



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA

RHAFael DOS SANTOS GOMES

**FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS: investigando o
desenvolvimento de estratégias**

Recife
2024

RHAFael DOS SANTOS GOMES

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS: investigando o desenvolvimento de estratégias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino das Ciências e da Matemática.

Orientador (a): Professor (a) Dr. (a) Kátia Maria de Medeiros

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Gomes, Rhafael Dos Santos.

Formulação de problemas algébricos recreativos: investigando o desenvolvimento de estratégias / Rhafael Dos Santos Gomes. - Recife, 2024.

161f.: il.

Dissertação (Mestrado), Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2024.

Orientação: Kátia Maria de Medeiros.

1. Formulação de problemas; 2. Estratégias de formulação; 3. Problemas algébricos recreativos; 4. Ensino Fundamental II. I. Medeiros, Kátia Maria de. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

CDD 372.7

RHAFael DOS SANTOS GOMES

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS: investigando o desenvolvimento de estratégias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino das Ciências e da Matemática.

Aprovada em: 27/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Ernani Martins dos Santos (Examinador Externo ao Programa)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Interno ao Programa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dedico à Deus e à minha família: esposa (Elani), ao meu filho (Marcos) e aos meus pais (Luiz Onildo e Miriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus todo poderoso, pelo dom de vida e de poder me conceder perseverança nos momentos difíceis, por não me ter deixado desistir no percurso desta caminhada;

À minha esposa, Elani, por ter me auxiliado com nosso filhinho durante este mestrado;

Aos meus pais, símbolos de força e honra, que nortearam minha criação;

À Professora Dra. Kátia Maria de Medeiros, pela orientação, apoio, paciência e confiança, em todos os momentos;

Agradeço a todos os professores do Mestrado pelas aprendizagens proporcionadas;

Aos membros dos grupos de pesquisa que participo, como o Grupo de Estudos em Recursos para a Educação – GERE, Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática-GPDM e dos grupos de estudo e pesquisa que participei, como o Grupo de Estudos e Pesquisas em Políticas Públicas e o Grupo de Pesquisa em Educação, Políticas Públicas, Inovação e Tecnologias.

“É o Senhor quem dá sabedoria; a sabedoria e o entendimento vêm Dele.”

Provérbios 2:6

RESUMO

Esta pesquisa tem como questão norteadora a indagação de como os estudantes podem desenvolver o pensamento matemático com estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos? O objeto de estudo foi a reformulação de problemas algébricos recreativos no 9º Ano, tendo como objetivo geral investigar como os estudantes desenvolvem estratégias no processo de reformulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula. Os objetivos específicos: investigar como os estudantes concebem a formulação de problemas algébricos recreativos; identificar as estratégias das reformulações de problemas algébricos recreativos desenvolvidas pelos estudantes; analisar como será desenvolvido o pensamento algébrico durante o processo de reformulação de problemas. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes de uma escola da rede pública municipal de ensino em Pernambuco, utilizando como metodologia de pesquisa, a abordagem qualitativa, estudos de caso, de dois estudantes, em atividades de formulação de problemas algébricos recreativos. Estes eram baseadas nos textos, que apresentam o Problema adaptado das Pérolas do Rajá, do livro O Homem que Calculava, de Malba Tahan, O Cavalo e a Mula, do livro de Yakov Perelman. Foram realizadas duas entrevistas semiestruturadas, uma no início da pesquisa e outra após as duas sessões de formulação de problemas algébricos recreativos e um questionário. Fizemos a análise dos dados produzidos com categorias a priori que são as concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, estratégias de formulação dos problemas algébricos recreativos e o desenvolvimento do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas. E as categorias a posteriori, emergiram: Formulação de Exercícios; e A linguagem lógico matemática utilizada. Os resultados sugerem, em ambos os casos, que os estudantes, ao utilizarem as estratégias de formulação de problemas, formularam exercícios e ainda não transitaram o seu pensamento matemático da aritmética para a álgebra. As concepções de ambos sobre a formulação de problemas algébricos recreativos diferiram. No Caso 1, o estudante não tem clareza sobre a álgebra e nem interesse por recreações matemáticas em problemas contextualizados. Por sua vez, no Caso 2, a estudante demonstra alguma compreensão sobre a álgebra, se diverte com a Matemática e a vê em contextos.

Palavras-chave: Formulação de problemas; Estratégias de formulação; Problemas algébricos recreativos; Ensino Fundamental II.

ABSTRACT

This research has as its guiding question the question of how can students develop mathematical thinking with strategies for formulating recreational algebraic problems? The object of study was the formulation of recreational algebraic problems in the 9th year, with the general objective of investigating how students develop strategies in the process of formulating recreational algebraic problems in the classroom. The specific objectives: investigate how students conceive the formulation of recreational algebraic problems; identify the strategies for formulating recreational algebraic problems developed by students; analyze how algebraic thinking will be developed during the problem formulation process. The research was developed with students from a municipal public school in Pernambuco, using a qualitative approach as a research methodology, case studies, of two students, in activities that involve the formulation of recreational algebraic problems. These were based on the texts, which present the Problem adapted from the Rajah's Pearls, from the book *The Man Who Calculated*, by Malba Tahan, *The Horse and the Mule*, from the book by Yakov Perelman. Two semi-structured interviews were carried out, one at the beginning of the research and another after the two sessions of formulating recreational algebraic problems and a questionnaire. We analyzed the data produced with a priori categories that are students' conceptions about formulating recreational algebraic problems, strategies for formulating recreational algebraic problems, and the development of algebraic thinking during the problem formulation process. And the subsequent categories emerged: Exercise Formulation; and The logical mathematical language used. The results suggest, in both cases, that students, when using problem formulation strategies, formulated exercises and have not yet transitioned their mathematical thinking from arithmetic to algebra. Their views on the formulation of recreational algebraic problems differed. In Case 1, the student is neither clear about algebra nor interested in mathematical recreations of contextualized problems. In turn, in Case 2, the student demonstrates some knowledge of algebra, has fun with Mathematics and sees it in contexts.

Keywords: Problem formulation; Formulation strategies; Recreational algebraic problems; Elementary School II.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Problema 1 reformulado por Marcos	98
Figura 2 –	Problema 2 reformulado por Marcos	104
Figura 3 –	Problema 1 reformulado por Cecília	126
Figura 4 –	Problema 2 reformulado por Cecília	130

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.....	18
2.1 FORMULAR PROBLEMAS E MUDANÇAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA.....	18
2.2. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS E SUAS ESTRATÉGIAS	23
2.3. SÍNTESE	29
3 PROBLEMAS MATEMÁTICOS RECREATIVOS: UM POUCO DE HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR	32
3.1. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS RECREATIVOS E CONCEPÇÕES	38
3.2. SÍNTESE	43
4 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS E PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	45
4.1. SÍNTESE	48
5 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	50
5.1. SÍNTESE	56
6 REVISÃO DE LITERATURA	58
IMPLICAÇÕES DA REVISÃO DE LITERATURA	63
7 OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	65
7.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	65
7.2 LOCAL DA PESQUISA.....	66
7.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA	66
7.4 CRITÉRIOS DE INCLUSÃO E EXCLUSÃO.....	67
7.5 SELEÇÃO DE PARTICIPANTES.....	67
7.6 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS E OS PROCEDIMENTOS.....	68
7.7 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS	73
7.8. ASPECTOS ÉTICOS	74
8 O ESTUDO DE CASO 1- MARCOS	76
8.1 Apresentação	76
8.2 As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos.....	76
8.3. As estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos	93
PRIMEIRA SESSÃO	93
SEGUNDA SESSÃO	99
Utilização do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas...	103

8.5 Síntese.....	110
9 O ESTUDO DE CASO 2- Cecília.....	113
9.1 Apresentação	113
9.2 As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos.....	113
9.3 As estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos	120
PRIMEIRA SESSÃO	120
SEGUNDA SESSÃO	123
9.4 Utilização do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas	128
9.5 Síntese.....	131
10 CONCLUSÕES	132
Instrumentos de coleta de dados.....	132
Considerações finais.....	134
As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos	135
As Estratégias de Formulação de Problemas.....	135
Formulação de exercícios	137
A linguagem lógico matemática utilizada.....	139
REFERÊNCIAS.....	140
APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL (TAI)	148
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS).....	150
APÊNDICE D – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE	158
APÊNDICE E – DIÁRIO DE BORDO.....	159

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa advém, inicialmente, de um interesse individual sobre a temática do pensamento algébrico na Educação Matemática. Esse tema se relaciona diretamente com possíveis dificuldades na aprendizagem dos estudantes no campo da álgebra.

Em busca de mais conhecimento, participei como estudante do curso de extensão: conhecimento didático acerca da álgebra nos anos iniciais. O curso foi organizado pelo Grupo de Pesquisa Al Jabr em História, Epistemologia e Didática da Álgebra, em parceria com a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e a Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Isso gerou mais indagação em relação à utilização do pensamento algébrico como forma recreativa na Matemática.

Desenvolvo atividades de docência escolar, onde leciono matemática para turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Dessa forma, temos como motivação pessoal para desenvolver a pesquisa, o fato de colaborar no aprimoramento da unidade temática de álgebra, que é uma área da Matemática, em especial no Ensino Fundamental. A álgebra tem ocupado um espaço de habilidades específicas na Base Nacional Comum Curricular-BNCC, que subdivide as habilidades em unidades de conhecimento (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) (Brasil, 2018, p. 527).

A BNCC ainda pontua o fato de que:

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p.536).

O documento em questão não traz tantas sugestões de estratégias para formulação de problemas, tratando da formulação como uma aliada na resolução de problemas. Logo, diante disso, citaremos alguns estudos que versam sobre a resolução de problemas, por entender que está intimamente ligada à formulação, pelo

fato de não somente sistematizar ideias, mas também por utilizar com resolução de problemas, a capacidade de flexibilização, ao abandonar hipóteses e criar novas, que tem como uma forma de utilização, a resolução de problemas.

Com relação à BNCC, por se tratar de um documento norteador para os currículos regionais, cita que as habilidades exploradas envolvam uso de técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais, construir modelos com funções para resolver problemas em contextos diversos, interpretar e comparar situações assim como suas representações, empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície, recorrer a estratégias diversas, como o diagrama de árvore, investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que auxilia na resolução de um problema.

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais (Brasil, 2018, p. 270).

A busca por uma interação maior entre estudantes, professores e conteúdo, sendo trabalhada de forma significativa, viabilizando aos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem, maiores possibilidades de correlações entre as diversas áreas de conhecimento, a apropriação, por parte dos estudantes, de caminhos que viabilizam ao reconhecimento de procedimentos semelhantes e comuns para a formulação de problemas algébricos recreativos, assim temos como pretensão, discutir estratégias no campo da Educação Matemática, sobre o fazer pensar, e pensar algebricamente.

Segundo orientação da Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018), nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os estudos de álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nessa fase, os estudantes devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os estudantes estabeleçam conexões entre

variável e função e entre incógnita e equação, assim como, norteia que a álgebra deve ser vista através da construção gradativa de conhecimentos, tentando promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os estudantes estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.

Desse modo, tomamos como pressuposto que a formulação de problemas, como tarefa realizada, pode ter um papel essencial para a compreensão e utilização das noções Matemáticas, para isso, essas noções precisam estar integradas a situações que levem à reflexão e à sistematização, para, ao que pretendemos verificar, se inicie um processo de formalização matemática.

No Ensino Fundamental, mais especificamente nos anos finais, ainda de acordo com a BNCC, devem-se retomar as vivências cotidianas dos estudantes com números, formas e espaço, e as experiências desenvolvidas na Educação Infantil, para iniciar uma sistematização das noções do pensamento algébrico.

O Currículo de Pernambuco (2019), documento baseado na teoria descrita na BNCC, em relação ao ensino fundamental, esse documento coloca a formulação de problemas na matemática como parte do desenvolvimento que favorece o letramento matemático, pois, juntamente com a resolução de problemas, possibilita utilizar ferramentas matemáticas em uma variedade de contextos no uso da matemática escolar. Já na unidade temática de álgebra, o documento aponta que os estudantes estabeleçam leis matemáticas em diferentes contextos, que a criação, interpretação e a transição estejam presentes “entre as diversas representações gráficas e simbólicas para resolver problemas por meio de equações e inequações com compreensão dos procedimentos utilizados” (Pernambuco, 2019, p.361).

Ainda evidenciamos no mesmo documento, uma citação da formulação de questões no tópico de Estatística e Probabilidade, para serem utilizados como formas de competências associadas que “envolvam a obtenção de dados; coleta, organização e apresentação de informações; observação e interpretação de fenômenos” (p. 370), sendo relacionada ao letramento estatístico.

Diante disso, nossa pesquisa teve como objetivo geral a investigação das estratégias desenvolvidas pelos estudantes no processo de formulação de problemas algébricos.

O objeto de estudo deste trabalho é a reformulação de problemas algébricos recreativos no 9º Ano. Esta é uma temática relevante, considerando que ainda temos uma utilização limitada da formulação de problemas nas aulas de Matemática no Brasil.

A formulação de problemas algébricos recreativos, desde o Ensino Fundamental, pode contribuir para que os estudantes concebam o seu papel na aula de Matemática de maneira ativa. Isso ocorre quando eles se sentem valorizados pelo professor e pelos demais colegas, e são levados a refletir sobre conteúdos algébricos de maneira prazerosa, por meio de problemas recreativos.

Com esses aspectos, contribuímos para formar estudantes autônomos que podem também desenvolver um apreço pela Matemática. Isso é muito relevante, tendo em vista que a Matemática traz muitos benefícios para aqueles que são hábeis em compreendê-la.

No decorrer deste trabalho, apresentaremos os capítulos que compõem a nossa fundamentação teórica. No Capítulo 2, abordamos a formulação de problemas e as mudanças nas aulas de matemática. Já no Capítulo 3, discutimos a formulação de problemas matemáticos e suas estratégias.

2. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Nesse tópico encontram-se algumas pesquisas no âmbito da Educação Matemática. Acorando-nos em referências fundamentais para a formulação de problemas matemáticos como Brown & Walter (2005; 2013), Polya (2006), Silver (1994), Medeiros e Santos (2007), e Baumanns e Root (2022b)

2.1 FORMULAR PROBLEMAS E MUDANÇAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Para Dante (2005), um problema é qualquer situação que exija o pensamento matemático e conhecimentos específicos para solucioná-lo. Dante faz um contraponto sobre as diferenças entre problema matemático e exercício matemático. O autor

caracteriza que um problema matemático é toda situação que necessita da descoberta de dados matemáticos desconhecidos, para a pessoa que tenta resolvê-lo de acordo com um resultado matemático já consolidado.

Brown e Walter (2005) enfocam na obra intitulada “The Art of Problem Posing”, que a formulação de problemas pode ajudar os estudantes a enxergar um argumento padronizado mais nítido e permitir que eles possam captar uma compreensão mais profunda dos problemas. Assim como, pode encorajar a criatividade, alcançando novas ideias advindas de qualquer temática do padrão curricular ou não. A principal proposta da obra é descrever estratégias para a formulação de problemas, revelar e analisar questões e ideias que são geralmente indutivas.

Desta forma, a obra faz referência de que as formulações ou problemas matemáticos podem sofrer mudanças na resolução ou proposição. Sobre essas adaptações nas proposições, Brown e Walter (2005, p. 5) citam que “Uma ligeira mudança de expressão, ou (re)contextualizar a situação, ou apresentar um problema, a transformará de algo que parece sem graça em algo que ‘brilha’”.

Brown e Walter (2005) substituem a palavra “colocar” por “formular”, acreditamos que por questão de tradução do inglês para o português do Brasil, e citam que formular problemas de forma literal, modificar contextualizando, potencializa a criatividade e orienta uma nova visão do que deve ser aprendido. Os ensaios teóricos vistos ao longo da obra abrangem situações ligadas à natureza da formulação de problemas em relação à resolução de problemas, que podem contribuir para o desenvolvimento de um senso de autonomia e independência dos estudantes, levando ao domínio da essência de uma operação ou atividade, ou seja, uma sistematização de ideias matemáticas.

Os autores tiveram como principal público-alvo estudantes universitários de Matemática, professores de Matemática do ensino fundamental, médio e nos níveis superiores de ensino. “The Art of Problem Posing” mostra os problemas divididos em fases, com exemplos de objetos e situações e das estratégias para geração de problemas, com objetos concretos, abstratos e dados, envolvendo uma tentativa de concentrarem-se em observações, conjecturas e perguntas sem se preocupar em primeiro interrelacioná-los e posteriormente verificar que as várias fases da formulação de problemas enriquecem muitas facetas para compreender, fazer e aprender Matemática.

A partir do Capítulo 4, Brown e Walter apresentam na obra, uma lógica e um conjunto de estratégias para a atividade de formulação de problemas, esboçando uma estratégia de formulação de problemas como uma nova maneira de defini-los. Eles argumentam que a formulação de problemas também depende de outros aspectos da atividade matemática, desde a resolução de problemas até uma maior compreensão pessoal, e explicam como “esforçar-se” permitiu progredir para uma nova maneira de conceber a multiplicação.

Eles propõem um padrão que aponta para um modelo que permite que os estudantes se fundamentem nos pontos fortes uns dos outros. No que diz respeito a esse modelo, sugerem diversas atividades, como o Geoplano e o Teorema de Pitágoras, que podem ser executadas em um ambiente educacional, onde os julgamentos criativos e críticos podem ser incentivados.

Assim, eles utilizam conceitos de álgebra, geometria, teoria dos números e teoria da probabilidade. O uso de dados, um problema, um algoritmo e até mesmo uma atividade são pressupostos iniciais para a formulação de problemas.

Segundo Brown e Walter (2005, p. 109):

Dentro de variações com uso de dados, um problema, um algoritmo e até mesmo uma atividade como pontos de partida para geração de problemas, como, por exemplo, uma análise de atividade com a sequência de Fibonacci e problema simples como calcular a área de um retângulo, tenta descobrir não apenas um senso de criatividade associado com a ponderação “E-se-não”, com base em uma lista de alguns dos atributos, almeja mostrar como este processo frequentemente permite descobrir profundidades insuspeitadas em pontos de partida que podem parecer triviais, mas que revelam a importância de olhar para situações óbvias que por conta do seu caráter simplório, passar despercebido além do que, uma ligeira modificação de uma pergunta significativa, pode levar a resultados surpreendentes, ou seja, revisando e explorando ainda mais como a solução de um problema pode não apenas permitir encontrar uma resposta para um problema que foi colocado, mas também ajuda a apreciar características inesperadas do problema.

A expressão “e se não” (o que seria, se não fosse), vista como uma estratégia definida a partir do capítulo 4, é salientada pelos autores. Ela discute e analisa uma conjectura para ver o que acontece ao investigar uma questão antiga sob uma nova definição. A exploração da categoria de inversões (conceber o fenômeno de várias maneiras) resulta em uma forma de modificar atributos e fazer novas perguntas.

Podemos muito bem ser roubados de uma grande quantidade de pensamento sério ao insistir na clareza no prematuro estágio dentro da definição de problemas. Isto é, vale a pena investigar todas as diferentes maneiras pelas

quais “o dado” pode ser interpretado, bem como a análise pode depender das diferentes suposições e ferramentas que nos permitimos usar (Brown & Walter, 2005, p. 120).

Os autores enfatizam os pressupostos para a formulação de um problema, considerando-o até como uma arte. Isso pode auxiliar desde a obtenção de uma visão mais clara do contexto até o fornecimento de uma base mais sólida para ajudar os estudantes durante a execução das atividades.

Medeiros e Santos (2007) apresentam em sua pesquisa *“Uma Experiência Didática com a Formulação de Problemas Matemáticos”*, que investigou a formulação de problemas por estudantes de uma escola pública municipal da região metropolitana do Recife, Pernambuco. Os estudantes, com idades entre 13 e 16 anos e no 1º ano do Ensino Médio, procuraram descrever como formularam problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de textos.

Eles compreenderam o significado expresso na relação intertextual de problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de textos e realizaram uma análise das alterações estruturais ocorridas nos problemas formulados em relação aos problemas fechados ou padrão.

Salientamos que, em um caso específico, um dos estudantes pesquisados não gerou perguntas. Logo, de acordo com os autores, não houve formulação.

Assim como Polya (2006) e Ramirez (2006), os autores Medeiros e Santos (2007) consideram que a resolução de problemas é a espinha dorsal da Matemática. Eles veem isso como um dos meios mais eficientes para a aprendizagem da matemática, que evolui por meio da resolução de problemas oriundos de contextos diferentes.

Os autores destacam que, ao trabalhar com a formulação de problemas, o professor desempenha várias atividades além de uma simples tarefa. Por outro lado, o estudante, ao criar seus próprios problemas textuais, empenha-se em pensar no problema como um todo. Isso significa que ele não se concentra apenas em números, em algumas palavras-chave ou na própria pergunta, como ocorre quando o professor trabalha com problemas fechados ou rotineiros (Medeiros & Santos, 2007, p. 91).

Os problemas fechados são trabalhados de forma repetitiva, com procedimentos padrões e já previsíveis tanto pelo aluno quanto pelo professor. Isso se caracteriza por gerar certas regras de contrato didático, restringindo novas possibilidades.

Portanto, o que se indica como uma mudança no contrato didático entre professor, estudantes e um saber a ser ensinado na sala de aula, pode ser visto como a proposta de que os estudantes formulem problemas. Isso permite mudar as regras, emergindo novas e ampliando as possibilidades de formular problemas matemáticos. Isso traz para o estudante a necessidade implícita de se tornar um produtor de textos. Quando essa ruptura não ocorre, caímos nas práticas correntes do ensino tradicional, o que é um fator limitante, no qual:

O aluno tenha por tarefa encontrar a solução esperada pelo professor e, para tal, ele precisa identificar a solução típica daquele problema. Perante essa situação, o aluno pode ser levado a uma atitude de dependência ou de memorização de conhecimentos (Medeiros e Santos, 2007.p 92).

Ao tratar da ruptura do contrato didático, Pelay (2011) corrobora em seu estudo com jogos e aprendizagens matemáticas que o estudante, especialmente a criança, é altamente motivado quando envolvido em atividades lúdicas. Essas atividades buscam aprimorar o ensino da Matemática, o que pode levar a um aprendizado implícito e até mesmo imperceptível do estudante de conceitos importantes em Matemática. Segundo o autor, as crianças permitem conciliar satisfação e atividade matemática.

Dessa forma, Pelay cita que “o contrato didático não pode ser usado para modelar a situação”, mas sim como um instrumento para compreender as interações lúdicas e desenhar o processo de aprendizagem em sua totalidade.

Ele reforça a ideia de uma das estratégias para a formulação de problemas, a aceitação, citando que os estudantes devem primeiro aceitar a mudança de contrato para entrar na situação de condição didática de aprendizagem. O conceito usual de contrato didático parte do pressuposto de que seja um conjunto de comportamentos esperados entre professor e estudante e vice-versa. Ele aponta que, em situações recreativas, que o autor chama de centro de animação, o estudante não se coloca como submisso ao professor, assumindo uma posição diferente daquela do contrato didático usual. A próxima seção apresentará estratégias que fundamentam a formulação de problemas, conduzindo ao caminho para a formulação de problemas algébricos recreativos matemáticos.

A pesquisa de Medeiros e Santos (2007) propôs a formulação de onze problemas matemáticos, a partir de onze diferentes tipos de textos. Ao final das

análises realizadas, a pesquisa sugere que ocorreu uma mudança nos papéis do estudante, do professor e na concepção do conhecimento matemático. Isso também permitiu ao estudante formular seus próprios problemas, favorecendo a possibilidade de formular tais problemas em grupo, incentivando os estudantes pelo desafio e o engajamento entre os colegas.

2.2. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS E SUAS ESTRATÉGIAS

Apresentamos algumas estratégias para a formulação de problemas matemáticos que fundamentam esta pesquisa. O objetivo é investigar como os estudantes podem desenvolver o pensamento matemático por meio de problemas algébricos recreativos. A formulação de problemas pode ser vista como uma prática que proporciona aos estudantes a oportunidade de (re) formular problemas a partir de condições pré-determinadas ou problemas já existentes. Da mesma forma, o pensamento algébrico refere-se à capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e inequações e funções.

Altoé (2017, p. 57), em relação à Resolução de Problemas, considera que a formulação de problemas pode ser entendida como uma “prática inserida na metodologia de Resolução de Problemas que proporciona aos estudantes (re)formularem problemas a partir de condições pré-determinadas ou problemas já existentes”. Este ponto de vista também é defendido por D’Amore (2014). Tal prática envolve autenticidade, criatividade, motivação intrínseca ou extrínseca, significado, contextos (reais ou imaginários) e conceitos matemáticos.

Nesse processo, espera-se desenvolver no estudante o pensamento crítico-reflexivo, o raciocínio, a capacidade de comunicar ideias, de estabelecer relações e significados, de observação e argumentação e de reflexão sobre suas ações e seus processos de pensamento.

Enfatizando ainda que a quarta fase da resolução de problemas, a visão retrospectiva, pode também ser utilizada para originar um momento de formulação de problemas. Espera-se que, ao longo desta fase, sejam construídas novas questões que podem ser novas formulações. Polya ainda lista alguns modos pelos quais podem ser gerados novos problemas, como: manter o desconhecido e alterar os dados e a condição, manter os dados e alterar o desconhecido e a condição, alterar tanto o desconhecido quanto os dados.

Em relação aos problemas para provar, Polya estabelece que podem ser usadas as seguintes estratégias: manter a conclusão e alterar a hipótese, manter a hipótese e alterar a conclusão; alterar tanto a hipótese quanto a conclusão. Apesar de a estratégia parecer uma reformulação, por alterar a hipótese ou a conclusão dos problemas, na concepção de ensino deste autor, a resolução de problemas é vista como um novo conteúdo. É dada uma atenção especial às investigações em sala de aula, visando aprimorar as habilidades dos estudantes em resolver problemas, com ênfase nas etapas propostas por Polya (2006) e citadas anteriormente.

Por sua vez, Brown e Walter (2005) adotam algumas estratégias na formulação de problemas, como: Aceitar; Gerar; E se não (E se em vez de), que podem auxiliar os estudantes a aperfeiçoar sua capacidade de formular problemas matemáticos. Quando os estudantes são incentivados a formular problemas, são proporcionadas oportunidades para fazer perguntas.

Os autores entendem que a formulação de problemas pode dar um novo rumo e até mudar o principal foco das aulas de Matemática. Nas aulas, os professores geralmente objetivam apenas encontrar a resposta correta e a forma adequada de chegar a ela. Em vez disso, passa a ser importante encontrar a pergunta correta entre um vasto conjunto de possibilidades, o que pode levar a descobertas distintas inesperadas e a novas e mais significativas oportunidades de aprendizagem.

Silver (1994) destaca que nem todas as propostas de problemas ocorrem dentro do processo de resolver um problema complexo. Esse fenômeno pode acontecer em momentos em que a intenção não é a solução de um determinado problema, tornando a formulação de problemas como a criação de novos problemas ou a reformulação de problemas dados. Esta é a estratégia sugerida por Silver para a formulação de problemas, a reformulação. Isso pode ocorrer até antes da resolução dos problemas, quando os problemas são criados a partir de contextos previamente pensados ou que surgem de forma espontânea.

Em suma, o autor considera que as principais estratégias de formulação de problemas são a aceitação do problema, a definição dos termos e a listagem de atributos, que possam responder a uma questão.

Com relação às estratégias e à criatividade nas formulações de problemas, Martins, Viseu e Menezes (2019) enfatizam que, na formulação de problemas, o desafio do estudante é captar e transcrever o contexto de situações por meio de sua forma de expressão, como a linguagem, conhecimentos e experiências. O estudo

partiu do pressuposto de que essa atividade favorece e contribui para a compreensão dos conceitos matemáticos. Para isso, os autores utilizam em seu estudo grupos de estudantes em sala de aula, ao longo de 8 encontros divididos em 4 estratégias, ou seja, 2 encontros para cada estratégia adotada. Os participantes eram estudantes com idades entre 9 a 12 anos e, após terem aula dos conteúdos específicos do estudo, foram encorajados “a mobilizar e aprofundar os conhecimentos e desenvolver a capacidade para formular problemas matemáticos”, por meio das seguintes estratégias em situações: a primeira foi uma situação estruturada: ‘E se em vez de?’. Foram listados todos os dados que o problema fornecia e, posteriormente, esses dados foram confrontados com a pergunta “E se em vez de?”, fato que cria várias alternativas aos dados negados.

A segunda situação foi semiestruturada: aceitação dos dados com expressão numérica, em que a turma foi desafiada a colocar sua criatividade em cheque, redigindo um problema que tivesse solução por meio de uma expressão. Logo em seguida, a situação semiestruturada: aceitando os dados em observação de uma imagem e, por último, uma situação livre com uma frase que deveria ser utilizada números na formulação.

O autor constatou que a estratégia de formulação de problemas ‘aceitando os dados – imagem’ se destaca das demais, sendo a estratégia que mais despertou interesse nos estudantes, com sua forma desafiante e motivadora, levando a uma maior criatividade. De acordo com os estudantes pesquisados:

Um problema para ser criativo deve estar bem elaborado, o que faz com que a criatividade não possa ser dissociada da formulação e da resolução de problemas (utilidade). A maioria dos alunos entende que a formulação de problemas é a criação de um problema (Martins, Viseu & Menezes, 2019, p. 100).

Para formular um problema, a criatividade surge como um desafio para os estudantes. Çakır & Akkoç (2020) apontam que, para a geração de novos problemas, o desafio vem de tornar um problema suficientemente diferente do outro. Um fato a se destacar nesse trabalho é que, ao formularem novos problemas, os estudantes criavam problemas mais complexos e originais do que os problemas presentes nos livros de suas respectivas séries.

Matsko & Thomas (2015) consideram essa atividade desafiadora e revigorante, sendo necessário o uso da imaginação, o que aumenta a motivação e a criatividade

na busca por correlações com a vivência cotidiana (natureza do contexto), fazendo com que a matemática ultrapasse a aplicação de técnicas não rotineiras e mecânicas.

Existe uma lacuna na formação de professores, fato que leva a uma dificuldade em formular problemas contextuais. Isso é apontado por Spinillo et al. (2017), que em seu estudo, encontraram pouca variabilidade em problemas que envolvem diferentes relações no âmbito das estruturas multiplicativas com todos os professores envolvidos na pesquisa. Portanto, é necessário criar ambientes de aprendizagem para o desenvolvimento de competências e domínios dos conceitos matemáticos.

Pensando nessa lacuna citada anteriormente, Baumanns e Rott (2022) propõem a criação de um modelo com o objetivo de descrever as diversas fases para atividades de formulação de problemas, as quais foram chamadas de episódios. Foram notadas transições entre os episódios, que facilitaram a análise e codificação das fases. Na pesquisa, foram consideradas apenas as situações estruturadas, nas quais os participantes devem criar mais problemas baseados em um problema específico.

Souza e Guimarães (2015) analisam a resolução de problemas verbais matemáticos, chamados de RPVM. Esses problemas “são vistos como problemas que são formulados por escrito, recorrendo, sobretudo, à linguagem natural, eventualmente permeada por elementos da linguagem própria da matemática”. Eles citam que alguns cuidados devem ser tomados na formulação para um maior êxito na atividade docente com a resolução de problemas de Matemática, dentro e fora de suas aulas. Ainda discutem sobre as influências das formulações desses problemas em relação à atuação dos resolvidores na sua resolução, assim como fundamentam esses impactos em outras áreas da ciência.

A importância das atividades de formulação de problemas em matemática é enfatizada em documentos educacionais ao redor do mundo. Na China, a formulação de problemas é tomada como base de inovação para os estudantes, apesar de haver uma pequena proporção de tarefas de formulação de problemas nos livros didáticos (Jia & Yao, 2021). De acordo com Van Harpen e Sriraman (2013), em um estudo realizado com estudantes chineses, a criatividade e a formulação de problemas matemáticos são aspectos importantes. Os estudantes devem experimentar e se envolver em problemas provocadores, onde os professores são os grandes incentivadores e podem potencializar as habilidades de seus estudantes em função da proporcionalidade de criatividade, ou seja, “fluência, flexibilidade e originalidade”.

Essas habilidades são apontadas como parâmetros significativos de criatividade em matemática. Portanto, o estudo se propõe a observar a criatividade como um estímulo no pensamento intramatemático.

O estudo de Li et al. (2022) pontua sobre as vantagens e desafios na formulação de problemas na ótica dos professores, afirmando que colaboram com o pensamento inovador por parte dos estudantes. Revela ainda que a vantagem cognitiva mais citada para o uso da formulação de problemas é que tal abordagem pode facilitar o pensamento matemático dos estudantes, tendo em vista que gera a expansão, o aprofundamento em detrimento do engajamento deles nas atividades de formulação de problemas. Isso incentiva a valorização do aprendizado matemático e facilita o conhecimento e a compreensão, auxiliando os estudantes no desenvolvimento autônomo na capacidade de propor problemas.

Segundo nesse entendimento, o Problem-Posing Research in Mathematics Education (2015) faz um compilado de artigos que versam sobre a formulação de problemas matemáticos. Dentre os quais destacamos alguns trabalhos como Cai et al. (2015), que afirmam em seu estudo que há muito a se alcançar maneiras de motivar o processo de formulação de problemas, maximizando resultados, embora já possam ser vistos em diversos materiais curriculares essa temática.

De acordo com Milinković (2015), o professor deve ser um bom problematizador para fazer a transformação de problemas rotineiros em avançados, derivando um incentivo à criatividade do estudante. Pois estes devem ter a compreensão de que a formulação de um problema é a atividade fim, onde inicialmente está a escolha do conteúdo dentro de um contexto adequado.

