UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

Operadores de percolação em Z:

Limites mais precisos para o valor crítico e existência de distribuição invariante

Recife
2024

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

Operadores de percolação em Z:

Limites mais precisos para o valor crítico e existência de distribuição invariante

Esta tese será apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador: Alex Dias Ramos

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Medeiros, Hugo Deleon Pereira de.
Operadores de percolação em Z: limites mais precisos para o valor crítico e existência de distribuição invariante / Hugo Deleon Pereira de Medeiros. - Recife, 2024.
86f.: il.

Tese (Doutorado), Universidade Federal de Pernambuco, Ciências Exatas e da Natureza, Pós-Graduação em Estatística, 2024.
Orientação: Alex Dias Ramos.

1. Autômato celular probabilístico; 2. Medida invariante; 3. Transição de fase. I. Ramos, Alex Dias. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

HUGO DELEON PEREIRA DE MEDEIROS

Operadores de percolação em Z: Limites mais precisos para o valor crítico e existência de distribuição invariante

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovado em 30 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alex Dias Ramos
Presidente, UFPE

Prof. Dr. Aldo William Medina Garay
Examinador Interno, UFPE

Prof. Dr. Getúlio José Amorim do Amaral
Examinador Interno, UFPE

Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes
Examinador Externo à Instituição, IME-USP

Prof. Dr. Glauco Valle da Silva Coelho
Examinador Externo à Instituição, UFRJ

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido saúde, força e serenidade para superar todas as adversidades.

À minha família, que nos momentos mais angustiantes desses últimos anos, permeado de abdicações, frustrações e perdas, me deram carinho, apoio e incentivo à não desistir dos meus sonhos e objetivos. Em especial, a minha esposa, por acreditar em mim, estando sempre ao meu lado, sendo uma verdadeira fortaleza na minha vida.

Ao meu orientador, pelo exemplo de profissionalismo, pela maneira exigente de ser, extraindo sempre o máximo de mim e, principalmente, pela confiança e compreensão diante de todos os obstáculos que emergiram ao longo dessa trajetória.

Aos docentes da UFPE que estiveram presentes na minha formação, proporcionando ensinamentos, críticas, conselhos e incentivos.

Aos discentes da UFPE que estiveram sempre disponíveis a me ajudar, debatendo e compartilhando os conhecimentos acadêmicos.

À todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte de minha formação, e desta feita contribuíram para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos a teoria de Processos Estocásticos com Interação Local em tempo discreto, conhecidos como Autômatos Celulares Probabilísticos (ACP). Exploramos uma classe de ACP, a qual é conhecida por operadores de percolação. O Processo de Stavskaya é um dos exemplo mais simples de operador de percolação. Essa classe de operadores apresenta o fenômeno de transição de fase entre os comportamentos de ergodicidade e não-ergodicidade, o qual é função de um parâmetro $\alpha \in [0, 1]$. A fim de obter melhores estimativas para os limites inferior e superior para o valor crítico, α^*, que delimita os comportamentos de ergodicidade versus não-ergodicidade, estabelecemos e aplicamos novas metodologias, a qual nos forneceram novos limites, melhorando resultados previamente conhecidos na literatura. O limite inferior obtido foi $0,113$ de modo que quando $\alpha < 0,113$, o sistema tem um comportamento não-ergódico, tal estimativa foi alcançada fazendo uso do conceito de matriz de adjacência para quantificar o número de caminhos do grafo associado a evolução de nosso processo. Por outro lado, o limite superior obtido foi $\alpha_n < (n-1)/(n+1)$. Para obter este resultado, mostramos que α_n depende somente do número de vizinhos n, não de suas posições, de modo que quando $\alpha > \alpha_n$ o sistema tem comportamento ergódico. Destacamos ainda que a noção de monotonicidade para estes operadores, nos permitiu estabelecer condições para a existência de medidas invariantes não triviais. Além disso, realizamos análises numéricas, utilizando a aproximação de campo médio, e modelagem computacional para estimar α^*.

Palavras-chave: Autômato Celular Probabilístico, medida invariante, transição de fase.

ABSTRACT

In this work, we investigate the theory of Stochastic Processes with Local Interaction in discrete time, known as Probabilistic Cellular Automata (PCA). We explore a class of ACP, which is known as percolation operators. The Stavskaya Process is one of the simplest examples of a percolation operator. This class of operators presents the phenomenon of phase transition between ergodic and non-ergodic behaviors, which is a function of a parameter $\alpha \in [0, 1]$. In order to obtain better estimates for the lower and upper limits for the critical value, α^*, which delimits the behaviors of ergodicity versus non-ergodicity, we established and applied new methodologies, which provided us with new limits, improving results previously known in the literature. The lower limit obtained was $0,113$ so that when $\alpha < 0,113$, the system has a non-ergodic behavior, this estimate was achieved using the concept of adjacency matrix to quantify the number of paths in the graph associated with evolution of our process. On the other hand, the upper limit obtained was $\alpha_n < (n-1)/(n+1)$. To obtain this result, we show that α_n depends only on the number of neighbors n, not on their positions, so that when $\alpha > \alpha_n$ the system has ergodic behavior. We also highlight that the notion of monotonicity for these operators allowed us to establish conditions for the existence of non-trivial invariant measures. Furthermore, we performed numerical analyses, using the mean field approximation, and computational modeling to estimate α^*.

Key-words: Probabilistic cellular automata; invariant measures; fase transition.

Lista de Símbolos e Abreviaturas

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{A}$	Conjunto dos estados de uma configuração
Ω	Espaço das configurações
$\mathbb{Z}_m$	Conjunto dos restos da divisão inteira módulo m
Ω_m	Espaço das configurações dada por $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}_m}$
$\mathcal{T}$	Espaço Topológico
$\mathcal{B}$	σ-Álgebra de subconjuntos de Ω
$\mathcal{M}$	Conjunto das medidas normalizadas
$\mathbb{P}$	Medida de probabilidade
δ_x	Delta medida concentrada na configuração x
$\prec$	Precede a
V	Subconjunto de $\mathbb{Z}$ chamado de Vizinhança
a_V	Vetor de estados de $\mathbb{A}$
$C_v[a]$	Cilindro básico
$C_V[a_V]$	Cilindro fino
$\mu(\omega_V = a_V)$	Medida μ aplicado a um cilindro fino $C_V[a_V] = \{\omega \in \Omega; \omega_V = a_V\}$
$V(v)$	Vizinhança de v
$\theta_v(\cdot\|x_{x_{V(v)}})$	Distribuição de transição da v-ésima componente
$\theta_v(a\|x_{x_{V(v)}})$	Probabilidade de transição da v-ésima componente para o estado a
$\mathsf{D} : \Omega \to \Omega$	Operador Determinístico
$\mathsf{R}_\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$	Operador Aleatório com parâmetro $\alpha \in [0, 1]$
$\mathsf{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$	Operador agindo no espaço de distribuição
$\mathsf{P}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$	Operador de Percolação na qual a vizinhança tem n elementos
$\overline{\mathsf{P}}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$	Operador de Percolação na qual a vizinhança é dada por $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
$\tilde{\mathsf{P}}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$	Operador de Percolação agindo em circulares $\tilde{C} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_m}$
$\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{\mathsf{P}}_n, \tilde{C}\tilde{\mathsf{P}}_n^2, \ldots$	Cadeia de Markov homogênea iniciando-se na circular $\tilde{C}$

Lista de Figuras

Figura 4.1 Representação do Grafo no plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.

Figura 4.2 Evolução do processo Stavskaya até o vértice $(v = 0, t = 3) := \mathrm{T}$.

Figura 4.3 Evolução do processo Stavskaya projetada no grafo dual.

Figura 5.1 Grafo de um passeio aleatório com três estados.

Figura 5.2 Caminhos com $n = 3, 6, \ldots, 3k$ arestas contabilizadas em $m_{v_1 v_3}^{(n-1)}$.

Figura 5.3 Grafo satisfazendo (5.4) com restrição a sequência $\swarrow$, $\rightarrow$, $\nwarrow$.

Figura 5.4 Grafo ilustrativo das condições adicionais estabelecidas a acima.

Figura 5.5 Grafo ilustrativo de $\Gamma_{\mathsf{D_S}}^{(0,3)}$ e $\Gamma_{\mathsf{E}}^{(0,3)}$.

Figura 5.6 Grafo ilustrativo de $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(0,3)}$.

Figura 5.7 Grafo ilustrativo de $\Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$.

Figura 5.8 Evolução dos valores de α_s.

Figura 7.1 Ilustração gráfica das curvas y^n e $\dfrac{y - \alpha}{1 - \alpha}$.

Figura 7.2 Ilustração gráfica da estimativa e limite inferior para α^*.

Figura 7.3 Ilustração gráfica das estimativas de (M.C.), (T.) e (Ap.).

Figura 7.4 Ilustração da evolução do tempo-espaço onde $t = 100$, $\alpha = 0.2$, e $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{200}}$.

Figura 7.5 Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{-1, 0\}$.

Figura 7.6 Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{-1, 1\}$.

Figura 7.7 Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{0, 1\}$.

Figura 7.8 Ilustração da evolução do tempo-espaço onde $t = 300$ e $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{200}}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10
2 ACP: UM PREÂMBULO 13
3 OPERADORES DE PERCOLAÇÃO 24
3.1 Ordenação e monotonicidade 26
4 PROCESSO DE STAVSKAYA 30
4.1 Construção gráfica vértice-elo do operador S 31
4.2 Construção gráfica elo-elo do operador S 32
4.3 Valor crítico do operador de Stavskaya 33
5 TEOREMA PRINCIPAL 36
5.1 Novas estimações para o limite inferior de α^* 36
5.2 Prova do item *TP.1* do Teorema Principal 46
5.3 Prova dos itens *TP.2* e *TP.3* do Teorema Principal 51
6 MEDIDA INVARIANTE EM P_n 57
7 ANÁLISE NUMÉRICA 64
7.1 Modelagem e estudo computacional 67
8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS 78
REFERÊNCIAS 79
APÊNDICE A - Elementos de Percolação em $\mathbb{Z}^2$ 82
APÊNDICE B - Medida Invariante 84
APÊNDICE C - Ação do Operador do Exemplo 5, em cilindro, fixadas ao menos duas posições 85

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Processos Estocásticos com Interação Local, que começou a ser desenvolvida a partir de meados do século XX, e atualmente é mais conhecida por Sistemas de Partículas Interagentes, é estudada neste trabalho. Estes são sistemas dinâmicos estocásticos, onde geralmente, as componentes (também chamadas de partículas) são localizados em $\mathbb{Z}^d$, sendo d a dimensão do sistema e $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. A interação ocorre na maioria dos casos com seus vizinhos mais próximos em tempo contínuo [15] ou discreto [16].

Esta área de pesquisa tem presença, por exemplo: na matemática, física-estatística e ciências da computação. Além disso, há um extenso uso de sua modelagem computacional em biologia, ciências sociais e química, entre outros [10, 11, 14, 24]. Nos limitaremos no estudo destes processos em tempo discreto. Neste caso, eles são mais conhecidos por Autômatos Celulares Probabilísticos, o qual denotaremos ACP por simplicidade.

Um ACP, bastante estudado é o processo Stavskaya, este foi um dos processos que contribuiu muito para desenvolvimento da Teoria dos Sistemas de Partículas Interagentes. Ele é uma versão em tempo discreto do conhecido processo de contato [12, 15], descrito como um ACP em que cada componente assume os estados $\{0, 1\}$, localizados em uma rede unidimensional. Interessante observar que, para processos deste tipo se considerarmos o tempo de forma contínua, obteremos o processo de contato clássico. Vale ressaltar que, embora o processo de contato tenha sido amplamente estudado na literatura, o processo Stavskaya tem recebido (muito) menos atenção e hoje é uma fonte de interessantes problemas abertos. Para alguns trabalhos recentes que abordam questões em aberto ou generalizações para o processo de Stavskaya, remetemos o leitor para [9, 20, 27].

Neste trabalho, estudamos uma classe de ACP unidimensionais, onde cada partícula assume valores zero ou um. Estes são conhecidos por *Processo de Percolação* e seus operadores

são chamados operadores de percolação. O operador de percolação é descrito pela composição de dois operadores agindo na transição do tempo t para $t+1$ no processo. No primeiro meio-passo ocorre a ação do operador determinístico (D_n), da seguinte maneira: Se ao menos um dos vizinhos da partícula estiver no estado 1, no próximo meio-passo ela assumirá o estado 1, caso contrário, ela terá o estado 0. No segundo meio-passo ocorre a ação do operador aleatório unilateral (R_α), neste caso, independentemente do que acontece com as outras partículas, cada partícula no estado 1 torna-se 0 com probabilidade α. Assim, nosso operador de percolação com n vizinhos $\mathsf{P}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$ é informalmente introduzido. Nesta classe, diferente do que é tradicionalmente assumido, os vizinhos não são necessariamente os mais próximos. Vale ressaltar que o processo de Stavskaya é um caso particular deste Processo de Percolação quando temos apenas dois vizinhos. Além disso, em P_n é bem conhecido que há um parâmetro crítico, α^*, para o qual observa-se que há um fenômeno da *transição de fase*, nele se $\alpha < \alpha^*$ haverá apenas uma distribuição invariante e o processo convergirá para ela de qualquer outra condição inicial, o que não ocorre para $\alpha > \alpha^*$.

Este texto estará divido da seguinte forma: No **Capítulo 2**, é apresentado algumas notações, definições e resultados para um ACP, mostrando um pouco dos alicerces matemáticos que formalizam o operador em questão, vale destacar que este capítulo ajudará numa melhor compreensão dos resultados da Seção 3.1 referente a "Ordenação e Monotonicidade" dos Operadores de Percolação, contudo, a critério do leitor, é dispensável para o entendimento dos demais tópicos deste texto. No **Capítulo 3**, dissertaremos sobre os operadores da forma $\mathsf{P}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$ chamados "Operadores de Percolação", em que tal superposição é composta por um operador determinístico D_n e um operador aleatório R_α com parâmetro $\alpha \in [0,1]$, além disso, são apresentados algumas propriedade de Ordenação e Monotonicidade destes Operadores. No **Capítulo 4**, é analisado o operador de percolação com dois vizinhos. No referido capítulo apresentamos um teorema, o qual nominamos por: existência de um valor crítico para o Processo de Stavskaya, provado por [30], que investiga o fenômeno da transição de fase. No **Capítulo 5**, é analisado um modelo de percolação com n vizinhos. Em um único Teorema enunciamos os principais resultados deste trabalho, a qual chamamos de Teorema Principal, constituído em duas partes, a primeira direcionada a ergodicidade do nosso processo e a segunda direcionada a não ergodicidade do nosso processo. Além disso, a

prova é dividido em duas partes, na primeira parte obtemos um melhoramento das estimações para o limite inferior do valor crítico, α^*, por meio de uma nova metodologia, a qual nomeamos de estimação por matriz de adjacência, na segunda parte revisitamos o teorema da probabilidade crítica, enunciado e provado por Lorenzo [27], de modo que, fomos capazes de implementar um melhoramento a este resultado, em particular, trazendo uma visão mais quantitativa. Nos possibilitando descrever melhores estimações para o limite superior do valor crítico, α^*. Na última seção, enunciamos e provamos um Teorema, o qual enuncia que nenhuma medida produto de Bernoulli, não degenerada, pode ser invariante para nosso operador. No **Capítulo 6**, é apresentado os estudos numéricos, os quais ilustram alguns dos nossos resultados analíticos, além de apresentar alguns novos insights. Para este fim, utilizamos a aproximação de campo médio e modelagem computacional para os operadores de percolação. Finalmente, no **Capítulo 7**, é apresentada uma síntese dos resultados obtidos, apresentando algumas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 ACP: UM PREÂMBULO

Neste Capítulo serão apresentados os conceitos, definições e resultados que fundamentam e estruturam os ACP por meio de uma linguagem matemática formal, importante para a compreensão de alguns resultados presentes ao longo do texto. O leitor familiarizado com este conteúdo é encorajado a ir diretamente para os capítulos subsequentes deste trabalho.

Seja $\mathbb{A}$ um conjunto não vazio e finito, e cada elemento $a \in \mathbb{A}$ é dito ser um *estado*. Chamamos $\Omega = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$ o *espaço de configurações*, e qualquer $x \in \Omega$ é dito ser uma *configuração*. Cada configuração pode ser representado da seguinte forma

$$x = (x_v)_{v \in \mathbb{Z}^d},$$

em que $x_v \in \mathbb{A}$ é o estado que a componente $v \in \mathbb{Z}^d$ assume na configuração $x \in \Omega$. Além disso, dado $a \in \mathbb{A}$, denote por $a_{\mathbb{Z}^d} \in \Omega$ a configuração na qual $x_v = a, \ \forall \ v \in \mathbb{Z}^d$, também chamada de *configuração todos a*.

Para qualquer $v \in \mathbb{Z}^d$ e qualquer $a \in \mathbb{A}$, chamaremos de *cilindro básico* o conjunto

$$C_v[a] = \{\omega \in \Omega; \omega_v = a\}.$$

Dado $V \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto não vazio e finito, definimos

$$C_V[a_V] := \bigcap_{v \in V} C_v[a_v] \ \text{ , onde } \ a_v \in \mathbb{A} \quad \text{e} \quad a_V = (a_v)_{v \in V} \in \mathbb{A}^{|V|}. \tag{2.1}$$

Chamamos (2.1) de *cilindro fino*, e se representarmos V por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então seremos capazes de reescrever a equação (2.1) da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_V[a_V] &= C_{\{v_1,\ldots,v_n\}}[a_{v_1}, \ldots, a_{v_n}] \\ &= \{\omega \in \Omega; \omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_n} = a_{v_n}\} \\ &= \{\omega \in \Omega; \omega_V = a_V\}. \end{aligned}$$

onde $\omega_V = (\omega_{v_1}, \ldots, \omega_{v_n})$ é um *vetor de posições* das configurações de $C_V[a_V]$ que assumem os valores do *vetor de estados* $a_V = (a_{v_1}, \ldots, a_{v_n}) \in \mathbb{A}^{|V|}$. A seguir, no Exemplo 1 apresentamos casos particulares para cilindro básico e cilindro fino.

Exemplo 1. *Sejam* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $C_1[0]$, $C_2[1]$ *e* $C_3[0]$, *logo*

$$C_{\{1,2,3\}}[0,1,0] = C_1[0] \bigcap C_2[1] \bigcap C_3[0] = \{\omega \in \Omega; \omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = 0\}.$$

A união finita de cilindros finos, dois a dois disjuntos, é chamado de *cilindro*. Denotaremos por $\mathcal{B}_o$ a álgebra gerada pelos cilindros. De fato,

(i) Sejam $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\mathbf{0}$ o vetor nulo de $\mathbb{Z}^d$, e $C_{\mathbf{0}}[a_k]$ cilindro básico para cada $k = 1, ..., n$. Sabemos que cada cilindro básico também é um cilindro fino. Além disso, se $j \neq k$ então teremos $C_{\mathbf{0}}[a_k] \cap C_{\mathbf{0}}[a_j] = \emptyset$. Assim, a união finita destes cilindros finos é um cilindro. Por outro lado, $\bigcup_{k=1}^{n} C_{\mathbf{0}}[a_k] = \Omega$. Logo, $\Omega \in \mathcal{B}_o$.

(ii) Se $B, D \in \mathcal{B}_o$, então B e D são cilindros, ou seja, são gerados da união finita de cilindros finos, dois a dois disjuntos. Logo existirão $n, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} C_{F_i}[a_{F_i}] \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{j=1}^{m} C_{E_j}[a_{E_j}],$$

onde para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que F_i, E_j são subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ e $C_{F_i}[a_{F_i}], C_{E_j}[a_{E_j}]$ são cilindros finos dois a dois disjuntos, ou seja, $C_{E_s}[a_{E_s}] \cap C_{E_r}[a_{E_r}] = \emptyset$ para $s \neq r$, e $C_{F_q}[a_{F_q}] \cap C_{F_p}[a_{F_p}] = \emptyset$ para $q \neq p$, logo teremos

$$\left(C_{F_q}[a_{F_q}] \cap C_{E_s}[a_{E_s}]\right) \bigcap \left(C_{F_p}[a_{F_p}] \cap C_{E_r}[a_{E_r}]\right) = \emptyset \ , \quad \forall \ \ q \neq p \ \ \text{ou} \ \ s \neq r.$$

Segue que,

$$B \bigcap D = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{F_i}[a_{F_i}]\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{E_j}[a_{E_j}]\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \left(C_{F_i}[a_{F_i}] \bigcap C_{E_j}[a_{E_j}]\right),$$

daí, $B \cap D$ é a união finita de cilindros finos, dois a dois disjuntos, ou seja, $B \cap D \in \mathcal{B}_o$.

(iii) Dado um conjunto B, denotaremos o seu complementar por B^c. Se $B \in \mathcal{B}_o$, então B é um cilindro, ou seja, é gerado da união finita de cilindros finos, dois a dois disjuntos. Logo existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^{n} C_{F_i}[a_{F_i}]$. Note que,

$$B^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{F_i}[a_{F_i}]\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} \left(C_{F_i}[a_{F_i}]\right)^c.$$

Vimos no item (ii) que a interseção finita de cilindros é um cilindro, assim para que B^c seja um cilindro, basta mostrarmos que $(C_{F_i}[a_{F_i}])^c$ é um cilindro. Observe que,

$$(C_{F_i}[a_{F_i}])^c = \left(\bigcap_{v_i \in F_i} C_{v_i}[a_{v_i}]\right)^c = \bigcup_{v_i \in F_i} (C_{v_i}[a_{v_i}])^c = \bigcup_{v_i \in F_i} \bigcup_{a \in \mathbb{A} - \{a_{v_i}\}} C_{v_i}[a] \ ,$$

onde $C_{v_i}[a] \cap C_{v_i}[b] = \emptyset$ para todo $a \neq b$ em $\mathbb{A} - \{a_{v_i}\}$, e ainda, cada F_i e $\mathbb{A} - \{a_{v_i}\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$, é um conjunto finito. Segue que, $(C_{F_i}[a_{F_i}])^c$ é uma união finita de cilindros básicos, que são cilindros finos, dois a dois disjuntos, ou seja, $(C_{F_i}[a_{F_i}])^c$ é um cilindro. Consequentemente, $B^c \in \mathcal{B}_o$. Portanto, concluímos que $\mathcal{B}_o$ é uma álgebra.

É importante observar que nem todo cilindro é um cilindro fino.

Exemplo 2. *Considere* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *e os cilindros finos* $C_0[0]$,$C_0[1]$. *Note que,* $C_0[0] \bigcap C_0[1] = \emptyset$, *porém* $C_0[0] \bigcup C_0[1] = \Omega$, *o qual não é um cilindro fino.*

A álgebra $\mathcal{B}_o$, embora seja extensa, não possui vários subconjuntos de Ω que são importantes para nós. Por exemplo, qualquer configuração onde todos os componentes têm o mesmo estado, $a_{\mathbb{Z}^d}$, não pertence a $\mathcal{B}_o$, e mais, nenhum conjunto unitário pertence a esta álgebra. Para incluir estes e outros conjuntos, os quais são de nosso interesse, iremos considerar a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\mathcal{B}_o$. Esta σ-álgebra, dada pela interseção de todas as σ-álgebra que contém $\mathcal{B}_o$ é o conjunto minimal, o qual inclui a álgebra $\mathcal{B}_o$ e também satisfaz as seguintes regras: qualquer interseção contável e qualquer união contável de elementos de $\mathcal{B}$ também pertence a $\mathcal{B}$, ou seja, agora temos

$$\bigcap_{v \in \mathbb{Z}^d} C_v[a] \ \in \mathcal{B}.$$

Apresentaremos algumas características topológicas de Ω. Uma topologia no conjunto E é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de E, o qual satisfaz:

(i) $\emptyset$ e E pertencem a $\mathcal{T}$;

(ii) Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ então $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}$;

(iii) Dado uma família $\{A_n \in \mathcal{T};\ n \in \mathbb{N}\}$ teremos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

O par $(E, \mathcal{T})$ é chamado de *espaço Topológico* e cada elemento de $\mathcal{T}$ é chamado de *aberto*. Neste sentido, dizemos que $F \subset E$ é um conjunto fechado se F^c for um conjunto aberto.

Dizemos que uma família $\{A_n \in \mathcal{T};\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura para E, se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset E$. Assim, o espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é dito ser um *espaço compacto* se para toda cobertura aberta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E existe uma subcobertura finita $(A_n)_{n=1}^{k} \subset (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para E.

Considere E um conjunto enumerável. Seja $\mathcal{P}(E)$ o conjunto das partes de E, se tivermos $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ então diremos que $\mathcal{T}$ é uma *Topologia discreta*. Segue de [32] que,

(a) Na topologia discreta qualquer conjunto é fechado e aberto ao mesmo tempo;

(b) Um espaço discreto é compacto se, e só se, é finito.

Retornando ao espaço das configurações $\Omega = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$, onde $\mathbb{A}$ é finito, tomaremos $(\mathbb{A}, \mathcal{T})$, na qual $\mathcal{T}$ é a topologia discreta. Assim, através do Teorema de Tychonoff, concluímos que Ω é compacto.

Teorema (de Tychonoff [32]). *O produto cartesiano* $\mathbf{S} = \prod_{i=1}^{\infty} S_i$ *é um espaço compacto se, e somente se, cada* $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é um espaço compacto*

Como $\mathbb{A}$ é munido da topologia discreta, então os cilindros básicos serão abertos de Ω, consequentemente temos que

(a) Todo cilindro fino é um aberto, pois a interseção finita de abertos é um aberto;

(b) Todo cilindro é um aberto, pois a união de abertos é um aberto; e,

(c) Todo cilindro é aberto e fechado, pois os cilindros formam a álgebra $\mathcal{B}_o$. De fato, se um cilindro é aberto, seu complementar é fechado, mas como o complementar pertence a $\mathcal{B}_o$, logo é um cilindro, então é aberto.

