



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

EVELLYN PRISCILA CORREIA DOS SANTOS

**PROPOSTA DE APLICAÇÃO WEB PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE**

Recife
2024

EVELLYN PRISCILA CORREIA DOS SANTOS

**PROPOSTA DE APLICAÇÃO WEB PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia
de Produção da Universidade Federal
de Pernambuco, como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia de Produção

Orientador: Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer

Recife

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, Evellyn Priscila Correia dos.

Proposta de aplicação web para resolução de problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade / Evellyn Priscila Correia dos Santos. - Recife, 2024.

73 p. : il., tab.

Orientador(a): Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Engenharia de Produção - Bacharelado, 2024.

Inclui referências.

1. Otimização Combinatória. 2. Pesquisa Operacional. 3. Heurísticas. 4. Meta-heurísticas. 5. Problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade. I. Kramer, Raphael Harry Frederico Ribeiro. (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)

EVELLYN PRISCILA CORREIA DOS SANTOS

**PROPOSTA DE APLICAÇÃO WEB PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia
de Produção da Universidade Federal
de Pernambuco, como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia de Produção

Aprovado em: 21/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer (Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Suzana de Franca Dantas Daher (Examinadora Interna)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. João Mateus Marques de Santana (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder a perseverança para ter chegado até aqui. Aos meus pais, Aurelia e João, por serem meus alicerces desde que fui colocada neste mundo e por realizarem o impossível inúmeras vezes para que eu pudesse chegar a lugares que eles próprios não tiveram a mesma oportunidade de chegar. Não encontro palavras suficientes para expressar minha gratidão por todo o apoio e incentivo que recebi para que eu pudesse realizar o sonho da graduação.

Agradeço também à minha avó Noêmia, minha segunda mãe, cuja contribuição foi fundamental para a formação do meu caráter e que a mim dedicou tanto carinho. Concluir essa etapa da minha vida só foi possível graças ao seu apoio incondicional.

Aos amigos que fiz na graduação, em especial à Laís e Duda, por compartilharem comigo os desafios dessa jornada e me ajudarem a não desistir. Ao meu namorado, Leandro, por todo o apoio e incentivo, especialmente durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu professor orientador, Raphael Kramer, pelos direcionamentos dados ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Sua ajuda, desde quando as minhas ideias ainda eram embrionárias, foi crucial para a concretização desse projeto.

Por fim, agradeço a mim mesma por ter aguentado firme mesmo quando a caminhada era árdua e a linha de chegada parecia nebulosa e distante. Finalizar esta etapa representa mais do que apenas um sentimento de dever cumprido, mas é a prova que sonhos se realizam quando, de fato, os buscamos.

RESUMO

A importância estratégica da roteirização de veículos na logística revela a necessidade de otimização de rotas para redução de custos operacionais, melhoria da eficiência no transporte de mercadorias e para o aumento dos níveis de satisfação do cliente. O presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma aplicação web para resolver problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade (CVRP), visando atender às demandas das empresas em busca de soluções práticas e eficazes para aprimorar sua logística. A solução proposta adota duas abordagens distintas: (a) uma abordagem exata, utilizando um modelo de programação linear inteira mista; e (b) uma abordagem aproximada, que utiliza a meta-heurística Busca Tabu (TS). Estas abordagens consideram as restrições operacionais inerentes ao CVRP para gerar rotas otimizadas, permitindo ao usuário escolher o método de resolução mais adequado. Os resultados dos experimentos com instâncias públicas demonstram a eficácia da ferramenta desenvolvida. Além disso, foi possível concluir que instâncias menores são resolvidas de forma satisfatória pelo método exato, enquanto para instâncias maiores, as heurísticas apresentaram melhores resultados em tempos de execução viáveis.

Palavras-chave: Otimização Combinatória; Pesquisa operacional; Heurísticas; Meta-heurísticas; Problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade.

ABSTRACT

The strategic importance of vehicle routing in logistics highlights the need to optimize routes to reduce operational costs, enhance transportation efficiency, and improve customer satisfaction levels. This work involves the development of a web application designed to solve capacitated vehicle routing problems (CVRP), aimed at meeting the demands of companies seeking practical and effective logistics solutions. The proposed solution employs two distinct approaches: (a) an exact approach using a mixed-integer linear programming (MILP) model; and (b) an approximate approach utilizing the Tabu Search (TS) metaheuristic. These approaches account for the operational constraints inherent to CVRP to generate optimized routes, providing users with the option to select the most suitable resolution method. Experimental results with public instances demonstrate the effectiveness of the developed tool. Furthermore, it was observed that smaller instances are satisfactorily resolved by the exact method, whereas heuristics yielded better results within feasible execution times for larger instances.

Keywords: Combinatorial Optimization; Operational Research; Heuristics; Meta-heuristics; Capacitated vehicles routing problem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Os elementos básicos da logística	13
Figura 2 –	Faturamento das empresas do setor logístico no Brasil em 2023	15
Figura 3 –	Principais modais utilizados para transporte de carga no Brasil em 2023	15
Figura 4 –	Operador de vizinhança SWAP	36
Figura 5 –	Pseudocódigo do algoritmo Busca Tabu	47
Figura 6 –	Tela inicial da interface web	48
Figura 7 –	Aba “Entregas” na planilha de input da ferramenta	49
Figura 8 –	Aba “Veículos” na planilha de input da ferramenta	49
Figura 9 –	Tela inicial da aba “Gerador de Rotas” da interface web	50
Figura 10 –	Tabela de resultados	51
Figura 11 –	Tabela de indicadores de performance das heurísticas	51
Figura 12 –	Gráficos de barras da distribuição de distância e utilização da capacidade por veículo	51
Figura 13 –	Mapas das rotas geradas	52
Figura 14 –	Exibição de resultado na aba “Localizador de coordenadas”	53
Figura 15 –	Gráficos obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem exata	56
Figura 16 –	Gráficos obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem heurística	57
Figura 17 –	Gráficos obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem exata	58
Figura 18 –	Gráficos obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem heurística	58
Figura 19 –	Gráficos obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem exata	59
Figura 20 –	Gráficos obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem heurística	59
Figura 21 –	Gráficos obtidos para a instância A-n32-k5 através da	60

	abordagem heurística	
Figura 22 –	Gráficos obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem heurística	61
Figura 23 –	Gráficos obtidos para a instância Tai100a através da abordagem heurística	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Fator de correção para o Brasil	39
Tabela 2 –	Instâncias utilizadas nos testes	54
Tabela 3 –	Resultados dos experimentos	54
Tabela 4 –	Gaps entre o método exato e o método aproximado	54
Tabela 5 –	Resultados obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem exata	56
Tabela 6 –	Resultados obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem heurística	57
Tabela 7 –	Resultados obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem exata	57
Tabela 8 –	Resultados obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem heurística	58
Tabela 9 –	Resultados obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem exata	59
Tabela 10 –	Resultados obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem heurística	59
Tabela 11 –	Resultados obtidos para a instância A-n32-k5 através da abordagem exata	60
Tabela 12 –	Resultados obtidos para a instância A-n32-k5 através da abordagem heurística	60
Tabela 13 –	Resultados obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem exata	60
Tabela 14 –	Resultados obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem heurística	61
Tabela 15 –	Resultados obtidos para a instância Tai100a através da abordagem exata	61
Tabela 16 –	Resultados obtidos para a instância Tai100a através da abordagem heurística	61

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	13
1.2 OBJETIVOS	15
1.3 METODOLOGIA	16
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1 TRANSPORTES	18
2.2 PROBLEMA DE ROTEMAMENTO DE VEÍCULOS	19
2.3 FORMULAÇÕES DO CVRP	23
2.4 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE CVRPs	27
2.4.1 <i>Métodos Exatos</i>	29
2.4.2 <i>Métodos Aproximados</i>	32
2.5 CÁLCULO DE DISTÂNCIAS	35
3. REVISÃO DE LITERATURA	39
4. PROPOSTA DE APLICAÇÃO	43
4.1 ALGORITMO PROPOSTO	43
4.2 INTERFACE WEB	47
4.2.1 <i>Guia de Uso</i>	47
4.2.2 <i>Gerador de rotas</i>	47
4.2.3 <i>Localizador de coordenadas</i>	51
4.3 EXPERIMENTOS REALIZADOS	52
4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS E LIMITAÇÕES DO MODELO	63
5. CONCLUSÃO	65
REFERÊNCIAS	66

1. INTRODUÇÃO

A logística desempenha um papel crucial no panorama empresarial, sendo um fator determinante para o sucesso e competitividade das organizações. Segundo Christopher (1993), esta importância pode ser explicada pois trata-se de uma área que contribui para um atendimento ao cliente mais eficiente, ao mesmo tempo que busca a redução dos custos operacionais, o que por sua vez promove uma maior retenção de clientes e a sustentabilidade do negócio. Ballou (2009) também ressalta que o foco no controle e coordenação das atividades logísticas resulta em ganhos substanciais nos custos de uma empresa, o que a transforma em uma área de grande importância para muitas organizações.

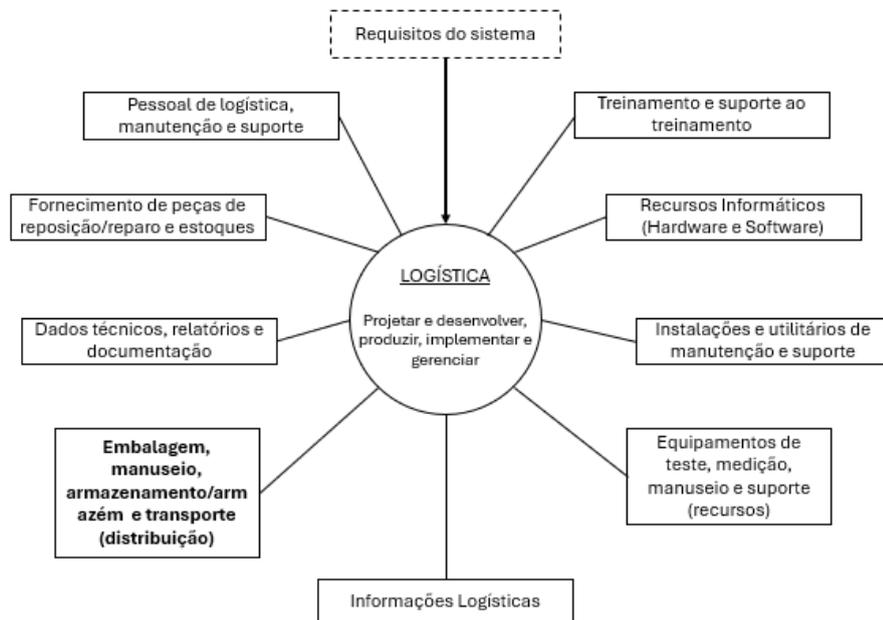
Diante do atual cenário globalizado e da demanda crescente por eficiência operacional, as empresas enfrentam o desafio constante de gerenciar seus recursos logísticos de maneira estratégica (Winkelhaus; Grosse, 2020). Neste contexto, tecnologias inovadoras surgem como oportunidade para o aumento da eficiência e a redução de custos na gestão logística (Lagorio *et al.*, 2022).

A problemática central reside na necessidade de conciliar a redução de custos com a satisfação do cliente. Chopra (2019) afirma que o objetivo do processo de transporte em uma cadeia de suprimentos é entregar um produto aderente aos padrões de qualidade, a baixos custos e na data prometida. Logo, a entrega de produtos de maneira ágil e pontual não apenas influencia a experiência do cliente, mas também impacta diretamente na eficiência operacional e nos resultados financeiros da empresa.

Para Blanchard (2004), durante o planejamento, concepção e implementação da logística, é necessário que todos os recursos necessários estejam integrados, tendo em vista as muitas interações entre esses elementos (Figura 1). Dentre eles, destaca-se a distribuição, que inclui todos os requisitos de transporte de materiais e produtos.

Diante disso, o processo de roteirização de veículos emerge como uma solução estratégica para aprimorar a logística, otimizando rotas e recursos, e, por conseguinte, contribuindo para a redução dos custos operacionais de transporte (Bochtis; Sørensen, 2009).

Figura 1 – Os elementos básicos da logística



Fonte: Adaptado de Blanchard (2004)

A eficácia da roteirização de veículos reflete-se na capacidade de criar itinerários mais eficientes, minimizando tempos de percurso e maximizando a utilização dos recursos disponíveis. Esta abordagem não apenas atende à necessidade de uma gestão eficiente dos custos logísticos, mas também alinha-se diretamente aos objetivos estratégicos das empresas, proporcionando vantagens competitivas no mercado.

Autores renomados no campo de logística e gestão operacional, como Toth e Vigo (2002), destacam a importância da roteirização de veículos como uma ferramenta-chave para enfrentar os desafios logísticos, atrelada ao uso de métodos de soluções computadorizados para apoiar o processo, tendo em vista a complexidade do problema.

O problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (CVRP, do inglês *Capacitated Vehicle Routing Problem*), utilizado como base para resolver a diversas problemáticas de roteirização, é um problema clássico na pesquisa operacional e na teoria da computação. Segundo Dantzig e Ramser (1959), ele envolve a determinação de rotas ideais para uma frota de veículos com capacidade limitada que devem atender a um conjunto de clientes. O objetivo é minimizar o custo

total de transporte, que pode incluir a distância total percorrida, o tempo de viagem, o custo de combustível, entre outros fatores.

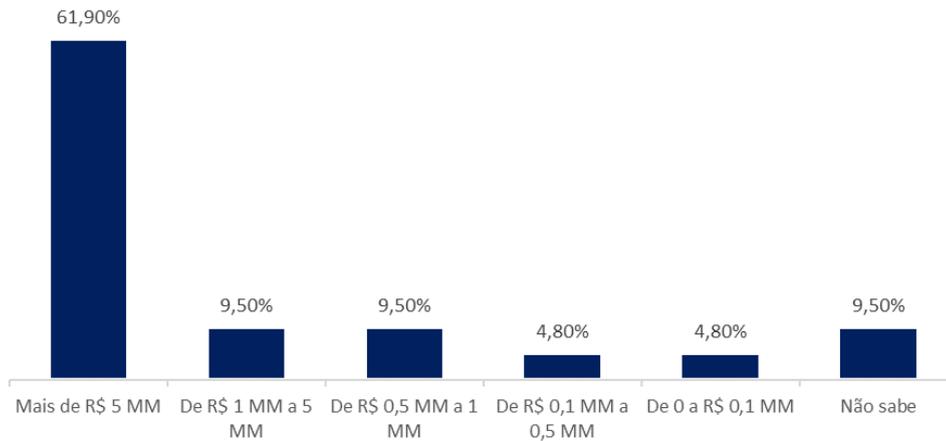
O presente trabalho visa apresentar uma aplicação web para apoiar a resolução de CVRPs, desenvolvida em linguagem de programação *Python*. A aplicação utiliza um modelo de programação linear do problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade e métodos exatos e heurísticos para resolvê-lo. A proposta é fornecer uma solução prática e eficaz para empresas que buscam aprimorar sua logística, além de ser útil para estudos relacionados. O trabalho destaca a importância da roteirização como um elemento-chave na busca pela eficiência operacional, redução de custos e satisfação do cliente.

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

No contexto atual, a logística transcende a mera movimentação de mercadorias; tornou-se um elemento chave para o sucesso das organizações. Sua importância estratégica reside na capacidade de impactar diretamente a satisfação do cliente, reduzir custos operacionais e aumentar a visibilidade da empresa (Macêdo *et al.*, 2023).

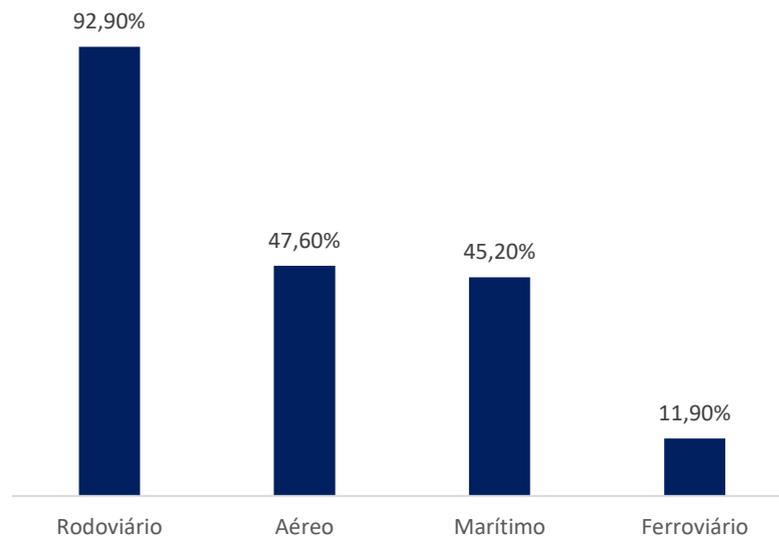
Um relatório publicado pela Trackage, *startup* de tecnologia especializada em otimização de processos logísticos, em 2023, mostra que grande parte das empresas brasileiras do ramo logístico faturam mais de 5 milhões de reais por mês (Figura 2), e dentre os modais utilizados, 92,9% se referem ao uso do modal rodoviário para transporte de cargas (Figura 3). Este resultado reflete a importância das atividades logísticas para o desenvolvimento do país, e a utilização estratégica da malha rodoviária brasileira com cerca de 2 milhões de quilômetros de extensão, pode ser crucial para o sucesso dessas organizações.