Segundo Singer & Voica (2015, p.141), a criatividade matemática dos estudantes se manifesta por meio de um processo de abstração-generalização baseado em pequenas mudanças incrementais de parâmetros, a fim de obter síntese e simplificação. Na literatura, a criatividade é definida como sendo a capacidade de gerar novos e inovadores produtos ou insights (Matsko & Thomas, 2015, p. 127). Assim como em aulas de redação e arte, é esperado uma expressão criativa, os estudantes também podem ser da mesma forma nas aulas de matemática, onde os estudantes possam ser levados a um maior engajamento no processo criativo e satisfatório.

Segundo Brown e Walter (2013, p.4),

O segundo ensaio, *Problem Posing in Mathematics Education*, também de Brown e Walter, aponta sobre algumas sensibilidades importantes que os professores precisam estar cientes ao tentarem introduzir a formulação de problemas no currículo. Vemos essas sensibilidades como algo que permeia as fases específicas do curso que descrevemos no primeiro ensaio. São aqueles que essencialmente todo professor que queira fazer uso de um currículo que coloque problemas teria que levar em consideração. Essas sensibilidades são: 1. A atração irresistível de ver qualquer coisa que pareça um problema em um modo de resolução de problemas; 2. A consequente necessidade de encontrar formas de ver e transformar problemas que tenham potencial educativo para além da resolução de problemas; 3. A necessidade de estar ciente do contexto social no qual o significado se origina e é negociado na sala de aula.”

Baseado em Brown e Walter (2005), tomamos como base que o modo de reformular problemas pode ser visto como:

- Aceitar (formular), que tem a ver com a ruptura do contrato didático e matematofobia, uma mudança que o estudante pode gerar em vez do professor e do autor do livro didático que formulam;
- Gerar, ou seja, a pergunta em si;
- O que se não (o que se não “fosse”), um novo modo de definir.

A formulação de problemas está ligada à metacognição quando, diante do uso de estratégias metacognitivas na resolução de problemas, proporciona uma grande contribuição para o ensino-aprendizagem e desenvolve individualmente a tomada de consciência e reflexão sobre a própria aprendizagem frente a um problema matemático (Secafim, 2018).

O desenvolvimento de estratégias de formulação de problemas é metacognição e, como tal, pode servir de identificação para processos de ensino e aprendizagem quando os estudantes descrevem seus caminhos percorridos para a resolução de problemas e, conseqüentemente, para a formulação de problemas. Como já dito anteriormente, a formulação pode ser vista como parte integrante ou até mesmo como uma estratégia para a resolução de problemas.

Logo, com as estratégias de metacognição de conhecimento, consciência e controle, é possível perceber um avanço significativo com relação ao desempenho dos aprendizes, assim como explicar partes do processo utilizando a oralidade e a escrita.

As estratégias metacognitivas têm por base a organização de como as informações serão tratadas, sendo de natureza consciente, exigindo planejamento,

monitoramento e avaliação, em que o indivíduo precisa ter consciência sobre seus próprios processos de aprendizagem.

A caracterização da consciência na metacognição faz referência à consciência da natureza e do processo das tarefas em andamento (o que está fazendo e como se está fazendo), segundo Secafim (2018) aponta, enfatizando que a consciência na metacognição trata-se de identificar e reconhecer a melhor estratégia a ser utilizada em determinadas situações-problema.

Por sua vez, Baumanns & Root (2022b) afirmam que, dentre os comportamentos metacognitivos, a monitorização se refere à consciência metacognitiva e à monitorização da cognição, por exemplo, ao verificar se se compreendeu a tarefa atual. Os autores afirmam sobre concepções e metacognição, que a formulação de problemas pode servir como prova de conceito, numa avaliação de comportamento metacognitivo.

A prova de conceito utilizada pelos autores foi identificar diferenças nos processos de formulação de problemas baseados na metacognição. Tomamos como nossa prova de conceito a tentativa de se provar que os estudantes poderiam elaborar diferentes estratégias de formulação de problemas algébricos, e com isso, podermos analisar o desenvolvimento das respectivas estratégias, em que, ao incentivar os estudantes a fazerem o uso das estratégias de formulação de problemas de Brown e Walter (2005), esperávamos identificar os processos de ensino e aprendizagem através dos caminhos percorridos durante a formulação de problemas algébricos recreativos.

Após as sessões de formulação, os estudantes iniciaram a reformulação de problemas, mas recaíram em exercícios de fixação com pouca criatividade e, essencialmente, aritméticos, com valores simples e sem uso de incógnitas e, conseqüentemente, sem generalizar resultados, demonstrando ausência de pensamento algébrico. Ainda efetuaram a repetição do formato do problema dado com alteração de pontos mínimos, como os nomes, ocupações dos personagens e contexto.

2.3. SÍNTESE

Quando trabalhamos com qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la, ou seja, um problema matemático (Dante, 2005) incrementado com a formulação de problemas, direciona

os estudantes a vislumbrar um argumento padrão e claro, permitindo uma maior compreensão dos problemas, fato que pode estimular a criatividade e enriquecer a compreensão do fazer e aprender Matemática, que diante de parâmetros padronizados pelo autor, aponta para um modelo de fundamentação em pontos fortes dos estudantes (Brown e Walter, 2005).

Medeiros e Santos (2007), trazem, dentre outras contribuições, um caso específico, em que um dos estudantes pesquisados não gerou perguntas e, conseqüentemente, não foi caracterizada a formulação. Polya (2006) e Ramirez (2006), pontuam que ao trabalhar com a formulação de problemas, o professor desempenha atividades para além de uma tarefa, já o estudante, tem uma visão mais ampla ao criar seus próprios problemas, que, diante dessa ruptura de contrato didático, colocando o estudante num papel, até então pensado que era do professor, gera satisfação e engajamento (Pelay, 2011; Medeiros e Santos, 2007), que ao aceitar essa mudança, os estudantes entram na situação de condição didática de aprendizagem.

Das estratégias de formulação de problemas podemos manter a conclusão e mudar a hipótese, manter a hipótese e mudar a conclusão; mudar tanto a hipótese como a conclusão Polya (2006) e suas respectivas fases de compreender o problema, ver como os diversos itens estão relacionados e estabelecer um plano, executá-lo, fazer um retrospecto, rever e discutir; a reformulação de problemas (Silver, 1994); o modelo de fases (Baumanns e Rott, 2022); já Martins, Viseu e Menezes (2019) trabalham com duas estratégias, uma estruturada chamada de “E se em vez de?” e uma semiestruturada, a aceitação dos dados com expressão numérica, algo baseado nas estratégias que são o foco do nosso estudo: Aceitar (formular), Gerar (a pergunta em si) e O Que Se Não Fosse (um novo modo de definir) de acordo com Brown e Walter (2005).

A formulação de problemas também é metacognição, Secafim (2018), em consonância com os estudos de Brown e Walter (2005), cita que, é necessário que se pense o ensino-aprendizagem de Matemática baseados em atividades de investigação, em que o estudante verbalize e escreva as etapas de resolução de problemas, para que o educando tenha consciência de sua participação intelectual no processo da resolução de problemas, em que essa consciência na metacognição pode ser caracterizada como o que está fazendo e como se está fazendo, sendo a formulação de problemas utilizada por Baumanns e Root (2022) como prova de

conceito, numa avaliação de comportamento metacognitivo. Nossa prova de conceito em questão, está pautada em investigar como estudantes poderiam elaborar diferentes estratégias de formulação de problemas algébricos.

Ao pensar na resolução de problemas com o uso de estratégias metacognitivas, ela possibilita aos estudantes que se envolvam nas atividades, não buscando apenas a resposta certa, mas se sentindo convidados a elaborar estratégias, questionamentos e buscar explicações para o problema em questão. A metacognição é pautada em categorias de conhecimento, consciência e controle, de acordo com Secafim (2018), a formulação de problemas é vista como uma atividade metacognitiva, pois é um dos focos para a resolução de problemas.

3 PROBLEMAS MATEMÁTICOS RECREATIVOS: UM POUCO DE HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR

Neste tópico, trazemos estudos sobre o surgimento dos problemas matemáticos recreativos que se tem conhecimento na História da Matemática, assim como o percurso de tal abordagem no desenvolvimento curricular na didática da educação matemática.

A complexidade da resolução de problemas está entre um dos propósitos mais pragmáticos no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, algo que vem desde as civilizações mais antigas, como a grega, a egípcia e a chinesa. Nessas civilizações, os problemas eram utilizados, muitas vezes, como forma de entretenimento ou tarefas a realizar.

Stanic e Kilpatrick (1989), referindo-se a Chase (1979), citam o Papiro de Ahmes, no qual um escriba de nome Ahmes, baseado em um documento antigo, copia e ensina as soluções de 85 problemas de aritmética e geometria, por volta de 1650 a.C., como um manuscrito matemático egípcio que abarcava uma coleção de problemas.

O matemático russo e soviético Yakov Perelman, em sua obra “Álgebra Recreativa” (1986, 2018), traz várias publicações em relação aos problemas de caráter lógico-matemático. Afirma, por exemplo, que o problema mais antigo que se conhece sobre progressões não é o da recompensa ao inventor do xadrez e sim um que aparece no famoso papiro egípcio de Rind.

A seguir, citamos o referido problema: “Entre cinco pessoas foram repartidas cem medidas de trigo, de tal modo que a segunda recebeu a mais do que a primeira, tanto quanto a terceira recebeu a mais do que a segunda; da mesma forma, a quarta recebeu a mais do que a terceira tanto quanto a terceira recebeu mais do que a segunda; assim como, a quinta recebeu a mais do que a quarta tanto quanto a quarta recebeu a mais do que a terceira. Além disso, a soma das quantidades que as três últimas receberam é igual a sete vezes a soma das quantidades que as duas primeiras receberam. Quanto a quarta pessoa recebeu?”.

Assim, tomando “ x ” como a quantidade que a 1ª pessoa recebeu, ou seja, o primeiro termo, e “ y ” a razão, que é o que a pessoa recebeu a mais, temos:

A 1ª pessoa recebeu x

A 2ª pessoa recebeu $x + y$

A 3ª pessoa recebeu $x + 2y$

A 4ª pessoa recebeu $x + 3y$ A 5ª pessoa recebeu $x + 4y$

Podendo estabelecer as equações:

- $x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100$
- $7(x + (x + y)) = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y)$

Reduzindo os termos semelhantes e simplificando:

- $x + 2y = 20$
- $11x = 2y$

Que após resolução do sistema obtemos que o trigo deve ser repartido da forma: $1 \frac{2}{3}$, $10 \frac{5}{6}$, 20, $29 \frac{1}{6}$, $38 \frac{1}{3}$. (Perelman, 1986, p. 239-241).

Um fato interessante em problemas como o do papiro egípcio de Rind é a tentativa de contextualizar a matemática para a escola. Apesar de ponderarmos que o estudante deve ter a sensibilidade de que os resultados de problemas matemáticos não necessariamente revelam o objeto material, mas sim uma representação quantitativa do mesmo. Conforme Lins & Gimenez (2001, p. 16) trazem a reflexão de que é um desafio para o ensino da álgebra escolar quando, muitas vezes, “na escola, números não são números de nada, a não ser em ‘problemas com história’, e no fim termina-se mesmo pedindo que os alunos se esqueçam da história e pensem na matemática”.

De acordo com Polya (2006), de modo geral e não apenas em contextos recreativos, “ter um problema significa buscar de forma consciente uma ação adequada para alcançar um objetivo imaginado, mas não imediatamente alcançado”. Já a definição que consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs dos Anos

Finais do Ensino Fundamental (1998, p.41), aponta que um problema “demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado”.

Medeiros (2001) cita em sua pesquisa que “os problemas matemáticos são fundamentais no desenvolvimento da matemática”. Levando-se em consideração a forma como são trabalhados em sala de aula, por meio de repetição para fixação de conteúdos, quando seguem uma sequência padrão previamente estabelecida, na pesquisa, foram chamados de problemas fechados. Esses problemas permitem ao estudante “identificar certas características que se repetem no processo de resolução, criando procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de problemas semelhantes”. No entanto, Medeiros afirma que essa didática não contribui significativamente para um melhor aproveitamento dessa atividade.

Pontuando que o problema, para ser bem aproveitado, ou seja, importante para o desenvolvimento da matemática na sala de aula, “precisa ser desafiador para o aluno, não podendo ser resolvido por meio de procedimentos padronizados” (Medeiros, 2001).

O meio, aqui, significa as condições didáticas da resolução. Por exemplo, o professor organiza a aula para que o aluno resolva o problema individualmente ou em grupo e essa resolução seja feita com recurso de uma operação, que pode ser identificada por palavras do enunciado (ou não). Esse meio também abrange instrumentos ou objetos e podem ser elementos que favorecem ou dificultam a aprendizagem (Medeiros, 2001, p.3).

Onuchic (2011; 2013) afirma que, mesmo tendo consciência de que ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática são coisas distintas, não necessariamente ocorrem ao mesmo tempo ou como decorrência uma da outra. Assim, para a autora, um problema é definido como tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.

No tocante aos objetivos gerais da área de matemática, estes são estabelecidos para conduzir os estudantes na possibilidade de pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, assim como outras correlações de dentro e de fora da matemática, e ter a capacidade de explorar tais problemas, “generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles”.

A autora traz um roteiro para os professores, desde a preparação do problema, passando por fases como: leitura individual, leitura em conjunto, resolução do

problema, observação e incentivo aos alunos, registro das resoluções na lousa, plenária com busca de consenso, até chegar à formalização do conteúdo.

De acordo com Varizo (1993, p.9), problemas recreativos são: “aqueles que envolvem aspectos históricos curiosos, lendas, jogos (principalmente naqueles onde se procura descobrir a estratégia que leva à vitória) do tipo quebra-cabeça”, que favorecem o desenvolvimento de mecanismos mentais para a produção de conhecimento, ora para intervir na formação de novas gerações difundindo métodos de ensino “moderno”, ora para divulgar uma Matemática recreativa por meio de obras não didáticas.

Medeiros e Albino (2018) afirmam que os problemas matemáticos recreativos possuem formato lúdico e riqueza de conteúdos da disciplina, e dessa forma, podem atrair ainda mais os estudantes, colocando os problemas que a princípio eram vistos como difíceis, mas que, através de uma maneira criativa e atraente, se tornam menos pesados. Pois, costumeiramente, os professores repassam para os estudantes que os problemas têm uma única solução, mas isso pode ser falso quando tratamos de problemas com mais de uma solução ou até mesmo sem solução. A observação possibilita ao estudante olhares diferentes sobre o problema e cada aluno pode ter uma interpretação.

No referido trabalho, as autoras afirmam que os problemas matemáticos recreativos foram planejados visando identificar as estratégias utilizadas pelos participantes para o desenvolvimento das atividades propostas, percebendo a importância do papel do professor como mediador do conhecimento em sala de aula. Esse fato proporciona aos estudantes uma aprendizagem distinta do habitual, desafiando-os e incentivando-os a utilizar a criatividade para aprender Matemática.

Salientando que, na literatura nacional, a respeito da resolução de problemas, são encontradas mais discussões sobre esta do que com relação à formulação. Atribui-se tal diferença de trabalhos nas temáticas a um possível reflexo do ensino tradicional e da formação dos professores, pois “a formulação de problemas ainda é pouco conhecida e muito menos explorada na formação inicial e continuada dos professores de Matemática brasileiros, o que tem consequências na abordagem desta tarefa nas salas de aula” (p. 13). Logo, na sala de aula de Matemática, não é comum encontrarmos professores usando a formulação de problemas, devido, principalmente, ao fato de muitos professores ainda estarem habituados apenas à resolução de problemas.

A resolução de problemas é muito importante na Matemática. No entanto, muitos matemáticos afirmam que tão importante quanto à resolução é a formulação de problemas, isto é, da mesma forma que é possível obter aprendizagem por meio da resolução é também pela formulação de problemas (Medeiros e Albino, 2018, p. 9).

A literatura internacional, por vezes, mescla resolução e formulação, muitas vezes como partes indissociáveis. Assim, a formulação de problemas matemáticos potencializa a articulação e capilaridade com muitos outros campos na Educação Matemática e na Educação, de modo mais amplo, por se tratar de metacognição e permitir ao estudante a liberdade de experimentar diversas perspectivas, relacionar a escrita às expressões e assumir uma posição como se estivesse no papel do professor.

Júlio Cesar de Mello e Souza (1895-1974), mais conhecido como Malba Tahan, foi um proeminente professor de Matemática que, utilizando a literatura como instrumento de divulgação ou de aprendizagem no ensino de Matemática, tem dentre suas obras, uma de especial destaque, intitulada “O Homem que Calculava”. Publicada em 2ª edição em 1938, a obra é composta por narrativas que trazem problemas recreativos inseridos em contos árabes. Essa publicação proporcionou ao autor uma condecoração pela Academia Brasileira de Letras com o prêmio de menção honrosa em 1939.

“O Homem que Calculava” foi traduzido para mais de 12 idiomas e foi premiado pela Academia Brasileira de Letras, pela mesma obra, em sua 25ª edição, no ano de 1972. Malba Tahan ocupou a cadeira número oito da Academia Pernambucana de Letras.

Tahan aborda, em suas obras, a religião, a moral cristã, as formas narrativas dos contos, as leis, as artes, a Matemática, a política, os significados e valores próprios da cultura árabe (Segantini & Siqueira filho, 2015). O dia do nascimento de Júlio César de Mello e Souza, Malba Tahan, 06 de maio, é considerado o Dia Nacional da Matemática, no Brasil, haja vista a importância das contribuições do autor na referida área.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) chegou ao Brasil na década de 60 e permaneceu como uma alternativa para a “renovação curricular” e para o ensino de Matemática, por mais de uma década. Por conta da existência de uma insatisfação em relação ao ensino, por parte dos professores, nos primeiros congressos voltados ao ensino de Matemática, ocorridos no Brasil na década de 50, assim como ideias

modernistas irradiaram as escolas brasileiras e que também estavam disseminadas em várias partes do mundo, mais precisamente no final dos anos 70 e início dos 80 do século XX (Soares, 2009).

Valente (2016) cita que o fracasso da Matemática Moderna já poderia ser contemplado por volta da década de 70, porém ainda não se ofereciam alternativas mais sólidas teoricamente. Por conta da utilização de um conteúdo carregado de simbolismo e linguagem de conjunto, onde, em termos de conteúdos de ensino, pregava a verdadeira matemática praticada por matemáticos, tais ideias do movimento foram sendo deixadas de lado, sendo abandonadas no final da década de 1980, baseadas nos debates nacionais e internacionais, em congressos científicos, que vão anunciando novas bases teóricas para os estudos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, surgindo assim, novas perspectivas para pensar a matemática, a Educação Matemática.

Logo, diante da propagação de novas ideias, em meados dos anos 80, para trabalhar pela consolidação da Educação Matemática como área de conhecimento, surge a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988, e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. “Surgindo somente a partir das 3 grandes Revoluções da Modernidade, a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789), as preocupações com a Educação Matemática da juventude começam a tomar um rumo próprio” (D’Ambrósio, 2004, p.13).

D’Ambrósio (2004) cita ainda que o ensino de Matemática e falar sobre era algo concernente aos matemáticos que estavam nas Universidades. Porém, ao final do século XIX, para atender à demanda dos sistemas escolares difundidos, houve a necessidade de formar uma grande quantidade de professores e qualificá-los. Dessa forma, as Universidades se encarregaram de ampliar seus programas de formação de professores, dando origem à Educação Matemática como um campo de estudo. A identificação da Educação Matemática como uma área de extrema importância na educação ocorre e se consolida na transição do século XIX para o século XX.

Ainda refletindo sobre a Matemática Moderna, segundo Miguel; Fiorentini; Miorim (1992), a álgebra foi a última dimensão que tardiamente foi inserida no contexto escolar do Brasil no final do século XVIII. Porém, ainda na primeira metade do século XX, sendo fictício o pensamento algébrico nas salas de aula, algo que só constava nos documentos oficiais, mas na prática não era observado.

Iremos nos ater especificamente aos problemas matemáticos recreativos, mais especificamente, aos problemas recreativos com uso de álgebra, de acordo com os autores citados acima.

3.1. A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS RECREATIVOS E CONCEPÇÕES

Citamos, por exemplo, o problema dos vinte e um vasos de Malba Tahan contido no livro “O Homem que Calculava”, que pode ser trabalhado manualmente com vasos confeccionados com papel cartão, conduzindo os estudantes a criar estratégias de resolução para dividi-los corretamente, registrando no caderno sempre que possível os resultados. Assim como a atividade “problema dos quatro quattros”, do mesmo livro, problema que tem como objetivo formar números inteiros usando quatro algarismos 4 e operações aritméticas elementares. Segundo o autor, é possível formar todos os números inteiros entre 0 e 100, utilizando, além dos números, quaisquer sinais e operações Matemáticas, sem envolver letras ou inventar funções apenas para resolver o problema. Entusiastas têm resolvido o problema para além dos 10.000 primeiros inteiros.

Outro problema do referido livro de Malba Tahan e que faz referência à álgebra é o problema da metade do “x” da vida ($x/2$) (é o 21). Assim como o Problema das Pérolas do Rajá, que adaptamos e tomaremos como o Problema 1: Um rajá deixou como herança às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1(uma) pérola e a metade do que restasse, a segunda filha retiraria 2(duas) pérolas e a metade do que restasse. Uma delas queixou-se de que estaria sendo prejudicada na partilha da herança. Será que alguma filha vai ficar sem herança? Por quê?

Pergunta-se: Qual o número total de pérolas da herança?

O problema original pode ser resolvido com auxílio da álgebra elementar.

O problema pode ser facilmente com auxílio da álgebra elementar. O número x de pérolas é dado pela fórmula: $x = (n - 1)^2$. E nesse caso, a primeira herdeira retiraria, da herança, uma pérola e do que restasse; a 2ª herdeira 1 n retiraria duas pérolas e do que restasse. E assim por diante. O número de 1 n herdeiros é $n - 1$. Beremiz resolveu o problema para o caso em que não era igual a 7 (Tahan, 2004, p. 279).

Assim, denotamos “ x ” como o número de pérolas e “ n ” como o número de filhas. Então, a primeira filha ficaria com “1 pérola e metade do restante”, a segunda com “2 pérolas e metade do restante”. Cada filha deve ficar com a mesma quantidade de pérolas (n pérolas). De acordo com o enunciado, a quantidade de filhas é igual a 2. Após descrevermos a expressão, concluímos que a quantidade de pérolas é 9.

No problema original, a quantidade de filhas não é citada, assim como vão retirando $1/7$ do que resta. A adaptação foi feita para otimizar a compreensão pelos estudantes, pois o problema em questão pode apresentar complexidade média. Para isso, nos propomos a adequar para que nosso foco não seja ofuscado por dificuldades fora do nosso alcance principal, que é o de formular problemas.

Atividades como essas buscam realizar ações nas escolas, de forma a minimizar a visão costumeira que os estudantes têm sobre a Matemática, bem como tentar sanar as dificuldades decorrentes dessa aprendizagem por meio de atividades lúdicas, jogos e resolução de problemas (Souza, et al, 2016, p. 12).

Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013) realizaram uma investigação sobre resolução e formulação de problemas por meio de questionários de formulação de problemas, questionários de resolução de problemas e teste de desempenho padrão, com o propósito de avaliar a habilidade dos estudantes em relação à formulação de problemas. Isso ajudou a revelar que os estudantes chineses pesquisados apresentam dificuldades em formular problemas matemáticos.

Foram avaliados os desempenhos dos estudantes na formulação de problemas autogerados em quatro dimensões: correção, ou seja, se os problemas são válidos e realistas, sobre a complexidade, originalidade e diversidade. Chegando ao ápice de escore como problemas bem colocados, o estudo revelou que, apesar de os estudantes formularem problemas matemáticos corretos, alguns tinham pouca complexidade, originalidade e diversidade.

Um dos questionários referia-se aos “valores dos alunos sobre preferência, perseverança e confiança na formulação de problemas matemáticos” (Limin, Van Dooren e Verschaffel, 2013, p. 154), revelando uma baixa confiança em suas próprias habilidades de formulação de problemas, mesmo diante de concordarem, em sua maioria, que atividades de problematização têm potencial em deixar as aulas de matemática mais leves, assim como incentivam na perseverança em propor problemas.

O estudo investigou e revelou existir relações íntimas entre as habilidades de formulação de problemas, de resolução de problemas e habilidades matemáticas gerais, pelo fato de tratarem de permeiam o domínio da matemática diante dos desafios de formular e resolver problemas.

Cai e Hwang (2021), que avaliam em seu estudo o impacto na aprendizagem dos estudantes chineses em atividades de formulação de problemas, também chamados de proposição de problemas ou colocação de problemas, apontam que, apesar de começarem a incluir a temática no currículo escolar e em documentos públicos nas últimas décadas, “ainda não está incorporada nos currículos escolares de matemática e na prática de forma a ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão profunda e poderosa da matemática” (p.13), no contexto chinês. Mas que no último documento do Ministério da Educação da China (2017-2020) a formulação de problemas já é recomendada para o ensino da matemática e avaliação da aprendizagem dos estudantes.

O estudo é pautado em realizar capacitação de professores para, por exemplo, reinterpretar as tarefas de resolução, remodelar e transformar em tarefas de formulação de problemas, assim como propõem melhorar os currículos e encorajar os estudantes a formularem seus próprios problemas. Para isso, foram realizadas oficinas, workshops, aulas problematizadoras e planos de aula com professores em prol do desenvolvimento e incentivo a esses profissionais para melhoria do processo de aprendizagem e pensamento matemático dos estudantes, assim como foram realizadas tarefas de problematização com os estudantes chamados de pré-testes e pós-testes, que ao final notaram melhoria dos resultados educacionais, inclusive nos sites de análise governamentais.

As concepções dos professores têm natureza cognitiva, filtrante, se aproximando dos conhecimentos e crenças, de forma que a crença como parte do conhecimento, organizador de conceitos. Ponte (1992) toma que o matemático criativo, coloca ao estudante, mais do que assimilar o saber já constituído, ele deve investigar situações, resolver problemas auto formulados, e até mesmo inventar conceitos e notações, dessa forma: Dizer que as concepções e os saberes têm um importante caráter coletivo equivale a assumir que eles encontram a sua origem nas estruturas organizativas, nas relações institucionais, e nas dinâmicas funcionais em que estão integrados os seres humanos (Ponte , 1992, p. 10).

O autor ainda reforça a existência de uma relação interativa entre concepções e prática, pelo fato de estar impregnado de elementos sociais no processo de construção do saber. Tanto as concepções influenciam as práticas e vice-versa, pois elas direcionam caminhos e fundamentam decisões, dessa forma, o condicionamento das práticas em diversos fatores, emergem de forma natural as concepções, quando enquadradas e compatíveis conceitualmente.

Ponte (1992) enumera níveis de competência dos alunos em: aprendizagem elementar, conhecimento intermediário, complexo, de ordem geral, dentre esses elementos constitutivos do saber matemático, ele toma a formulação de problemas como competências avançadas ou de ordem superior, com eficiência defendida por Ramirez (2006), como sendo não apenas parte de alta qualitatividade da resolução de problemas.

O autor ainda afirma que as concepções do público em geral, têm uma visão equivocada de que Matemática é somente para gênios, assim como as concepções dos professores sobre a Matemática e sobre sua prática de ensino-aprendizagem, que dentre alguns pontos, os professores têm a concepção que a matemática é uma ciência aplicável, fato que está ligado à formação, e pode contribuir para a mudança de concepções, de forma ativa e prática, de forma que, essa mudança também pode ocorrer fora do quadro de processos de formação, essas novas concepções devem vir com um vocabulário estruturador, permitindo ao professor, se expressar diante de suas inovações e experiências de ensino.

No estudo das concepções podemos encontrar problemas metodológicos. De acordo com Ponte (1992), as pessoas raramente estão à vontade para expor as partes mais íntimas do seu ser. Além disso, têm de um modo geral, dificuldade em expressar as suas concepções, particularmente naqueles assuntos em que habitualmente não pensam de uma forma muito reflexiva. A identificação das concepções exige, portanto, uma abordagem especialmente imaginativa. Recorrendo a entrevistas, mais do que fazer perguntas diretas, é preciso propor tarefas, situações e questões indiretas, mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciarem-se. (p. 34 e 35).

Medeiros (2020) cita que a formulação e resolução de problemas pode ser utilizada como estratégia didática, porém, uma das dificuldades que podem ser encontradas é sobre as concepções dos professores e alunos sobre a aula e as tarefas de Matemática. A autora em consonância com os estudos de Ponte, aponta que:

A prática letiva na qual o professor ou futuro professor utiliza a reflexão sobre a tarefa e a reflexão sobre a prática, pode contribuir muito para a mudança efetiva de concepções sobre as tarefas matemáticas utilizadas por ele nas suas aulas e sobre os papéis do professor e do aluno nas aulas de Matemática (Medeiros, 2020, p. 22).

Logo, ao propor efetuar modificações nas relações em aulas de Matemática, oriundas de mudanças de concepções sobre a Matemática, podem trazer frutos relevantes, no tocante ao ensino, à aprendizagem e ao desenvolvimento da autonomia dos estudantes.

A pesquisa de Medeiros e Santos (2007) propôs a formulação de onze problemas matemáticos, a partir de onze diferentes tipos de textos. Ao final das análises feitas, a pesquisa sugere que ocorreu uma mudança nos papéis do estudante, do professor e na concepção sobre o conhecimento matemático, assim como propiciou ao estudante formular os seus próprios problemas, favorecendo a possibilidade de formular tais problemas em grupo, encorajando os estudantes pelo desafio e o engajamento entre os colegas.

Matos e Jardimino (2016) definem o conceito de concepção, juntamente com percepção, representação e crença, como termos sistemáticos polifônicos de alguns termos e conceitos utilizados com muita frequência na Educação, em que todos “têm como objetivo chegar a um mesmo resultado: informar a maneira como as pessoas percebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado” (p. 30).

No estudo, Matos e Jardimino (2016 apud Saviani, 2008), são apresentados cinco tipos de concepções: 1. concepção humanista tradicional (religiosa e laica); 2. concepção humanista moderna, também com base na filosofia moderna e no Iluminismo; 3. concepção analítica, que traz para o debate do processo educativo a discussão da linguagem dos sujeitos envolvidos; 4. a concepção crítico-reprodutivista, que, como teoria científica da educação, tem como maior ambição explicar; e 5. A concepção dialética ou histórico-crítica, a qual compreende o homem como sujeito implicado e com posições no mundo, colocadas como tendências em teorias de educação no Brasil. Definindo concepção como sistemas complexos de explicação e “operação de construção de conceitos”, os autores enfocam que a definição de concepção está fortemente ligada com a de conceito, afirmando que as nossas concepções envolveriam um processo de formação de conceitos.

No tocante à Matemática, Da Silva, Ibrahim e Resende (2013) elencam as concepções de álgebra e educação algébrica, organizam as suas atividades de

ensino, assim como para os envolvidos na definição dessas avaliações sistêmicas, considerando que as concepções de álgebra e de educação algébrica são fundamentais para o professor quando organiza as suas atividades de ensino, assim como para os envolvidos na definição dessas avaliações sistêmicas.

3.2. SÍNTESE

Partindo do Papiro de Ahmes, que é citado por Stanic e Kilpatrick (1989), é um material que continha soluções de problemas de aritmética e geometria, por volta de 1650 a.C., chegamos à obra de Yakov Perelman “Álgebra Recreativa” (1986, 2018), com problemas lógico-matemáticos, que são fundamentais para o desenvolvimento da matemática (Medeiros, 2001).

No Brasil, ao tentar uma renovação curricular, através do movimento da Matemática Moderna a partir da década de 60, entra em decadência no final dos anos 70, e sem lograr êxito, é abandonada na década de 80, quando surge a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988, propagadora e auxiliadora na consolidação da Educação Matemática como área de conhecimento.

Citamos como colaboradores da Educação Matemática no Brasil o professor de matemática Júlio Cesar de Mello e Souza (1895-1974), conhecido como Malba Tahan, com sua obra “O Homem que Calculava” aborda a religião, a moral cristã, as formas narrativas dos contos, as leis, as artes, a Matemática, a política, os significados e valores próprios da cultura árabe, com um toque recreativo em suas narrativas.

A formulação de problemas nas escolas chinesas, foi vista por Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013) que investigam sobre a resolução e formulação de problemas por meio de questionários de formulação de problemas, questionários de resolução de problemas e teste de desempenho padrão, que ao avaliar a habilidade de estudantes chineses, foi verificado dificuldades em formular problemas matemáticos. Listando os problemas autogerados em quatro dimensões: correção, (problemas são válidos e realistas), sobre a complexidade, originalidade e diversidade, e os problemas bem colocados. Um dos questionários revelou a baixa confiança dos estudantes em suas próprias habilidades de formulação de problemas. Cai e Hwang (2021) também ao avaliar estudantes chineses, cita que a temática formulação de problemas, inserida nas últimas décadas no currículo escolar e em documentos públicos carece de uma melhor incorporação prática para auxiliar os estudantes num desenvolvimento mais profundo e prazeroso na matemática.

A formulação de problemas também é vista como competência avançada ou de ordem superior (Ponte, 1992), numa escala com níveis de aprendizagem elementar, conhecimento intermediário, complexo, de ordem geral; pode ser utilizada como estratégia didática (Medeiros, 2020), que podem encontrar dificuldades com relação às concepções para professor e estudante, durante a prática em sala de aula.

As concepções dos estudantes envolvem informar a maneira como as pessoas percebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado (Matos e Jardimino, 2016), essas concepções podem ser do tipo humanista tradicional, humanista moderna, analítica, crítico-reprodutivista, dialética ou histórico-crítica; assim como, em relação à concepção de álgebra e educação algébrica, ele organiza as atividades de ensino (Da Silva, Ibrahim e Resende, 2013).

4 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Quando falamos em formulação de problemas em sala de aula, podemos nos deparar com a geração de problemas por parte dos professores ou estudantes. No nosso caso, trataremos apenas da formulação de problemas por estudantes.