Sob uma topologia produto, Ω é metrizável. Com efeito, dados $x, y \in \Omega$, definimos a *distância de Cantor* entre x e y, na forma

$$d(x, y) = 2^{-\Delta(x,y)},$$

onde $\Delta(x,y) = \min\{|k| : k \in \mathbb{Z}, x_k \neq y_k\}$. Se tal mínimo não existe, isto é, se o conjunto é vazio, definiremos $d(x,y) = 0$. Nestes casos, temos que $x_k = y_k$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$. Logo, x e y são a mesma configuração.

A partir deste ponto, iremos buscar um conjunto de medidas de probabilidade (medidas normalizadas) em $\mathcal{B}$. Com efeito, tal medida $\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$ deverá satisfazer:

(i) $\mu(A) \in [0,1]$ para $A \in \mathcal{B}$;

(ii) $\mu(\Omega) = 1$;

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequencia disjunta dois a dois de elementos de $\mathcal{B}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right).$$

A propriedade (iii), define μ como uma medida σ-aditiva. Em particular, quando $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right),$$

diremos que μ é uma medida finitamente aditiva. É claro que a propriedade σ-aditiva implica na propriedade finitamente aditiva.

Usando o Teorema da extensão de Carathéodory, teremos que todo μ é determinado por sua restrição, μ_o, à álgebra $\mathcal{B}_o$.

Teorema (da extensão de Carathéodory [3]). *Se tivermos uma medida, μ_o normalizada e finitamente aditiva, definida em todos os elementos de $\mathcal{B}_o$, então existirá uma única medida, μ σ-aditiva, definida em todos os elementos de $\mathcal{B}$, o qual coincide com μ_o em $\mathcal{B}_o$.*

Denotaremos o conjunto das medidas de probabilidade em Ω, por $\mathcal{M}$.

Pelo apresentado até agora, para definir μ é suficiente saber seu valor nos cilindros finos. Assim, obtemos o *espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Logo, pelo Teorema da aproximação dados $\mu \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, existirá um cilindro $A \in \mathcal{B}_o$ tal que $\mu(A \Delta C) < \varepsilon$.

Teorema (da aproximação [3]). *Sejam $\mathcal{B}_o$ uma álgebra e μ uma medida em $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_o)$ tal que μ é σ-finita em $\mathcal{B}_o$. Então,*

(i) Se $C \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, existirá uma sequência disjunta $(A_1, A_2, \ldots)$ em $\mathcal{B}_o$ tal que

$$C \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad e \quad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \; - \; C\right) < \varepsilon;$$

(ii) Se $C \in \mathcal{B}$, $\mu(C) < \infty$ e $\varepsilon > 0$, existirá uma sequência disjunta finita $(A_1, \ldots, A_n)$ em $\mathcal{B}_o$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \; \Delta \; C\right) < \varepsilon;$$

Em Particular,

(iii) Se μ for uma medida finita em uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por uma álgebra $\mathcal{B}_o$, então para cada $C \subset \mathcal{B}$ e para cada $\varepsilon > 0$, existirá um $A \subset \mathcal{B}_o$ tal que $\mu(A \Delta C) < \varepsilon$.

A seguir descreveremos as formas que o valor da medida μ, em um cilindro, pode ser apresentada neste texto. Lembre que $\Omega = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^d}$, dados $V \subset \mathbb{Z}^d$ e $a_V \in \mathbb{A}^{|V|}$, teremos

$$\mu\left(C_V\left[a_V\right]\right) \; = \mu\left(\{\omega \in \Omega; \omega_V = a_V\}\right) = \mu\left(\omega_V = a_V\right).$$

Uma medida em $\mathcal{M}$ é uma *delta medida* concentrada em $x \in \Omega$, denotada por δ_x, quando

$$\delta_x\left(\omega_V = a_V\right) \; = \begin{cases} 1 & \text{se } a_V = x_V; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Em particular, denotaremos por $\delta_{0_{\mathbb{Z}^d}}$, a delta medida concentrada na *configuração todos zeros*, e por $\delta_{1_{\mathbb{Z}^d}}$, a delta medida concentrada na *configuração todos uns*.

Suponha agora que $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos

$$A_i = \{\omega \in \Omega; \omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_{n-1}} = a_{v_{n-1}}, \omega_{v_n} = a_i\}.$$

Note que o estado da componente ω_{v_n} é fixado no estado a_i. Logo, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$. Assim,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{a\in A} \mu(\omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_{n-1}} = a_{v_{n-1}}, \omega_{v_n} = a).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \; &= \mu\left(\omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_{n-1}} = a_{v_{n-1}}, \omega_{v_n} \in \mathbb{A}\right) \\ &= \mu\left(\omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_{n-1}} = a_{v_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{a\in A}\mu(\omega_{v_1}=a_{v_1},\ldots,\omega_{v_{n-1}}=a_{v_{n-1}},\omega_{v_n}=a)=\mu\left(\omega_{v_1}=a_{v_1},\ldots,\omega_{v_{n-1}}=a_{v_{n-1}}\right). \tag{2.3}$$

A *consistência da medida* μ é dada pela igualdade em (2.3).

Vejamos alguns aspectos topológicos de $\mathcal{M}$. Em [30], utilizando-se da compacidade sequencial é provado que o conjunto $\mathcal{M}$ é compacto e conexo.

Sejam $\mu,\nu\in\mathcal{M}$. A sigma álgebra gerada por $\Omega\times\Omega$ será denotada por $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$. O espaço mensurável $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ é um espaço produto. Uma medida $\pi:\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to[0,1]$ é dita ser um *acoplamento* de μ,ν se elas são distribuições marginais de π. Daí, dados $C_1,C_2\in\mathcal{B}$ teremos

$$\pi(C_1\times\Omega)=\mu(C_1)\qquad\text{e}\qquad\pi(\Omega\times C_2)=\nu(C_2).$$

Dizemos que uma sequência de medidas $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ em $\mathcal{M}$ converge para $\nu\in\mathcal{M}$, na qual denotaremos $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\nu$, quando para cada cilindro C,

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(C)=\nu(C).$$

Esta convergência corresponde a *convergência fraca*, para tanto basta utilizarmos o Teorema Portmanteau mais determinação de convergência por cilindros [6].

Dado $n\geq 0$, $v\in\mathbb{Z}^d$, e $V=\{v_1,\ldots,v_n\}\subset\mathbb{Z}^d$, dizemos que

$$V(v)=\{v+v_1,\ldots,v+v_n\},$$

é uma *vizinhança* de $v\in\mathbb{Z}^d$, onde $v+v_1,\ldots,v+v_n$ são chamados *vizinhos* de v.

Seja $f:\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}$ a qual leva qualquer vetor de $\mathbb{A}^n$ em um elemento de $\mathbb{A}$, ou seja, $(a_{v_1},\ldots,a_{v_n})\mapsto a$. A referida função, f, é chamada de *função de transição*. Assim, dada uma *função de transição*, $f:\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}$, diremos que uma aplicação $\mathsf{D}:\Omega\to\Omega$ é um *Operador Determinístico* quando

$$\mathsf{D}(x):=x\mathsf{D}\in\Omega,\qquad\forall\ x\in\Omega$$

onde $(x\mathsf{D})_v=f(x_{v_1},\ldots,x_{v_n})$ para todo $v\in\mathbb{Z}^d$ e $v_i\in V(v)$. Segue que,

$$x\mathsf{D}=[(x\mathsf{D})_v]_{v\in\mathbb{Z}^d}.$$

Exemplo 3. *Seja* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $V(v) = \{v, v+1\}$, *e* $f(a_i, a_j) = a_i \cdot a_j$. *Assim,*

$$(x\mathsf{D})_v = x_v \cdot x_{v+1}, \qquad e, \qquad x\mathsf{D} = (x_v \cdot x_{v+1})_{v\in\mathbb{Z}}.$$

A t-ésima iteração de D é denotada por $\mathsf{D}^{t+1} = \mathsf{D}^t \circ \mathsf{D}$ para cada valor natura t . Denote $\mathsf{D}^0 = \mathbf{Id}$, onde $\mathbf{Id}$ é a função identidade. Para todo $t \in \mathbb{Z}_+$, escreveremos $x\mathsf{D}^{t+1} := (x\mathsf{D}^t)\mathsf{D}$, e chamamos a sequência $x, x\mathsf{D}, x\mathsf{D}^2, x\mathsf{D}^3, \ldots$ de *Autômato Celular Determinístico*, ou apenas *Autômato Celular* (AC), por simplicidade.

Definiremos uma *função translação* (deslocamento) $T_u : \Omega \to \Omega$, onde $u \in \mathbb{Z}^d$, por

$$(xT_u)_v = x_{v-u}, \quad \forall\ v \in \mathbb{Z}^d.$$

assim,

$$xT_u = (x_{v-u})_{v\in\mathbb{Z}^d}\,.$$

Dizemos que um operador D tem *translação invariante* ou *uniforme*, quando é válida a comutatividade com todas as translações em Ω, isto é,

$$\mathsf{D} \circ T_u = T_u \circ \mathsf{D}, \quad \forall\ u \in \mathbb{Z}^d.$$

Dizemos que a medida μ é *uniforme* ou *invariante por translação*, quando para qualquer $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, tivermos

$$\mu\left(\omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_n} = a_{v_n}\right) = \mu\left(\omega_{v_1+v} = a_{v_1+v}, \ldots, \omega_{v_n+v} = a_{v_n+v}\right), \quad \forall\ v \in \mathbb{Z}^d,$$

ou seja, as medidas dos cilindros não depende de sua posição. Neste caso, denotaremos por

$$\mu\left(a_{v_1}, \ldots, a_{v_n}\right) := \mu\left(\omega_{v_1} = a_{v_1}, \ldots, \omega_{v_n} = a_{v_n}\right).$$

A medida produto, com marginais idênticas por exemplo, é uma medida uniforme.

Exemplo 4. *Seja* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. *A delta medida* $\delta_{0_{\mathbb{Z}}}$ *concentrada na configuração* $0_{\mathbb{Z}}$ *é uma medida invariante por translação.*

Definiremos um operador $\mathsf{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, assim, dado $\mu \in \mathcal{M}$ temos $\mu\mathsf{P} \in \mathcal{M}$. Para todo $t \in \mathbb{Z}_+$, denotaremos $\mu\mathsf{P}^{t+1} := (\mu\mathsf{P}^t)\mathsf{P}$, este operador P irá descrever a evolução do nosso *Automato Celular Probabilístico* (ACP). Consideramos ser um processo estocástico,

uma sequência de medidas $\mu, \mu\mathsf{P}, \mu\mathsf{P}^2, \mu\mathsf{P}^3, \ldots$, onde $\mu\mathsf{P}^t$ descreve a t-ésima aplicação do operador P em μ, sendo $t \geq 0$. Uma medida μ é chamada invariante para P quando $\mu\mathsf{P} = \mu$.

Diremos que o operador P é *ergódico* quando existe um único $\mu \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu\mathsf{P} = \mu \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \nu\mathsf{P}^t = \mu, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}.$$

Durante longo tempo, acreditava-se que a ergodicidade para um operador de percolação P, seria equivalente a afirmar o seguinte: se existe única mediada invariante μ para P, então P seria ergódico. Porém, a prova que esta proposição é falsa foi dada em [8], onde é apresentado um operador P com uma única medida invariante $\mu \in \mathcal{M}$ e alguma medida $\nu \in \mathcal{M}$ tal que $\lim_{t\to\infty} \nu\mathsf{P}^t \neq \mu$.

Se P não for ergódico, então dizemos que P é *não-ergódico*.

A partir deste ponto, apresentaremos uma definição da ação do operador P em medidas. Inicialmente definiremos sua ação sobre uma delta-medida, δ_x, onde $x \in \Omega$. Para a v-ésima componente de x, definimos a *distribuição de transição* e denotamos por $\theta_v(\cdot|x)$. Note que $\theta_v(\cdot|x)$ depende somente dos componentes de x, cujas suas coordenadas são vizinhos de v. Logo, podemos reescrevê-lo como o $\theta_v(\cdot|x_{V(v)})$ sendo $x_{V(v)}$ a restrição de x em $V(v)$. O valor de $\theta_v(\cdot|x_{V(v)})$ em $a \in \mathbb{A}$, será denotado por $\theta_v(a|x_{V(v)})$, ou seja, a probabilidade condicional na qual, após a aplicação do operador P, a v-ésima componente vai para o estado "a", se antes da aplicação a vizinhança de v estava no estado $x_{V(v)}$. Essa probabilidade é chamada *probabilidade de transição*.

O operador determinístico, D, leva configurações em configurações, enquanto o operador aleatório, P, transforma medidas de probabilidade em medidas de probabilidade. Porém, todo operador determinístico pode ser considerado como um operador aleatório degenerado que leva δ-medida em δ-medida, dessa forma, passando também a atuar no espaço das medidas de probabilidade. Neste caso, as probabilidades de transição serão

$$\theta_v\left(a|x_{V(v)}\right) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \ a = (x\mathsf{D})_v; \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Para fixar o entendimento de como P age em δ-medidas, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 5. *Sejam* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $v \in \mathbb{Z}$, $V(v) = \{v, v+1\}$,

$$\theta_v(\ 0 \mid x_v\ x_{v+1}\ ) \ = \begin{cases} \alpha & ,\ se\ x_v = x_{v+1}; \\ \beta & ,\ se\ x_v \neq x_{v+1} \end{cases} \quad e$$

$$\theta_v(\ 1 \mid x_v\ x_{v+1}\ ) \ = \begin{cases} 1-\alpha & ,\ se\ x_v = x_{v+1}; \\ 1-\beta & ,\ se\ x_v \neq x_{v+1}, \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in [0,1]$. *Note que* $\theta_v(0|x_v x_{v+1}) + \theta_v(1|x_v x_{v+1}) = 1$.

Tome $x \in \Omega$, *tal que*

$$x_v \ = \begin{cases} 0 & ,\ se\ v < 0; \\ 1 & ,\ se\ v \geq 0. \end{cases}$$

e, com δ_x *sendo a sua respectiva medida concentrada. Assim, aplicando a bem conhecida regra da probabilidade total, obtemos*

$$\begin{aligned} \delta_x \mathsf{P}(\omega_0 = 1) \ &= \ \delta_x(\omega_0 = 1, \omega_1 = 1)\ \theta_0(1|11) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_0 = 1, \omega_1 = 0)\ \theta_0(1|10) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_0 = 0, \omega_1 = 1)\ \theta_0(1|01) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_0 = 0, \omega_1 = 0)\ \theta_0(1|00) \\ &= \ \theta_0(1|11) = \ 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{2.5}$$

A identidade (2.5), descreve a frequência (probabilidade) do estado 1 na posição 0, após a ação do operador P em uma δ-medida concentrada em $x \in \Omega$. De forma mais geral, dados $x \in \Omega$, $v \in \mathbb{Z}^d$, $V(v)$ a vizinhança de v e $a_v \in \mathbb{A}$, obtemos

$$\delta_x \mathsf{P}\left(\omega_v = a_v\right) = \sum_{a_{V(v)} \in \mathbb{A}^{|V(v)|}} \delta_x\left(\omega_{V(v)} = a_{V(v)}\right) \theta_v\left(a_v | a_{V(v)}\right), \tag{2.6}$$

onde $|V(v)|$ é o número de elementos em $V(v)$. Informalmente falando, $\mathbb{A}^{|V(v)|}$ descreve todos os possíveis valores que as componentes vizinhas de v podem assumir. Em particular, se $V(v) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ então

$$|V(v)| = n \quad \text{e} \quad \mathbb{A}^{|V(v)|} = \{a_{V(v)} = (a_{v_1}, \ldots, a_{v_n});\ a_{v_1}, \ldots, a_{v_n} \in \mathbb{A}\}.$$

Além disso, fixados $a_{V(v)} \in \mathbb{A}^{|V(v)|}$ e $v \in \mathbb{Z}^d$, segue que

$$\sum_{a \in \mathbb{A}} \theta_v\left(a | a_{V(v)}\right) = 1.$$

Agora estenderemos, para um cilindro fino, a ideia formalizada em (2.6). Para tornar mais claro o entendimento da ação do operador P, no Apêndice C, retornamos ao Exemplo 5, porém, aplicamos P em um cilindro fino com exatamente duas posições fixadas $\{v_1, v_2\}$.

Tomando $F \subset \mathbb{Z}^d$ arbitrário, podemos obter uma generalização de (2.6), para um cilindro fino qualquer $C_F[a_F]$, na forma

$$\delta_x \mathsf{P}\left(\omega_F = a_F\right) = \sum_{a_{V(F)} \in \mathbb{A}^{|V(F)|}} \delta_x\left(\omega_{V(F)} = a_{V(F)}\right) \prod_{v \in F} \theta_v\left(a_v | a_{V(v)}\right) \tag{2.7}$$

Considerando (2.2), temos que a identidade (2.7) será 0 ou $\prod_{v \in F} \theta_v\left(a_v | a_{V(v)}\right)$. Nas identidades apresentadas no Exemplo 5, é fácil verificar que,

$$\delta_x \mathsf{P}(\omega_{-1}=1, \omega_o=0) \;\; = \;\; \delta_x \mathsf{P}(\omega_{-1}=1) \cdot \delta_x \mathsf{P}(\omega_o=0) \;\; , \text{ e,}$$

$$\delta_x \mathsf{P}(\omega_o=1, \omega_2=0) \;\; = \;\; \delta_x \mathsf{P}(\omega_o=1) \cdot \delta_x \mathsf{P}(\omega_2=0)$$

Este resultado nos faz questionar se dada uma delta medida, a qual é uma medida produto, a medida resultante após a aplicação do operador P, ainda é uma medida produto. De fato, dados $F \subset \mathbb{Z}^d$, $V(F) = \bigcup_{v \in F} V(v)$ sua vizinhança, e, $x \in \Omega$ sendo δ_x sua respectiva medida normalizada, temos que $\delta_x \mathsf{P}$ é uma medida produto, consequência direta de (2.7).

Neste sentido, apresentaremos uma fórmula explícita para o valor do operador P aplicado a uma medida arbitrária $\mu \in \mathcal{M}$ num cilindro fino qualquer, segue que

$$\mu \mathsf{P}\left(\omega_F = b_F\right) \;\; = \sum_{a_{V(F)} \in \mathbb{A}^{|V(F)|}} \mu\left(\omega_{V(F)} = a_{V(F)}\right) \prod_{v \in F} \theta_v\left(b_v | a_{V(v)}\right), \tag{2.8}$$

ou seja, obtemos uma generalização natural para a equação (2.7), dada por (2.8).

3 OPERADORES DE PERCOLAÇÃO

O fenômeno de percolação pode ser apresentado como a passagem de um fluido através de um meio poroso. Por exemplo, na extração de petróleo bruto, onde em alguns casos é feito um furo numa rocha, que tem porosidade, e neste furo é injetada água, esta água "empurra" o petróleo para fora do seu local de origem que flui através da rocha.

Desde a década de cinquenta [7], o estudo de percolação tem atraído e ainda atrai a atenção. Vários modelos matemáticos são propostos para estudar este fenômeno, os quais estimulam a criação de ferramentas teóricas.

Motivados pelo fenômeno de percolação, nos ACP foi proposto uma classe de operadores, chamados de *Operadores de Percolação*. Esses operadores podem apresentar um fenômeno importante conhecido por *transição de fase*.

Essa classe de operadores é apresentado como uma superposição de dois operadores: primeiro uma aplicação determinística por meio de um operador D, seguida por uma aplicação aleatória por meio de um operador R_α, onde $\alpha \in [0,1]$. Estes Operadores podem ser motivadas, associando-se a funções biológicas. Em [28], por exemplo, A. Toom estuda o comportamento de algumas redes de neurônios formais que possuem a propriedade de atividade espontânea, tal problema foi proposto em [25]. Por outro lado, em [30], A. Toom associa tais operadores às funções básicas de reprodução e morte de uma célula biológica. Neste caso, a aplicação determinística D representaria a reprodução celular e a aplicação aleatória R_α representaria a morte celular, ou seja, a cada passo de tempo em nosso processo as partículas do sistema se reproduzem deterministicamente e morrem aleatoriamente.

Sejam $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $n \geq 2$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathsf{D}_n : \Omega \to \Omega$ o operador determinístico, o

qual transforma qualquer configuração x em uma configuração $x\mathsf{D}_n$, seguindo a regra

$$(x\mathsf{D}_n)_v = \max\{x_{v+v_1}, \cdots, x_{v+v_n}\} \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Definiremos agora o operador aleatório, R_α. Ele é um ruído unilateral, onde após a sua ação cada partícula no estado 1 torna-se 0 com probabilidade α independentemente do que acontece com outras partículas. Também chamaremos o parâmetro $\alpha \in [0,1]$ de, *probabilidade de morte*.

Podemos adequar o operador determinístico a fim de ser possível efetuar a superposição

$$\mathsf{P}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n. \tag{3.2}$$

Para tanto, lembremos que qualquer operador determinístico pode ser considerado como um operador aleatório degenerado que leva δ-medida em δ-medida, com probabilidades de transição dadas em (2.4). Para $V(v) = \{v+v_1, \ldots, v+v_n\}$ e $a_{V(v)} \in \{0,1\}^n$, descreveremos as probabilidades de transição de P_n, onde sua respectiva distribuição de transição será denotada por $\theta_v^{(n)}(\cdot|x_{V(v)})$. Seja x_v a componente na posição v após a ação do operador P_n e

$$x_{v+v_1} = a_{v+v_1}, \ldots, x_{v+v_n} = a_{v+v_n}$$

o estado da sua vizinhança no passo de tempo anterior. Logo, se $a_{v+v_1} = \cdots = a_{v+v_n} = 0$, então $(x\mathsf{D}_n)_v = 0$. Como R_α transforma 1 em 0, concluímos que $\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) = 0$. Por outro lado, se existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_{v+v_i} = 1$, então $(x\mathsf{D}_n)_v = 1$. Este 1 será mantido (não se tornará 0) com probabilidade $1-\alpha$. Logo, $\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) = 1-\alpha$. De forma sucinta,

$$\begin{aligned} \theta_v^{(n)}\left(1|a_{V(v)}\right) &= \begin{cases} 0 \quad , & \text{se} \;\; a_{v+v_i} = 0 \;\; \text{para todo} \;\; i \in \{1, \ldots, n\} \\ 1-\alpha \; , & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad . \\ \theta_v^{(n)}\left(0|a_{V(v)}\right) &= 1 - \theta_v^{(n)}\left(1|a_{V(v)}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vejamos alguns resultados diretos para os operadores D_n e R_α.

Sobre R_α pode ser provado que, se $\alpha \in (0,1]$ então $\lim_{t\to\infty} \mu\mathsf{R}_\alpha^t = \delta_{0_\mathbb{Z}}$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$.

Sobre D_n temos que, $\lim_{t\to\infty} x\mathsf{D}_n^t = 0_\mathbb{Z}$, se $x = 0_\mathbb{Z}$, por outro lado, em alguns casos podemos obter $\lim_{t\to\infty} x\mathsf{D}_n^t = 1_\mathbb{Z}$, por exemplo, basta tomar $x = (x_v)_{v\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_v = 1$, para todo $v \in 2\mathbb{Z}$, onde $2\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros pares.

Diante disso, questionamos: O que ocorre com a frequência de 1's em $\mu \mathsf{P}_n^t$ quando $t \to \infty$? Esta resposta, será apresentada no teorema a seguir.

Definimos $\alpha^* \in (0,1)$, chamado de *valor crítico*, por

$$\alpha^* = \inf\{\ \alpha\ ; \lim_{t\to\infty} \mu \mathsf{P}_n^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}},\ \forall\ \mu \in \mathcal{M}\} \tag{3.4}$$

Teorema (da existência de um valor crítico [30]). *Considere $v \in \mathbb{Z}$, $|V(v)| = n > 1$ e P_n, definido em (3.2). Então, existe um valor crítico, $\alpha^* \in \left[\frac{1}{54}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, tal que:*

$$\begin{cases} a) \quad \alpha > \alpha^* \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t\to\infty} \mu \mathsf{P}_n^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}} \quad , \quad \forall\ \mu \in \mathcal{M} \\ b) \quad \alpha < \alpha^* \quad \Rightarrow \quad \delta_{1_{\mathbb{Z}}} \mathsf{P}_n^t(1) > 0,\ \forall\ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Segue do Teorema da existência de um valor crítico, que há um tipo de transição de fase entre os comportamentos de ergodicidade e não-ergodicidade do operador P_n.

3.1 Ordenação e monotonicidade

O uso de monotonicidade é amplo em várias áreas de estudo. Na análise real, por exemplo, quando introduzimos sequências, as monótonas são uma importante classe que estudamos. Em sistema de partículas interagentes, como nos processos de Stavskaya e de contato, o uso de monotonicidade é essencial na prova da ergodicidade.

Estabeleceremos uma ordenação parcial em $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ a qual é denotada por $\prec$. Esta é uma relação homogênea em Ω e satisfaz as condições de reflexiva, antissimétrica e transitiva. Assim, dados $x, y \in \Omega$, diremos que x *precede* y, e denotaremos por $x \prec y$, se $x_v \leq y_v$ para todo $v \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que um operador determinístico D é monótono quando

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad x\mathsf{D} \prec y\mathsf{D}. \tag{3.5}$$

Sejam $S, I \subset \Omega$ subconjuntos mensuráveis. Dizemos que

$$\begin{cases} S \text{ é } \textit{conjunto superior} \text{ quando} \quad (x \in S, x \prec y) \quad \Rightarrow \quad y \in S; \\ I \text{ é } \textit{conjunto inferior} \text{ quando} \quad (y \in I, x \prec y) \quad \Rightarrow \quad x \in I. \end{cases} \tag{3.6}$$

Neste sentido, dados $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, podemos introduzir uma relação de ordem parcial em $\mathcal{M}$, da seguinte forma

$$\mu \prec \nu \quad \Leftrightarrow \quad \mu(S) \leq \nu(S), \quad \forall\ S \ \text{ conjunto superior.}$$

Aqui $\prec$ é dado com respeito a ordem estocástica.

