens 19×19 , tanto o viés quanto o VR% decaíram, o esperado quando o tamanho da amostra aumenta. Nas simulações para imagens 39×39 , todas as estimativas dos parâmetros do modelo apresentaram baixo viés e VR%, especialmente

Tabela 4 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-normal em região de cidade.

Parâmetros	Valor Verdadeiro	Média	Viés	VR%	MSE
9×9					
α	-2.3683	-2.5568	0.1885	7.9593	6.5383
$\phi_{(0,1)}$	0.1139	0.0841	0.0298	26.1633	1.2452
$\phi_{(1,0)}$	0.3857	0.3686	0.0171	4.4335	1.5499
$\phi_{(1,1)}$	0.0262	0.0325	-0.0063	24.0458	1.2077
φ	0.3304	0.3102	0.0202	6.1138	1.4643
19×19					
α	-2.3683	-2.4108	0.0425	1.7945	5.6510
$\phi_{(0,1)}$	0.1139	0.1086	0.0053	4.6532	1.2575
$\phi_{(1,0)}$	0.3857	0.3797	0.0060	1.5556	1.5507
$\phi_{(1,1)}$	0.0262	0.0289	-0.0027	10.3053	1.2031
φ	0.3304	0.3281	0.0023	0.6961	1.4840
39×39					
α	-2.3683	-2.3799	0.0116	0.4898	5.4030
$\phi_{(0,1)}$	0.1139	0.1129	0.0010	0.8780	1.2566
$\phi_{(1,0)}$	0.3857	0.3834	0.0023	0.5963	1.5528
$\phi_{(1,1)}$	0.0262	0.0271	-0.0009	3.4351	1.1933
φ	0.3304	0.3300	0.0004	0.1211	1.4858

Fonte: O autor (2024)

para o parâmetro φ , que é praticamente zero.

Para as simulações no cenário de cidade, observa-se na Tabela 6 que para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-normal um VR% mais elevado para o intercepto em relação aos demais, com 25.1825%, obtido para um tamanho de amostra de 9×9 . Para o mesmo tamanho de amostra, as estimativas $\hat{\phi}_{(0,1)}$ e $\hat{\phi}_{(1,0)}$ também tiveram um VR% alto com 8.1846 e 8.5062 respectivamente. Por outro lado, para o tamanho da amostra 19×19 , há uma redução em termos de viés e VR% nos estimadores de todos os parâmetros, especialmente para $\hat{\phi}_{(1,1)}$, que obteve um viés e VR% de aproximadamente 0. Para 39×39 , há uma diminuição em termos de viés e VR%, exceto para $\hat{\phi}_{(1,1)}$.

No contraste de cidade, vê-se na Tabela 7 que para o modelo 2-D log-student ARMA(1,0) com $\zeta = 3$ há um VR% relativamente alto para $\hat{\alpha}$ em comparação com as demais, com 15.9959%, para um tamanho de amostra de 9×9 . Com o mesmo tamanho de amostra, outras estimativas como $\hat{\phi}_{(0,1)}$ e $\hat{\varphi}$ também tiveram um VR% alto com 5.7702 e 5.6895 respectivamente. Em comparação com um tamanho de amostra diferente, por exemplo 19×19 ,

Tabela 5 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de oceano.

Parâmetros	Valor Verdadeiro	Média	Viés	VR%	MSE
9×9					
α	-2.2921	-2.4289	0.1368	5.9683	5.7494
$\phi_{(0,1)}$	0.1223	0.1059	0.0164	13.4096	1.1857
$\phi_{(1,0)}$	0.3914	0.3753	0.0161	4.1134	1.4686
$\phi_{(1,1)}$	0.0208	0.0235	-0.0027	12.9808	1.1112
φ	0.1980	0.1868	0.0112	5.6566	1.2471
19×19					
α	-2.2921	-2.3150	0.0229	0.9991	5.0474
$\phi_{(0,1)}$	0.1223	0.1201	0.0022	1.7989	1.1806
$\phi_{(1,0)}$	0.3914	0.3896	0.0018	0.4599	1.4898
$\phi_{(1,1)}$	0.0208	0.0201	0.0007	3.3654	1.1058
φ	0.1980	0.1955	0.0025	1.2626	1.2517
39×39					
α	-2.2921	-2.3002	0.0081	0.3534	4.9625
$\phi_{(0,1)}$	0.1223	0.1220	0.0003	0.2453	1.1834
$\phi_{(1,0)}$	0.3914	0.3908	0.0006	0.1533	1.4897
$\phi_{(1,1)}$	0.0208	0.0200	0.0008	3.8462	1.1056
φ	0.1980	0.1980	0.0000	0.0000	1.2556

Fonte: O autor (2024)

houve uma redução no viés e VR% para todos os casos, especialmente para $\hat{\phi}_{(1,1)}$, com viés e VR% de -0.0004 e 0.1915 , respectivamente. Para 39×39 , houve uma melhora nos resultados para todos os casos envolvidos, mostrando que em média as estimativas são mais próximas dos valores verdadeiros na medida que se aumenta o tamanho da amostra.

Tabela 6 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-normal em região de cidade.

Parâmetros	Valor Verdadeiro	Média	Viés	VR%	MSE
9×9					
α	-0.5206	-0.6517	0.1311	25.1825	1.0011
$\phi_{(0,1)}$	0.3641	0.3343	0.0298	8.1846	0.2576
$\phi_{(1,0)}$	0.5690	0.5206	0.0484	8.5062	0.3460
$\phi_{(1,1)}$	-0.2142	-0.2082	-0.0060	2.8011	0.3854
φ	0.6913	0.6505	0.0408	5.9019	0.4483
19×19					
α	-0.5206	-0.5502	0.0296	5.6857	0.7658
$\phi_{(0,1)}$	0.3641	0.3568	0.0073	2.0049	0.2526
$\phi_{(1,0)}$	0.5690	0.5605	0.0085	1.4938	0.3676
$\phi_{(1,1)}$	-0.2142	-0.2142	0.0000	0.0000	0.3775
φ	0.6913	0.6803	0.0110	1.5912	0.4741
39×39					
α	-0.5206	-0.5312	0.0106	2.0361	0.7226
$\phi_{(0,1)}$	0.3641	0.3621	0.0020	0.5493	0.2527
$\phi_{(1,0)}$	0.5690	0.5664	0.0026	0.4569	0.3690
$\phi_{(1,1)}$	-0.2142	-0.2150	0.0008	0.3735	0.3739
φ	0.6913	0.6896	0.0017	0.2459	0.4811

Fonte: O autor (2024)

Tabela 7 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de cidade.

Parâmetros	Valor Verdadeiro	Média	Viés	VR%	MSE
9×9					
α	-0.4870	-0.5649	0.0779	15.9959	0.7305
$\phi_{(0,1)}$	0.3778	0.3560	0.0218	5.7702	0.2296
$\phi_{(1,0)}$	0.5773	0.5508	0.0265	4.5903	0.3481
$\phi_{(1,1)}$	-0.2089	-0.2045	-0.0044	2.1063	0.2938
φ	0.4148	0.3912	0.0236	5.6895	0.2471
19×19					
α	-0.4870	-0.4969	0.0099	2.0329	0.5762
$\phi_{(0,1)}$	0.3778	0.3740	0.0038	1.0058	0.2273
$\phi_{(1,0)}$	0.5773	0.5743	0.0030	0.5197	0.3626
$\phi_{(1,1)}$	-0.2089	-0.2085	-0.0004	0.1915	0.2875
φ	0.4148	0.4072	0.0076	1.8322	0.2450
39×39					
α	-0.4870	-0.4907	0.0037	0.7598	0.5602
$\phi_{(0,1)}$	0.3778	0.3773	0.0005	0.1323	0.2261
$\phi_{(1,0)}$	0.5773	0.5757	0.0016	0.2772	0.3622
$\phi_{(1,1)}$	-0.2089	-0.2086	-0.0003	0.1436	0.2862
φ	0.4148	0.4131	0.0017	0.4098	0.2452