Como citado anteriormente, os problemas algébricos são enunciados com a ideia de generalizar a aritmética. A recreação dos problemas está ligada à sua ludicidade, de forma que o estudante faça uso da matemática de uma maneira divertida, ao reformular problemas com temáticas curiosas e criativas, que também podem ser históricos.

De acordo com Spinillo et al. (2017), “problemas matemáticos são situações que tornam os conceitos significativos para o indivíduo, que estimulam um conjunto de operações e representações para sua resolução”. Ainda elenca que:

Formular problemas é um desafio para o aluno, pois além da pouca familiaridade com esta atividade, tem que lidar com outras competências que vão além do conhecimento matemático, como os aspectos linguísticos; especificamente, a produção de um texto que possui uma estrutura definida por meio da qual são apresentadas as informações matemáticas, suas relações e aquilo que é buscado (Spinillo et al., 2017, p. 932).

Cândido (2001) atribui como um dos fatores que contribuem para o silêncio na sala de aula, os cálculos mecânicos, a importância dada à repetição de procedimentos e até mesmo a barreira da linguagem que é utilizada nas aulas. Mesmo assim, especificamente nas aulas de Matemática, a comunicação é um importante aliado para auxiliar os estudantes durante a construção de conceitos que permeiam a linguagem abstrata e simbólica da Matemática.

A autora utiliza diversas maneiras de ler, escrever e resolver problemas, como por exemplo: dividir um texto em vários pedaços de papel para que os estudantes, em dupla, montem semelhantemente a um quebra-cabeças, na ordem correta de resolução. Conclui que atividades de aprendizagem matemática devem explorar diversas ideias, para que os estudantes adquiram diversas formas de perceber a realidade.

Apesar da formulação de problemas matemáticos ser algo relativamente pouco explorado no Brasil, as pesquisas sobre resolução de problemas vêm aumentando,

ainda mais por conta da ênfase dessas temáticas nos PCNs, na BNCC e nos Currículos Regionais.

Echeverría e Pozo (1998) apontam que, apesar do grande número de estudos sobre solução de problemas matemáticos, se concentram mais nos processos usados por especialistas e principiantes para resolver problemas de tipo não quantitativo, como os geométricos, que ao longo da história, a resolução de equações algébricas se baseava em construções geométricas.

Esses trabalhos estão mostrando não somente a influência do conteúdo na solução das tarefas, relacionada com a dificuldade de gerar uma representação adequada especificamente para este problema, mas também estão destacando a importância das habilidades de autorregulamentação e metacognição no controle do conhecimento heurístico e estratégico (Echeverría e Pozo, 1998, p. 36).

O estudo afirma que “a natureza algébrica e quantitativa não é própria somente dos problemas matemáticos”, estando também com vertentes em problemas da Física e na Química. Desta forma, o rigor científico aplicado à quantificação precisa nessas disciplinas, expressa muitas das vezes, para os estudantes, um problema mais matemático do que físico ou químico, algo que não é mistério, sendo a Matemática uma ferramenta utilizada pelas ciências da natureza.

Contudo, o fato de resolver problemas sem sentido, de forma mecânica, como um mero cálculo diante de uma situação, pode levar à não compreensão do fato que está por trás do cálculo, pelo fato da simples aplicação de um algoritmo, num determinado problema, sendo esse o grande desafio da Educação Matemática, o fazer entender o que está por trás das manipulações entre números, e para o caso da álgebra, letras e números.

Com relação aos estudantes, Dante (2005) cita que os solucionadores dos problemas são primordiais para que eles inventem estratégias e criem ideias significativas. Já o exercício matemático, assinala o autor, é colocado como um tipo de treinamento para o uso de alguma habilidade, pressupondo que o conhecimento já é conhecido pelo aluno, havendo então uma distinção entre exercícios de fixação e problema matemático.

Dante ainda enfoca que não basta apenas os estudantes conhecerem ou manipularem as “continhas” com operações e algoritmos, faz-se necessário o encorajamento à reflexão sobre os problemas, a fim de que os estudantes saibam quando pode ser utilizado esse dispositivo matemático. Daí mais uma vez nos

deparamos com a importância do professor em utilizar problemas do cotidiano, efetuar a transposição didática para o contexto escolar, visando o desafio e a motivação em querer resolver e até mesmo formular o problema.

A percepção de regularidade e generalização acarreta o estudo de padrões que desempenharam um importante papel na introdução da Álgebra, de acordo com Alvarenga e Vale (2007), que estudaram a exploração de problemas de padrão em contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico, enfatizando que o incentivo na observação de padrões e suas diversas representações até de maneira numérica, proporciona mais segurança para estabelecer ideias de generalizações.

Aguiar (2014) que faz um estudo dos livros didáticos, inclusive com o ano que trabalharemos em nossa pesquisa, que é o 9º ano, a fim de estudar como superar as práticas de rotina no ensino da álgebra, afirma o autor que:

O ensino de álgebra nos três últimos anos do Ensino Fundamental tem se reduzido a um momento destinado ao treino e à prescrição de regras e procedimentos algébricos. Ao que parece, os livros didáticos corroboram com essa visão do ensino de álgebra e alguns livros ainda mantêm o ensino de álgebra voltado para o treino de procedimentos e resoluções (Aguiar, 2014, p.7).

O autor ainda defende a ideia de que o ensino de álgebra deveria ter de fato como objeto de estudo o pensamento algébrico, ou seja, não apenas mudar conteúdos ou metodologias, logo, ao se deparar com problemas matemáticos, o estudante adquire, com a prática, a aprofundar os conhecimentos algébricos e, conseqüentemente, a utilização do rigor matemático, a essa formalização se dá a linguagem algébrica.

Sendo assim, acreditamos que a formulação de problemas algébricos recreativos por parte dos estudantes pode contribuir para a fluidez do pensamento algébrico. O pensamento algébrico é um ponto-chave para a generalização de ideias matemáticas. Dessa forma, ele se torna um aliado nos problemas matemáticos quando se requer estabelecer generalizações por meio do discurso de argumentação através de caminhos formais. De acordo com Blanton e Kaput (2005, p.413), a utilização do pensamento algébrico em nossa pesquisa se dá pelo fato de ele buscar estratégias que enfatizem mais a forma de pensar do que uma simples resolução de exercícios.

4.1. SÍNTESE

Os cálculos mecânicos e a ênfase na repetição podem ser alguns dos fatores que contribuem para o silêncio na sala de aula. De acordo com Cândido (2001), os problemas matemáticos podem ser utilizados para evitar essa prática. Esses problemas são situações que originam conceitos significativos e devem estimular um conjunto de operações e representações para sua resolução (Spinillo et al., 2017). Os problemas algébricos possuem enunciados que podem generalizar a aritmética. A recreação pode ser vista como a parte lúdica que diverte os estudantes e pode ser trabalhada como reformulação de temáticas criativas. A formulação de problemas é uma prática que oportuniza a reformulação.

Olhando do ponto de vista da formulação de problemas algébricos em sala de aula por parte dos estudantes, os enunciados devem ter a ideia de generalizar a aritmética. O pensamento algébrico se refere à capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Desta forma, oportunizar a reformulação e trazer, através da ludicidade, a recreação por meio de contextos e situações-problema curiosas e criativas, efetua a transposição didática da escola para o cotidiano e visa o desafio e a motivação em querer resolver e até mesmo formular o problema.

Echeverría e Pozo (1998) afirmam existir dificuldade de gerar uma representação adequada para problemas não quantitativos e enfocam a importância das habilidades de auto regulamentação e metacognição no controle do conhecimento heurístico e estratégico. Citam que a resolução de equações algébricas se baseava em construções geométricas. Sendo ainda pouco explorados no Brasil, mas avançando por manter uma correlação com a solução/resolução de problemas, bastante presente nos PCNs, na BNCC e nos Currículos Regionais, acreditamos que, através da formulação de problemas algébricos recreativos por parte dos estudantes, pode contribuir para a fluidez do pensamento algébrico. Ao se trabalhar com padrões, ponto importante no estudo de introdução à álgebra, percepção de regularidade e generalização, contribui e proporciona mais segurança às ideias de generalização (Alvarenga e Vale, 2007).

Aguiar (2014) defende o ensino da álgebra com o estudo do pensamento algébrico, que, através da prática do rigor matemático, o estudante adquire a

linguagem algébrica. Dante (2005) aponta que os solucionadores dos problemas possibilitam a invenção de estratégias e criação de ideias significativas. Assim, buscamos verificar dos estudantes as possíveis estratégias de pensamento algébrico através da formulação de problemas algébricos recreativos através de caminhos formais (Blanton e Kaput, 2005), fora da rotina usual de ensino da álgebra escolar.

5 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo James Kaput (1998, 1999), o pensamento algébrico se manifesta quando, por meio de conjecturas e argumentos, estabelecem-se generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Radford (2006) cita que a caracterização do pensamento algébrico não é algo simples. Isso ocorre, talvez, pelo fato de o extenso campo em que essa forma de pensar se insere, a Álgebra, ter um grande número de objetos de estudo, como equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, padrões etc., além de processos algébricos, como inversão e simplificação.

As diversas concepções da atividade algébrica, segundo Lins e Gimenez (2001), buscam uma identificação e caracterização da atividade algébrica e seus respectivos processos cognitivos. Examinam diversos trabalhos e pontuam que uma atividade algébrica é “fazer ou usar álgebra”, que pode ser até resolver problemas de álgebra.

Partindo de um contexto histórico de desenvolvimento da álgebra, os autores citam que, desde as civilizações babilônicas e egípcias, foram criadas regras para cálculos, várias para a resolução de problemas, passando pela criação de uma incógnita por Diofanto, por volta do ano 250. Por sua vez, o francês Viète, no ano de 1550, sistematizou o uso de letras para representar também os dados, culminando a partir de 1811 com Galois, Abel, Bourbaki, este último a partir de 1940, com o uso propriamente dito do cálculo com letras.

O estudo ainda aponta que a incrementação da notação na álgebra é um nível de desenvolvimento da atividade algébrica. Tomando uma linha do tempo, ela pode ser vista em momentos que, inicialmente, apenas com palavras, depois com notação especial para chegar ao momento que é vista como uso de símbolos e sua manipulação. Segundo alguns estudiosos, entre esses momentos, haveria um desenvolvimento intelectual. Dessa forma, os diversos tipos de solução para um problema, quer seja totalmente verbal, com uso de solução particular ou totalmente simbólica, indicam estágios do desenvolvimento intelectual, e com relação à atividade algébrica plena, é chamado aqui de estágio operatório formal piagetiano.

Alguns dos trabalhos que fizeram parte dos estudos destes autores, como o confronto entre os autores Küchemann e Lesley Booth, resultou numa visão que, diante da apresentação tardia da álgebra aos estudantes, testes foram realizados com

uso de sequências didáticas que, ao trazer uma forma de instrução sobre assuntos desconhecidos, os erros eram eliminados.

Sendo assim, são vistas algumas linhas de caracterização da atividade algébrica: com uso de determinadas notações que a caracterizam pela presença de certos conteúdos, e uso de símbolos e sua manipulação, sendo ambas descritivas. O estudo indica uma terceira linha do pensamento formal, como grande suspeita de que, “as caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica” (p.99), colocando em xeque se de fato, um pensamento formal seja algébrico, com a noção de álgebra escolar como aritmética generalizada.

Os autores fazem alusão ao trabalho de Paola Boero que estuda a atividade algébrica em termos de seus processos centrais, chamada de linha pragmática, com uma produção voltada à abordagem flexível para a educação matemática na sala de aula.

Por último, é citada uma visão do psicólogo francês G. Vergnaud, e seu Modelo dos Campos Conceituais, que é constituído por um conjunto de esquemas operacionais e de invariantes, um conjunto de formas notacionais, um conjunto de problemas. Sendo uma linha que não se refere à caracterização por conteúdos nem notação, apesar de fazer referências a elas. A linha de Vergnaud é inclinada à sala de aula, como uma forma de instrumento, utilizada em Engenharia Didática.

Podemos dizer que o pensamento algébrico é um processo no qual os estudantes generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalização por meio do discurso de argumentação e expressam-nas cada vez mais em caminhos formais e apropriados à sua idade. Uma criança pode expressar o pensamento algébrico sem necessariamente fazer uso de equações e incógnitas. É o que Radford (2018) denomina de pensamento algébrico factual (ou concreto), no qual a criança não expressa por meio de fórmulas as variáveis algébricas, mas manifesta o pensar algébrico ao utilizar meios semióticos, como recursos linguísticos e gestuais, por exemplo.

Segundo Radford (2011), o conhecimento matemático desenvolvido em torno das atividades orientadas para a resolução de problemas pode trazer algumas novas compreensões acerca do modo de incluir e estruturar a álgebra na escola; levando a ponderar, dentro de uma nova perspectiva, o papel dos problemas no ensino da álgebra.

Ponte, Quaresma e Branco (2012, p. 27), autores que nos ancoramos como base teórica, apontam que:

Na resolução de problemas envolvendo equações, privilegiam estratégias aritméticas e manifestam alguma dificuldade em usar a linguagem algébrica para representarem situações propostas. Revelam evolução na compreensão da linguagem algébrica relativa aos diferentes significados dos símbolos em diversos contextos e ao significado e à manipulação de expressões, mas, em diversos aspectos específicos essa compreensão é ainda frágil, sugerindo que terão ainda um longo caminho a percorrer com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ainda de acordo com os autores, ao utilizar o pensamento algébrico como forma de trabalho em grupo, uma construção coletiva que Radford denomina de labor conjunto, nas situações em que nenhum elemento do grupo conseguir desenvolver a atividade adequadamente, pode ser necessário efetuar análises e discussões orais e coletivas para toda a turma. Ações como essas permitem aos estudantes “o confronto com diferentes possibilidades, facilitando o esclarecimento de dúvidas e a argumentação das suas ideias”, aprofundando e consolidando a sua aprendizagem.

Tomamos como fundamental trabalhar com álgebra no ensino e na aprendizagem da Matemática, pois o seu estudo tem como grande objetivo desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes. Ponte, Quaresma & Branco (2012, p. 11) apontam que o pensamento algébrico:

Inclui a capacidade de manipulação de símbolos, de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações, de inequações e funções e a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios, o raciocínio em Álgebra requer a compreensão da linguagem algébrica, sendo por isso de grande importância compreender a natureza e origem das dificuldades dos estudantes.

Desta forma, para afastar a ideia de que a álgebra seja utilizada de forma mecânica, sem que a compreensão do porquê do cálculo algébrico seja plenamente apropriada, partimos do pressuposto e indagação de como os estudantes podem desenvolver o pensamento matemático, através do saber coletivo, com problemas algébricos recreativos. Tomando a formulação de problemas como uma metodologia facilitadora do pensamento algébrico.

Ponte, Branco e Matos (2009) citam que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações.

A primeira vertente – representar – diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objectos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para certa classe de objectos) (Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 10).

Assim como os autores afirmam, um dos grandes objetivos do estudo da Álgebra nos ensinos básico e do segundo segmento do ensino fundamental é desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além disso. Trabalhar com o pensamento algébrico promove hábitos de pensamento e de representação que buscam a generalização, e faz com que a atenção esteja voltada às relações existentes e não apenas aos valores numéricos em si, como objetos formais para o pensamento algébrico.

Ferreira et al. (2022), em um trabalho realizado com estudantes do sétimo ano, corroboram com nosso projeto ao citar que, após analisar atividades de resolução de problemas de equação do primeiro grau aplicadas aos estudantes pesquisados, com e sem o auxílio do professor na resolução dos problemas, perceberam que é necessário criar e adaptar problemas em adequação a diversas situações. A generalização de casos particulares pode levar a aumentar a capacidade de pensar algebricamente.

Por sua vez, Lima e Bianchini (2022) afirmam que a álgebra deve ser explorada desde os anos iniciais, como requisito para aprendê-la. Ou seja, o requisito essencial para o aprendizado de álgebra é o desenvolvimento do pensamento matemático, em especial, o pensamento algébrico. Esse pensamento é construído pelo desenvolvimento de estratégias de cálculo com compreensão. Eles salientam a dificuldade do estudante em transitar da aritmética para a álgebra. Os autores afirmam, baseados em diversos autores (Santos e Almeida, 2015; Lins e Giménez, 2001; Kirnev e Savioli, 2017), que essa dificuldade é consequência do ensino de álgebra na Escola Básica não enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os autores supracitados ainda destacam que:

Um último aspecto que gostaríamos de salientar nesta categoria é trazido por Santos e Almeida (2015) que, embasados em estudos de Da Rocha Falcão (1996), Pomerantsev e Korosteleva (2002) e Teles (2004), afirmam ainda não haver clareza dos obstáculos (na concepção de Brousseau (1997)), e se estes têm origens epistemológicas ou didáticas, relacionados aos erros ou às dificuldades dos estudantes em Álgebra (p. 14).

Branco (2008), em um trabalho de estudo com o tema “Equações” que tem por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, aponta que, apesar de notar alguns pontos de desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do 7º ano, como a capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar as suas generalizações, durante a atividade de resolução de problemas baseada no estudo de regularidades, foram privilegiadas estratégias aritméticas, ocorrendo dificuldades em usar a linguagem algébrica como representação. Ainda, no estudo a autora afirma que uma parte importante antes mesmo do estudo formal da álgebra é que o estudante deve “praticar a formulação de equações como uma atividade complementar para a resolução de equações”, pois:

O início da aprendizagem da Álgebra exige algum grau de abstração e, também, alguma capacidade de reformular o significado e a manipulação dos símbolos usados na Aritmética. Nem sempre estas condições se verificam e, para os alunos, a aprendizagem da Álgebra é, muitas vezes, mecânica e desprovida de significado (Branco, 2008, p. 28).

Em consonância a esse estudo, Matos et al. (2008) citam que atividades exploratórias e investigativas propostas oportunizam uma aprendizagem diversificada, incorrendo a formulação de generalizações e a representação de números generalizados e de grandezas incógnitas e variáveis, visando através do estudo em particular, contribuir para a compreensão das variáveis e equações. Como exemplo, a tarefa “Atravessando o rio”, que faz parte da investigação “O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico” (Branco, 2008), é apresentada em linguagem natural, necessitando de uma representação e interpretação matemática adequada para a resolução. Desta forma, é solicitado que os estudantes participantes argumentem a situação para formularem estratégias de resolução que se dá através de simulações e debates de possibilidades.

Segue a tarefa citada que está descrita em (Branco, 2008, p. 207), como exemplo de um problema de pensamento algébrico recreativo:

Tarefa 3: “Atravessando o rio”

1. Seis adultos e duas crianças pretendem atravessar um rio. O pequeno barco que está disponível apenas pode levar um adulto ou uma ou duas crianças (ou seja, existem três possibilidades: um adulto no barco; duas crianças no barco; criança no barco). Qualquer pessoa pode conduzir o barco. Quantas vezes o barco tem de atravessar o rio até todos estarem na outra margem?

2. O que acontece se quiserem atravessar o rio: - 8 adultos e 2 crianças; - 15 adultos e 2 crianças; - 3 adultos e 2 crianças.

3. Podem descrever, por palavras, como resolvem o problema se o grupo de pessoas for constituído por duas crianças e um número qualquer de adultos? Verifiquem se a vossa regra funciona para 100 adultos?

4. Escrevam uma fórmula para um número de adultos A e duas crianças.

5. Um grupo de adultos e duas crianças fizeram 27 viagens para atravessar o rio. Quantos adultos faziam parte deste grupo?

6. O que acontece se mudar o número de crianças? “Verifiquem o que muda na fórmula que escreveram anteriormente, nos seguintes exemplos: - 6 adultos e 3 crianças; - 6 adultos e 4 crianças; - 8 adultos e 4 crianças; - A adultos e 7 crianças”.

O problema acima faz parte das 10 atividades utilizadas pela autora em sua investigação sobre o estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico, que explorou temas como padrões e regularidades, padrões e expressões algébricas, equações e resolução de problemas. As atividades foram aplicadas para estudantes com entrevistas individuais, em duplas e posteriormente em grupo.

Martinho et al. (2011) ao refletir sobre o pensamento algébrico, elencam que uma competência indispensável à ocorrência dele é que o sentido do número, alicerçado ao cálculo mental, está baseado em identificar os padrões numéricos, colocando como promotor de processos de generalização desses mesmos padrões. Colocam que a categorização das formas de pensamento algébrico pode ser vista como aritmética generalizada, o pensamento funcional e outros processos de generalização e justificação como usam de generalizações para a resolução de tarefas algébricas, dentre outros.

Lopes (2012) aponta que as competências matemáticas devem ser desenvolvidas por todos e inclui um conglomerado de comportamentos, de capacidades e de conhecimentos concernentes à matemática, uma delas é a propensão para raciocinar matematicamente, para explorar situações problemáticas,

a busca de regularidades e conjecturas através de testes e a formulação de generalizações e assim pensar de forma lógica.

Portanto, uma das principais finalidades da Matemática no ensino básico, de acordo com o autor, é levar a promoção para a “aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados” (Lopes, p. 7). Devido a essa finalidade, o entendimento de que se devem incluir problemas que envolvam processos de modelação matemática ao desenvolvimento nos alunos e na propriedade analítica frente à compreensão, resolução e formulação de problemas.

Concluindo, a matemática é considerada uma ciência de padrões, e os matemáticos procuram regularidades nos números, no espaço, na ciência e na imaginação, formulando teorias com as quais tentam explicar as relações observadas (p. 33).

Acreditamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico seja vivenciado durante vários anos ao longo da vida escolar, sendo demonstrado de forma tímida nos Anos Iniciais e ganhando corpo nos anos posteriores, culminando em uma plena capacidade de ser evidenciado nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Nacarato e Custódio (2018) enfatizam que, por meio da reflexão, os estudantes estabelecem relação com os conceitos e, conseqüentemente, aumentam a compreensão matemática. Eles colocam que a compreensão matemática está ligada à reflexão e à comunicação de estratégias através da fala, escrita, audição e demonstração. Portanto, é papel do professor incentivar o uso dessas estratégias não apenas no final das atividades, mas durante todo o percurso até se chegar à resolução dos problemas.

5.1. SÍNTESE

O processo no qual os estudantes generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalização por meio do discurso de argumentação e expressam-nas em caminhos formais e apropriados à sua idade, entendemos como sendo o pensamento algébrico (Radford, 2006). Sua manifestação pode ser vista através de conjecturas e argumentos (James Kaput, 1998, 1999),

podendo ser dividido em três vertentes: representar, raciocinar, resolver problemas e modelar situações (Ponte, Branco e Matos, 2009). Sendo assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico é o grande objetivo do estudo da Álgebra.

A caracterização do pensamento algébrico não é algo simples, segundo Radford (2006). Lins e Gimenez (2001) afirmam sobre as diversas concepções da atividade algébrica, a existência de linhas de caracterização da atividade algébrica como: o uso de determinadas notações que a caracterizam pela presença de certos conteúdos, uso de símbolos e sua manipulação e o pensamento formal.

Ao adequar problemas matemáticos a diversas situações, generalizando casos particulares, pode-se aumentar a capacidade de pensar algebricamente (Ferreira et al., 2022). Essa capacidade de generalizar é vista como parte do desenvolvimento do pensamento algébrico, que ao refletir sobre este tipo de pensamento, pode ser utilizado como identificação de padrões, regularidades (Martinho et al., 2011). As buscas por pensar de forma lógica estão ligadas a testes e formulação de generalizações e ao estabelecimento de conceitos matemáticos de compreensão, possuindo ligação com a reflexão e com a comunicação de estratégias através da fala, escrita e etc (Nacarato e Custódio, 2018). As competências matemáticas devem ser desenvolvidas por todos, como a formulação de generalizações (Lopes, 2012). Diante disso, acreditamos que o pensamento algébrico, apesar de não ser algo simples de se caracterizar, tem seu desenvolvimento iniciado nos anos iniciais, como defende Lima e Bianchini (2022), afirmando que a álgebra deve ser explorada desde os anos iniciais. Esse desenvolvimento percorre a vida escolar até seu ápice pleno nos anos finais do ensino fundamental.

6 REVISÃO DE LITERATURA

Reunimos neste capítulo uma revisão de literatura sobre Formulação de problemas algébricos recreativos, Problemas matemáticos recreativos, Pensamento algébrico e o seu desenvolvimento, em diversos bancos de dados acadêmicos.

Apresentamos aqui alguns estudos semelhantes reunidos em uma revisão de literatura oriunda de um levantamento nos bancos de dados dos Anais das últimas cinco edições do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM). Este evento reúne pós-graduandos em Educação Matemática e se caracteriza por propiciar que todos os participantes das sessões, dos grupos de discussões (GD), nas quais os trabalhos são apresentados, leiam os trabalhos uns dos outros e possam apresentar elogios, sugestões e críticas para o aperfeiçoamento da pesquisa. Além disso, fizemos um levantamento nos anais dos dois últimos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática, realizados em 2019 e 2021. Este é um dos eventos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e tem como foco a promoção de intercâmbio entre os grupos de pesquisa que, em diferentes países, se dedicam às pesquisas na área da Educação Matemática, sendo um seminário que busca divulgar as pesquisas brasileiras.

Utilizamos também o Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no período de 2017 a 2021. A escolha pelo portal da CAPES é pautada em sua grande relevância e credibilidade acadêmica, que oferece acesso aos textos completos de artigos selecionados. A análise foi executada mediante a busca das palavras-chave: Formulação de problemas algébricos recreativos, Problemas matemáticos recreativos, Pensamento algébrico, Desenvolver o Pensamento Algébrico. Nos referidos bancos de dados, foram encontrados no total 54 artigos, sendo selecionados apenas cinco. O critério de escolha se deu por trabalharem em sala de aula com estudantes dos anos finais do ensino fundamental.

Nos Anais de EBRAPEM/SIPEM, encontramos:

- Formulação de problemas algébricos recreativos: 0
- Problemas matemáticos recreativos: 0

- Pensamento algébrico: 23 artigos
- Desenvolver o Pensamento Algébrico: 9 artigos

Dos 10 artigos encontrados no EBRAPEM, 9 deles versam sobre outros níveis de ensino e formas como a educação especial e formação de professores. Destacamos destes, apenas o de Souza (2019) com o título “Transição da aritmética para a álgebra: uma abordagem com o uso de regularidades e padrões”, que faz referência à transição entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico, numa fase colocada como pré-álgebra. Através de atividades de questionamentos que envolvem padrões, generalizações, símbolos e sequência de palavras, conduz para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Portanto, em sala de aula, o estudante tem a faculdade de utilização do pensamento algébrico nas atividades, pelo fato do pensamento ser “uma ação cognitiva” tendo em vista a capacidade cognitiva do estudante.

Por sua vez, em um estudo encontrado no SIPEM, Fleira e Fernandes (2018) trabalham com estudantes autistas e versam sobre a emergência do raciocínio algébrico. Apesar de refletir sobre as mediações referentes a resoluções de equações polinomiais do 1º grau, acabam mudando a forma de abordagem de acordo com as peculiaridades de cada estudante a fim de favorecer estratégias na realização de tarefas. Os autores chamam de zona de emergência do pensamento algébrico o espaço propício ao aprendizado e articulação das formas de mediação disponíveis, dentro do processo de transformar objetos conceituais culturais (objetos algébricos) em objetos de consciência.

No SIPEM, encontramos ao todo, 13 artigos, sendo 4 no VII seminário e 9 no VIII Seminário. Porém, dentro do nosso foco, restaram apenas 4 selecionados, pois os demais estavam ligados a revisões bibliográficas e formação de professores, aplicadas a séries iniciais do ensino fundamental.

Assim como no nosso estudo em andamento, a autora Groenwald (2018) se debruça numa investigação nos estudantes do nono ano se possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico nos conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau. Apontando que esses estudantes enfrentam dificuldades nos conteúdos de sistemas de equações, porém encontraram mais facilidade no tocante à linguagem matemática. A

atividade foi desenvolvida a partir de testes adaptativos, que inclui um tópico chamado pela autora de Problemas Elaborados, e tem objetivo de verificar se os alunos possuem a habilidade de transcrever da linguagem materna para a linguagem matemática. Alguns alunos tiveram seus testes invalidados por não conseguir responder às questões apresentadas. Dos 30 participantes, 6 demonstraram dificuldades e não utilizaram artifícios algébricos.

Trabalhos como os de Idem e Silva (2021) e Bortolete e Oliveira (2021), apontam sobre a BNCC que no documento, relaciona os padrões à investigação matemática e à formulação de conjecturas, apontando a observação de padrões como uma estratégia na exploração de conceitos matemáticos. Citam ainda que a BNCC sugere para os 8º e 9º anos uma continuidade da proposta sobre a relação entre grandezas que amplia os estudos das técnicas e resoluções de equações, aplicadas às equações de 2º grau. Bortolete e Oliveira, (2021) afirmam que, para o 9º ano, a BNCC propõe a prática do pensar algébrico e traz uma indicação de se trabalhar com funções e suas representações algébricas, o que pressupõe lidar com pensamento algébrico. Pois defendem que o pensar algébrico compreende mais do que a representação simbólica e sua utilização na resolução de problemas, pois estes são uma parte desse pensar que contempla, também, refletir sobre o que é a própria Álgebra.

- No Portal de periódicos da CAPES, encontramos:
- Formulação de problemas algébricos recreativos: 0
- Problemas matemáticos recreativos: 24 artigos
- Pensamento algébrico: 13 artigos
- Desenvolver o Pensamento Algébrico: 07 artigos

Dentre os 24 artigos que encontramos no Portal de periódicos da CAPES sobre Problemas matemáticos recreativos, boa parte eram concernentes a outras áreas do conhecimento como teoria dos números e com pouca aderência em relação ao estudo de problemas matemáticos algébricos. Destacamos o trabalho de Lasa, Aitzol et al. (2019) que reforça “a ligação entre as noções de proporcionalidade simples na aprendizagem da linguagem algébrica e as técnicas algébricas de resolução de equações”.

O trabalho é uma análise didática das resoluções de um problema recreativo russo. O experimento é aplicado a estudantes de 13 anos de idade, que participaram da olimpíada matemática em Navarra na Espanha. O que levou os autores a concluírem ao final da pesquisa, que o problema em questão, conhecido como El problema Del caftán, um problema aritmético-algébrico, que exemplifica a relação de um empregador com seu empregado trabalhador, sendo prometida uma quantia com duas variáveis de moeda, 12 rublos e 1 cafetã, por um período de 12 meses. Porém, após um período menor de tempo, 7 meses, o trabalhador recebeu um valor em rublos e um valor desconhecido em cafetã, restando saber qual foi o valor de cada cafetã. Esse se mostrou adequado para desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes, segundo os pesquisadores, após análises qualitativa e estatística.

No que diz respeito ao pensamento algébrico, dos 14 artigos, selecionamos três por se referirem especificamente ao nosso objeto de estudo. Nessa revisão, destacamos alguns autores como Coelho e Aguiar (2018), que afirmam ser papel do professor colocar cada vez mais os estudantes em contato com tarefas que estimulam o pensamento algébrico, e não apenas diante de tarefas meramente de técnicas operatórias. Tobio-Gutiérrez et al. (2018) pontuam que a generalização é um processo cognitivo importante na matemática, e que atividades que levem a esse tipo de situação, com a generalização de padrões e regularidades, trazem à tona a mobilização de conceitos, pelos quais tais habilidades são aplicadas tanto na matemática quanto em outros campos do conhecimento.

Almeida (2018) utiliza respostas a testes com problemas de partilha e entrevistas feitas com estudantes do 6º ano, que mesmo sem terem visto o assunto específico de equações polinomiais do primeiro grau, foi percebido na pesquisa que três características do pensamento algébrico: “a capacidade de estabelecer relações, de modelar e de construir significado para a linguagem e o objeto algébrico” foram evidenciadas através da resolução de problemas de partilha, além de outras mobilizações que indicam o pensar algebricamente.

O autor defende a ideia de que o estudante atinge o grau máximo de pensamento algébrico, “quando tem o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem”, tendo o cuidado de não apresentar de imediato ao estudante a linguagem simbólica, dando a devida importância ao caminho percorrido pelo estudante para chegar naturalmente à generalização algébrica.

Acreditamos que, quando esse percurso é valorizado, o aluno passa a aprender a álgebra de forma significativa, em que ele deixa de olhar e manipular os símbolos para olhar por meio dos símbolos, compreendendo o significado de cada símbolo, passando a ter um pensamento com compreensão (ALMEIDA, 2018, p. 711).

Dos trabalhos sobre desenvolver o Pensamento Algébrico, destacamos Gualandi et al. (2018), que trabalha com problemas investigativos com estudantes do 8º ano, utilizando atividades de generalização de padrões. Concluíram que as atividades levaram os estudantes a conseguir “desenvolver os processos de observação, generalização e abstração”.

IMPLICAÇÕES DA REVISÃO DE LITERATURA

Por meio da revisão de literatura, observamos que o pensamento algébrico está em pleno desenvolvimento na academia e sendo cada vez mais incentivado nas escolas. As formulações de problemas algébricos são um importante instrumento impulsionador na Educação Matemática e podem ser utilizadas como aferidoras da capacidade cognitiva de pensar algebricamente, corroborando diversos autores anteriormente pesquisados e citados, como Radford (2006), Lins Giménez (2001) e Ponte (1992).

A formulação de problemas algébricos recreativos não foi encontrada nos bancos de dados pesquisados, o que aponta para a relevância da pesquisa que desenvolvemos nesta dissertação.

Na fase da pré-álgebra, ocorre a passagem da aritmética para a álgebra, com a inclusão de padrões, generalizações, símbolos e sequência de palavras. Esse processo deve ser ampliado nos anos finais do ensino fundamental II, sendo uma forma de condução para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O ápice do pensamento algébrico pode ser visto com o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem.

A partir da revisão do texto, podemos tirar várias implicações importantes:

Sobre a importância do Pensamento Algébrico, a revisão destaca a importância do pensamento algébrico no ensino de matemática. Vários estudos apontam para a necessidade de desenvolver essa habilidade nos estudantes, não apenas através de técnicas operatórias, mas também através de tarefas que estimulam o pensamento algébrico.