Lema 3.1.1. *Sejam $x, y \in \Omega$. Se $x \prec y$ então $\delta_x \prec \delta_y$.*

Prova. Sejam $x, y \in \Omega$ tal que $x \prec y$. Tome arbitrariamente um conjunto superior S. Por definição de δ-medida, teremos

$$\delta_x(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \delta_y(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in S, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, temos dois casos possíveis: por um lado, se $\delta_x(S) = 0$ então $\delta_x(S) \leq \delta_y(S)$; por outro lado, se $\delta_x(S) = 1$, teremos que $x \in S$, e como S é superior e $x \prec y$, temos que $y \in S$, então $\delta_y(S) = 1$. Logo, $\delta_x(S) \leq \delta_y(S)$.

Portanto, em ambos os casos, obtemos que $\delta_x(S) \leq \delta_y(S)$ para qualquer S superior. □

Lema 3.1.2. *Sejam $x, y \in \Omega$. Se $x \prec y$ e D é monótono então $\delta_x\mathsf{D} \prec \delta_y\mathsf{D}$.*

Prova. Como D é monótono e $x \prec y$ então $x\mathsf{D} \prec y\mathsf{D}$. Por outro lado, o lema 3.1.1 nos fornece que $\delta_{x\mathsf{D}} \prec \delta_{y\mathsf{D}}$ que é equivalente a $\delta_x\mathsf{D} \prec \delta_y\mathsf{D}$. □

Como já mencionado no capítulo 2, todo operador determinístico D é um operador aleatório degenerado que leva δ-medida em δ-medida, ver (2.4). Assim, usando os Lemas 3.1.1 e 3.1.2 podemos re-escrever (3.5) na forma

$$\delta_x \prec \delta_y \quad \Rightarrow \quad \delta_x\mathsf{D} \prec \delta_y\mathsf{D}.$$

Dizemos que um operador aleatório P é monótono quando, dados $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ teremos

$$\mu \prec \nu \quad \Rightarrow \quad \mu\mathsf{P} \prec \nu\mathsf{P}.$$

Sejam P e P^* operadores em $\mathcal{M}$. Dizemos que P *precede* P^*, denotamos $\mathsf{P} \prec \mathsf{P}^*$, se

$$\mu\mathsf{P} \prec \mu\mathsf{P}^*, \quad \forall\ \mu \in \mathcal{M}.$$

Seguem alguns resultados decorrentes da monotonicidade.

Lema (**da monotonicidade de um operador [30]**). *Sejam $x, y \in \Omega$. Um operador P com distribuição de transição $\theta_v(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, é monótono se, e somente se,*

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \theta_v(\ 1\ |x_{V(v)}) \leq \theta_v(\ 1\ |y_{V(v)}).$$

Lema (**da monotonicidade entre operadores [30]**). *Dados $x \in \Omega$ e dois operadores P, P^* em $\mathcal{M}$ com as distribuições de transição $\theta_v(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, $\theta^*_v(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, respectivamente. Então, $\mathsf{P} \prec \mathsf{P}^*$ se, e só se,*

$$\theta_v(\ 1\ |x_{V(v)}) \leq \theta^*_v(\ 1\ |x_{V^*(v)})\ , \quad \forall\ v \in \mathbb{Z}.$$

Dado a vizinhança $V = \{0, \ldots, n-1\}$, denotaremos o operador determinístico D_n, definido em (3.1), por $\overline{\mathsf{D}}_n$, de modo que, $(x\overline{\mathsf{D}}_n)_v = \max\{x_v, \ldots, x_{v+n-1}\}$. Além disso, definimos um operador aleatório de ruído unilateral, com probabilidade de morte α , agindo de forma independente em cada partícula, por R_α. Assim, analogamente ao operador de percolação definido em (3.2), obtemos

$$\overline{\mathsf{P}}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \overline{\mathsf{D}}_n \tag{3.7}$$

Lema 3.1.3. *Sejam $x \in \Omega$ e $\delta_x \in \mathcal{M}$. Então, dados $m, n \in \mathbb{N}$, teremos*

$$m < n \quad \Rightarrow \quad \delta_x\overline{\mathsf{D}}_m \prec \delta_x\overline{\mathsf{D}}_n.$$

Prova. Sendo $m < n$, temos que $\{x_v, \ldots, x_{v+m-1}\} \subset \{x_v, \ldots, x_{v+n-1}\}$, daí

$$(x\overline{\mathsf{D}}_m)_v = \max\{x_v, \ldots, x_{v+m-1}\} \leq \max\{x_v, \ldots, x_{v+n-1}\} = (x\overline{\mathsf{D}}_n)_v,$$

além disso, essa desigualdade vale para qualquer $v \in \mathbb{Z}$, logo, $x\overline{\mathsf{D}}_m \prec x\overline{\mathsf{D}}_n$. Segue que, aplicando o Lema 3.1.1, obteremos $\delta_{x\overline{\mathsf{D}}_m} \prec \delta_{x\overline{\mathsf{D}}_n}$ que é equivalente a $\delta_x\overline{\mathsf{D}}_m \prec \delta_x\overline{\mathsf{D}}_n$. □

Lema 3.1.4. *Sejam $x \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $\overline{\mathsf{P}}_n$ é monótono.*

Prova. Sejam $x, y \in \Omega$ tal que $x \prec y$. De (3.3), temos que as probabilidades de transição de um operador de percolação, $\overline{\mathsf{P}}_n$, são dadas por

$$\overline{\theta}^{(n)}_v\left(1|a_{V(v)}\right) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se } \ a_{v+i} = 0 \ \text{ para todo } \ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \\ 1-\alpha\ , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, por um lado, se $\overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|x_{V(v)}\right) = 0$ então $\overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|x_{V(v)}\right) \leq \overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|y_{V(v)}\right)$, por outro lado, se $\overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|x_{V(v)}\right) = 1-\alpha$, então existirá $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $x_{v+i} = 1$, porém $x \prec y$, segue que, $1 = x_{v+i} \leq y_{v+i}$, o que implica que, $y_{v+i} = 1$, consequentemente, $\overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|y_{V(v)}\right) = 1-\alpha$, ou seja, $\overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|x_{V(v)}\right) \leq \overline{\theta}_v^{(n)}\left(1|y_{V(v)}\right)$. Portanto, aplicando o Lema da monotonicidade de um operador, concluímos que $\overline{\mathsf{P}}_n$ é monótono. □

Claro que para qualquer $\mu \in \mathcal{M}$, temos $\mu \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$. Através do Lema 3.1.4, $\overline{\mathsf{P}}_n$ é monótono. Logo, $\mu\overline{\mathsf{P}}_n^t \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\overline{\mathsf{P}}_n^t$ para cada valor t. Assim, se $\lim_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\overline{\mathsf{P}}_n^t(1) = 0$ então $\lim_{t\to\infty} \mu\overline{\mathsf{P}}_n^t(1) = 0$. Implicando que $\mu\overline{\mathsf{P}}_n^t$ converge para $\delta_{0_{\mathbb{Z}}}$. Como isso ocorre para qualquer distribuição inicial, temos que $\overline{\mathsf{P}}_n$ é ergódico. Por outro lado, se tivermos outro operador Q tal que $\mathsf{Q} \prec \overline{\mathsf{P}}_n$, teremos $\mu\mathsf{Q}^t \prec \mu\overline{\mathsf{P}}_n^t$. Logo, se $\mu\mathsf{Q}^t(1)$ for sempre positiva, então $\mu\mathsf{Q}^t$ não converge para $\delta_{0_{\mathbb{Z}}}$. Consequentemente $\mu\overline{\mathsf{P}}_n^t$ não converge para $\delta_{0^{\mathbb{Z}}}$ logo $\overline{\mathsf{P}}_n$ não é ergódico.

Lema 3.1.5. *Sejam $x \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $V = \{0,\ldots,n-1\}$, $W \subset V$ não vazio e Q_W um operador em Ω com vizinhança W. Então, $\mathsf{Q}_W \prec \overline{\mathsf{P}}_n$. Além disso,*

(a) Se $\overline{\mathsf{P}}_n$ é ergódico então Q_W é ergódico;

(b) Se Q_W é não ergódico então $\overline{\mathsf{P}}_n$ é não ergódico.

Prova. Tome $v \in \mathbb{Z}$. Sabemos que as probabilidades de transição de Q_W, conforme (3.3), são dadas por

$$\overline{\theta}_v^{(W)}\left(1|a_{W(v)}\right) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se } \ a_{v+i} = 0 \ \text{ para todo } \ i \in W, \\ 1-\alpha \ , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, por um lado, se $\overline{\theta}_v^{(W)}\left(1|x_{W(v)}\right) = 0$ então $\overline{\theta}_v^{(W)}\left(1|x_{W(v)}\right) \leq \overline{\theta}_v^{(V)}\left(1|x_{V(v)}\right)$, por outro lado, se $\overline{\theta}_v^{(W)}\left(1|x_{W(v)}\right) = 1-\alpha$, então existirá $i \in W$ tal que $x_{v+i} = 1$, porém $W \subset V$, ou seja, $i \in V$ tal que $x_{v+i} = 1$, segue que $\overline{\theta}_v^{(V)}\left(1|x_{V(v)}\right) = 1-\alpha$, consequentemente, $\overline{\theta}_v^{(W)}\left(1|x_{W(v)}\right) \leq \overline{\theta}_v^{(V)}\left(1|x_{V(v)}\right)$. Daí, aplicando o Lema da monotonicidade entre operadores, concluímos que $\mathsf{Q}_W \prec \overline{\mathsf{P}}_n$, logo,$\delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\mathsf{Q}_W)^t(1) \leq \delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\overline{\mathsf{P}}_n)^t(1), \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{Z}_+$. Portanto,

Se $\lim_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\overline{\mathsf{P}}_n)^t(1) = 0$, segue que $\lim_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\mathsf{Q}_W)^t(1) = 0$, provando assim (a).

Se $\lim_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\mathsf{Q}_W)^t(1) > 0$, segue que $\lim_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\overline{\mathsf{P}}_n)^t(1) > 0$, provando assim (b).

□

4 PROCESSO DE STAVSKAYA

O processo de Stavskaya é um operador de percolação com dois vizinhos, introduzido por Stavskaya e Piatetski-Shapiro [26]. Foi um dos primeiros sistemas multicomponentes com interação local para o qual foi rigorosamente comprovada a existência de transição de fase [28, 31]. Entretanto, a localização exata de seu valor crítico ainda permanece como um problema em aberto [21].

Em [9] é mencionado que o processo de Stavskaya é um ACP muito semelhante ao processo de contato. Ainda em [9], destaca-se que o referido processo não é tão realista para ser totalmente útil em discussões sobre a física e a construção de mecânica estatística de não equilíbrio; por outro lado, sua simplicidade, combinada, com a presença de uma transição de fase, o torna interessante a fim de introduzir alguns conceitos.

O processo de Stavskaya é um dos exemplo mais simples de Operador de Percolação, de modo que, $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $V = \{0,1\}$. Diante destas hipóteses, denotaremos o operador determinístico, $\overline{\mathsf{D}}_2$, por D_S e o operador de percolação, $\overline{\mathsf{P}}_2$, por $\mathsf{S} = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_\mathsf{S}$, na qual passaremos a chamar de *Operador de Stavskaya*.

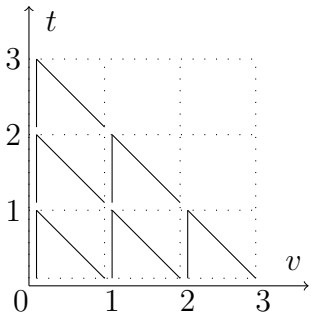
Nas seções seguintes, iremos mostrar representações gráficas do Processo de Stavskaya, bem como, as estimativas inferior e superior do intervalo que contém o valor crítico para o referido operador, para isso usaremos a teoria de percolação orientada aplicada as representações gráficas. Neste sentido, com o intuito de tornar nosso texto auto-contido, descrevemos alguns conceitos de percolação em $\mathbb{Z}^2$, ver o Apêndice A.

4.1 Construção gráfica vértice-elo do operador S

Iremos associar o Operador de Stavskaya a uma percolação orientada. Para tanto, faremos a seguinte analogia: Considere uma fonte externa ao plano orientado alimentando todos os vértices iniciais com um determinado líquido; considere os vértices como sendo comportas que podem estar *abertas* ou *fechadas*, permitindo ou não a passagem do líquido; e, considere os elos como sendo tubulações que escoam um determinado líquido de um vértice a outro.

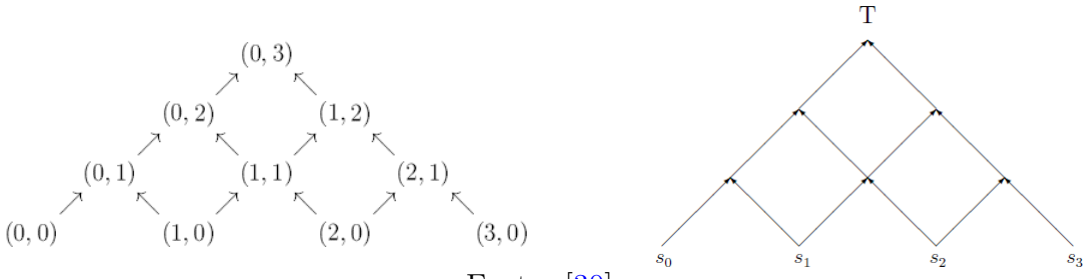
Nesse contexto, os elos representam o operador determinístico, $\mathsf{D_S}$, e os vértices representam o operador probabilístico, R_α. O grafo de percolação será formado pelos vértices $(v,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ onde no eixo v teremos a distribuição dos pontos do ACP e no eixo t teremos a evolução temporal do sistema. Conforme podemos observar na Figura 4.1

Figura 4.1: Representação do Grafo no plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.



Note que, os elos conectam cada vértice aos seus vizinhos no tempo anterior, formando um reticulado triangular, de modo que para uma melhor visualização da evolução do Grafo adotaremos a representação constante na Figura 4.2.

Figura 4.2: Evolução do processo Stavskaya até o vértice $(v = 0, t = 3) := \mathrm{T}$.



Fonte: [30]

Assumimos que os elos estarão sempre abertos na direção da evolução temporal, ou seja, nas direções Sudoeste-Nordeste $\nearrow$ e Sudeste-Noroeste $\nwarrow$. Em relação aos vértices, atribuiremos a cada um deles o estado 1 (aberto) e 0 (fechado). De acordo com o operador R_α, a configuração dos vértices terá distribuição independente e identicamente distribuída, cuja distribuição é uma Bernoulli de parâmetro α.

Um caminho formado pela sequência de vértices que liga um determinado vértice $(u, 0)$ até o vértice (v, t), é dito ser aberto, se todos os seus vértices estiverem abertos. Note que, se existe partícula no ponto " v " no tempo " t ", então $\{(u, s); v \leq u \leq v+t-s, \text{ e } 0 \leq s \leq t\}$ fornece todos os vértices dos possíveis caminhos até (v, t). Neste sentido, definimos

$$\Gamma_{\mathsf{Ds}}^{(v,t)} = \{\ \gamma\ ;\ \gamma \text{ é caminho de } (u, 0) \text{ até } (v, t), \text{ onde } u \in [v, v+t]\}\,. \tag{4.1}$$

De modo que, (4.1) tem sua representação gráfica ilustrada na Figura 4.2.

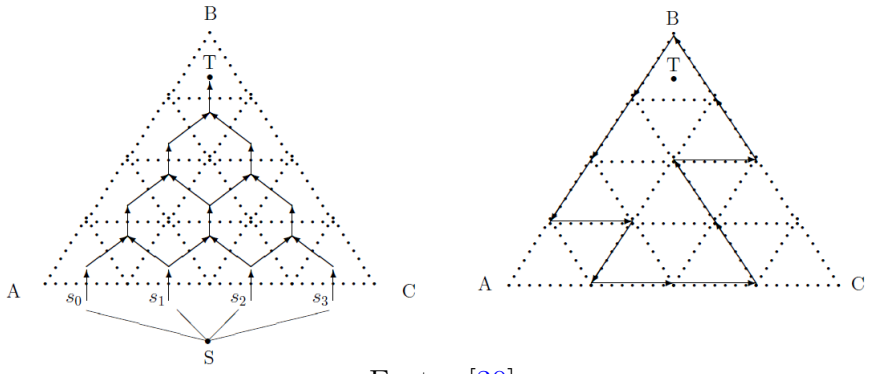
Lema (da existência de um caminho aberto [30]). *Em um processo de percolação com todos os vértices abertos no tempo $t = 0$, se existir um vértice (v, t) aberto então existirá um caminho aberto $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{Ds}}^{(v,t)}$.*

4.2 Construção gráfica elo-elo do operador S

Sairemos de uma percolação vértice-elo para uma percolação elo-elo. O alongamento dos vértices é feito de tal forma que eles se tornarão elos verticais, nos quais representaremos por " 1 " se abertos e por " 0 " se fechados. Assim, obtemos um grafo reticulado hexagonal formados por elos verticais e diagonais, que passará a ser o grafo original.

Na Figura 4.3, apresentamos dois fragmentos, para o tempo variando de zero até três, da construção gráfica associada a evolução do Processo de Stavskaya. No lado esquerdo da figura, a estrutura hexagonal descreve a construção gráfica após a substituição dos vértices por arestas verticais e inclinação das arestas o T indica a arestas associada ao vértice na posição 0 no tempo 3. As linhas pontilhadas descrevem o grafo dual associado. No lado direito da figura, exibimos um contorno autoevitante para este grafo.

Figura 4.3: Evolução do processo Stavskaya projetada no grafo dual.



Fonte: [30]

Além disso, os elos diagonais estarão sempre abertos, e os elos verticais estarão abertos com probabilidade $1-\alpha$ ou fechados com probabilidade α, independente do que ocorre em cada posição. Na Figura 4.3 foram ilustrados o grafo que representa a percolação elo-elo e seu respectivo dual. Ainda na Figura 4.3, supomos inicialmente que os vértices $(v,0)$ estão no estado 1, isto é, há partículas em todas as componentes, vemos que o evento de que exista uma partícula no ponto 0 no tempo 3 em nosso processo é igual ao evento de que exista um caminho aberto a partir de um dos elos s_0, s_1, s_2, s_3 até o vértice $\mathrm{T} := (0,3)$. Então, de acordo com a regra A.2 do Apêndice A, como os elos diagonais do grafo original estarão sempre abertas nas direções $\nwarrow$ e $\nearrow$, segue que os elos diagonais do grafo dual estarão sempre fechados nas direções $\swarrow$ e $\nwarrow$. Pela mesma razão, como os elos verticais do grafo original estarão abertos com probabilidade $1-\alpha$ na direção $\uparrow$, então os elos horizontais do grafo dual estarão fechados com probabilidade $1-\alpha$ na direção $\rightarrow$.

4.3 Valor crítico do operador de Stavskaya

O teorema a seguir é um caso especial do Teorema da existência de um valor crítico, ver o capítulo 3. Contudo, optamos por apresentar a prova deste, pois o mesmo faz uso de argumentos apresentados nas seções 4.1 e 4.2, que são importantes para o entendimento do problema. Destacamos que quando $|V(v)| = 2$, o Teorema 5.2.3 mostra que o limite inferior para α^* independe da posição dos vizinhos. Contudo, um limite inferior para α^* descrita como função de n e que tenda para 1 quando n aumenta não é conhecido.

Teorema (da existência de um valor crítico não trivial de S [30]). *Considere α^* definido em (3.4) e $V = \{0,1\}$ tal que $V(v) = \{v, v+1\}$ para todo $v \in \mathbb{Z}$. Então, para o Operador de Stavskaya, $\alpha^* \in \left[\frac{1}{54}, \frac{1}{2}\right]$, e temos que:*

$$\begin{cases} a) & \alpha > \alpha^* \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{S}^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}} \\ b) & \alpha < \alpha^* \quad \Rightarrow \quad \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{S}^t(1) > 0, \ \forall\ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prova. Observe que cada vértice tem a probabilidade $1-\alpha$ de estar aberto, e como vimos no Lema da existência de um caminho aberto, se o ponto $(0,t)$ está aberto, então existirá um caminho aberto $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{Ds}}^{(v,t)}$ onde a probabilidade de termos γ é $(1-\alpha)^t$. Por outro lado, podem existir vários outros caminhos abertos até $(0,t)$, neste sentido, é fácil verificar que teremos não mais que 2^t possíveis caminhos abertos distintos. Portanto, a probabilidade de existir um caminho aberto até o vértice $(0,t)$ será menor ou igual que $2^t(1-\alpha)^t$. Assim,

$$\mathbb{P}\left(\exists \text{ caminho aberto } \gamma \in \Gamma_{\mathsf{Ds}}^{(v,t)}\right) \leq [(1-\alpha)2]^t \to 0, \qquad \text{quando} \quad t \to \infty \quad \text{e} \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{S}^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}}$. Isso prova o item $a)$ do teorema.

Agora mostraremos o item $b)$. De acordo com o Lema do grafo dual (ver Apêndice A), não há percolação no grafo original se há um contorno aberto neste grafo cercando T e indo na direção positiva (no sentido anti-horário). Estamos interessado em todo contorno que começa e termina no ponto mais alto, representado por B na Figura 4.3. Logo,

$$\mathbb{P}\left(\exists \text{ contorno}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \cdot \alpha^k$$

onde Q_k é o número de tais contornos com k passos horizontais ($\rightarrow$).

Todo contorno tem números de passos iguais em todas as três direções, com efeito, como os contornos são caminhos fechados e auto-evitantes, se em um destes dados contornos há exatamente k passos na direção $(0,-1)$ serão necessários exatamente k passos na direção $(-1,1)$ e k na direção $(1,0)$ para que o vetor resultante desta soma seja nulo, dessa forma teremos $3k$ passos. Como cada passo de um contorno tem somente três possíveis direções, $Q_k \leq 3^{3k}$, segue que, se $\alpha < \frac{1}{54}$, obteremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{3k} \cdot \alpha^k = \frac{27\alpha}{1-27\alpha} < 1\ ,$$

ou seja, se $\alpha < \dfrac{1}{54}$, então

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ percolação no grafo original}\right] = \mathbb{P}\left[\nexists \text{ contorno}\right] > 0.$$

Portanto, provamos que $\dfrac{1}{54} < \alpha^* < \dfrac{1}{2}$.

□

Além disso, é possível obter um resultado mais geral para o item a) do Teorema da existência de um valor crítico de S, a saber, se $\alpha > \frac{1}{2}$ então $\lim_{t\to\infty} \mu\mathsf{S}^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}}$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$. Com efeito, como $\mu \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ para qualquer medida $\mu \in \mathcal{M}$, e como o Lema 3.1.4 nos fornece que o Operador de Stavsvaya é monótono, logo, $\mu\mathsf{S}^t \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{S}^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Este resultado mostra que S é ergódico, para $\alpha > \frac{1}{2}$.

Para o processo de Stavskaya, o valor exato de α^* não é conhecido. Porém, já existem na literatura estimativas melhores, por exemplo, em [31] mostrou-se que $\alpha^* \in (0.09, 0.323)$, e revisitando o método usado em [31], Ramos et. al. [21], obtiveram a estimação para o limite inferior maior que aquela conhecida até aquele momento, que era 0.09, obtendo um novo melhor limite inferior $0.11 < \alpha^*$. Também foram obtidos resultados numéricos, neste caso, Mendonça [18] obteve a aproximação $\alpha^* \approx 0.29450(5)$ através de simulação computacional, utilizando o método de Monte Carlo.

5 TEOREMA PRINCIPAL

Neste capítulo enunciaremos nosso maior resultado, o qual denotaremos por Teorema Principal, e apresentaremos uma prova, dividida em duas partes, uma devotada para a prova do comportamento ergódico e outra para o comportamento não ergódico do operador de percolação P_n, para $n \geq 2$, agindo no espaço de distribuições sobre $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definimos,

$$\begin{cases} h(n,\alpha) := n - 1 - 2\alpha - (n+1)\alpha^2 - \alpha^6 - \alpha^{2(n-1)} \\ \alpha_n \in (0,1) \quad \text{tal que} \quad h(n,\alpha_n) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Teorema Principal. *Sejam α_n definido em (5.1), $v \in \mathbb{Z}$, $|V(v)| = n$ e P_n definido em (3.2). Então, existe valor crítico $\alpha^* \in [0,113, \alpha_n]$, tal que*

(TP.1) Se $\alpha < \alpha^*$, então $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}_n^t(1) > 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $\nu \in \mathcal{M}$ tal que

$$\nu\mathsf{P}_n = \nu \quad e \quad \nu(1) > 0;$$

(TP.2) Sejam $2 \leq n_1 < n_2$. Logo, $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$ e $\alpha_n \to 1$ quando $n \to \infty$

(TP.3) Se $\alpha > \alpha^*$, então $\lim_{t\to\infty} \mu\mathsf{P}_n^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}}$, para todo $\mu \in \mathcal{M}$;

Note que, α_n depende somente de n, não depende da posição dos vizinhos. Além disso, mostramos na proposição 5.3.3 que α_n é menor que $\dfrac{n-1}{n+1}$.

5.1 Novas estimações para o limite inferior de α^*

A seguir, mostraremos novas abordagens para se obter o limite inferior do valor crítico do operador de Stavskaya.

Tomemos a aproximação de Stirling (ver [1]) para o fatorial de $k \in \mathbb{N}$,

$$k! = \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{\theta}{12k}}, \quad \text{onde } \ k > 0 \ \text{ e } \ \theta \in (0,1).$$

Seja $g(k,\theta) = e^{\frac{\theta}{12k}}$. Note que $g(k,0) = 1$, $g(k,1)$ é uma função decrescente como função de k e $g(k,1) > 1$. Além disso, $\lim_{k\to\infty} g(k,1) = 1$, logo

$$\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \leq k! \leq \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k}},$$

bem como, $\sqrt{2\pi} \cdot g(2,1) \approx 2.617 < e$, daí

$$\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k}} \leq e \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Obtemos assim, limites superior e inferior para o fatorial de $k \in \mathbb{N}$, expressas na forma

$$\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \leq k! \leq e \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k. \tag{5.2}$$

No Lema 5.1.1, utilizaremos uma metodologia para estimar um limite inferior para α^*, na qual nomearemos de método da *estimação fatorial*.