Figura 2 – Faturamento das empresas do setor logístico no Brasil em 2023



Fonte: Adaptado de Trackage (2023)

Figura 3 – Principais modais utilizados para transporte de carga no Brasil em 2023



Fonte: Adaptado de Trackage (2023)

A complexidade e a magnitude dos processos de transporte levam muitas empresas a se beneficiarem do uso de sistemas de informação especializados em gestão de transportes (Nikiforov; Levkin; Simak, 2023). Uma ferramenta de roteirização eficaz pode oferecer soluções tangíveis, reduzindo custos operacionais, diminuindo o tempo de entrega e, assim, elevando a qualidade do serviço prestado.

O problema de roteirização é comumente tratado na literatura como um CVRP. Segundo Letchford e Salazar-González (2015), o CVRP é classificado como um problema NP-difícil (*Non-deterministic Polynomial-time hard*), o que significa que não

existe um algoritmo eficiente conhecido que possa resolver todos os casos do problema em tempo polinomial. Devido à sua complexidade, faz-se necessário o uso de métodos avançados e recursos computacionais para auxiliar na resolução do problema.

Ao optar por explorar a roteirização de veículos através de uma solução de prática usabilidade, este trabalho busca atender diretamente às necessidades das empresas que buscam melhorar seu planejamento logístico. A implementação bem-sucedida da ferramenta proposta pode contribuir significativamente para melhorar a eficiência operacional dos processos de transporte de produtos e insumos.

Além das implicações práticas, a pesquisa contribui para a área de conhecimento ao oferecer uma aplicação concreta dos modelos teóricos existentes. Ao desenvolver uma aplicação web para o CVRP, busca-se preencher a lacuna entre a teoria e a prática, proporcionando um entendimento mais abrangente e aplicável do problema de roteamento de veículos.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo de resolução para problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade, em linguagem de programação, juntamente com uma interface web, que permita otimizar as rotas de entrega de mercadorias, levando em consideração as especificidades e desafios de um problema de roteirização e suas restrições operacionais.

Como objetivos específicos, aspira-se:

- (a) investigar, a partir de documentações disponíveis para pesquisa, bibliotecas em *Python* eficazes para a resolução do modelo de programação linear para o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (CVRP);
- (b) realizar estudo sobre as técnicas heurísticas existentes na literatura capazes de resolver satisfatoriamente CVRPs;
- (c) selecionar da literatura um modelo matemático com base nos objetivos e restrições inerentes ao CVRP;
- (d) implementar meta-heurística fundamentada nos princípios do CVRP;
- (e) desenvolver interface web para transformar o algoritmo em ferramenta de simples utilização;

- (f) realizar experimentos computacionais para verificar a eficiência e usabilidade da ferramenta.

1.3 METODOLOGIA

Este trabalho será desenvolvido com base na utilização do método dedutivo. Dado que se baseia em premissas já estabelecidas para desenvolver o estudo (Gil, 2008). Dentre elas, a efetividade do modelo base do CVRP para modelar e resolver problemas de roteirização aplicados.

Com relação a classificação da pesquisa quanto à finalidade, o presente trabalho trata-se de uma pesquisa aplicada, pois busca explorar o problema dentro de um contexto real e possibilitar a obtenção de insights pertinentes à situação estudada que possam ser explorados posteriormente (Gil, 2008).

Quanto ao objetivo, esta pesquisa é classificada como explicativa, tendo em vista que busca mostrar uma relação causal entre a obtenção de boas soluções para o problema proposto e a utilização de técnicas e modelos adequados existentes na literatura, através do desenvolvimento de um algoritmo em uma linguagem de programação (Gil, 2002).

Esta pesquisa possui abordagem quantitativa dada a observação de características comuns a esta classificação: (a) mensurabilidade (distância total percorrida, custos de transporte e tempo de deslocamento), (b) causalidade (relação causal entre as rotas obtidas pelo algoritmo e a minimização dos custos e distâncias dos trajetos), e (c) replicação (é possível replicá-la em população igual ou diferente) (Morabito *et al.*, 2018).

Os dados utilizados nesta pesquisa baseiam-se na pesquisa bibliográfica, a fim de estudar como as técnicas aplicadas neste trabalho são exploradas por outros pesquisadores da área e adaptá-las para este problema. Além disso, baseia-se em modelagem de problema em Pesquisa Operacional para descrever o fenômeno e obter resultados, seguindo as seguintes etapas (Berto; Nakano, 1999):

1. Identificação do problema: roteirização para entregas de produtos/materiais em contextos gerais;
2. Formulação de um modelo matemático tratável;
3. Obtenção da solução do modelo;
4. Validação do modelo com a realidade e interpretação dos resultados.

Por fim, a técnica de pesquisa utilizada é a documentação indireta, por meio de pesquisa bibliográfica para a investigação das diferentes abordagens sobre o tema e possíveis aplicações. (Lakatos; Andrade Marconi, 2010).

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos: Introdução, Fundamentação Teórica, Revisão da Literatura, Proposta de Aplicação e Conclusão.

A Introdução contextualiza o leitor sobre a problemática abordada, justificando a importância do estudo, seus objetivos, e detalhando a metodologia de pesquisa utilizada. A Fundamentação Teórica apresenta os conceitos fundamentais relacionados aos temas do trabalho, baseados na bibliografia dos principais autores da área.

Na Revisão da Literatura são discutidos o estado da arte do tema e os principais métodos e aplicações encontrados na literatura. No capítulo da Proposta de Aplicação, a solução desenvolvida é apresentada, incluindo uma análise detalhada dos resultados dos experimentos realizados.

Por fim, a Conclusão sintetiza o trabalho realizado, destacando as principais conclusões derivadas dos experimentos e dos resultados obtidos, e possíveis evoluções futuras.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 TRANSPORTES

Dentre os elementos essenciais para o pleno funcionamento das operações logísticas, o transporte é um dos mais importantes e decisivos para que o serviço logístico ocorra conforme os padrões estabelecidos. A razão disso está relacionada com o seu papel de realizar a movimentação física das mercadorias. Para desempenhar esta responsabilidade, os sistemas de transporte podem ser divididos em modais, como aéreo, rodoviário, marítimo e dutoviário, com características distintas em relação à velocidade, custos, tamanhos dos produtos transportados e flexibilidade. Assim, quando trata-se de uma cadeia de suprimentos com característica mais responsiva, transportes mais rápidos são mais adequados (Chopra, 2019).

Estudos comprovam que o tempo médio e a variabilidade do tempo de entrega são consideradas características de desempenho importantes do transporte. Ambas características estão condicionadas a variáveis como condição do tempo, congestionamento de tráfego, número de paradas e o tempo necessário para o descarregamento da carga que acarretam em demoras, sendo a variabilidade do tempo de viagem uma medida de incerteza no desempenho (Ballou, 2009).

Em um estudo realizado por Davis e Drumm (1996), concluiu-se que os custos de transporte chegavam a representar 2,88% das vendas e constituíam o maior componente dos custos logísticos, representando 40% desse custo. O transporte abrange tanto o movimento de entrada das fontes de matérias-primas ou peças diretamente para as fábricas ou por meio de armazéns, quanto o movimento de saída de produtos acabados ou componentes das fábricas para os clientes diretamente ou por meio de centros de distribuição.

Segundo Kasilingam (1998), o transporte engloba uma ampla gama de problemas de planejamento e operacionais, incluindo dimensionamento da frota, roteamento de veículos, planejamento de tripulações, design de rede e localização de hubs e terminais. O dimensionamento de recursos de transporte, como caminhões, locomotivas, carros, aeronaves e embarcações, está relacionado ao dimensionamento da frota. O roteamento de veículos concentra-se na determinação de rotas ótimas para o tráfego de origem-destino, considerando a estrutura da rota,

distâncias e capacidade da rota. A seleção do modo de transporte e do transportador faz parte do plano de roteamento, mas geralmente é feita separadamente para gerenciar o tamanho e a complexidade do problema. O planejamento de tripulações envolve a determinação dos requisitos de pessoal para atender ao plano operacional geral da frota. O design de rede geralmente inclui o desenvolvimento de rotas, horários e modos de transporte, e a determinação dos locais dos hubs.

Segundo Bowersox *et. al.* (2020), para haver um bom gerenciamento de transporte, é preciso considerar a programação de equipamentos, o planejamento da carga, a administração da transportadora e a roteirização como elementos chaves. Desse modo, para que a atividade de transporte possa ser realizada de maneira eficiente, a definição das rotas para entrega das cargas deve ser feita atendendo os principais requisitos dos clientes em termos de tempo de entrega, localização e procedimentos especiais de descarga.

Ballou (2009) descreve diferentes tipos de problemas comuns de roteirização para o gerenciamento do transporte. Sendo eles:

- Um Ponto de Origem e um Ponto de Destino: é o problema que envolve a definição de uma rota de um veículo ao longo de uma rede de caminhos considerando fatores pertinentes;
- Pontos de Origem e Destino Múltiplos: quando existem múltiplas fontes capazes de servir múltiplos destinos a fim de encontrar as melhores rotas;
- Pontos de Origem e Destino Coincidentes: neste problema, o ponto de origem e destino são os mesmos, também conhecido como Problema do Caixeiro Viajante (PCV), e o objetivo é minimizar a distância e/ou o tempo de deslocamento da viagem.

2.2 PROBLEMA DE ROTEMAMENTO DE VEÍCULOS

Tendo em vista o grau de importância de uma boa roteirização para o desempenho dos serviços logísticos e a complexidade deste procedimento, é possível buscar soluções viáveis de roteirização através da resolução de problemas de otimização. Nesse contexto, a pesquisa operacional trata desta questão sob a denominação “Problema de Roteamento de Veículos” (VRP, do inglês *Vehicle Routing Problem*). Sendo assim, cria-se um modelo matemático para possibilitar a definição de rotas, de acordo com as restrições particulares de cada caso, de forma otimizada.

Arenales *et al.* (2007) descrevem os VRPs como problemas que “envolvem o

projeto de rotas de entrega e/ou coleta de custo mínimo, partindo de um ou mais depósitos para um número de clientes, sujeito a restrições adicionais”, modelado como um problema de otimização discreta. O VRP clássico, tem como objetivo minimizar o custo total da viagem.

Os problemas de roteamento de veículos possuem diversas variantes de acordo com o contexto estabelecido. Mor e Speranza (2022) classificam os VRPs em diferentes classes de acordo com as decisões que devem ser tomadas para serem resolvidos. São elas:

- VRP clássicos: Nesta classe, as decisões a serem tomadas envolvem a atribuição de clientes às rotas e o sequenciamento dos clientes atribuídos a cada rota. Esta classe inclui o VRP Capacitado (CVRP) e suas variantes, como o CVRP com janelas de tempo e o CVRP com coleta e entrega.

- VRPs com Lucros: Nesta classe, a decisão sobre quais clientes atender é considerada, assumindo que um lucro está associado a cada cliente. Exemplos de VRPs com lucros incluem o problema de orientação e o problema de orientação em equipe.

- VRPs com Entregas Divididas: O Problema de Roteamento de Veículos com Entregas Divididas (SDVRP) é definido como o CVRP com a diferença de que a quantidade a ser entregue a um cliente por um veículo deve ser decidida, o que implica que um cliente pode ser visitado por vários veículos.

- VRPs com Múltiplas Commodities: Nesta classe é considerada a decisão sobre qual mercadoria entregar. Esta classe considera explicitamente múltiplas mercadorias, o que é necessário para certas aplicações de roteamento de veículos.

- VRPs ao longo do tempo: Esta classe inclui problemas em que o horário de início de uma rota também deve ser decidido. Abrange os problemas periódicos de roteamento de veículos (PRPs), problemas de roteamento de inventário (IRP), problemas de roteamento com datas de liberação e problemas de roteamento de várias viagens.

Eksioglu, Vural e Reisman (2009) estudaram as diversas variações do problema de acordo com os cenários de aplicação e das características físicas que influenciam diretamente o processo de resolução. No que diz respeito aos cenários de aplicação, entre outras classificações, é possível categorizar os VRPs conforme:

- Número de paradas na rota: conhecido (determinístico) ou parcialmente

conhecido/parcialmente probabilístico;

- Demanda do cliente: determinística ou estocástica;
- Tempo de espera de atendimento: determinístico, dependente do tempo, dependente do tipo de veículo ou estocástico;
- Estrutura de janela de tempo: janelas de tempos suaves, janelas de tempo estritas ou combinação dos dois tipos;
- Horizonte de tempo: único período ou múltiplos períodos.

Quanto às características físicas do problema, existem variações relacionadas ao número de pontos de origem (única origem ou múltiplas origens), ao número de depósitos (único ou múltiplos), ao tipo de restrição nas janelas de tempo (relacionadas aos clientes, estradas, depósitos ou motoristas/veículos), ao número de veículos (exatamente n veículos, até n veículos ou ilimitado), à consideração de capacidade dos veículos (com ou sem restrição), à homogeneidade dos veículos (semelhantes, para cargas específicas, heterogêneos ou para clientes específicos), ao tempo de viagem (determinístico, função do tempo decorrido ou estocástico) e ao custo de transporte (dependente de vários fatores, como tempo de viagem, distância, veículo, operação ou riscos associados).

A seguir, apresentam-se os principais problemas de roteamento de veículos que combinam algumas das variações descritas. Esses problemas têm sido extensivamente estudados na literatura ao longo dos anos e incorporam uma gama de restrições que refletem as características típicas dos desafios de roteirização enfrentados pelas empresas:

1. **Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Capacidade:** A versão mais básica do VRP consiste no problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (CVRP) que possui o objetivo primordial de identificar um conjunto de trajetos de custo mínimo para uma frota de veículos com capacidade, partindo de um único ponto de distribuição, para atender uma lista de clientes, respeitando as seguintes restrições: (1) cada rota tem início e término no ponto de distribuição, (2) cada cliente é atendido exatamente uma vez por um único veículo, (3) a carga total em cada rota não ultrapassa a capacidade dos veículos. Esta variação do problema começou a ser estudada por Dantzig e Ramser (1959), sendo inicialmente abordada como um

desdobramento do Problema do Caixeiro Viajante. O CVRP possui elementos característicos, incluindo uma frota composta por múltiplos veículos homogêneos, cada um com uma capacidade restrita, com demandas determinísticas e conhecidas, partindo de um único depósito. Cada cliente possui uma demanda específica, e o objetivo do problema é minimizar a distância total percorrida para realizar as entregas, que são as únicas operações envolvidas.

2. **Problema de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo:** Uma outra versão do VRP, abordada por Arenales *et. al.* (2007), é a variação do problema com janelas de tempo. Neste caso, considera-se que, para cada cliente, o serviço deve ser iniciado dentro de uma janela de tempo. No instante 0, o veículo deixa o depósito e deve retornar dentro do intervalo determinado. Caso o veículo chegue ao cliente antes de sua janela de tempo, ele deve esperar sem custo.

3. **Problema de Roteamento Periódico de Veículos:** Esta versão do VRP considera um horizonte de planejamento de entregas, no qual cada cliente é visitado com uma frequência determinada, existindo um conjunto de combinações possíveis de dias que ocorrerão as visitas. A decisão deste problema é programar as visitas aos clientes e determinar as rotas dos veículos para cada dia no horizonte de tempo visando minimizar os custos de viagem, sujeito às seguintes restrições:

- Cada rota deve iniciar e finalizar no depósito;
- Cada cliente deve pertencer a somente uma rota por dia de visita;
- A demanda total de uma rota não deve exceder a capacidade do veículo;
- O tempo total de uma rota não deve exceder o limite estabelecido.

4. **Problema de Roteamento de Veículos Estocástico:** Em um cenário com incertezas relacionadas aos dados trabalhados no problema, Côté, Gendreau e Potvin (2013) abordam a variação do VRP com itens estocásticos de duas dimensões (S2L-CVRP). Nessa variante, o tamanho e o peso dos itens a serem entregues aos clientes são incertos no momento do planejamento da rota. O objetivo é minimizar os custos de roteirização e de recurso, considerando a capacidade de carga dos veículos e a possibilidade de deixar itens de lado se

não puderem ser carregados. O S2L-CVRP é modelado como um problema de programação inteira mista, onde as variáveis de decisão representam as arestas percorridas pelos veículos e a alocação de itens aos veículos. As restrições incluem: (1) limite de capacidade de carga dos veículos, (2) alocação exclusiva de cada item a um único veículo, e (3) entrega exclusiva de todos os itens de um cliente por um único veículo.

5. Problema de Roteamento de Veículos com Coleta e Entrega: Nesta variação, parte dos clientes atua como destinatários das mercadorias enquanto outra parte atua como fornecedores que entregam as mercadorias. O que é enviado por um cliente pode ser aproveitado por outro cliente, eliminando a necessidade de uma entrega preceder à coleta e simplificando o processo logístico. Para cada cliente, são associados dois valores que representam a quantidade de mercadoria a ser distribuída e coletada pelo veículo, e a restrição de capacidade é adaptada para garantir a soma dos itens entregues e coletados em cada rota não ultrapasse a capacidade do veículo (Vieira, 2008).