Em relação ao uso de Problemas Recreativos, embora a revisão não tenha encontrado muitos artigos sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, um estudo destacado utilizou um problema recreativo para desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes, e também apontam desafios na Transição para a Álgebra, com destaque para os desafios enfrentados pelos estudantes na transição da aritmética para a álgebra. Um estudo mencionado utilizou atividades de questionamentos que envolvem padrões, generalizações, símbolos e sequência de palavras para facilitar essa transição.

A revisão menciona um estudo que trabalha com estudantes autistas, refletindo sobre a emergência do raciocínio algébrico. Isso destaca a importância da inclusão e da adaptação das abordagens de ensino para atender às necessidades de todos os estudantes, assim como, destaca o papel crucial do professor em colocar os estudantes em contato com tarefas que estimulam o pensamento algébrico.

Alguns estudos destacados na revisão apontam para a importância da generalização como um processo cognitivo importante na matemática.

Verificamos na revisão uma relevância da BNCC, que sugere para os 8º e 9º anos uma continuidade da proposta sobre a relação entre grandezas que amplia os estudos das técnicas e resoluções de equações.

Essas implicações podem ser úteis para orientar futuras pesquisas e práticas pedagógicas na área de educação matemática.

Diante disso, seguiremos no próximo capítulo com a apresentação da metodologia utilizada em nossa pesquisa.

7 OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos os caminhos metodológicos que adotamos para nossa pesquisa, que segue uma metodologia qualitativa, como forma de valorizar a opinião e as ideias das pessoas, buscar dar sentido a discursos e narrativas, de acordo com D'Ambrósio (2004). Na sequência, elencamos os participantes, os instrumentos utilizados na coleta de dados, conteúdos matemáticos em que esta pesquisa será realizada baseada em Demo (2019), Mazucato (2018), Ponte (2006), Gil (2011) e Yin (2015).

7.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa trata-se de uma investigação sobre o desenvolvimento de estratégias durante atividades de formulação de problemas algébricos recreativos e terá uma metodologia qualitativa de natureza investigativa, a ser realizada no período de setembro a outubro de 2023, numa escola pública da rede municipal da região metropolitana do Recife, sendo dois estudos de caso, de acordo com Yin (2015), que será desenvolvido individualmente com dois estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental II (Anos Finais do Ensino Fundamental). Demo (2019) cita que a pesquisa carece de método, mesmo que de forma instrumental, sendo a pesquisa científica caracterizada como atividade cotidiana, que pode ser de maneira sistemática e criativa, agregada a um diálogo crítico permanente com a realidade em sentido teórico e prático. Mazucato (2018) afirma que:

O estudo de caso é um tipo de pesquisa que busca aprofundar uma unidade individual e pontual. Dessa forma, ele ajuda a estabelecer respostas para fenômenos mais localizados e específicos. É uma forma de pesquisa muito usada para compreender, por exemplo, as motivações que levaram a dada decisão ou acontecimento. Este tipo de investigação intenta, geralmente, a orientação de decisões a serem tomadas (Mazucato, 2018, p. 60).

Ponte (2006) afirma que o objetivo fundamental do estudo de caso é proporcionar uma melhor compreensão em profundidade de o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias,

nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador, um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa, que procura “descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de certo fenómeno de interesse.” (Ponte, 2006, p.2).

Sendo assim, a escolha metodológica do estudo de caso foi motivada pelo tipo de questão de pesquisa proposta: como os estudantes podem desenvolver o pensamento matemático com a formulação de problemas algébricos recreativos? O estudo pretende investigar as contribuições no desenvolvimento de estratégias de formulação de um problema algébrico recreativo pelos estudantes.

7.2 LOCAL DA PESQUISA

O local da pesquisa foi numa sala de aula de uma Escola de Ensino Fundamental da rede pública municipal de ensino, localizada na região metropolitana do Recife-Pernambuco- Brasil.

7.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Tendo por base um trabalho exploratório e investigativo realizado pelos estudantes na sala de aula, com dois estudantes de uma turma com 20 (vinte) estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A escolha de se trabalhar especificamente com dois estudantes nos estudos de caso, ambos da mesma sala, é basicamente por questões de tempo hábil, no mestrado, para a análise dos dados.

Para o desenvolvimento de toda a pesquisa foram necessários oito momentos, iniciando com a entrega do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) na Escola e para os participantes da pesquisa, seguido da realização da primeira entrevista, aplicação do questionário, duas sessões de formulação de problemas algébricos recreativos e a realização da segunda entrevista, para a turma do 9º Ano, com duração de 45 (quarenta e cinco) minutos cada.

7.4 CRITÉRIOS DE INCLUSÃO E EXCLUSÃO

O critério de seleção dos estudantes dos estudos de caso foi de acordo com as experiências e o nível dos estudantes com a formulação de problemas algébricos recreativos, apontadas e analisadas pelo professor pesquisador na primeira entrevista semiestruturada e no questionário aberto.

Sendo assim, denominamos os critérios de inclusão: estudantes que possuem maior familiaridade com a álgebra, a formulação de problemas ou com a matemática recreativa, em algum tipo de atividade os dois estudantes devem apresentavam um bom desempenho nestes três aspectos, estando familiarizados com pelo menos um deles.

O critério de exclusão foi a distorção idade-série, pois os estudantes com esta característica podem estar em desvantagem em relação aos demais estudantes, por fatores como reprovação em anos anteriores ou evasão.

Para evitar um possível constrangimento ao convidar e posteriormente excluir os possíveis participantes ao se delimitar a seleção dos dois estudantes, não publicaremos os resultados avaliações, quer sejam negativas ou positivas, referentes a capacidade e julgamento da exposição das experiências e o nível dos estudantes com a formulação de problemas algébricos recreativos, apontadas na primeira entrevista semiestruturada e no questionário aberto. Logo todos os estudantes serão orientados que, ao participarem dessa primeira entrevista, já farão parte da pesquisa em curso.

7.5 SELEÇÃO DE PARTICIPANTES

O critério de seleção da escola foi pelo fato de a instituição de ensino ser próxima da residência do pesquisador, favorecendo o trabalho da pesquisa em termos de conveniência, assim como a seleção do 9º ano foi por conta do grau de maturidade dos estudantes com o conteúdo matemático trabalhado neste ano, a álgebra, ser estudado com um grau de generalização mais formal.

Almejamos desenvolver o estudo numa escola da rede municipal de ensino, porém, o calendário de avaliações externas não propiciou trabalhar neste tipo de escola do estado. O recrutamento dos estudantes se dará no horário da aula vaga de

geografia da turma, que, por falta de professor, a coordenação escolar cederá a aula para explicarmos a pesquisa e convidamos coletivamente os interessados a participarem da pesquisa, que para tal, os interessados devem levar e trazer preenchidos TALE e TCLE, por eles e responsáveis, em tempo hábil de acordo com o cronograma, para iniciarmos a primeira entrevista com todos os alunos do 9º ano interessados em participar, salientamos que não haverá coleta de dados ou observação de atividades dos professores na pesquisa.

7.6 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS E OS PROCEDIMENTOS

A coleta de dados tem por base a gravação dos áudios por meio de um gravador e diário de bordo, assim como os documentos produzidos pelos estudantes nas tarefas propostas, o as entrevistas (semiestruturadas) e o questionário, de acordo com Gil (2011), Demo (2019) e Yin (2015).

Gil (2011) coloca o estudo de caso como o mais completo dos delineamentos em relação à coleta de dados, pelo seu caráter do estudo de dados humanos (dados de gente) dados de papel como “análise de documentos, entrevistas, depoimentos pessoais, observação espontânea, observação participante e análise de artefatos físicos” (p.141).

O mesmo autor ainda cita que a entrevista é a forma mais flexível de todas as técnicas da coleta de dados, e por conta disso, são definidos vários tipos de entrevistas, de forma que “entrevistas mais estruturadas pré-determinam em maior grau as respostas a serem objetivas”, já entrevistas as semiestruturadas são desenvolvidas de maneira mais espontânea, onde o entrevistado tem liberdade para se posicionar favorável ou não sobre o assunto tratado. Minayo (2014, p.267) cita que a pesquisa semiestruturada “obedece a um roteiro que é apropriado fisicamente e utilizado pelo pesquisador”.

A escolha de utilizar também um diário de bordo para efetuar a coleta de dados, servirá para tomar notas referentes às expectativas do investigador sobre cada tarefa por parte do pesquisador, as reações dos estudantes na fase de introdução da tarefa, atitudes/questões colocadas pelo professor no desenvolver da tarefa, como também questões específicas colocadas pelos estudantes, dificuldades, comentários no

decorrer da tarefa. Sendo este um instrumento de estudo pode ser utilizado para o acompanhamento do desenvolvimento de projetos de pesquisa em sala de aula.

Yin (2015) toma a entrevista como “uma das fontes mais importantes de informação para o estudo de caso”, colocadas de forma que lembrem conversas guiadas a fim de satisfazer as necessidades da investigação e trazer perguntas não intimidadoras ao entrevistado. Ainda afirma o autor que o questionário é dirigido ao ponto de coletar dados de um estudo de caso único ou de um único respondente, sendo comparado a um protocolo.

O questionário, segundo Gil (2011, p.128) pode ser definido como “A técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc”.

Dessa forma, as entrevistas (semiestruturadas) e o questionário aplicados a dois estudantes (antes e depois da experiência), analisando critérios de “concepção”, que têm como objetivo chegar a um mesmo resultado: informar a maneira como as pessoas concebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado, de acordo com Matos e Jardimino (2016). Esta concepção em nossa pesquisa será sobre a formulação de problemas matemáticos.

Será realizado o planejamento das atividades como elencado: No primeiro momento será realizada uma entrevista individual semiestruturada, com o objetivo de identificar as concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula. A primeira entrevista conteve o seguinte roteiro de perguntas:

1. Conte sobre alguma experiência criativa que você teve nas aulas de Matemática.
2. Como você pensa que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas?
3. Para você, o que significa formular?
4. E formular um problema matemático?
5. Para que servem as perguntas matemáticas?
6. Você já estudou equação do primeiro grau? Se sim, poderia dar um exemplo de uma equação?

7. Você já criou algum problema matemático ou pensou como algum problema poderia ser escrito de outra maneira?

8. Para você, é possível se divertir com a Matemática? Se sim, como?

9. Você já resolveu um problema que achou divertido? Se sim, conte a sua experiência.

A seguir, utilizaremos um questionário aberto (Demo, 2019), pois este tipo de questionário permite ao entrevistado ter a liberdade de se expressar com o que pensa, ainda segundo o autor, “a busca científica precisa submeter-se ao controle e ao teste experimental” (p. 104) e que a observação controlada contribui para a ciência para a ampliação das técnicas de coleta de dados.

Do questionário aberto aplicado aos estudantes, tivemos como objetivo compreender mais sobre o que estes sabem sobre padrões, regularidades e generalização, que é fundamental no pensamento algébrico, no nível dos estudantes que participaram da pesquisa. O questionário aberto contou com as seguintes perguntas:

1. Você sabe o que é uma expressão matemática? Dê exemplos.

2. Uma equação pode ser obtida a partir de expressões matemáticas? Se sim, como?

3. A álgebra é uma área que trabalha basicamente com o quê? Explique.

4. Em sua opinião, o que é generalização? Explique.

5. Qual a maior dificuldade em pensar de forma genérica na Matemática? Por quê?

6. Qual a necessidade de se formalizar a generalização na Matemática?

Após a análise da primeira entrevista semiestruturada e do questionário definimos os estudantes que foram os estudos de caso, tendo como critério os estudantes que se mostrarem mais familiarizados com a matemática e seu processo de generalização.

Nas próximas sessões os estudantes formularam problemas algébricos recreativos a partir de um texto intitulado “O Problema das Pérolas do Rajá”, do livro O Homem que Calculava, de Malba Tahan, que é um problema que envolve álgebra

elementar com equações do primeiro grau, juntamente com um problema intitulado O Cavalo e a Mula, que também envolve álgebra com equações do primeiro grau, que pertence ao livro *Álgebra Recreativa*, do autor Yakov Perelman Isidorovich.

Como já citamos acima, começaremos com o problema das Pérolas do Rajá, de Malba Tahan, a seguir, o problema O Cavalo e a Mula, de Yakov Perelman, que não precisou ser adaptado pois ele trata com a montagem de sistema de equações, pois os estudantes já têm conhecimento prévio desse assunto, algo visto a partir do 7º ano com equações do 1º grau e consolidado no 8º ano com sistema de equações do 1º grau com duas variáveis.

Problema 2: O Cavalo e a Mula (Perelman, 2018)

Um cavalo e uma mula caminhavam juntos levando no lombo sacos pesados. O cavalo lamentou-se quando a mula lhe disse: Estás reclamando de quê? Se eu levasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha.

Digam-me doutos matemáticos quantos sacos levava o cavalo e quantos sacos levava a mula? O cavalo tem razão em estar reclamando do peso que carrega? Por quê?

Resolvemos o problema mediante equações com duas incógnitas: $y+1=2(x-1)$ e $y-1=x+1$ ou $2x-y=3$ e $y-x=2$, uma vez resolvido o sistema, vemos que $x=5$ e $y=7$, o cavalo levava 5 sacos e a mula, 7.

A seguir, planejaremos os detalhes de como serão desenvolvidas as formulações dos problemas algébricos recreativos pelos estudantes.

Os estudantes tiveram como norte os problemas anteriormente citados, e a partir deles, iniciaram a formulação dos problemas com as referidas estratégias citadas no capítulo 1.2, ou seja: Aceitar (formular), que tem a ver com a ruptura do contrato didático e matematomofobia, uma mudança que o estudante pode gerar em vez do professor e do autor do livro didático que formulam), Gerar (a pergunta em si) e O que se não (o que se não “fosse”), um novo modo de definir.

Os participantes puderam questionar os dados apresentados nos problemas e conjecturar como seria uma possível resolução para os problemas, se esses fossem mudados as ordens da pergunta ou a falta ou inclusão de algum dado.

Salientamos que pode ocorrer dos estudantes não conseguirem elaborar uma pergunta para o novo problema, e conseqüentemente não gerar o problema.

Tomamos como exemplo as fases da aceitação e do desafio (aceitar e gerar), assim como a segunda fase do questionamento o que seria se não fosse, ou seja, poderia ser mudado algo no problema e que isso acarretaria? Logo, no problema As Pérolas do Rajá, os estudantes podem pensar em diferentes estratégias para formulação de novos problemas, uma delas é a reformulação, que por exemplo, ao pensar que, se a quantidade de filhas do Rajá fosse menor do que as citadas no problema, poderia ser mais fácil resolver o enigma? Ou seja, conjecturar que a divisão proporcional nas pérolas poderia ser uma fração de menor denominador.

Da mesma forma, para o problema o Cavalo e a Mula, os estudantes poderiam formular um novo problema com as quantidades iguais para o cavalo e a mula.

Já para a segunda fase da formulação de problemas, partindo dos problemas elencados anteriormente, os estudantes podem optar em manter a conclusão e mudar a hipótese, manter a hipótese e mudar a conclusão, como no problema As Pérolas do Rajá, manter que a quantidade filhas seria igual a 3, o que alteraria a quantidade de pérolas, porém, o que aconteceria se o rajá dividisse as pérolas em proporções diferentes das citadas no problema, ou até mesmo pensar que ordem apresentada no enunciado poderia ser diferente, sem necessariamente a filha mais velha ser a primeira escolher parte das pérolas. Para o problema O Cavalo e a Mula, essa estratégia poderia ser feita com mantendo-se a hipótese e mudar a conclusão, logo, o que aconteceria se o cavalo levava por exemplo 7 sacos e a mula 5, que são os valores trocados da conclusão original do problema.

Por fim, será realizada a segunda entrevista semiestruturada com o objetivo de identificar o que aconteceu em relação à primeira entrevista e esta última, no modo como os estudantes concebem a formulação de problemas algébricos recreativos.

Os estudantes foram encorajados a demonstrar a compreensão de equação, variável e generalização de acordo com a possibilidade de pensar se o problema fosse de outra maneira (o que se não fosse), na qual almejamos que com essa estratégia possa revelar a criatividade do estudante para formular um problema, assim como o domínio algébrico em pensar o problema de outra maneira.

As perguntas dessa etapa seguirão o roteiro a seguir:

1. Qual a sua idade?
2. Qual foi a sua ideia inicial ao formular um problema matemático algébrico?
3. Você já tinha a equação em mente ou montou a partir do problema formulado?
4. Você pensa que conseguiria chegar à resolução correta do problema sem ter que utilizar uma incógnita? Como? Explique.
5. Por que para os problemas matemáticos algébricos, na maioria das vezes, existe uma forma genérica para resolução de um problema?
6. Para você, as questões matemáticas que envolvem algum tipo de padrão sequencial deveriam ter sempre um contexto a partir de situações reais? Por quê?
7. Para o caso de uma situação real que foi transcrita em problema matemático, ao tentar generalizar para quaisquer quantidades, o que seria necessário utilizar?
8. O que facilita pensar algebricamente na formulação das questões? 9. O que dificulta pensar algebricamente na formulação das questões?

7.7 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

A análise dos estudos de caso foi desenvolvida de modo qualitativo e interpretativo, a partir de dados coletados no diário de bordo, no qual poderemos identificar as expectativas do investigador, assim como as possíveis reações, dificuldades e comentários dos estudantes, durante a execução das atividades. Os demais dados provenientes das entrevistas semiestruturadas, do questionário aberto e das formulações dos problemas algébricos recreativos, desenvolvidas pelos estudantes, com os respectivos estudantes selecionados para comporem os estudos de caso.

Na próxima etapa da pesquisa passaremos à análise dos dados produzidos, em categorias a priori e a posteriori.

As categorias a priori são:

1. As concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos;
2. As estratégias de formulação dos problemas algébricos recreativos;
3. O desenvolvimento do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas.

As estratégias de formulação do problema algébrico podem levar a descobertas distintas inesperadas e a novas e mais significativas oportunidades de aprendizagem. Brown e Walter (2005) citam algumas estratégias para a formulação de problemas e afirmam que trabalhar nessa temática pode dar um novo rumo às aulas de matemática, incentivando até os estudantes a fazer perguntas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular-BNCC (BRASIL 2018), os estudantes do ensino fundamental 2 devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas, logo buscamos verificar se a utilização de algoritmos nos problemas algébricos recreativos caminha para o estabelecimento de conexões entre variável e função e entre incógnita e equação.

7.8. ASPECTOS ÉTICOS

A realização da presente pesquisa obedeceu às diretrizes da Resolução 510/16 do Conselho Nacional de Saúde.

Dos riscos da coleta de dados para os participantes, a pesquisa pode oferecer riscos ou incômodos, caso o estudante não consiga desenvolver nenhuma atividade,

podendo ficar ansioso ou incidentes com os materiais de uso escolar, como caneta e lápis, por se tratar de objetos pontiagudos. Para o primeiro risco, caso ocorra, procuraremos manter um diálogo constante, esclarecendo as dúvidas, que porventura surjam, encorajando os estudantes a terem uma postura ativa, durante toda a atividade. Para o segundo risco, caso ocorra, o fato será comunicado de imediato à gestão escolar, para contatar os responsáveis pelos estudantes e, concomitantemente, providenciar apoio médico numa unidade de saúde mais próxima. Salientamos que, durante a pesquisa os estudantes estarão mantidos em local seguro e acompanhados, para evitar possíveis incidentes.

No que se refere aos benefícios para os estudantes participantes, estes puderam rever e aplicar, de maneira recreativa, a álgebra; contribuir para a ciência, no tocante à Educação Matemática, proporcionando dados para a resolução de problemáticas no ensino e aprendizagem de Matemática, relevantes para a sociedade.

O Armazenamento dos dados coletados nesta pesquisa, tais como: áudios, fotos, vídeos, questionários e respostas transcritas em folha A4 pelos estudantes, durante a formulação de problemas, ficarão armazenados em banco de dados digital tipo drive do computador do pesquisador e dados físicos ficarão guardados no endereço do pesquisador, sob a responsabilidade do pesquisador Rhafael dos Santos Gomes, no endereço Rua Catulo da P. Cearense, 1370, ap. 302, Jardim Atlântico, Olinda- PE, pelo período de mínimo 5 anos.

Salientamos que, nos próximos capítulos, adotaremos para os estudos de caso, pseudônimos Marcos e Cecília para os estudantes pesquisados. Portanto, os nomes citados, não correspondem aos nomes reais dos estudantes, a fim de resguardar a identidade deles.

8 O ESTUDO DE CASO 1- MARCOS

Neste capítulo apresentamos o primeiro estudo de caso de nossa análise, tecendo as nossas interpretações a partir das categorias de análise: (i) As concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos; (ii) As estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos utilizadas pelos estudantes; (iii) O desenvolvimento do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas; (iv) Formulação de exercícios; e a (v) A linguagem lógico matemática utilizada.

8.1 Apresentação

Este primeiro estudo de caso é sobre o estudante Marcos, ele está cursando o 9º Ano do Ensino Fundamental de escola pública municipal, localizada na região metropolitana do Recife, tem 15 anos de idade e afirma gostar de Matemática.

8.2 As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos

A entrevista inicial foi realizada no dia 13 de setembro de 2023, com todos os estudantes que se dispuseram a participar e entregaram os termos solicitados.

Em relação às *concepções* dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, primeiro ponto que destacamos é o possível desconhecimento do estudante em relação a palavra Álgebra, fato que pode ser revelado quando ele cita que ao calcular quadriláteros seria uma área de estudo da álgebra, de fato, os cálculos permeiam a álgebra, mas a ideia de uso da álgebra com cálculos de quadriláteros, acaba pressupondo uma resposta aleatória à pergunta em questão, que vai desde o questionário até sua entrevista inicial. Apesar de na entrevista o estudante ter citado sobre formular em semelhança com construir e criar:

- Pesquisador: Para você, o que significa formular?
- Marcos: Construir, só me vem isso na mente.
- Pesquisador: E formular um problema matemático?
- Marcos: Criar uma questão matemática.

Ponte (1992) traz em seu estudo que ao matemático criativo deve ter a habilidade de resolver problemas auto formulados, fazendo parte do saber a relação de concepções e prática, uma influenciando a outra, em que, o autor afirma que identificar concepções exigem uma abordagem imaginativa e pode apresentar, podendo apresentar problemas metodológicos, Assim, definimos investigar a concepção dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, pelo fato de ser um dos fatores de mudança ao se pensar em colocar o estudante no lugar do professor, em relação ao conhecimento matemático.

Logo, neste primeiro contato com o estudante pesquisado, tivemos a oportunidade de supor uma indicação de que o mesmo poderia ser um estudo de caso viável para aferição desse tópico, apesar do questionário apresentar respostas curtas e aleatórias, o fato do estudante indicar que criar questões é uma forma de se expressar matematicamente por meio de equações, é uma alternativa parcial para a resposta, de acordo com Idem e Silva (2021) e Bortolote e Oliveira (2021), tomam que observar os padrões é uma das estratégias de se explorar conceitos matemáticos, sendo as expressões matemáticas, especialmente as algébricas, ricas em padrões, estrutura tal que é vista no estudo de introdução à álgebra (Alvarenga e Vale, 2007), porém não afastamos a possibilidade do estudante ter, mais uma vez, dado uma resposta aleatória porém direcionada ao nosso estudo, pois o mesmo estava ciente de que o foco do trabalho seria em torno da formulação de problemas algébricos recreativos, a frase pode ter ficado “guardada” e ter a ânsia de responder corretamente, pode ter levado o estudante a colocar esse tipo de resposta.

Matos e Jardimino (2016) afirmam que a concepção está ligada à formação e operação de conceito, já Martins, Viseu e Menezes (2019) tomam que a formulação de problemas é um desafio para o estudante, mas contribui para a

compreensão de conceitos, sanar dificuldades com atividades lúdicas (Souza et al, 2016), avaliar dificuldades Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013), sendo listada como nível mais elevado de conhecimento, de acordo com Ponte (1992) e Ramirez (2006).

Marcos não saber o conceito da palavra álgebra, não o impede de saber operacionalizar algebricamente, tendo em vista que a palavra, possivelmente não faça parte do seu dia a dia escolar, sendo empregado em tópicos de livros e geralmente ligado a um conteúdo mais amplo, como por exemplo: equação do primeiro grau. Tal palavra ganha robustez nos cursos superiores, em que a definição das áreas da matemática é apresentada formalmente, principalmente, nos cursos de ciências exatas. Sendo assim, uma “conhecida” do ensino fundamental, salvo nos casos de estudantes mais curiosos e que recordam os nomes dos tópicos das aulas e seus respectivos conteúdos.

Ponte (1992) cria uma escala de competência para os estudantes, dividida em aprendizagem elementar, conhecimento intermediário, complexo, de ordem geral, essa última, a de maior nível, pode ser entendida como pensar de forma geral, ter uma noção ampla e profunda dos conhecimentos matemáticos. A generalização é vista como crucial para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Matsko & Thomas, 2015), já os problemas algébricos podem ser utilizados para generalizar a aritmética, autores como Ponte, Branco e Matos (2009) e Blanton e Kaput (2005) citam que uma das formas de encarar a Álgebra é como Aritmética generalizada, ainda sim, a semelhança das palavras generalização e geral, por derivação, corrobora com a vaga ideia de se pensar de modo geral para se generalizar, tendo em vista que o conceito formal de generalizar não é algo tão simples de se ter, tomado como maneira de se estabelecer relações válidas para certa classe de objetos (Ponte, Branco e Matos, 2009).

Fato curioso é que o estudante, na formulação que ele afirmou já ter feito, inicialmente, não sabia o resultado final e mesmo sem o auxílio de um gabarito, conseguiu descobrir um valor conferindo-o na máquina calculadora. Esta atitude, revela um senso de autonomia e independência nos estudos (Brown e Walter, 2005), e um certo grau de protagonismo.

Elaboramos um roteiro para a primeira entrevista, que conteve além das seguintes perguntas, algumas novas indagações que feitas no momento da entrevista:

1. Conte sobre alguma experiência criativa que você teve nas aulas de Matemática.

Marcos respondeu que teve como experiência criativa um jogo, o material dourado, utilizado numa aula, afirma também que a matemática nos ajuda nas compras no mercado, na hora do troco, nos ajuda a não dar o troco errado.

O estudante Marcos ainda afirma que formular é construir e formular um problema matemático é criar uma questão matemática, essas questões, sendo vistas como perguntas matemáticas, ajudam a resolver contas, como exemplo, as contas da escola, ou seja, as vistas em sala de aula.

- Marcos: *Sim, com jogo.*

- Pesquisador: Qual tipo de jogo?

- Marcos: *Material dourado, que já utilizei numa aula.*

2. Como você pensa que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas?

Marcos: *A matemática ela nos ajuda nas compras no mercado.*

- Pesquisador: De que forma?

- Marcos: *Na hora do troco, nos ajuda a não dar o troco errado.*

3. Para você, o que significa formular?

- Marcos: *Construir, só me vem isso na mente.*

4. E formular um problema matemático?

- Marcos: *Criar uma questão matemática.*

5. Para que servem as perguntas matemáticas?

- Marcos: *Ajudar a resolver as contas.*

- Pesquisador: Algum tipo de conta específica?

- Marcos: As contas da escola.

6. Você já estudou equação do primeiro grau? Se sim, poderia dar um exemplo de uma equação?

- Marcos: Sim, já estudei mas só lembro que tem conta de multiplicação.

7. Você já criou algum problema matemático ou pensou como algum problema poderia ser escrito de outra maneira?

- Marcos: *Já, fiz uma questão difícil e tentei resolver.*

-Pesquisador: Mas você conseguiu concluir ela?

- Marcos: *Sim, treinando consegui.*

-Pesquisador: E como você sabe que conseguiu?

- Marcos: *Sem saber o resultado final, quando descobri um valor, fui conferir na calculadora, e deu certo.*

8. Para você, é possível se divertir com a Matemática? Se sim, como?

- Marcos: *Sim, com jogos e brincadeiras.*

9. Você já resolveu um problema que achou divertido? Se sim, conte a sua experiência.

- Marcos: *Não.*

Por fim, foi realizada a *segunda entrevista semiestruturada* com o objetivo de *identificar o que aconteceu em relação à primeira entrevista e esta última, no modo como os estudantes concebem a formulação de problemas algébricos recreativos.*

Os estudantes foram encorajados a demonstrar a compreensão de *equação, variável e generalização* de acordo com a possibilidade de pensar se o problema fosse de outra maneira (O Que Se Não Fosse), na qual almejamos que, com essa estratégia, pudesse revelar a criatividade do estudante para formular

um problema, assim como o domínio algébrico em pensar o problema de outra maneira.

As perguntas dessa etapa seguiram o roteiro a seguir:

1. Qual a sua idade?

- Marcos: *É 15 (15 anos)*

2. Qual foi a sua ideia inicial ao formular um problema matemático algébrico?

- Marcos: *Eu fiquei tentando pensar, imaginar. Como podia vir fazer aquela questão baseado na primeira.*

3. Você já tinha a equação em mente ou montou a partir do problema formulado?

- Marcos: *Não, só pensei na, no cálculo.*

No caso, de uma forma só com soma, né, que tu fazes ficasse jogando valores, né? Mas aí foi, já sabia, então o valor final. Antes de fazer o problema, ou ao longo do problema tu fosse montando?

- Marcos: *É, fazendo, eu já sabia antes, eu já sabia.*

4. Você pensa que conseguiria chegar à resolução correta do problema sem ter que utilizar uma incógnita? Como? Explique.

Marcos: *Eu acho que sim.*

5. Por que para os problemas matemáticos algébricos, na maioria das vezes, existe uma forma genérica para resolução de um problema?

Marcos afirma não saber.

- Marcos: *Não sei.*

6. Para você, as questões matemáticas que envolvem algum tipo de padrão sequencial deveriam ter sempre um contexto a partir de situações reais? Por quê?

Marcos responde: *Não, não.*

Pesquisador: A gente pode colocar a questão pura assim só. Letra só. Com números a gente tem que ter. sem o contexto, pode ser o que é que tu achas que pode ser?

- Marcos: *Assim, porque é isso, eu acho que. Não faz diferença, eu acho.*

Não faz diferença nem para facilitar ou para complicar.

- Marcos: *Não acho que está complicado, complica mais um pouquinho.*

Complica com o que? Quando colocar o contexto de pessoa real ou não

- Marcos: *Quando coloca.*

Tu preferes fazer as contas somente com números.

- Marcos: *Um hum.*

Pesquisador: Sem ter que ter aquela história sem ter que contexto Real, é isso.

- Marcos: *É*

7. Para o caso de uma situação real que foi transcrita em problema matemático, ao tentar generalizar para quaisquer quantidades, o que seria necessário utilizar?

- Marcos: *A quantidade de, Das filhas ali, qualquer outra.*

Para o caso do problema das filhas do Rajá, por exemplo, Marcos responde que: a quantidade de, das filhas ali, qualquer outra, tendo que ter uma quantidade determinada já no enunciado do problema.

8. O que facilita pensar algebricamente na formulação das questões?

Marcos não soube responder essa pergunta.

- Marcos: *Não sei.*

9. O que dificulta pensar algebricamente na formulação das questões?

Resposta de Marcos: a criatividade.

Com relação à concepção sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, o estudante iniciou o que ele entendia por formulação de problema, assumindo seu papel de autocriação, ocorrendo assim uma mudança de concepção do conhecimento matemático (Medeiros e Santos, 2007), porém, percebemos que Marcos encontra maneiras de não ter que seguir pelo caminho da álgebra, se afastando do desafio da criação, da mesma forma que ele precisou saber na calculadora o resultado do problema que informou haver formulado no passado, ele já colocou um valor certo, em mente, no exercício que formulou, logo, sua metacognição se mostrou superficial ao traçar metas simples para formular um problema algébrico recreativo. Secafim (2018).

Inicialmente, o estudante pensava que as perguntas matemáticas serviam para resolução de contas da escola, ao final da segunda entrevista ele mantém a ideia, quando responde que para formular o problema, só pensou na conta, não levando em conta o contexto nem o caráter algébrico da questão dada como base. Solucionar problemas, se visto como resolver contas da escola não deixa de ser útil, e primordial para que eles inventam estratégias e criem ideias significativas, segundo Dante (2005),

Mesmo assim, notamos que a dificuldade apresentada por Marcos que, segundo ele, era com a criatividade, D'Amore (2014) cita que a formulação de problemas envolve autenticidade, criatividade e etc, o estudante expressa preferir problemas de matemática pura do que problemas algébricos contextualizados, o fato não só pode explicitar uma falta de costume em se trabalhar com formulação de problemas, quanto a possível falta de base algébrica dos estudantes de modo geral, Groenwald (2018) revela a demonstração demonstraram de dificuldades enfrentadas por seus estudantes pesquisados, em que não utilizaram artifícios algébricos.

Destacamos que os estudantes atuais da escola básica apresentam dificuldades na transição da aritmética para a álgebra, consequência da falta de ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico, de acordo com Lima e Bianchini (2022). Podemos inferir que Marcos, apesar de estar cursando os anos finais do ensino fundamental, apresenta-se semelhante a estar numa fase de pré-álgebra, que segundo Souza (2019), o estudante estando na transição entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico tem a faculdade de utilização.

A não habitualidade do estudante na formulação de problemas algébricos pode ser vista também na sua dificuldade de expressar suas concepções, conforme aponta Ponte (1992), assim como a capacidade de resolver problemas auto formulados, que Ponte afirma ser a habilidade do matemático criativo, optamos justamente pela entrevista semiestruturada para busca dessas evidências, mas a negativa de algumas perguntas, respondidas com “não sei”, deixando a discussão rasa e vaga, no tocante às suas temáticas, como por exemplo na pergunta: O que facilita pensar algebricamente na formulação das questões?