Lema 5.1.1. *Sejam α^* definido em (3.4), $v \in \mathbb{Z}$ e $V(v) = \{v, v+1\}$. Então, o Operador de Stavskaya tem um valor crítico, $\alpha^* > \dfrac{1}{28}$.*

Prova. Utilizando a representação do processo de Stavskaya pela percolação elo-elo, vemos que em um contorno o número de passos $\swarrow$, $\rightarrow$ e $\nwarrow$ são iguais, de modo que cada contorno (começando e terminando num mesmo vértice) terá $3k$ passos. Assim, podemos estimar um limite superior para o número de contornos com $3k$ passos, Q_k.

Utilizaremos permutação com elementos repetidos de $3k$ elementos com três tipos de elementos ($\swarrow$, $\nwarrow$ e $\rightarrow$) possuindo o mesmo número de repetições, segue que, $Q_k \leq \dfrac{(3k)!}{k! \cdot k! \cdot k!}$.

Logo, usando a desigualdade (5.2), obteremos $\dfrac{(3k)!}{(k!)^3} \leq \dfrac{e \cdot \sqrt{3} \cdot (27)^k}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3 \cdot k}$. Além disto, cada contorno com $3k$ passos possui exatamente k passos do tipo $\rightarrow$. E, pela nossa construção gráfica este contorno estará aberto com probabilidade α^k. Assim,

$$\mathbb{P}(\exists \text{ contorno}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \cdot \alpha^k \leq \frac{e\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(27\alpha)^k}{k}.$$

Por outro lado, da expansão em série de Taylor, temos que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$. Sabemos que a série de taylor de $\ln(1+x)$, converge no intervalo aberto $(-1,1)$, e que, se $x \in (-1,0)$, então $\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k}$. Logo, fazendo $x = -27\alpha$, teremos $\alpha \in \left(0, \frac{1}{27}\right)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(27\alpha)^k}{k} = -\ln(1-27\alpha)$, segue que,

$$\frac{e\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(27\alpha)^k}{k} < 1 \text{ se } \alpha < \frac{1 - e^{-\frac{(\sqrt{2\pi})^3}{e\sqrt{3}}}}{27} \approx 0,0357 \equiv \frac{1}{28}.$$

Portanto, $\alpha^* > \frac{1}{28}$.

□

Iremos, a partir deste ponto, exibir uma outra metodologia a fim de estimar um limite inferior de α^*, na qual nomearemos de método da *estimação por matriz de adjacência*. Antes disso, precisaremos de alguns elementos, os quais descreveremos.

Seja G um grafo, com vértices em $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e arestas em

$$A(G) = \{(v_i v_j);\ v_i, v_j \in V(G) \text{ são vértices adjacentes}\}.$$

Dado um grafo G, definimos sua matriz de adjacência por $M = (m_{v_i v_j})_{v_i, v_j \in V(G)}$ onde

$$m_{v_i v_j} = \begin{cases} 1\ , & \text{se } (v_i v_j) \in A(G) \\ 0\ , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

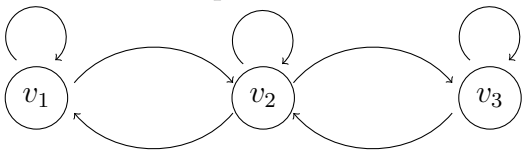
Um caminho em um grafo G de vértices adjacentes $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}\}$ é dado por

$$m_{v_{i_0} v_{i_1}} = m_{v_{i_1} v_{i_2}} = \cdots = m_{v_{i_{k-1}} v_{i_k}} = 1.$$

Lema (da quantificação de caminhos num grafo [2, 5]). *Sejam M a matriz de adjacência do grafo G e M^n a matriz obtida pelo produto, n vezes, de M por ela mesma. Então, o elemento $m^{(n)}_{v_i v_j}$ na posição (i,j) da matriz M^n, fornece o número de caminhos de comprimento n iniciando no vértice v_i e terminando no vértice v_j.*

Seja $M^n = (m^{(n)}_{v_i v_j})$, onde o elemento $m^{(n)}_{v_i v_j}$ na posição (i,j) da matriz M^n indica o número de caminhos distintos de comprimento n entre v_i e v_j, vértice do grafo G. Claramente, se um caminho entre v_i e v_j tem comprimento $n-1$. Então, há neste caminho n vértices. Faremos a ilustração deste conceito por meio do grafo descrito na Figura 5.1.

Figura 5.1: Grafo de um passeio aleatório com três estados



A matriz de adjacência associada a Figura 5.1 é $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e o polinômio característico é $-\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-1$. Logo, os autovalores de M são $\{1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$. Como M é diagonalizável, temos que existirá uma matriz inversível B de autovetores e uma matriz diagonal A de autovalores tais que $M = BAB^{-1}$, logo $M^n = BA^nB^{-1}$. Sendo,

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (1+\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \text{ e } \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{4} & 0 & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Portanto, as identidades em (5.3), nos fornece que

$$m_{v_1v_3}^{(n)} = \frac{-2+(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n}{4} \tag{5.4}$$

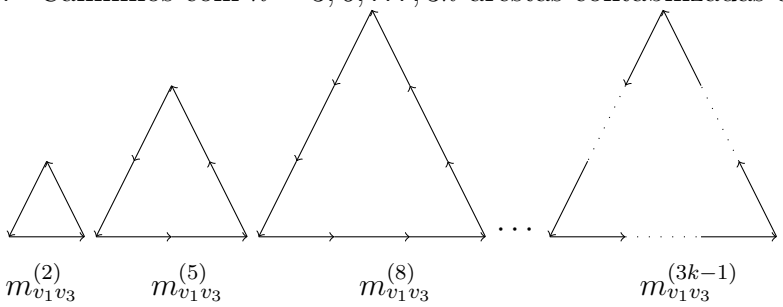
Agora, estabeleceremos uma relação entre o grafo na Figura 5.1 e os contornos da representação planar do processo de Stavskaya. Relembrando a representação gráfica do processo de Stavskaya pela percolação elo-elo, notaremos que num contorno com $3k$ passos teremos k do tipo $\swarrow$, k do tipo $\rightarrow$ e k do tipo $\nwarrow$. Além disso, o primeiro passo é do tipo $\swarrow$ e o último passo é do tipo $\nwarrow$. Como os caminhos são auto-evitantes, teremos

$$\begin{cases} \text{Após o tipo } \swarrow \text{ pode haver apenas o tipo } \rightarrow \text{ ou o tipo } \swarrow ; \\ \text{Após o tipo } \rightarrow \text{ pode haver apenas o tipo } \swarrow \text{ ou o tipo } \rightarrow \text{ ou o tipo } \nwarrow ; \\ \text{Após o tipo } \nwarrow \text{ pode haver apenas o tipo } \rightarrow \text{ ou o tipo } \nwarrow . \end{cases} \tag{5.5}$$

Representaremos $\swarrow$, $\rightarrow$, e, $\nwarrow$ pelos vértices v_1, v_2, e, v_3, respectivamente. Note que $m_{v_1v_3}^{(n-1)}$ contabiliza todos os caminhos com n vértices começando em v_1 e terminando em v_3. Mas, há outros caminhos que não são contornos, por exemplo, $v_1v_1v_1v_1v_2v_3$ o qual é contada em $m_{v_1v_3}^{(5)}$.

Na Figura 5.2, apresentamos contornos (no grafo dual) considerando $3, 6, \ldots, 3k$ arestas. Sob cada um dos contornos, é colocado $m_{v_1v_3}^{(3k-1)}$, o qual indica o majorante da quantidade de contornos com k arestas de cada tipo.

Figura 5.2: Caminhos com $n = 3, 6, \ldots, 3k$ arestas contabilizadas em $m_{v_1v_3}^{(n-1)}$.



Lema 5.1.2. *Sejam α^* definido em (3.4), $v \in \mathbb{Z}$ e $V(v) = \{v, v+1\}$. Então, o Operador de Stavskaya tem um valor crítico,*

$$\alpha^* > 0,064.$$

Prova. Usando o Lema da quantificação de caminhos de um grafo, com $n = 3k-1$, a partir da identidade (5.4) teremos

$$m_{v_1v_3}^{(3k-1)} = \frac{(1+\sqrt{2})^{3k-1} + (1-\sqrt{2})^{3k-1} - 2}{4}.$$

Pelo que foi exposto até este ponto, o número de contornos com $3k$ passos, Q_k, é limitado superiormente por $m_{v_1v_3}^{(3k-1)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists \text{ contorno}) &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} m_{v_1v_3}^{(3k-1)} \alpha^k \\ &< \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2\alpha}{1-(1+\sqrt{2})^3\alpha} + \frac{(1-\sqrt{2})^2\alpha}{1-(1-\sqrt{2})^3\alpha} - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nesta expressão há três assíntotas verticais, a saber: $\alpha \in \left\{1, \frac{1}{(1+\sqrt{2})^3}, \frac{1}{(1-\sqrt{2})^3}\right\}$. Sendo α uma probabilidade, então α não pode ser negativa e no caso em que α é 1 fica trivial, logo, nosso interesse é saber o que ocorre no intervalo $\left(0, \frac{1}{(1+\sqrt{2})^3}\right)$. Pode-se provar que neste intervalo a expressão (5.6) é positiva e monótona crescente em função de α. Assim, Tomando $\alpha = 0,064$, (5.6) assume o valor $0,906$, o qual é menor que 1.

□

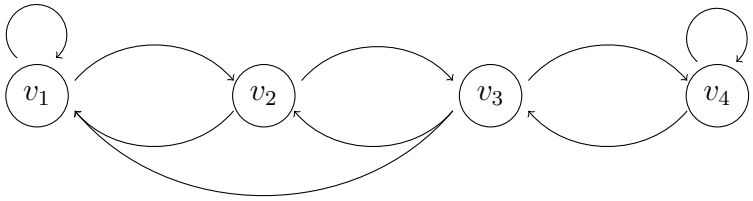
Na prova do Lema 5.1.1, onde utilizamos o método da aproximação por fatorial, listamos todos os caminhos que possuem k passos para cada tipo, totalizando $3k$ passos. Por outro lado, na prova do Lema 5.1.2, onde utilizamos o método da aproximação por matriz de adjacência, enumeramos o total de caminhos que começam com seta para baixo, e terminam com seta para cima, desde que não ocorra de maneira seguida: seta para baixo seguida de seta para cima e nem seta para cima seguida de seta para baixo.

Embora nos caminhos, as combinações v_1v_3 e v_3v_1 não possam ocorrer, não há restrição sobre a quantidade de cada tipo de passo no caminho de comprimento $3k$, onde buscamos ter k de cada tipo. Por exemplo, podemos ter a sequencia de passos

$$\underbrace{v_1v_1v_1\ldots v_1}_{3k-2}v_2v_3,$$

o qual certamente não é um contorno. Neste sentido, na Figura 5.3, apresentaremos outra representação de grafo satisfazendo (5.5), ou seja, iremos inserir mais uma restrição, a saber a sequência $\swarrow \rightarrow \nwarrow$ não poderá acontecer, excluindo o caso em que $k = 1$. Representaremos $\swarrow$, $\rightarrow$, $\rightarrow$, e, $\nwarrow$ pelos vértices v_1, v_2, v_3, e, v_4, respectivamente. Note que, os vértices v_2 e v_3 estão ambos associados a $\rightarrow$.

Figura 5.3: Grafo satisfazendo (5.5) com restrição a sequência $\swarrow \rightarrow \nwarrow$.



Introduziremos uma relação entre contornos e caminhos em grafos. Em geral, o contorno não pode ser descrito exatamente pelo caminho no grafo. Mas, podemos estabelecer uma correspondência entre tal contorno e um caminho. O Lema 5.1.3 vai nesta direção. Na Figura 5.2, considerando da esquerda para a direita, o terceiro contorno não pode ser descrito diretamente pelo caminho no grafo representado na Figura 5.3. Mas, somos capazes de exibir um representante para ele.

Lema 5.1.3. *O número de caminhos no grafo da Figura 5.3 que inicia no vértice v_1 e termina no vértice v_4 com comprimento $3k-1$ é maior que o número de contornos com $3k$ passos no processo de Stavskaya.*

Prova. Tomemos um caminho que inicia no vértice v_1 e termina no vértice v_4, o qual possui comprimento $3k-1$. Tal caminho é dado pela sequência de vértices

$$v_1 v_{i_2} \dots v_{i_{3k-1}} v_4 \quad \text{onde} \quad i_2, \dots, i_{3k-1} \in \{1,2,3,4\} \tag{5.7}$$

e, satisfaz as condições impostas pelo grafo na Figura 5.3.

Note que, para qualquer fragmento de (5.7) iniciando no vértice v_1 e terminando no vértice v_4, cujo todos os vértices intermediários são pertencentes a $\{v_2, v_3\}$, teremos uma quantidade par de vértices compondo este fragmento, logo, os vértices intermediários serão da forma $v_2 v_3 v_2 v_3 \dots v_2 v_3$.

Agora Tomemos qualquer contorno no processo de Stavskay o qual satisfaz (5.5). Sempre haverá um fragmento deste contorno da forma

$$\swarrow \ \rightarrow^n \ \nwarrow \tag{5.8}$$

com $\rightarrow^n$ denotando, $\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow$, n vezes. Se n for par, associamos (5.8) com a sequência de vértices $v_1 v_2 v_3 v_2 v_3 \dots v_2 v_3 v_4$. Porém, se n for ímpar associamos (5.7) com

$$\swarrow \ \rightarrow^{n-1} \ \nwarrow \ \nwarrow$$

onde este fragmento é associado com $v_1 v_2 v_3 v_2 v_3 \dots v_2 v_3 v_4 v_4$.

□

Em comparação ao Lema 5.1.2, o Lema 5.1.4 exibe uma melhor estimativa superior para o número de contornos.

Lema 5.1.4. *Sejam α^* definido em (3.4), $v \in \mathbb{Z}$ e $V(v) = \{v, v+1\}$. Então, o operador de Stavskaya tem um valor crítico,*

$$\alpha^* > 0,089$$

Prova. A matriz de adjacência associada a Figura 5.3 é $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e o polinômio característico é $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 1$. Logo, os autovalores serão

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{7+2\sqrt{5}}}{2}, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{7-2\sqrt{5}}}{2}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{7+2\sqrt{5}}}{2}, \text{ e } \lambda_4 = \frac{1-\sqrt{7-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Optaremos por utilizar uma técnica equivalente a decomposição $M^n = BA^nB^{-1}$ para calcular $m^{(n)}_{v_1v_4}$, visto que, a forma exata de B e B^{-1} é muito densa. Com efeito, note que

$$m^{(n)}_{v_1v_4} = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n + c\lambda_3^n + d\lambda_4^n \tag{5.9}$$

Para obter os valores de a, b, c e d. Precisaremos de

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{(1)} = M, M^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, M^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

o que, a partir de (5.9), nos proporciona o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0 &= a+b+c+d \\ 0 &= a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 + d\lambda_4 \\ 0 &= a\lambda_1^2 + b\lambda_2^2 + c\lambda_3^2 + d\lambda_4^2 \\ 1 &= a\lambda_1^3 + b\lambda_2^3 + c\lambda_3^3 + d\lambda_4^3 \end{cases}$$

o qual após solucionado nos oferece

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7+2\sqrt{5}}}, b = -a, d = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7-2\sqrt{5}}}, \text{ e } c = -d.$$

Daí,

$$m^{(n)}_{v_1v_4} = a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + d(\lambda_4^n - \lambda_3^n)$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1.3, sabemos que o número de contornos com $3k$ tipos, Q_k, é limitado por $m^{(3k-1)}_{v_1v_4}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists \text{ contorno}) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\alpha^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^{(3k-1)}_{v_1v_4}\alpha^k \\ &= a\left(\frac{\lambda_1^2\alpha}{1-\lambda_1^3\alpha} - \frac{\lambda_2^2\alpha}{1-\lambda_2^3\alpha}\right) + d\left(\frac{\lambda_4^2\alpha}{1-\lambda_4^3\alpha} - \frac{\lambda_3^2\alpha}{1-\lambda_3^3\alpha}\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Na expressão (5.10) há quatro assíntotas verticais,$\{\lambda_1^{-3}, \lambda_2^{-3}, \lambda_3^{-3}, \lambda_4^{-3}\}$. Verifiquemos que $\lambda_3^{-3} < 0, \lambda_4^{-3} < 0$ e $\lambda_1^{-3} < \lambda_2^{-3}$, logo, nosso interesse é saber o que ocorre no intervalo $\left(0, \lambda_1^{-3}\right)$. Pode-se provar que neste intervalo a expressão (5.10) é positiva e monótona crescente em função de α. Além disso, para $\alpha = 0,089$, (5.10) assume valor menor que 1. □

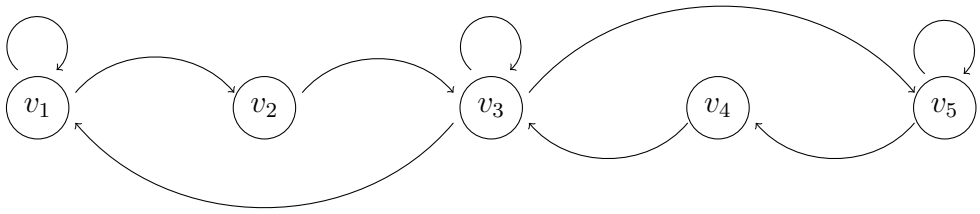
Nosso resultado é bem próximo do obtido por Toom [30], a saber $\alpha^* > 0,09$. Em verdade, se considerarmos uma representação na ordem de 10^{-2}, elas serão a mesma. Porém, ainda utilizando a metodologia da matriz de adjacência obteremos uma melhor estimativa, próxima daquela obtida por Ramos et. al. [21], que é a melhor estimativa até o presente momento. No referido trabalho, elas revisitaram a técnica da contagem proposta e utilizada por Toom.

Os grafos ilustrados na Figura 5.1 e Figura 5.3, dentre outras funções, permitem solidificar o entendimento do leitor no uso desta metodologia.

Na Figura 5.4, apresentaremos um novo grafo para descrever a evolução dos caminhos, contendo cinco vértices, um a mais do que o grafo apresentado na Figura 5.3. Neste caso, adotaremos as seguintes representações:

$$\begin{cases} v_1 \text{ representará o passo } \swarrow \\ v_2 \text{ representará o passo } \rightarrow \text{ quando precedido do passo } \swarrow \\ v_3 \text{ representará o passo } \rightarrow \text{ quando precedido do passo } \rightarrow \\ v_4 \text{ representará o passo } \rightarrow \text{ quando precedido do passo } \nwarrow \\ v_5 \text{ representará o passo } \nwarrow \end{cases}$$

Figura 5.4: Grafo ilustrativo das condições adicionais estabelecidas a acima.



Proposição 5.1.5. *Sejam α^* definido em (3.4), $v \in \mathbb{Z}$ e $V(v) = \{v, v+1\}$. Então, o operador de Stavskaya tem um valor crítico,*

$$\alpha^* > 0,113$$

Prova. A matriz de adjacência associada a Figura 5.4 é $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e o polinômio característico é $-\lambda^5+3\lambda^4-3\lambda^3+3\lambda^2-\lambda$. Logo, os autovalores de M são $\{2, i, -i, 1, 0\}$. De forma análoga, aos cálculos apresentados no Lema 5.1.2, obtemos

$$m_{v_1v_5}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-i)^n \\ i^n \\ 1 \\ 2^n \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3+i}{20} \\ \frac{3-i}{20} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{3\cdot[(-i)^n + i^n] + i\cdot[(-i)^n - i^n] - 10 + 2^{n+2}}{20}. \tag{5.11}$$

onde tr denota a matriz transposta. Note que para $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{array}{rcl} i^{1+4r} &=& +i \\ i^{2+4r} &=& -1 \\ i^{3+4r} &=& -i \\ i^{4+4r} &=& +1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} (-i)^{1+4r} &=& -i \\ (-i)^{2+4r} &=& -1 \\ (-i)^{3+4r} &=& +i \\ (-i)^{4+4r} &=& +1 \end{array} \tag{5.12}$$

onde utilizaremos (5.12) para calcular

$$3\left[(-i)^{3k-1} + i^{3k-1}\right] = \frac{3}{i}\left[(i^3)^k - ((-i)^3)^k\right] = \frac{3}{i}\left[i^k - (-i)^k\right] \tag{5.13}$$

e,

$$i\left[(-i)^{3k-1} - i^{3k-1}\right] = \frac{i}{i}\left[(i^3)^k - ((-i)^3)^k\right] = -\left[i^k + (-i)^k\right] \tag{5.14}$$

Além disso,

$$i^k \;=\; \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad (-i)^k \;=\; \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - i\ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right),$$

daí,

$$i^k + (-i)^k \;=\; 2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad i^k - (-i)^k \;=\; 2i\ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

logo, somando-se (5.13) e (5.14), teremos

$$\frac{3}{i}\left[i^k - (-i)^k\right] - \left[i^k + (-i)^k\right] = 6\ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Desta maneira, somos capazes de reescrever (5.11) na forma

$$m_{v_1v_5}^{(3k-1)} = \frac{6}{20}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{2}{20}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{10}{20} + \frac{2}{20}\,8^k.$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1.3, sabemos que o número de contornos com $3k$ tipos, Q_k, é limitado por $m_{v_1v_5}^{(3k-1)}$. Segue que,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists \text{ contorno}) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\alpha^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_{v_1v_5}^{(3k-1)}\alpha^k \\ &= \frac{6}{20}\sum_{k=1}^{\infty}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\alpha^k - \frac{2}{20}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\alpha^k - \frac{10}{20}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k + \frac{2}{20}\sum_{k=1}^{\infty}8^k\alpha^k\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha^{1+4k} - \alpha^{3+4k}\right) = \frac{\alpha-\alpha^3}{1-\alpha^4} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha^{4+4k} - \alpha^{2+4k}\right) = \frac{\alpha^4-\alpha^2}{1-\alpha^4} \end{cases} \tag{5.15}$$

Assim, fazendo uso das identidades em (5.15), obtemos

$$\mathbb{P}(\exists \text{ contorno}) \leq \frac{1}{20}\left(\frac{-2\alpha^4 - 6\alpha^3 + 2\alpha^2 + 6\alpha}{1-\alpha^4}\right) - \frac{10}{20}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{2}{20}\left(\frac{8\alpha}{1-8\alpha}\right) \tag{5.16}$$

Observe que, há três assíntotas verticais, a saber: $\left\{-1, \frac{1}{8}, 1\right\}$. Logo, nosso interesse é saber o que ocorre no intervalo $\left(0, \frac{1}{8}\right)$. Note que, a expressão do lado direito de (5.16) é crescente, positiva como função de α. Além disso, se $\alpha = 0,113$ então o lado direito de (5.16) assume o valor $0,992$. Logo, $\mathbb{P}(\exists$ contorno$)$ é estritamente menor do que um.

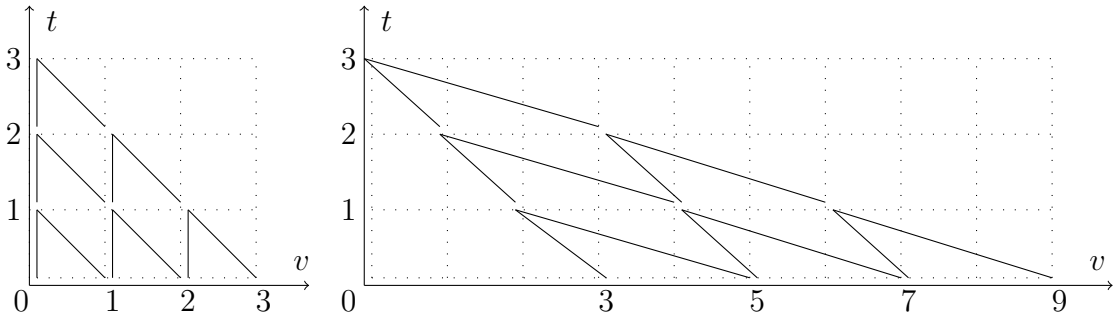
□

5.2 Prova do item *TP.1* do Teorema Principal

Inicialmente mostremos que a ergodicidade do processo de percolação, vinda da ação de P_2, depende somente da quantidade de vizinhos e independe da posição dos mesmos.

Na Figura 5.5, dado $(v,t) = (0,3)$, apresentamos um exemplo que ilustra a ação de um operador determinístico com vizinhança $V = \{1,3\}$ definido por $(x\mathsf{E})_v = \max\{x_{v+1}, x_{v+3}\}$ e do operador determinístico do processo de Stavskaya, $\mathsf{D_S}$, juntamente com suas respectivas representações gráficas $\Gamma_{\mathsf{E}}^{(0,3)}$, a ser detalhada mais adiante, e $\Gamma_{\mathsf{D_S}}^{(0,3)}$, definida em (4.1).

Figura 5.5: Grafo ilustrativo de $\Gamma^{(0,3)}_{\mathsf{Ds}}$ e $\Gamma^{(0,3)}_{\mathsf{E}}$.



No exemplo, ilustrado na Figura 5.5, observamos que é possível obter uma função bijetiva f entre os vértices de

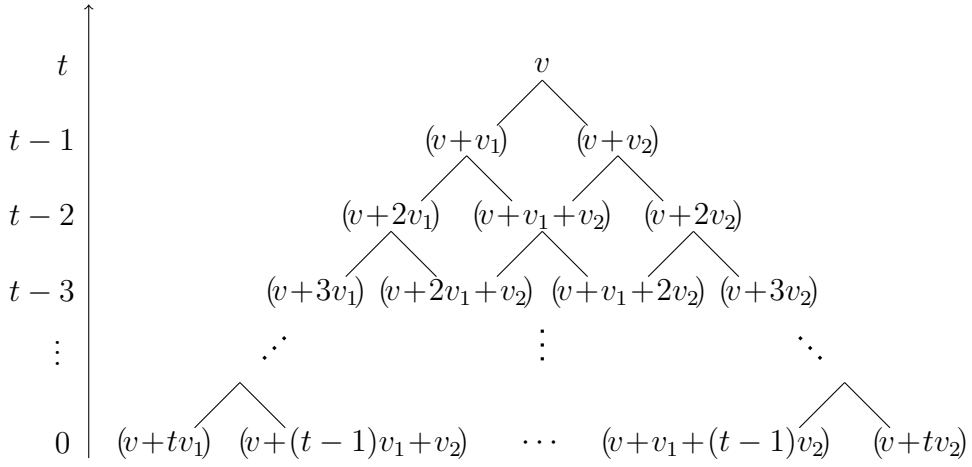
$\Gamma^{(0,3)}_{\mathsf{Ds}}$				$\Gamma^{(0,3)}_{\mathsf{E}}$			
$(0,3)$				$(0,3)$			
$(0,2)$	$(1,2)$			$(1,2)$	$(3,2)$		
$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$		$(2,1)$	$(4,1)$	$(6,1)$	
$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(3,0)$	$(5,0)$	$(7,0)$	$(9,0)$

ou seja,

$$f(0,2) = (1,2), f(1,2) = (3,2), \ldots, f(3,0) = (9,0).$$

O operador de percolação P_2 tem uma representação gráfica, análoga a representação gráfica vértice-elo do Operador S, ver Seção 4.1. Da mesma forma, os elos conectam cada vértice aos seus vizinhos no tempo anterior, formando um reticulado triangular, para uma visualização da evolução do grafo P_2 adotaremos a representação presente na Figura 5.6.

Figura 5.6: Grafo ilustrativo de $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$.



Sejam $x \in \Omega$, $V = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{Z}$ e $(x\mathsf{D}_2)_v = \max\{x_{v+v_1}, x_{v+v_2}\}$ para todo $v \in \mathbb{Z}$. Na Figura 5.6, é descrito a ação de D_2, por meio de uma representação gráfica. O conjunto

$$G_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)} = \bigcup_{s=0}^{t} \bigcup_{k=s}^{t} \{(v + (t-k)v_1 + (k-s)v_2, s)\},$$

fornece todos os vértices dos possíveis caminhos da origem até (v,t), onde os vértices da origem são do tipo $(u,0) \in G_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$. Neste sentido, definimos

$$\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)} = \left\{ \gamma \ ; \ \gamma \text{ é caminho da origem até } (v,t) \text{ formado por vértices de } G_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)} \right\}. \quad (5.17)$$

Ou seja, o conjunto $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$, definida em (5.17), é a representação gráfica para qualquer Operador de Percolação com dois vizinhos, de modo que $\Gamma_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$, definido em (4.1), é um caso particular de $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$ quando a vinhança $\{v_1, v_2\} = \{0, 1\}$.

Lema 5.2.1. *Sejam $\Gamma_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$, definidos em (5.17). Para cada $(v,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, existe bijeção f entre $\Gamma_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$. Em particular, um caminho γ_1 em $\Gamma_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$ é auto-evitante, se, e somente se, $f(\gamma_1) = \gamma_2$ é um caminho auto-evitante em $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$.*

Prova. Uma vez que os caminhos são formados por uma sequência de vértices do grafo, mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos de caminhos $\Gamma_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$, é equivalente a mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos de vértices $G_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}^{(v,t)}$ e $G_{\mathsf{D}_2}^{(v,t)}$. Nesta bijeção,

deve-se fixar a segunda coordenada, e preservar a precedência da primeira coordenada. Sem perda de generalidade, seja (v_1, v_2) a vizinhança para o operador D_2, assim tomemos a função $f : G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_\mathsf{S}} \to G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_2}$ dada por

$$f(v+k-s, s) = (\ v + (t-k)v_1 + (k-s)v_2\ ,\ s\ ). \tag{5.18}$$

Note que, a função f, definida em (5.18), é uma função injetiva, pois, fixado s e dados $k_1, k_2 \in \{s, \ldots, t\}$ tal que $k_1 \neq k_2$, teremos $(v+k_1-s, s) \neq (v+k_2-s, s)$, além disso,

$$v + k_1 - s \neq v + k_2 - s \quad \Rightarrow \quad v + tv_1 - sv_2 + (v_2 - v_1)k_1 \neq v + tv_1 - sv_2 + (v_2 - v_1)k_2.$$

Daí,

$$f(v+k_1-s, s) \neq f(v+k_2-s, s)$$

Por outro lado, a função f, definida em (5.18), é uma função sobrejetiva. De fato,

$$\begin{aligned} f\left(G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}\right) &= f\left(\bigcup_{s=0}^{t}\bigcup_{k=s}^{t}\{(v+k-s, s)\}\right) \\ &= \bigcup_{s=0}^{t}\bigcup_{k=s}^{t}\{f\,(v+k-s, s)\} \\ &= \bigcup_{s=0}^{t}\bigcup_{k=s}^{t}\{(\ v + (t-k)v_1 + (k-s)v_2\ ,\ s\ )\} \\ &= G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_2} \end{aligned}$$

Portanto, $f : G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_\mathsf{S}} \to G^{(v,t)}_{\mathsf{D}_2}$ é uma função bijetiva, de modo que, para cada caminho em $\Gamma^{(v,t)}_{\mathsf{D}_\mathsf{S}}$ haverá um e apenas um caminho em $\Gamma^{(v,t)}_{\mathsf{D}_2}$. □

Informalmente falando, veremos na Proposição 5.2.2, que a densidade de uns para qualquer tempo, t, é a mesma para todos os operadores de percolação com dois vizinhos quaisquer tendo como condição inicial a *configuração todos uns*.

Proposição 5.2.2. *Sejam* $x \in \Omega$, $(x\mathsf{E})_v = \max\{x_{v+u_1}, x_{v+u_2}\}$ *e* $(x\mathsf{F})_v = \max\{x_{v+w_1}, x_{v+w_2}\}$, *com* $\{v, u_1, u_2, w_1, w_2\} \subset \mathbb{Z}$ *tais que* $u_1 \neq u_2$ *e* $w_1 \neq w_2$. *Então,*

$$\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{E})^t(1) = \delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{F})^t(1) \quad \textit{para cada} \ \ t \in \mathbb{Z}_+.$$

Prova. Tomemos o Operador de Stavskaya, S. Com efeito, o Lema 5.2.1 junto com o Lema da existência de um caminho aberto, nos permite concluir que

$$\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{E})^t(1) = \delta_{1_\mathbb{Z}}\mathsf{S}^t(1) \ \text{ e } \ \delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{F})^t(1) = \delta_{1_\mathbb{Z}}\mathsf{S}^t(1)$$

então, por transitividade teremos que $\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{E})^t(1) = \delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{F})^t(1)$ para cada $t \in \mathbb{Z}_+$. □

Teorema 5.2.3. *Considere α^* definido em (3.4), $v \in \mathbb{Z}$, $|V(v)| = 2$ e P_2. Então,*

$$\alpha^* > 0,113.$$

Prova. A Proposição 5.2.2 nos garante que o valor crítico encontrado para a vizinhança $\{0,1\}$ valerá para uma vizinhança $\{v_1, v_2\}$ com dois vizinhos quaisquer. Por outro lado, a Proposição 5.1.5 nos fornece que, para o Operador de Stavskaya, $\alpha^* > 0,113$. A combinação de ambas as proposições prova o Teorema 5.2.3. □

Certamente, com uso desta metodologia, podemos propor um o grafo inserindo outras restrições, as quais levariam para uma melhor estimativa. Mas, não temos certeza se ela levaria ao valor exato da transição.

Agora, seguimos para provar o item *(TP.1)*. Mas antes precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 5.2.4. *Para um operador de Percolação com $|V(v)| = n$. Se $\alpha \leq 0,113$, então haverá uma medida invariante, ν, para P_n tal que $\nu(1) > 0$.*

Prova. Pelo Lema 3.1.4, sabemos que P_n é monótono. Além disso, pelo teorema da medida invariante, ver o Apêndice B, $(\delta_{1_\mathbb{Z}}\mathsf{P}_n^t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge para a medida invariante ν. Além disso, como $\alpha \leq 0,113$ e $\delta_{1_\mathbb{Z}}\mathsf{P}_n^t(1) \to k > 0$ com $t \to \infty$. Logo, $\nu(1) > 0$. □

Prova do item *(TP.1)* do Teorema Principal. Tome uma vizinhança $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Logo, para $V(v)$ teremos

$$(x\mathsf{D}_n)_v = \max\{v + v_1, \ldots, v + v_n\} \geq \max\{v + v_i, v + v_j\} = (x\mathsf{D}_{ij})_v.$$

Consideremos D_{ij} um operador que age num subconjunto $\{v_i, v_j\} \subset \{v_1, \ldots, v_n\}$. Claro que assumimos $i \neq j$. Utilizando ideias similares aquelas apresentadas no Lema 3.1.5, pode-se provar que $\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_{ij} \prec \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$, de modo que, pela Proposição 5.2.2, teremos

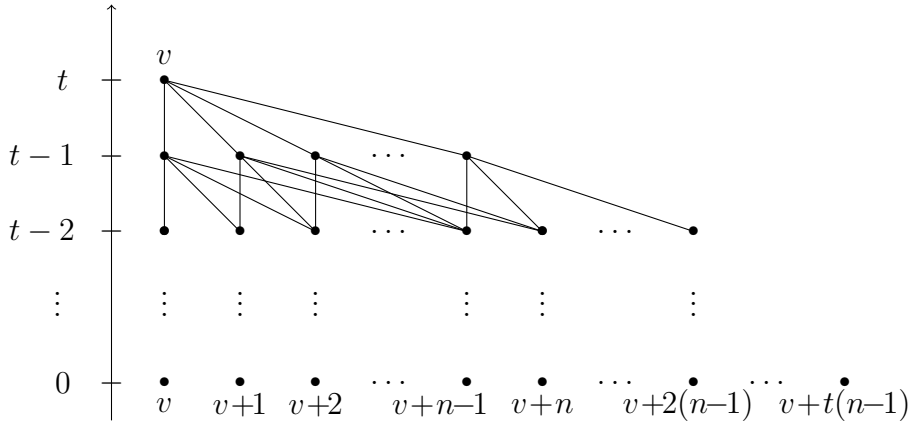
$$\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_{ij})^t(1) = \delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_2)^t(1) \quad \text{para cada } \ t \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 5.2.3, temos que se $\alpha \leq 0,113$, então, da Proposição 5.2.2 segue que $\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_{ij})^t(1) > 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$, consequentemente, $\delta_{1_\mathbb{Z}}(\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n)^t(1) > 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$, e da Proposição 5.2.4, teremos que haverá uma medida invariante, ν, para $\mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$ tal que $\nu(1) > 0$. Provando-se assim, o item (*TP.1*) do Teorema Principal. □

5.3 Prova dos itens *TP.2* e *TP.3* do Teorema Principal

A prova será construída ao longo deste capítulo. De início veremos que o operador de percolação P_n tem uma representação gráfica, análoga a representação gráfica vértice-elo do Operador P_2 (ver Figura 5.6). Os elos conectam cada vértice aos seus vizinhos no tempo anterior. Para uma melhor visualização do grafo, observaremos a ação do operador $\overline{\mathsf{P}}_n$, definido em (3.7), a qual possui vizinhança $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, por meio da representação feita na Figura 5.7.

Figura 5.7: Grafo ilustrativo de $\Gamma^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n}$.



Sejam $x \in \Omega$, $v \in \mathbb{Z}$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{Z}$, $(x\mathsf{D}_n)_v = \max\{x_{v+v_1}, \ldots, x_{v+v_n}\}$ e $(x\overline{\mathsf{D}}_n)_v = \max\{x_v, x_{v+1}, \ldots, x_{v+n-1}\}$. O conjunto,

$$G^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n} = \bigcup_{s=0}^{t} \bigcup_{k=0}^{(t-s)(n-1)} \{(v+k, s)\},$$

contém todos os vértices dos caminhos da origem ao vértice (v,t), tal que para todo $v \in \mathbb{Z}$ chamamos $(v,0) \in G^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n}$ de *vértices da origem*.

Definimos

$$\Gamma^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n} = \left\{ \gamma \subset G^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n} \ ; \ \gamma \text{ é caminho auto-evitante da origem até } (v,t) \right\}, \tag{5.19}$$

ou seja, o conjunto $\Gamma^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n}$, é a representação gráfica do Operador de Percolação $\overline{\mathsf{P}}_n$.

Note que, dado o caminho auto-evitante $\gamma_1 \in \Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$, vemos que γ_1 é composto por $t+1$ vértices. Considerando o sentido norte-sul, o primeiro é da forma $(v_0, 0)$, o segundo da forma $(v_1, 1)$, ..., o t-ésimo da forma $(v_{t-1}, t-1)$ e o último, $(t+1)$-ésimo, da forma (v_t, t), sendo $v_t = v$. Além disso, pela definição de $G_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$, temos para $s \in \{0, 1, \ldots, t\}$

$$(v_s, s) \in \bigcup_{k=0}^{(t-s)(n-1)} \{(v+k, s)\}$$

Lema 5.3.1. *Sejam $\Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D_n}}^{(v,t)}$, definidos em (5.19). Para cada $(v,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, existe bijeção f entre $\Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D_n}}^{(v,t)}$. Em particular, para cada caminho auto-evitante γ_1 em $\Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(v,t)}$, temos que $f(\gamma_1) = \gamma_2$ é um caminho auto-evitante em $\Gamma_{\mathsf{D_n}}^{(v,t)}$.*

Prova. Sem perda de generalidade, tome $v = 0$. Note que as cardinalidades em $\Gamma_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(0,t)}$ e $\Gamma_{\mathsf{D_n}}^{(0,t)}$ são iguais a n^t. Agora, mostraremos que há uma bijeção entre os conjuntos $G_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(0,t)}$ e $G_{\mathsf{D_n}}^{(0,t)}$, a qual preserva a segunda coordenada e mantém a precedência na primeira coordenada. Tomamos $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$. Defina $f : G_{\overline{\mathsf{D}}_n}^{(0,t)} \to G_{\mathsf{D_n}}^{(0,t)}$ por

$$f(i, t-1) = (v_{i+1}, t-1)\,, \text{se } i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$f(i, t-2) = \begin{cases} (v_1 + v_{i+1}, t-2) & , \text{se } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ (v_n + v_{i-n+2}, t-2)\,, & \text{se } i \in \{n, \ldots, 2(n-1)\} \end{cases}$$

$$f(i, t-3) = \begin{cases} (2v_1 + v_{i+1}, t-3) & , \text{se } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ (v_n + v_2 + v_{i-n+2}, t-3)\,, & \text{se } i \in \{n, \ldots, 2(n-1)\} \\ (2v_n + v_{i-2n+3}, t-3) & , \text{se } i \in \{2n-1, \ldots, 3(n-1)\} \end{cases}$$

$$f(i, t-4) = \begin{cases} (3v_1 + v_{i+1}, t-4) & , \text{se } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ (v_n + 2v_2 + v_{i-n+2}, t-4) & , \text{se } i \in \{n, \ldots, 2(n-1)\} \\ (2v_n + v_2 + v_{i-2n+3}, t-4)\,, & \text{se } i \in \{2n-1, \ldots, 3(n-1)\} \\ (3v_n + v_{i-3n+4}, t-4) & , \text{se } i \in \{3n-2, \ldots, 4(n-1)\} \end{cases}$$

Em linhas gerais, para $s \in \{2,3,\ldots,t\}$ temos

$$f(i,t-s)=\begin{cases}((s-1)v_1+v_{i+1},t-s) & ,\text{se } i\in\{0,\ldots,n-1\}\\ (v_n+(s-2)v_2+v_{i-n+2},t-s) & ,\text{se } i\in\{n,\ldots,2(n-1)\}\\ \quad\vdots & \\ ((s-3)v_n+2v_2+v_{i-(s-3)n+(s-2)},t-s) & ,\text{se } i\in\{(s-3)n-(s-4),\ldots,(s-2)(n-1)\}\\ ((s-2)v_n+v_2+v_{i-(s-2)n+(s-1)},t-s) & ,\text{se } i\in\{(s-2)n-(s-3),\ldots,(s-1)(n-1)\}\\ ((s-1)v_n+v_{i-(s-1)n+s},t-s) & ,\text{se } i\in\{(s-1)n-(s-2),\ldots,s(n-1)\}\end{cases}$$

Portanto, para cada caminho em $\Gamma^{(v,t)}_{\mathsf{D}_n}$ haverá um e apenas um caminho em $\Gamma^{(v,t)}_{\overline{\mathsf{D}}_n}$. □

Proposição 5.3.2. *Sejam* $x\in\Omega$ *e* $\{v,u_1,\ldots,u_n,w_1,\ldots,w_n\}\subset\mathbb{Z}$, *com* $u_i\neq u_j$ *e* $w_i\neq w_j$ *sendo* $i\neq j$ *para* $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. *Defina,*

$$(x\mathsf{E})_v=\max\{x_{v+u_1},\ldots,x_{v+u_n}\},\quad e,\quad (x\mathsf{F})_v=\max\{x_{v+w_1},\ldots,x_{v+w_n}\}.$$

Então,

$$\delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\mathsf{R}_\alpha\circ\mathsf{E})^t(1)=\delta_{1_{\mathbb{Z}}}(\mathsf{R}_\alpha\circ\mathsf{F})^t(1)\quad \textit{para cada}\quad t\in\mathbb{Z}_+.$$

Prova. Usando o Lema 5.3.1, a prova segue análoga aquela da Proposição 5.2.2. □

A Proposição 5.3.2 estabelece uma relação, qualitativamente idêntica, no que se refere a ergodicidade do processo de percolação a qual depende somente da quantidade dos vizinhos e independe da posição dos mesmos.

Em [27], foi realizado um estudo sobre o operador de percolação em $\mathbb{Z}$, no qual fixado uma quantidade de n vizinhos foi obtido o seguinte resultado:

Teorema (da probabilidade crítica [27]). *Considere um operador de percolação em* $\mathbb{Z}$ *com vizinhança finita* $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}\subset\mathbb{Z}$ *são tais que* $v_1<v_2<v_3<\cdots<v_n$. *Defina,* $\alpha_1:=\dfrac{2}{2+v_n-v_1}$ *e* α_2 *como a única solução no intervalo* $(0,1]$ *da seguinte equação,*

$$\alpha=\alpha_1\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{2+v_n-v_1}}$$

onde $\varphi(\alpha)=\dfrac{(1-\alpha)^6+(1-\alpha)^{2(v_n-v_1)}}{\alpha(2-\alpha)}$. *Então,* $\alpha^*\geq\alpha_2$.

Observamos, em [27], que ao invés de ser utilizado o operador aleatório R_α foi utilizado o operador aleatório $\mathsf{R}_{(1-\alpha)}$. Sob esta consideração, buscando adequar o resultado ao nosso contexto, reescrevemos o Teorema da probabilidade crítica da seguinte forma:

Teorema (da probabilidade crítica para R_α). *Considere um operador de percolação em $\mathbb{Z}$ com vizinhança finita $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{Z}$ são tais que $v_1 < v_2 < v_3 < \cdots < v_n$. Defina, $\alpha_1 := \dfrac{2}{2 + v_n - v_1}$ e α_2 como a única solução no intervalo $[0, 1)$ da seguinte equação,*

$$\alpha = 1 - \alpha_1 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{2 + v_n - v_1}} \tag{5.20}$$

onde $\varphi(\alpha) = \dfrac{\alpha^6 + \alpha^{2(v_n - v_1)}}{(1-\alpha)(1+\alpha)}$. Então, $\alpha^* \leq \alpha_2$.

A prova do teorema é apresentada em [27]. Esse resultado nos garante um melhoramento do limite superior do intervalo crítico apresentado no Teorema da existência de um valor crítico em [30].

Proposição 5.3.3. *Considere $v \in \mathbb{Z}$, $|V(v)| = n > 1$ e P_n. Então,*

$$\alpha^* \in \left(0.113, \frac{n-1}{n+1}\right).$$

Prova. Note que, a equação (5.20) nos fornece que $\alpha_2 < 1 - \alpha_1$, uma vez que $\varphi(\alpha)$ é positivo para $\alpha \in (0, 1)$. De fato, pelo Teorema da probabilidade crítica para R_α, temos que α_2 é a única solução para (5.20) no intervalo $(0, 1)$, logo

$$0 < \alpha_1 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1}} < 1. \tag{5.21}$$

Por definição $\alpha_1 \in (0, 1)$. De (5.21), segue que $1 - \dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1} > 0$, ou seja, $\dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1} < 1$. Por outro lado, $\varphi(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0, 1)$, e como $\alpha_2 \in (0, 1)$, teremos $\dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1} > 0$. Consequentemente,

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1}} > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha_2)}{2 + v_n - v_1}} > \alpha_1$$

Lembremos que a Proposição 5.3.2 nos garante equivalência da presença de ergodicidade entre operadores de percolação que possuam o mesmo números de vizinhos, independentes da posição dos mesmos. Ou seja, o intervalo crítico obtido para $\overline{\mathsf{P}}_n$ é o mesmo obtido para P_n. Dessa forma, se tomarmos $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, obteremos

$$\alpha^* \leq \alpha_2 < 1 - \alpha_1 = 1 - \frac{2}{2 + n - 1 - 0} = \frac{n-1}{n+1}$$

□

Da proposição 5.3.3, temos que para o Operador de Stavskaya, $\alpha^* \in (0.113, 0.333)$. A seguir mostraremos que o nosso α^* tem um limite superior ainda menor do que o apresentado na proposição 5.3.3.

Retomando a equação (5.20) e denotando $m = v_n - v_1 \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\alpha = 1 - \alpha_1 \frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{2+m}} \quad \text{onde} \quad \varphi(\alpha) = \frac{\alpha^6 + \alpha^{2m}}{1 - \alpha^2} \quad \text{e} \quad \alpha_1 := \frac{2}{2+m}.$$

Agora, definimos

$$g(\alpha) = 1 - \alpha - \alpha_1 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{2+m}}. \tag{5.22}$$

Fazendo as devidas substituições e manipulações algébricas, segue que

$$g(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)(2+m) - \alpha^6 - \alpha^{2m}}.$$

Sejam, $m \in \mathbb{N}$, $h(n, \alpha)$ definido em (5.1), e $\alpha \in (0, 1)$, teremos a seguinte equivalência

$$g(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(m+1, \alpha) = 0. \tag{5.23}$$

Além disso, faremos uma outra observação. Se $|V(v)| = n > 1$ então $m \geq n - 1$. Assim, tomando $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 < m_2$, teremos que

$$h(m_1 + 1, \alpha) < h(m_2 + 1, \alpha). \tag{5.24}$$

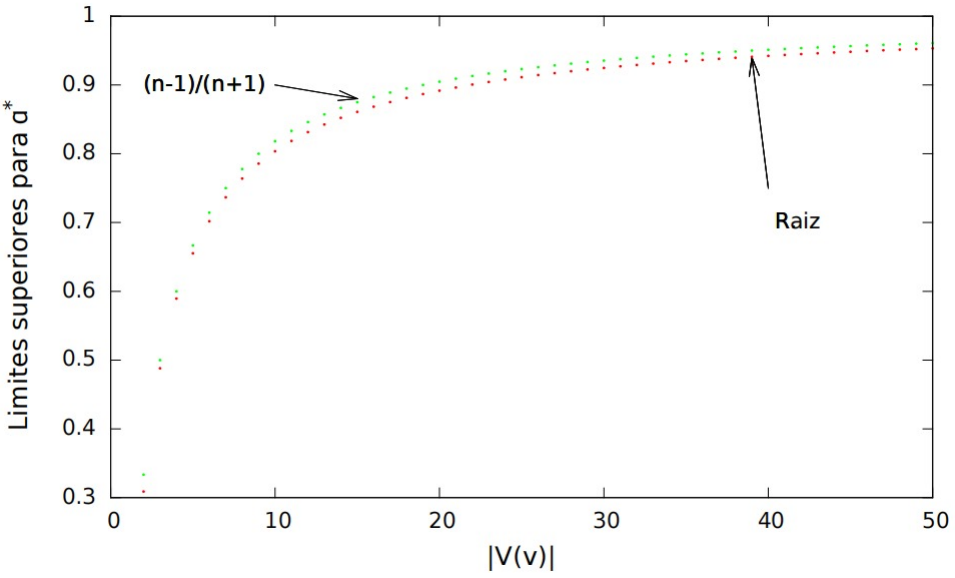
Portanto, se $|V(v)| = n$ então $g(\alpha)$ terá a menor raiz quando $m = n - 1$.

Prova dos item *(TP.2)* **do Teorema Principal**. Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $2 \leq n_1 < n_2$. Da equação (5.24), obtemos que $h(n_1+1, \alpha) < h(n_2+1, \alpha)$. Logo, para todo $\alpha \in (0,1)$, temos que a raiz, α_{n_1}, de $h(n_1+1, \alpha)$ é menor que a raiz, α_{n_2}, de $h(n_2+1, \alpha)$. Sendo $0 < \alpha_{n_1}$ estritamente menor que α_{n_2} temos que a raiz, α_n, de $h(n+1, \alpha)$ cresce quando $n \to \infty$. Além disso, ela converge, logo, se $\lim_{n\to\infty} g(\alpha) = 1 - \alpha$ então $\lim_{n\to\infty} g(0) = 0$, se, e só se, $\alpha = 1$. □

Prova dos item *(TP.3)* **do Teorema Principal**. Considere $g(.)$ como definido em (5.22), $v \in \mathbb{Z}$, $|V(v)| = n > 1$, P_n, e $m = n-1$. Mostremos que $\alpha^* < \alpha_s$, tal que $g(\alpha_s) = 0$, sendo α_s, o único valor em $\left(0, \dfrac{n-1}{n+1}\right)$ onde (5.23) é satisfeito. Note que $g(\alpha)$ é uma função contínua como função de $\alpha \in (0,1)$. Além disso, dado $m \in \mathbb{N}$ e α suficientemente pequeno, existirá um intervalo I tal que $g(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in I$, ou seja, a partir da equação (5.22) concluímos que $m > 2\alpha + (2+m)\alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^{2m}$. Por outro lado, se $\alpha = \dfrac{n-1}{n+1}$ teremos $g(\alpha) < 0$. Assim, existirá um único $\alpha_s \in \left(0, \dfrac{n-1}{n+1}\right)$ tal que $g(\alpha_s) = 0$ e (5.23) é satisfeito. □

O Teorema Principal nos mostra a existência de um limite superior para α^*, o qual é menor que $\dfrac{n-1}{n+1}$. Contudo, não temos uma noção quantitativa do seu valor. Assim, para termos uma ideia de quão menor é o valor de α_s, raiz real em $(0,1)$ de $g(\alpha)$, faremos uma apresentação gráfica dos valores na Figura 5.8.

Figura 5.8: Evolução dos valores de α_s.



6 MEDIDA INVARIANTE EM P_n

Para $p \in [0,1]$, denotamos a *medida produto de Bernoulli* com parâmetro p em Ω, por μ_p. Ou seja, para $a_1, \ldots, a_n$ pertencentes a $\{0,1\}$,

$$\mu_p(x_{v_1} = a_1, \ldots, x_{v_n} = a_n) = (1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot p^{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Neste capítulo, investigaremos algumas características e propriedades da medida invariantes em P_n. No Teorema 6.0.1, mostraremos que a medida invariante não trivial existente na região não ergódica de P_n, não pode ser uma medida produto de Bernoulli.

Teorema 6.0.1. *Seja $p \in (0,1)$. A medida μ_p não é invariante para P_n.*

Uma condição necessária e suficiente para μ_p com $p \in (0,1)$, ser uma medida invariante de um ACP com dois vizinhos pode ser encontrado em [4, 17, 28]. Escrevemos este resultado considerando P_2.

Teorema (da medida produto invariante em ACP [17]). *Seja $p \in (0,1)$, P um ACP em Ω com dois vizinhos e $\theta^{(2)}(\cdot|x_{V(v)})$ sua distribuição de transição. Temos que, $\mu_p\mathsf{P} = \mu_p$ se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita*

$$\textit{(i)} \quad (1-p)\theta^{(2)}(1|00) + p\theta^{(2)}(1|01) = \quad (1-p)\theta^{(2)}(1|10) + p\theta^{(2)}(1|11) = \quad p$$

$$\textit{(ii)} \quad (1-p)\theta^{(2)}(1|00) + p\theta^{(2)}(1|10) = \quad (1-p)\theta^{(2)}(1|01) + p\theta^{(2)}(1|11) = \quad p$$

Em particular, $\mu_p\mathsf{P} = \mu_p$ se, e somente se,

$$\theta^{(2)}(1|00)[1-\theta^{(2)}(1|11)] = \begin{cases} \theta^{(2)}(1|10)[1-\theta^{(2)}(1|01)] \\ ou \\ \theta^{(2)}(1|01)[1-\theta^{(2)}(1|10)] \end{cases}$$

Note que, para o caso do nosso ACP, o operador de percolação P_2, usando (3.3), as condições do Teorema da medida produto invariante em ACP são reescritas da seguinte forma

$$\textit{(i)} \quad (1-p)\cdot 0 + p\cdot(1-\alpha) \neq \quad (1-p)\cdot(1-\alpha) + p\cdot(1-\alpha) = \quad p$$

$$\textit{(ii)} \quad (1-p)\cdot 0 + p\cdot(1-\alpha) \neq \quad (1-p)\cdot(1-\alpha) + p\cdot(1-\alpha) = \quad p$$

como p e α pertencem a $(0,1)$, as condições *(i)* e *(ii)* não são satisfeitas. Aplicando o caso particular do supracitado Teorema, nas duas situações, obtemos

$$0\cdot(1-(1-\alpha)) \neq (1-\alpha)\cdot(1-(1-\alpha)),$$

ou seja, também não são satisfeitas. Assim, concluímos que P_2 não tem medida invariante, μ_p, com $p \in (0,1)$.

Para um ACP com $n > 2$ vizinhos e uma quantidade finita de estados para cada componente, há apenas uma condição necessária [4, 17, 28]. Na Proposição 6.0.2 apresentamos uma resposta bastante abrangente para P_n com $n \geq 2$.

Proposição 6.0.2. *Seja $p \in (0,1)$. Se $\alpha \neq \dfrac{(1-p)-(1-p)^n}{1-(1-p)^n}$, então μ_p não é uma medida invariante para P_n.*

Prova. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $B_k \subset \{0,1\}^n$ onde cada elemento de B_k tem k termos 1 e $n-k$ termos 0. Utilizando (2.8),

$$\begin{aligned}
\mu_p\mathsf{P}_n(x_v = 1) &= \sum_{a_{V(v)}\in\{0,1\}^n} \mu_p(x_{V(v)} = a_{V(v)})\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{a_{V(v)}\in B_k} \mu_p(x_{V(v)} = a_{V(v)})\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} p^k(1-p)^{n-k} \sum_{a_{V(v)}\in B_k} \theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)})
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Note que B_0 tem um único elemento, cujo todos os termos são 0. Daí, pela distribuição de transição definida em (3.3),

$$\theta_v^{(n)}(1|0\ldots 0) = 0.$$

Além disso, B_k tem $\binom{n}{k}$ elementos, sendo que para $k > 0$ e $a_{V(v)} \in B_k$,

$$\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) = 1-\alpha.$$

Logo, de (6.1), segue que

$$\begin{aligned}\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1) &= \sum_{k=1}^{n} p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}(1-\alpha)\\ &= (1-p)^n(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{p^k}{(1-p)^k}\\ &= (1-p)^n(1-\alpha)\left(\frac{1}{(1-p)^n}-1\right)\\ &= (1-\alpha)\left(1-(1-p)^n\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

Para que $\mu_p\mathsf{P}_n = \mu_p$ é necessário que $\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1) = \mu_p(x_v=1)$.Sendo $\mu_p(x_v=1)=p$, de (6.2) obtemos a seguinte equivalência

$$p=(1-\alpha)\left(1-(1-p)^n\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{1-(1-p)^n-p}{1-(1-p)^n}.$$

Portanto, μ_p com $p\in(0,1)$ não é distribuição invariante para P_n quando $\alpha \neq \dfrac{1-(1-p)^n-p}{1-(1-p)^n}$. □

A Proposição 6.0.2, embora limite o espaço de parâmetro, para o qual μ_p pode ser medida invariante para P_n. Este ainda é não-enumerável, uma vez que para cada n o valor de p pode assumir qualquer valor em $(0,1)$, obtendo-se ainda $\alpha = \dfrac{(1-p)-(1-p)^n}{1-(1-p)^n} \in (0,1)$.

Lema 6.0.3. *Sejam $p\in(0,1)$, $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ e $v,w\in\mathbb{Z}$, tais que $V(v)\bigcap V(w)=\emptyset$. Se $\alpha=[1-(1-p)^n-p]/[1-(1-p)^n]$ então $\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1,x_w=1)=p^2$.*

Prova. Dado $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ e vizinhança $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$, sempre podemos tomar $v,w\in\mathbb{Z}$, tais que $V(v)\bigcap V(w)=\emptyset$. Estes v e w que estaremos considerando. Sabemos que

$$\mu_p(x_v=1,x_w=1)=p^2. \tag{6.3}$$

Seja $F=\{v,w\}$. Logo, $a_{V(F)} = a_{v+v_1}\ldots a_{v+v_n}a_{w+v_1}\ldots a_{w+v_n} \in \{0,1\}^{2n}$. Definimos a partição de $\{0,1\}^{2n}$ dada por $B_0,B_1,\ldots,B_{2n}$ onde cada elemento de B_k tem k termos iguais a 1 e $2n-k$ termos iguais a 0. Usando (2.8) temos,

$$\begin{aligned}\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1,x_w=1) &= \sum_{a_{V(F)}\in\{0,1\}^{2n}} \mu_p(x_{V(v)}=a_{V(v)},x_{V(w)}=a_{V(w)})\cdot\prod_{u\in F}\theta_u^{(n)}(1|a_{V(u)})\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{a_{V(F)}\in B_k}\mu_p(x_{V(v)}=a_{V(v)},x_{V(w)}=a_{V(w)})\cdot\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)})\cdot\theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)})\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{a_{V(F)}\in B_k} p^k\cdot(1-p)^{2n-k}\cdot\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)})\cdot\theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)})\end{aligned}$$

Note que, se $a_{V(F)} \in B_0$ então $a_{v+v_1} \dots a_{v+v_n} a_{w+v_1} \dots a_{w+v_n} = 0$. E, se $a_{V(F)} \in B_1$ então todos os termos de $a_{V(v)}$ são 0 ou todos os termos de $a_{V(w)}$ são 0. Em ambas as situações

$$\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \cdot \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)}) = 0.$$

Daí,

$$\mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) \;\; = \sum_{k=2}^{2n} p^k \cdot (1-p)^{2n-k} \cdot \sum_{a_{V(F)} \in B_k} \theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \cdot \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)})$$

Em cada B_k há $\binom{2n}{k}$ elementos. Agora, se tomarmos $k \geq n+1$, então teremos termos iguais a 1 em $a_{V(v)}$ e em $a_{V(w)}$ simultaneamente. Logo,

$$\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \cdot \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)}) = (1-\alpha)^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) \;\; &= \sum_{k=2}^{n} p^k \cdot (1-p)^{2n-k} \cdot \sum_{a_{V(F)} \in B_k} \theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \cdot \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)}) \\ &+ \sum_{k=n+1}^{2n} p^k \cdot (1-p)^{2n-k} \cdot \binom{2n}{k} \cdot (1-\alpha)^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Para $k \in \{2, \dots, n\}$, tome $A_k \subset B_k$ e $\overline{A_k} = B_k - A_k$, tal que

$$A_k = \{a_{V(F)} \in B_k; a_{v+v_1} \dots a_{v+v_n} = 0 \quad \text{ou} \quad a_{w+v_1} \dots a_{w+v_n} = 0\}.$$

Assim, obtemos

$$\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \cdot \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_{V(F)} \in A_k; \\ (1-\alpha)^2 & \text{se} \quad a_{V(F)} \in \overline{A_k}. \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{k=2}^{n} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{a_{V(F)} \in \overline{A_k}} \theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)}) \theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)}) = \sum_{k=2}^{n} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{a_{V(F)} \in \overline{A_k}} (1-\alpha)^2 \tag{6.5}$$

Substituindo (6.5) em (6.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) \;\; &= (1-\alpha)^2 \left(\sum_{k=2}^{n} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{a_{V(F)} \in \overline{A_k}} \right) \\ &+ (1-\alpha)^2 \left(\sum_{k=n+1}^{2n} p^k \cdot (1-p)^{2n-k} \cdot \binom{2n}{k} \right) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Agora, suponha que temos $2n$ quadrados vazios organizado em uma linha. Destes, selecionamos uma quantidade $k \in \{2, \ldots, n\}$ de quadrados, procedendo da seguinte forma:

(i) Todos os k quadrados selecionados, estarão entre os n primeiros ou os n últimos.

(ii) Sempre haverá ao menos um quadrado selecionado entre os n primeiros e ao menos um quadrado selecionado nos n últimos.

Note que o número de elementos em A_k, é igual ao número de maneiras que a forma *(i)* pode ser feita, o qual é dado por

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{k}\binom{n}{0} = 2\binom{n}{k}$$

Por outro lado, o número de maneiras de fazer a forma *(ii)*, é o número de elementos em $\overline{A_k}$, o qual é dado por

$$\sum_{l=1}^{k-1} \binom{n}{l}\binom{n}{k-l}$$

Além disso, sabemos que $A_k \bigcap \overline{A_k} = \emptyset$, $A_k \bigcup \overline{A_k} = B_k$, e que B_k possui $\binom{2n}{k}$ elementos. Com efeito,

$$\sum_{a_{V(F)} \in B_k} = \sum_{a_{V(F)} \in \overline{A_k}} + \sum_{a_{V(F)} \in A_k} = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{n}{l}\binom{n}{k-l} + 2\binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{n}{k-l} = \binom{2n}{k},$$

ou seja, isso é um caso particular da identidade de Chu-Vandermande. Logo,

$$\sum_{a_{V(F)} \in \overline{A_k}} = \binom{2n}{k} - 2\binom{n}{k} \tag{6.7}$$

Além disso, temos que

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} \tag{6.8}$$

Utilizando (6.7) e (6.8) em (6.6), obtemos

$$\mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) = (1-\alpha)^2 (1-(1-p)^n)^2 \tag{6.9}$$

Para satisfazer $\mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) = \mu_p(x_v = 1, x_w = 1)$, utilizando (6.3) e (6.9), obtemos

$$(1-\alpha)^2 (1-(1-p)^n)^2 = p^2$$

Logo,

$$\alpha = \frac{1-(1-p)^n - p}{1-(1-p)^n}$$

□

O Lema 6.0.3 explora o comportamento de P_n agindo em μ_p no cilindro $\{x \in \Omega; x_v = x_w = 1\}$ sendo $V(v) \bigcap V(w) = \emptyset$, e as posições v e w convenientemente escolhidos.

Como mostrado para P_2, a medida invariante obtida para P_n, na região em que o processo é não ergódico, não pode ser do tipo μ_p com $p \in (0,1)$. Tal resultado foi apresentado no Teorema 6.0.1, a qual a prova veremos a seguir.

Prova do Teorema 6.0.1. Para obter que a medida μ_p não é invariante para P_n, basta mostrarmos que existem $v, w \in \mathbb{Z}$ tais que $\mu_p \mathsf{P}_n(x_v = 1, x_w = 1) \neq \mu_p(x_v = 1, x_w = 1)$.

Neste sentido, sejam vizinhança $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, com $v_1 < \cdots < v_n$ e $v, w \in \mathbb{Z}$ tal que $w = v + v_n - v_1$. Daí, $V(v) \bigcup V(w)$ terá $2n-1$ elementos. Além disso, escrevemos este conjunto por $\{u_1, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}$, definindo para $i \in \{1, \ldots, n\}$, os vizinhos $u_i = v + v_i$ e $u_{n+i-1} = w + v_i$. Notadamente, $v + v_n = u_n = w + v_1$. Assim, como $a_{u_n} = a_{v+v_n} = a_{w+v_1}$, denotaremos $a_{V(F)} = a_{u_1} \cdots a_{u_{2n-1}} \in \{0,1\}^{2n-1}$.

Seja $B_k \subset \{0,1\}^{2n-1}$, definido de modo que, se $a_{V(F)} \in B_k$ então $a_{u_1} + \cdots + a_{u_{2n-1}} = k$. Agora, para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, definimos $A_k \subset B_k$ da seguinte forma

$$A_k = \{a_{u_1} = \cdots = a_{u_n} = 0 \quad \text{ou} \quad a_{u_n} = \cdots = a_{u_{2n-1}} = 0\}.$$

Também, denotamos $\overline{A_k} = B_k - A_k$. É fácil verificar que o número de elementos em A_k é

$$\binom{n}{0}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}\binom{n}{0} = 2 \cdot \binom{n-1}{k}.$$

Logo, o número de elementos em $\overline{A_k}$ é

$$\binom{2n-1}{k} - 2 \cdot \binom{n-1}{k}.$$

Além disso,

$$\theta_v^n(1|a_{V(v)})\theta_w^n(1|a_{V(w)}) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad a_{V(F)} \in B_0; \\ 0, & \text{se} \quad a_{V(F)} \in A_k; \\ (1-\alpha)^2, & \text{se} \quad a_{V(F)} \in \overline{A_k}. \end{cases}$$

Aplicando todas estas observações em (2.8), teremos

$$\begin{aligned}
\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1,x_w=1) &= \sum_{k=1}^{2n-1}\sum_{a_{V(F)}\in B_k}\mu_p(x_{V(v)}=a_{V(v)},x_{V(w)}=a_{V(w)})\cdot\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)})\cdot\theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)})\\
&= (1-\alpha)^2\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}p^k(1-p)^{2n-1-k}\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}p^k(1-p)^{2n-1-k}\sum_{a_{V(F)}\in B_k}\cdot\theta_v^{(n)}(1|a_{V(v)})\cdot\theta_w^{(n)}(1|a_{V(w)})\\
&= (1-\alpha)^2\left(\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}p^k(1-p)^{2n-1-k}-2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{2n-1-k}\right)\\
&= (1-\alpha)^2\cdot[1-(1-p)^{2n-1}-2(1-p)^n(1-(1-p)^{n-1})]\\
&= (1-\alpha)^2\cdot[1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n-1}]
\end{aligned}$$

Sabemos que $\mu_p(x_v=1,x_w=1)=p^2$. Daí, para obter $\mu_p\mathsf{P}_n(x_v=1,x_w=1)=\mu_p(x_v=1,x_w=1)$, será necessário que $(1-\alpha)^2\cdot[1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n-1}]=p^2$. Logo,

$$\alpha = 1-\frac{p}{\sqrt{1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n-1}}} \tag{6.10}$$

Por outro lado, pelo Lema 6.0.3, é necessário que

$$\alpha = 1-\frac{p}{\sqrt{1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n}}} \tag{6.11}$$

Ou seja, o resultado (6.11) junto com o (6.10), nos leva à verificar quando é satisfeita a identidade

$$1-\frac{p}{\sqrt{1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n-1}}} = 1-\frac{p}{\sqrt{1-2(1-p)^n+(1-p)^{2n}}}.$$

Como $n\geq 2$ e $p\in(0,1)$, esta identidade não é satisfeita.

Portanto, a Proposição 6.0.2, conclui nossa prova.

□

Nesta seção, embora consideramos P_n agindo no conjunto de medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, todas as nossas demonstrações podem ser estendidas para medidas de probabilidade em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

7 ANÁLISE NUMÉRICA

Quando analisamos alguns processos estocásticos é comum utilizarmos algumas aproximações determinísticas ou computacionais, para obter alguma sugestão sobre o comportamento e características do modelo. A aproximação determinística que utilizamos é conhecida por *aproximação de campo médio* [23]. Sejam $\mu \in \mathcal{M}$ uma medida uniforme, P_n, definido em (3.2) nosso operador de percolação com "n" vizinhos e $a_{V(v)} = a_{v+v_1} \dots a_{v+v_n}$. Usando (2.8) temos

$$\mu\mathsf{P}_n\left(\omega_v = 1\right) = \sum_{a_{V(v)} \in \{0,1\}^n} \mu\left(\omega_{V(v)} = a_{V(v)}\right) \cdot \theta_v\left(1 | a_{V(v)}\right).$$

Seja $B_k \subset \{0,1\}^n$. Se $a_{V(v)} \in B_k$ então $a_{V(v)}$ tem "x" elementos iguais a 1 e $n-k$ elementos iguais a zero. Daí,

$$\mu\mathsf{P}_n\left(\omega_v = 1\right) \quad = \sum_{k=1}^{n} \sum_{a_{V(v)} \in B_k} \mu\left(\omega_{V(v)} = a_{V(v)}\right) \cdot (1-\alpha) \tag{7.1}$$

Neste passo basta observar (3.3) e que B_0 é um conjunto unitário, cujo o único elemento tem todas as suas componentes iguais a zero. Note que, a cardinalidade de B_k é $\binom{n}{k}$. Substituindo μ por uma medida produto $\tilde{\mu}$, cujo $\tilde{\mu}(1) = \mu(1)$ em (7.1), teremos

$$(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} \sum_{a_{V(v)} \in B_k} \prod_{i=1}^{n} \tilde{\mu}\left(\omega_{v+v_i} = a_{v+v_i}\right) \quad = (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \tilde{\mu}^k(1)\tilde{\mu}^{n-k}(0)$$

Seja $x = \tilde{\mu}(1)$. Assim nossa aproximação de campo médio será

$$f(x) = \tilde{\mu}\mathsf{P}_n(1) = (1-\alpha)\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (1-\alpha)[1-(1-x)^n]$$

Diremos que nossa aproximação de campo médio, $f(\cdot)$, *sugere ergodicidade* se existe único valor $x^* \in [0,1]$ tal que $f(x^*) = x^*$ e para todo $x \in [0,1]$, $f^n(x)$ converge para x^* quando n tende para infinito.

Em nosso primeiro estudo, verificaremos para quais valores de α, temos que $f(x) - x$ tem única raiz real em $[0, 1]$. Ao invés de trabalharmos com x, densidades de uns, iremos trabalhar com $y = 1 - x$, densidades de zeros. Ou seja,

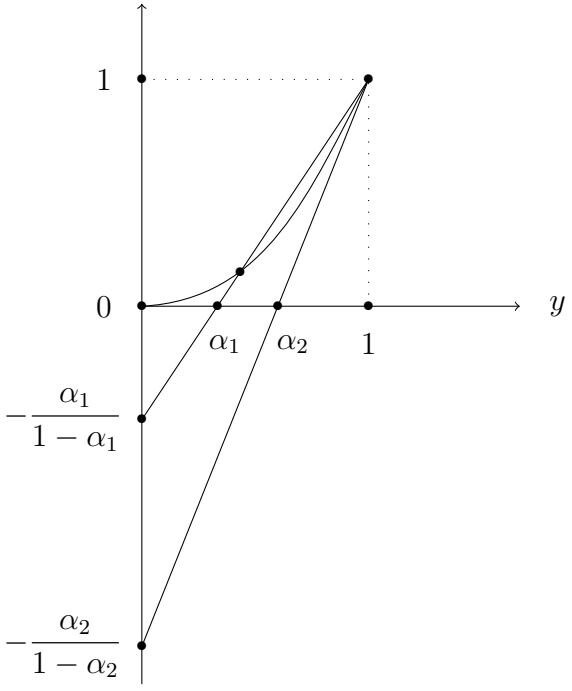
$$h(y) = (1 - \alpha)(1 - y^n) - 1 + y = -\alpha + y - (1 - \alpha)y^n$$

Daí,

$$h(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^n = \frac{y - \alpha}{1 - \alpha}. \tag{7.2}$$

Sabemos que $h(1) = 0$, isto é, 1 é uma raiz de $h(\cdot)$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Dado um valor arbitrário $n \in \mathbb{N}$, apresentaremos, por meio da Figura 7.1, os gráficos do lado esquerdo e direito de (7.2), ou seja, das curvas y^n e $\dfrac{(y - \alpha)}{(1 - \alpha)}$. Para o lado direito consideramos duas possibilidades para α_1 e α_2 do intervalo $(0, 1)$.

Figura 7.1: Ilustração gráfica das curvas y^n e $\dfrac{y - \alpha}{1 - \alpha}$.



No caso em que usamos α_1, há dois pontos que seccionam y^n, isto é, duas raízes para $h(\cdot)$, onde neste caso é associado com a não-ergodicidade do nosso processo. No outro caso há somente uma raiz, que é 1. Este caso será associado a ergodicidade de nosso processo. Se $y = \alpha$ então $\dfrac{y - \alpha}{1 - \alpha}$ é zero.

Nominamos por $A1$ a área do quadrado unitário, subtraindo-se a área sob a curva y^n com $y \in [0,1]$. Nominamos $A2$ a área do triângulo com base de comprimento $1-\alpha$ e altura 1. Suponha agora que $A1 + A2 < 1$, assim, temos que

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}(1-\alpha) < 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha > 1 - \frac{2}{n+1} \tag{7.3}$$

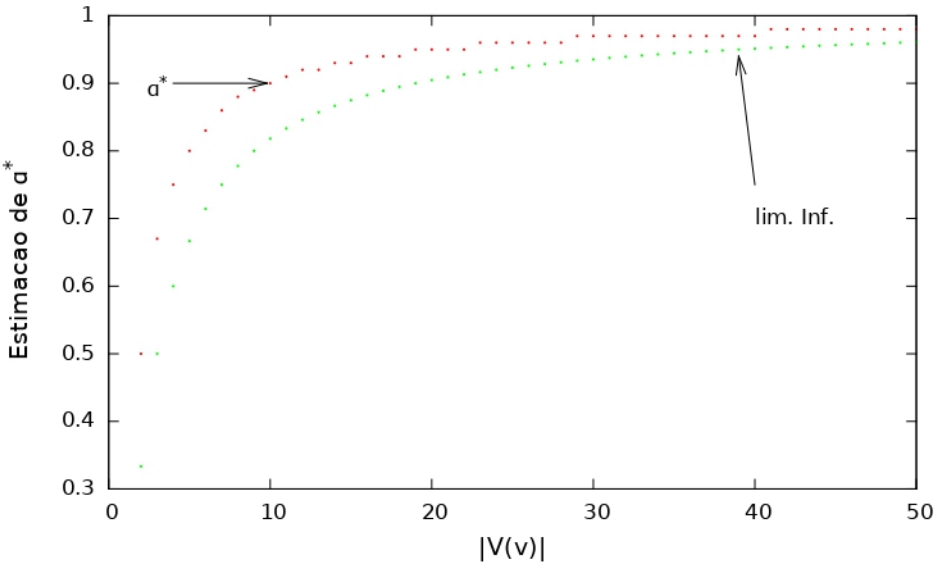
Aqui, tomamos α^* o valor para o qual: se $\alpha \geq \alpha^*$ então $h(\cdot)$ tem única raiz real, logo teremos ergodicidade; se $\alpha < \alpha^*$ teremos não-ergodicidade. De (7.3), obteremos que $1 - \frac{2}{n+1} < \alpha^*$.

Para obter uma melhor estimação de α^* fizemos a seguinte análise numérica. Tomamos $\alpha_0 = 0,5$ e $\alpha_i = \alpha_0 + 0,01 \cdot i$, com $i = 1, 2, \ldots, 50$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$i_n = \min\{i; h(\alpha_i) \text{ tem única raiz real}\}.$$

Logo, guardamos o par (n, α_{i_n}). Fazendo isto para $n = 2, 3, 4, \ldots, 50$. Na Figura 7.2 é apresentado o gráfico resultante do conjunto de pontos $\{(2, \alpha_{i_2}); \ldots; (50, \alpha_{i_{50}})\}$. Além do conjunto de pontos $\{(2, 1 - \frac{2}{3}); \ldots; (50, 1 - \frac{2}{51})\}$. Assumimos $\alpha_0 = 0,5$, pois, podemos calcular exatamente o valor α^* quando $n = 2$.

Figura 7.2: Ilustração gráfica da estimativa e limite inferior para α^*.



Buscamos uma estimativa inferior para o valor de α^* para o qual $\alpha < \alpha^*$ implica existência de duas raízes e $\alpha \geq \alpha^*$ a existência de uma única raiz.

A área do quadrado unitário é 1. Logo, $1 - \dfrac{1}{n+1}$ é a área do quadrado subtraindo a área sob a curva y^n com $y \in [0,1]$. Por outro lado, temos a área do triângulo retângulo de fora com comprimento $1-\alpha$ e altura 1. Assim, sua área é $\dfrac{1-\alpha}{2}$. A soma destas áreas é maior que 1 quando

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1-\alpha}{2} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Daí,

$$\alpha^* \geq 1 - \frac{2}{n+1}.$$

No gráfico da Figura 7.2, exibimos o limite inferior obtido para α^*, $n \in \{2, 3, \ldots, 50\}$ fixo e fazendo α iniciar de 0.05 com incremento de 0.05, de modo que para cada valor de α verificamos se $h(\cdot)$ tem uma ou duas raízes reais. Quando pela primeira vez obtém que 1 é a única raiz de $h(\cdot)$, guardamos (e plotamos) este valor. Este é o valor de α^* que estimamos. Por outro lado, a área do triângulo precisa ser menor que $\dfrac{1}{n+1}$, ou seja,

$$\frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \alpha > 1 - \frac{2}{n+1}.$$

7.1 Modelagem e estudo computacional

Seja $\mathbb{Z}_m$ o conjunto dos restos da divisão inteira módulo m. Definimos nosso *espaço de configurações* por $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_m} = \Omega_m$. Cada $\tilde{C} \in \Omega_m$ é chamado *circular*, na qual denotaremos por $\tilde{C} = (c_i)_{i \in \mathbb{Z}_m}$.

Em analogia ao nosso operador de percolação P_n, definimos nosso operador de percolação, $\tilde{\mathsf{P}}_n = \tilde{\mathsf{R}}_\alpha \circ \tilde{\mathsf{D}}_n$, agindo em circulares. Claro que neste caso, teremos nossa clássica Cadeia de Markov homogênea no espaço e tempo. Além disso, para cada Circular, $\tilde{C}$, a sequência $\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{\mathsf{P}}_n, \tilde{C}\tilde{\mathsf{P}}_n^2, \ldots$ descreve uma trajetória do nosso processo iniciando-se na circular $\tilde{C}$. Dado $n = 2$ e $\tilde{C} \in \Omega_m$ teremos

$$(\tilde{C}\tilde{\mathsf{D}}_2)_{m-1} = \max\{c_{m-1}, c_m\} = \max\{c_{m-1}, c_{m \bmod m}\} = \max\{c_{m-1}, c_0\}.$$

Para um n qualquer teremos $(\tilde{C}\tilde{\mathsf{D}}_n)_i = \max\{c_{i \bmod m}, c_{(i+1) \bmod m}, \ldots, c_{(i+n-1) \bmod m}\}$. Isto é bem conhecido na literatura por *condições de contorno periódicos*.

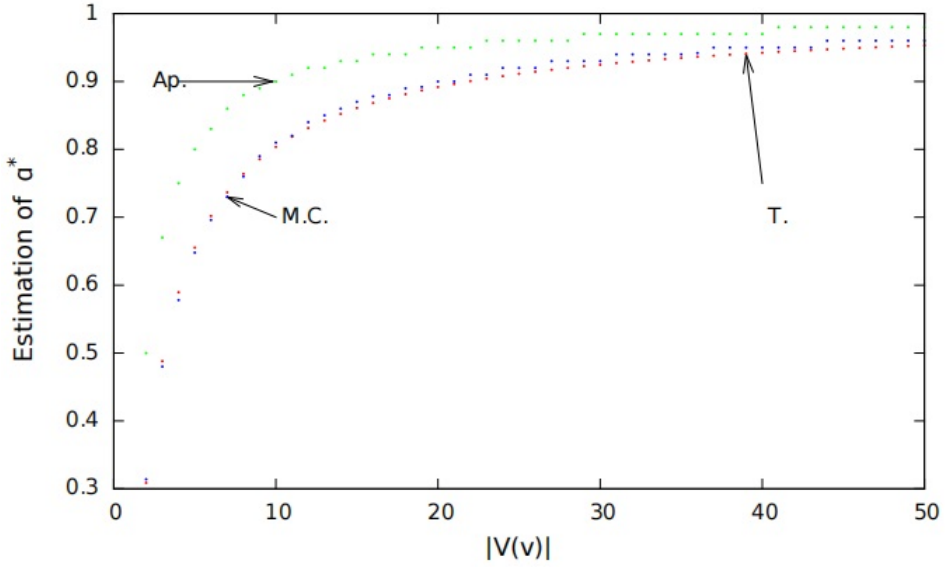
Em todos os nossos estudos computacionais adotaremos $\tilde{C} = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}_m}$ onde $c_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}_m$ tal que para cada vizinhança dos n vizinhos, tomamos $m = 1000 \cdot n$ e $T_n = m$. Diremos que nossa modelagem computacional *sugere ergodicidade*, se durante a simulação computacional da trajetória $\tilde{C}(\tilde{\mathsf{P}}_n)^t$, existir $t_j \in \{1, 2, \ldots, T_n\}$ tal que $\tilde{C}(\tilde{\mathsf{P}}_n)_i^{t_j} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}_m$. Caso contrário, diremos que nossa modelagem computacional *sugere não-ergodicidade*.

Fixado n, teremos $\alpha_n^j = 0,11 + 0,01 \cdot j$ onde $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 89\}$. Buscamos por

$$\alpha_n^* = \min\{\alpha_n^j : \text{ nosso modelo sugere ergodicidade}\} \tag{7.4}$$

Repetimos este procedimento cinco vezes, obtendo cinco possíveis valores para (7.4). Fazemos a média aritmética destes valores, esta será a estimativa para α^* com n dado. Na Figura 7.3 é exibido estas estimativas para $n \in \{2, 3, \ldots, 50\}$, utilizando: a modelagem computacional (M.C.), no gráfico representada pela cor azul; bem como, também são exibidos os resultados de α^* dados pelo Teorema Principal (T.), no gráfico representada pela cor vermelha, e pela aproximação de campo médio (Ap.), no gráfico representada pela cor verde.

Figura 7.3: Ilustração gráfica das estimativas de (M.C.), (T.) e (Ap.).



Chamamos de *grafo de evolução tempo-espaço* a representação gráfica dos vértices do grafo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$. Na modelagem computacional este grafo é reescrito como $\mathbb{Z}_m \times \{0, \ldots, T\}$ sendo $\mathbb{Z}_m$ as posições das componentes das circulares e T o tempo (finito) estabelecido para finalizar a computação.

Em alguma situação a análise da evolução do tempo-espaço auxilia na visualização da evolução temporal da modelagem, por meio de PCA, de processos físicos ou biológicos.

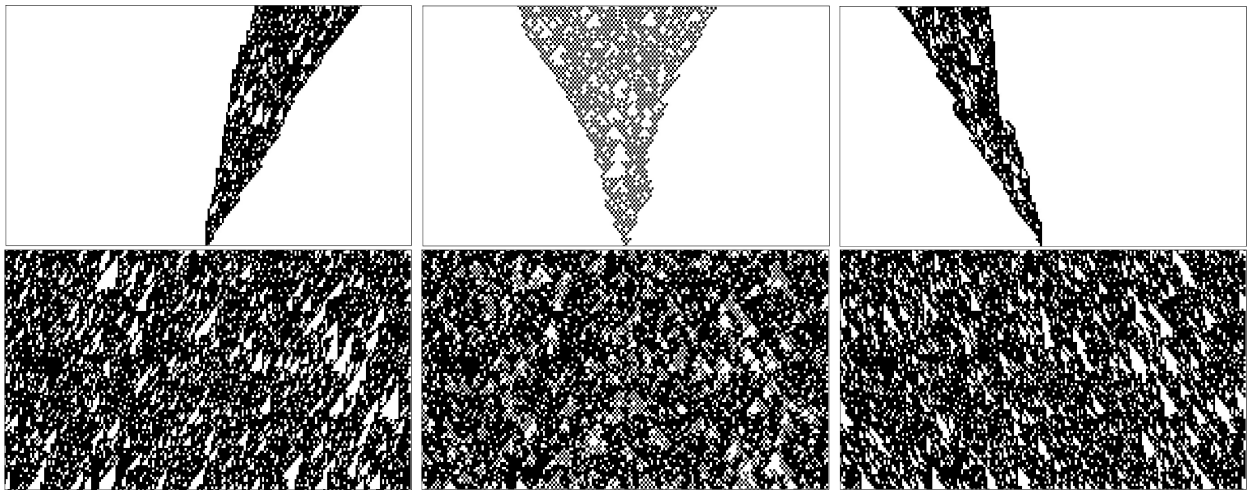
Na Figura 7.4 exibimos 6 figuras em duas linhas, para todas as figuras o grafo de evolução tempo-espaço ilustrado considera $\mathbb{Z}_{200} \times \{0, \ldots, 100\}$, $n = 2$, e $\alpha = 0,2$. Assumimos: na primeira coluna vizinhança $\{-1, 0\}$; na segunda coluna vizinhança $\{-1, 1\}$; e na terceira coluna vizinhança $\{0, 1\}$. Para a primeira linha tomamos circular inicial $\tilde{C} = (c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{200}}$ onde

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 99; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para a segunda linha tomamos circular inicial $\tilde{C} = (c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{200}}$ onde $\mathbb{P}(c_i = 1) = \mathbb{P}(c_i = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Figura 7.4: Ilustração da evolução do tempo-espaço onde $t = 100$, $\alpha = 0.2$, e $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{200}}$

Vizinhança $\{-1, 0\}$ Vizinhança $\{-1, 1\}$ Vizinhança $\{0, 1\}$.



A Proposição 7.1.1 traz algumas respostas para esta questão. Chamamos $s \in \Omega$ uma *ilha* se existe $A \subset \mathbb{Z}$ finito e não-vazio tal que $s_i = 0$ se $i \notin A$ e $s_i = 1$ para algum $i \in A$.

Proposição 7.1.1. *Sejam $\alpha \in (0,1)$, P_n o nosso operador de percolação e*

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}; \quad 0 \leq v_1 < \cdots < v_n \ (v_n < \cdots < v_1 \leq 0, \textit{respectivamente}).$$

Se $s \in \Omega$ é uma ilha, então

$$\lim_{t\to\infty} \delta_s \mathsf{P}_n^t \to \delta_{0_{\mathbb{Z}}}.$$

Prova. Faremos a prova para $0 \leq v_1 < \cdots < v_n$, pois, a situação $v_n < \cdots < v_1 \leq 0$ é similar. Dividiremos a prova em dois casos:

No caso 1, assumimos que $v_1 > 0$. Além disso, pelo Lema da monotonicidade entre operadores, vemos que

$$\mathsf{P}_n \prec \mathsf{D}_n.$$

Daí,

$$\delta_s \mathsf{P}_n^t \prec \delta_s \mathsf{D}_n^t \ \text{ para cada } \ t \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo, é suficiente mostrarmos que $\delta_s \mathsf{D}_n^t \to \delta_{0_{\mathbb{Z}}}$ com $t \to \infty$. Mas é fácil ver que dado qualquer $\omega \in \mathbb{Z}$ teremos que existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t > t_0$ implica que

$$\delta_s \mathsf{D}_n^t(x_\omega = 1) = 0$$

Segue que,

$$\lim_{t\to\infty} \delta_s \mathsf{D}_n^t = \delta_{0_{\mathbb{Z}}}.$$

No caso 2, assumimos que $v_1 = 0$. Definimos $J_{1,0}^v \in \Omega$ da seguinte forma

$$\left(J_{1,0}^v\right)_\omega = \begin{cases} 1, & \text{se } \ \omega \leq v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para qualquer ilha s existe v, tal que

$$s \prec J_{1,0}^v$$

Logo, pelo Lema 3.1.1 temos

$$\delta_s \prec \mathcal{J}_{1,0}^v,$$

onde $\mathcal{J}_{1,0}^v$ é a medida concentrada em $J_{1,0}^v$. Daí,

$$\delta_s \mathsf{P}_n^t \prec \mathcal{J}_{1,0}^v \mathsf{P}_n^t$$

Logo, é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}^v_{1,0}\mathsf{P}^t_n = \delta_{0_{\mathbb{Z}}}.$$

Faremos uma apresentação informal da Transição do operador Q, o qual atua em $J^v_{1,0}$.

$$J^v_{1,0}\mathsf{Q} = \begin{cases} J^v_{1,0} & \text{com probabilidade } 1-\alpha \\ J^{v-1}_{1,0} & \text{com probabilidade } \alpha \end{cases}$$

Ao associarmos cada ação do operador Q a uma variável aleatória de Bernoulli X, com parâmetro α. Vemos que a sequência de variável aleatória independente e identicamente distribuída $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$, cujo $X_t = X$ em $t = 1$, indica os "sucessos" ou "fracassos" na ação do operador Q. Usando Borel-Cantelli em que $\mathbb{P}(X_t = 1 \text{ infinitas vezes})$. Logo,

$$J^v_{1,0}\mathsf{Q}^t \to \delta_0.$$

Portanto,

$$\mathcal{J}^v_{1,0}\mathsf{P}^t_n \prec \mathcal{J}^v_{1,0}\mathsf{Q}^t, \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}_+.$$

□

Como pode ser visto, em [22], a Proposição 7.1.1 não é verdade se $v_1 < 0$ e $v_k > 0$ para algum $k \in \{2, \ldots, n\}$. Na Figura 7.4 ilustramos estes comportamentos.

A seguir, apresentamos um pseudo-código que simula o processo $\mathsf{P}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$, e logo após apresentamos as Figuras 7.5 a 7.7, a fim de individualizar cada imagem da Figura 7.4 com maior resolução, permitindo uma melhor visualização da evolução do processo de percolação, sendo a distribuição inicial concentrada em configurações cujo a quantidades de componentes são iguais a 1 seja finito.

Algoritmo 1 PROCEDIMENTO QUE IMITA O PROCESSO $\mathsf{P}_n = \mathsf{R}_\alpha \circ \mathsf{D}_n$

Entrada: Consideramos uma circular com m componentes e fazemos $c_0^0 = c_1^0 = \ldots = c_{m-1}^0 = 1$

início
  fixe $\alpha \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$
  para cada $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ **faça**
    para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ **faça**
      $\max\{c^t_{i \bmod m}, c^t_{(i+1) \bmod m}, \ldots, c^t_{(i+n-1) \bmod m}\}$
      se $\max\{c^t_{i \bmod m}, c^t_{(i+1) \bmod m}, \ldots, c^t_{(i+n-1) \bmod m}\} = 0$ **então**
        $c_i^{t+1} = 0$
      fim
      se $\max\{c^t_{i \bmod m}, c^t_{(i+1) \bmod m}, \ldots, c^t_{(i+n-1) \bmod m}\} = 1$ **então**
        para variável aleatória U com distribuição uniforme em $[0,1]$ **faça**
          se $U \leq \alpha$ **então**
            $c_i^{t+1} = 0$
          fim
          se $U > \alpha$ **então**
            $c_i^{t+1} = 1$
          fim
        fim
      fim
      faça $i = i + 1$ repetindo o passo 4 até $i = m - 1$
    fim
    faça $t = t + 1$ repetindo o passo 3 até $t = T$
  fim
fim

Saída: Estado das componentes $c_0^T, c_1^T, \ldots, c_{m-1}^T$

Figura 7.5: Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{-1, 0\}$

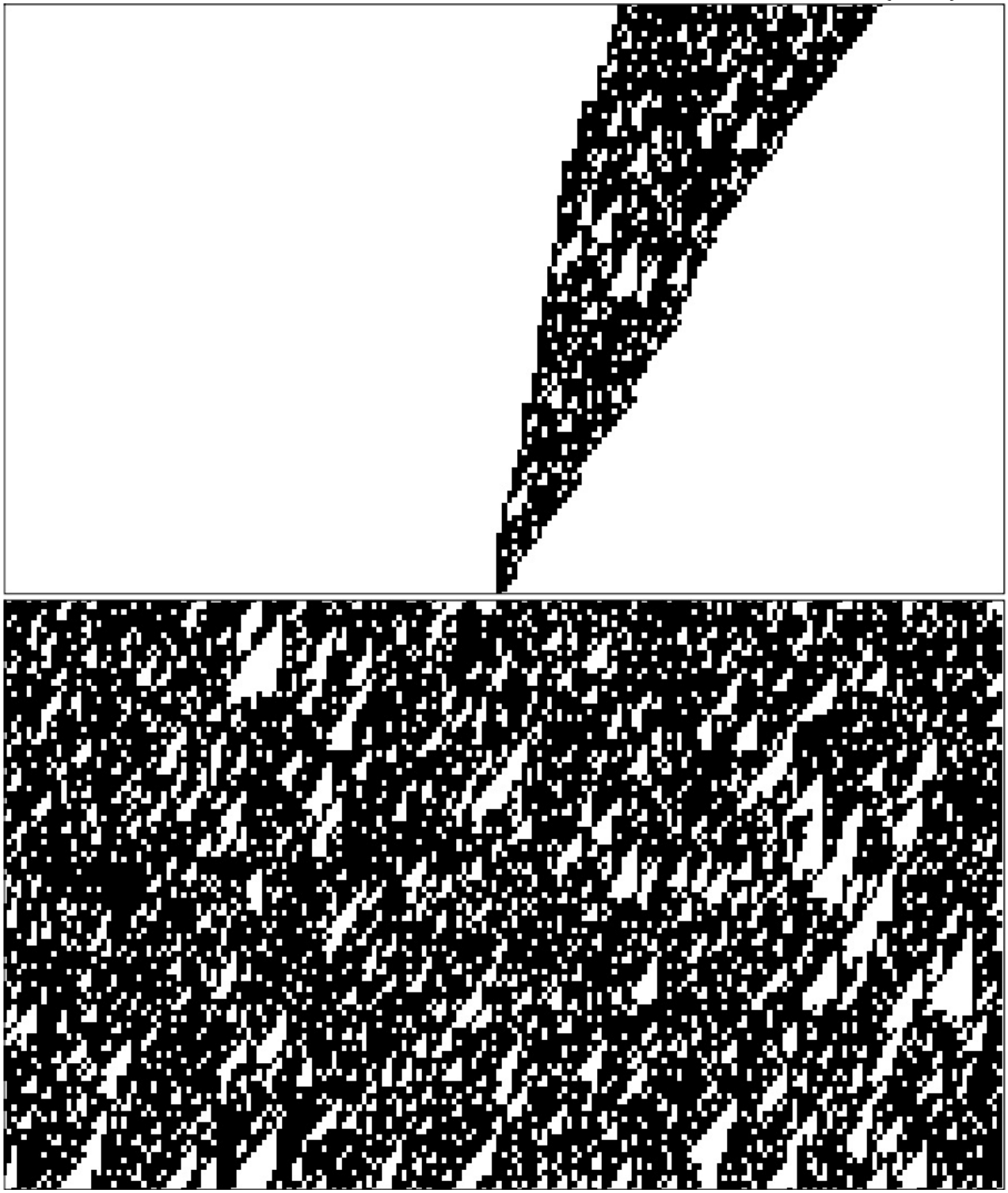


Figura 7.6: Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{-1, 1\}$

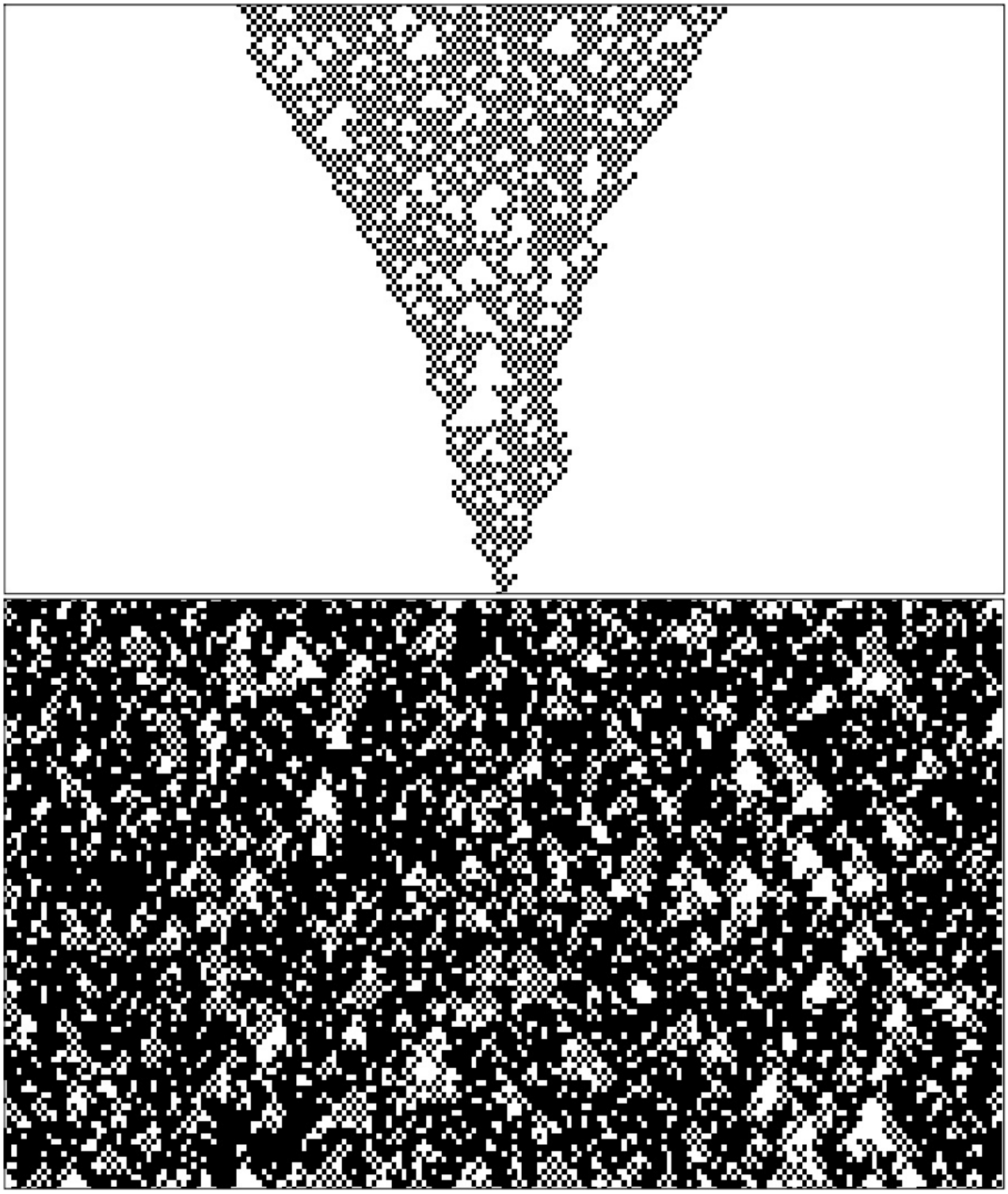
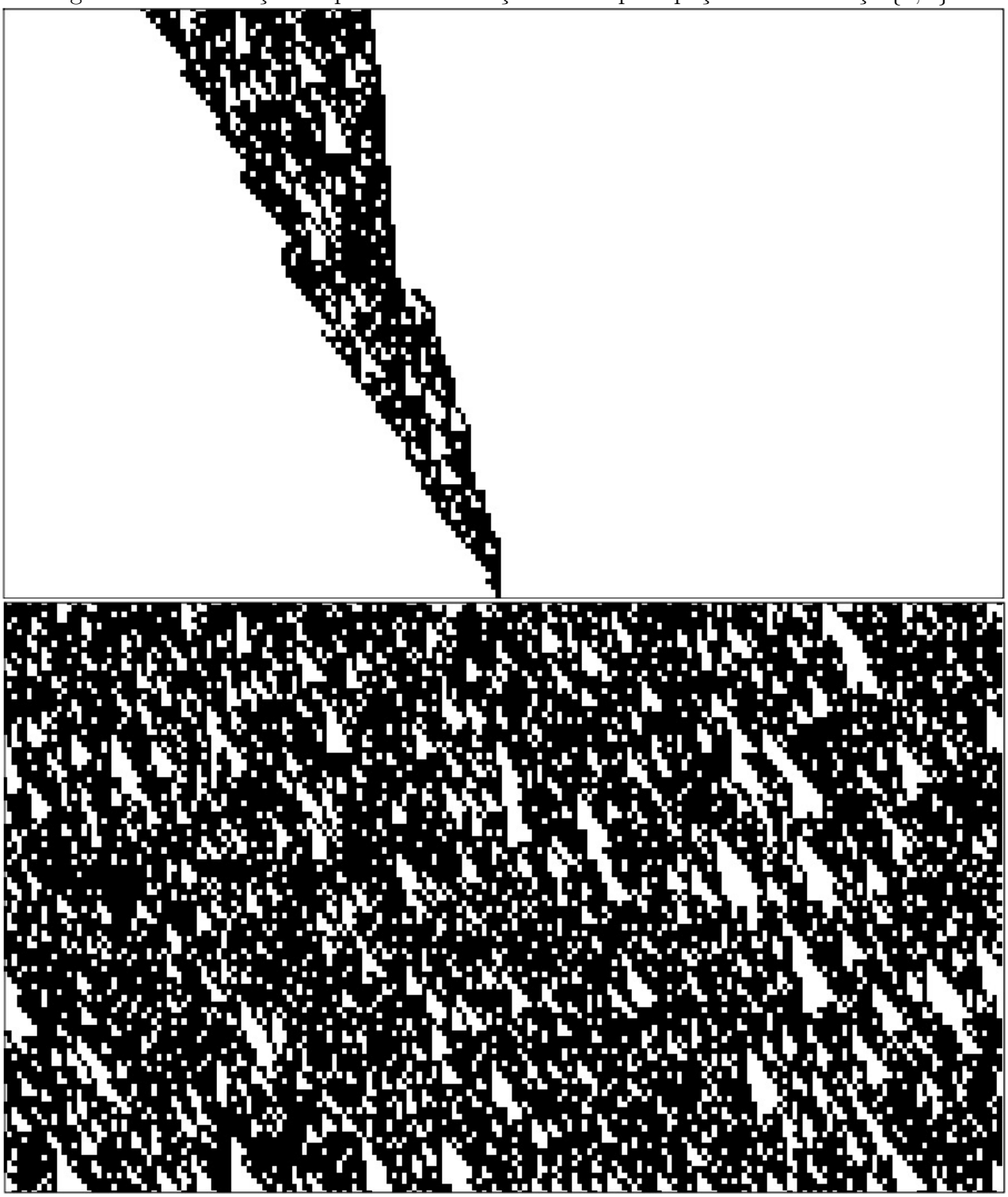


Figura 7.7: Ilustração ampliada da evolução do tempo-espaço da vizinhança $\{0, 1\}$



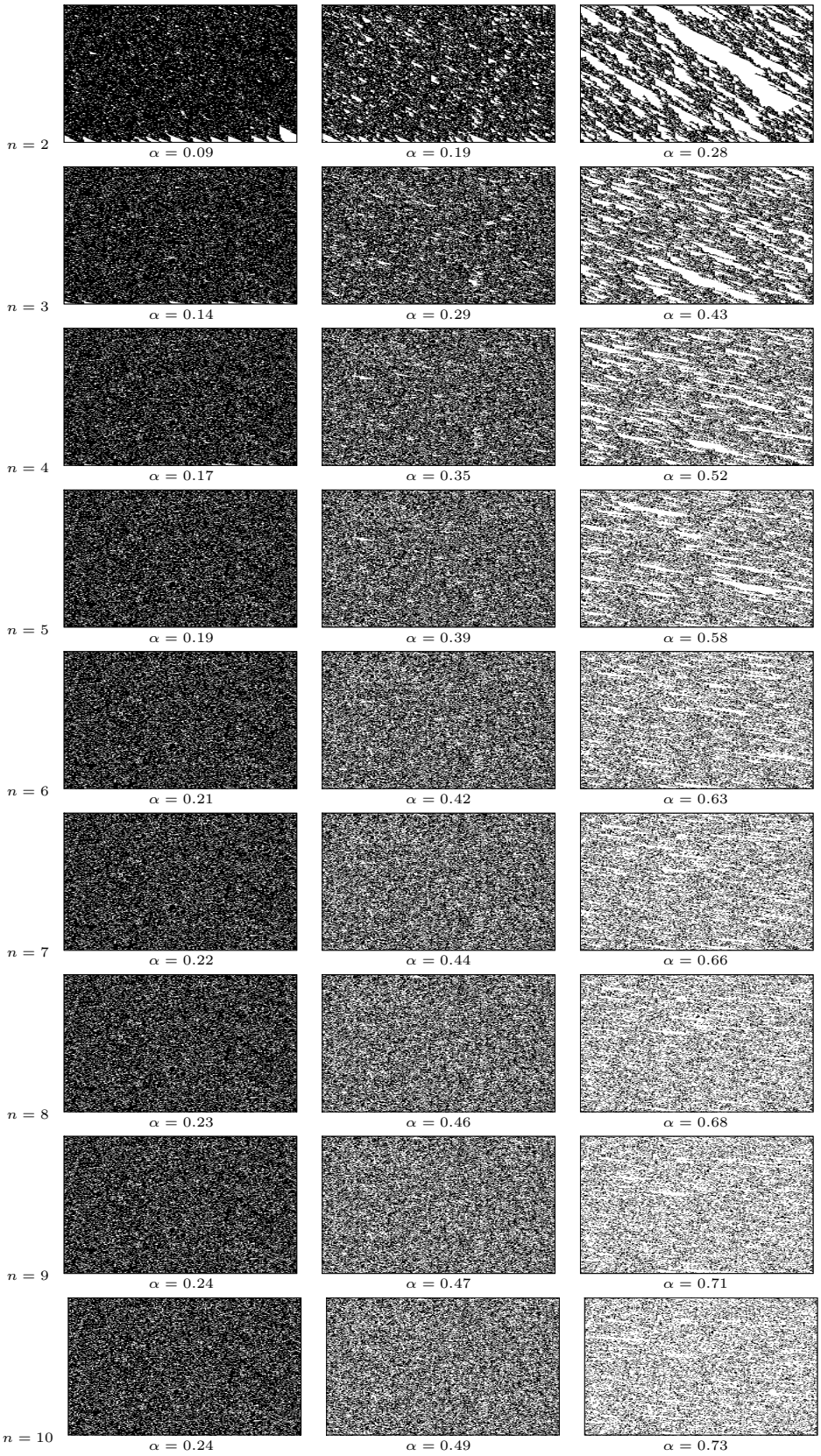
Nossa proposta é exibir a evolução do espaço-tempo quando o parâmetro $\alpha < \alpha^*$. Ou seja, o processo encontra-se na região de não ergodicidade.

Para nossa modelagem computacional, tomamos $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{200}}$, $T = 300$, toda circular inicial $\tilde{C} = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}_{200}}$ na forma $\mathbb{P}(c_i = 0) = \mathbb{P}(c_i = 1)$, e para cada $n \in \{2, 3, \ldots, 10\}$, tomamos a nossa estimativa de α^*, conforme apresentado na Seção 5.1, na qual denotamos por α_n^* e reduzimos em 10% com o intuito de reduzir a flutuação.

Focamos em três situações, que nominamos: *profundo*, *médio* e *fronteira*. Diremos que a evolução do espaço-tempo é profundo quando $\alpha = \dfrac{3\alpha_n^*}{10}$; médio quando $\alpha = \dfrac{3\alpha_n^*}{5}$; e fronteira quando $\alpha = \dfrac{9\alpha_n^*}{10}$.

Na Figura 7.8 cada linha é referente a um mesmo valor n fixado e cada coluna refere-se a um e somente um dos cenários profundo, médio e fronteiro, nesta ordem. Embora não colocamos na tese, foram feitos as evoluções de tempo-espaço para $n \in \{2, \ldots, 50\}$. Contudo, constatamos que quando $n \geq 10$ não havia mudança visualmente significava nos padrões apresentados. Acreditamos, mas isto necessita ser melhor analisado, que este comportamento estável deve-se ao fato que assumimos $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_{200}}$. Logo, acreditamos que o tamanho da vizinhança é significativamente grande em relação ao tamanho (número de componentes) do sistema. Contudo, é necessário um estudo mais detalhado, para estabelecer qual deve ser o tamanho do sistema, sendo especificado a vizinhança.

Figura 7.8: Ilustração da evolução do tempo-espaço onde $t = 300$ e $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}_{200}}$



8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O resultado mais importante deste trabalho, chamado Teorema Principal, estabelece melhores estimativas para o nosso parâmetro crítico, α^*. Para isso, apresentamos uma nova metodologia para obter o limite inferior do parâmetro crítico, α^*. O qual é quantitativamente igual ao melhor resultado conhecido (ver [21]). Bem como, apresentamos um melhoramento para o resultado obtido em [27], obtendo um melhor limite superior para α^*. Além disso, na região de não ergodicidade, mostramos que há ao menos duas medidas invariantes.

Também vimos que fixado o número de vizinhos, n, independente da localização deles obtemos o mesmo parâmetro crítico. Contudo, na região de não-ergodicidade do processo, como pode ser visto em [22], a posição dos vizinhos afeta a dinâmica do processo. No referido trabalho, é provado que se tomarmos $n = 2$ e vizinhos v_1 e v_2 tais que $0 \leq v_1 < v_2$ ou $v_2 < v_1 \leq 0$ e δ_s concentrado na configuração onde o número de posições $i \in \mathbb{Z}$ tais que $s_i = 1$, é finito, então $\delta_s \mathsf{P}^t \to \delta_{0_\mathbb{Z}}$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Mas se $v_1 < 0 < v_2$ então existe $\tilde{\alpha}$ tal que $\alpha < \tilde{\alpha}$ implicando $\delta_s \mathsf{P}^t$ não converge para $\delta_{0_\mathbb{Z}}$. Logo, ainda há uma tarefa de entender o que ocorre na região de não-ergodicidade.

Embora tenhamos trazido muitas respostas, novas perguntas se formaram. Por exemplo:

(i) Como provado no processo de Stavskaya [13], na região de não ergodicidade do operador de percolação, há somente duas medidas invariantes linearmente independentes?

(ii) Como podemos classificar a medida invariante não trivial que identificamos? É uma medida de Markov?

(iii) Como podemos estabelecer uma metodologia para obter o limite inferior para α^*, de tal modo que este limite seja função do número de vizinhos e convirja para 1 quando n tende para infinito?

REFERÊNCIAS

[1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (Ed.). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. US Government printing office, 1968.

[2] BAPAT, R. B. *Graphs and Matrices*. 1ª ed. New Deli: Springer, 2010.

[3] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[4] BELYAEV, Y.K.; GROMAK, Y.I.; MALYSHEV, V.A. *Invariant random Boolean fields*. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, v. 6, p. 792-799, 1969.

[5] BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. Cambridge university press, 1993.

[6] BILLINGSLEY, Patrick. *Convergence of Probability Measures*. Space, v. 100, p. 80-120. John Wiley & Sons, 1999.

[7] BRADBENT, S. R., HAMMERLEY, J. M. *Percoletion process I. Crystals and mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 53, 629-641, 1957.

[8] CHASSAING, P., MAIRESSE, J. *A non-ergodic probabilistic cellular automaton with a unique invariant measure*. Stochastic processes and their applications, v. 121, n. 11, p. 2474-2487, 2011.

[9] DEPOORTER, J.; MAES, C. *Stavskaya's measure is weakly Gibbsian*. Markov Process. Relat. Fields, 12.4: 791-804. 2006.

[10] DEUTSCH, A.; DORMANN, S. *Mathematical Modeling of Biological Pattern Formation*. In: Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation. Birkhäuser, Boston, MA, p. 49-61. 2017.

[11] FATÈS, N.; MARCHAND, R.; MARCOVICI, I. *A decentralised diagnosis method with probabilistic cellular automata*. In: International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems. Cham: Springer Nature Switzerland, p. 60-73. 2023.

[12] HARRIS, T. E., *Contact interactions on a lattice*, Ann. Probab. 2(6), 969-988, 1974.

[13] LEONTOVICH, A. M.; VASERSTEIN, L. N. *On invariant measures of some Markov operators which describe a homogeneous random medium*. Problems of Information Transmission, v. 6, n. 1, p. 71-80, 1970.

[14] LI, W. *Nonlocal cellular automata*. In: Pattern Formation in the Physical and Biological Sciences. CRC Press, p. 189-200. 2018.

[15] LIGGETT, T. M. *Interacting particle systems*. New York: Springer, 1985.

[16] LOUIS, P.-Y.; NARDI, F. R. *Probabilistic cellular automata: Theory, applications and future perspectives*. Springer, 2018.

[17] MAIRESSE, J.; MARCOVICI, I. *Probabilistic cellular automata and random fields with iid directions*. In: Annales de l'IHP Probabilités et statistiques. p. 455-475. 2014.

[18] MENDONÇA, J. R. G. *Monte Carlo investigation of the critical behavior of Stavskaya's probabilistic cellular automaton*. Physical Review E, v. 83, n. 1, p. 012102, 2011.

[19] PEIERLS, R. *On Ising's model of ferromagnetism.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 32. nº. 3. Cambridge University Press, 1936.

[20] PONSELET, L. *Phase transitions in probabilistic cellular automata*. arXiv preprint arXiv:1312.3612, 2013.

[21] RAMOS, A. D., SOUSA, C. S., RODRIGUEZ, P. M., e CADAVID, P. *An Improved Lower Bound for the Critical Paramter of Process Stavskaya*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 102(3), 517-524, 2020.

[22] RAMOS, A. D.; DA SILVA, C. D. B. *Locality of the interaction affects dynamics in probabilistic cellular automata*. Journal of Mathematical Physics, v. 63, n. 6, 2022.

[23] RAMOS, A. D.; TOOM, A. *Chaos and Monte Carlo approximations of the flip-annihilation process.* Journal of Statistical Physics, v. 133, n. 4, p. 761-771, 2008.

[24] SCHIFF, J. L. *Cellular automata: a discrete view of the world*. John Wiley e Sons, 2011.

[25] STAVSKAYA, O. N.; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. *Problemy Kibernet*. 20. 1968.

[26] STAVSKAYA, O. N.; PIATETSKI-SHAPIRO, Ilya I. *On homogeneous nets of spontaneously active elements*. Systems Theory Res, v. 20, p. 75-88, 1971.

[27] TAGGI, L., *Critical Probabilities and Convergence Time of Percolation Probabilistic Cellular Automata*, J. Stat. Phys. 159(4), 853-892, 2015.

[28] TOOM, A. L. *A Family of uniform nets of formal neurons*, Soviet Math. Dokl., 1968.

[29] TOOM, A. L. *Cellular automata with errors: problems for students of probability*. Topics in contemporary probability and its applications, p. 117-157, 1995.

[30] TOOM, A. L. *Contours, convex sets, and cellular automata*. Publicaçoes Matemáticas do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Rio de Janeiro, p. 230, 2001.

[31] TOOM, A., VASILYEV, N., STAVSKAYA, O., MITYUSHIN, L., KURDYUMOV, G. and PIROGOV, S. *Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V, Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications. Manchester University Press, 1990.

[32] WILLARD, S. *General topology*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004.

APÊNDICE A - Elementos de Percolação em $\mathbb{Z}^2$

Considere um grafo cujo os vértices $v \in \mathbb{Z}^2$, e para $v, u \in \mathbb{Z}^2$ temos que se $|u - v| = 1$ então, há um elo conectando-os. O vértice $(0, 0)$ é chamado *Origem*. Um elo de v à u pode ser aberto ou fechado, os quais denotaremos v — u e $v \not- u$ respectivamente.

Chamemos de *Caminho aberto* uma sequência de vértices adjacentes dois a dois, $v_1, \ldots, v_n$, conectados entre si por elos abertos, ou seja, v — v_1 , v_1 — v_2 , $\ldots$, v_{n-1} — v_n, neste caso, denotaremos por $v \longleftrightarrow v_n$ o caminho que leva v_1 até v_n. Seja,

$$\gamma_v = \{u \in \mathbb{Z}^2;\ v \longleftrightarrow u\}$$

o conjunto de vértices que compõe o caminho. Denote por $|\gamma_v|$ o comprimento do caminho. Um caminho onde todos os vértices são distintos é chamado de *Caminho auto-evitando*. Um caminho auto-evitando infinito começando da origem é chamado *Percolação da Origem*. Um conjunto de elos fechados que tornam a percolação impossível é chamado *Obstáculo*. Um conjunto com uma quantidade mínima de elos que tornam a percolação impossível é chamado *Obstáculo mínimo*. Um caminho auto-evitando, no qual o ponto inicial e o ponto final coincidem é chamado *Contorno*. Destacamos que todo contorno divide o plano em duas partes - uma finita e outra infinita. Assim, dizemos que um contorno cerca um ponto, se este ponto estiver na parte finita, e ainda dizemos que um contorno está aberto, se todos os seus elos estiverem abertos.

Seja G um grafo planar, dizemos que G^* é o grafo dual de G quando cada aresta de G é seccionada por uma aresta de G^*.

Consideremos a regra A.1 (ver [19])

$$\begin{cases} \text{O elo do grafo dual está aberto se, e só se,} \\ \text{o elo correspondente do grafo original está fechado.} \end{cases}$$

Lema (do grafo dual [30]). *Se a regra A.1 for aplicada, não há percolação da origem até ∞ em um grafo planar se, e só se, em seu grafo dual há um contorno aberto cercando a origem.*

Há também outro tipo de percolação, conhecida por *percolação orientada*. Neste caso, os elos são orientados. Como feito anteriormente neste seção, dizemos que um caminho está aberto se todos seus elos estiverem abertos (na direção adotada) e um vértice está aberto se existe um caminho aberto da origem até este vértice. Da mesma forma, a percolação significa que o conjunto de vértices abertos é infinito ou que equivalentemente existe um caminho aberto infinito partindo da origem.

Fixemos uma orientação no plano. Então, para cada direção de um elo do grafo original existe uma direção correspondente ao elo do grafo dual.

Consideremos a regra A.2 (ver [19])

$$\begin{cases} \text{Todo elo do grafo dual está aberto em uma certa direção se, e só se,} \\ \text{o elo correspondente do grafo original está fechado na direção correspondente.} \end{cases}$$

Lema (do grafo dual orientado [30]). *Se a regra A.2 for aplicada, não há percolação em um grafo planar orientado da origem até ∞ se, e só se, no grafo dual existe um contorno aberto ao redor da origem na direção positiva, ou seja, no sentido anti-horário.*

APÊNDICE B - Medida Invariante

O teorema da medida invariante, juntamente com sua prova, podem ser vista em [30]. Aqui apresentamos ambos, sendo em nosso texto sua prova mais detalhada do que aquela que encontramos.

Teorema (da medida invariante [30]). *Considere o espaço de configurações* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *e* $\mathcal{M}$ *o espaço de medida de probabilidade em* Ω. *Se* $\mathsf{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, *definido em (2.8), for monótona, então* $(\delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t)_{t\in\mathbb{N}}$ *e* $(\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t)_{t\in\mathbb{N}}$ *convergem.*

Prova. Sabemos que dado $\mu \in \mathcal{M}$, obtemos $\delta_{0_{\mathbb{Z}}} \prec \mu \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$. Assim, temos que $\delta_{0_{\mathbb{Z}}} \prec \delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}$ e $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P} \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$. Sendo P monótono, concluímos que

$$\delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t \prec \delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^{t+1} \quad \text{e} \quad \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^{t+1} \prec \delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{N}.$$

Logo, para quaisquer conjunto superior S ou conjunto inferior I, ver (3.6), as sequências

$$\left(\delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t(S)\right)_{t\in\mathbb{N}};\ \left(\delta_{0_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t(I)\right)_{t\in\mathbb{N}};\ \left(\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t(S)\right)_{t\in\mathbb{N}};\ \text{e,}\ \left(\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\mathsf{P}^t(I)\right)_{t\in\mathbb{N}}$$

são monótonas e limitadas, consequentemente, convergentes. Agora, tomamos um cilindro qualquer C e definimos

$$\mathrm{Sup}(C) = \{x \in \Omega;\ \exists\ y \in C,\ y \prec x\}.$$

Como $x \prec y$, consideraremos o caso em que $x = y$, ou seja, $x_i = y_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ temos que $C \subset \mathrm{Sup}(C)$. Além disso, $\mathrm{Sup}(C)$ é conjunto superior, uma vez que

$$\begin{aligned}(x \in \mathrm{Sup}(C), x \prec y) &\Rightarrow \exists z \in C; z \prec x, x \prec y \\ &\Rightarrow \exists z \in C; z \prec x \prec y \\ &\Rightarrow \exists z \in C; z \prec y \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Sup}(C)\end{aligned}$$

Agora, definimos $\mathrm{Sup}(C)' = \mathrm{Sup}(C) - C$ é fácil ver que $\mathrm{Sup}(C)'$ é conjunto superior. Como $C = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Sup}(C)'$ e $\mathrm{Sup}(C)' \subset \mathrm{Sup}(C)$, teremos, para $\mu \in \{\delta_0, \delta_1\}$,

$$\mu\mathsf{P}^t\left(C\right) = \mu\mathsf{P}^t\left(\mathrm{Sup}(C)\right) - \mu\mathsf{P}^t\left(\mathrm{Sup}(C)'\right)$$

como $\mu\mathsf{P}^t(\mathrm{Sup}(C))$ e $\mu\mathsf{P}^t(\mathrm{Sup}(C)')$ convergem, $\mu\mathsf{P}^t(C)$ converge. Daí, concluímos a prova. □

APÊNDICE C - Ação do Operador do Exemplo 5, em cilindro, fixadas ao menos duas posições.

Retomemos o enunciado do Exemplo 5.

Sejam $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $v \in \mathbb{Z}$, $V(v) = \{v, v+1\}$,

$$\theta_v(\ 0 \mid x_v\ x_{v+1}\ ) = \begin{cases} \alpha & ,\ se\ x_v = x_{v+1}; \\ \beta & ,\ se\ x_v \neq x_{v+1}, \end{cases} \ e,\ \ \theta_v(\ 1 \mid x_v\ x_{v+1}\ ) = \begin{cases} 1-\alpha & ,\ se\ x_v = x_{v+1}; \\ 1-\beta & ,\ se\ x_v \neq x_{v+1}, \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in [0,1]$. *Note que* $\theta_v(0|x_v x_{v+1}) + \theta_v(1|x_v x_{v+1}) = 1$.

Agora tomaremos um cilindro fino com exatamente duas posições fixadas $\{v_1, v_2\}$. Neste caso, haverá duas situações distintas:

(i) A diferença entre os vizinhos é igual a 1, ou seja, $V(v_1) \cap V(v_2) \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} \delta_x \mathsf{P}(\omega_{-1}{=}1, \omega_o{=}0) \ &= \ \delta_x(\omega_{-1}{=}1, \omega_o{=}1, \omega_1{=}1)\ \theta_{-1}(1|11)\ \theta_o(0|11) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}1, \omega_o{=}1, \omega_1{=}0)\ \theta_{-1}(1|11)\ \theta_o(0|10) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}1, \omega_o{=}0, \omega_1{=}1)\ \theta_{-1}(1|10)\ \theta_o(0|01) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}0, \omega_o{=}1, \omega_1{=}1)\ \theta_{-1}(1|01)\ \theta_o(0|11) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}1, \omega_o{=}0, \omega_1{=}0)\ \theta_{-1}(1|10)\ \theta_o(0|00) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}0, \omega_o{=}1, \omega_1{=}0)\ \theta_{-1}(1|01)\ \theta_o(0|10) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}0, \omega_o{=}0, \omega_1{=}1)\ \theta_{-1}(1|00)\ \theta_o(0|01) \\ &\quad + \ \delta_x(\omega_{-1}{=}0, \omega_o{=}0, \omega_1{=}0)\ \theta_{-1}(1|00)\ \theta_o(0|00) \\ &= \ \theta_{-1}(1|01)\ \theta_o(0|11) = \ (1-\beta)\ \alpha. \end{aligned}$$

(ii) A diferença entre os vizinhos é maior que 1, ou seja, $V(v_1) \cap V(v_2) = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
\delta_x \mathsf{P}(\omega_o{=}1, \omega_2{=}0) \;&=\; \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}1, \omega_2{=}1, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|11)\; \theta_2(0|11) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}1, \omega_2{=}1, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|11)\; \theta_2(0|10) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}1, \omega_2{=}0, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|11)\; \theta_2(0|01) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}0, \omega_2{=}1, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|10)\; \theta_2(0|11) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}1, \omega_2{=}1, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|01)\; \theta_2(0|11) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}0, \omega_2{=}1, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|00)\; \theta_2(0|11) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}1, \omega_2{=}0, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|01)\; \theta_2(0|01) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}0, \omega_2{=}0, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|10)\; \theta_2(0|01) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}0, \omega_2{=}1, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|10)\; \theta_2(0|10) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}1, \omega_2{=}0, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|11)\; \theta_2(0|00) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}1, \omega_2{=}1, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|01)\; \theta_2(0|10) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}0, \omega_2{=}0, \omega_3{=}1)\; \theta_o(1|00)\; \theta_2(0|01) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}0, \omega_2{=}1, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|00)\; \theta_2(0|10) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}1, \omega_2{=}0, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|01)\; \theta_2(0|00) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}1, \omega_1{=}0, \omega_2{=}0, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|10)\; \theta_2(0|00) \\
&\quad + \delta_x(\omega_o{=}0, \omega_1{=}0, \omega_2{=}0, \omega_3{=}0)\; \theta_o(1|00)\; \theta_2(0|00) \\
&=\; \theta_o(1|11)\; \theta_2(0|11) = \; (1-\alpha)\; \alpha.
\end{aligned}$$

Antes de estender a expressão (2.6) para um cilindro fino, introduziremos alguns elementos. Sejam $J = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{Z}^d$, $V(J) = V(v_1) \cup V(v_2)$ e $|V(J)|$ o número de elementos em $V(J)$. Lembremos que $\mathbb{A} = \{0, 1\}$. Vejamos agora, como ficariam as identidades apresentadas em (i) e (ii) com a introdução dessas notações.

(a) Para $J = \{-1, 0\}$ temos $V(J) = \{-1, 0, 1\}$ e

$$\mathbb{A}^{|V(J)|} = \{a_{V(J)} = (a_{-1}, a_o, a_1);\; a_{-1}, a_o, a_1 \in \mathbb{A}\}$$

(b) Para $J = \{0, 2\}$ temos $V(J) = \{0, 1, 2, 3\}$ e

$$\mathbb{A}^{|V(J)|} = \{a_{V(J)} = (a_o, a_1, a_2, a_3);\; a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}\}$$

Assim, podemos escrever de forma geral, para um cilindro fino dado pela intersecção de dois cilindros básicos disjuntos,

$$\delta_x \mathsf{P}\left(\omega_J = a_J\right) = \sum_{a_{V(J)} \in \mathbb{A}^{|V(J)|}} \delta_x\left(\omega_{V(J)} = a_{V(J)}\right) \theta_{v_1}\left(a_{v_1}|a_{V(v_1)}\right) \theta_{v_2}\left(a_{v_2}|a_{V(v_2)}\right)$$