Fonte: O autor (2024)

4.2 CENÁRIO ARMA

Para o segundo cenário, os valores dos parâmetros foram escolhidos com base no modelo 2-D LOGSYMARMA(1,1),

$$h(t[n, m]) = \underbrace{\alpha + \phi_{(1,0)}h(t[n-1, m]) + \phi_{(0,1)}h(t[n, m-1]) + \phi_{(1,1)}h(t[n-1, m-1])}_{\text{Parte observada, } S[n,m]=\{t[n-1,m], t[n,m-1], t[n-1,m-1]\}} + \underbrace{\theta_{(1,0)}e[n-1, m] + \theta_{(0,1)}e[n, m-1] + \theta_{(1,1)}e[n-1, m-1] + e[n, m]}_{\text{Parte observada, } S[n,m]=\{e[n-1,m], e[n,m-1], e[n-1,m-1]\}},$$

para uma vizinhança observada $S[n, m]$ usando 50×50 sub imagens de uma imagem SAR de São Francisco. Conforme mencionado anteriormente, foram considerados tanto a distribuição log-normal como marginal quanto a log-Student-t. Devido ao fato que tem-se agora mais parâmetros a serem analisados vai ser mais preferível utilizar recursos gráficos ao invés de tabelas.

Tabela 8 – A estrutura espacial ARMA(1,1) escolhida para simulação para a região de oceano e cidade.

Parâmetros	Distribuição			
	Região de Oceano		Região de cidade	
	Log-normal	Log-Student-t	Log-normal	Log-Student-t
α	-2.8832	-2.9013	-0.6962	-0.6500
$\phi_{(0,1)}$	-0.0310	-0.0413	0.5032	0.5265
$\phi_{(1,0)}$	0.2484	0.2346	0.3568	0.3748
$\phi_{(1,1)}$	0.2048	0.2175	-0.2380	-0.2385
$\theta_{(0,1)}$	0.1412	0.1625	-0.1944	-0.2050
$\theta_{(1,0)}$	0.1610	0.1882	0.3305	0.3294
$\theta_{(1,1)}$	-0.1202	-0.1326	0.0134	0.0178
φ	0.3279	0.1950	0.6630	0.3926
ζ	-	3.0000	-	3.0000

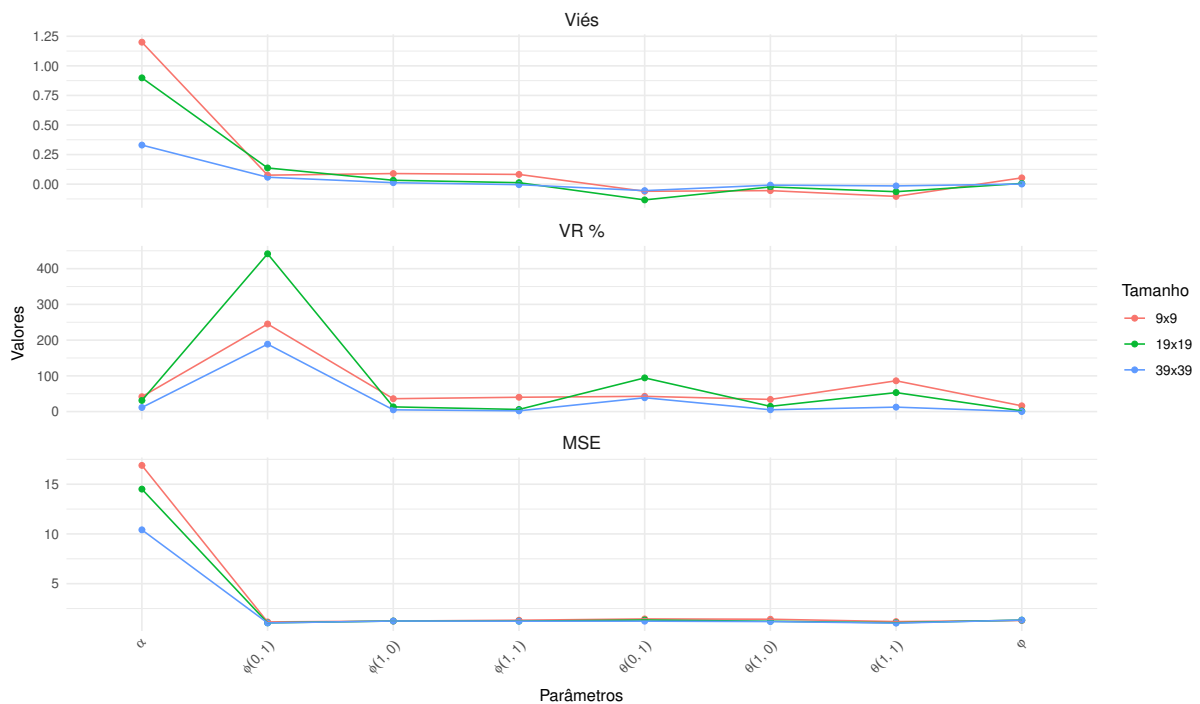
Fonte: O autor (2024)

Neste cenário (ver a Figura 3), para 2-D ARMA(1,1) log-normal, os resultados mostram-se bastante diferente do que no caso do modelo autoregressivo. Para tamanhos amostrais menores, como 9×9 , a estimativa com o maior viés foi para $\hat{\alpha}$. Embora o viés seja menor para os demais estimadores, vale ressaltar que os valores para VR% são bastante elevados, principalmente para $\hat{\phi}_{(0,1)}$. Quando consideramos o tamanho da amostra de 19×19 , descobrimos que tanto o viés quanto o VR% diminuem, exceto para $\hat{\phi}_{(0,1)}$ no qual o viés aumenta. Para o caso

39×39 , tanto o viés como o VR% diminuem para todos os parâmetros. O melhor resultado para diferentes tamanhos amostrais, em termos de viés e VR%, foi para o $\hat{\phi}$.

Neste cenário (ver a Figura 3), para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-normal, os resultados são bastante diferentes dos obtidos no caso do modelo autoregressivo. Para tamanhos amostrais menores, como 9×9 , a estimativa com o maior viés foi para $\hat{\alpha}$. Apesar de o viés ser menor para os demais estimadores, vale ressaltar que os valores de VR% são bastante elevados, principalmente para $\hat{\phi}_{(0,1)}$. Quando consideramos o tamanho da amostra de 19×19 , observamos que tanto o viés quanto o VR% diminuem, exceto para $\hat{\phi}_{(0,1)}$ no qual o viés aumenta. Para o caso 39×39 , tanto o viés quanto o VR% diminuem para todos os parâmetros. O melhor resultado, em termos de viés e VR%, para todos os tamanhos de amostra foi obtido para o $\hat{\phi}$.

Figura 3 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-normal em contraste do tipo oceano.



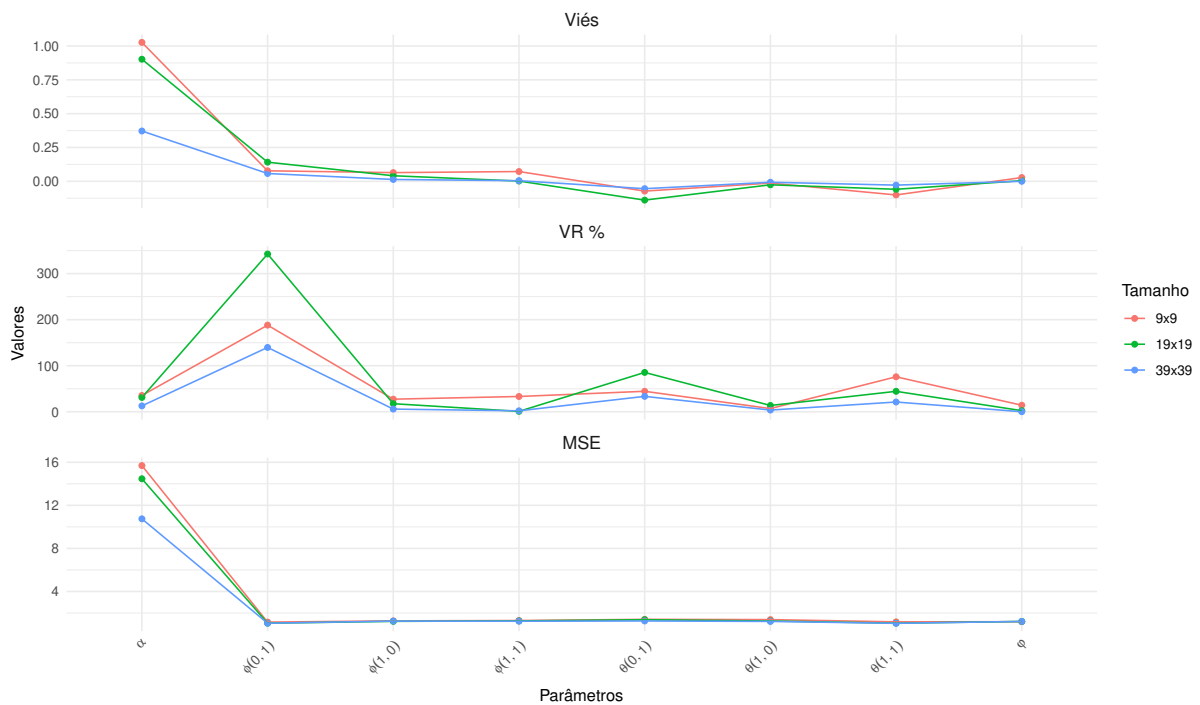
Fonte: O autor (2024)

Para a Figura 4, no modelo 2-D ARMA(1,1) log-Student-t com $\zeta = 3$, obtiveram-se resultados muito semelhantes aos da Figura 3 devido aos valores dos parâmetros serem semelhantes. Para o tamanho de 9×9 , o valor com maior viés também foi para $\hat{\alpha}$. Em termos de VR%, a estimativa com maior valor associado foi $\hat{\phi}_{(0,1)}$. O valor de viés mais baixo foi para $\hat{\phi}$. Quando o tamanho da amostra foi aumentado para 19×19 , os valores de viés e VR% diminuiriam, exceto para $\hat{\phi}_{(0,1)}$ e $\hat{\theta}_{(0,1)}$. Com um tamanho de 39×39 , os resultados apresentam uma diminuição no viés e VR% para todos os parâmetros do modelo, sugerindo que as estimativas dos

parâmetros estão mais próximas dos valores verdadeiros em tamanhos de amostra maiores.

Esses resultados podem ser resumidos mostrando que as estimativas para um modelo com mais parâmetros, como ARMA(1,1), apresentam vieses, VR% e MSE mais elevados, preferindo-se janelamentos maiores para valores mais confiáveis em comparação com o ARMA(1,0) espacial.

Figura 4 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de oceano.

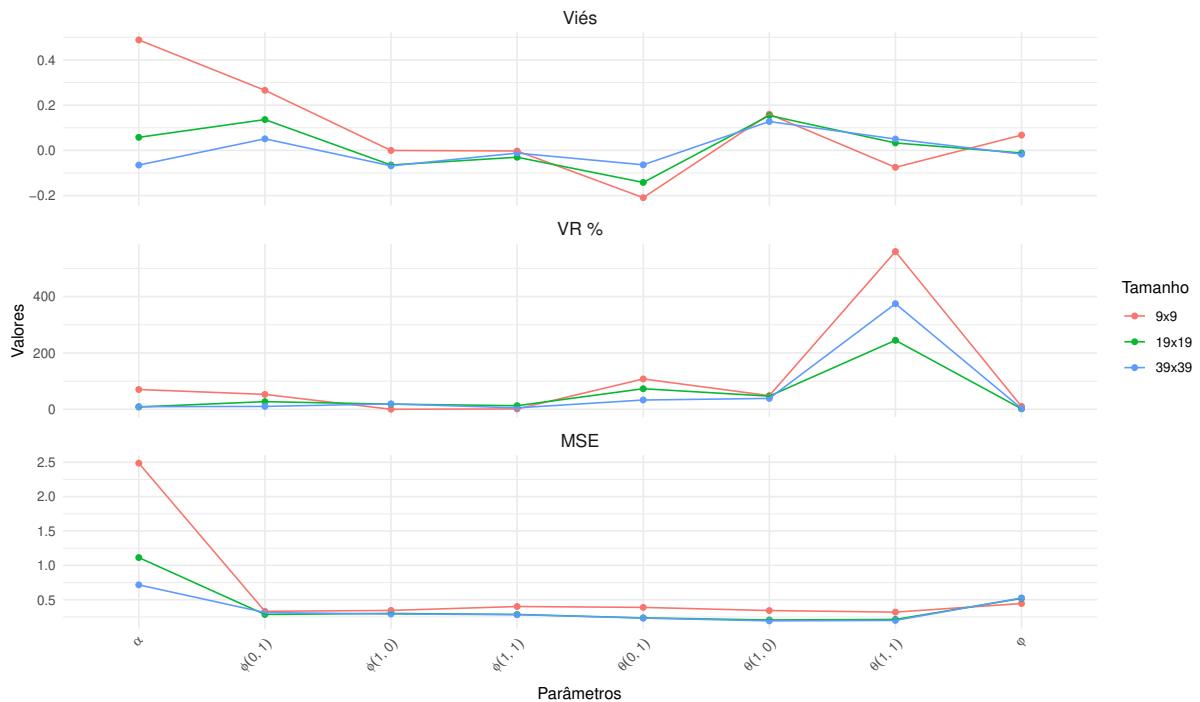


Fonte: O autor (2024)

Para as Figuras 5-6, inserimos simulações em que a região é do tipo cidade. Portanto, os parâmetros escolhidos para as simulações são bastante diferentes em relação às Figuras 3-4.

Na Figura 5, o maior viés para o tamanho de imagem 9×9 foi encontrado para $\hat{\alpha}$ e, em segundo lugar, para a estimativa $\hat{\phi}_{(0,1)}$. Porém, em termos de VR%, o maior valor foi $\hat{\theta}_{(1,1)}$. Se olharmos para o tamanho de imagem 19×19 , os resultados serão semelhantes. Vemos que alguns vieses diminuíram, exceto para as estimativas $\hat{\phi}_{(1,0)}$ e $\hat{\phi}_{(1,1)}$, nas quais houve um leve aumento. Isso também acontece quando utilizamos o VR% como critério. Para o maior tamanho amostral, os vieses diminuíram um pouco mais, exceto para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}_{(1,1)}$, que apresentaram um leve aumento, mas, para compensar, o MSE diminuiu. De modo geral, podemos concluir que o tamanho da amostra afeta os resultados da simulação e que as estimativas ficam mais próximas dos valores reais com imagens maiores.

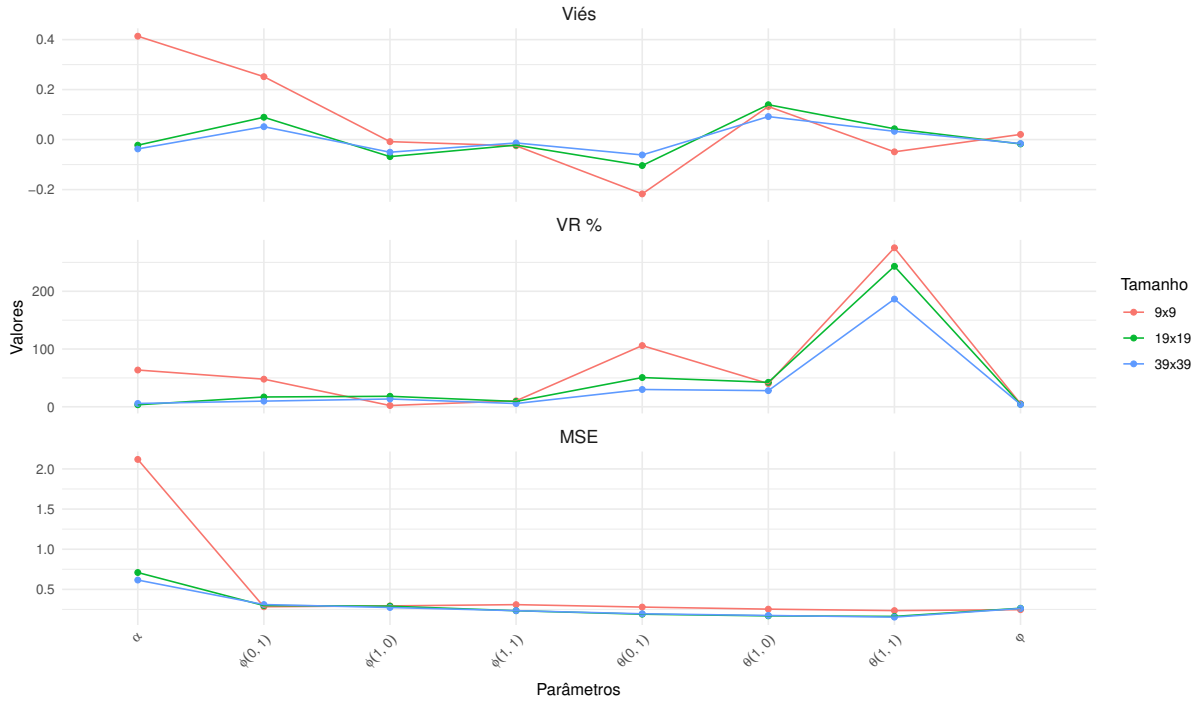
Figura 5 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-normal em região de cidade.



Fonte: O autor (2024)

Para a Figura 6, o maior viés também foi determinado para $\hat{\alpha}$ e, em segundo lugar, para a estimativa $\hat{\phi}_{(0,1)}$, com tamanho de imagem de 9×9 . Porém, em relação ao VR%, o maior valor foi para $\hat{\theta}_{(1,1)}$. Se considerarmos outra janela de tamanho 19×19 , os resultados mudam um pouco, com alguns dos vieses diminuindo. No entanto, vale a pena notar que as estimativas revelam-se com uma variação considerável quando se trata de VR% e MSE. Para um tamanho de amostra maior, os vieses diminuiriam um pouco mais, exceto para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}_{(1,1)}$, que apresentaram um leve aumento, mas, em compensação, o MSE diminuiu. Em geral, podemos concluir que o tamanho da amostra afeta os resultados da simulação e que as estimativas são menos tendenciosas com imagens maiores.

Figura 6 – Resultados de simulação para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Student-t com $\zeta = 3$ em região de cidade.



Fonte: O autor (2024)

4.3 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

A imagem SAR mostrada na Figura 7 a) tem um tamanho de 150×150 , que corresponde a dados de intensidade na área da Baía de São Francisco, e foi obtida por um sensor AIRSAR com número de *looks* igual a quatro. Analogamente à imagem SAR, também é possível observar a imagem óptica na Figura 7 b). A principal motivação da análise é a presença de múltiplas regiões, como seções contendo imagens de oceano, cidade e floresta. Cada uma dessas regiões possui padrão espacial diferente em termos de valores de intensidade. Para esta análise, objetiva-se ajustar o 2D-LOGSYMARMA sob algumas distribuições a fim de sugerir o modelo com melhor ajuste, tendo como medidas de comparação o *Root Mean Square Error* (RMSE) e o *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). O MAPE e o RMSE são dados por:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{NM} \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \left| \frac{t[n, m] - \hat{\eta}[n, m]}{t[n, m]} \times 100 \right|$$

e

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{NM} \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M (t[n, m] - \hat{\eta}[n, m])^2}$$

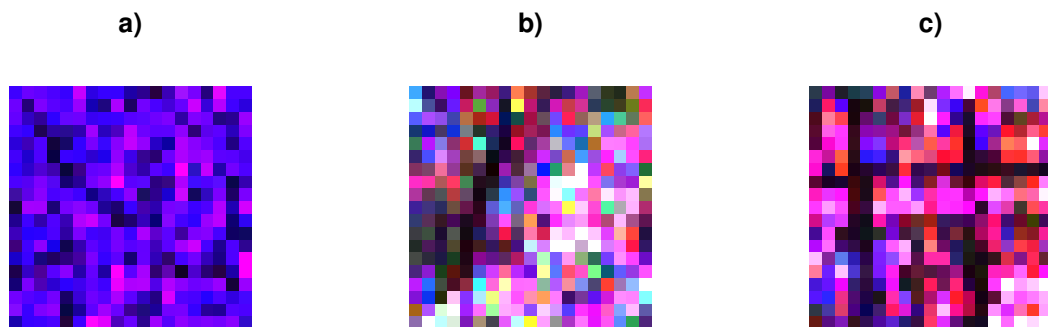
Figura 7 – a) Imagem SAR da baía de São Francisco com canal de polarização associado a todos os canais da imagem. b) Imagem original da baía de São Francisco.



Fonte: O autor (2024)

Para escolher a estrutura ARMA espacial e o valor do parâmetro extra ζ , por exemplo, grau de liberdade, utilizamos os critérios de informação de Akaike (AIC). As Tabelas 9-11 apresentam os modelos finais ajustados para algumas distribuições. Para cada distribuição, são ajustados diversos submodelos na classe ARMA espacial, bem como escolhidos parâmetros adicionais associados a todos os membros dessa família. A tabela também mostra os parâmetros extras associados à família log-simétrica, bem como outras métricas como MAPE, RMSE e SIC. O MAPE é utilizado para escolher o modelo mais bem ajustado entre as distribuições, ou seja, o modelo com o menor MAPE é selecionado. As imagens com cada tipo de região foram extraídas da imagem principal acima e cada uma delas tem o tamanho 19×19 . Essas regiões podem ser vistas na Figura 8:

Figura 8 – Amostras da imagem principal da Baía de São Francisco, a) Oceano, b) Floresta e c) Cidade utilizando todos os canais da Imagem.



Fonte: O autor (2024)

A partir da Tabela 9, pode-se observar que a distribuição sugere apenas um tipo de estrutura espacial do modelo, um ARMA(1,1). Utilizando o MAPE como critério para selecionar os melhores modelos, pode-se observar que o modelo com menor valor foi o 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2.0$, que corresponde a 54.6984%, e não havendo diferença em termos de RMSE entre os modelos.

Tabela 9 – Qualidade do ajuste para a imagem SAR do tipo oceano de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.

Distribuição	Modelo 2-D	ζ_1	ζ_2	MAPE	RMSE	AIC
Log-normal	ARMA(1,1)	-	-	57.6535	0.0038	-3369.619
Log-Student-t	ARMA(1,1)	3.0	-	60.6633	0.0037	-3403.427
Log-power-exponential	ARMA(1,1)	0.8	-	61.3725	0.0037	-3582.235
Log-Birnbaum-Saunders	ARMA(1,1)	2.0	-	54.6984	0.0040	-3334.385
Log-Birnbaum-Saunders-t	ARMA(1,1)	0.5	1.0	63.8966	0.0037	-3427.209

Fonte: O autor (2024)

Para a região do tipo floresta, vê-se na Tabela 10 um fato interessante causado pela mudança dos dados: todos os modelos recomendados possuem uma estrutura autoregressiva, ou seja, uma estrutura ARMA(1,0) espacial. Em termos de MAPE, o modelo com menor valor foi o 2-D ARMA(1,0) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2.0$ e um MAPE de 61.2262%. Em segundo lugar, ficou o 2-D ARMA(1,0) log-normal com um MAPE de 66.8117%.

Na Tabela 11, apresentam-se os modelos mais bem ajustados para os dados da cidade. Todos indicaram uma estrutura ARMA, exceto no caso da distribuição log-Birnbaum-Saunders.

Tabela 10 – Qualidade do ajuste para a imagem SAR do tipo floresta de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.

Distribuição	Modelo 2-D	ζ_1	ζ_2	MAPE	RMSE	AIC
Log-normal	ARMA(1,0)	-	-	66.8117	0.0429	-1910.007
Log-Student-t	ARMA(1,0)	3.0	-	68.7887	0.0424	-1947.809
Log-power-exponential	ARMA(1,0)	0.8	-	67.6401	0.0425	-2129.786
Log-Birnbaum-Saunders	ARMA(1,0)	2.0	-	61.2262	0.0451	-1849.497
Log-Birnbaum-Saunders-t	ARMA(1,0)	0.5	1.0	69.4425	0.0421	-1977.853

Fonte: O autor (2024)

Utilizando o MAPE como medida de comparação entre os resultados, o modelo com menor erro foi um 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders-t com $\zeta_1 = \zeta_2 = 1.0$, com valor MAPE de 79.1310%. O modelo com maior valor de RMSE foi 2-D ARMA(1,0) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2.0$, mas ainda com valor muito próximo ao de log-Birnbaum-Saunders-t. Em segundo lugar, ficou o modelo 2-D ARMA(1,1) log-power-exponential com $\zeta_1 = 0.8$ e um MAPE de 79.2061%.

Tabela 11 – Qualidade de ajuste para a imagem SAR do tipo cidade de São Francisco para os melhores modelos por distribuição.

Distribuição	Modelo 2-D	ζ_1	ζ_2	MAPE	RMSE	AIC
Log-normal	ARMA(1,1)	-	-	82.8238	0.5987	-693.5189
Log-Student-t	ARMA(1,1)	3.0	-	80.6140	0.5869	-721.0654
Log-power-exponential	ARMA(1,1)	0.8	-	79.2061	0.5798	-907.8047
Log-Birnbaum-Saunders	ARMA(1,0)	2.0	-	90.8361	0.6258	-665.3993
Log-Birnbaum-Saunders-t	ARMA(1,1)	1.0	1.0	79.1310	0.5751	-755.9387

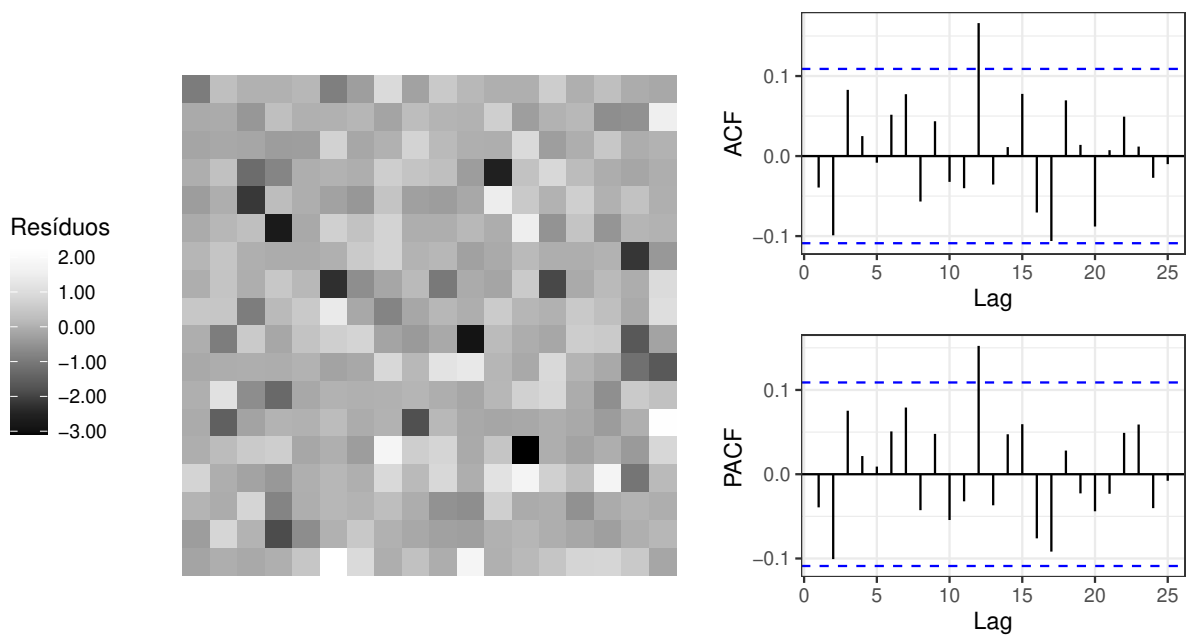
Fonte: O autor (2024)

As Figuras 9-11 são usadas para analisar se temos evidências de que os resíduos se comportam como ruído branco. Um campo espacial é considerado ruído branco se seus valores forem uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância finita. Em outras palavras, os valores do campo da imagem não devem ser correlacionados entre si e devem ter média e variância constantes. Para determinar se o campo da imagem observado é ruído branco, podemos aplicar o teste Ljung-Box a uma vetorização dos dados da imagem, a fim de testar se há autocorrelação dos dados. Um alto p -valor do teste sugere que o campo homogêneo é ruído branco. Em todos os testes, utilizou-se o lag máximo de defasagem igual a 10. Outra abordagem interessante é utilizar os gráficos ACF

(*autocorrelation function*) e PACF (*partial autocorrelation function*)

Os resultados na Figura 9 mostram evidências de que os resíduos para o modelo da região do tipo oceano são caracterizados por ruído branco. No gráfico ACF, quase todas as defasagens ($h > 0$) estão dentro das faixas de confiança, e isso também é verdade para o gráfico PACF. Além disso, o p -valor do teste Ljung-Box é 0.3466, o que é uma indicação de que se trata de ruído branco. Na Figura 10, que representa os dados da floresta, encontra-se comportamento semelhante, tanto para as parcelas ACF e PACF quanto para o teste Ljung-Box, com p -valor 0.8768. Na Figura 11, obteve-se um resultado diferente dos demais; os gráficos ACF e PACF apontam para um padrão nos resíduos e o teste Ljung-Box forneceu p -valor igual a 0.0059, rejeitando a hipótese nula de que os resíduos são caracterizados por ruído branco.

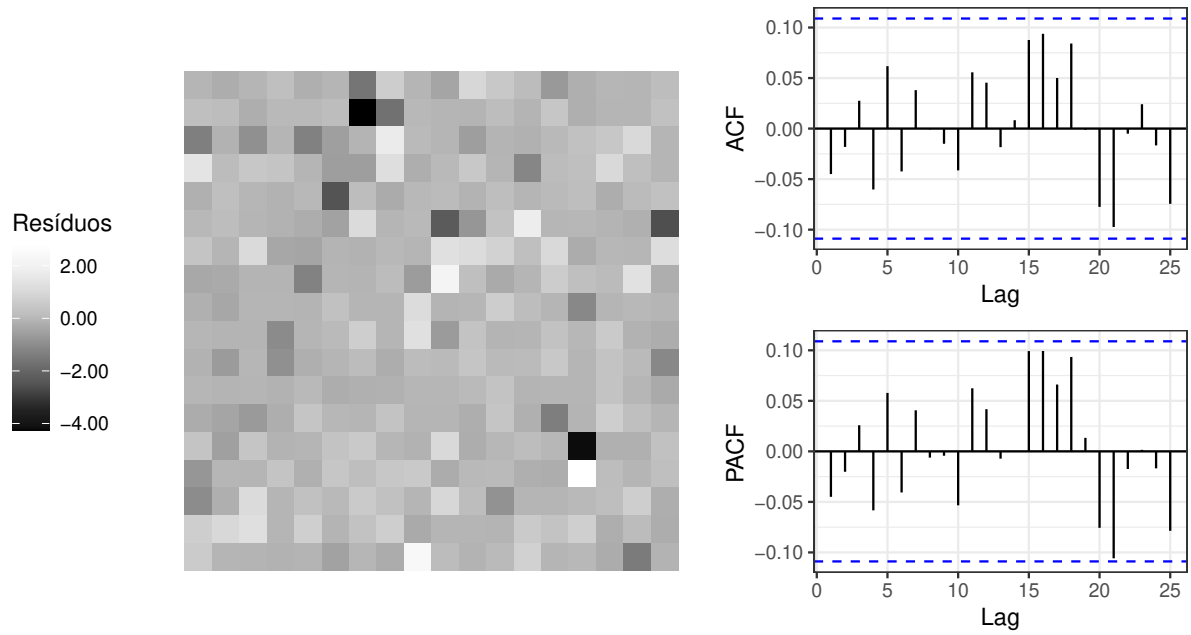
Figura 9 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2$ e região de oceano.



Fonte: O autor (2024)

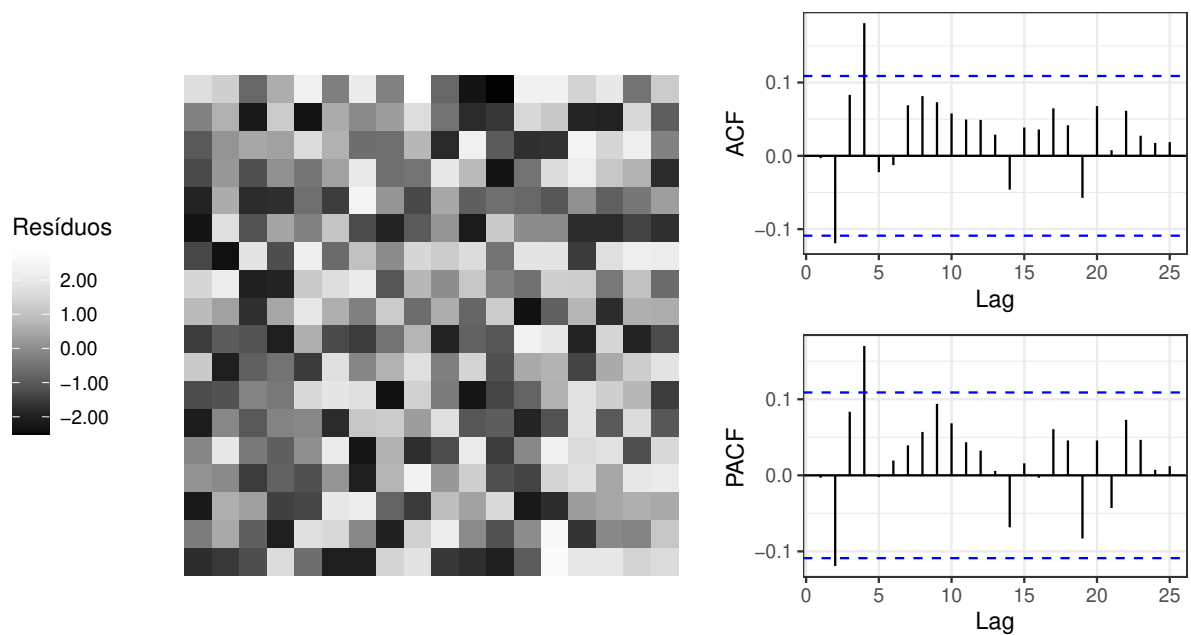
Uma vez selecionados os três melhores modelos, um para cada região, pode-se utilizar as estimativas desses modelos para gerar imagens que mostram a estrutura de dependência dessas regiões por trás das estimativas de cada modelo. A ideia é gerar 3 imagens a partir de cada modelo ajustado para simular as imagens de intensidade dos canais HH, HV e VV, e assim plotar a imagem combinada desses 3 canais. Esse tipo de abordagem pode sinalizar como cada região difere na disposição dos pixels e como cada uma é formada com base nas estimativas dos modelos ajustados. Conforme mencionado anteriormente, a Figura 10 a) é uma simulação do tipo oceano usando o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders (log-BS)

Figura 10 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2$ e região semelhante a uma floresta.



Fonte: O autor (2024)

Figura 11 – Gráficos residuais da imagem, ACF e PACF para o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders-t com $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ em região de cidade.



Fonte: O autor (2024)

com $\zeta_1 = 2$, a Figura 10 b) é para floresta, usando o modelo 2-D ARMA(1,0) log-Birnbaum-Saunders (log-BS) também com $\zeta_1 = 2$, e a Figura 10 c) é para o tipo cidade, usando o modelo 2-D ARMA(1,1) log-Birnbaum-Saunders-t (log-BS-t) com $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$. Como esperado, por inspeção visual, observa-se que a heterogeneidade é maior na região de cidade do que na região florestal e que a textura é mais pronunciada na região florestal do que na região oceânica, isso pode ser visto também analisando a Tabela 13. A Tabela 12 apresenta as estimativas (e desvios padrão) dos parâmetros destes três últimos modelos:

Tabela 12 – Estimativas e erros padrão dos modelos selecionados para cada tipo de região.

Parâmetros	Modelos 2-D		
	Região de Oceano	Região de Floresta	Região de cidade
	ARMA(1,1) log-BS	ARMA(1,0) log-BS	ARMA(1,1) log-BS-t
α	-5.5404 (0.2144)	-1.0591 (0.1997)	-0.1879 (0.0749)
$\phi_{(0,1)}$	-0.7424 (0.1376)	0.1597 (0.0594)	0.8107 (0.0809)
$\phi_{(1,0)}$	0.2503 (0.1014)	0.4132 (0.0422)	0.5796 (0.0812)
$\phi_{(1,1)}$	0.4562 (0.0684)	0.1123 (0.0556)	-0.4973 (0.1283)
$\theta_{(0,1)}$	0.7254 (0.1365)	-	-0.4629 (0.0951)
$\theta_{(1,0)}$	0.1652 (0.1208)	-	0.1972 (0.1138)
$\theta_{(1,1)}$	-0.0361 (0.0860)	-	0.0543 (0.0956)
φ	0.6792 (0.0350)	0.9757 (0.0493)	0.8109 (0.1060)
ζ_1	2.0000	2.0000	1.0000
ζ_2	-	-	1.0000

Fonte: O autor (2024)

Tabela 13 – Estatísticas descritivas para um canal das imagens geradas a partir das estimativas dos modelos finais.

Região	Medidas descritivas						
	Mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	Desvio Padrão
Oceano	0.0000	0.0027	0.0048	0.0064	0.0083	0.1103	0.0055
Floresta	0.0020	0.0177	0.0345	0.0535	0.0685	0.7665	0.0564
Cidade	0.0000	0.0530	0.1580	1.4540	0.4890	3707.4570	31.3665

Fonte: O autor (2024)

Figura 12 – Geração de imagens para cada tipo de região com base no melhor modelo, sendo a) Água, b) Floresta e c) Cidade.

a)



b)



c)



Fonte: O autor (2024)

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi proposto um novo modelo espacial para imagens SAR baseado na família de distribuições log-simétricas denominada 2-D LOGSYMARMA, relacionando a nossa proposta à formação física de imagens SAR. Alguns aspectos matemáticos do modelo foram derivados, como o vetor escore condicional e a matriz de informação de Fisher. Uma discussão sobre estimação por máxima verossimilhança condicional foi considerada para o modelo 2-D LOGSYMARMA. Escolheu-se a abordagem de *Scoring-Fisher* como método iterativo para os EMVCs. Simulações de Monte Carlo também foram realizadas para avaliar as estimativas resultantes. Na parte prática, uma aplicação teve como objetivo lidar com diferentes contrastes utilizando três imagens do tipo oceano, floresta e cidade de vizinhanças da Baía de São Francisco, EUA. Devido à versatilidade da família de modelos espaciais proposta, os resultados mostraram diferentes tipos de modelos para cada um desses tipos de contraste. A seleção dos modelos foi feita utilizando o critério MAPE como figura de mérito. Os resultados mostraram que a melhor opção para a imagem SAR do oceano foi o modelo 2-D ARMA(1,1) Log-Birnbaum-Saunders com $\zeta_1 = 2$; para a floresta, o modelo 2-D ARMA(1,0) Log-Birnbaum-Saunders também com $\zeta_1 = 2$; e, para a cidade, o modelo 2-D ARMA(1,1) Log-Birnbaum-Saunders-t com $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$. Uma análise residual baseada no resíduo componente do desvio confirmou, para o exemplo utilizado, que nossa proposta foi capaz de descrever os três tipos de contrastes SAR. Por fim, utilizamos os modelos preditos em cada tipo de textura para gerar imagens artificiais que mostraram como a alteração dos parâmetros da parte espacial afeta a estrutura da imagem. A textura artificial do oceano não apresentou padrões nos pixels, enquanto que a textura artificial da floresta apresentou mais variação de padrão do que a anterior. Na textura artificial da cidade, vimos muitas sobreposições e padrões valores de intensidade, indicando que se trata de estruturas encontradas em ambientes urbanos.

Para o futuro, alguns trabalhos futuros são concebíveis:

- (i) O uso de estimadores robustos.
- (ii) Aplicação do nosso modelo em outros processos de pós-processamento de imagens SAR, como segmentação e classificação.

REFERÊNCIAS

- AI, J.; QI, X.; YU, W.; DENG, Y.; LIU, F.; SHI, L. A New CFAR Ship Detection Algorithm Based on 2-D Joint Log-Normal Distribution in SAR Images. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 7, n. 4, p. 806–810, 2010.
- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. $\mathcal{G}_I^0$ ARMA process for speckled data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor Francis, v. 91, n. 15, p. 3125–3153, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1922688>>.
- ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Estimation of the Equivalent Number of Looks in Polarimetric Synthetic Aperture Radar Imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 47, n. 11, p. 3795–3809, 2009.
- Bayer, Fábio M. and Bayer, Débora M. and Marinoni, Andrea and Gamba, Paolo. A novel Rayleigh dynamical model for remote sensing data interpretation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 58, n. 7, p. 4989–4999, 2020.
- BOWMAN, F. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications, 1958. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486604626. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ue5IAwAAQBAJ>>.
- BOX, G. E.; TIAO, G. C. *Bayesian inference in statistical analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1973.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Introduction to time series and forecasting*. [S.l.]: Springer, 2002.
- BUSTOS, O.; OJEDA, S.; VALLEJOS, R. Spatial ARMA models and its applications to image filtering. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Brazilian Statistical Association, v. 23, n. 2, p. 141 – 165, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/08-BJPS019>>.
- BUSTOS, O. H.; RUIZ, M.; OJEDA, S.; VALLEJOS, R.; FRERY, A. C. Asymptotic behavior of RA-estimates in autoregressive 2D processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 139, n. 10, p. 3649–3664, 2009. ISSN 0378-3758. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375809001207>>.
- CHO, H.-K.; BOWMAN, K. P.; NORTH, G. R. A Comparison of Gamma and Lognormal Distributions for Characterizing Satellite Rain Rates from the Tropical Rainfall Measuring Mission. *Journal of Applied Meteorology*, American Meteorological Society, Boston MA, USA, v. 43, n. 11, p. 1586 – 1597, 2004. Disponível em: <<https://journals.ametsoc.org/view/journals/apme/43/11/jam2165.1.xml>>.
- CHUNG, Y.-S.; KANEFSKY, M. On 2-D recursive LMS algorithms using ARMA prediction for ADPCM encoding of images. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, v. 13, p. 416–22, 1992. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:29236919>>.
- CORDEIRO, G.; FERRARI, S.; OPAZO, M. U.; VASCONCELLOS, K. Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics & Probability Letters*, v. 46, p. 317–328, 02 2000.

DAINTY, J. C. *Laser speckle and related phenomena*. [S.l.]: Springer science & business Media, 2013. v. 9.

DAVISON, A. C.; GIGLI, A. Deviance residuals and normal scores plots. *Biometrika*, v. 76, n. 2, p. 211–221, 06 1989. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/76.2.211>>.

ENNOURI, K.; SMAOUI, S.; TRIKI, M. A. Detection of Urban and Environmental Changes via Remote Sensing. *Circular Economy and Sustainability*, Springer, v. 1, n. 4, p. 1423–1437, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s43615-021-00035-y>>.

FANG, K. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. CRC Press, 2018. ISBN 9781351093941. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=NL1HDwAAQBAJ>>.

FIRTH, D. Multiplicative Errors: Log-Normal or Gamma? *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, [Royal Statistical Society, Wiley], v. 50, n. 2, p. 266–268, 1988. ISSN 00359246. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2345764>>.

FRERY, A. C.; NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J. Analytic Expressions for Stochastic Distances Between Relaxed Complex Wishart Distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, n. 2, p. 1213–1226, 2014.

HALL, T.; GIANNAKIS, G. Bispectral analysis and model validation of texture images. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 4, n. 7, p. 996–1009, 1995.

JAIN, A. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989. (Prentice-Hall information and system sciences series). ISBN 9780133361650. Disponível em: <<https://books.google.de/books?id=mQNSAAAAMAAJ>>.

KIZILKAYA, A.; KAYRAN, A. H. ARMA-Cepstrum Recursion Algorithm for the Estimation of the MA Parameters of 2-D ARMA Models. *Multidimensional Syst. Signal Process.*, Kluwer Academic Publishers, USA, v. 16, n. 4, p. 397–415, oct 2005. ISSN 0923-6082. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11045-005-4126-3>>.

LEE, J.-S.; POTTIER, E. *Polarimetric Radar Imaging: From Basics to Applications*. Boca Raton: CRC, 2009. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6AIEDwAAQBAJ>>.

LIM, J. S. *Two-dimensional signal and image processing*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1990. ISBN 0139353224.

NIJIM, Y.; STEARNS, S.; MIKHAEL, W. Lossless compression of images employing a linear IIR model. In: *1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Circuits and Systems Connecting the World. ISCAS 96*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 305–308 vol.2.

OJEDA, S.; VALLEJOS, R.; BUSTOS, O. A new image segmentation algorithm with applications to image inpainting. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 54, n. 9, p. 2082–2093, 2010. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947310001234>>.

OLIVER, C.; QUEGAN, S. *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Artech House, 1998. (Artech House remote sensing library). ISBN 9780890068502. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iwxTAAAAMAAJ>>.

- PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. 2-D Rayleigh autoregressive moving average model for SAR image modeling. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 171, p. 107453, 2022.
- RISCO-COSVALENTE, D.; CYSNEIROS, F. The Zero-Adjusted Log-Symmetric Distributions: Point and Interval Estimation. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 95, 07 2023.
- SILVA, W. B. F. da; ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. Generalized gamma ARMA process for synthetic aperture radar amplitude and intensity data. *Environmetrics*, v. 34, n. 7, p. e2816, 2023. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/env.2816>>.
- VANEGAS, L. H.; PAULA, G. A. A semiparametric approach for joint modeling of median and skewness. *Test*, Springer, v. 24, p. 110–135, 2015.
- VANEGAS, L. H.; PAULA, G. A. Log-symmetric distributions: statistical properties and parameter estimation. 2016.
- VILA, R.; BALAKRISHNAN, N.; SAULO, H.; PROTAZIO, A. *Bivariate log-symmetric models: distributional properties, parameter estimation and an application to fatigue data analysis*. 2022.
- VILLEGAS, C.; PAULA, G. A.; CYSNEIROS, F. J. A.; GALEA, M. Influence diagnostics in generalized symmetric linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 59, p. 161–170, 2013. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947312003623>>.

APÊNDICE A – FUNÇÃO DE LOG-VEROSSIMILHANÇA CONDICIONAL

Este apêndice contém as expressões que compõem o vetor de pontuação logaritmo da função de verossimilhança condicional do modelo 2D-LOGSYMARMA.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} &= - \frac{2 g' \left(\log^2 \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right) \right) \log \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right)}{\sqrt{\varphi} g \left(\log^2 \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right) \right) \eta[n, m]} \\ &= \frac{W(\tilde{t}[n, m]) \tilde{t}[n, m]}{\eta[n, m] \sqrt{\varphi}} \end{aligned}$$

em que $W(\tilde{t}[n, m]) = -2 g'(\tilde{t}^2[n, m]) / g(\tilde{t}^2[n, m])$

$$\frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} = \frac{1}{h'(\eta[n, m])}$$

$$\frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \gamma_1} = \left(\frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \alpha}, \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \beta}, \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \phi_{(i, j)}}, \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \theta_{(k, l)}} \right)$$

e também é definido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \alpha} &= 1 - \sum_{s=0}^q \sum_{t=0}^q \theta_{(s, t)} \frac{\partial \xi[n-s, m-t]}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \beta_v} &= \mathbf{x}^\top[n, m] - \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \phi_{(i, j)} \mathbf{x}^\top[n-i, m-j] - \sum_{s=0}^q \sum_{t=0}^q \theta_{(s, t)} \frac{\partial \xi[n-s, m-t]}{\partial \beta_v}, \\ \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \phi_{(i, j)}} &= h(t[n-i, m-j]) - \mathbf{x}^\top[n, m] \beta - \sum_{s=0}^q \sum_{t=0}^q \theta_{(s, t)} \frac{\partial \xi[n-s, m-t]}{\partial \phi_{(i, j)}}, \\ \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \theta_{(k, l)}} &= h(t[n-k, m-l]) - h(\eta[n-k, m-l]) - \sum_{s=0}^q \sum_{t=0}^q \theta_{(s, t)} \frac{\partial \xi[n-s, m-t]}{\theta_{(k, l)}}, \end{aligned}$$

com $v = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2\varphi} - \frac{\log \left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right) g' \left(\log^2 \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right) \right) \log \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right)}{g \left(\log^2 \left(\left(\frac{t[n, m]}{\eta[n, m]} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\varphi}}} \right) \right) \varphi^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2\varphi} + \frac{W(\tilde{t}[n, m]) \tilde{t}^2[n, m]}{2\varphi} \end{aligned}$$

APÊNDICE B – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER CONDICIONAL

Este apêndice contém as expressões que compõem a matriz de informação condicional esperada de Fisher, $\mathbf{K}$, do modelo 2D-LOGSYMARMA. A expressão foi calculada pela expectativa do produto da log-verossimilhança, que é definida a seguir

$$K_{r,s} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma_r \partial \gamma_s} \middle| S[n, m] \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma_r} \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \gamma_s} \middle| S[n, m] \right]$$

(a) Elementos da Matriz $K_{\lambda, \eta}$ Os parâmetros λ_i e η_j são usados aqui como um substituto para α , β_k , $\phi_{(i,j)}$ e $\theta_{(k,l)}$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} K_{\lambda_i \eta_j} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \eta_j} \middle| S[n, m] \right] \\ &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \eta_j} \right) \middle| S[n, m] \right] \\ &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \right)^2 \middle| S[n, m] \right] \left(\frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \right)^2 \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \eta_j} \\ &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\left(\frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}[n, m]}{\sqrt{\varphi\eta[n, m]}} \right)^2 \middle| S[n, m] \right] \left(\frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \right)^2 \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \eta_j} \\ &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{1}{\varphi\eta^2[n, m]} \mathbb{E} \left[W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m] \middle| S[n, m] \right] \left(\frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \eta_j} \\ K_{\lambda_i \eta_j} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \right)^2 \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \eta_j} \end{aligned}$$

em que $d_g = \mathbb{E} \left[W^2(\tilde{t}[n, m]) \tilde{t}^2[n, m] \middle| S[n, m] \right]$. No final, temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\alpha\alpha} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\alpha} \right)^2 \\
\mathbf{K}_{\alpha\beta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\alpha} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\beta_k} \right) \\
\mathbf{K}_{\alpha\phi} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\alpha} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\phi_{(i,j)}} \right) \\
\mathbf{K}_{\alpha\theta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\alpha} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\theta_{(k,l)}} \right) \\
\mathbf{K}_{\beta\beta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\beta_k} \right)^2 \\
\mathbf{K}_{\beta\phi} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\beta_k} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\phi_{(i,j)}} \right) \\
\mathbf{K}_{\beta\theta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\beta_k} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\theta_{(k,l)}} \right) \\
\mathbf{K}_{\phi\phi} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\phi_{(i,j)}} \right)^2 \\
\mathbf{K}_{\phi\theta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\phi_{(i,j)}} \right) \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\theta_{(k,l)}} \right) \\
\mathbf{K}_{\theta\theta} &= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{d_g}{\varphi\eta^2[n, m]} \left(\frac{\partial\eta[n, m]}{\partial\xi[n, m]} \right)^2 \left(\frac{\partial\xi[n, m]}{\partial\theta_{(k,l)}} \right)^2
\end{aligned}$$

(b) Elementos da Matriz $K_{\lambda_i, \varphi}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\lambda_i \varphi} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \eta[n, m]} \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \xi[n, m]}{\partial \lambda_i} \mathbb{E} \left[\left(\frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}[n, m]}{\eta[n, m]\sqrt{\varphi}} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(-\frac{1}{2\varphi} + \frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m]}{2\varphi} \right) \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \xi[n, m]} \frac{\partial \zeta[n, m]}{\partial \lambda_i} \frac{1}{2\varphi^{3/2}\eta[n, m]} \mathbb{E} \left[W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}[n, m] \right. \\
&\quad \left. + W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^3[n, m] \middle| S[n, m] \right]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{\lambda_i \varphi} = \mathbf{0}$$

em que $\tilde{t}[n, m]$ é uma função par e $W(\tilde{t}[n, m])$ é uma função ímpar. No final, substituindo λ_i , obtemos os seguintes resultados:

$$\mathbf{K}_{\alpha \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_{\beta \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_{\phi \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_{\theta \varphi} = \mathbf{0}$$

(c) Elementos da Matriz $K_{\varphi, \varphi}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\varphi \varphi} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \varphi} \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} \frac{\partial \ell[n, m](\eta[n, m])}{\partial \varphi} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\left(\frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m] - 1}{2\varphi} \right) \left(\frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m] - 1}{2\varphi} \right) \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \mathbb{E} \left[\frac{1}{4\varphi^2} - \frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m]}{4\varphi^2} - \frac{W(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^2[n, m]}{4\varphi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^4[n, m]}{4\varphi^2} \middle| S[n, m] \right] \\
&= \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \left(\frac{1}{4\varphi^2} - \frac{1}{4\varphi^2} - \frac{1}{4\varphi^2} + \frac{f_g}{4\varphi^2} \right) \\
\mathbf{K}_{\varphi \varphi} &= \frac{(N-w)(M-w)(f_g - 1)}{4\varphi^2}
\end{aligned}$$

$$\text{em que } f_g = \mathbb{E} \left[W^2(\tilde{t}[n, m])\tilde{t}^4[n, m] \middle| S[n, m] \right]$$