Ainda assim, o estudante saiu com a ideia de que a matemática pode ser vista de outras maneiras, para além de jogos e brincadeiras, como forma recreativa, que podemos utilizar equações com criatividade na formulação de problemas, apesar de não ser algo fácil, principalmente ao se pensar algebricamente. quebrando paradigmas de como a matemática é vista costumeiramente. (Souza et al, 2016) cita que atividades lúdicas são colocadas nas aulas para sanar dificuldades enfrentadas pelos estudantes, que, diante de um possível baixo rendimento dos estudantes, não seja algo costumeiro dos professores da rede aplicarem.

Echeverría e Pozo (1998) em seu estudo, traz a contribuição quando cita que o grande desafio da Educação Matemática, o fazer entender o que está por trás das manipulações entre números, e para o caso da álgebra, letras e números.

Acreditamos, que, Marcos tenha mantido sua ausência conceitos sobre a álgebra, mas que mostrou uma possível nuance de pensamento matemático, em especial o algébrico, ao admitir dificuldades em se pensar de forma algébrica com a criatividade e indicar um dado crucial em um dos problemas, a quantidade de filhas, que faz referência direta em se formalizar a resposta algebricamente.

Já tecemos nos tópicos anteriores alguns comentários sobre a entrevista realizada por Marcos, seguiremos agora com a análise da mesma, tomando como base o que Ponte (1992) indica como recurso revelador que ajudam nas evidências de concepções.

O estudante Marcos não se encaixava no critério de exclusão, que foi a distorção idade- série, logo, restava saber como estava a sua familiaridade com a álgebra e a formulação de problemas algébricos recreativos, Pelay (2011) cita jogos como atividade brincante, parte envolvente de problemas recreativos (Varizo, 1993), e algo que pode ser utilizado nas escolas como tentativa de superação as dificuldades de aprendizagem (Souza, et al, 2016).

Diante da resposta de Marcos em citar que o jogo que utilizou um material didático manipulativo, o material dourado, na sala de aula como uma experiência criativa, enxergamos um início de indicação do mesmo como um candidato para o estudo de caso, salientamos que, a grande maioria dos estudantes entrevistados não lembraram ou diziam não ter vivido uma experiência criativa nas aulas de matemática.

Pesquisador: Conte sobre alguma experiência criativa que você teve nas aulas de Matemática. Marcos: *Sim, com jogo.*

Pesquisador: Qual tipo de jogo?

Marcos: *Material dourado, que já utilizei numa aula.*

A matemática pode nos ajudar de diversas maneiras, olhando de forma simplória e cotidiana, segundo Dante (2005), é importante o professor utilizar problemas do cotidiano, efetuar a transposição didática para o contexto escolar, assim, é quase que natural e previsível que os estudantes respondam dentro de um contexto social em como que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas, Marcos afirma que na hora do troco, para não errar durante as compras no mercado, a matemática auxilia nesse momento. Podemos achar uma visão limitada, mas previsível para a faixa etária do estudante e seu possível esclarecimento sobre vertentes da amplitude que a ferramenta matemática pode nos trazer. Esses foram um dos fatores que impulsionaram a viabilização e continuidade da pesquisa, conforme Matsko & Thomas (2015) afirmam que, atividades como a formulação de problemas, acarreta o aumento da motivação e criatividade em buscar correlações com a vivência cotidiana.

- Pesquisador: Como você pensa que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas?

- Marcos: *A matemática ela nos ajuda nas compras no mercado.*

- Pesquisador: De que forma?

- Marcos: *Na hora do troco, nos ajuda a não dar o troco errado.*

Polya (2006) aponta que dentre as formas de se modificar problemas, na fase de análise dados, podem ser criados novos problemas, que originam novas formulações, a resposta de Marcos em relação a formular e formular um problema matemático se tornam pertinentes quando comparados a construção.

-Pesquisador: Para você, o que significa formular?

- Marcos: *Construir, só me vem isso na mente.*

- Pesquisador: E formular um problema matemático?
- Marcos: *Criar uma questão matemática.*

A literatura ainda cita que a formulação de problemas pode ser expressa como colocação de problemas (Brown e Walter, 2005), problemas auto formulados (Ponte (1992), etc.

De acordo com Dante (2005), o estudante precisa refletir sobre problemas matemáticos, pois não basta apenas os estudantes conhecerem ou manipularem as “continhas” com operações e algoritmos, segundo Onuchic (2011; 2013), a matemática objetiva-se de maneira geral em conduzir os estudantes na possibilidade de pensar matematicamente, a visão de uma matemática literal pode ser alimentada na escola quando números não são números de nada, a não ser em "problemas com história" (Lins & Gimenez, 2001, p. 16), sendo um desafio para o ensino da álgebra escolar, logo na rua, os números representam alguma coisa, como dinheiro, distância e etc., mas na escola a matemática pode ser resumida a contas, é o que notamos da opinião expressa por Marcos sobre para que servem as perguntas matemáticas.

- Pesquisador: Para que servem as perguntas matemáticas?
- Marcos: *Ajudar a resolver as contas.*
- Pesquisador: Algum tipo de conta específica?
- Marcos: *As contas da escola.*

Ferreira et al. (2022) trabalhou com equação do primeiro grau, verificando que faz-se necessário adequar a diversas situações, a pergunta foi colocada na entrevista para verificar se o estudantes já havia trabalhado com manipulação de variáveis e do que lembrava, como no 9º ano os estudantes já mantém contato com equação do segundo grau, é plausível que Marcos não cite uma fórmula ou exemplo claro sobre equação do primeiro grau, mas ele aponta que têm conhecimento, já estudou sobre e que dentre suas contas, existe a operação de multiplicação.

- Pesquisador: Você já estudou equação do primeiro grau? Se sim, poderia dar um exemplo de uma equação?
- Marcos: *Sim, já estudei mas só lembro que tem conta de multiplicação.*

A perseverança na proposição de um problema e na sua consequente resolução é uma experiência descrita por Marcos, que apesar de difícil e com auxílio de uma máquina calculadora, chegou ao resultado final, essa perseverança pode ter sido incentivada pela problematização, gerando confiança nas habilidades (Limin, Van Dooren e Verschaffel, 2013).

-Pesquisador: Você já criou algum problema matemático ou pensou como algum problema poderia ser escrito de outra maneira?

- Marcos: *Já, fiz uma questão difícil e tentei resolver.*

-Pesquisador: Mas você conseguiu concluir ela?

- Marcos: Sim, treinando consegui.

-Pesquisador: E como você sabe que conseguiu?

- Marcos: sem saber o resultado final, quando descobri um valor, fui conferir na calculadora, e deu certo.

Mais uma vez, os jogos vem à tona na entrevista quando comparado por Marcos a diversão na matemática, juntamente com brincadeiras, inicialmente o estudante pesquisado afirmou que manteve experiência criativa com jogos, porém revelou que não chegou a resolver um problema divertido, essa ótica pode ter relação com a identificação pessoal do estudante com o assunto ou até mesmo com a forma de abordagem dos problemas por parte dos professores, sendo estes possíveis potencializadores de habilidades dos seus estudantes, como fluência, flexibilidade e originalidade (Van Harpen e Sriraman, 2013).

- Pesquisador: Para você, é possível se divertir com a Matemática? Se sim, como?

- Marcos: Sim, com jogos e brincadeiras.

- Pesquisador: Você já resolveu um problema que achou divertido? Se sim, conte a sua experiência.

- Marcos: Não.

Spinillo et al. (2017) revela até uma lacuna na formação dos professores que têm dificuldade em formular problemas, gerando uma dificuldade na formulação de problemas contextuais., ora, sem contexto real, quem dirá divertidos. Neste sentido, as aulas de matemática tendem a se manter tradicionais e conteudistas.

A Segunda entrevista semiestruturada com o objetivo de identificar o que aconteceu em relação à primeira entrevista e esta última, no modo como os estudantes percebem a formulação de problemas algébricos recreativos, foi realizada no dia 25 de outubro.

Cândido (2001) afirma que o silêncio nas aulas de matemática representa um momento de cálculos mecânicos, enfatiza que a comunicação é importante na construção de conhecimentos abstratos da matemática, concordamos com esse ponto de vista, mas o contexto escolar e seus possíveis ruídos, pode influenciar na concentração e desempenho dos estudantes, por isso, procuramos um local mais silencioso possível da escola para realizar as pesquisa, tivemos total apoio da coordenação e da gestora da unidade de ensino, que cedeu inclusive, em uma das oportunidades, a sala de vídeo, em virtude de algumas outras salas estarem passando por uma reforma em pleno período letivo.

Ainda assim, a escola tem um sistema de intervalos para servir a merenda escolar, de maneira rotativa, liberando sala por sala, após a chegada da refeição, ocasionando sempre uma movimentação de estudantes pelos corredores e entorno das salas da escola, que, apesar do monitoramento bastante presente da coordenação, os ruídos eram inerentes à movimentação dos discentes ao entrar e sair das salas para o pátio do refeitório.

Outro fator que pode ter influenciado na pesquisa, são as constantes avaliações internas e externas, assim como os diversos simulados, a que foram submetidos os estudantes do 9º ano, durante o segundo semestre letivo.

Percebemos, na segunda entrevista, que o estudante Marcos se manteve ansioso e até desatento, em alguns momentos, para responder às perguntas, não sabemos aqui se para terminar o mais rápido possível, a fim de voltar para a sala de aula o quanto antes ou por não sentir mais tanto interesse em continuar a pesquisa, diante de um pré-julgamento pessoal sobre seu desempenho nas sessões de formulação de problemas. O deixamos bem à vontade, escolhemos e

combinamos antecipadamente com a coordenação e o estudante, o momento mais adequado para concluirmos esse momento na escola.

- Pesquisador: Qual foi A ideia inicial de tu formular um problema? Matemático, algébrico.

- Marcos: *Como assim, qual foi a ideia?*

- Pesquisador: A gente. Eu te pedi. Para tu, é fazer formular o problema, não é? De acordo com aquele problema que foi dado. E aí, o que é que tu pensou inicialmente quando tu se colocou para formular aquele problema?

- Marcos: *Não lembro muito bem.*

Salientamos para o estudante que, por exemplo, a entrevista estava sendo realizada um dia após a segunda sessão de formulação de problemas, esse curto período de tempo foi proposital já para evitar o esquecimento por parte dos estudantes pesquisados.

Medeiros (2001) afirma que a repetição de exercícios é utilizada em problemas matemáticos e em sala de aula são trabalhados por meio de fixação de conteúdos, essa repetição leva os estudantes a perceberem características resolutivas como padrões de repetição, podendo criar procedimentos padronizados nas resoluções de problemas. Identificamos que, o intuito inicial de Marcos, ao se pensar em como dar norte ao proposto nas sessões de formulação, foi de tomar como base o problema dado, mas acabou praticamente repetindo os problemas da maneira mais simples possível, recaindo no que pode ser visto no estudo de Groenwald (2018), que alguns de seus estudantes pesquisados, demonstraram dificuldades e não utilizaram artifícios algébricos.

- Pesquisador: Não lembra se fizesse um ontem?

- Marcos: *Ah, ontem ao de onde também? Eu fiquei tentando pensar, imaginar. Como podia vir fazer aquela questão baseado na primeira.*

A ânsia do estudante em querer responder, além de seu espírito impulsivo, natural da idade, Marcos acabou seguindo pelo caminho feito pelos professores durante as aulas, que, segundo Brown e Walter (2005), objetivam costumeiramente apenas encontrar a resposta certa e a forma adequada de chegar à mesma.

- Pesquisador: Mas aí a ideia de iniciar porque tinha colocado, foi o quê. Vou colocar sobre. Eu disse formule outro problema.
- Marcos: *A primeira ou a segunda questão?*
- Pesquisador: A primeira, né?
- Marcos: *Eu botei A quantidade certa de sacos para carregar.*
- Pesquisador: Então, só se propôs, que na Forma original, não tinham quantidade. Colocou aquela quantidade? Isso foi para quê?
- Marcos: *Para facilitar, ajudar a responder.*
- Pesquisador: Nas contas, não é já determinante pronto.
- Marcos: *É.*
- Pesquisador: Tinha alguma equação em mente? Para montar o problema ou é a partir daquele problema que se formulou? Já tinha alguma coisa para montar?
- Marcos: *Não, só pensei na, no cálculo.*
- Pesquisador: No caso, de uma forma só com soma, né, que tu fazes ficasse jogando valores, né? Mas aí foi, já sabia, então o valor final. Antes de fazer o problema, ou ao longo do problema tu fosse montando?
- Marcos: *É, fazendo, eu já sabia antes, eu já sabia.*

A segurança para estabelecer ideias de generalizações pode ser trabalhada com problemas padrão e contribuir para desenvolvimento do pensamento algébrico com a observação de padres e representações, (Vale, 2007), assim como (Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013) fala de confiança nas habilidades, Marcos se mostrou um pouco inseguro, utilizando expressões como “eu acho” e “não sei” na entrevista, quanto ao domínio do assunto, fato que pode ter preferido, e conseqüentemente não ter notado importância em utilizar incógnita e generalização em sua reformulação.

Pesquisador: Tu achas que conseguiria chegar à resolução correta do problema sem ter que utilizar alguma, algum valor desconhecido que, no caso, a incógnita.

- Marcos: *Eu acho que sim.*
- Pesquisador: Por que os problemas matemáticos? Com álgebra, na maioria das vezes existe uma forma genérica, não é para resolver o problema. Que tu achas?
- Marcos: *Não sei.*

Em dado momento dessa segunda entrevista, o estudante pode ter se sentido encurralado e até mesmo constrangido e, de fato, não ter o que responder

sobre temas como álgebra, generalização e padrão, pois esses pontos não foram utilizados em suas reformulações, sendo a entrevista um contraponto de seu desenvolvimento durante as formulações. Assim, entendemos que Marcos pode ter avançado no desenvolvimento mas, diante da resposta negativa a diversas perguntas da entrevista, por não expressar esse fato, dificultou a análise.

- *Pesquisador:* As questões de matemática que envolvem algum tipo de padrão que tem uma sequência de resolução, né? Ou até de enunciado, deve ter sempre um contexto, né? A partir de uma situação real.

- *Marcos:* Não, não.

A indicação de Marcos quanto a pensar que um problema matemático com padrões e sequência pode ser tornar mais complicado quando contextualizado, pode fazer referência a um gosto pessoal em se trabalhar com a matemática literal, mas acreditamos que seja por evitar pensar algebricamente, pensar em generalização. com uma transposição didática (Aguiar, 2014; Dante, 2005).

- *Pesquisador:* A gente pode colocar a questão pura assim só. Letra só. Com números a gente tem que ter. sem o contexto, pode ser o que é que tu achas que pode ser?

- *Marcos:* Assim, porque é isso, eu acho que. Não faz diferença, eu acho. *Pesquisador:* Não faz diferença nem para facilitar ou para complicar.

- *Marcos:* Não acho que está complicado, complica mais um pouquinho.

- *Pesquisador:* Complica com o que? Quando colocar o contexto de pessoa real ou não

- *Marcos:* Quando coloca.

- *Pesquisador:* Tu preferes fazer as contas somente com números.

- *Marcos:* Um hum.

- *Pesquisador:* Sem ter que ter aquela história sem ter que contexto real, é isso.

- *Marcos:* É

Dante (2005) aponta que qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-lo, Medeiros e Albino (2018), afirmam que os problemas matemáticos recreativos possuem formato lúdico. Marcos informa não ter resolvido nenhum problema que achou divertido, essa identificação de o que é um problema aparenta não estar claro para o estudante, pois inicialmente ele informou já ter contato com atividade

criativa, que foi o material dourado, ele pode ter sido trabalhado em sala de aula fora de um contexto de problema matemático, o que pode ter passado a ideia de apenas mais uma atividade com jogos para o estudante.

Vislumbramos uma mudança de pensamento superficial, ao indicar pensar somente na conta durante a sessão de formulação, tendo a ideia inicial que as perguntas matemáticas serviam apenas para as contas da escola, logo, Marcos se coloca como um solucionador de problema (Dante, 2005), um passo interessante para a criação de ideias que deram origem aos exercícios formulados por ele.

Marcos indica sua preferência em se trabalhar com problemas literais, mas acha que não faz diferença, segundo o estudante aponta, fazendo uso de contexto real complica mais um pouco, podendo indicar que ele pode ter pensado em colocar elementos algébricos no problema e não conseguir, evidenciamos uma demora e uma quase desistência na primeira sessão, por parte de Marcos, diante da dificuldade enfrentada por ele na proposta de formular um problema algébrico recreativo.

- *Pesquisador*: É que a gente fez os problemas, né? Tanto das pérolas do rajá, quanto do cavalo da mula. Tinha um contexto das histórias das filhas do rajá, que foi fazer a divisão da herança das pérolas? Conto dos sacos que o cavalo e que a mula estava carregando, não é? Então tinha essa situação real. Para o caso de uma situação real, que tu transcrevesse, que tu fizeste lá no problema matemático, quando a gente tenta generalizar essa ideia, para uma quantidade, qualquer que seja. O que tu acha que seria necessário a gente utilizar?

- *Marcos*: O que, para quê?

- *Pesquisador*: Quando eu vou, me deparo para fazer um problema matemático. Como tu fizeste? Dentro de uma situação real, uma coisa. Dia a dia? Possa acontecer? Então, se eu quiser fazer aquilo ali para, para qualquer caso, qualquer quantidade que seja, de uma forma genérica, né? Por exemplo, aquele programa das pérolas do rajá. Tinham 2 filhas e então, se eu quisesse saber uma forma, uma forma genérica. Para as 3 filhas, 4 filhas, um jeito fixo de Eu fazer A questão, o que tu achas que a gente deve utilizar ali necessariamente naquelas questões?

-**Marcos**: A quantidade de, Das filhas ali, qualquer outra.

Pesquisador: Tinha que ser predeterminada a quantidade, né?

-**Marcos**: Sim.

O estudante manteve seu possível desconhecimento sobre a palavra álgebra, ele poderia até pesquisar o significado da palavra, mas indica ter noção do que é se trabalhar com incógnitas literais ou contexto generalizados.

Pesquisador: Quando eu penso assim, em álgebra, não é que é fazer essas manipulações O que é que isso pode me facilitar quando eu vou formular uma questão.

-Marcos: *Não sei.*

Pesquisador: Qual a maior dificuldade de a gente pensar então dessa forma algébrica que tu achas? Quando a gente está formulando uma questão, eu, tu viste que tinha, né? Dentro da questão, tinha um pouco de álgebra, de se pensar de uma forma geral, de forma genérica.

-Marcos: *A criatividade*

Singer e Voica (2015) tomam que a abstração-generalização é manifestada pela criatividade matemática, Matsko e Thomas (2015) afirmam que ela é definida como a capacidade de gerar novos e inovadores produtos ou insights. Marcos é taxativo sobre a maior dificuldade de se pensar de forma algébrica, a criatividade é a grande heroína ou vilã do sucesso ou não da concretização do pensamento algébrico.

8.3. As estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos

A seguir, passaremos para a análise das sessões de formulação de problemas algébricos recreativos e as possíveis estratégias durante esse processo.

PRIMEIRA SESSÃO

Caso 1: Marcos

Problema 1: Um rajá deixou como herança às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1(uma) pérola e a metade do que restasse, a segunda filha retiraria 2(duas) pérolas e a metade do que restasse, uma delas queixou-se de que estaria sendo prejudicada na partilha da herança. Será que alguma filha vai ficar sem herança? Por quê? Pergunta-se: Qual o número total de pérolas da herança? Dessa forma,

nossa ideia não é para você responder à questão, não estamos numa pesquisa de resolução de problemas, assim, a partir dessa daí, a partir do que está sendo dado aí, vou pedir para tu formular uma nova questão, tu pode escolher em reformular ela. E se não fosse? Alguma coisa? do jeito que está escrito, se fosse de outro jeito, então pensa aí como você pode reformular.

Figura 1-Problema 1 reformulado por Marcos

Pesquisa: Formulação de problemas algébricos recreativos: desenvolvimento de estratégias

Nome 1

PROBLEMA 1: As pérolas do rajá

Um rajá deixou como herança às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1(uma) pérola e a metade do que restasse, a segunda filha retiraria 2(duas) pérolas e a metade do que restasse, uma delas queixou-se de que estaria sendo prejudicada na partilha da herança. Será que alguma filha vai ficar sem herança? Por quê?

Pergunta-se: Qual o número total de pérolas da herança?

um Rajá dividiu sua herança de um certo número de pérolas
 a primeira filha tirou 2 pérolas a segunda tirou 3 pérolas
 qual a quantidade total de pérolas? $3+2=5$

Fonte: Figura do Autor

Marcos: *Eu não entendi!*

Pesquisador: Não entendeu? A gente tem um problema, uma atividade. E aí, esse raja, Ele dividiu a herança dele para essas filhas.

Para as 2 filhas? Então, olhando para esse problema, tu consegues criar um problema? A partir desse, uma nova pergunta, uma nova atividade? Fazer uma reformulação dele? O que poderia ser mudado para formar um novo problema? O que pode ser trocado?

Marcos: *É para trocar da questão ou do texto?*

Pesquisador: Tu podes trocar o que quiser, e se não fosse, você iria colocar o quê?

Marcos: *No lugar desse "certo número" colocar um número certo?*

Pesquisador: um valor exato?

Marcos: *Sim*

Pesquisador: Porque tu achas interessante determinar a quantidade de filhas

Marcos: *Ficaria mais fácil*

Pesquisador: Para quê?

Marcos: *Para responder!*

Pesquisador: Tenta aí então com uma quantidade de filhas. No problema original de Malba Tahan ele tem 6 filhas, você seguindo os passos, consegue achar, mas para ti? Se fosse uma filha só? O que é que iria acontecer?

Marcos: *Ela ficaria com tudo.*

Pesquisador: Isso, ela ficaria com tudo, e não poderia reclamar.

Marcos: *É para reformular a pergunta para eu responder também.?*

Pesquisador: como é que você vai saber se deu certo? Dá para saber sem responder? Tu consegues reformular ela, sem necessariamente tem que responder mesmo?

Marcos: *Não sei, acho que não.*

Pesquisador: Tem que se ajustar, testar e saber se está matematicamente válido. Nessa questão, fica mais fácil iniciar tentando reformular ela. Por exemplo, se se quer, se não fosse uma pérola, se fosse outra coisa, poderia mudar, o que seria? Você pode mudar, de forma livre, da maneira que você quiser.

Marcos: *como eu vou chegar no resultado aqui, para saber o que restou?*

Pesquisador: Desse problema aí que você fala?

Marcos: *Sim*

Pesquisador: Ele trabalha com expressões algébricas, porque o valor eu não sei o total, mas qual seria? Quando eu não sei o valor, que eu coloco?

Marcos: *um "x"*

Pesquisador: Esse x é tudo que restou ou o valor todo?

Marcos: *Acho que é o valor todo.*

Pesquisador: quando eu tiro a metade do que restou, ainda seria o mesmo x?

Marcos: *Não.*

Pesquisador: Não vamos nos alongar na resolução, mas se você acha que para reformular, para mudar ele você tem que responder? Mas você pode fazer uma outra na sua cabeça e responder.

Pesquisador: Essa você consegue responder?

Marcos: *Não, agora não.*

Pesquisador: mas para reformular, não precisa seguir essa métrica, de ter que ser um rajá etc., invente uma questão, daí confira ela matematicamente, poderia não se um rajá, não ser pérola, não ser filha, mas não estamos preocupados agora com a resposta, apenas tomar esse problema como ponto de partida para fazer uma nova.

Marcos: *Professor, não estou conseguindo não.*

Pesquisador: tu não consegues mudar não? Fazer uma nova, da tua cabeça?

Marcos: *Não .*

Pesquisador: Se fosse uma filha só, seria um novo problema? Sim, pois você mudou. Então é só formular, sem se preocupar com a resposta.

Marcos: *É para eu escrever aqui é?*

Pesquisador: É

Marcos: *E se fosse só uma filha?*

Pesquisador: mas tem que ser elaborada por você mesmo, mas matematicamente faria sentido ser uma filha só? Haveria algum problema aí?

Marcos: *Não*

Pesquisador: Então tem que ser um problema que faça sentido. Como se não fosse uma fração ou uma quantidade fixa de pérolas? E se não fosse para ficar pegando o que sobrasse? Tem que ficar pegando o que sobra? Pode escrever o enunciado de forma livre, fique à vontade. Pode ser outro personagem, no nosso caso é um rajá, mas pode mudar.

Pesquisador: tu estás com dificuldade com relação ao quê?

Marcos: *Não sei.*

Pesquisador: Você pensa em mudar o número de filhas?

Marcos: *Não, mudar o negócio daqui a metade do que restasse.*

Pesquisador: A forma que estão dividindo, interessante.

Marcos: *Consigo não.*

Pesquisador: Vamos lá, diz aí, vai fazer com o quê, com o rajá?

Marcos: *É, vou mudar a forma de divisão dele.*

Marcos: *A primeira filha tiraria 2 pérolas e a segunda 3.*

Pesquisador: Como achar o total?

Marcos: *Só somar, 2 +3*

Pesquisador: Então escreva aí.

Marcos: *Ponto, fiz.*

Durante as sessões de formulação de problemas, o estudante Marcos, inicialmente, aparentava não entender o que se pedia em formular, quer seja pela falta de prática com esse tipo de metodologia de formulação de problemas ou até não saber como resolver o problema dado, diante dessa nova regra, não formal, com a mudança

de contrato didático, (Medeiros & Santos, 2007) que, apesar de ser encorajado, o estudante não traçou nenhuma estratégia para reformular o problema dado, fato até previsto como possível dificuldade a ser enfrentada pelos estudantes, ao não aceitar e, por conseguinte, não gerar uma pergunta, algo visto também em um, dos casos do trabalho de Medeiros e Santos (2007), mas, posteriormente, Marcos seguiu com a aceitação em formular, se colocando no lugar do professor e pensando como gerar uma pergunta (Brown e Walter, 2005).

Verificamos que a formulação seguiu não como um problema algébrico gerado, mas sim como um exercício aritmético, apesar de não ser necessário o uso da linguagem alfanumérica para elaborar um problema algébrico, Ponte, Quaresma e Branco (2012), afirmam que ao elaborar um exercício aritmético quando solicitado um problema algébrico, pode revelar uma dificuldade em usar linguagem algébrica. A reformulação feita por Marcos continha forte base de repetição do problema dado como modelo, em que, só foram alterados a quantidade dos personagens e a manipulação foi obtida de maneira simples, não algébrica. Desta forma, entendemos que, de acordo com Medeiros e Santos (2007), o estudante não gerou e sim repetiu a pergunta e, conseqüentemente, não gerou um problema matemático.

Ao se questionar ao estudante, sobre a estratégia, O Que Se Não Fosse, baseado em Brown e Walter (2005), ele parte para uma saída mais simples possível, recaindo e privilegiando a aritmética, não revelando uso de linguagem alfanumérica, que, apesar de ser um problema adaptado, o estudante pode ter encontrado dificuldades de interpretação.

Pensamos que, se ele não consegue interpretar e resolver o problema dado, isso pode desencorajá-lo a seguir com uma reformulação à altura de um novo problema, com as mesmas características. Apesar dele ter sido instruído a fazer um novo problema, ainda sim, após alguns minutos a pensar, o estudante pergunta se é para responder para fazer um novo problema.

Ao aceitar o problema, no tocante à reformulação, Marcos ficou à espera de dicas de como pudesse efetuar uma nova partilha, ou seja, um novo arranjo, um norte que na verdade, deveria partir de suas experiências e conhecimentos prévios. Logo, partindo das estratégias de aceitação e gerar a pergunta em si, conforme previsto, Marcos seguiu o passo da estratégia de reformulação, a partir do questionamento: o que se não fosse, ao ser orientado a formular um novo

problema, fato que apenas evidenciou pouca criatividade e, possivelmente, dificuldade de utilização da álgebra, priorizando o uso da aritmética na formulação do novo problema.

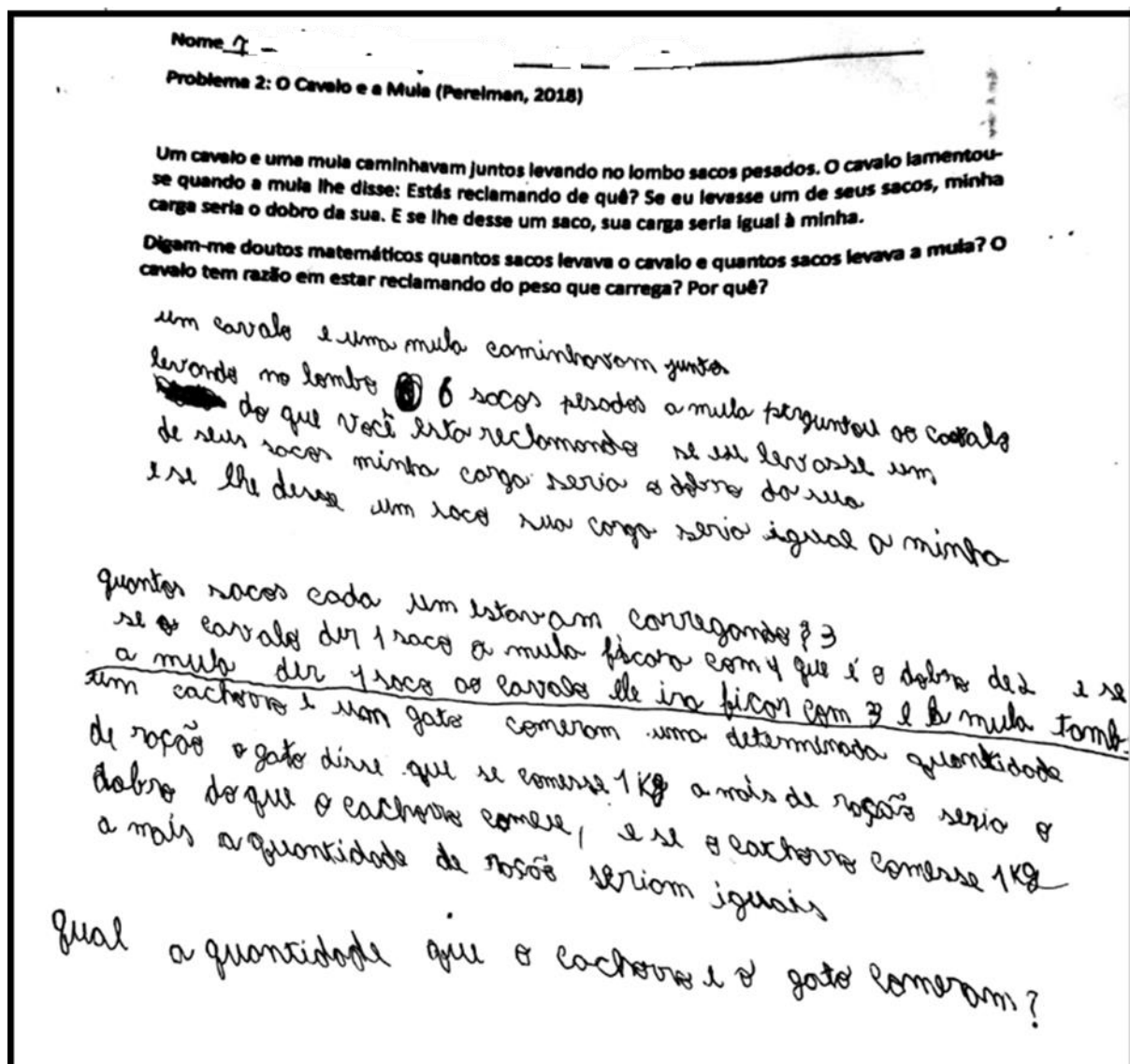
A repetição pode servir para a fixação de conteúdos e é trabalhada em sala de aula, conforme Medeiros (2001), mesmo assim, não chega a contribuir significativamente para um melhor aproveitamento das atividades de formulação de problemas.

SEGUNDA SESSÃO

Problema 2: Um cavalo e uma mula caminhavam juntos levando no lombo sacos pesados. O cavalo lamentou-se quando a mula lhe disse: Estás reclamando de quê? Se eu levasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha.

Digam-me doutos matemáticos quantos sacos levava o cavalo e quantos sacos levava a mula? O cavalo tem razão em estar reclamando do peso que carrega? Por quê?

Figura 2-Problema 2 reformulado por Marcos



Fonte: Figura do Autor

Pesquisador: Marcos vamos dar continuidade à formulação de problemas. E aí a gente tem aqui um segundo problema. Tu dá uma lida aí, por favor nele.

Marcos: já li. Pesquisador: Entendesse? Marcos: Entendi.

Pesquisador: Isso aí é uma continuidade da atividade de formulação de problemas. o que tu entendeu desse problema?

Marcos: A resposta ou...

Pesquisador: não, do próprio enunciado.

Marcos: Ah, eu pensei que era já fiz a resposta.

Pesquisador: Está bom, a gente viu aqui que não está necessariamente. Hoje não estamos preocupados na resposta, né? Vou te propor que tu, faça o seguinte, tu é formule um problema, a partir desse, tomando esse aí como base, formular um problema.

Marcos: posso começar?

Pesquisador: Pode

Marcos: É para eu fazer outra pergunta, né?

Pesquisador: Isso, a partir da que foi dada aí, do problema o cavalo e a mula, tu vai fazer um novo problema, formular um novo problema a partir desse daí.

Marcos: Posso ler?

Pesquisador: O que tu formulou né?

Marcos: O cavalo e a mula caminhavam juntos, levando no lombo 6 sacos pesados e a mula perguntou ao cavalo, do que você está reclamando se eu levasse um de seus sacos minha carga seria o dobro da sua e se lhe desse um saco, sua carga seria igual a minha.

Pesquisador: E o que tu quer saber? Qual o problema?

Marcos: Eu refiz o texto

Pesquisador: sim, sim.

Marcos: É para fazer a pergunta?

Pesquisador: Sim, o que tu quer saber?

Marcos: Quantos sacos cada um estavam carregando?

Pesquisador: certo, é bom tu escrever aí, então tu colocou o 6, no caso, né?.