2.3 FORMULAÇÕES DO CVRP

Este trabalho aborda o Problema de Roteamento de Veículos Com Restrições de Capacidade (CVRP), que consiste em determinar rotas ótimas para veículos, considerando capacidades de carga e demandas específicas, de forma a minimizar a distância percorrida (ou custos da operação). A literatura especializada apresenta formulações do problema que levam em consideração os desafios de implementação e modelagem para resolução do CVRP nos diversos recursos disponíveis atualmente.

Arenales *et. al.* (2007) representa o VRP por um grafo orientado completo $G = (N, E)$, sendo $N = C \cup \{0, n + 1\}$, $C = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de nós dos clientes e $0, n + 1$ os nós que representam o depósito. Os arcos que correspondem às conexões entre os nós são representados pelo conjunto $E = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j, i \neq n + 1, j \neq 0\}$, ou seja, nenhum arco deve começar no nó $n + 1$ e/ou terminar no nó 0 . Todas as rotas devem começar no nó 0 e terminar no nó $n + 1$. Para cada arco $(i, j) \in E$ existe um custo c_{ij} associado, e um tempo de viagem t_{ij} que inclui o tempo de serviço ao cliente i . Cada cliente i possui uma demanda d_i . Como o CVRP trata de veículos

homogêneos, a formulação os representa como um conjunto K de veículos idênticos, em que para cada $k \in K$ existe uma capacidade Q . Todos os veículos partem do depósito. As restrições consistem em:

- (1) As rotas possuem o ponto de origem e destino no depósito;
- (2) Cada cliente é atendido em apenas uma rota;
- (3) Cada veículo possui uma capacidade Q que deve ser igual ou menor a demanda da rota atendida por ele;
- (4) Existe um limite de tempo de viagem D para cada rota.

A variável de decisão é representada por:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \in K \text{ percorre o arco } (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O modelo de programação linear para o problema é definido por:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q, \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{j \in C} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{n+1\}} x_{ihk} - \sum_{j \in N \setminus \{0\}} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1, \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subset C, 2 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \forall k \in K \quad (8)$$

$$x \in B^{|E||K|} \quad (9)$$

A Função Objetivo (1) minimiza os custos totais das rotas. As Restrições (2) indicam que cada cliente deve ser designado a um único veículo. O Conjunto de Restrições (3) asseguram que a demanda total de cada rota não deve exceder a capacidade Q do veículo. As Restrições (4) garantem que cada rota não exceda o limite D . As Restrições (5) estabelecem que cada veículo deve partir do depósito (nó 0) apenas uma vez. As Restrições (6) especificam que um veículo deve deixar o nó h se e somente se entrar neste nó. As Restrições (7) determinam que cada veículo deve retornar ao depósito (nó $n + 1$) apenas uma vez e as Restrições (8) garantem a não existência de sub-rotas. Por fim, as Restrições (9) definem o domínio das variáveis de decisão (Arenales *et al.*, 2007).

Fisher e Jaikumar (1981) apresentam uma formulação do CVRP considerando veículos heterogêneos com capacidades distintas. Seja Q_k a capacidade do veículo k e a seguinte variável de decisão adicional:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ visita o cliente } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tem-se um modelo de programação inteira do CVRP com o objetivo de minimizar os custos de transporte (1) sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1, \quad \forall i \in C \quad (10)$$

$$\sum_{k \in K} y_{0k} = |K|, \quad (11)$$

$$\sum_{i \in N} d_i y_{ik} \leq Q_k, \quad \forall k \in K \quad (12)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \setminus \{n+1\} \\ j \neq i}} x_{ijk} = \sum_{\substack{j \in N \setminus \{n+1\} \\ j \neq i}} x_{jik} = y_{ik}, \quad \forall i \in N \setminus \{n+1\}, \forall k \in K \quad (13)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq C, 2 \leq |S| \leq n - 1, \forall k \in K \quad (14)$$

$$x_{ijk} \in [0, 1], \quad \forall i, j \in N \neq n + 1, \forall k \in K \quad (15)$$

$$y_{ik} \in [0, 1], \quad \forall i \in N \neq n + 1, \forall k \in K \quad (16)$$

Similar à primeira formulação apresentada, As Restrições (10) a (12) e (16) são restrições do problema generalizado. Dado que as Restrições (16) definem que a variável y_{ik} assume valores binários, para todo $i = 0, \dots, n$ e $k \in K$, então as Restrições (10) garantem que cada cliente seja atendido por apenas um veículo, as (11) definem que todas as rotas iniciam e finalizam no depósito e as (12) asseguram que a carga de cada rota não exceda a capacidade do veículo.

As Restrições (8) e (14) de ambas as formulações permitem que não haja a formação de sub-rotas nas soluções encontradas pelo modelo. Contudo, estas restrições crescem exponencialmente com o número de clientes do problema, o que a torna de difícil implementação por demandar alto esforço computacional. Retirar toda ou uma parte das restrições proporciona um relaxamento do CVRP, sendo necessário o uso de técnicas adicionais para verificar se as soluções atendem aos requisitos do problema (Toth; Vigo, 2014).

Christofides, Mingozzi e Toth (1979) propõem uma nova formulação do modelo, na qual as restrições de sub-rotas são substituídas por restrições factíveis de implementação. Inspiradas na conhecida formulação de MTZ, introduzida por Miller, Tucker e Zemlin (1960) para o PCV, as novas restrições utilizam um nova variável $u = (u_1, \dots, u_n)$ que indica a demanda acumulada u_i já distribuída pelo veículo ao chegar no cliente $i \in N$.

Logo, as Restrições (8) e (14) podem ser substituídas por:

$$u_i - u_j + n \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq n - 1, \quad \forall (i, j) \in N \neq n + 1: i \neq j \quad (17)$$

$$u_i \in \mathbf{Z}^+ \quad (18)$$

Note que se $x_{ijk} = 1$, então $u_i - u_j \leq -1$, ou seja, a variável referente ao cliente j deve ser maior que u_i em pelo menos uma unidade. A vantagem desta formulação é que há n variáveis e n^2 restrições. Por outro lado, a relaxação linear proposta produz um limite inferior significativamente mais fraco em comparação com a primeira formulação (Toth; Vigo, 2014).

A formulação baseada no modelo de *Set Partitioning* (em português, particionamento de conjuntos), proposta por Balinski e Quandt (1964), também é utilizada na literatura para representar o VRP. Este modelo consiste em definir um conjunto R de todas as possíveis rotas para todos os veículos disponíveis, obtendo-

se um número exponencial de variáveis e limites menores de relaxação linear comparado a outras formulações.

Para obter o conjunto R , gera-se todas as rotas possíveis dentro das restrições impostas pelo problema. Seja R_i o subconjunto de rotas que contém o cliente $i \in C$, c_r o custo da rota $r \in R$ e a seguinte variável de decisão:

$$y_r = \begin{cases} 1 & \text{se a rota } r \in R \text{ faz parte da solução} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tem-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{r \in R} c_r y_r \quad (19)$$

$$\sum_{r \in R_i} y_r = 1, \quad \forall i \in C \quad (20)$$

$$\sum_{r \in R} y_r = |K|, \quad (21)$$

$$y_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in R \quad (22)$$

A Equação (19) representa a função objetivo que minimiza a soma dos custos das rotas. As Restrições (20) garantem que cada cliente i deve ser visitado apenas uma única vez, enquanto a Restrição (21) impõe que a quantidade de rotas seja igual a quantidade de veículos disponíveis. Por fim, as Restrições (22) definem que todas as variáveis de decisão devem ser binárias.

Tendo em vista o crescimento exponencial de R à medida que o número de clientes cresce, a resolução da formulação baseada no *Set Partitioning* é apenas viável com o auxílio de técnicas de programação matemática (Costa; Contardo; Desaulniers, 2019).

2.4 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE CVRPs

A complexidade de um problema pode ser classificada em dois tipos. Um problema é considerado tratável se existir um algoritmo capaz de resolvê-lo em tempo

polinomial; caso contrário, é considerado intratável. Com base nestas classificações, surgem os estudos sobre as classes de problemas P e NP. A classe P inclui problemas cujas soluções podem ser obtidas por algoritmos polinomiais determinísticos. Em contrapartida, a classe NP inclui problemas cujas soluções podem ser testadas em tempo polinomial ou encontradas por algoritmos não-determinísticos (Cook, 1971).

Dentro da classe NP, existem os problemas NP-completos, introduzidos por Cook (1971). Estes são problemas para os quais é altamente provável que não exista um algoritmo polinomial determinístico capaz de resolvê-los. Portanto, é praticamente inviável resolver grandes instâncias destes problemas usando métodos exatos. Outra classe definida por Cook é a dos problemas NP-difíceis, classificados dessa forma se existir um problema NP-completo que possa ser reduzido polinomialmente ao problema em questão. Assim, os problemas NP-difíceis também são considerados intratáveis.

Os CVRPs, pertence à classe de problemas NP-difíceis (Letchford; Salazar-González, 2015). Isso significa que não há algoritmo conhecido que possa resolver todos os casos do problema de forma eficiente (em tempo polinomial). A complexidade do problema cresce rapidamente com o aumento do número de clientes e das restrições envolvidas, tornando-o impraticável para soluções exatas em casos de grande escala sem o uso de técnicas heurísticas ou meta-heurísticas.

Devido à sua natureza combinatória e às restrições adicionais de capacidade, o CVRP é mais complexo que o PCV, que também é NP-difícil. Como resultado, muitas abordagens para resolver o CVRP envolvem algoritmos aproximados, heurísticos e técnicas de otimização como a programação linear inteira. Contudo, com os avanços tecnológicos e o aumento da capacidade dos computadores, é possível observar que problemas com instâncias de 100 consumidores foram resolvidos com métodos exatos, apesar de ainda não haver constatações que problemas NP-difíceis possam ser tratados (Alvarenga, 2005).

De modo geral, resolver problemas reais é um antigo desafio, Chandra e Anand (2022) concluíram que o uso de algoritmos de otimização heurísticos é capaz de oferecer boas soluções tendo em vista a sua complexidade, e enfatizam o uso combinado de meta-heurísticas com outras técnicas de otimização para obter soluções de alta qualidade. Contudo, é preciso investigar qual algoritmo poderá oferecer resultados personalizáveis para cada problema em específico, ou seja, a escolha do melhor algoritmo para resolver o problema levará em conta como pode-se

melhor explorar os aspectos individuais da questão.

Em uma análise dos estudos mais recentes, Praveen *et. al.* (2022) apresentam um panorama geral do CVRP na literatura, evidenciando como as abordagens recentes comumente possuem como objetivos a minimização do custo total, a redução da distância percorrida, a maximização da eficiência de rotas e a satisfação do cliente em termos de carga máxima e demanda. Em relação aos métodos utilizados, os estudos frequentemente utilizam algoritmos de otimização, como algoritmos genéticos, algoritmos de vizinhança variável, algoritmos de Busca Tabu (TS), algoritmos de otimização por enxame de partículas e algoritmos de colônia de formigas. Além disso, são empregadas abordagens baseadas em heurísticas e meta-heurísticas para lidar com as complexidades do CVRP, tais como restrições de capacidade, janelas de tempo e múltiplos depósitos.

2.4.1 Métodos Exatos

Os métodos exatos buscam obter a solução ótima do problema, ao percorrer o espaço de soluções viáveis ou através de alternativas que limitam este processo. Desse modo, é preciso garantir que a busca seja efetiva ao investigar, de fato, possíveis soluções com base no objetivo de minimização ou maximização do problema (Oliveira, 2023). Dentre os mais utilizados para resolução do VRP na literatura, encontra-se o *Branch-and-Bound*, o *Branch-and-Cut* e o *Branch-and-Price*, que utilizam técnicas de relaxação de programação inteira combinadas com técnicas de geração de colunas ou planos de cortes.

2.4.1.1 Branch-and-Bound

O *Branch-and-Bound* é um algoritmo exato utilizado para resolver problemas de roteamento de veículos. Desenvolvido por Christofides, Mingozzi e Toth (1981), ele se destacou por sua capacidade de fornecer soluções ótimas para problemas complexos através de uma busca inteligente no espaço de soluções.

O método em questão é famoso em problemas de transporte que requerem atribuição inteira de valores, como o cálculo de entregas ou atribuições de frotas a lugares particulares. A partir de um conjunto de possíveis soluções, o método define subconjuntos disjuntos e calcula, para cada um deles, os limites inferior e superior,

descartando alguns dos subconjuntos com base em regras escolhidas com antecedência. Ele consistem em um processo de raciocínio formal que permite alcançar as melhores soluções para problemas difíceis de roteamento, tornando-se uma ferramenta muito útil para a otimização logística (Lachtermacher, 2004).

Segundo Vieira (2008), o algoritmo *branch-and-bound* funciona construindo um espaço de busca em forma de árvore, onde cada nó no espaço de busca é um subproblema do problema original. O processo inicia resolvendo a versão relaxada do problema, onde as restrições de integralidade são temporariamente ignoradas. Em seguida, o algoritmo procede à "ramificação", fixando variáveis binárias a valores 0 ou 1. A partir disso, cria-se dois subproblemas para cada decisão tomada, que se tornam nós da árvore de busca.

Todos os subproblemas que surgem são restringidos entre um limite inferior e um limite superior da solução. Os limites orientam a busca de tal maneira que, se algum subproblema apresenta uma solução que não é melhor que a melhor solução parcial encontrada até o momento, ele é podado. Quando um subproblema é resolvido e sua solução obtida satisfaz todas as restrições de integralidade do problema original, começa a fase de "*bounding*" (ou limitação). Nesse processo, os subproblemas em que a função objetivo tem uma solução pior do que a melhor solução encontrada até agora são eliminados, e os ramos na árvore são podados, pois não precisam ser explorados.

Este é um método muito eficiente para os problemas de programação inteira mista, como o VRP com janelas de tempo. O *branch-and-bound*, neste caso, não otimiza apenas o itinerário do veículo, mas também respeita restrições de tempo para a entrega. Este procedimento de ramificação e poda é, a seu turno, recursivo até que se tenham explorado ou descartado todas as ramificações da árvore, dando como resultado uma solução ótima (Kolen; Rinnooy; Trienekens, 1987).

2.4.1.2 *Branch-and-Cut*

O método de *branch-and-cut*, uma extensão do *branch-and-bound*, é uma abordagem que combina a eficiência do procedimento de planos de corte com a busca inteligente do *branch-and-bound*. Essa técnica visa melhorar a eficácia da resolução dos subproblemas derivados da árvore de busca, reduzindo ainda mais a região factível (Miranda, 2011).

O algoritmo *branch-and-cut* é especialmente útil para resolver problemas de Programação Linear Inteira com um grande número de restrições. Inicialmente, o algoritmo resolve a versão relaxada do problema, ignorando temporariamente certas restrições, utilizando, por exemplo, o Método Simplex. À medida que as restrições violadas são identificadas, cortes (i.e., restrições) são adicionados ao modelo relaxado, permitindo uma busca mais precisa por soluções inteiras. Quando não há mais cortes a serem inseridos e a solução não é inteira, o método *branch-and-bound* entra em ação, explorando os nós restantes da árvore até que a melhor solução inteira encontrada seja igual à solução da versão relaxada (De Souza, 2013).

2.4.1.3 *Branch-and-Price*

O método *branch-and-price* combina o *branch-and-bound* com a geração de colunas, proporcionando uma abordagem eficiente para encontrar soluções ótimas em problemas complexos de roteamento.

No *branch-and-price*, cada nó da árvore de busca do *branch-and-bound* é resolvido utilizando o método de geração de colunas. Esta técnica é uma generalização da decomposição de Dantzig-Wolfe (1960), onde o problema original é dividido em duas partes: um problema principal e um subproblema. Devido ao grande número de soluções viáveis, apenas uma pequena parte desse conjunto é considerada no problema principal inicialmente.

Em cada iteração, o objetivo é determinar se existe uma rota que possa reduzir a distância total do roteamento. Isso é feito resolvendo o subproblema, que busca identificar novas rotas potencialmente melhores. Se uma nova rota é encontrada, a coluna correspondente é adicionada ao modelo do problema principal, e o processo é repetido até que a solução ótima seja encontrada (Vieira, 2008).

Jepsen *et al.* (2006) avançaram ainda mais essa técnica ao desenvolver um método chamado *Branch-and-Cut-and-Price*. Neste procedimento, além da divisão do problema em principal e subproblema, como no *branch-and-price*, são adicionados planos de corte ao problema principal. Esses cortes adicionais ajudam a reduzir ainda mais a região factível, melhorando a eficiência da busca.

2.4.2 Métodos Aproximados

As soluções exatas para o VRP podem não ser viáveis em termos de tempo de processamento para problemas de maior tamanho e complexidade. Diante desta limitação, diversas abordagens aproximadas, incluindo heurísticas e meta-heurísticas, são amplamente exploradas na literatura. Embora estas técnicas não garantam a obtenção do ótimo global, elas visam reduzir significativamente o tempo de processamento e encontrar soluções de alta qualidade em um prazo aceitável.

Segundo Rebouças e Gomes (2016), heurísticas são métodos que exploram uma parte reduzida do espaço de soluções. Dessa forma, são capazes fornecer uma solução de boa qualidade com baixo custo computacional. As heurísticas podem ser divididas em heurísticas de construção e de refinamento. Heurísticas de construção geram uma solução viável, elemento por elemento, na qual a escolha do próximo elemento é definida conforme uma função de avaliação pré-definida. A heurística do Vizinho Mais Próximo é uma das principais heurísticas construtivas existentes. Essa geração pode ser feita de forma sequencial, construindo uma rota por vez, ou em paralelo, construindo todas as rotas simultaneamente.

Heurísticas de refinamento, por outro lado, buscam melhorar uma solução existente através da exploração de sua vizinhança. Estas técnicas podem ser classificadas em estratégias como *first accept* (FA) ou *first best* (FB), onde a busca para assim que uma solução melhor é encontrada, e *best accept* (BA) ou *global best* (GB), onde toda a vizinhança é explorada antes de aceitar a melhor solução encontrada. Heurísticas de refinamento são frequentemente utilizadas em conjunto com heurísticas de construção para melhorar ainda mais as soluções iniciais (Vieira, 2008).

Segundo Vieira (2008), as meta-heurísticas são métodos mais gerais que exploram o espaço de solução de forma mais abrangente, aumentando a probabilidade de encontrar soluções de melhor qualidade. Elas são capazes de escapar de ótimos locais, oferecendo uma exploração mais robusta. Entre as meta-heurísticas mais utilizadas para o VRP estão a Busca Tabu, a Busca por Vizinhança Variável, Algoritmos Genéticos e técnicas híbridas que combinam múltiplas abordagens.

2.4.2.1 Vizinho Mais Próximo

A heurística do Vizinho Mais Próximo (NNS, do inglês *Nearest Neighborhood Search*), proposto por Bellmore e Nemhauser (1968), é uma das mais simples e amplamente utilizadas em problemas de roteamento de veículos. Esta heurística construtiva se baseia em um método guloso que, a cada passo, adiciona um componente à solução, escolhendo sempre o ponto mais próximo que ainda não foi visitado.

A heurística começa com um vértice inicial, no caso dos VRPs, o depósito. A partir desse vértice, ela adiciona à rota o vértice mais próximo que ainda não foi visitado. Este processo é repetido até que todos os vértices (ou cidades, no caso de um problema clássico de roteamento) tenham sido incluídos na rota (Goldbarg; Luna, 2005) ou, no caso do CVRP, enquanto o limite de capacidade do veículo é respeitado (Solomon, 1987).

A heurística NNS é frequentemente usada como uma técnica inicial em algoritmos mais complexos, como Busca Tabu e algoritmos meméticos. Estes algoritmos utilizam a solução inicial fornecida pela NNS e a melhoram iterativamente (Arenales *et al.*, 2007).

Segundo Liu *et al.* (2023), existem duas abordagens para construir rotas usando a heurística NNS: sequencial e paralela. Na construção sequencial, as rotas são definidas uma de cada vez, adicionando-se o cliente não roteado mais próximo até que não seja possível adicionar mais nenhum cliente devido a restrições de capacidade. Quando isso ocorre, uma nova rota é iniciada a partir do depósito.

A construção paralela, por outro lado, define um número fixo de veículos K antes de iniciar o processo de roteamento. As rotas são definidas em paralelo, cada uma adicionando o cliente não roteado mais próximo a cada iteração. Esse processo é repetido até que todos os clientes sejam visitados. Caso não seja possível adicionar um cliente a nenhuma das K rotas, uma nova rota é criada seguindo a estratégia sequencial.

2.4.2.2 Busca Tabu

A Busca Tabu, também conhecida como *Tabu Search*, é uma meta-heurística de busca local desenvolvida por Glover (1989). Esta técnica surgiu como uma

resposta à necessidade de guiar algoritmos de busca local para escapar de ótimos locais, ao registrar o histórico da busca e impedir que soluções já visitadas sejam revisitadas, evitando assim ciclos no processo de busca.

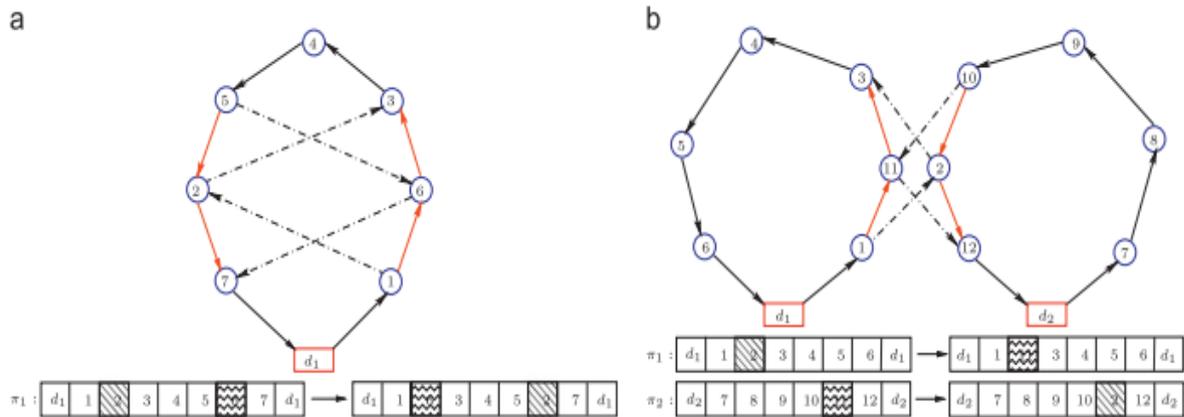
O processo da Busca Tabu começa a partir de uma solução inicial, que pode ser gerada aleatoriamente ou previamente por um outro método. A partir dessa solução, são aplicados mecanismos que levam de uma solução à outra, denominados "movimentos" ou "perturbações", para gerar novas soluções vizinhas. A cada iteração, a melhor solução vizinha é selecionada, desde que não esteja na lista tabu, uma estrutura de memória de curto prazo que armazena as últimas soluções visitadas para evitar retrocessos (Konzen *et al.*, 2003).

A definição do espaço de busca e da estrutura de vizinhança é crucial para o sucesso de um algoritmo de Busca Tabu. O espaço de busca consiste em todas as possíveis soluções que podem ser consideradas durante a busca. A estrutura de vizinhança, por sua vez, pode ser definida por um conjunto de soluções que são obtidas a partir de movimentos aplicados a solução inicial por meio de um operador de vizinhança (Gendreau *et al.*, 2010).

Jarboui *et al.* (2013) apresentam cinco operadores de vizinhança, cada um com características distintas. O operador Remoção – Inserção realiza a inserção onde um cliente é removido de uma posição e inserido em outra, podendo ser dentro da mesma rota (intra-rota) ou entre rotas diferentes (inter-rota). O operador *Or-Opt* que generaliza o caso anterior, permitindo a inserção de uma sequência de clientes (chamada de "*bone*") em vez de apenas um cliente. O operador *Or-Opt* invertido inverte a ordem de uma sequência de clientes ao movê-los. O operador Adicionar/Remover Depósito envolve a reconfiguração de depósitos, fechando um depósito e abrindo outro na posição que mais otimiza a solução dentro do conjunto de rotas, o que permite criar novas rotas e diversificar o espaço de soluções.

Além disso, os autores apresentam o operador *SWAP*, que consiste na troca de posições entre dois clientes, o que pode ocorrer tanto dentro de uma mesma rota quanto entre rotas diferentes (Figura 4). Este operador é eficiente para ajustar pequenas discrepâncias na sequência dos clientes, otimizando a rota sem a necessidade de movimentos mais complexos. A troca pode melhorar a solução ao redistribuir as posições dos clientes de maneira a minimizar a distância total percorrida ou outros custos associados.

Figura 4 – Operador de vizinhança SWAP. (a) Intra-rota, (b) Inter-rota.



Fonte: Jarboui *et al.* (2013)

Além dessas, abordagens baseadas em *clustering* também são populares. Nesses métodos, os nós clientes são agrupados em subproblemas menores, que podem ser tratados como versões simplificadas do PCV. Este princípio reduz a busca em espaços menores onde técnicas exatas podem ser mais eficazes. No entanto, a qualidade dessas soluções depende do processamento eficiente dos agrupamentos e da consideração de fatores como a quantidade de veículos disponíveis e os limites de carga (Oliveira, 2023).

2.5 CÁLCULO DE DISTÂNCIAS

Conhecer as distâncias entre pontos-chave desempenha um papel crucial no planejamento da rede logística pelos profissionais de logística de uma empresa. Ao enfrentar o desafio de otimizar as rotas, minimizar custos e melhorar os prazos de entrega, torna-se essencial a compreensão detalhada das distâncias envolvidas nas cadeias de suprimentos.

Calcular estas distâncias de forma exata configura um desafio a parte para o planejamento de rotas. Embora exista ferramentas que facilitam a obtenção destes dados, o cálculo por trás destes mecanismos procura minimizar a discrepância dos valores calculados *versus* as distâncias reais.

Ballou (2009) considera mais eficiente encontrar as distâncias a partir das coordenadas dos locais de interesse. Para isso, existem métodos que permitem calcular valores de distâncias com base em algumas premissas.

Quando trata-se de um sistema de grade linear, é possível calcular as distâncias

em linha reta das coordenadas através do teorema de Pitágoras. Considera-se então os pontos A e B e suas coordenadas, a distância em linha reta entre eles pode ser dada por:

$$D_{A\pm B} = K\sqrt{(X_B \pm X_A)^2 + (Y_B \pm Y_A)^2} \quad (23)$$

onde:

$D_{A\pm B}$ = distância entre os pontos A e B

X_A, Y_A = coordenadas do ponto A

X_B, Y_B = coordenadas do ponto B

K = fator de escala para conversão da medida de coordenada em medida de distância

Ao se pretender calcular distâncias que se adaptam melhor ao leiaute retangular das rodovias e cidades, pode-se utilizar a seguinte fórmula genérica:

$$D_{A-B} = b_0 + b_1[|X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|] + b_2\sqrt{(X_B \pm X_A)^2 + (Y_B \pm Y_A)^2} \quad (24)$$

Os parâmetros b_0 , b_1 e b_2 são encontrados ao ajustar as distâncias reais com relação as distâncias em linha reta (Brimberg; Love, 1992).

Destas duas fórmulas, surgem a Métrica Euclidiana e a Métrica Retangular (ou Métrica de Manhattan). A primeira considera $K = 1$ em (23) e a Métrica de Manhattan define $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$.

Segundo Pizzolato e Pinho (2003), o cálculo da distância euclidiana, Equação (23) para $K = 1$, parte do princípio que o caminho mais curto entre dois pontos é uma reta mesurada pela geometria básica de Euclides. Em termos de utilização em malhas rodoviárias e artérias urbanas, a outra métrica é mais comumente utilizada por corresponder com seus formatos perpendiculares em cidades modernas ou planejadas.

Ballou (2009) apresenta a fórmula do grande círculo como uma técnica alternativa e mais confiável que utiliza a distância de grande círculo (trigonometria esférica). Dessa forma, evita-se distorções oriundas de técnicas de mapeamento para a projeção de um globo no plano e de que ponto do mapa calcula-se as distâncias, além de considerar a curvatura da Terra. A fórmula em questão:

$$D_{A-B} = 6371 \{ \arccos [\sin(LAT_A) \times \sin(LAT_B) + \cos(LAT_A) \times \cos(LAT_B) \times \cos[|LONG_B - LONG_A|]] \} \quad (25)$$

onde:

D_{A-B} = distância do grande círculo entre os pontos A e B (km)

LAT_A = latitude do ponto A (radianos)

LAT_B = latitude do ponto B (radianos)

$LONG_A$ = longitude do ponto A (radianos)

$LONG_B$ = longitude do ponto B (radianos)

Além de ser facilmente programável em computador e amplamente utilizada em programas de planejamento logístico, vale destacar as seguintes vantagens (Ballou, 2009):

- As coordenadas de latitude e longitude podem ser usadas em todo o mundo;
- Dados de fácil acesso, disponíveis em fontes diversas como maps, enciclopédias e publicações;
- É possível conseguir uma boa precisão.

Apesar da existência de métricas consideradas relativamente precisas, as distâncias calculadas sempre possuem valores menores com relação a distância real entre dois pontos, uma vez que os veículos não trafegam em linha reta. Ao utilizar essas métricas convém ajustá-las ao cenário real através do emprego de um fator de correção (Ballou, 2009). Novaes (1989) afirma que esse fator pode ser obtido por meio de uma regressão simples, resultando em:

$$D_{AB} = a + bDE_{AB}$$

ou

$$D_{AB} = a + bDR_{AB}$$

onde:

DE_{AB} = distância euclidiana entre A e B

DR_{AB} = distância retangular entre A e B

Ballou (2009) afirma que um fator preciso pode ser calculado simplesmente tomando uma amostra de distâncias entre pontos e fazendo-se a média da relação de distâncias reais e calculadas, mas também apresenta valores tabelados de fatores de sinuosidade para várias regiões do mundo, úteis como fator de ajuste para a fórmula do grande círculo e demais cálculos de distâncias. Os valores referentes ao Brasil são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1 – Fator de correção para o Brasil

Número de pontos	Fator médio de circuito	Desvio- padrão
120	1,23	0,11

Fonte: Ballou (2009)

3. REVISÃO DE LITERATURA

O problema de roteamento de veículos (*Vehicle Routing Problem*) é amplamente discutido na literatura, devido à sua complexidade e às diversas abordagens possíveis para encontrar soluções. Tendo em vista que este é um problema cotidiano na logística, existe um elevado número de estudos que investigam possíveis aplicações de metodologias capazes de proporcionar melhores soluções que atendam às particularidades de cada caso no mundo real.

Baldacci, Mingozzi e Roberti (2012) realizaram um estudo sobre os métodos de resolução do VRP capacitado e com janelas de tempo, focando nos algoritmos exatos mais recentes para esse problema. Os autores utilizaram uma abordagem metodológica que envolveu a revisão de formulações matemáticas, relaxações e algoritmos específicos para essas variantes do VRP. Foram realizadas análises comparativas das performances computacionais dos diferentes métodos exatos, incluindo *branch-and-cut-and-price*, formulações de redes de dois commodities, cortes de caminho elementar, cortes de ciclo e algoritmos de *branch-and-cut*. Estas técnicas demonstraram eficácia na resolução do problema, fornecendo soluções de qualidade para o VRP com capacidade e restrições de tempo. Conclui-se, então, que esses métodos são recomendados para lidar com essas variantes, considerando a busca por soluções precisas e computacionalmente eficientes.

Yuliza e Puspita (2019) realizaram a otimização das rotas de distribuição de gás GLP na cidade de Palembang, na Indonésia, onde opera a empresa PT Terang Lebong utilizando um modelo para o CVRP, visando minimizar a distância total percorrida pelos veículos, considerando a demanda dos clientes e a capacidade dos veículos. Para isso, os pesquisadores empregaram o método *branch-and-cut*. Os resultados mostraram que o método é eficaz em determinar rotas mais eficientes, reduzindo significativamente a distância total percorrida, o que otimiza a distribuição, diminui os custos operacionais e melhora o desempenho logístico da empresa.

Os estudos atuais avançaram em relação à utilização de métodos exatos para construção de *solvers* cada vez mais potentes para grandes instâncias. Pessoa *et al.* (2020) apresenta uma solução exata para diversos problemas de roteamento de veículos e problemas relacionados. O estudo introduz um *solver* genérico baseado no algoritmo *branch-cut-and-price* (BCP), que avançou significativamente na resolução

exata dos VRPs e é capaz de resolver instâncias do CVRP com até 360 clientes. Melhorias notáveis também foram observadas em variantes clássicas como VRP com janelas de tempo, VRP com frota heterogênea, VRP com múltiplos depósitos e roteamento de arco capacitado.

Durante o desenvolvimento do trabalho, os autores utilizaram uma generalização de conceitos-chave encontrados em algoritmos de ponta existentes, resultando na construção de um poderoso e ainda bastante genérico algoritmo BCP, introduzindo os novos conceitos de conjuntos de empacotamento e conjuntos de elementaridade para melhoria do desempenho do *solver*. Os resultados do estudo mostraram que o *solver* genérico proposto é capaz de lidar com uma ampla gama de variantes de VRPs e até mesmo algumas aplicações não relacionadas a VRPs. Embora o desempenho desse *solver* seja comparativamente inferior aos melhores algoritmos específicos existentes, a generalização dos conceitos-chave permite uma abordagem mais flexível e eficaz.

Em uma nova formulação do VRP considerando entregas flexíveis, Sadati, Akbari e Çatay (2022) discutem os desafios enfrentados pelos operadores logísticos ao integrar veículos elétricos em suas frotas e oferecer opções de entrega flexíveis. O artigo apresenta o Problema de Roteamento de Veículos Elétricos com Entregas Flexíveis (EVRP-FD), que visa reduzir a distância total percorrida, aumentando a eficiência e sustentabilidade das operações. Utilizando um algoritmo híbrido VNS/GTS, que combina Busca de Vizinhança Variável com Busca Tabu Generalizada, o estudo demonstra a eficácia deste método em resolver o EVRP-FD.

Ao implementar o algoritmo VNS/GTS de forma bem-sucedida, os autores realizaram a comparação de resultados com e sem custo fixo, demonstrando melhorias significativas quando o custo fixo é considerado, e a análise do impacto da recarga em postos públicos nas rotas planejadas. Dessa forma, destaca-se a redução significativa na distância total percorrida e no número de veículos necessários quando o custo fixo é considerado, bem como a redução da distância percorrida e do tamanho da frota ao utilizar postos públicos de recarga.

Dasdemir *et al.* (2022) realizaram um estudo sobre roteamento de veículos abertos com *overbooking*, focado no transporte de funcionários, buscando minimizar tanto a distância total percorrida quanto o número de passageiros em pé. Para resolver este problema, foi utilizada uma combinação de Programação Inteira Mista (MILP) e o método ϵ -*constraint* para gerar soluções de Pareto-ótimas. Devido às limitações computacionais do modelo exato, foram desenvolvidas abordagens heurísticas,

incluindo uma extensão de uma heurística de *cluster-first* e *route-second* e um algoritmo evolutivo multiobjetivo adaptado. Além disso, uma formulação MILP simplificada foi usada para fornecer um limite inferior. A experimentação com dados reais mostrou que os modelos exatos são viáveis para problemas pequenos, enquanto as heurísticas oferecem boas aproximações e são eficientes para problemas maiores, aproximando efetivamente a fronteira de soluções de Pareto-ótimas e fornecendo limites sobre a qualidade das soluções.

Sabo, Pop e Horvat-Mar (2020) apresentam o VRP seletivo (SVRP, do inglês *Selective Vehicle Routing Problem*), uma variação do Problema de Roteamento de Veículos Generalizado (GVRP), em que se busca encontrar um conjunto ótimo de rotas de entrega ou coleta de um depósito para um número de clientes divididos em *clusters* pré-definidos, mutuamente exclusivos e exaustivos, visitando exatamente um cliente de cada *cluster* e cumprindo as restrições de capacidade. A diferença se trata da forma como os clientes são agrupados. No SVRP, os clientes também são divididos em *clusters*, mas podem pertencer a um ou mais *clusters*. O estudo utilizou o método de Programação Linear Inteira Mista (MILP) para desenvolver um modelo matemático e utilizou o *software* CPLEX 12.9 para resolução do problema. Foram analisadas duas séries de experimentos, com 36 instâncias SVRP e 120 instâncias GVRP. Os resultados encontrados no estudo mostraram que o modelo proposto superou os modelos existentes em termos de menor lacuna média, tempo de execução mais curto e maior número de soluções ótimas alcançadas.

Cerrone e Sciomachen (2022) propuseram uma combinação de técnicas para resolver o problema de roteamento de veículos sustentável em uma empresa de varejo em Gênova, Itália. Em seu estudo, os autores utilizaram uma abordagem *math-heuristic*, ao combinar um modelo de Programação Linear Inteira Mista (MILP) para representar a variante do VRP em áreas urbanas, com a meta-heurística Busca Local Iterada (ILS) para explorar diferentes soluções e aprimorar progressivamente a solução encontrada. Além disso, aplicou-se em seguida um algoritmo memético – meta-heurística que combina elementos de algoritmos genéticos com busca local – para explorar o espaço de soluções e refiná-las por meio de um processo iterativo de melhoria. O estudo demonstrou a eficiência das abordagens propostas na resolução do GVRP. Os resultados da experimentação computacional com instâncias aleatórias e casos de teste baseados em dados reais mostraram a eficácia dessas abordagens na otimização de rotas de veículos em áreas urbanas, além de ressaltar que o modelo

proposto é facilmente adaptável à diferentes realidades urbanas e regras de mobilidade.

Em um cenário onde os consumidores estão cada vez mais propensos a realizar compras em lojas virtuais, o *e-commerce* enfrenta desafios para garantir uma experiência de entrega satisfatória aos clientes. Neste contexto, Karaoglu e Kara (2022) propõem um algoritmo heurístico de duas fases para melhorar as operações de entrega no *e-commerce*, focando na otimização das rotas para reduzir custos operacionais e aumentar a eficiência das entregas urbanas. O modelo matemático desenvolvido leva em conta múltiplos depósitos, coleta de pedidos, janelas de tempo e agregação de distribuição. Na primeira fase, os pontos de coleta e distribuição são agrupados pela proximidade; na segunda, os pedidos agrupados são atribuídos a motoristas próximos, respeitando as janelas de tempo e determinando rotas de menor custo. Testado em três casos distintos e comparado com a heurística do vizinho mais próximo, o algoritmo proposto mostrou melhorias significativas, reduzindo a distância percorrida, otimizando operações de entrega e diminuindo custos logísticos, provando ser um método eficaz para empresas do setor.

Ademais, os estudos analisados revelam a importância e os benefícios do uso de técnicas avançadas de otimização, especialmente em problemas complexos como o roteamento de veículos. Assim, fica evidente que a escolha do algoritmo mais adequado para cada problema específico é crucial para alcançar resultados ótimos e sustentáveis, refletindo a constante evolução e inovação no campo da logística e da otimização de operações.

4. PROPOSTA DE APLICAÇÃO

Conforme discussões prévias, CVRP é uma variação do problema clássico de roteamento de veículos que é amplamente estudado na pesquisa operacional devido à sua complexidade e relevância prática. O CVRP envolve determinar a rota ideal para uma frota de veículos que deve atender um conjunto de clientes, cada um com uma demanda específica, partindo de um depósito comum e retornando a este após a entrega. A principal restrição do CVRP é a capacidade limitada dos veículos, que não pode ser excedida.

Neste contexto, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de uma interface web que visa resolver CVRPs, facilitando a análise e visualização de dados. Essa aplicação permite que o problema possa ser resolvido por meio de duas abordagens distintas, que serão explicadas posteriormente. A interface web será desenvolvida utilizando a biblioteca *Streamlit* (<https://docs.streamlit.io>), escolhida pela sua simplicidade e eficácia na criação de aplicações web interativas, sem a necessidade de conhecimentos avançados em desenvolvimento web. A interface permitirá a interação do usuário com ferramentas de roteirização, proporcionando uma plataforma intuitiva para a criação e otimização de rotas.

Para resolver o CVRP, são utilizadas duas abordagens distintas, a depender da escolha do usuário. A primeira delas emprega algoritmos que resolvem um modelo matemático do CVRP de forma exata, utilizando o pacote *Python-MIP* (<https://docs.python-mip.com>). Este pacote oferece ferramentas para modelar e resolver problemas de Programação Inteira Mista (MILP) na linguagem de programação Python, permitindo a obtenção de soluções ótimas. A segunda abordagem aplica uma combinação de heurísticas, incluindo uma heurística construtiva baseada no método do Vizinho Mais Próximo e uma heurística de melhoria baseada na Busca Tabu. Esta abordagem híbrida permite lidar com a escalabilidade do problema, oferecendo soluções de alta qualidade em tempo razoável

4.1 ALGORITMO PROPOSTO

Como primeiro passo para o desenvolvimento do algoritmo de resolução de CVRPs, foi realizada a modelagem matemática do problema, adaptada de Arenales *et al.* (2007), com o objetivo de garantir uma definição precisa e a aplicação dos

métodos de otimização.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q_k, \quad \forall k \in K \quad (26)$$

$$\sum_{j \in C} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1, \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$u_i - u_j + n \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq n - 1, \quad \forall (i,j) \in N: i \neq j \quad (17)$$

$$x \in B^{K|E|} \quad (9)$$

$$u \in \mathbf{Z}^+ \quad (18)$$

O modelo proposto consiste na Função Objetivo (1) que busca minimizar o custo total das rotas dos veículos, considerando a distância total percorrida. Quanto às restrições, foram consideradas as Restrições (2), que garantem que cada cliente seja visitado apenas uma vez, as Restrições (26), adaptadas das Restrições (3) de Arenales *et al.* (2007) para considerar veículos com capacidades heterogêneas e garantir que as demandas das rotas não excedam a capacidade de cada veículo, e as Restrições (9), que asseguram que a variável de decisão seja binária.

Além disso, há restrições de fluxo que asseguram que cada veículo parta do depósito (5), deixe um cliente apenas após tê-lo visitado (6) e retorne ao depósito apenas uma vez (7). Por fim, as Restrições (17) e (18) da formulação de Miller, Tucker e Zemlin (1960) são consideradas para evitar a formação de sub-rotas.

Para a abordagem exata, o algoritmo resolve um modelo matemático do CVRP utilizando o pacote *Python-MIP*, que permite a implementação de modelos matemáticos e utiliza o *COIN-OR Linear Programming Solver - CLP*, que é atualmente o mais rápido *solver* de programação linear *open source*, e o *COIN-OR Branch-and-*

Cut - CBC, um *solver* MILP altamente configurável. Este método garante a otimização exata da função objetivo, realizando uma busca eficiente no espaço de soluções.

A principal vantagem do método exato é a garantia da otimalidade, o que é crucial para aplicações onde a precisão é mais importante que o tempo de execução. No entanto, devido à complexidade do CVRP, o uso de métodos exatos é viável apenas para instâncias menores, onde o tempo de computação permanece gerenciável.

Como alternativa ao método exato, foi implementada uma heurística construtiva baseada na heurística do Vizinho Mais Próximo (NNS) utilizando a abordagem de construção paralela. Esta heurística é simples e eficiente, construindo uma solução inicial adicionando sequencialmente o cliente mais próximo que ainda não foi visitado. A principal vantagem deste método é a sua rapidez e a capacidade de gerar uma solução inicial viável que pode ser posteriormente melhorada.

A heurística, no entanto, não garante uma solução ótima e pode resultar em rotas subótimas. A simplicidade do método também significa que ele pode ser facilmente implementado e compreendido, tornando-o uma escolha popular para gerar soluções iniciais em problemas de roteamento.

Para melhorar a solução inicial gerada pela NNS, aplicou-se uma heurística de melhoria baseada na Busca Tabu (TS). A busca tabu é uma técnica meta-heurística que explora o espaço de soluções vizinhas, evitando ciclos e melhorando continuamente a solução até que um critério de parada seja alcançado.

O pseudocódigo da meta-heurística pode ser verificado na Figura 5. O algoritmo começa definindo a solução inicial como a solução obtida pela heurística construtiva NNS. A função `CALCULAR_CUSTO_TOTAL` é responsável por calcular o custo total da solução inicial. Além disso, inicializa-se uma lista tabu onde as melhores soluções vizinhas serão armazenadas.

Utilizando um critério de parada de 10.000 iterações, a Busca Tabu é iniciada pela geração da vizinhança. A função `GERAR_VIZINHOS` possui o operador de vizinhança inter-rota *SWAP*, que realiza trocas de posições entre clientes das rotas da solução atual. Para cada nova rota criada, verifica-se se a capacidade do veículo não é excedida; caso não seja, a nova rota é adicionada à vizinhança.

Em seguida, identifica-se entre os vizinhos que não estão na lista tabu aquele com o melhor custo. Este melhor vizinho é então definido como a nova solução atual e adicionado à lista tabu, indicando que será explorado na próxima iteração. Ao final

do algoritmo, seleciona-se o vizinho com o melhor custo entre todas as iterações.

Figura 5 – Pseudocódigo do algoritmo Busca Tabu

Algorithm 1 Tabu Search

```

1: solucao_atual ← solucao_inicial
2: melhor_solucao ← solucao_inicial
3: melhor_custo ← CALCULAR_CUSTO_TOTAL(solucao_inicial, ma-
  triz_distancias)
4: lista_tabu ← [ ]
5: for  $i \leftarrow 1$  to max_iteracoes do
6:   vizinhos ← GERAR_VIZINHOS(solucao_atual, matriz_distancias, capaci-
  dades_veiculos, demandas)
7:   melhor_vizinho ← null
8:   melhor_custo_vizinho ←  $\infty$ 
9:   for each vizinho in vizinhos do
10:    if vizinho not in lista_tabu then
11:      custo_vizinho ← CALCULAR_CUSTO_TOTAL(vizinho, ma-
  triz_distancias)
12:      if  $custo\_vizinho < melhor\_custo\_vizinho$  then
13:        melhor_vizinho ← vizinho
14:        melhor_custo_vizinho ← custo_vizinho
15:      end if
16:    end if
17:  end for
18:  if melhor_vizinho  $\neq$  null then
19:    solucao_atual ← melhor_vizinho
20:    if  $melhor\_custo\_vizinho < melhor\_custo$  then
21:      melhor_solucao ← melhor_vizinho
22:      melhor_custo ← melhor_custo_vizinho
23:    end if
24:    LISTA_TABU.APPEND(melhor_vizinho)
25:  end if
26: end for
27: return melhor_solucao, melhor_custo

```

Fonte: A autora (2024)

Para a consideração de distâncias, calculou-se a matriz de distâncias através da fórmula da distância euclidiana multiplicada pelo fator de sinusidade do Brasil (Tabela 1) convertida em quilômetros.

Após a execução dos métodos, o algoritmo apresenta as rotas resultantes ilustradas em um mapa. As informações sobre as rotas são exibidas também em uma tabela que destaca a sequência de visitas aos clientes por veículo, a distância por percurso e a distância total percorrida por todos os veículos. Por fim, o tempo de execução do método utilizado é apresentado, além de gráficos para ilustrar a distribuição de distância percorrida por veículo e a utilização da capacidade dos veículos, e a eficiência da solução otimizada, para os casos em que os métodos heurísticos são aplicados.

4.2 INTERFACE WEB

Pensando na usabilidade da solução, uma interface web foi desenvolvida para proporcionar uma experiência de usuário intuitiva e simples. A estrutura da interface é composta por três abas: Guia de Uso, Gerador de Rotas e Localizador de Coordenadas. É possível acessar a ferramenta através do seguinte link: <https://ferramentaroteirizacao.streamlit.app/>.

A tela inicial da ferramenta pode ser visualizada na Figura 6.

Figura 6 – Tela inicial da interface web

Ferramenta de Roteirização

[Guia de uso](#) [Gerador de rotas](#) [Localizador de coordenadas](#)

Como usar

Esta ferramenta foi desenvolvida para auxiliar no processo de roteirização de veículos, determinando rotas ideais para uma frota que deve atender a um conjunto de clientes. O objetivo principal é minimizar a distância total percorrida pelos veículos. Para isso, é necessário inserir as informações do problema e escolher o método preferido para a resolução. A abordagem exata utiliza um modelo de programação linear inteira mista para obter soluções otimizadas. Já a abordagem aproximada combina a heurística do Vizinho Mais Próximo com a meta-heurística Busca Tabu, permitindo encontrar soluções viáveis em um tempo de execução adequado.

1º Passo:

Faça o download da planilha disponível em: https://drive.google.com/drive/folders/1vZIP1bjJiJeBtRWU-m3RFY4D8hWWa0AX?usp=drive_link

2º Passo:

Fonte: A autora (2024)

4.2.1 Guia de Uso

A aba “Guia de Uso” fornece instruções detalhadas sobre o objetivo da ferramenta e sua utilização. Sua principal função é guiar o usuário passo a passo, desde a obtenção da planilha para preenchimento dos dados iniciais até a geração das rotas.

4.2.2 Gerador de rotas

Nesta aba o usuário pode fazer o *upload* da planilha contendo as instâncias para a geração de rotas e obter os resultados da roteirização. O arquivo utilizado como

input para a ferramenta é fornecido por meio de uma pasta compartilhada no Google Drive, padronizado para conter informações sobre os endereços dos clientes e depósito, suas coordenadas, as demandas a serem atendidas e informações sobre os veículos, como a identificação do veículo, status (ativo, indisponível etc.) e capacidade. Dessa forma, a planilha disponibilizada permite ao usuário definir parâmetros de configuração, garantindo a flexibilidade necessária para adaptar o roteirizador a diferentes cenários.

Na Figura 7 é possível visualizar a aba “Entregas” da planilha de input, na qual insere-se as informações de latitude, longitude e demanda do depósito (ou centro de distribuição) e clientes. Na aba “Veículos” (Figura 8) o usuário deve preencher as informações relacionadas aos veículos, como a identificação do veículo, descrição, *status* e capacidade.

Figura 7 – Aba “Entregas” na planilha de input da ferramenta

Roteirização de Veículos - Lista de Entregas

	Local	Latitude	Longitude	Carga (kg)
Centro de Distribuição >>	Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	-8,05223	-34,94507	354,0
	Av. da Engenharia - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-420	-8,04962	-34,94690	28,0
	Av. da Arquitetura, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-550	-8,05348	-34,95465	67,0
	Av. Jorn. Aníbal Fernandes, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-560	-8,05523	-34,95131	94,0
	Av. Reitor Joaquim Amazonas - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-570	-8,05016	-34,94829	75,0
	R. Acdo. Hélio Ramos, 20 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-530	-8,05495	-34,95595	90,0

Fonte: A autora (2024)

Figura 8 – Aba “Veículos” na planilha de input da ferramenta

Roteirização de Veículos - Lista de Veículos Disponíveis

Veículo	Descrição	Status	Capacidade (kg)
Vehicle 1	Fiorino	Ativo	300
Vehicle 2	Caminhão 03/04	Ativo	300

Fonte: A autora (2024)

Após preencher a planilha, o usuário deve inseri-la na ferramenta, realizar a escolha do método desejado e iniciar o roteirizador. Um botão de execução dispara o algoritmo escolhido e os resultados são processados em tempo real. O algoritmo reconhecerá o método escolhido, e iniciará a geração das rotas e a visualização dos resultados.

A Figura 9 apresenta a tela inicial da aba, na qual é possível visualizar o campo para inserir a planilha e as opções de métodos para a resolução do problema.

Figura 9 – Tela inicial da aba “Gerador de Rotas” da interface web

Ferramenta de Roteirização

Guia de uso **Gerador de rotas** Localizador de coordenadas

Inserção dos dados

Escolha um arquivo

Drag and drop file here
Limit 200MB per file

Browse files

Escolha um método:

Abordagem Exata
Modelo de Programação Linear Inteira Mista (MILP)

Abordagem Aproximada
Heurísticas do Vizinho Mais Próximo e Busca Tabu

Método selecionado: **Abordagem Exata**

Iniciar roteirização

Fonte: A autora (2024)

Em seguida, uma visualização dos dados inseridos é exibida na tela para que o usuário possa revisá-los, seguida pela apresentação da solução gerada. Uma tabela contendo as rotas geradas é apresentada, seguida pelos indicadores de desempenho do algoritmo. Para o método exato, são exibidos o tempo de execução em segundos e o custo total das rotas em quilômetros. Para as heurísticas, são mostrados o tempo de execução em segundos, o custo da solução inicial gerada pela heurística construtiva em quilômetros, o custo da solução final gerada pela meta-heurística em quilômetros, e a eficiência da solução final em relação à solução inicial.

Além destas informações, a ferramenta oferece um gráfico de barras que ilustra a distribuição da distância total percorrida por veículo, outro gráfico de barras que mostra a utilização da capacidade por veículo, e mapas que destacam a sequência de visitas aos clientes por cada veículo.

Um exemplo da exibição dos resultados é apresentado nas Figuras 10 a 13.

Figura 10 – Tabela de resultados

Resultado:

	Veículo	Origem	Destino
0	0	Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	Av. Jorn. Aníbal Ferr
1	0	Av. Jorn. Aníbal Fernandes, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-560	Av. Prof. Moraes Reg
2	1	Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	Av. Reitor Joaquim A
3	1	Av. Reitor Joaquim Amazonas - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-570	Av. da Engenharia - C
4	1	Av. da Engenharia - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-420	Av. da Arquitetura, s
5	1	Av. da Arquitetura, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-550	R. Acdo. Hélio Ramo
6	1	R. Acdo. Hélio Ramos, 20 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-530	Av. Prof. Moraes Reg

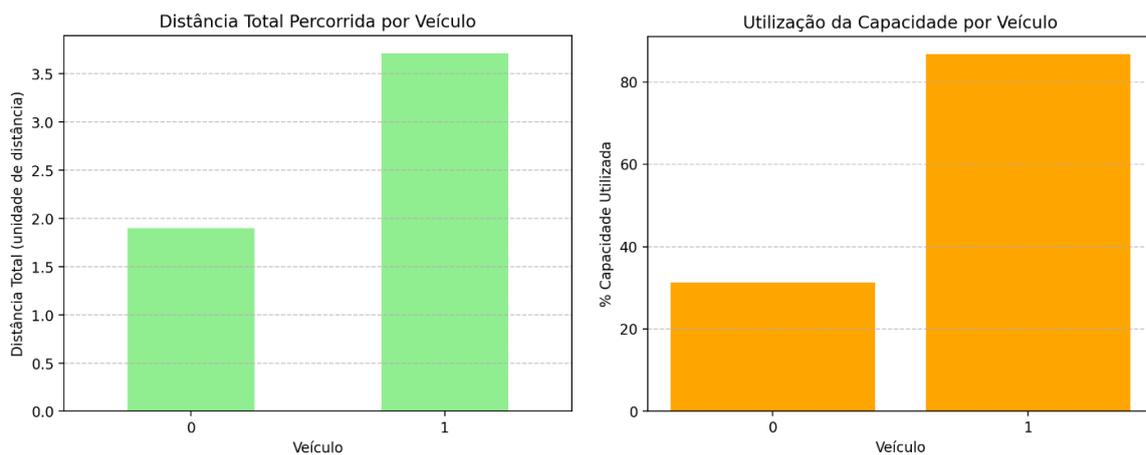
Fonte: A autora (2024)

Figura 11 – Tabela de indicadores de performance das heurísticas

	Tempo de execução (s)	Custo inicial (km)	Custo final (km)	Eficiência da solução (%)
0	25.8086	265,593.1751	232,893.4019	14.0407

Fonte: A autora (2024)

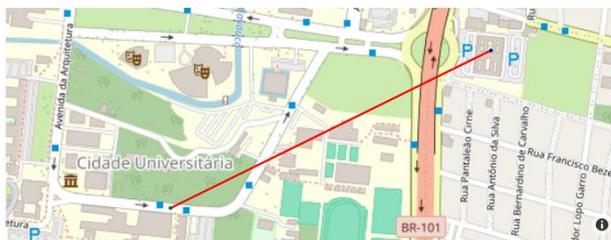
Figura 12 – Gráficos de barras da distribuição de distância e utilização da capacidade por veículo



Fonte: A autora (2024)

Figura 13 – Mapas das rotas geradas

Rota do Veículo: 0



Rota do Veículo: 1



Fonte: A autora (2024)

4.2.3 Localizador de coordenadas

Em aplicações reais, é frequente contar apenas com as informações de endereço dos locais a serem visitados. Porém, para o cálculo das distâncias utilizadas no algoritmo, é preciso que as coordenadas desses locais sejam conhecidas. Desse modo, a aba “Localizador de coordenadas” (Figura 14) permite ao usuário inserir um arquivo contendo apenas os endereços dos locais e obter suas respectivas coordenadas geográficas como resultado.

Uma função interna do algoritmo é responsável por realizar a consulta para obter as coordenadas de latitude e longitude de um endereço usando a API do Bing Maps (Virtual Earth). Ela recebe dois parâmetros: o endereço do local a ser geocodificado e a chave de acesso à API do Bing Maps. O *output* consiste em uma tabela com as coordenadas para a lista de endereços e a possibilidade de download em formato .csv.

Figura 14 – Exibição de resultado na aba “Localizador de coordenadas”

Inserção dos dados

Utilize a planilha DADOS_INICIAIS_ROTUIRIZACAO disponibilizada no Guia de Uso com a coluna *Locais* preenchida.

Importar arquivo

Drag and drop file here
Limit 200MB per file Browse files

TCC - Planilha de Roteirização_Teste_Loc.xlsx 67.5KB ×

Iniciar busca

	Local	Latitude	Longitude
0	Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	-8.0503	-34.9456
1	Rua Tobias Barreto, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-660	-8.0542	-34.9571
2	Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	-8.0503	-34.9456
3	Av. Prof. Moraes Rego, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-420	-8.0467	-34.9448
4	Av. Prof. Luiz Freire, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901	-8.0592	-34.9474
5	Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n - Cidade Universitária, Recife - PE, 50740-550	-8.0508	-34.9549

Fonte: A autora (2024)

4.3 EXPERIMENTOS REALIZADOS

Para avaliar a eficácia dos algoritmos desenvolvidos e a usabilidade da interface web da ferramenta, foram realizados experimentos com seis instâncias públicas de CVRP, disponibilizadas na literatura. As instâncias variam em tamanho e complexidade, permitindo uma análise abrangente do desempenho dos métodos implementados. As características das instâncias utilizadas podem ser observadas na Tabela 2, onde a coluna 'n' representa o número de clientes a serem atendidos, e as colunas 'K' e 'Q' indicam o número de veículos homogêneos e suas capacidades, respectivamente.

As instâncias foram testadas utilizando as duas abordagens. Em seguida, foram comparados o tempo de execução em segundos (TE(s)) o custo total em quilômetros (C(km)) obtido por cada método. Os resultados estão descritos nas Tabelas 3 e 4. Além dos indicadores comentados, apresenta-se a eficiência (E) obtida pela solução da meta-heurística Busca Tabu em comparação com a solução inicial fornecida pela heurística construtiva.

Os testes foram realizados em um computador com sistema operacional *Windows 10 Pro*, processador *Intel Core i5-1135G7* e memória RAM de 8GB.

Tabela 2 – Instâncias utilizadas nos testes

Instância	n	K	Q
P-n16-k8	15	8	35
P-n19-k2	18	2	160
E-n22-k4	21	4	6000
A-n32-k5	31	5	100
A-n64-k9	63	9	100
Tai100a	100	11	1409

Fonte: A autora (2024)

Tabela 3 – Resultados dos experimentos

Instância	MILP		TS		
	C(km)	TE(s)	C(km)	TE(s)	E
P-n16-k8	61.682	2.400	59.183	11,5	0%
P-n19-k2	29.063	2.400	40.636	6,4	9,2%
E-n22-k4	52.494	2.400	55.148	19	9,2%
A-n32-k5	-	-	128.653	55,9	18,8%
A-n64-k9	-	-	232.893	411,8	12,3%
Tai100a	-	-	414.090	854,5	9,6%

Fonte: A autora (2024)

Tabela 4 – Gaps entre o método exato e o método aproximado

Instância	GAP (C)	GAP (TE)
P-n16-k8	4%	100%
P-n19-k2	-40%	100%
E-n22-k4	-5%	99%

Fonte: A autora (2024)

As instâncias *P-n16-k8*, *P-n19-k2*, *A-n32-k5* e *A-n64-k9* foram retiradas do estudo de Augerat (1995), enquanto as instâncias *E-n22-k4* e *Tai100a* foram originalmente utilizadas por Christofides e Elion (1969) e Rochat e Taillard (1995), respectivamente. Todas as seis instâncias utilizadas neste trabalho estão disponíveis

no site: <http://vrp.galgos.inf.puc-rio.br/index.php/en/>.

Processos de longa duração podem consumir uma quantidade significativa de memória, o que pode resultar na interrupção da execução do algoritmo devido às limitações de memória do servidor do *Streamlit*. Para equilibrar o esforço computacional necessário à execução do método exato e garantir a eficiência prática da ferramenta, foi estabelecido um limite de 2.400 segundos para a execução do MILP. Com este limite de tempo, o método exato foi capaz de retornar soluções viáveis para as instâncias *P-n16-k8*, *P-n19-k2* e *E-n22-k4*, mas não conseguiu encontrar qualquer solução para as demais instâncias.

Na Tabela 4, o GAP entre as soluções é calculado considerando o resultado do método exato como referência. Abaixo estão descritas as fórmulas consideradas para o cálculo dos GAPs do custo total (C) e tempo de execução (TE):

$$GAP(C) = \frac{C_{MILP} - C_{TS}}{C_{MILP}} \quad (27)$$

$$GAP(TE) = \frac{TE_{MILP} - TE_{TS}}{TE_{MILP}} \quad (28)$$

Dessa forma, observa-se que as heurísticas apresentaram uma melhoria de 4% no custo da solução em relação ao método exato para a instância *P-n16-k8*. Essa diferença pode ser justificada pelo limite de tempo de execução imposto ao solver, que retorna a melhor solução encontrada até o momento, e não a solução ótima. O MILP, por sua vez, apresentou uma melhoria de 40% e 5% nas instâncias *P-n19-k2* e *E-n22-k4*, respectivamente.

No entanto, é importante destacar que os tempos de execução das heurísticas apresentaram melhorias significativas com relação ao método exato em todas as instâncias, o que indica que, apesar de variar em termos de custo, o método aproximado é consistentemente mais rápido. Esses resultados confirmam que o método exato pode ser uma boa alternativa para problemas menores, mas as heurísticas geralmente apresentam tempos menores e resultados próximos ao do método exato na maioria dos casos.

Nos testes realizados com instâncias maiores, a heurística do vizinho mais próximo gerou uma solução inicial que foi utilizada pela meta-heurística Busca Tabu.

Os resultados mostraram uma melhora significativa na distância total percorrida após a aplicação da Busca Tabu, com exceção da instância *P-n16-k8*, que não apresentou diferenças entre as soluções, indicando que o uso das heurísticas é eficaz para lidar com problemas maiores, onde métodos exatos não são práticos.

A abordagem heurística destacou-se pelo tempo de execução do algoritmo, sendo capaz de gerar uma solução viável para uma instância com $n = 100$ em aproximadamente 854 segundos. Embora não haja garantia de que o método tenha retornado uma solução ótima, rotas foram geradas em um tempo de execução significativamente menor do que seria necessário para um método exato. Este resultado destaca a escalabilidade e eficiência das heurísticas aplicadas.

Abaixo são apresentados os resultados detalhados dos experimentos realizados com cada método.

- **Instância P-n16-k8**

Para a instância *P-16-k8* (Tabela 5) demonstraram que o método exato encontrou um custo total de 61.682 km, atingindo o tempo limite de execução, com variações significativas nas distâncias percorridas por cada veículo (Figura 15). No entanto, a utilização da capacidade dos veículos foi bastante uniforme, com todos os veículos próximos de sua ocupação máxima, o que demonstra uma eficiência na alocação de carga.

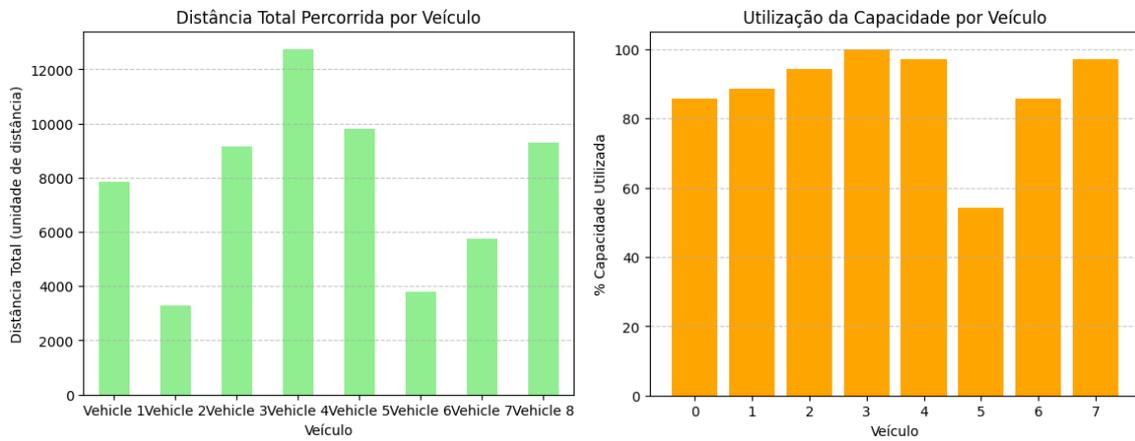
Em contrapartida, a abordagem heurística gerou uma solução em apenas 11,5 segundos, com um custo total ligeiramente menor de 59.184 km (Tabela 6). A distribuição da distância percorrida entre os veículos foi mais uniforme comparada à abordagem exata, o que sugere uma distribuição mais equilibrada das rotas (Figura 16). A utilização da capacidade dos veículos também foi eficiente, embora com pequenas variações em comparação com a solução exata, indicando uma ligeira diferença na alocação de cargas.

Tabela 5 – Resultados obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
61.682	2.400

Fonte: A autora (2024)

Figura 15 – Gráficos obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem exata



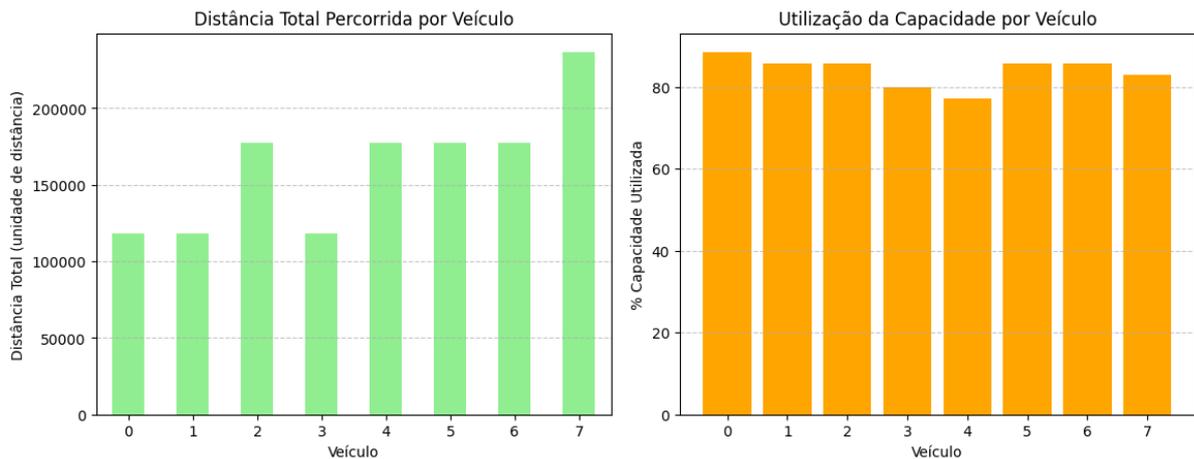
Fonte: A autora (2024)

Tabela 6 – Resultados obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
59.184	59.184	0	11,5

Fonte: A autora (2024)

Figura 16 – Gráficos obtidos para a instância P-n16-k8 através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

- **Instância P-n19-k2**

Para a instância *P-n19-k2*, o método exato encontrou um custo total de 29.063 km, levando 2.400 segundos para encontrar a solução (Tabela 7). Os gráficos da

Figura 17 revelam que, embora o veículo 1 tenha percorrido uma distância maior do que o veículo 2, ambos os veículos apresentaram uma utilização de capacidade próxima a 100%, indicando uma alocação eficiente de carga.

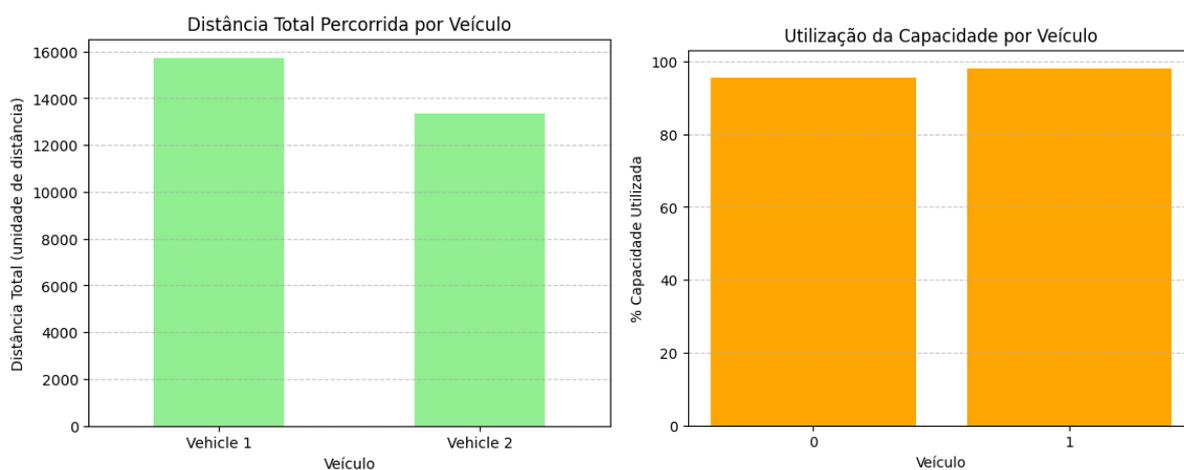
Em comparação, a abordagem heurística gerou uma solução em apenas 6,4 segundos, com um custo total de 44.763 km utilizando NNS e 40.636 km após a aplicação da TS, resultando em uma eficiência de 9,2% com relação à solução inicial (Tabela 8), mas com um custo maior que o método exato. Nos gráficos correspondentes (Figura 18), a distribuição da distância percorrida entre os veículos é semelhante à distribuição obtida pelo MILP, e a utilização da capacidade também se manteve próxima de 100%.

Tabela 7 – Resultados obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
29.063	2.400

Fonte: A autora (2024)

Figura 17 – Gráficos obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem exata



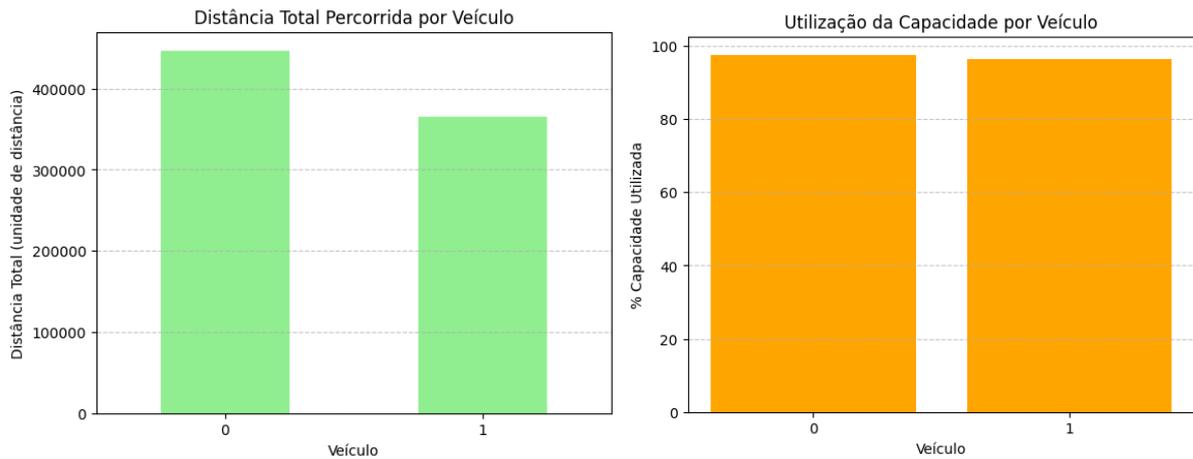
Fonte: A autora (2024)

Tabela 8 – Resultados obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
44.763	40.636	9,2%	6,4

Fonte: A autora (2024)

Figura 18 – Gráficos obtidos para a instância P-n19-k2 através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

- **Instância E-n22-k4**

Para a instância *E-n22-k4*, o método exato alcançou um custo total de 52.494 km, atingindo o limite de tempo de 2.400 segundos (Tabela 9). Os gráficos mostram que, embora haja variação nas distâncias percorridas pelos veículos, a utilização da capacidade foi bem equilibrada, com todos os veículos operando próximos a 100% de sua capacidade (Figura 19).

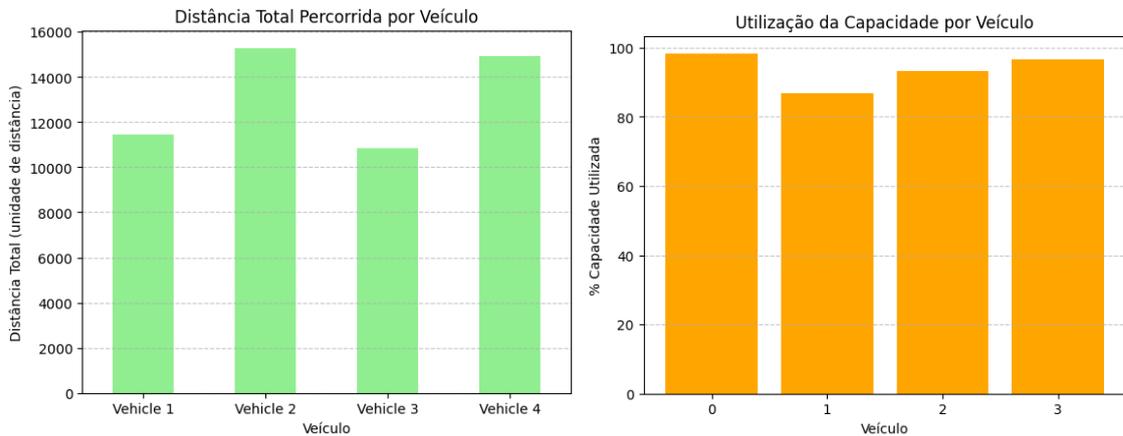
A abordagem aproximada, por sua vez, resultou em um custo de 55.148 km (Tabela 10), um aumento de 5% em comparação ao método exato. Apesar de variações na distribuição das distâncias percorridas pelos veículos, a utilização da capacidade também se manteve bem distribuída (Figura 20).

Tabela 9 – Resultados obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
52.494	2.400

Fonte: A autora (2024)

Figura 19 – Gráficos obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem exata



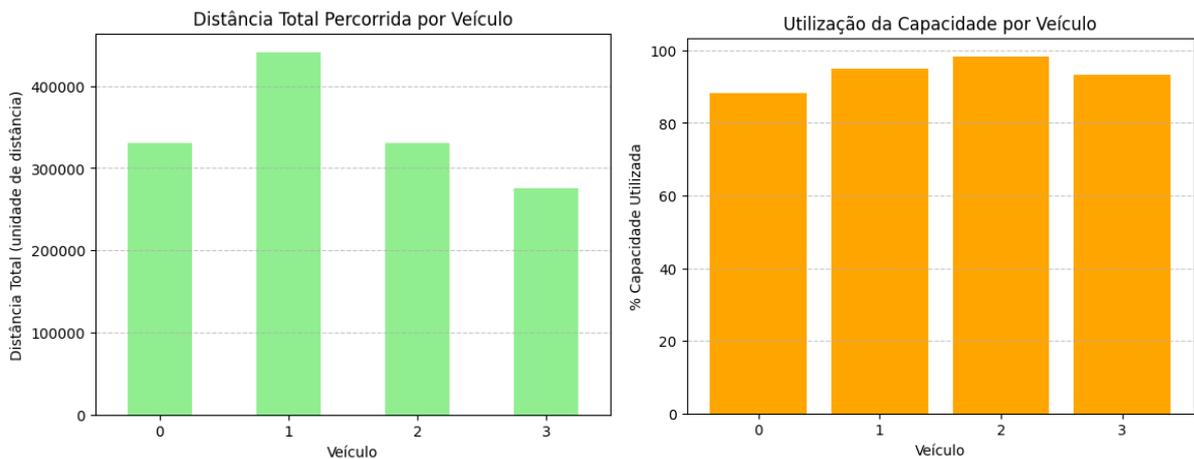
Fonte: A autora (2024)

Tabela 10 – Resultados obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
60.720	55.148	9,2%	19

Fonte: A autora (2024)

Figura 20 – Gráficos obtidos para a instância E-n22-k4 através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

- **Instância A-n32-k5**

Para a instância *A-n32-k5*, o MILP não conseguiu encontrar uma solução viável dentro do limite de tempo de 2.400 segundos (Tabela 11). Em contraste, a abordagem heurística encontrou uma solução em 55,9 segundos, com um custo de 128.623 km após a aplicação da TS (Tabela 12). Os gráficos de distâncias totais percorridas por veículo mostram uma variação considerável, com um veículo percorrendo uma distância muito menor em comparação com os outros. Isso indica uma distribuição desigual das rotas entre os veículos, embora a heurística tenha proporcionado uma utilização da capacidade dos veículos equilibrada em quatro dos cinco veículos (Figura 21).

Tabela 11 – Resultados obtidos para a instância A-n32-k5 através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
Sem soluções viáveis	2.400

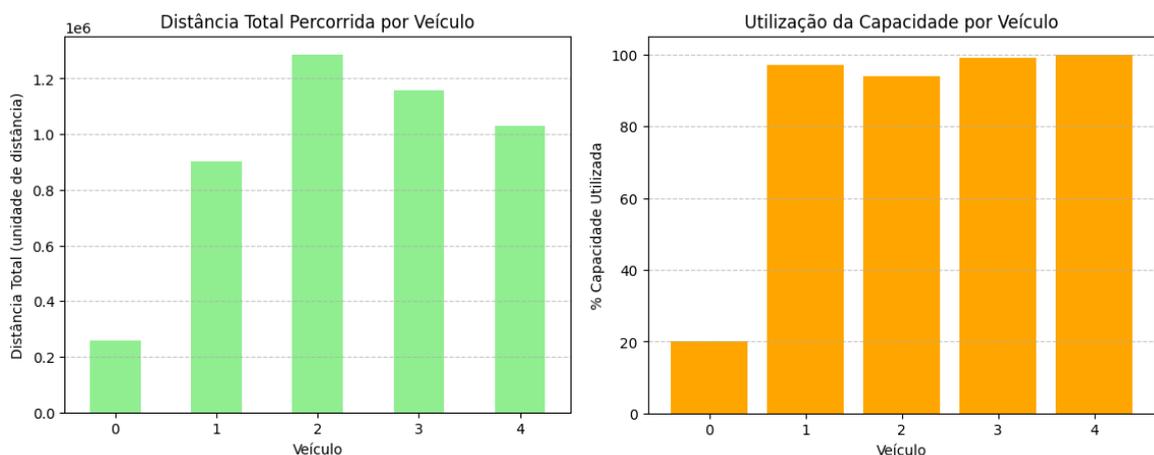
Fonte: A autora (2024)

Tabela 12 – Resultados obtidos para a instância A-n32-k5 através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
158.285	128.653	18,7%	55,9

Fonte: A autora (2024)

Figura 21 – Gráficos obtidos para a instância A-n32-k5 através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

- **Instância A-n64-k9**

Na instância *A-n64-k9*, o MILP também não encontrou soluções viáveis dentro do tempo estipulado (Tabela 13). A heurística, por outro lado, gerou uma solução em 411,8 segundos, com um custo final de 232.893 km (Tabela 14). Assim como na instância anterior, a heurística apresentou variações em relação a distribuição da distância total percorrida pelos veículos, com uma utilização da capacidade próxima ao máximo para a maioria dos veículos (Figura 22).

Tabela 13 – Resultados obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
Sem soluções viáveis	2.400

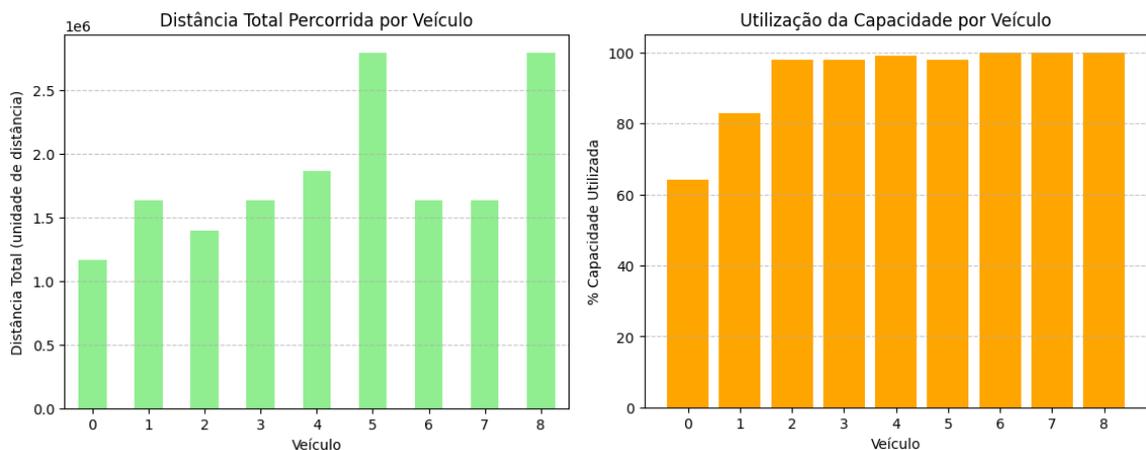
Fonte: A autora (2024)

Tabela 14 – Resultados obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
265.593	232.893	12,3%	411,8

Fonte: A autora (2024)

Figura 22 – Gráficos obtidos para a instância A-n64-k9 através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

- **Instância Tai100a**

Para a instância Tai100a, novamente o MILP não obteve uma solução viável dentro do limite de tempo de execução, conforme Tabela 15. A heurística levou 854,5 segundos para encontrar uma solução com um custo final de 414.090 km, apresentando uma eficiência de 9,59% em relação à solução inicial (Tabela 16). O gráfico de distâncias totais percorridas mostra uma variação ainda mais acentuada. Apesar dessa discrepância, a utilização da capacidade dos veículos foi mantida em níveis altos (Figura 23).

Tabela 15 – Resultados obtidos para a instância Tai100a através da abordagem exata

MILP	
C(km)	TE(s)
Sem soluções viáveis	2.400

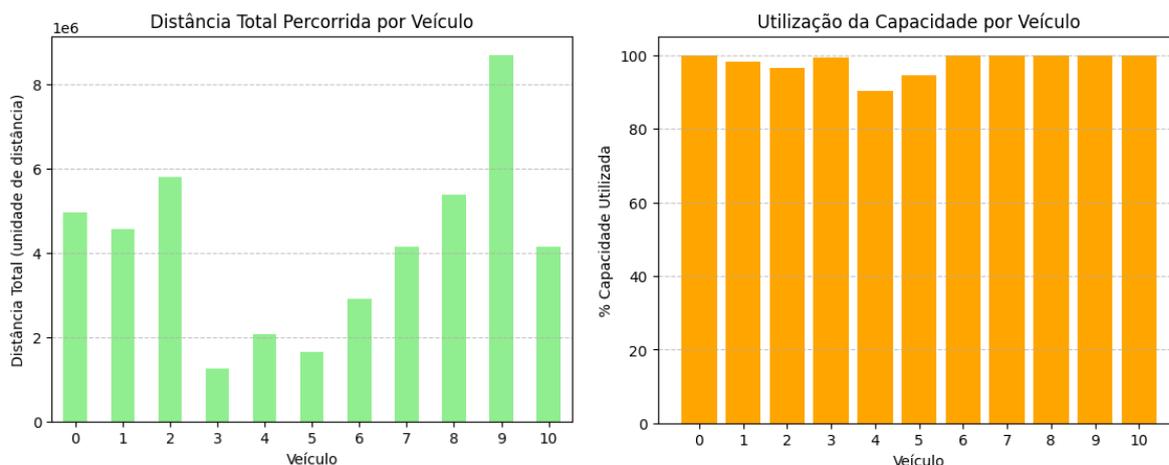
Fonte: A autora (2024)

Tabela 16 – Resultados obtidos para a instância Tai100a através da abordagem heurística

NNS	TS	E	TE(s)
C(km)	C(km)		
458.007	414.090	9,59%	854,5

Fonte: A autora (2024)

Figura 23 – Gráficos obtidos para a instância Tai100a através da abordagem heurística



Fonte: A autora (2024)

4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS E LIMITAÇÕES DO MODELO

Os experimentos realizados no desenvolvimento da ferramenta demonstraram que a abordagem exata, embora tenha fornecido soluções viáveis para as instâncias menores, enfrentou limitações dentro do tempo de execução estipulado para as instâncias maiores. Isso indica que, embora o modelo exato seja eficaz para problemas menores, sua aplicabilidade em cenários em que a agilidade é crucial pode ser comprometida.

Considerando a restrição de memória associada à utilização da biblioteca *Streamlit* para o desenvolvimento da interface web, o limite de tempo de execução foi necessário para garantir a obtenção de soluções viáveis em tempos práticos. Em um ambiente logístico dinâmico, onde as condições podem mudar rapidamente, a capacidade de gerar soluções em tempo hábil é fundamental.

Em suma, a flexibilidade de escolha do método, juntamente com os indicadores e visualizações apresentados pela ferramenta, permite ao usuário comparar soluções e decidir qual resultado melhor atende aos seus objetivos de maneira interativa. Contudo, para instâncias maiores, a abordagem heurística não apenas oferece uma solução de boa qualidade, mas também mantém o tempo de execução dentro de limites práticos. Assim, a heurística pode ser uma alternativa viável para empresas que necessitam de soluções rápidas e eficazes, mesmo que não sejam ótimas.

Com relação aos gráficos apresentados, os resultados mostraram um desbalanceamento para grande parte das instâncias, refletindo a natureza do modelo que prioriza a minimização da distância total percorrida. Para um melhor balanceamento da distância percorrida e utilização da capacidade por veículo, seria necessário implementar um modelo de otimização multi-objetivo (Cohon; Marks, 1975). Esta abordagem poderia oferecer uma visão mais holística, permitindo que as empresas considerem múltiplas dimensões de desempenho em suas operações logísticas.

Para calcular as distâncias entre os pontos de entrega, a distância euclidiana foi utilizada como a métrica principal, sendo multiplicada por um fator de correção que considera a sinuosidade das vias no Brasil. No entanto, a integração de um sistema de informações geográficas (GIS) poderia aprimorar ainda mais a precisão das rotas, permitindo a análise de dados espaciais complexos e a consideração de características específicas das vias. Com um modelo GIS, seria possível calcular

distâncias mais precisas e dinâmicas.

Em resumo, a implementação de uma aplicação web para resolver o CVRP oferece uma ferramenta acessível para empresas que buscam otimizar suas operações de transporte. Este trabalho destaca a importância de integrar técnicas de otimização para enfrentar desafios comuns da engenharia de produção dentro da logística, atendendo às demandas complexas do setor.

5. CONCLUSÃO

Diante do cenário globalizado atual, marcado pela busca constante por eficiência e sustentabilidade, a proposta de aplicação web desenvolvida para a resolução de problemas de roteamento de veículos com restrições de capacidade se destaca como uma alternativa prática para auxiliar no planejamento logístico e nos estudos que envolvem a utilização de técnicas avançadas para o processo de formação de rotas que devem atender determinados critérios.

A solução desenvolvida mostrou-se eficaz, atendendo a diferentes tamanhos de instâncias do CVRP. A utilização de métodos exatos para instâncias menores garantiu a obtenção de soluções viáveis, enquanto o método aproximado proporcionou soluções em tempos de execução razoáveis, principalmente para instâncias maiores.

Diante do exposto, a interface desenvolvida facilita a interação do usuário com o sistema e a visualização dos resultados do problema de maneira interativa, oferecendo uma ferramenta de simples utilização que possui potencial para ser implementada em ambientes reais, trazendo benefícios tangíveis para empresas e organizações que lidam com desafios de roteamento de veículos.

O uso da meta-heurística Busca Tabu, demonstrou ser uma alternativa eficiente em comparação com o método exato nos casos estudados. No entanto, ainda é possível explorar algoritmos mais complexos e avançados de roteamento, como algoritmos genéticos (Golberg, 1989), *math*-heurísticas (Boschetti; Letchford; Maniezzo, 2023) ou algoritmos de colônia de formigas (Dorigo; Maniezzo; Coloni, 1996), para melhorar a eficiência e a precisão das rotas geradas.

Além disso, uma possível evolução da ferramenta desenvolvida poderia incluir a consideração e otimização de outras variantes importantes do VRP, como janelas de tempo (Larsen, 1999), horizonte de planejamento de entregas (Beltrami; Bodin, 1974) e demandas estocásticas (Gendreau; Laporte; Séguin, 1996). A inclusão e a otimização dessas variáveis adicionais tornariam a solução mais abrangente e adaptável a uma variedade de cenários logísticos complexos.

REFERÊNCIAS

AUGERAT, Philippe et al. **Computational results with a branch and cut code for the capacitated vehicle routing problem.** 1995.

ALVARENGA, Guilherme Bastos. **Um algoritmo híbrido para os problemas de Roteamento de Veículos Estático e Dinâmico com Janela de Tempo.** 2005.

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa operacional.** Campus/elsevier, 2007.

BALDACCI, Roberto; MINGOZZI, Aristide; ROBERTI, Roberto. **Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints.** European Journal of Operational Research, v. 218, n. 1, p. 1-6, 2012.

BALINSKI, Michel L.; QUANDT, Richard E. **On an integer program for a delivery problem.** Operations research, v. 12, n. 2, p. 300-304, 1964.

BALLOU, Ronald H. **Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos: Logística Empresarial.** Bookman editora, 2009.

BELLMORE, Mandell; NEMHAUSER, George L. **The traveling salesman problem: a survey.** Operations Research, v. 16, n. 3, p. 538-558, 1968.

BELTRAMI, Edward J.; BODIN, Lawrence D. **Networks and vehicle routing for municipal waste collection.** Networks, v. 4, n. 1, p. 65-94, 1974.

BERTO, R. M. VILLARES. S.; NAKANO, D. N. **A produção científica nos anais do encontro nacional de engenharia de produção: um levantamento de métodos e tipos de pesquisa.** Production, v. 9, n. 2, p. 65–75, dez. 1999.

BOCHTIS, D. D.; SØRENSEN, Claus G. **The vehicle routing problem in field logistics part I.** Biosystems engineering, v. 104, n. 4, p. 447-457, 2009.

BOSCHETTI, Marco A.; LETCHFORD, Adam N.; MANIEZZO, Vittorio. **Matheuristics: survey and synthesis**. International Transactions in Operational Research, v. 30, n. 6, p. 2840-2866, 2023.

BOWERSOX, Donald J. et al. **Supply chain logistics management**. Mcgraw-hill, 2020.

BLANCHARD, B. S. Logistics Engineering and Management, 6e. 2004.

BRIMBERG, Jack; LOVE, Robert F. **A new distance function for modeling travel distances in a transportation network**. Transportation science, v. 26, n. 2, p. 129-137, 1992.

CERRONE, Carmine; SCIOMACHEN, Anna. **VRP in urban areas to optimize costs while mitigating environmental impact**. Soft Computing, v. 26, n. 19, p. 10223-10237, 2022.

COHON, Jared L.; MARKS, David H. **A review and evaluation of multiobjective programing techniques**. Water resources research, v. 11, n. 2, p. 208-220, 1975.

COOK, Stephen A. **The complexity of theorem-proving procedures**. In: Logic, Automata, and Computational Complexity: The Works of Stephen A. Cook. 2023. p. 143-152.

COSTA, Luciano; CONTARDO, Claudio; DESAULNIERS, Guy. **Exact branch-price-and-cut algorithms for vehicle routing**. Transportation Science, v. 53, n. 4, p. 946-985, 2019.

CÔTÉ, Jean-François; GENDREAU, Michel; POTVIN, Jean-Yves. **The vehicle routing problem with stochastic two-dimensional items**. Quebec: CIRRELT, 2013.

CHANDRA, SS Vinod; ANAND, HS. **Nature inspired meta heuristic algorithms for optimization problems**. Computing, v. 104, n. 2, p. 251-269, 2022.

CHOPRA, Sunil. **Supply chain management : strategy, planning, and operation, 7e.** 2019.

CHRISTOFIDES, Nicos; EILON, Samuel. **An algorithm for the vehicle-dispatching problem.** Journal of the Operational Research Society, v. 20, n. 3, p. 309-318, 1969.

CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P. **The vehicle routing problem.** Combinatorial Optimization. Wiley, Chichester, p. 315– 338, 1979.

CHRISTOFIDES, Nicos; MINGOZZI, Aristide; TOTH, Paolo. **State-space relaxation procedures for the computation of bounds to routing problems.** Networks, v. 11, n. 2, p. 145-164, 1981.

CHRISTOPHER, Martin. **Logistics and competitive strategy.** European Management Journal, v. 11, n. 2, p. 258-261, 1993.

DANTZIG, George B.; RAMSER, John H. **The truck dispatching problem.** Management science, v. 6, n. 1, p. 80-91, 1959.

DANTZIG, George B.; WOLFE, Philip. **Decomposition principle for linear programs.** Operations research, v. 8, n. 1, p. 101-111, 1960.

DASDEMIR, Erdi et al. **A multi-objective open vehicle routing problem with overbooking: Exact and heuristic solution approaches for an employee transportation problem.** Omega, v. 108, p. 102587, 2022.

DAVIS, Herbert W.; DRUMM, W. H. **Logistics costs and customer service levels.** In: Council of Logistics Management Annual Conference Proceedings. 2803 Butterfield Road, Suite 380, Oak Brook, IL: Council of Logistics Management, 1996. p. 149-159.

DORIGO, M.; MANIEZZO V.; COLORNI A. **The Ant System Optimization by a colony of cooperating agents.** IEEE Trans. System, Man & Cybernetics-Part B, v. 26, n. 1, p. 1-13, 1996.

DE SOUZA, Vitor Andrade Almeida. **Algoritmos para o problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de carregamento bidimensional**. 2013.

FISHER, Marshall L.; JAIKUMAR, Ramchandran. **A generalized assignment heuristic for vehicle routing**. *Networks*, v. 11, n. 2, p. 109-124, 1981.

GENDREAU, Michel et al. (Ed.). **Handbook of metaheuristics**. New York: Springer, 2010.

GENDREAU, Michel; LAPORTE, Gilbert; SÉGUIN, René. **Stochastic vehicle routing**. *European journal of operational research*, v. 88, n. 1, p. 3-12, 1996.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ed. são paulo: atlas, 2002.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas da pesquisa social**. 6ed. são paulo: atlas, 2008.

GOLBERG, David E. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. Addison Wesley, v. 1989, n. 102, p. 36, 1989.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Elsevier, 2005.

GLOVER, Fred. **Tabu search—part I**. *ORSA Journal on computing*, v. 1, n. 3, p. 190-206, 1989.

JARBOUI, Bassem et al. **Variable neighborhood search for location routing**. *Computers & Operations Research*, v. 40, n. 1, p. 47-57, 2013.

JEPSEN, Mads Kehlet et al. **A Non-robust Branch-and-cut-and-price Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows**. Department of Computer Science, University of Copenhagen, 2006.

KARAOĞLU, Mehmet; KARA, Gökhan. **Two-Stage Heuristic Algorithm Proposal**

for Urban E-Commerce Deliveries. Asia-Pacific Journal of Operational Research, v. 39, n. 03, p. 2150034, 202.

KASILINGAM, Raja G. **Logistics and transportation.** Great Britain: Kluwer Academic Publishers, 1998.

KOLEN, Antoon WJ; RINNOOY KAN, A. H. G.; TRIENEKENS, Harry WJM. **Vehicle routing with time windows.** Operations Research, v. 35, n. 2, p. 266-273, 1987.

KONZEN, Pedro Henrique de Almeida et al. **Otimização de métodos de controle de qualidade de fármacos usando algoritmo genético e busca tabu.** Pesquisa operacional, v. 23, p. 189-207, 2003.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa operacional na tomada de decisões: modelagem em Excel.** Campus, 2004.

LAGORIO, Alexandra et al. **A systematic literature review of innovative technologies adopted in logistics management.** International Journal of Logistics Research and Applications, v. 25, n. 7, p. 1043-1066, 2022.

LAKATOS, E. M.; ANDRADE MARCONI, M. DE. **Fundamentos de metodologia científica (7a. ed.).** São Paulo: Editora Atlas S.A., 2010.

LARSEN, Jesper. **Parallelization of the vehicle routing problem with time windows.** Lyngby, Denmark: Institute of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 1999.

LETCHEFORD, Adam N.; SALAZAR-GONZÁLEZ, Juan-José. **Stronger multi-commodity flow formulations of the capacitated vehicle routing problem.** European Journal of Operational Research, v. 244, n. 3, p. 730-738, 2015.

LIU, F. *et al.* **Heuristics for vehicle routing problem: A survey and recent advance.** arXiv preprint arXiv:2303.04147, 2023.

MACÊDO, Maria Erilúcia Cruz et al. **Business Logistics and the Relationship with Organizational Success**. International Journal of Advanced Engineering Research and Science, v. 10, n. 05, 2023.

MILLER, Clair E.; TUCKER, Albert W.; ZEMLIN, Richard A. **Integer programming formulation of traveling salesman problems**. Journal of the ACM (JACM), v. 7, n. 4, p. 326-329, 1960.

MIRANDA, Douglas Moura. **Metaheurísticas para as variantes do problema de roteamento de veículos: capacitado, com janela de tempo e com tempo de viagem estocástico**. 2011.

MORABITO, R. et al. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. [s.l.] Elsevier Brasil, 2018.

MOR, Andrea; SPERANZA, Maria Grazia. **Vehicle routing problems over time: a survey**. Annals of Operations Research, v. 314, n. 1, p. 255-275, 2022.

NIKIFOROV, Oleg; LEVKIN, Grigory; SIMAK, Roman. **Digital transformation of logistics processes in the transport system-basic trend of the modern world economy**. In: E3S Web of Conferences. EDP Sciences, 2023. p. 02007.

NOVAES, Antônio GN. **Sistemas logísticos: transporte, armazenagem e distribuição física de produtos**. 1989.

OLIVEIRA, Rodrigo Raider de. **Solucionando o problema de roteamento de veículos capacitado com uso de algoritmos genéticos e paralelismo**. 2023.

PIZZOLATO, Nélio D.; PINHO, Alexandre R. **A regionalização dos centros de distribuição como solução logística**. Tecnológica, Ano VIII, n. 87, 2003.

PRAVEEN, V. et al. **Vehicle routing optimization problem: a study on capacitated vehicle routing problem**. Materials Today: Proceedings, v. 64, p. 670-674, 2022.

REBOUÇAS, Ramom S.; GOMES, Francisco AM. **Problema do caixeiro viajante com coleta de prêmios e janelas de tempo**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 3, n. 1, 2015.

ROCHAT, Yves; TAILLARD, Éric D. **Probabilistic diversification and intensification in local search for vehicle routing**. Journal of heuristics, v. 1, p. 147-167, 1995.

SABO, Cosmin; POP, Petrică C.; HORVAT-MARC, Andrei. **On the selective vehicle routing problem**. Mathematics, v. 8, n. 5, p. 771, 2020.

SADATI, Mir Ehsan Hesam; AKBARI, Vahid; ÇATAY, Bülent. **Electric vehicle routing problem with flexible deliveries**. International Journal of Production Research, v. 60, n. 13, p. 4268-4294, 2022.

SOLOMON, Marius M. **Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints**. Operations research, v. 35, n. 2, p. 254-265, 1987.

TOTH, Paolo; VIGO, Daniele. **An overview of vehicle routing problems**. The vehicle routing problem, p. 1-26, 2002.

TOTH, Paolo; VIGO, Daniele (Ed.). **Vehicle routing: problems, methods, and applications**. Society for industrial and applied mathematics, 2014.

TRACKAGE. **RAIO X DA LOGÍSTICA NO BRASIL 2023**. [S. l.], 28 ago. 2023. Disponível em: <https://www.trackage.com.br/raio-x-da-logistica-no-brasil-2023/>

VIEIRA, Heloisa Passarelli. **Metaheurística para a Solução de Problemas de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo**. 2008.

WINKELHAUS, Sven; GROSSE, Eric H. **Logistics 4.0: a systematic review towards a new logistics system**. International Journal of Production Research, v. 58, n. 1, p. 18-43, 2020.

YULIZA, Evi; PUSPITA, F. M. The Branch and Cut Method for Solving Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) Model of LPG Gas Distribution Routes:-. Science and Technology Indonesia, v. 4, n. 4, p. 105-108, 2019.