Marcos: hum rum

Pesquisador: determinasse a quantidade total de sacos que os dois estavam carregando, que no original não consta essa informação. Então, diante desse problema inicial, e se não fosse

cavalo, mas se não fosse, seria o quê? Se não fossem sacos a pesados, outra coisa uma nova situação. Tu consegues fazer outro problema pensando dessa maneira, se não fosse sacos, que eles estavam carregando sacos pesados, ou se não fosse cavalos ou mulas? Dentro de uma nova situação. Tu vai fazer o quê?

Marcos: Mudar. Eu não estou conseguindo pensar não.

Pesquisador: não está conseguindo pensar? Mas do problema que tu formulou, não estamos com o foco de resolver, mas qual seria a resposta dele.

Marcos: Se o cavalo der um saco mula, ficará com 1 que é o dobro de 2, e se a mula der um saco ao cavalo, ele irá ficar com 3 e o mula também.

Pesquisador: Então cada um fica com?

Marcos: 3, fica com 3.

Pesquisador: Certo, tu conseguiria responder isso de outra forma? Com outro pensamento?

Marcos: Eu acho que não.

Pesquisador: Tenta agora imaginar, e se não fosse cavalo e mula, carregando outra coisa, pensa aí. Se não fosse sacos pesados, mudaria alguma coisa?

Marcos: Não.

Pesquisador: Tu formulou determinando a quantidade de sacos, mas se tu formulasse um novo, sem determinar essa quantidade de sacos, a forma de resolver seria a mesma?

Marcos: Não.

Pesquisador: Tu consegue fazer um outro problema sem essa determinação do número de sacos?

Marcos: Pronto, acabei.

Pesquisador: Terminasse? Lê aí.

Marcos: Um cachorro e um gato comeram uma determinada quantidade de ração, o gato disse que se comesse 1 kg a mais de ração, seria o dobro do que o cachorro comeu, e se o cachorro comesse 1 kg a mais, a quantidade de ração seria igual.

Pesquisador: Então esse problema é a formulação do anterior?

Marcos: Sim.

Pesquisador: Mas tem todos os elementos?

Marcos: Não.

Pesquisador: Está faltando o quê? O anterior é um problema, esse é o segundo que tu criou, mas ele também é um problema?

Marcos: Sim.

Pesquisador: Está faltando... Tu queria saber o que nesse problema?

Marcos: Qual a quantidade que o cachorro e o gato comeram?

Pesquisador: escreve aí no papel essa informação.

Tu pensasse na resposta do primeiro quando tu fizesse? Dessa que tu colocou os 6 sacos, já que a resposta está pronta na tua cabeça, bota a resposta aqui embaixo do problema. Qual foi a resposta que tu falou?

Marcos: 3 e 3.

Pesquisador: Porque tu conseguia estabelecer a relação, de que forma?

Marcos: Como assim, de que forma?

Pesquisador: De que se carregasse ...

Marcos: Se a mula pegasse um saco do cavalo, o cavalo iria ficar com 2 e se ela desse um de volta ao cavalo, iriam ficar iguais, 3 e 3.

Pesquisador: Pronto, escreve isso aí.

Então tu colocou no outro problema, que se não fosse um cavalo e um mulo seria gato e cachorro, tu já tem em mente uma resposta?

Marcos: Não.

Pesquisador: Tu também mudou se não fosse saco, seria kg de ração e eles, na verdade, em vez de carregar eles comeram, né?

Marcos: Sim.

Pesquisador: Certo, ok.

A Segunda Sessão que contou com problema do cavalo e a mula, seguiu semelhantemente, os mesmos moldes da primeira sessão, em que foram colocados valores simples, iguais, com cálculos feitos mentalmente e que não necessitasse de álgebra nem equações, concebendo pouca criatividade em sua prática, conforme aponta Ponte (1992). O estudante foi encorajado a formular, nos baseamos em Medeiros e Santos (2007). Dante (2005), Martins, Viseu e Menezes (2019), para tal, inclusive, mais de um problema, mesmo assim, a reformulação foi iniciada mas apresenta características de exercícios, com caráter repetitivo do problema dado, com resolução simplória e com ausência do uso de incógnitas e, conseqüentemente, sem a ideia de generalização presente.

Utilização do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas

O estudante inicia as respostas ao questionário citando que ao calcular quadriláteros seria uma área de estudo da álgebra:

Ao seguirmos com o questionário com a Pergunta 3- A álgebra é uma área que trabalha basicamente com o quê? Explique.

Marcos: Calcular os quadriláteros, (sem explicação).

De fato, os cálculos fazem parte da álgebra, mas a ideia de uso da álgebra com cálculos de quadriláteros, acaba pressupondo uma resposta aleatória à pergunta em questão, tal resposta aponta um possível desconhecimento do estudante em relação à palavra Álgebra, pois a mesma é frequentemente trabalhada em sala de aula com forte teor mecânico, com foco manipulativo de repetição e fixação de conteúdos, uma metodologia aplicada em problemas fechados, que segundo (Medeiros, 2001), são trabalhados de forma repetitiva, com procedimentos padrões, já previsíveis.

A noção de equação não apareceu de forma clara, mas tivemos um indicativo em supor que o estudante poderia ser um estudo de caso viável para aferição desse tópico, apesar de, no questionário, apresentar respostas curtas e aleatórias.

Com relação à generalização, o estudante indica ter pouco conhecimento sobre tal, diante da pouca compreensão de formalização e generalização limitadas a um instrumento utilizado apenas para a sala de aula, como segue trecho das perguntas e respectivas respostas do questionário 1:

Pergunta 4: Em sua opinião, o que é generalização? Explique. Resposta de Marcos : Pensar de forma geral

Pergunta 5: Qual a maior dificuldade em pensar de forma genérica na Matemática? Por quê?

Sem resposta.

Pergunta 6: Qual a necessidade de se formalizar a generalização na Matemática? Resposta: Para conseguir responder às questões.

A semelhança das palavras generalização e geral, por derivação, corrobora com a vaga ideia de se pensar de modo geral para se generalizar, tendo em vista que o conceito formal de generalizar não é algo tão simples de se ter tomado como maneira de se estabelecer relações válidas para certa classe de objetos (Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 10).

O questionário aberto, aplicado no dia 14/09/23, foi composto por seis perguntas a fim de compreendermos mais sobre o que os estudantes sabem sobre padrões, regularidades e generalização, que é fundamental no

pensamento algébrico, no nível dos estudantes que participaram da pesquisa, como forma de conhecimentos prévios.

Iniciamos esse passo da pesquisa retirando os participantes da sala de aula e os conduzimos para uma sala à parte, a sala de vídeo da escola, que dispunha da mesma estrutura da sala de aula original dos participantes, porém não contava com a presença dos demais colegas de turma. Desse modo, era um local mais silencioso, para favorecer tanto a concentração, bem como a captação de áudios das sessões.

Ao iniciarmos, repassamos as instruções dos objetivos da pesquisa em investigar como os estudantes concebem a formulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula; identificar as estratégias das formulações de problemas algébricos recreativos desenvolvidas pelos estudantes; analisar como será desenvolvido o pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas.

Dessa forma, entregamos a folha de papel com as respectivas perguntas do questionário, em que os participantes tiveram um tempo livre para responder, em que tínhamos uma perspectiva de levar no máximo, de 40 a 50 minutos para finalizar, por ser o tempo de uma aula. Contudo, os participantes não ultrapassaram o tempo de 10 minutos cada, para responder às 6 perguntas.

As instruções iniciais foram: responda essas seis perguntas com o que você entende sobre cada uma delas, não posso opinar sobre as respostas, se estão certas ou erradas, queremos saber apenas qual o seu ponto de vista diante dessas perguntas listadas no questionário.

Como esse foi um dos primeiros contatos individuais com a turma do 9º ano, ao convidar coletivamente e individualmente os estudantes para participar da pesquisa, assim como responder às perguntas do questionário, nem todos da sala optaram em participar, alguns não devolveram os termos de protocolo como TALE e TCLE, e até os que devolveram, se negaram a prosseguir participando da pesquisa.

O fato das recusas pode ter sido gerado pela própria matemafobia (matemafobia ou ansiedade matemática) conforme Brown e Walter (2005) apontam, o medo é fator impedor para os estudantes formularem problemas matemáticos.

O estudante Marcos apresenta pouco conhecimento específico de álgebra e generalização, ao ser perguntado sobre tal assunto, vejamos:

3. A álgebra é uma área que trabalha basicamente com o quê? Explique.

- Marcos: Calcular os quadriláteros

4. Em sua opinião, o que é generalização? Explique.

- Marcos: Pensar de forma geral

5. Qual a maior dificuldade em pensar de forma genérica na Matemática? Por quê?

Sem Resposta

6. Qual a necessidade de se formalizar a generalização na Matemática?

- Marcos: Para conseguir responder às questões.

O estudante mostra desconhecimento ao responder algo sem sentido, tal fato pode ocorrer pelo fato de possivelmente não ter sido apresentado formalmente ou não se recordar da palavra/ assunto específico, assim como montar expressões matemáticas a partir de situações dadas. Apesar de responder que generalizar se trata de pensar de forma geral, o estudante tem a ideia de que a matemática está baseada praticamente na matemática escolar, voltada, segundo ele, para responder questões dadas, como é de costume nas aulas tradicionais.

A aferição dos critérios como as concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, estratégias de formulação dos problemas algébricos recreativos; e o desenvolvimento do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas, não foram claramente elucidados, pelo fato de, os estudantes não expressar como pensou (Lins & Gimenez, 2001), pois, se expressar matematicamente não é uma tarefa fácil, ainda mais em se tratando de uma área abstrata como a álgebra, conforme Radford (2006) pontua que a caracterização de pensamento algébrico não é algo simples, ainda mais diante de um adolescente de 15 anos, porém, podemos ter uma ideia de que Marcos é um estudante dedicado e que gosta de matemática, apesar de ter um pouco a ideia do uso da matemática muito fechada ao contexto escolar, ele apresenta otimismo e uma possível experiência na formulação de problemas.

Não identificamos na formulação nem nas entrevistas feitas com estudante, as vertentes do pensamento algébrico, conforme Ponte, Branco e Matos (2009) indicam ser: o Representar, Raciocinar e Generalizar.

As respostas curtas e até mesmo a ausência de respostas, nas seis perguntas do questionário, freiam uma análise mais profunda do questionário, um ponto de destaque é citar que podemos com a criação de questões, podemos obter uma equação a partir de expressões matemáticas, mesmo assim, essa resposta pode estar ligada à vontade de acertar a pergunta e colocar algo que já foi citado pelo pesquisador que, nesse caso, foi parte da explicação da motivação e objetivos da pesquisa, analisar a formular problemas.

Marcos indica, na Entrevista Final 25/09/23 sua preferência em lidar com problemas formais, entendemos que pelo fato de não ter que esboçar criatividade e sim a generalização da matemática e seu consequente domínio algébrico.

Pesquisador: Não faz diferença nem para facilitar ou para complicar.

Marcos: Não acho que está complicado, complica mais um pouquinho.

Pesquisador: Complica com o que? Quando colocar o contexto de pessoa real ou não Marcos: Quando coloca.

Pesquisador: Tu preferes fazer as contas somente com números.

Marcos: Um hum.

Pesquisador: Sem ter que ter aquela história sem ter que contexto real, é isso.

Marcos: É

A ideia de incógnita se manteve ausente e não sabendo responder sobre generalização na álgebra, além de não explicitar avanço em relação a ideia de contextualizar a matemática.

A falta de domínio em se formular um problema algébrico recreativo, não tem necessariamente ligação com a falta de criatividade, a formulação de problemas é uma metodologia inovadora (Medeiros, 2020), porém foi apontada como a maior dificuldade diante de se pensar algebricamente, o estudante pode não ter se expressado adequadamente quando fala em criatividade.

Ponte, Quaresma & Branco (2012) citam que o pensar de forma algébrica incorre na capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação, além de requerer domínio da linguagem algébrica, assim como alguma, ou algumas, das três vertentes do pensamento algébrico,

segundo Ponte, Branco e Matos (2009) pode ter travado o estudante, mas em relação modelar situações.

Pesquisador: Qual a maior dificuldade de a gente pensar então dessa forma algébrica que tu achas?

Marcos: A criatividade.

Ao se prontificar em formalizar a matemática, nos deparamos com álgebra, Onuchic (2011; 2013) em seu estudo, colocando que o registro das resoluções é uma das fases até se chegar na formalização do conteúdo, diante de um roteiro para a preparação de um problema. Também o rigor matemático, em que Aguiar (2014) aponta como formalização e consequente uso da linguagem algébrica.

A visão de que a Matemática é apenas um mero instrumento desenvolvido para se resolver problemas, onde, muitas das vezes os estudante não distingue problema de exercício, caindo sempre no costume de ter que treinar as habilidades, já a repetição de exercícios sem a definição clara do problema, pode levar os estudantes ao papel de coadjuvantes no ensino- aprendizagem, afastando a possibilidade do protagonismo, não adianta resolver de maneira mecânica sem entender o sentido do cálculo envolvido no problema.

Dante (2005) chama de solucionadores de problemas, ou resolvidores (Souza e Guimarães, 2015), tendo vista que podemos aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender (Echeverría e Pozo, 1998), resolver problemas é uma arte, tanto que dá título à obra de Polya (2006). Assim, ao colocar que temos a necessidade de se formalizar a generalização para simplesmente responder às questões, acaba sendo uma sintetização do significado da matemática escolar na visão do estudante Marcos, ou seja, formalizar a generalização não faz sentido ser necessário para resolver questões da prova, dos testes de maneira geral, fato que pode não evidenciar claramente o conhecimento de Marcos sobre generalização na matemática e formalização.

Durante a reformulação do problema, ainda levantamos a possibilidade de se resolver o problema reformulado de outra maneira, porém Marcos permaneceu em sua ideia inicial, sem indicar outra maneira, desta forma, entendemos que a estratégia “E Se Não Fosse”, para esse caso, nessa sessão, não foi eficaz, para o caso do pensamento algébrico, por não emergir um problema distinto com uso de incógnitas e variáveis, tampouco da generalização em si, apesar de que Radford (2018) cita que, por exemplo, uma criança pode se

expressar algebricamente, mesmo sem fazer o uso de equações e incógnitas, sendo isto denominado de pensamento algébrico factual.

Contudo, segundo Lins e Gimenez (2001), como não há notação literal, não se trata de uma atividade algébrica. De Almeida (2018) defende que grau máximo de pensamento algébrico é quando tem o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem.

Na proposição inicial, o estudante refez o texto, baseado na sessão anterior, ciente de que deveria criar uma pergunta, um novo problema em si. a reformulação seguiu com a estratégia de aceitação a partir dessa consciência do estudante, que partiu de imediato para escrever seu novo texto, com a mudança dos dados do problema base, conforme Brown e Walter (2005). Afirma o estudante, que pensou logo na resposta final, antes de começar a pergunta. Já na proposta de reformulação, Marcos seguiu com um exercício, em que foram permutados os personagens.

Polya (2006) afirma que podem ser utilizadas estratégias como manter a conclusão e mudar a hipótese, manter a hipótese e mudar a conclusão; mudar tanto a hipótese como a conclusão, elas parecem ser reformulação, mas algo distinto foi feito por Marcos, quando apenas utilizou em vez de cavalo e mula, passaram a ser cachorro e gato, fazendo numa situação de partilha de ração em vez de sacos de areia, dando leves indícios de criatividade, porém sem a definição de uma estrutura algébrica no problema, recaindo na aritmética, por não vislumbramos a utilização, por exemplo, de padrões regularidade e generalização, parte importante introdutória na álgebra, conforme Alvarenga e Vale (2007).

Essa fuga da álgebra, pode revelar uma dificuldade em expressar ideias em generalizações, apontada por Groenwald (2018), Ponte, Quaresma e Branco (2012), Branco (2008), aponta para a falta de costume em se trabalhar com esse tipo de metodologia de formulação de problemas e uma própria limitação de domínio de conteúdo algébrico por parte do estudante.

Lima e Bianchinni (2022) afirmam que muitas das dificuldades na aprendizagem de Álgebra no ensino superior estão relacionadas a processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra na Educação Básica, apresentado como álgebra estrutural sem a preocupação com o desenvolvimento do pensamento

algébrico. Esse pensamento não desenvolvido pode levar a entender a dificuldade em se fixar em casos particulares, ao invés de buscar generalizações.

Os autores ainda afirmam que, dentre diversas características do ensino da álgebra, é dado ênfase na resolução de atividades que consistem em converter a linguagem corrente em linguagem simbólica e aplicar algoritmos para a resolução de problemas em sala de aula, em que, a álgebra tem se apresentado como um conjunto de procedimentos desconexos de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos estudantes.

O ensino da álgebra deve ser pautado no incentivo dos estudantes em formular questões sobre assuntos da tratados na aula, e a participação em debates com dúvidas e foco do objeto matemático. Esse problema que vai desde a formação de professores, em que a álgebra se apresenta como revisão de conteúdos, impedindo o futuro professor de ser um facilitador em criar articulações de conceitos em sua prática escolar.

Sobre a formulação de exercícios, a falta de prática com domínio da ferramenta manipulativa algébrica pode ter acarretado uma não distinção entre a formulação de um problema e para um simples exercício. Dante (2005) explica que o exercício matemático é colocado como um tipo de treinamento para o uso de alguma habilidade, pressupondo que o conhecimento já é conhecido pelo estudante, isso distingue o exercício de fixação de um problema matemático, que por sua vez, trazem em suas soluções, invenções estratégicas e podem criar ideias significativas.

Logo, Marcos se colocou em executar exercícios matemáticos em vez de problemas matemáticos, o que pressupõe que ele não saiba distinguir entre os tais.

A linguagem lógico matemática utilizada pelo estudante, apresenta texto com linguagem sem aprofundamento aritmético, a busca pelo simples e fácil que revela dificuldade em assuntos mais complexos e a correlação da prática algébrica com contextos em problemas matemáticos.

8.5 Síntese

De maneira geral, esse estudo de caso 1 partiu de uma entrevista e questionário que obtivemos um indicativo de estudante que afirma já ter

trabalhado com a formulação de problemas, porém sem definir álgebra ou generalização. Nas sessões de formulação que seguiram, com intervalos curtos de dias, de uma para a outra, o estudante foi encorajado a pensar de maneira diferente, expressar sua criatividade diante de uma montagem de novos problemas, a partir de outros dois problemas dados.

Na primeira sessão, o estudante teve que receber uma atenção maior, pois, apesar de ter sido esclarecido desde o propósito da pesquisa, desde o primeiro questionário, o estudante ficava sem entender o que fazer, na verdade, ele tentava pensar como responder primeiro o problema, para depois partir para as estratégias de formulação.

Após ser orientado sobre a não necessidade de resolução do problema dado, o estudante segue com as estratégias de aceitação, atribui dados e começa a gerar seus novos problemas, tendo mais desenvoltura na segunda sessão, na qual seguiu sem maiores questionamentos e momentos de aparente bloqueio em prosseguir para a última etapa das estratégias. Nesta, que seria em pensar, E Se Não Fosse, que teve sua desenvoltura satisfatória. Porém, não no ponto de vista da generalização e consequente desenvolvimento do pensamento algébrico, pois Marcos criou problemas com características de exercício, com forte identificação de repetição dos problemas dados, mas sem estrutura algébrica, que, recaíram em simples manipulações algébricas para suas resoluções, que por sinal, já estavam determinadas antes mesmo de começar a reformulação, ou seja, o estudante pensou na resposta para efetuar a pergunta, daí partiu para escrever o problema.

A dificuldade enfrentada por Marcos, inicialmente na aceitação, estava bastante relacionada à possível rotina escolar, da mudança do contrato didático atrelado a um problema apresentado, que requer uma solução de caráter algébrico, sem contemplar saída, Marcos não conseguia pensar em uma outra maneira de escrever os problemas, que, após orientação do pesquisador, em não se importar com a resposta do problema dado, e sim em reformulá-lo, o estudante aceita e inicia o processo estratégico de início da geração do problema. Fazendo isso, mentalmente, ele se propõe a pensar em cálculos, que se encaixassem, de maneira simples e assertiva, o que deixou a reformulação praticamente sem a exploração do pensamento algébrico. Este aspecto ocorreu seja por falta de base

ou insight criativo para o momento, ou pode ser fruto de uma não ênfase do pensamento algébrico em sala de aula.

O caráter de repetir boa parte do problema dado (Medeiros, 2001; Medeiros e Santos, 2007), pode ser algo presente nas aulas tradicionais, pois indicou ser bastante presente nos estudantes pesquisados, em que a passagem da aritmética para a álgebra ainda é bem pueril e sutil.

Logo, a ausência no uso de incógnitas, calcular com letras e a generalização da aritmética, aponta para a dificuldade de Marcos em relação a linguagem algébrica, oriunda possivelmente da falta de uma vivência mais intensa em sala de aula de atividades que exerçam o esforço de se pensar algebricamente.

9 O ESTUDO DE CASO 2- Cecília

9.1 Apresentação

Cecília se mostrou descontraída e muito comunicativa durante a pesquisa. Está cursando o 9º Ano do Ensino Fundamental de escola pública municipal urbana, localizada na região metropolitana do Recife, tem 15 anos de idade e afirma gostar de Matemática. Apresenta desempenho escolar satisfatório tanto em Matemática quanto nas demais disciplinas do currículo e não apresenta histórico de reprovação. Cecília é residente em um bairro próximo à escola.

9.2 As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos.

Como já dito anteriormente, as primeiras entrevistas foram realizadas todas no mesmo dia, logo, a entrevista inicial com esse segundo caso, a estudante Cecília, foi no mesmo dia do primeiro caso, ou seja, no dia 13 de setembro de 2023.

A estudante Cecília, indica em sua entrevista sua concepção sobre a matemática aliada à prática financeira, as profissões que envolvem cálculos monetários.

- Pesquisador: Como você pensa que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas?

- Cecília: Com cálculo de financiamento e profissões que exigem matemática.

- Pesquisador: E de que forma nosso pensamento é ajudado pela matemática nessas situações?

- Cecília: Em não perder dinheiro.

Ponte (1992) enfatiza que existe uma relação interativa entre concepções e prática, Cecília, parece não se mostrar distante de uma realidade de uso da matemática, fala com naturalidade, inferimos que ela não tenha uma visão equivocada de uma matemática exclusivista de um público seletivo, com altas habilidades, como Ponte afirma ser a visão do público geral para a matemática.

A Educação Matemática no Brasil surge em meio a demandas de sistemas escolares, segundo D'Ambrósio (2004). Não entraremos nas questões de percursos econômicos e sociais do país, mas na atualidade de um mundo capitalista, pós-revoluções industrial, francesa etc., é mais do que comum uma adolescente se colocar em pensar na matemática como um importante instrumento de controle financeiro.

Matos e Jardimino (2016) apontam que a definição de concepção está fortemente ligada com a de conceito, sendo as concepções partes que envolvem a nossa formação de conceito. Sobre a concepção analítica, os autores fazem um debate do processo educativo, com a discussão da linguagem dos participantes envolvidos. Notamos na entrevista com Cecília, de maneira assertiva, quando a estudante afirma que, formular é formar algo, entendemos por “dar forma”, linguisticamente, ao se pensar no verbo formular, pensamos intuitivamente na palavra forma, matematicamente, a estudante robustece sua resposta com a palavra “criar”, ao ser questionada sobre o que é formular um problema matemático.

-Pesquisador: Para você, o que significa formular?

- Cecília: formar algo

-Pesquisador: A partir de quê?

- Cecília: Não sei

- Pesquisador: E formular um problema matemático?

-Cecília: Criar um cálculo através de uma pergunta com números.

Lopes (2012) aponta que as competências matemáticas devem ser desenvolvidas por todos e inclui diversos fatores e busca, dentre diversas faculdades mentais, a formulação de generalizações, e assim pensar de forma lógica. Cecília tem a clareza da exatidão binária da matemática, quando afirma que perguntas matemáticas, fazem entender erros e acertos, indo mais além, mostra indícios de se pensar através do erro, ou acertos. Esse melhor entendimento que, segundo Echeverría e Pozo (1998), é um dos grandes desafios da Educação Matemática, o fazer entender o que está por trás das manipulações entre números.

- Pesquisador: Para que servem as perguntas matemáticas?

-Cecília: Para melhor entender erros e acertos.

A estudante afirma já ter pensado em formular problemas matemáticos, ou seja, só o fez mentalmente.

- Pesquisador: Você já criou algum problema matemático ou pensou como algum problema poderia ser escrito de outra maneira?

-Cecília: Já, mas só mentalmente, não consigo explicar.

Cecília também revela que, sua diversão, na matemática, pode ser atribuída a jogos, uma prática comumente utilizada nas escolas, e de fato, o lúdico motiva nas atividades (Pelay, 2011), ajuda a sanar dificuldades de aprendizagem na matemática (Souza et al, 2016) e segundo Varizo (1993) os jogos podem fazer parte de problemas recreativos, pois eles envolvem também aspectos históricos curiosos e lendas.

-Pesquisador: Para você, é possível se divertir com a Matemática? Se sim, como?

-Cecília: Às vezes, me divirto com raiz quadrada, pois já vi esse assunto.

-Pesquisador: Para você a diversão está ligada a ter visto o assunto, então você se diverte de que forma?

-Cecília: Como eu já vi, resolvendo e acertando, eu me divirto.

-Pesquisador: Você já resolveu um problema que achou divertido? Se sim, conte a sua experiência.

-Cecília: Sim, o jogo que colocamos os números numa casa vazia (sudoku)

-Pesquisador: Então você chegou a resolver um problema com esse jogo?

-Cecília: Sim, eu resolvi o jogo, jogando, foi divertido, gostei.

Na segunda entrevista, realizada no dia 25 de outubro de 2023, percebemos alterações em sua concepção sobre a formulação de problemas, ao indicar que repetiu e fez do mesmo jeito, suas reformulações, diante dos problemas dados como base. Por outro lado, foi notório a manutenção do caráter lúdico diante de um novo contexto, mantendo a caráter recreativo do problema, um indicativo de afastamento da matematófobia, quando se pensa e se concretiza em utilizar a matemática de maneira mais leve e divertida, conforme aponta Brown e Walter (2005).

Pesquisador: Quando tu foi fazer os problemas, né? Quando tu foi formular o problema

Matemático, algébrico. Qual foi a tua ideia inicial para fazer aquele? Tanto o de ontem, que foi dado do cavalo e a mula, quanto do primeiro, que foi das pérolas do Rajá.

- Cecília: Eu me inspirei na pergunta anterior e só refiz de acordo bem diferente. Só que ainda do mesmo jeitinho com os mesmos cálculos. Ah, eu acho que é isso.

A insegurança do domínio de conteúdo, em se estabelecer ideias de generalizações, (Alvarenga e Vale, 2007), pode ser vista na adequação do problema matemático com mecanismos disponíveis em seu arsenal cognitivo, sendo uma possível alternativa para a tentativa de se desvencilhar do momento da aplicação da pesquisa, nas sessões de formulação de problemas em que Cecília optou por pensar somente no cálculo mental, ou seja, numa conta fácil que pudesse gerar uma pergunta baseado no problema dado.

Pesquisador: Pronto, a gente, de fato, o de ontem principalmente, tu o fizeste dentro do sistema parecido, do que tinha?

- Cecília: Foi

Pesquisador: Pedi para formular um outro problema, tudo. Seguisse lá aquela ideia do outro. Tu tinhas assim, a equação em mente ou montou alguma equação? De responder o problema a partir daquele problema que você formulou.

- Cecília: Eu já tive em mente, porque eu tinha lido o primeiro, daí eu fiz os outros 2 que eu me inspirei no primeiro e era o mesmo cálculo e a mesma resposta é.

Pesquisador: A forma de calcular, na verdade, não foi expressa em uma equação. Para resolver o problema que conseguiu montar ali. Precisou montar uma, tu montaste o cálculo mental, na verdade, não foi.

- Cecília: Sim.

Percebemos uma valoração em relação à perseverança e confiança na formulação de problemas matemáticos, revelando alta confiança em suas habilidades (Limin, Van Dooren e Verschaffel, 2013), quando a estudante afirma que ao tentar corrigir, erra, reflete e toma a decisão de seguir da forma que aprendeu, o fato pode limitar a descoberta do novo, mas ao mesmo tempo mostra a reflexão interativa sobre a prática em provar resultados através da prática de contas, pois, de acordo com o que Ponte (1992) as concepções influenciam as práticas e vice-versa, dando norte e fundamentando decisões, segundo o autor,

esse condicionamento ocorre naturalmente as concepções, quando enquadradas e compatíveis conceitualmente.

Pesquisador: O que é que tu achas que dificulta quando a gente pensa algebricamente para formular um problema.

-Cecília: É, tem vezes que a pessoa sabe que está certo, sendo que ela pensar, nossa deve estar muito errado, muito errado aí vai lá, tenta corrigir, faz errado. então eu acho que a pessoa deve ir pelo, pela forma. que a pessoa aprendeu e, sei lá, pelo que a pessoa sente que é o certo. Sendo assim, os avanços foram mais perceptíveis nesse segundo estudo de caso, essa aferição atribuímos a desenvoltura nas respostas, conforme Ponte (1992) indica ser a entrevista, reveladoras que auxiliam nas evidências das concepções.

O gostar de matemática é um dos pontos que prezamos por realizar a pesquisa com os estudantes e um critério subjetivo para escolha do estudo de caso, que, apesar de não explicitamos essa pergunta de forma clara na entrevista, podemos notar ao longo das respostas se o estudante é um simpatizante da disciplina, afastando a possibilidade da matematófobia.

A formulação envolve a motivação (D'Amore, 2014), pressuposto de interesse para a formulação de problemas (Martins, Viseu e Menezes, 2019) pelo seu caráter desafiador. Da mesma forma, o estudante deve ter além da simpatia, a clara ideia de que os conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida na escola básica, terão aplicabilidade e serventia para seu futuro, logo, a importância de atrelarmos cada vez mais a matemática para o cotidiano, ou seja, as correlações com a natureza do contexto Çakır & Akkoç (2020).

- Pesquisador: Conte sobre alguma experiência criativa que você teve nas aulas de Matemática?

- Cecília: Sim, equação do 1º grau.

Segundo D'Ambrósio (2004), no Brasil, a Educação Matemática emergiu de demandas a sistemas escolares, entendemos que a visão da matemática ter relação direta com cálculos financeiros, revela um ponto de vista dos estudantes mas também pode trazer à tona a forma que a importância da matemática é apresentada aos estudantes.

- Pesquisador: Como você pensa que a Matemática ajuda a pensar em resoluções e respostas?

- Cecília: Com cálculo de financiamento e profissões que exigem matemática.

- Pesquisador: E de que forma nosso pensamento é ajudado pela matemática nessas situações?

- Cecília: Em não perder dinheiro.

Apesar de uma perspectiva limitada e tímida com relação ao uso da matemática com forte teor financeiro, às diversas situações do dia a dia, podem necessitar de matemática, por mais básicas que sejam. De acordo com Brown & Walter (2005), formular um problema pode ajudar a enxergar um melhor ponto de vista do contexto, sendo basilar no auxílio dos estudantes durante a execução das atividades. A estudante Cecília, afirma já ter formulado um problema mentalmente, mas identificamos um certo conhecimento em relação a noção de formular:

-Pesquisador: Para você, o que significa formular?

- Cecília: Formar algo.

- Pesquisador: E formular um problema matemático?

-Cecília: Criar um cálculo através de uma pergunta com números.

Pelay (2011) em seu estudo com uso de jogos aponta permissividade de conciliação entre satisfação e atividade matemática, em que um contrato didático não modela a situação. Souza et al (2016) cita que esse tipo de atividade visa sanar dificuldades de aprendizagem e trazer a matemática de maneira não costumeira.

Assim, podemos trabalhar a ruptura desse contrato didático com ludicidade e recreação. Faz-se necessário trazer à tona que todo o esforço deve ser feito na transposição didática em que, nesses momentos de recreação, o estudante possa resolver problemas, pois o simples fato de resolver o jogo, não necessariamente caracteriza resolver um problema, propriamente dito.

A estudante Cecília, apesar de uma visão errônea, afirma ter se deparado e resolvido um problema divertido quando ele foi trabalhado com o jogo Sudoku.

-Pesquisador: Você já resolveu um problema que achou divertido? Se sim, conte a sua experiência.

-Cecília: Sim, o jogo que colocamos os números numa casa vazia (sudoku)

-Pesquisador: Então você chegou a resolver um problema com esse jogo?

-Cecília: Sim, eu resolvi o jogo, jogando, foi divertido, gostei.

Além dos jogos, alguns assuntos também fazem parte da diversão com a matemática, dito pela estudante Cecília, o que notamos é que, para Cecília, a diversão está ligada a entender e saber fazer determinada atividade de um assunto específico.

-Pesquisador: Para você, é possível se divertir com a Matemática? Se sim, como?

-Cecília: Às vezes, me divirto com raiz quadrada, pois já vi esse assunto.

-Pesquisador: Para você a diversão está ligada a ter visto o assunto, então você se diverte de que forma?

-Cecília: Como eu já vi, resolvendo e acertando, eu me divirto.

A segunda entrevista semiestruturada com o objetivo de identificar o que aconteceu em relação à primeira entrevista e esta última, no modo como os estudantes percebem a formulação de problemas algébricos recreativos, que foi realizada no dia 25 de outubro de 2023.

Ao se propor em criar os seus problemas textuais, o estudante empenha-se em pensar no problema como um todo, de acordo com Polya (2006) e Ramirez (2006), Brown e Walter (2005), por sua vez, afirmam que a formulação de problemas pode ajudar a ter uma melhor visão do contexto. Cecília, nossa estudante do caso 2, afirmar preferir trabalhar com problemas contextualizados, mas citou ter dificuldades com a criatividade, mostrou bastante desenvoltura nas sessões de formulação, o que Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013), afirmam que essas dificuldades podem revelar uma baixa confiança em suas próprias habilidades de formulação de problemas.

Com relação aos avanços da primeira entrevista, feita antes das sessões de formulação para essa segunda entrevista, que foi feita após as sessões de formulação, a estudante apresentou exercícios matemáticos, Dante (2005), como exercícios de fixação com resoluções através de cálculos mentais e não problemas matemáticos por meio da repetição.

Contudo, a ideia de generalização se mostra distante, quando a estudante não chega a utilizar incógnitas na formulação e afirma que conseguiria chegar a uma resolução correta, sem necessariamente fazer uso de incógnita, conforme Radford (2018) denomina de pensamento algébrico factual.

A perseverança com confiança em suas habilidades podem ser atribuídos a Cecília, baseado em Limin, Van Dooren e Verschaffel (2013), a estudante

afirma que; ao tentar corrigir, erra, reflete e decide fazer da forma que aprendeu, ou seja, uma reflexão interativa sobre a prática em provar resultados, através da prática com contas.

9.3 As estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos

A seguir, entretemos nas sessões de formulação de problemas e discutiremos suas respectivas estratégias.

PRIMEIRA SESSÃO

Caso 2: Cecília

PROBLEMA 1: Um rajá deixou como herança às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1(uma) pérola e a metade do que restasse, a segunda filha retiraria 2(duas) pérolas e a metade do que restasse, uma delas queixou-se de que estaria sendo prejudicada na partilha da herança. Será que alguma filha vai ficar sem herança? Por quê? Pergunta-se: Qual o número total de pérolas da herança?

Figura 3- Problema 1 reformulado por Cecília

Um velho idoso foi no casamento da suas duas filhas e levou um presente que elas duas tinham que dividir. A filha mais nova recebeu e pegou $1\frac{1}{2}$ do presente e a mais velha $\frac{1}{2}$ do presente. Será que alguma filha ficou sem presente? Explique com suas palavras.

São duas caixas e a mais velha pegou $1\frac{1}{2}$ e o resto ficou para a mais velha

$$\begin{array}{r} 2 \\ - 1,5 \\ \hline 0,5 \end{array}$$

hã, o presente deu para as duas

Fonte: Figura do Autor

Pesquisador: Um rajá deixou como herança às suas filhas um certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1(uma) pérola e a metade do que restasse, a segunda filha retiraria 2(duas) pérolas e a metade do que restasse, uma delas queixou-se de que estaria sendo prejudicada na partilha da herança. Será que alguma filha vai ficar sem herança? Por quê?

Pergunta-se: Qual o número total de pérolas da herança?

Cecília, formule um novo problema a partir deste: A primeira filha lhe perdeu, não é?

Cecília: Um velho idoso foi no casamento de suas duas filhas e levou um presente que elas duas teriam que dividir, a filha mais nova resolveu pegar $1\frac{1}{2}$ do presente e a mais velha $\frac{1}{2}$ do presente. Será que alguma filha ficou sem presente? Explique com suas palavras.

Pesquisador: Esse meio que tu colocas, é um produto?

A diferença para o problema dado para esse que tu criaste, ela pegou a metade, por exemplo, essa metade aqui, já é contando com a metade do total ou é a metade do que a primeira tirou? Ela tirou e o que sobrou, ficou ela ficou com a metade. E se tivesse uma terceira filha, ela ficaria com quanto? Não ficaria mais nada?

Cecília: só tem essas duas filhas.

Pesquisador: Tu consegues fazer algum cálculo desse problema?

Cecília: No caso fica dividido, só que uma pegou 1 e meio e outra pegou meio.

Pesquisador: certo, tinha uma caixa com dois presentes dentro, mas pode partir no meio esse presente?

Cecília: Era porque era brinco.

Pesquisador: Eles estavam dentro de duas caixas, onde uma pegou uma caixa e meia e outra pegou meia caixa, é isso?

Cecília: Sim

Pesquisador: Tá bom então, então escreva aí essa resposta.

Cecília: Pronto.

Pesquisador: Nós conseguimos ver que a matéria matemática não é só contexto, não é? Cecília: É, é porque tipo assim, tecnicamente, não dá para dividir

nada, por esse número. Tipo, uma fica com um número menor. Acho que não dá para dividir, não.

Pesquisador: não dá, mas a questão é sua.

Cecília: Eu posso tentar?

Pesquisador: sim, tu falaste que é uma caixa com objetos, brincos, qual seria a quantidade de brincos que eu pudesse dividir? Brincos são em pares, seria uma quantidade par?

No problema original de Malba Tahan, é uma pérola, e não conseguimos pegar uma pérola e meia, daí cada filha pegou metade do que restava da herança.

Cecília: eu acho que, eu inventei um negócio aqui inválido, eu acho. Dois menos 1,5 que é meio, que dá 0,5, está certo? Tem que escrever?

Pesquisador: é bom, escreva aí.

Cecília: pronto.

A sessão foi realizada num ambiente controlado, a sala estava climatizada e não tivemos interrupções durante as atividades, a estudante, inicialmente, não levantou questionamentos sobre a atividade e de pronto, após a explicação, já inicia imediatamente a formulação de um novo problema.

Ao se analisar quanto às estratégias de formulação nesta sessão 1 do caso 2, tomando

como base Brown e Walter (2005) com as estratégias de Aceitar, Gerar e O Que Se Não Fosse, identificamos que a estudante Cecília cumpriu a primeira estratégia Aceitar, pois, sem questionamento após a explicação do que deveria fazer ao início da sessão, começou a escrever seu novo problema reformulado, ou seja, se propõe a formular.

A reformulação de problemas pode ocorrer até antes da resolução dos problemas, conforme Silver (1994) aponta, que nesse caso, os problemas são criados a partir de contextos previamente pensados ou que surgem de forma espontânea, por isso foi colocado um problemas base para os estudantes.

A segunda estratégia apontada por Brown e Walter (2005), é Gerar, a pergunta em si. Cecília, em sua reformulação, percebemos que a atividade se trata de um exercício e não um problema propriamente dito, pois a repetição e a permuta de simples dados, como contexto diferente de local ou situação dos

personagens, não chega a trazer uma estrutura matemática de um problemas algébrico recreativo, sendo enquadrado como um exercício aritmético adaptado de um problemas algébrico. O mesmo insucesso ocorreu com a estratégia O Que Se Não Fosse, que foi já colocada no início da formulação dessa primeira sessão, para a estudante conjecturar e formular seu novo problema dentro dessa perspectiva.

Secafim (2018) aponta para a tomada de consciência e reflexão sobre sua própria aprendizagem frente a um problema matemático, o fato de Cecília pensar e explicitar que a divisão de fração que, segundo ela, não dá pra dividir, acreditando que pode ter feito algo tecnicamente inválido, porém ao efetuar os cálculos, verifica que estão aritmeticamente corretos, esse momento da formulação, atribuímos como um ponto de desafio (Spinillo et al., 2017), que foi superado pela estudante, apesar da sua reformulação não atender critérios algébricos, mas apenas aritméticos.

SEGUNDA SESSÃO

Seguiremos agora para a análise da segunda sessão do estudo de caso 2.

PROBLEMA 2: Um cavalo e uma mula caminhavam juntos levando no lombo sacos pesados. O cavalo lamentou-se quando a mula lhe disse: Estás reclamando de quê? Se eu levasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha.

Digam-me doutos matemáticos quantos sacos levava o cavalo e quantos sacos levava a mula? O cavalo tem razão em estar reclamando do peso que carrega? Por quê?

Figura 4-Problema 2 reformulado por Cecília

Nome _____

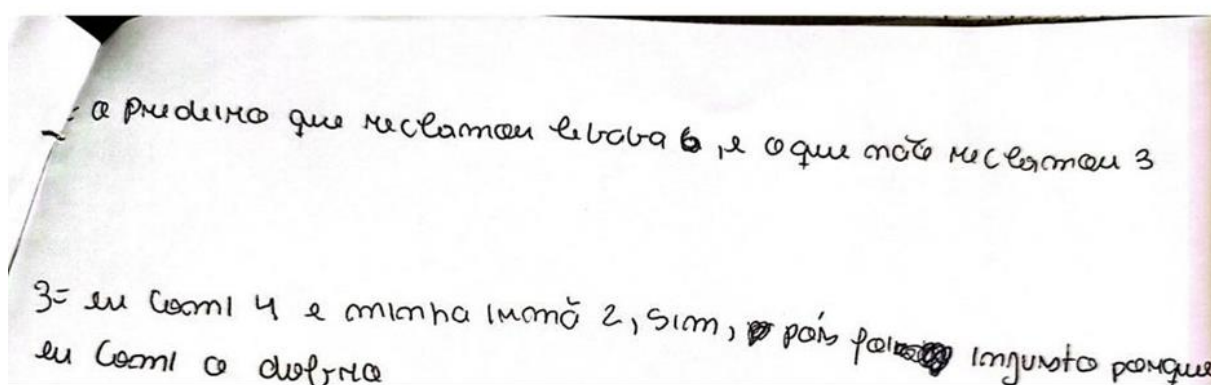
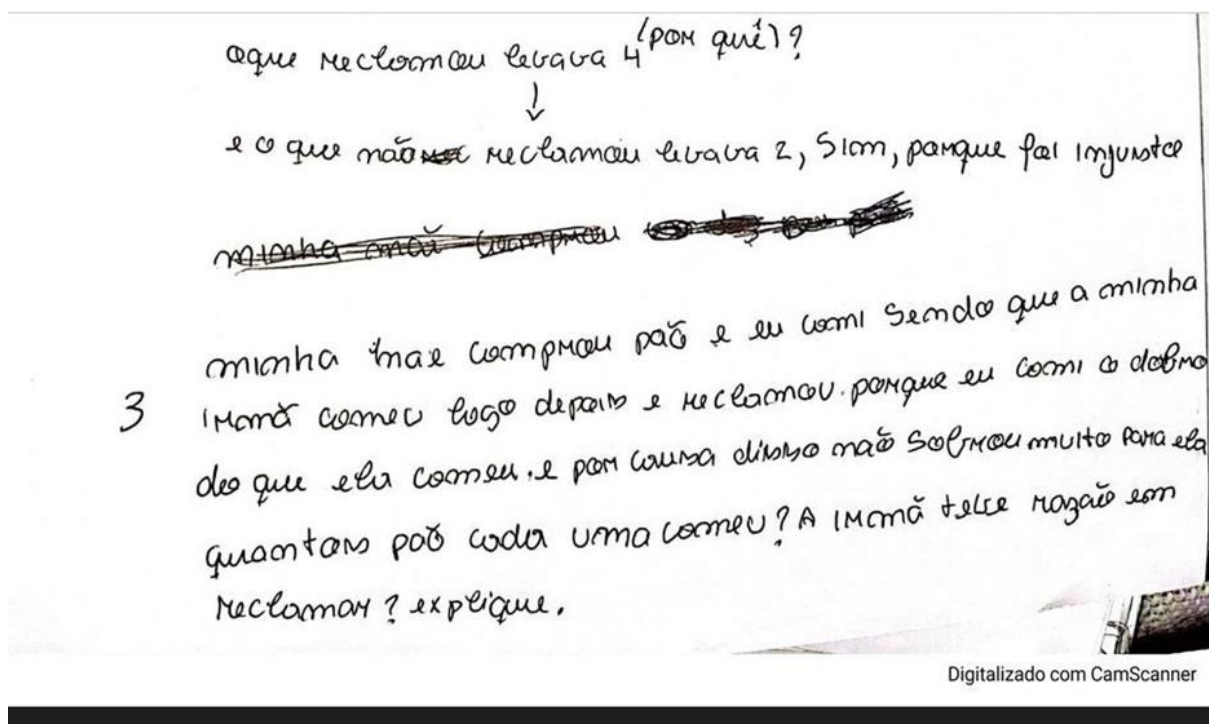
Problema 2: O Cavalo e a Mula (Perelman, 2018)

/ Um cavalo e uma mula caminhavam juntos levando no lombo sacos pesados. O cavalo lamentou-se quando a mula lhe disse: Estás reclamando de quê? Se eu levasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha.

Digam-me doutos matemáticos quantos sacos levava o cavalo e quantos sacos levava a mula? O cavalo tem razão em estar reclamando do peso que carrega? Por quê?

2 dois predino carregando baldes um predino reclamou do peso e o outro não e o predino que reclamou falou Se você carregasse mais um estaria reclamando igual e estaria com a mesma quantidade

quantos baldes cada um levou? o predino tinha razão para reclamar? (~~pergunta~~)



Fonte: Figura do Autor

A transcrição da sessão consta abaixo, com as falas do pesquisador e da estudante Cecília.

Pesquisador: dando continuidade, essa é a segunda sessão de formulação de problemas, você já formulou um e esse aí é o segundo problema, vou dar um tempinho pra tu ler isso aí, tá bom. Pesquisador: Entendes

Cecília: Um pouquinho

Pesquisador: Eu vou te pedir agora para tu formular um problema a partir desse, tomando esse problema como base, qual o título dele?

-Cecília: o cavalo e a mula.

Pesquisador: vou dar minutos, tu consegue?

-Cecília: Sim. Pronto.

Pesquisador: pronto, formulasse um outro problema?

-Cecília: humrum

Pesquisador: Como foi esse outro problema?

-Cecília: É pra fazer a conta é?

Pesquisador: tu fala em quê, da resposta?

-Cecília: humrum.

Pesquisador: leia logo esse aí que formulasse.

-Cecília: Dois pedreiros carregando baldes, um pedreiro reclamou do peso e o outro não, e o pedreiro que reclamou falou, se você carregasse mais um, estaria reclamando igual e estaria com a mesma quantidade.

Quantos baldes cada um levou? O pedreiro tinha razão para reclamar? Por quê? Ou explique sua resposta.

Pesquisador: Então tu fez um novo problema com dois pedreiros, não é isso?

-Cecília: Sim

Pesquisador: E eles estavam com baldes de?

-Cecília: Com baldes.

Pesquisador: Se colocar a pensar, e se não fosse pedreiros, no problema dado, foi cavalo e mula, então tu colocaste pedreiro, mas se não fosse um pedreiro, poderia ser outra coisa?

-Cecília: Claro, depende da imaginação.

Pesquisador: E se não fosse carregando? Os animais estavam levando os sacos, os pedreiros estavam carregando baldes, mas se não fosse nada para carregar?

-Cecília: Poderia, cimento ou sei lá, não sei.

Pesquisador: E aí tem essa questão de quantidade, de saber, né? Se está, está carregando mais ou que estava carregando menos? Se era mais pesado ou não. Se não fosse, diante desse contexto aí de soma de valores. Poderia ser uma outra coisa? Tu consegues formular uma outra questão? E se não fosse o pedreiro, e se não fosse carregar? Tenta fazer.

-Cecília: Pronto.

Pesquisador: saiu?

-Cecília: É pra ler?

Pesquisador: Minha mãe comprou pão E eu comi....

-Cecília: Sendo que a minha irmã comeu logo depois e reclamou, porque eu tinha comido dobro de que ela comeu, e por causa disso, não sobrou muito para ela, quantos pão cada uma comeu? a irmã teve razão em reclamar, explica.

Pesquisador: pronto , então tu colocou uma situação de pão com tua irmã, que tua mae que comprou.

Tu quando pensou nisso aqui, tu já pensou automaticamente na resposta?

-Cecília: :Já

Pesquisador: Pode colocar aí, principalmente por conta da veracidade/ a validade matemática do problema, né?

-Cecília: Pronto.

Pesquisador: Então tu respondeu que o que reclamou levava 4 e o que não reclamou levava 2. Depois eu coloquei sim porque o pedreiro tinha razão de reclamar. Porque foi injusto.

Tu conseguiria, tu pensou em que pra responde?

-Cecília: Foi de cabeça, tipo, veio na hora, eu consegui escrever o texto.

Pesquisador: é, tu pode responder de outra forma?

-Cecília: Poderia.

Pesquisador: como seria?

-Cecília: 6 e 3.

Pesquisador: A contagem poderia ser esse número diferente, né? Só manteria a proporcionalidade, né? Bota aí, por favor essa resposta. Do problema dado não, do que você montou. Tu conseguiria fazer de outra forma?

-Cecília: Sim, só que, espaço?

Pesquisador: Pega aqui uma folha em branco.

-Cecília: Pronto.

Pesquisador: essa segunda que tu montou, já tene alguma resposta em mente? Uma ideia de como responde?

-Cecília: Acho que não.

Pesquisador: Tu fez sem pensar?

-Cecília: É porque, eu acho que vai ser igual, que só muda as características, alguns, cavalos....

Pesquisador: Mas os dados são praticamente os mesmos, a situação é que foi mudada?

-Cecília: É, então eu acho que a resposta deve ser a mesma.

Pesquisador: pronto, escreve só isso aí no papel, para ver a validade.

-Cecília: Tem problema se errar? (borrar)

Pesquisador: não.

Diante do insucesso de se esperar da estudante na formulação, que em apenas um problema reformulado, pudesse apresentar as 3 estratégias de Aceitar, Gerar e O Que Se Não fosse, realizamos um ajuste, após o primeiro problema reformulado, solicitar se a estudantes conseguiria resolver o problema de outra maneira, ou até mesmo reformular o novo problema a partir da ótica da estratégia O Que Se Não Fosse. Assim, os problemas podem ser divididos em episódios, conforme o modelo descritivo de fases de Baumanns e Rott (2022), que descreve as diversas fases para atividades de formulação de problemas.

No nosso problemas 2 dado, o diálogo entre o cavalo e a mula pode ser elucidado por meio de um sistema de equação, o fato de não trazermos nos problemas dados, a resolução dos mesmos, fora feito de maneira proposital para aguçar a curiosidade e não “entregar o ouro”, colocando uma facilidade que poderia facilmente anular o esforço do estudante em pensar como transformar uma situação num problema algébrico.

9.4 Utilização do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas

De acordo com nosso referencial teórico, o questionário da estudante Cecília (caso 2) a estudante inicia as respostas ao questionário indicando na Pergunta 1 : Você sabe o que é uma expressão matemática? Dê exemplos.

Resposta de Cecília: São expressões com números e letras.

Trazendo uma ideia de conhecer a álgebra, pois o estudo da álgebra objetiva o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ponte, Quaresma & Branco (2012) cita que esse tipo de pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, logo a álgebra faz uso de letras e outros símbolos. Ao trabalharmos com expressão matemática lidamos com letras e números,

especialmente na álgebra e suas manipulações, como salientam Echeverría e Pozo (1996).

Mesmo sem a estudante Cecília apresentar exemplos, é uma resposta bastante animadora apesar de superficial e um pouco limitada, quanto ao uso e origem de expressões na matemática. Partindo do pressuposto que a matemática pode ser vista como a ciência que estuda os números, mas não apenas estes, as quantidades, formas, o raciocínio lógico e demais elementos podem constituir a caracterização da matemática e o respectivo uso das expressões algébricas, que quando conjecturas são formalizadas na linguagem matemática, por meio de generalizações, é manifestado o pensamento algébrico James Kaput (1998,1999).

Já a noção de equação passa distante da estudante em afirmar que a matemática é constituída disso, apesar do assunto corrente da grade curriculares, equação do segundo grau, é o que está sendo visto pelo professor da escola, paralelamente ao momento da pesquisa, a estudante ainda não tem a definição clara do que de fato seja uma equação. Da mesma forma, a palavra álgebra aponta ser algo desconhecido de seu vocabulário.

Mesmo indicando não saber o que significa álgebra, sendo taxativa em sua resposta “não sei”, a estudante tem noção de que expressões são constituídas por números e letras, o fato pode estar relacionado ao assunto que está sendo visto em sala de aula, que é a equação do segundo grau, fato pontual que se estabelece correlações de dentro e de fora da matemática, colocado como um dos objetivos gerais da matemática, de acordo com Onuchic (2011; 2013)

Com relação à generalização, a estudante aponta a ideia de generalizar é trazer algo do dia a dia para a matemática, mas com relação a formalização não tem discernimento de utilização da generalização, pois ao formalizar, apenas facilitamos a forma de entendimento de cada um, trazendo isso de uma única maneira. James Kaput (1998,1999) cita que, o processo de generalização faz referência a um conjunto particular de exemplos, em que se deve criar um vínculo de argumentação e expressá-los em caminhos formais.

Sobre a generalização, Cecília respondeu na Pergunta 4. Em sua opinião, o que é generalização? Explique.

Cecília: mudanças, de coisas do dia a dia para coisas da matemática.

Pergunta 5. Qual a maior dificuldade em pensar de forma genérica na Matemática? Por quê?

Cecília: Porque contém letras e número e normalmente é muito difícil.

Pergunta 6. Qual a necessidade de se formalizar a generalização na Matemática?

Cecília: Porque nem todos pensam igual e tem pessoas e coisas que são fáceis para uns e difícil para outros.

Apesar de não saber o que significa álgebra, a estudante tem noção de que expressões são constituídas por números e letras, o fato pode estar relacionado ao assunto que está sendo visto em sala de aula, que é equação do segundo grau, sendo um dos assuntos que serão cobrados num simulado de avaliação externa, a ser realizado na semana posterior à da pesquisa. O fato de não saber o significado da palavra álgebra não está totalmente ligado ao pensar algebricamente, mas de maneira teórica, o domínio de Cecília se mantém limitada, ao dizer que a dificuldade de se pensar de forma genérica se torna mais difícil, por conter letras e números, sem maiores detalhes do porquê. Contudo, indica que a generalização tem a ver com trazer coisas do cotidiano para a matemática, o que traz uma ideia mais de transposição didática em relação à generalização (Aguiar, 2014; Dante, 2005).

Generalizar pode ser visto como trazer algo do dia a dia para a matemática, porém, esses carecem de uma sistematização para se chegar ao pensamento algébrico (Matsko & Thomas, 2015). Essa sistematização leva à formalização que, ao formalizar, padronizamos para quaisquer casos semelhantes, fato que facilita a forma de entendimento de cada um, trazendo isso de uma única maneira, em que a abstração-generalização são manifestadas pela criatividade matemática (Singer & Voica, 2015).

A Formulação de exercícios também foi verificada, pois, o diálogo verificado nas reformulações de Cecília, acabam se assemelhando a exercícios do tipo, exemplo de aplicação de livros didáticos, os ditos exercícios de fixação, conforme Dante (2005) cita, com manipulações mais próximas de situações de aritmética com balança de pratos. Portanto, as estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos seguiram, praticamente, nos moldes da primeira sessão, sem muitas alterações na parte estrutural dos problemas e dando origem a exercícios matemáticos, em vez de novos problemas.

A linguagem lógico matemática utilizada pela estudante apresentou-se simples, porém, foi bastante prolixa nos textos elaborados, ainda sim, com relação a conceitos matemáticos, optou por efetuar contas simples de maneira aritmética e balanceada, dando a ideia de pesos na balança de pratos, com valores pequenos e sem a exigências de cálculos grandes e complexos, não apresentou uso de incógnitas ou equações, que afastou a ideia de uso do pensamento algébrico pretendida para sua série escolar.

9.5 Síntese

Cecília, uma estudante de 15 anos da rede pública municipal urbana de ensino de uma escola da Região Metropolitana do Recife, é nosso estudo de caso 2 que foram aplicados questionário, entrevistas e sessões de formulação de problemas algébricos recreativos.

Sobre as concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos a estudantes apresenta a visão sobre a matemática aliada a prática financeira, as profissões que envolvem cálculos monetários, suas estratégias de formulação de problemas algébricos recreativos, que tomamos como base as apontadas por Por sua vez, Brown e Walter (2005) : Aceitar, Gerar e O que se não fosse, chaga na fase da geração sem formular um problema, e apesar de reformular o novo problema com a visão da terceira estratégia, o que se não fosse, o erro permanece e a reformulação segue os mesmos moldes de um exercício de fixação aritmético em vez de um problema algébrico, fato que mostra uma não clareza da distinção entre exercícios matemáticos e problemas. Diante disso o pensamento algébrico não foi claramente evidenciado pela técnica de facilitar os cálculos da álgebra para a aritmética, e seu consequente desenvolvimento também não pode ser revelado e mensurado.

As entrevistas se mostraram instrumentos proveitosos e reveladores de fatores que apenas a parte escrita das reformulações não nos revelaria, parte escrita essa que contém cálculos simples, como soma de partes e aritmética trivial, bem abaixo do esperado para estudantes do 9º ano.

10 CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos uma síntese de todos os instrumentos de coleta de dados utilizados na pesquisa e apresentamos nossas conclusões gerais mediante as análises dos dados produzidos com estes instrumentos.

Instrumentos de coleta de dados

Dos instrumentos de coleta de dados que trabalhamos na pesquisa, iniciamos com o questionário aberto, baseado em Demo (2019), se mostrou um instrumento eficiente quando nos deparamos com as diversas discrepâncias de conhecimento a diversos níveis, entres os estudantes que se prontificaram a participar da pesquisa com a entrega dos termos solicitados, logo, pudemos definir o critério de participação com os estudantes que se mostrarem mais familiarizados com a matemática

No caso do processo de generalização, não surtiu efeito analisar esse ponto, pelas ausências de respostas sobre esse quesito, algumas respostas curtas e aleatórias, dentro de um possível desconhecimento do tema ou palavra.

Um segundo instrumento importante e revelador, que consideramos um dos principais, foram as entrevistas semiestruturadas, uma no início da pesquisa e outra após as duas sessões de formulação de problemas algébricos recreativos. Salientamos que a primeira parte da pesquisa fez foi o recrutamento dos participantes, juntamente, com a aplicação do questionário aberto.

Definimos a análise dos dados produzidos em categorias a priori, que foram as concepções dos estudantes sobre a formulação de problemas algébricos recreativos, estratégias de formulação dos problemas algébricos recreativos e o desenvolvimento do pensamento algébrico durante o processo de formulação de problemas. E as categorias a posteriori: Formulação de Exercícios e A linguagem lógico matemática utilizada.

O contraponto entre as entrevistas com os estudantes selecionados, dos dois casos, se mostrou um ponto de elucidação para dados não colocados durante as sessões de formulação, como a indagação de por que os estudantes não utilizam uma linguagem algébrica nas reformulações. Isto explicitou uma falta

de confiança ou base em se trabalhar com esse tipo de conteúdo, além de uma falta de costume na prática escolar, com essa mudança no contrato didático usual. A comparação entre as duas entrevistas foi bastante rica, só não foi mais explícita, pelo fato de os estudantes não entenderem alguns termos em especial, como a palavra álgebra, generalização e pensar algebricamente.

As sessões de formulação tínhamos a expectativa de que os objetivos fossem minimamente alcançados, as sessões foram tranquilas e os estudantes se prontificaram com desenvoltura, sem muitos questionamentos iniciais. Numa sessão em especial, o estudante ensaiou desistir de seguir com a formulação do problema, após cerca de quase 10 minutos pensando como fazer, informou que não conseguiria, só se propôs a continuar quando foi orientado pelo pesquisador, que não necessariamente ele teria que resolver os problemas dado como exemplo, ele teria a liberdade de alterar qualquer item descrito no problema para daí seguir com o seu.

Apesar da sessão não ter sido proveitosa, com relação aos aspectos algébricos, tanto essa quanto as demais, não atribuímos esse fato à escolha do instrumento, mas talvez tivéssemos um resultado diferente, caso o problemas dado constasse da resposta ou, se realizamos um teste de nivelamento com os estudantes, mas pelo risco sensível de prejudicar e tornar os resultados tendenciosos, seguimos com nossas estratégias e nos propomos em apenas realizar adaptações nos problemas.

As anotações feitas no Diário De Bordo alicerçou fatores de momentos, que foram observados e que se não anotados naquele momento, poderiam ser perdidos. Portanto, esse instrumento auxiliou as observações das sessões de formulação e suas respectivas análises.

O estudo de caso 1, o estudante Marcos recebeu uma atenção maior e cogitamos a possibilidade que ele desistisse de continuar com as sessões de formulação, pois logo na primeira, ele apresentou um bloqueio em que o pesquisador recorreu ao quadro da escola, para exemplificar a Marcos a liberdade de escolha dos itens que ele poderia alterar do problema dado para seu novo problema.

No estudo de caso 2, a estudante Cecília, é um pouco mais comunicativa, sendo também mais intuitiva e mostrou desenvoltura nas sessões de formulação, mas, da mesma forma que o estudante Marcos, Cecília executa seus

formulações como exercícios de matemática, com pequenas alterações nos personagens e colocando cálculos simplórios de aritmética básica.

Considerações finais

A visão limitada dessa atividade de formulação de problemas algébricos recreativos, por parte dos estudantes, ambos da mesma sala, quando apenas repetem o formato e alteram nomes, sem manter a estrutura algébrica e sim recair, retrocedendo na aritmética, acreditamos que não seja por má fé, mas sim, inocência em se pensar, se é para reformular, fazer de outro jeito, do jeito que fizer, está bom, logo, o desinteresse, Martins, Viseu e Menezes (2019) cita que a estratégia inicial de Aceitar, em seu estudo foi a que mais despertou interesse nos estudantes, por aguçar a criatividade. Portanto, no nosso estudo, a superficialidade dos exercícios formulados, a partir do problema dados, pode ser um efeito da falta de costume em se trabalhar esse tipo de ruptura de contrato didático (Medeiros & Santos, 2007) e uma falta de clareza sobre a parte estrutural matemática.

Esperávamos trazer como tópico de análise a posteriori, algo sobre as estratégias de formulação e se elas conduziram a um evidente pensamento algébrico, porém, a partir da coleta de dados iniciais, ponderamos na possibilidade de não nos depararmos com estas estratégias propriamente ditas nas sessões de formulação.

No estudo de caso do estudantes Marcos, ele desenvolveu sua técnica de maneira precisa, porém abaixo do esperado para seu Ano escolar, tendo em vista que estudantes do 9º ano já tem contato com manipulações algébricas formais e consolidadas, aplicadas a assuntos como equações, análise combinatória e etc, Conforme Aguiar (2014) afirma, que nesse Ano, naquele período, o ensino de álgebra, em alguns livros didáticos, tem se reduzido ao treino e à prescrição de regras e procedimentos algébricos. Acreditamos que, esses treinos sem sentido, podem colaborar para o insucesso do pensamento algébrico nos estudantes, pelo fato de não explorar e estabelecer generalizações por meio do discurso de argumentação através de caminhos formais (Blanton e Kaput, 2005).

As concepções sobre a formulação de problemas algébricos recreativos

Segue trecho do questionário: Pergunta 4. Em sua opinião, o que é generalização? Explique. Resposta: mudanças, se coisas do dia a dia para coisas da matemática/Pensar de forma geral.

Pergunta 6- Qual a necessidade de se formalizar a generalização na Matemática?

Respostas Marcos: Para conseguir responder às questões. Cecília: Porque nem todos pensam igual e tem pessoas e coisas que são fáceis para uns e difícil para outros.

Ponderamos que as perguntas do questionário podem ter sido um pouco complexas para respostas mais longas, verificadas curtas nos questionários de Marcos e Cecília, tendo plena consciência de que se expressar na língua portuguesa sobre conceitos matemáticos pode ser algo não tão simples, até mesmo para estudantes de nível superior, fato que não aponta a inviabilidade das perguntas, pois ao que vimos, pode-se inferir, minimamente, os possíveis domínios dos participantes, quanto ao seu interesse pela matemática, como seu domínio da própria teoria matemática ao nível de seu respectivo Ano.

As Estratégias de Formulação de Problemas

A primeira estratégia, de acordo com Brown e Walter (2005), é Aceitar, ou seja, formular, no estudo de caso 1, Marcos inicialmente, na primeira sessão, não traçou nenhuma estratégia para reformular o problema dado, logo, inferimos que ele não aceitou e a pergunta não foi gerada, porém, após a atividade de formulação de problemas recreativos ser explicada novamente ao estudante, ele inicia a formulação, falando o que deseja alterar no problema dado e em seguida sendo encorajado a escrever seu novo problema.

Contudo, sua reformulação apresentou-se como um exercício algébrico, com a repetição da pergunta, sem gerar uma nova, as alterações feitas por

Marcos, não apresentem elementos que caracterizam a álgebra e, por conseguinte, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O fato de não gerar o problema, foi novamente verificado na segunda sessão de formulação de problemas algébricos recreativos, com o mesmo estudante, em que, a não utilização de equações, incógnitas e a ideia chave de generalização, revela em Marcos não a matematofobia, mas uma falta prática de rigor matemático e de domínio da linguagem algébrica. Atribuímos esse resultado a não habitualidade em atividades de formulação de problemas com ênfase no pensamento algébrico.

Para o estudo do caso 2, Cecília iniciou a primeira estratégia Aceitar, que, ato contínuo, após receber as orientações das sessões, começou a escrever seu novo problema reformulado, ou seja, se propôs a formular. Tanto na primeira sessão quanto na segunda, a estudante, semelhantemente ao estudante Marcos, se afasta do uso de álgebra em suas reformulações, que diante de simples permuta de personagens e cálculos aritméticos triviais, pontuamos que a estratégia aceitar, apesar de adaptações de nível para os problemas dados, não foi evidenciada plenamente para aferição do desenvolvimento do pensamento algébrico. Isto aconteceu pelo fato da estudante optar em não utilizar álgebra em sua reformulação, que também mostra-se como um exercício de fixação, sem novos elementos que possamos chamar de um problema matemático, sendo um exercício matemático propriamente dito.

A matematofobia não foi verificada, pois os estudantes mantiveram a linguagem lúdica de caráter recreativo, ao novo contexto proposto nas sessões de reformulação de problemas.

Sobre a segunda estratégia Gerar, a pergunta em si, verificamos que o estudante Marcos seguiu pelo caminho mais fácil para ele, pensarmos que, na esperança de ter que saber resolver o problema reformulado, o grande trabalho do estudante foi adaptar um problema algébrico para o aritmético, fato que deu origem a um exercício simples com cálculos que necessitam de poucos passos e nenhuma incógnita para sua resolução.

No estudo de caso 2, a estudante Cecília, em sua reformulação, a pergunta gerada não evidencia um problema, o caráter repetitivo de elementos textuais e a pouca criatividade, coloca que a estudante não gerou um problema algébrico recreativo.

Logo, a estratégia gerar, mostrou-se um ponto de partida para os estudantes optarem em utilizar a álgebra ou não.

Na última estratégia O Que Se Não, (o que se não “fosse”), vista como um novo modo de definir, que tomamos como base de Brown e Walter (2005), Marcos revelou sua dificuldade com a linguagem algébrica, ao pensar e ser encorajado em criar um novo problema, baseado nos problemas algébricos recreativos dados, não foram originados novos problemas, mas exercícios que demonstram pensamento aritmético sendo privilegiado, sem preocupação com a nova estrutura do problema, alterando apenas dados que não interferissem na gênese do problema dado, trazendo como novo, apenas a simplificação da situação não generalizada. Logo, sem demonstração de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Essa estratégia O Que Se Não, foi aplicada no início da formulação dessa primeira sessão do estudo de caso 2, em que Cecília revelou que ser bastante esforçada e criativa, diante dos novos contextos, que iniciou os textos de suas formulações nas sessões, fazendo a permuta de personagens com ocupações dentro do seu cotidiano.

Ficamos entusiasmados com a perspectiva de sua desenvoltura, porém, ao analisarmos, identificamos que, da mesma forma que no estudo de caso 1, a estudante assegura o sucesso de sua reformulação a cálculos, que poderiam ser feitos rapidamente, sem demandar esforços cognitivos como generalização matemática. Essa fuga da utilização de álgebra e privilégio de elementos aritméticos, demonstra a grande dificuldade dos estudantes em se comunicar algebricamente.

Formulação de exercícios

O contrato didático usual, identificado no ensino tradicional, no qual o estudante é deixado como um mero expectador da aula, tendo o papel de responder apenas o que lhe é perguntado pelo professor, o colocando numa posição de resolvido de questões, pode cada vez mais afastar a visão de uma ruptura de contrato didático, com a proposição de formulação de problemas. Igualmente, a maneira tradicional em que a matemática é vista em sala de aula,

apenas com repetição de exercícios de fixação, por exemplo, muito vistos nos livros didáticos, Dante (2005) cita que há distinção entre esses exercícios e os problemas matemáticos.

Logo, ao propormos aos estudantes Marcos e Cecília, para reformular um problema algébrico, nos moldes de um problema dado, e é originado um exercício, acreditamos que não há uma definição na forma de pensar da estudante, sobre a diferença entre exercícios e problemas matemáticos.

Das técnicas utilizadas e criadas por Marcos e Cecília durante a sessão de formulação de problemas matemáticos, pontuamos que, apesar de não conter equações matemáticas, incógnitas e variáveis, por se tratar de um exercício aritmético, não descartamos a não utilização de pensamento algébrico na reformulação feita pela estudante, levando em consideração o estudo de Lins e Giménez (2001), os quais afirmam que caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica, os autores também citam a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, que não se refere a caracterização por conteúdos nem notação, ponderamos também quando Radford (2018) chama de pensamento algébrico factual, visto nas crianças ao poder se expressar algebricamente, mesmo sem fazer o uso de equações e incógnitas.

O pensamento algébrico pode em seu fazer ou usar álgebra, para a caracterização de atividade algébrica, requer o uso de padrões, sequências, incógnitas, manipulações de símbolos (Ponte, Quaresma & Branco, 2012), algoritmos, ou seja, "calcular com letras", de acordo com Lins e Giménez (2001).

Como não estamos lidando com crianças em nossa pesquisa, mas com adolescentes, que devem já ter plena consciência e uso da álgebra e, diante dessa não clareza nas evidências do pensamento algébrico, as técnicas criadas por Cecília, poderiam ser mais explícitas, se sua proposição requeresse fazer o uso de pelo menos uma equação, mas por ela optar em facilitar os cálculos, pensar em valores triviais para a situação a ser colocada em semelhança ao problema dado, acabou ofuscando a visão do pensamento algébrico.

A linguagem lógico matemática utilizada

Groenwald (2018) aponta que seus estudantes pesquisados enfrentam dificuldades nos conteúdos de sistemas de equações, vislumbramos que Cecília apresentou dificuldades manipulativas com frações no problema 2. Como não identificamos atividade algébrica nas reformulações feitas por Cecília, destacamos que as concepções sobre álgebra e a forma de pensar matematicamente puderam se manter após a aplicação das sessões.

Diante das análises feitas nos estudos de caso, sugerem, a nosso ver, as seguintes questões para futuras pesquisas:

1. Em um curso de formação continuada qual a maneira que os professores de Matemática tem ensinado e aprendido sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico através da formulação de problemas?
2. Como podemos investigar e desenvolver orquestração instrumental na resolução em duplas colaborativas de questões que explorem o pensamento algébrico com formulação de problemas com futuros professores?
3. Como podemos investigar o processo de elaboração e validação pode ser visto como uma orquestração instrumental, para o ensino da álgebra?

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental**: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático. 2014. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- ALMEIDA, J. R. de. **Características do pensamento algébrico reveladas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental na resolução de um problema de partilha**. Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar, v. 4, n. 12, 2018.
- ALTOÉ, R. O. **Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental**: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. 227 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.
- ALVARENGA, D.; VALE, I. **A exploração de problemas de padrão**: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quadrante, v. 16, n. 1, p. 27-56, 2007.
- BAUMANN, L.; ROTT, B. **The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing**. Educational Studies in Mathematics, v. 110, p. 251-269, 2022a.
- BAUMANN, L.; ROTT, B. **Identifying metacognitive behavior in problem-posing processes**. 2022b.
- BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 36, n. 5, p. 412-46, 2005.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORTOLETE, J. C.; OLIVEIRA, V. de. **O pensar algébrico na BNCC: sentidos e significados que se abrem**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2021, Uberlândia. Anais... Uberlândia: [s.n.], 2021.
- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. Tese (Doutorado em Educação) - [s.n.], [s.l.], 2008.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BROWN, S.; WALTER, M. **The art of problem posing**. 3. ed. New York: Routledge, 2005.
- BROWN, S. I.; WALTER, M. I. (Ed.). **Problem posing**: Reflections and applications. New York: Psychology Press, 2013.

CAI, J.; HWANG, S. **Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing**: conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM– Mathematics Education*, v. 53, p. 1403-1416, 2021.

CAI, J.; HWANG, S.; JIANG, C.; SILBER, S. **Problem-posing research in mathematics education**: Some answered and unanswered questions. In: *Mathematical problem posing*. New York: Springer, 2015. p. 3-34.

ÇAKIR, A.; AKKOÇ, H. **Examining socio-mathematical norms related to problem posing**: a case of a gifted and talented mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, v. 105, p. 19-34, 2020.

CÂNDIDO, P. T. et al. **Comunicação em matemática**. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas - habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001. v. 1, p. 11-203.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. **A história da álgebra e o pensamento algébrico**: correlações com o ensino. *Estudos Avançados*, v. 32, p. 171-187, 2018.

CORDEIRO, K. M. A. **O impacto da pandemia na educação**: A utilização da tecnologia como ferramenta de ensino. 2020. Disponível em: . Acesso em: 10 jun. 2021.

COSTA, O. da. **A matemática recreativa no ensino básico**. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores) - Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

D'AMORE, B. *Il problema di matematica nella pratica didattica*. 1. ed. Modena: Digital Docet, 2014.

D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá, Colômbia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017.

DA SILVA, M. G.; IBRAHIM, M. S. A.; RESENDE, M. **Concepções de álgebra das questões do sistema nacional de avaliação da educação básica–SAEB**. In: *ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO E CONGRESSO INTERNACIONAL DE TRABALHO DOCENTE E PROCESSOS EDUCATIVOS*, 2013. Anais... [s.l.: s.n.], 2013. p. 118-131.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

DE JESUS PEREIRA, A.; NARDUCHI, F.; DE MIRANDA, M. G. **Biopolítica e educação: os impactos da pandemia do covid-19 nas escolas públicas**. *Revista Augustus*, v. 25, n. 51, p. 219-236, 2020. Disponível em: . Acesso em: 10 jun. 2021.

DEMO, P. *Metodologia científica em ciências sociais*. 1ª ed. São Paulo: Atlas, 2019.

ECHEVERRÍA, M. D. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender a solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, p. 13-42, 1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, N.; VIEIRA, W.; DA SILVA, L. **Pensamento algébrico: possibilidades de manifestação a partir de resolução de problemas**. Revista de Educação Matemática (REMat), v. 19, p. 1-25, 2022.

FLEIRA, R. C.; FERNANDES, S. H. A. A. **A emergência do raciocínio algébrico: mediando a resolução de equações polinomiais do 1º grau para um aluno autista**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEM, 2018, Foz do Iguaçu - Paraná. Anais do SIPEM. Curitiba: SBEMPR, 2018. v. 1.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

GOVERNO DE PERNAMBUCO - Secretaria Estadual de Educação. **Currículo de Pernambuco para o ensino fundamental**. Acesso em: 01 fev. 2019.

GROENWALD, C. L. O. **A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico**: um experimento no 9º ano do ensino fundamental. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Foz do Iguaçu. Anais do VII SIPEM, 2018. v. Anais.

GUALANDI, J. H.; ZERBINATO, J. A.; SOARES, M. 4R. **O pensamento algébrico e a generalização de padrões**: uma experiência com alunos do 8º ano do ensino fundamental. Tangram-Revista de Educação Matemática, v. 1, n. 2, p. 91-104, 2018.

IDEM, R. de C.; SILVA, R. S. R. da. **Padrões e matemática na educação básica: uma revisão sistemática de literatura**. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Anais...Uberlândia (MG) Uberlândia, 2021.

DINIZ, I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas** - habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001, v. 1, p. 11-203.

JIA, S.; YAO, Y. **70 Years of problem posing in Chinese primary mathematics textbooks**. ZDM—Mathematics Education, v. 53, n. 4, p. 951-960, 2021.

LASA, A.; CABEZÓN, A. S. de. ; WILHELMI, M.R. ; ABAURREA, j. **El problema del caftán**: Proporcionalidad como herramienta óptima en un problema de resolución de ecuaciones The caftan problem: Proportionality as an optimum tool in equation solving problems. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 21, n. 3, 2019.

LI, X.; ZHOU, W.; HWANG, S.; CAI, J. **Learning to Teach Mathematics Through Problem Posing**: Teachers' Beliefs and Their Instructional Practices. International Journal of Educational Research, v. 115, p. 102038, 2022.

LIMA, G.L. DE; BIANCHINI, B.L. **Reflexões sobre o ensino ea aprendizagem de álgebra a partir das produções do GT04 da SBEM.** Educação em Revista , v. e24723, 2022.

LIMIN, C. H. E. N.; VAN DOOREN, Wim; VERSCHAFFEL, Lieven. **The relationship between students' problem posing and problem solving abilities and beliefs: A small- scale study with Chinese elementary school children.** Frontiers of Education in China, v. 8, n. 1, p. 147-161, 2013.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001.

LOPES, T. I. D. **Padrões e Regularidades no Ensino Básico.** Tese de Mestrado em Ensino de Matemática no 3o Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. 2012.

MARTINHO, M. H., FERREIRA, M. A. T., VALE, I. D., & PONTE, J. P. D. **Ensino e aprendizagem da álgebra:** actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. 2011.

MARTINS, B.; VISEU, F.; MENEZES, L. **Formulação de problemas matemáticos na aprendizagem de números racionais por alunos do 4.º ano de escolaridade.** Revista educação matemática em foco, v. 8, n. 1, p. 79-105, 2019.

MATOS, A., SILVESTRE, A. I., BRANCO, N., PONTE, J. P. D. **Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória.** In XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 505-516), 2008.

MATOS, D. A. S.; JARDILINO, J. R. L. **Os conceitos de concepção, percepção, representação e crença no campo educacional:** similaridades, diferenças e implicações para a pesquisa. Educ. Form., v. 1, n. 3, p. 20-31, 2016.

MATSKO, V.J.; THOMAS, J. **Beyond routine: Fostering creativity in mathematics classrooms.** In: Mathematical problem posing. Springer, New York, NY, p. 125-139, 2015.

MAZUCATO, T., ZAMBELLO, A.V., ALESSANDRA GUIMARÃES SOARES, A.G., TAUIL, C. E., DONZELLI, C.A., FONTANA, F., CHOTOLLI, W.P. **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico.** Penápolis: Funepe, 2018.

MCLEOD, S. **Lev Vygotsky's Sociocultural Theory of Cognitive Development.** Simply Psychology, 2018.

MEDEIROS, K. M. de; SANTOS, A. J. B. dos. **Uma Experiência Didáctica com a Formulação de Problemas Matemáticos.** Zetetiké – Cempem —FE - UNICAMP, Campinas (SP), v. 15, p. 87-118, jul.dez. 2007.

MEDEIROS, K. M. **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula.** Publicado em Educação Matemática em Revista. SBEM - 2001, nº 9/10 - pp. 32-39. Educação Matemática em Revista (São Paulo), São Paulo, v. 9/10, p. 32-39, 2001.

MEDEIROS, K. M. **A Formulação e a Resolução de Problemas como Estratégia Didática nas Aulas de Matemática**. In: Katia Maria de Medeiros. (Org.). Observatório da educação e propostas inovadoras de ensino-aprendizagem utilizando a formulação e a resolução de problemas matemáticos. 21ed. Campina Grande: Realize, 2020, v. 1, p. 10-28.

MEDEIROS, K. M.; ALBINO, H. E. V. **Problemas Matemáticos Recreativos e Facebook**: Vitória Formulando e Resolvendo nas Interações Reais e Virtuais. International Journal Education and Teaching (IJET-PDVL), v. 2, p. 121 /2-139, 2018.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Álgebra ou geometria**: para onde pende o pêndulo? Pro-posições. v. 3, n.1[7]. p. 39-53. mar. 1992.

MILINKOVIĆ, J. **Conceptualizing problem posing via transformation**. In: Mathematical problem posing. Springer, New York, NY, 2015. p. 47-70.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento**: pesquisa em saúde. 14 ed^a. São Paulo: Hucitec; 2014.

MOURA, M. O. de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. 2006. Disponível em: . Acesso em: 23/09/2020.

NACARATO, A. M.; CUSTODIO, I. A. (Org.) . **O Desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica [livro eletrônico]** : compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. 1. ed. Brasília: SBEM, 2018. v. 1. 311p .

ONUCHIC, DE I.R. Lourdes. **A resolução de problemas na educação matemática**: onde estamos? E para onde iremos?. Revista Espaço Pedagógico, v. 20, n. 1, 2013.

PELAY, N. **Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique**. 2011. Tese (Doutorado) - Universidade Claude Bernard-Lyon I.

PERELMAN, Y. **Álgebra recreativa**. 2018.

PERELMAN, Y. **Álgebra recreativa**. 6. ed. Moscou: Mir, 1986.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. da. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. 1992.

PONTE, J. P. da. **Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem**. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, p. 13-30, 2010.

PONTE, J. P. da. **Gestão curricular em Matemática**. O professor e o desenvolvimento curricular, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. 2009.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; BRANCO, N. **Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática**. Educação Matemática em Foco, v. 1, n. 1, p. 9-29, 2012.

PONTE, J. P. **Números e álgebra no currículo escolar**. In: VALE, Pimentel; SANTOS, Luis; CANAVARRO, Pedro. (Orgs.) Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. p. 5-27. Lisboa, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RADFORD, L. **Algebraic Thinking and The Generalization of Patterns**: a semiotic perspective. In: PME-NA, 28., 2006, Mérida. Anais [...] . Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. p. 1-21.

RADFORD, L. **Cognição Matemática**: História, Antropologia e Epistemologia. 1. ed. Editora da física, 2011.

RADFORD, L. **De la teoría de la objetivación**. Revista Latinoamericana de EtnoMatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, [S.I.], v. 7, n. 2, p. 132-150, jun. 2014.

RADFORD, L. **The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School**. In: KIERAN, C. (ed.). Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: the global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018. p. 3-25.

RAMÍREZ, M.C. **Uma estratégia matemática de formulação de problemas**. Revista Internacional para Ensino e Aprendizagem de Matemática, v. 79-90, 2006.

SECAFIM, M. F. **Metacognição no ensino-aprendizagem de porcentagem na Educação de Jovens e Adultos**. 2018.

SEGANTINI, C.; SIQUEIRA FILHO, M. G. **Problemas recreativos na obra ‘O homem que calculava’, de Malba Tahan, e a resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado), 2015.

SILVA, R. A.; MEDEIROS, K. M. **Combinações Didáticas em Tarefas de Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos**. In: MEDEIROS, Kátia Maria de. (Org.) Pesquisas com Metodologias no Ensino-Aprendizagem Exploratório: Desenvolvimentos e Resultados para a Formação de Professores de Matemática no Século XXI. Volume 1. Editora RFB, 2024.

SILVA, R. A.; MEDEIROS, K. M. **O uso dos códigos de calculadora básica em tarefas de formulação e resolução de problemas matemáticos**: um estudo de caso. Tangram - Revista de Educação Matemática, v. 6, p. 92-114, 2023.

SILVER, E. **On mathematical problem posing**. For the Learning of Mathematical. 14(1), 1994, p. 19-28.

SINGER, F.M.; VOICA, C. **Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity?**. In: Mathematical problem posing. Springer, New York, NY, 2015. p. 141-174.

SOARES, F. Os congressos de ensino da matemática no Brasil nas décadas de 1950 a 1960 e as discussões sobre a matemática moderna. **O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA COMO OBJETO DE PESQUISA NO 1º SEMINÁRIO PAULISTA DE HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, p. 23, 2009.

SOUZA, D. P. P. **TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA: UMA ABORDAGEM COM O USO DE REGULARIDADES E PADRÕES**. In: EBRAPEM, 2019, São Paulo. XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática Tema: Pesquisa em Educação Matemática: Perspectivas Curriculares, Ética e Compromisso Social, 2019.

SOUZA, J. R. PIBID/MAT/FOZ: relatos de experiências. In: SOUZA, J. R. et al. (Org.) **O PIBID e a formação de professores de Matemática, pedagogia e letras: ações e concepções**. Pp. 09-22. Porto Alegre: Evangraf/Unioeste, 2016.

SOUZA, M.A.; GUIMARÃES, H.M. **A formulação de problemas verbais de Matemática: porquê e como**. Quadrante, v. 24, n. 2, p. 135-162, 2015.

SPINILLO, A.G.; LAUTERT, S. L.; BORBA, R. e de S. R.; SANTOS, E. M.; SILVA, J. F. G. **Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do ensino fundamental**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 31, p. 928-946, 2017.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum**. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (eds.) The teaching and assessing of Mathematical Problem Solving. Reston: NCTM, 1989, p.1-23.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. 64. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

TOBIO-GUTIÉRREZ, K. E.; MOGOLLÓN-RODRÍGUEZ, M.; PIROLA, N. **Um estudo sobre as crenças de autoeficácia na resolução de tarefas matemáticas**. Búsqueda, v. 5, n. 21, p. 182-193, 2018.

VALE, I.; PIMENTEL, T. (org). **Padrões em Matemática** – Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

VALENTE, W. R. **Os movimentos da matemática na escola**: do ensino de matemática para a educação matemática; da educação matemática para o ensino de matemática; do ensino de matemática para a Educação Matemática; da Educação Matemática para o Ensino de Matemática? Pensar a Educação em Revista, Curitiba/Belo Horizonte, v. 2, n. 2, p. 3-23, abr.

VAN HARPEN, X.Y.; SRIRAMAN, B. **Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA**. Educational Studies in Mathematics, v. 82, n. 2, p. 201-221, 2013.

VARIZO, Z. da C. M. **O ensino da Matemática e a resolução de problemas**. Inter-
ação, Revista da Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiás, n.
17, p. 1-20, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do Pensamento e da linguagem**. Tradução Paulo
Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

YIN, R. K. **Estudo de Caso**: Planejamento e métodos. Bookman editora, 2015.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL (TAI)

TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL (TAI)

Olinda, 06 de setembro de 2023

Prezados (a) Senhor (a):

Solicitamos sua autorização para realização do projeto de pesquisa intitulado **FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS NA SALA DE AULA**: investigando o desenvolvimento de estratégias, de autoria do (as) acadêmico **RHAFEL DOS SANTOS GOMES**, e orientado pelo(a) professor(a) Dr. (a): **KÁTIA MARIA DE MEDEIROS**, em sua instituição.

Este projeto tem como objetivo investigar como os estudantes desenvolvem estratégias no processo de formulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula, a ser realizada na sala de aula do nono ano. Os procedimentos adotados serão: A participação do estudante consistirá em responder, presencialmente, a duas entrevistas, um questionário sobre a maneira como as pessoas percebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado. Posteriormente, poderão participar de outras 4 sessões de formulação de problemas algébricos recreativos, em dupla, com outro estudante da sua mesma sala de aula, na qual os estudantes serão apresentados a dois problemas algébricos recreativos existentes e já escolhidos. Anteriormente, pelo pesquisador. A seguir, os estudantes serão convidados a reformular esses dois problemas a partir de outros dados. Cada encontro de reformulação será feito apenas uma vez por semana e terá duração em média de 45 minutos tendo, logo em seguida, um encontro final com uma entrevista. Teremos um total de 7 (sete) encontros, todos numa sala de aula das dependências da própria escola do estudante. Esta atividade apresenta risco mínimo aos participantes, na coleta de dados para os participantes, a pesquisa pode oferecer riscos ou incômodos, caso o estudante não consiga desenvolver nenhuma atividade, podendo ficar ansioso ou incidentes com os materiais de uso escolar, como caneta e lápis, por se tratar de objetos pontiagudos. Para o primeiro risco, caso ocorra, procuraremos manter um diálogo constante, esclarecendo as dúvidas, que porventura surjam, encorajando

Escola Municipal

RUA

CEP:

INEP:

ATO

D.O. T

os estudantes a terem uma postura ativa, durante toda a atividade. Para o segundo risco, caso ocorra, o fato será comunicado de imediato à gestão escolar, para contatar os responsáveis pelos estudantes e, concomitantemente, providenciar apoio médico numa unidade de saúde mais próxima. Salientamos que, durante a pesquisa os estudantes estarão mantidos em local seguro e acompanhados, para evitar possíveis incidentes.

Espera-se, com esta pesquisa traga benefícios e oportunize aos estudantes participantes, estes poderão rever e aplicar, de maneira recreativa, a álgebra; contribuir para a ciência, no tocante à Educação Matemática, proporcionando dados para a resolução de problemáticas no ensino e aprendizagem de Matemática, relevantes para a sociedade.

Qualquer informação adicional poderá ser obtida dos telefones (81) 2126 - 8588 Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE ou (81) 988728549 (Rhafael Gomes) ou 83 99639-3058 (Kátia Medeiros)

A qualquer momento, o senhor (a) poderá solicitar esclarecimentos sobre o trabalho que está sendo realizado, sem qualquer tipo de cobrança e poderá retirar sua autorização. Os pesquisadores estão aptos a esclarecer estes pontos e, em caso de necessidade, dar indicações para contornar qualquer mal-estar que possa surgir em decorrência da pesquisa ou não.

Os dados obtidos nesta pesquisa serão utilizados na publicação de artigos científicos, contudo, assumimos a total responsabilidade de não publicar qualquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes de sua instituição. Nomes, endereço e outras indicações pessoais não serão publicados em hipótese alguma, os bancos de dados gerados pela pesquisa só serão disponibilizados sem estes dados. A participação será voluntária, não fornecendo por ela qualquer tipo de pagamento por esta autorização bem como os participantes também não receberão qualquer tipo de pagamento.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E
ESCLARECIDO (PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO
MENOR DE 18 ANOS)**

Solicitamos a sua autorização para convidar o (a) seu/sua filho (a) {ou menor que está sob sua responsabilidade} para participar, como voluntário (a), da pesquisa FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) Rhafael dos Santos Gomes, residente na Rua Catulo da P. Cearense, 1370/302-Jd. Atlântico/Olinda-PE, CEP: 53140-130, Telefone (81) 988728549 e e-mail: rhafaelsg@hotmail.com e está sob a orientação de: Kátia Maria de Medeiros Telefone: 83 99639-3058, e-mail: katiamedeirosuepb@gmail.com.

O/a Senhor/a será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida a respeito da participação dele/a na pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e o/a Senhor/a concordar que o (a) menor faça parte do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias.

Uma via deste termo de consentimento lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável. O/a Senhor/a estará livre para decidir que ele/a participe ou não desta

pesquisa. Caso não aceite que ele/a participe, não haverá nenhum problema, pois desistir que seu filho/a participe é um direito seu. Caso não concorde, não haverá penalização para ele/a, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Descrição da pesquisa e esclarecimento da participação: A pesquisa será realizada com os estudantes do 9º ano, temos como objetivo investigar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes no processo de formulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula. A participação do estudante consistirá em responder, presencialmente, a duas entrevistas, um questionário sobre a maneira como as pessoas percebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado. Posteriormente, poderão participar de outras 4 sessões de formulação de problemas algébricos recreativos, a dois estudantes, individualmente, com estudantes da sua mesma sala de aula, na qual os estudantes serão apresentados a dois problemas algébricos recreativos existentes e já escolhidos. Anteriormente, pelo pesquisador. A seguir, os estudantes serão convidados a reformular esses dois problemas a partir de outros dados. Cada encontro de reformulação será feito apenas uma vez por semana e terá duração em média de 45 minutos tendo, logo em seguida, um encontro final com uma entrevista. Teremos um total de 7 (sete) encontros, todos numa sala de aula das dependências da própria escola do estudante.

RISCOS: Dos riscos da coleta de dados para os participantes, a pesquisa pode oferecer riscos ou incômodos, caso o estudante não consiga desenvolver nenhuma atividade, podendo ficar ansioso ou incidentes com os materiais de uso escolar, como caneta e lápis, por se tratar de objetos pontiagudos. Para o primeiro risco, caso ocorra, procuraremos manter um diálogo constante, esclarecendo as dúvidas, que porventura surjam, encorajando os estudantes a terem uma postura ativa, durante toda a atividade. Para o segundo risco, caso ocorra, o fato será comunicado de imediato à gestão escolar, para contatar os responsáveis pelos estudantes e, concomitantemente, providenciar apoio médico numa unidade de saúde mais próxima. Salientamos que, durante a pesquisa os

estudantes estarão mantidos em local seguro e acompanhados, para evitar possíveis incidentes.

BENEFÍCIOS No que se refere aos benefícios para os estudantes participantes, estes poderão rever e aplicar, de maneira recreativa, a álgebra; Contribuir para a ciência, no tocante à Educação Matemática, proporcionando dados para a resolução de problemáticas no ensino e aprendizagem de Matemática, relevantes para a sociedade.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores, assim como após aceitar participar o estudante pode optar em não querer responder determinadas questões. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas, fotos e manuscritos produzidos pelos participantes, ficarão armazenados em computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador principal, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

As fotos serão na área das mãos, que se façam necessárias sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes, essas fotos não serão divulgadas ou repassadas para outras pessoas e nada do que o estudante disser será usado contra ele mesmo, pois manteremos o sigilo e uso depoimento. Essas fotografias são necessárias para captar o ato manuscrito dos estudantes diante das ações ao longo da pesquisa, que auxiliam a entender como eles pensam e se comportam durante as atividades de escrita matemática. Após a participação do seu filho, caso ele tenha interesse sobre as análises de seus resultados, será entregue, de maneira individual, pelo pesquisador, na secretaria da escola.

O (a) senhor (a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele/ela participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele/a na pesquisa, conforme decisão judicial ou

extrajudicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, o (a) senhor (a) poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: (Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cephumanos.ufpe@ufpe.br).

Assinatura do pesquisador (a)

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO/A VOLUNTÁRIO

Eu, _____,

CPF _____, abaixo assinado,

responsável por _____, autorizo a sua participação no estudo FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS, como voluntário(a). Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele(a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade para mim ou para o(a) menor em questão.

Local e data

Assinatura do (da) responsável:

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do voluntário em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PARA MENORES DE 7 a 18 ANOS)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA**

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PARA MENORES DE 7 a 18 ANOS)

Convidamos você _____, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS NA SALA DE AULA:

investigando o desenvolvimento de estratégias. Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) Rhafael dos Santos Gomes residente na Rua Catulo da P. Cearense, 1370/302- Jd. Atlântico/ Olinda-PE, CEP: 53140-130, Telefone (81) 988728549 e e-mail: rhafaelsg@hotmail.com e está sob a orientação de: Kátia Maria de Medeiros Telefone: 83 99639-3058, e-mail: katiamedeirosuepb@gmail.com.

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via deste termo lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guardá-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, um responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Descrição da pesquisa e esclarecimento da participação: A pesquisa será realizada com os estudantes do 9º ano, temos como objetivo investigar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes no processo de formulação de problemas algébricos recreativos na sala de aula. A participação do estudante consistirá em responder, presencialmente, a duas entrevistas, um questionário sobre a maneira como as pessoas percebem, avaliam e agem com relação ao fenômeno pesquisado. Posteriormente, poderão participar de outras 4 sessões de formulação de problemas algébricos recreativos, a dois estudantes, individualmente, com outro estudante da sua mesma sala de aula, na qual os estudantes serão apresentados a dois problemas algébricos recreativos existentes e já escolhidos. Anteriormente, pelo pesquisador. A seguir, os estudantes serão convidados a reformular esses dois problemas a partir de outros dados. Cada encontro de reformulação será feito apenas uma vez por semana e terá duração em média de 45 minutos tendo, logo em seguida, um encontro final com uma entrevista. Teremos um total de 7 (sete) encontros, todos numa sala de aula das dependências da própria escola do estudante.

RISCOS: Dos riscos da coleta de dados para os participantes, a pesquisa pode oferecer riscos ou incômodos, caso o estudante não consiga desenvolver nenhuma atividade, podendo ficar ansioso ou incidentes com os materiais de uso escolar, como caneta e lápis, por se tratar de objetos pontiagudos. Para o primeiro risco, caso ocorra, procuraremos manter um diálogo constante, esclarecendo as dúvidas, que porventura surjam, encorajando os estudantes a terem uma postura ativa, durante toda a atividade. Para o segundo risco, caso ocorra, o fato será comunicado de imediato à gestão escolar, para contatar os responsáveis pelos estudantes e, concomitantemente, providenciar apoio médico

numa unidade de saúde mais próxima. Salientamos que, durante a pesquisa os estudantes estarão mantidos em local seguro e acompanhados, para evitar possíveis incidentes.

BENEFÍCIOS No que se refere aos benefícios para os estudantes participantes, estes poderão rever e aplicar, de maneira recreativa, a álgebra; Contribuir para a ciência, no tocante à Educação Matemática, proporcionando dados para a resolução de problemáticas no ensino e aprendizagem de Matemática, relevantes para a sociedade.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas, fotos e manuscritos produzidos pelos participantes, ficarão armazenados em computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador principal, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

As fotos serão na área das mãos, que se façam necessárias sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes, essas fotos não serão divulgadas ou repassadas para outras pessoas e nada do que o estudante disser será usado contra ele mesmo, pois manteremos o sigilo e uso depoimento. Essas fotografias são necessárias para captar o ato manuscrito dos estudantes diante das ações ao longo da pesquisa, que auxiliam a entender como eles pensam e se comportam durante as atividades de escrita matemática. Após a participação do seu filho, caso ele tenha interesse sobre as análises de seus resultados, será entregue, de maneira individual, pelo pesquisador na secretaria da escola.

Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida

indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO (DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS NA SALA DE AULA:

investigando o desenvolvimento de estratégias, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data

Assinatura do (da) menor:

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE D – TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS RECREATIVOS NA

SALA DE AULA: investigando o desenvolvimento de estratégias

Nome Pesquisador responsável: Rhafael dos Santos Gomes

Instituição/Departamento de origem do pesquisador: Universidade Federal de Pernambuco/ Centro de Educação.

Endereço completo do responsável: Rua Catulo da P. Cearense, nº 1370/302-Jd. Atlântico/ Olinda, PE, CEP: 53140-130.

Telefone para contato: 81 988728549 - E-mail: rhafaelsg@hotmail.com

orientador/fone contato/e-mail: Dr. (a): Kátia Maria de Medeiros/ 83 9639-3058/ katiamedeirosuepb@gmail.com

O pesquisador do projeto acima identificado assume o compromisso de: · Preservar o sigilo e a privacidade dos voluntários cujos dados serão estudados e divulgados apenas em eventos ou publicações científicas, de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificá-los;

Garantir o sigilo relativo às propriedades intelectuais e patentes industriais, além do devido respeito à dignidade humana;

Garantir que os benefícios resultantes do projeto retornem aos participantes da pesquisa, seja em termos de retorno social, acesso aos procedimentos, produtos ou agentes da pesquisa; · Assegurar que os resultados da pesquisa serão anexados na Plataforma Brasil, sob a forma de Relatório Final da pesquisa;

Os dados coletados nesta pesquisa, gravações, entrevistas, fotos, ficarão armazenados em pastas de arquivo do computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

_____, ____ de _____ de 2023.

_____**Assinatura Pesquisador Responsável**

APÊNDICE E – DIÁRIO DE BORDO

Antes da aula
Expectativas do investigador sobre cada tarefa

Durante a aula
Introdução da tarefa:
Instruções:
Reações dos estudantes:

Desenvolvimento da tarefa

Atitudes do professor investigador / Questões colocadas / Reações obtidas:

Questões específicas colocadas pelos estudantes:

Dificuldades e comentários dos estudantes:

Atitudes dos estudantes no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas:

Discussão Geral

Discussão Geral Intervenções dos estudantes / Gestão do professor:

Principais conclusões / Aspectos novos:

Outros aspectos a destacar / Episódios marcantes ocorridos na sala de aula:

Após a aula

Aspetos positivos alcançados:

Aspetos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor):
--

Papel do professor / investigador:

Reflexos na investigação:

Outras Observações: