



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**EMANUEL WALLISON DE OLIVEIRA COSTA**

**MODELOS COSMOLÓGICOS QUÂNTICOS FRACIONÁRIOS**

Recife  
2024

**EMANUEL WALLISON DE OLIVEIRA COSTA**

**MODELOS COSMOLÓGICOS QUÂNTICOS FRACIONÁRIOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico CCEN, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

**Orientador:** Prof. Dr. Shahram Jalalzadeh

Recife  
2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Costa, Emanuel Wallison de Oliveira.

Modelos Cosmológicos Quânticos Fracionários / Emanuel Wallison de Oliveira Costa. - Recife, 2024.  
127f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Física, 2024.

Orientação: Shahram Jalalzadeh.

Inclui referências e apêndices.

1. Cosmologia Quântica Fracionária; 2. Dimensão Fractal; 3. Análise Estatística; 4. Idade do Universo; 5. Inflação. I. Jalalzadeh, Shahram. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**EMANUEL WALLISON DE OLIVEIRA COSTA**

**MODELOS COSMOLÓGICOS QUÂNTICOS FRACIONÁRIOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física Teórica e Computacional.

Aprovada em: 29/11/2024.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Shahram Jalalzadeh  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Andre Luiz Alves Lima  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Examinador Externo  
Universidade Federal de Campina Grande

---

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
Examinador Externo  
Universidade Federal da Paraíba

Para meu pai, José Monteiro (in memoriam).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus Pai pelo fim de mais uma etapa, cuja dificuldade e percalços não poderiam ser superados de outra forma se não pela luz e misericórdia de Cristo Jesus e o poder do Espírito Santo.

A conclusão desta tese também deve-se ao apoio e incentivo de diversas pessoas e entidades. Por isso, quero expressar minha gratidão a todos que possibilitaram a sua realização.

Ao meu orientador, Shahram, por aceitar me orientar, pela instrução, paciência, conselhos oferecidos e dedicação durante o desenvolvimento desta tese, sem os quais minha evolução e crescimento como físico não teriam ocorrido.

Agradeço à CAPES (88887.519737/2020-00) pela bolsa de doutorado.

À minha família pela compreensão e confiança depositadas em mim. Em especial, minha mãe Graciete, e meus irmãos Janielly e Wesley, meu cunhado Afonso e minha namorada Jordania que suportaram minha ausência em vários momentos.

Ao técnico Dr. Alyson José Alves Carvalho do DF, por todo apoio, acolhimento e incentivo durante o doutorado.

A todos os professores do DF pela disposição em dividir seus conhecimentos durante os cursos ministrados.

Aos meus companheiros de curso e aos amigos que fiz durante essa caminhada.

## RESUMO

Nesta tese, apresentamos uma nova ideia de como a Cosmologia Quântica Fracionária pode ter influenciado a inflação do Universo e os padrões atuais, assim como a aceleração e a sua própria idade, em razão da presença de uma quantidade, denominada parâmetro fracionário de Lévy, que descobrimos possuir relação com a dimensão fractal do horizonte cosmológico. Sempre que este parâmetro fracionário assume um valor específico, conseguimos recuperar os valores ordinários das grandezas físicas. Devido a essa influência fracionária, uma análise estatística na cosmologia de FLRW foi necessária, para estimar o melhor valor para a dimensão fractal e para os parâmetros de densidade cosmológicos, possibilitando obter uma idade atual do Universo de 13,8 bilhões de anos e permanecendo finita para um futuro distante. Também sugerimos a viabilidade, no espaço de Sitter, de uma função de onda com dimensões fractais, indicando que, após a nucleação, o Universo foi submetido a uma fase de expansão acelerada em forma de lei de potência. Estas descobertas garantem um número mínimo de 64 *e*-foldings, necessários para resolver problemas comuns do Big Bang, apontando que nossos modelos cosmológicos quânticos fracionários são plausíveis.

**Palavras-chave:** Cosmologia Quântica Fracionária; Dimensão Fractal; Análise Estatística; Idade do Universo; Inflação.

## ABSTRACT

In this thesis, we present a new idea of how Fractional Quantum Cosmology may have influenced the inflation of the Universe and the current patterns, as well as acceleration and your own age, because of the presence of a quantity, called the fractional Lévy parameter, which is related to the fractal dimension of the cosmological horizon. Whenever this fractional parameter assumes a specific value, we can recover the ordinary values of the physical quantities. Due to this fractional influence, a statistical analysis in the FLRW cosmology was necessary, to estimate the best value for the fractal dimension and for the cosmological density parameters, allowing to obtain a current age of the Universe of 13.8 billion years and remaining finite for a distant future. We also suggest the feasibility, in de Sitter space, of a wave function with fractal dimensions, indicating that, after nucleation, the Universe underwent a phase of accelerated expansion in the form of a power law. These discoveries guarantee a minimum number of 64  $e$ -foldings, necessary to solve common problems of the Big Bang, indicating that our fractional quantum cosmological models are plausible.

**Keywords:** Fractional Quantum Cosmology; Fractal Dimension; Statistical Analysis; Age of the Universe; Inflation.

## LISTA DE PUBLICAÇÕES

- [1] JALALZADEH, S.; COSTA, E. O.; MONIZ, P. de sitter fractional quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 105, n. 12, p. L121901, jun. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.L121901>.
- [2] RASOULI, S. M. M. et al. Inflation and fractional quantum cosmology. *Fractal Fract.*, MDPI, v. 6, n. 11, p. 655, nov. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract6110655>.
- [3] COSTA, E. W. de O. et al. Estimated Age of the Universe in Fractional Cosmology. *Fractal Fract.*, v. 7, p. 854, nov. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7120854>.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADM	Arnowitt-Deser-Wisner.
BAO	Baryon Acoustic Oscillations.
BBN	Big Bang Nucleosynthesis.
BH	Black Hole.
CC	Cosmologia Clássica.
CCF	Cosmologia Clássica Fracionária.
CL	Confidence Level.
CMB	Cosmic Microwave Background.
CQ	Cosmologia Quântica.
CQF	Cosmologia Quântica Fracionária.
deS	de Sitter.
ES	Equação de Schrödinger.
ESF	Equação de Schrödinger Fracionária.
EH	Einstein-Hilbert
FLRW	Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker.
GUT	Grand Unification Theory.
Gyr	Bilhões de anos.
HH	Hartle-Hawking.
LV	Linde-Vilenkin.
MQ	Mecânica Quântica.
MQF	Mecânica Quântica Fracionária.
MQFE	Mecânica Quântica Fracionária Espacial.
OHD	Observational Hubble Data.
RG	Relatividade Geral.
SN	Supernovas.
SNIa	Supernovas do tipo Ia.
WDW	Wheeler-DeWitt.
WKB	Wentzel-Kramers-Brillouin.
WMAP	Wilkinson Microwaves Anisotropy Probe.
$\Lambda$ CDM	Lambda-Cold Dark Matter.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\hbar$	constante de Planck dividida por $2\pi$ .	Página 14.
$c$	velocidade da luz.	Página 14.
$G$	constante gravitacional.	Página 14.
$M$	variedade $m$ -dimensional.	Página 18.
$g_{\mu\nu}$	métrica no espaço de Riemann.	Página 18.
$\Sigma$	hipersuperfície.	Página 18.
$h_{ab}$	métrica induzida na hipersuperfície.	Página 18.
$N$	função <i>lapse</i> .	Página 19.
$N^a$	vetor <i>shift</i> .	Página 19.
$g$	determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ .	Página 21.
$h$	determinante da métrica $h_{ab}$ .	Página 21.
$K_{ab}$	curvatura extrínseca.	Página 22.
$\mathfrak{L}$	derivada de Lie.	Página 22.
$K$	traço da curvatura extrínseca.	Página 22.
$G_{ab}$	tensor de Einstein.	Página 23.
$S$	ação.	Página 24.
$\mathcal{L}$	densidade lagrangiana.	Página 24.
$L$	lagrangiana.	Página 25.
$\mathcal{H}$	densidade hamiltoniana.	Página 27.
$\Pi^{ab}$	momento canonicamente conjugado a $h_{ab}$ .	Página 27.
$\Pi$	traço de $\Pi^{ab}$ .	Página 27.
$H$	hamiltoniana.	Página 28.
$g^{abcd}$	métrica de DeWitt no superespaço.	Página 28.
$\mathcal{H}_a$	vínculo supermomento.	Página 28.
$\Phi$	campo escalar.	Página 29.
$\gamma_{ab}$	métrica induzida na hipersuperfície do minisuperespaço.	Página 31.
$\gamma$	determinante de $\gamma_{ab}$	Página 32.
$\pi^{ab}$	momento canonicamente conjugado a $\gamma_{ab}$ .	Página 32.
$f^{abcd}$	métrica de DeWitt no minisuperespaço.	Página 32.
$a(t)$	fator de escala.	Página 34.
$k$	curvatura espacial.	Página 34.
$\rho$	densidade de energia total do fluido.	Página 34.
$\mathcal{V}_k$	volume espacial da hipersuperfície tipo-espaço.	Página 34.
$H$	parâmetro de Hubble.	Página 35.
$\Omega$	parâmetro densidade de energia.	Página 35.
$H_0$	valor atual do parâmetro Hubble.	Página 36.

$q_0$	valor atual do parâmetro de desaceleração.	Página 36.
$t_0$	valor atual da idade do Universo.	Página 36.
$t_H$	tempo de Hubble.	Página 37.
$d_c$	distância comóvel.	Página 38.
$d_L$	distância luminosidade.	Página 39.
$m$	magnitude aparente.	Página 39.
$M$	magnitude absoluta.	Página 39.
$\mu = m - M$	módulo de distância.	Página 39.
$z$	<i>redshift</i> .	Página 39.
$\mathcal{L}$	verossimilhança.	Página 42.
$N$	número de $e$ -folds.	Página 47.
$L$	comprimento de de Sitter.	Página 49.
$\Lambda$	constante cosmológica.	Página 50.
$S_{deS}$	entropia de de Sitter.	Página 53.
$A_{deS}$	área do horizonte de de Sitter.	Página 53.
$m_P$	massa de Planck.	Página 54.
$l_P$	comprimento de Planck.	Página 55.
$t_P$	tempo de Planck.	Página 55.
$\Psi$	função de onda.	Página 56.
$\square$	d'alembertiano do minisuperespaço.	Página 59.
$\alpha$	parâmetro fracionário de Lévy.	Página 77.
$(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2}$	derivada fracionária de Riesz.	Página 79.
$D$	dimensão do espaço fracionário.	Página 96.
$\eta_{\mu\nu}$	métrica no espaço de Minkowski.	Página 108.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>18</b>
2.1	Geometrias intrínseca e extrínseca	18
2.2	Hamiltoniana da RG	24
2.3	Matéria acoplada	29
2.4	Superespaço	31
2.5	Minisuperespaço	31
<b>3</b>	<b>COSMOLOGIA CLÁSSICA</b>	<b>34</b>
3.1	O universo de FLRW	34
3.2	Idade do Universo	36
3.3	Evolução do fator de escala	37
3.4	Parâmetros observacionais em CC	37
3.5	Método estatístico e análise bayesiana	41
3.5.1	<i>Restrições para <math>\Omega_0^{(m)}</math> e <math>\Omega_0^{(\Lambda)}</math></i>	<i>43</i>
3.5.2	<i>Restrições para <math>H_0</math> e <math>q_0</math></i>	<i>43</i>
3.6	Problema da planura e o modelo inflacionário	46
<b>4</b>	<b>O ESPAÇO-TEMPO DE DE SITTER</b>	<b>49</b>
4.1	A geometria clássica do espaço-tempo de deS	49
4.2	Espaços maximamente simétricos	49
4.3	Espaço-tempo de deS 5-dimensional	51
4.4	Termodinâmica do espaço-tempo de deS	52
<b>5</b>	<b>QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>54</b>
5.1	Escala de Planck	54
5.2	Quantização de Dirac do superespaço	55
5.3	Quantização de Dirac do minisuperespaço	57
5.4	Aproximação WKB	59

<b>6</b>	<b>COSMOLOGIA QUÂNTICA</b>	<b>61</b>
6.1	CQ e a equação WDW	61
6.2	Condições iniciais na equação WDW	62
6.3	CQ em deS	63
6.4	As funções de onda de Linde–Vilenkin e Hartle–Hawking	66
6.5	CQ em FLRW na presença de campo escalar	70
6.6	CQ em FLRW para o modelo $\Lambda$ CDM	72
6.6.1	<i>Universo plano com apenas uma componente do fluido perfeito</i>	73
6.6.2	<i>Universo dominado por matéria e radiação</i>	74
<b>7</b>	<b>COSMOLOGIA CLÁSSICA FRACIONÁRIA</b>	<b>77</b>
7.1	Espaço fracionário	77
7.2	A derivada fracionária de Riesz	78
7.3	A Equação de Schrödinger Fracionária	79
7.3.1	<i>A ESF independente do tempo</i>	80
7.3.2	<i>O oscilador harmônico fracionário</i>	80
7.4	A equação WDW fracionária	81
7.5	Cosmologia Clássica Fracionária no Universo de FLRW	83
7.5.1	<i>Parâmetros observacionais em CCF</i>	86
7.5.2	<i>O problema da sincronicidade</i>	91
7.5.3	<i>Conclusões para CCF no Universo de FLRW</i>	95
<b>8</b>	<b>COSMOLOGIA QUÂNTICA FRACIONÁRIA</b>	<b>96</b>
8.1	Espaço fechado em CQF	96
8.2	Espaço aberto em CQF	99
8.3	Espaço plano em CQF	100
8.4	Conclusões para CQF	101
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>103</b>
	<b>APÊNDICE</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>TEMPO PARAMETRIZADO E VÍNCULOS CLÁSSICOS</b>	<b>105</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>111</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria que descreve os fenômenos em escalas macroscópica, considerada puramente clássica, já que em sua estrutura, as quantidades físicas – em particular, a métrica do espaço-tempo – sempre tem valores definidos [4]. Entretanto, sabemos que a descrição clássica da matéria, não somente do ponto de vista da interação gravitacional, torna-se completamente inadequada em escalas atômicas [5]. No caso da RG, a escala onde os efeitos quânticos tornam-se relevantes é da ordem do comprimento de Planck,  $l_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33}$  cm, ou menor. Nesta escala, uma teoria quântica da gravitação torna-se necessária. Algumas propostas buscam realizar essa quantização, entre elas estão: gravidade quântica assintoticamente segura, teoria de (super)cordas, gravidade quântica em *loop* e a quantização canônica [6, 7]. Seguiremos este último método, quantização canônica, que parte da formulação hamiltoniana da RG e conduz posteriormente as variáveis dinâmicas da teoria a operadores.

Deve ser enfatizado que se a gravidade é quantizada, a não separabilidade cinemática da teoria quântica demanda que todo o Universo deve ser descrito em termos quânticos. Isto leva ao conceito de Cosmologia Quântica (CQ) e a função de onda do Universo [7]. Independentemente de alguma teoria quântica da gravidade, existem argumentos de consistência geral que requer a aplicação da teoria quântica para o Universo como o todo. Isto é, sistema quânticos macroscópicos são fortemente acoplados para o seu ambiente natural. Uma vez que o ambiente é novamente acoplado ao seu ambiente, e assim por diante, o único sistema estritamente fechado no sentido da teoria quântica é o Universo na totalidade. Isto conduz a CQ [6]. Contudo, desde que a gravidade é a interação dominante em escala cósmica, uma teoria quântica da gravidade é necessária como estrutura formal para CQ.

O primeiro modelo para CQ baseado em gravidade quântica foi apresentado, com sua aproximação semiclássica, por DeWitt [8]. Este modelo trata o caso homogêneo e isotrópico. A CQ não se propõe compreender a fundo a gravitação como teoria quântica, mas a investigar o que pode ser extraído da descrição do Universo como sistema quântico. As ideias básicas não são muito diferentes das utilizadas na Mecânica Quântica (MQ) ordinária. O objeto fundamental da teoria é uma função de onda  $\Psi$  (a função de onda do Universo inteiro!), a partir da qual se pode calcular a distribuição de probabilidades de Universos-bebês. De fato, pode ser dito que o Universo começa muito pequeno, de dimensões aproximadamente do comprimento de Planck e precisa de inflação para crescer e ser identificado como o nosso.

A inflação é amplamente aceita como uma solução formal para problemas cosmológicos como horizonte e planitude [9–11]. A abordagem convencional para controlar a inflação é que um campo escalar com um potencial apropriado, como o potencial de Coleman-Weinberg [12], domina a densidade de energia do Universo desde o início. Nas primeiras teorias da inflação, essa densidade de energia é responsável por uma rápida expansão do Universo [13, 14]. Essa expansão acelerada seria exponencial, semelhante ao espaço de Sitter (deS), ou lei de potência, segundo a qual o campo escalar diminui gradualmente até o mínimo global de seu potencial.

Deve-se notar que a CQ é uma teoria adequada para estudar as condições iniciais essenciais para o surgimento de uma fase inflacionária. Tryon propôs em 1973 que um Universo fechado [15] poderia emergir espontaneamente como uma flutuação quântica. Ele percebeu que em um Universo espacialmente fechado, todas as cargas conservadas são zero. Consequentemente, nenhuma lei de conservação impede que tal Universo se forme espontaneamente. Além disso, conforme a RG, no instante da criação de tal Universo, não apenas campos de matéria, mas também o próprio espaço-tempo são criados, e não houve nada antes disso. De fato, se assumirmos que o Universo é espacialmente homogêneo, isotrópico, compacto e simplesmente

compacto, a única escolha viável para ter um espaço sem um contorno é um espaço fechado. O volume de espaços abertos e planos, simplesmente conectados, é infinito. Ao remover a restrição de conectividade simples, espaços de volume não triviais, porém finitos, como os espaços homogêneos e isotrópicos planos, abertos e fechados possíveis podem ser obtidos (consulte [6] e referências nele contidas). Nesta tese, admitimos que a variedade do espaço-tempo é espacialmente compacta, pois estamos tentando descrever o Universo na totalidade e é implicitamente inconcebível que o Universo tenha um limite espacial. Isso implica que as hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço são compactas (em linguagem matemática, uma variedade compacta sem um limite é chamada de variedade fechada).

E quanto à evolução futura do nosso Universo? Esta evolução está relacionada a topologia do Universo, ou seja, se ele é plano, aberto ou fechado. Se o Universo for aberto, ele se expandirá para sempre, enquanto se for fechado, ele eventualmente irá se contrair. Não apenas a composição do Universo, mas também a sua idade podem conduzir as respostas a essas perguntas [16].

Estimativas para a idade do Universo foram feitas ao longo do tempo. O modelo de Einstein e deS [17] previu uma idade do universo que era aproximadamente 9 Gyr, o que é bem diferente da idade das estrelas antigas. A idade das estrelas antigas foi estimada como sendo maior que 12 Gyr, conforme a pesquisa de Chaboyer [18]. Essa discrepância levou ao desenvolvimento de novos modelos que poderiam explicar a idade observada do Universo e a taxa de expansão. Apesar do Universo experimentar desaceleração pelos primeiros 9 bilhões de anos e então transitar para aceleração por meio de uma rápida expansão cósmica pelos últimos 5 bilhões de anos [19], o valor atual da idade adimensional,  $H_0 t_0$ , onde  $H_0$  e  $t_0$  são o parâmetro de Hubble e a idade do Universo atuais, respectivamente, é limitado pelas distâncias de Supernovas (SN) para ser muito próximo da unidade. Por exemplo, Tonry et al. [20] estimaram o seguinte valor:  $H_0 t_0 = 0,96 \pm 0,04$ . Parece que estamos vivenciando um período de privilégio no momento, em que a idade do Universo em termos de tempo de Hubble, especialmente no caso de um Universo  $\Lambda$ CDM, está extremamente próxima da unidade. Essa coincidência é conhecida como o *problema de sincronicidade* da idade do Universo [19, 21].

Vários outros métodos verificaram essa proximidade inesperada com a unidade, que tem sido objeto de intensa especulação e debate. O problema da sincronicidade foi investigado por modelos cosmológicos com a inclusão de campos escalares [22, 23], dependência efetiva entre energia escura e matéria escura [24–28] interagindo com energia escura holográfica [29–31], e outras interpretações no contexto da cosmologia padrão [32, 33]. Em outra perspectiva, a CQ no paradigma da equação de Wheeler-DeWitt (WDW) no minisuperespaço de um universo homogêneo e isotrópico foi usada para propor uma solução para a questão unificada para outras lacunas no modelo  $\Lambda$ CDM [34]. Propostas que modificam a cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) foram adotadas para resolver problemas cosmológicos [21]. Elas têm em comum uma evolução linear ou quase linear do Universo e apresentam sincronicidade  $H_0 t_0 = 1$ .

Em virtude da importância da inflação em nossa compreensão atual da cosmologia, é razoável e vital tentar compreender seus detalhes no contexto da Cosmologia Quântica Fracionária (CQF). A história do cálculo fracionário, como também das derivadas fracionárias, é tão longa quanto a do cálculo clássico. Uma derivada fracionária é uma generalização da derivada de ordem inteira. Ela se originou na carta sobre o significado da derivada de meia ordem de L'Hôpital para Leibnitz em 1695 e é uma ferramenta promissora para explicar vários fenômenos. Várias definições de derivadas fracionárias existem na literatura, incluindo Riesz, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Marchand e Griinwald-Letnikov, entre outros [35, 36].

A derivada fracionária de Riesz é um operador não local que pode explicar processos não

locais no minisuperespaço. Na verdade, a não localidade é um comportamento geral de todas as derivadas fracionárias e integrais e, portanto, descrevem processos com não localidade no tempo (memória) e no espaço (grandes saltos) [37]. A derivada fracionária ficou muito atrás do cálculo de ordem inteira devido a dificuldade de se lidar, formalmente, com a derivada fracionária, o que é um grande obstáculo. Uma explicação física para uma derivada fracionária em relação ao tempo foi apresentada por Podlubny [38], embora nenhum experimento tenha sido realizado para apoiar a nova escala de tempo. Na referência [39], os autores mostraram que a ordem fracionária do tempo é um índice de memória. O tempo não aparece explicitamente nas equações em gravidade quântica e na cosmologia, e a derivada fracionária do espaço pode desempenhar um papel crucial.

Conclusões recentes da gravidade quântica forneceram um impulso essencial para o uso crescente do cálculo fracionário na teoria quântica. Várias abordagens para a gravidade quântica, como a gravidade quântica assintoticamente segura [40–43], triangulações dinâmicas causais [44–47], gravidade quântica em *loop* e espumas de spin [48–50], gravidade Hořava–Lifshitz [51, 52], gravidade quântica não local [53–55], e outras, todos levam ao mesmo resultado: a dimensão do espaço-tempo muda com a escala de comprimento. Como resultado dessa mudança da dimensão do espaço-tempo, estas teorias de gravidade quântica são multidimensionais.

Existem inúmeras aplicações do cálculo fracionário e pesquisa ativa neste campo, mostrando o uso amplo e significativo desta ferramenta matemática. A Mecânica Quântica Fracionária (MQF) é usada para descrever o espaço-tempo fracionário em gravidade, cosmologia e na teoria quântica de campos fracionários [56–58]. A pesquisa atual neste domínio está avançando bastante, com cientistas explorando ativamente o potencial do cálculo fracionário [59]. Sua eficácia como um instrumento valioso se torna aparente ao confrontar uma ampla gama de problemas associados a fenômenos gravitacionais e modelos cosmológicos, como evidenciado pela riqueza de estudos conduzidos [60–77].

Além disso, o cálculo fracionário encontra aplicação em várias outras áreas, como o estudo de ondas gravitacionais estocásticas na gravidade quântica [78], a investigação da distância de luminosidade das ondas gravitacionais [79], a exploração da inflação e do espectro CMB [2, 80, 81], o desenvolvimento da cosmologia de ação fracionária [82–84], a análise da equação geodésica fracionária e da gravidade discreta [85] e o exame do acoplamento não mínimo e da inflação caótica [86]. Ademais, o cálculo fracionário é utilizado na investigação da cosmologia phantom com acoplamento conforme [87], equações diferenciais fracionárias como Ornstein-Uhlenbeck em cosmologia [88], cosmologia de ação fracionária com um parâmetro de ordem variável [89] e buracos de minhoca em cosmologia de ação fracionária [90]. Notavelmente, novas métricas têm sido consideradas [91], enquanto a aplicação do cálculo fracionário também se estendeu ao estudo de modelos de energia escura em cenários emergentes, logamediatos (mistura de logarítmico + intermediário) e intermediários do Universo [92, 93]. Como exemplo, o trabalho de [74, 75] produziu um valor de  $\alpha = 0,926$  para a ordem da integral fracionária de Riemann-Liouville, fornecendo mais conhecimento sobre as complexidades do campo.

Nas referências [72, 73, 94], várias soluções exatas foram obtidas para modelos cosmológicos, que, devido à natureza fractal do espaço-tempo, exibem um desvio significativo do modelo padrão [95, 96]. Além disso, uma abordagem alternativa envolve a utilização do cálculo fracionário para determinar o valor da constante cosmológica, o que necessita de uma reestruturação devido à divergência ultravioleta bem reconhecida na teoria quântica de campos convencional [57, 97, 98]. Para expandir o escopo desta abordagem fracionária, as referências [99, 100] exploram a dinâmica newtoniana modificada e a CQ.

Com relação à termodinâmica de buracos negros fracionários, não discutida neste trabalho (mas não menos importante), este assunto foi examinado minuciosamente nas referências

[1, 101], e as descobertas desta pesquisa foram efetivamente utilizadas para obter as equações de Friedmann no contexto da gravidade emergente. Vale a pena mencionar que o cálculo fracionário também foi empregado para modificar as equações de Friedmann e Raychaudhuri, permitindo assim uma investigação sobre a dinâmica do Universo sem a necessidade de matéria escura fria e energia escura [102].

Esta tese está dividida como segue: no capítulo 2 apresentamos a formulação hamiltoniana da RG, que é a base para o processo de quantização canônica. Vamos lembrar, no capítulo 3, os principais resultados do modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e no capítulo 4 as características do espaço-tempo de deS. Em seguida, o capítulo 5, detalha o procedimento de quantização canônica da RG e em sequência, no capítulo 6, apresentamos as aplicações do processo de quantização, resolvendo a equação WDW para alguns casos e obtendo as funções de onda correspondentes.

A segunda parte desta tese trata do cálculo fracionário e suas aplicações na Cosmologia Clássica (CC) e CQ. Dessa forma, mostramos no capítulo 7, as características do espaço fracionário e a definição da derivada fracionária de Riesz. Apesar da extensa pesquisa conduzida sobre essas derivadas, elas nem sempre exibem as propriedades convencionais associadas à diferenciação de funções, como a regra de Leibniz, a regra da cadeia e a propriedade do semi-grupo [35, 36]. Também apresentamos neste capítulo a Cosmologia Clássica Fracionária (CCF) e suas implicações na cosmologia de FLRW para obter a idade do Universo e outros parâmetros cosmológicos, presentes nesta tese [3].

Por fim, o capítulo 8 é reservado a apresentação dos resultados originais desta tese, sobre CQF, que estão publicados nos artigos [1, 2]. A investigação realizada na referência [1] aprofunda-se no intervalo  $1 \leq \alpha < 2$  e emprega a derivada fracionária de Riesz para derivar as funções de onda de Hartle–Hawking e de Linde–Vilenkin para uma geometria deS fechada. Além disso, a referência [2] explora a época pré-inflação na estrutura da CQF. Finalizamos esta tese apresentando nossas conclusões e perspectivas futuras, no capítulo 9, seguido do apêndice A que apresenta dois exemplos de sistemas com o tempo parametrizado, fundamentais para compreender os vínculos que surgem na formulação hamiltoniana da RG e, por fim, as referências.

## 2 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo apresentamos a formulação hamiltoniana da RG. Na seção 2.1 apresentamos o processo de dividir o espaço-tempo em hipersuperfícies e como obter a curvatura nesse espaço. Na seção 2.2, abordamos a hamiltoniana da RG sem campo/matéria e posteriormente, seção 2.3, com campo/matéria acoplada. Para finalizar o capítulo, discutiremos os graus de liberdade presentes nos vínculos, considerando na seção 2.4 o superspaço e na seção 2.5 o minisuperespaço.

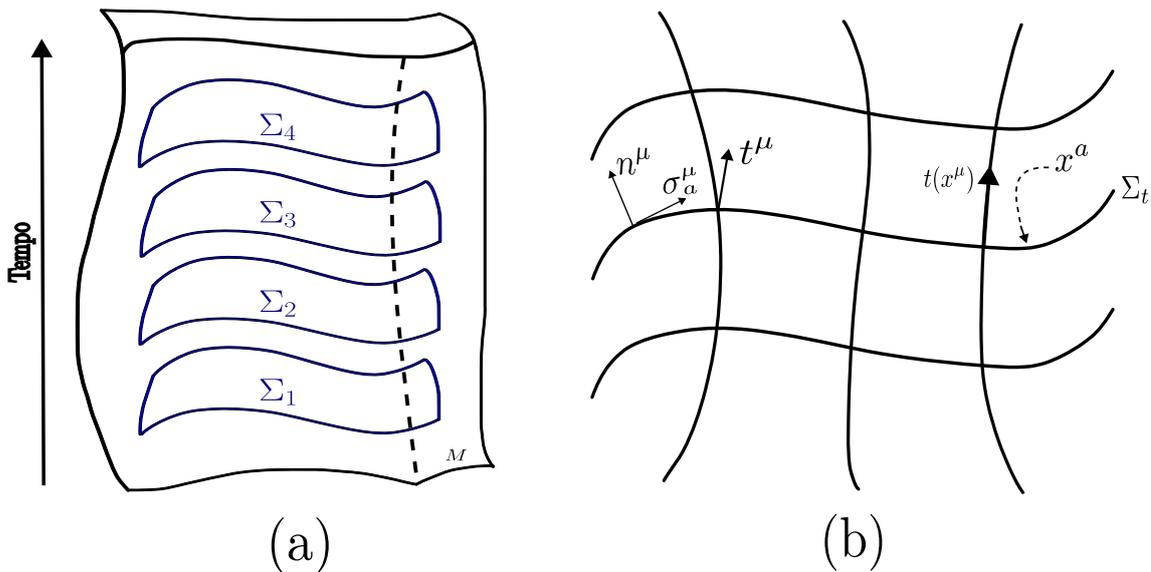
### 2.1 Geometrias intrínseca e extrínseca

Seja uma variedade  $M$  e uma região compacta arbitrária  $\mathcal{V}$ , com contorno  $\partial\mathcal{V}$  (uma subvariedade tridimensional). Vamos considerar agora a possibilidade de folhear  $\mathcal{V}$  em um conjunto de hipersuperfícies  $\Sigma$ , como apresentado na Figura 1(a). Para isto, adotamos coordenadas locais  $y^\mu$ , ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), com uma base de coordenadas  $\sigma_\mu = \partial/\partial y^\mu$ , de campos vetoriais tangentes em  $M$ . Também, denotaremos  $x^a$  uma coordenada local, ( $a = 1, 2, 3$ ), com uma base de coordenadas  $\sigma_a = \partial/\partial x^a$  na hipersuperfície  $\Sigma$ . Usando a transformação  $y^\mu = y^\mu(x^a)$ , podemos definir o campo vetorial tangente a  $\Sigma$ :

$$\sigma_a^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^a} \quad . \quad (2.1)$$

Seja  $n^\mu$  um campo vetorial normal unitário a hipersuperfície, temos  $n_\mu \sigma_a^\mu = 0$ . Os vetores  $n^\mu$  e  $\sigma_a^\mu$  formam uma base vetorial para objetos em  $\Sigma$  imersos em  $M$ , como está representado na Figura 1(b)).

Figura 1 – Na Figura (a), temos a representação da foliação do espaço-tempo em hipersuperfícies  $\Sigma$ . Na Figura (b), temos a construção do sistema de coordenadas  $(t, x^a)$ .



Fonte: O autor (2024)

A projeção da métrica  $g_{\mu\nu}$  de  $M$  em  $\Sigma$  define a métrica induzida na hipersuperfície:

$$h_{ab} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right) = g\left(\sigma_a^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \sigma_b^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) = \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu g_{\mu\nu} \quad . \quad (2.2)$$

A métrica induzida  $h_{ab}$  é um tensor tridimensional: ela é invariante com relação à transformação de coordenadas no espaço-tempo, mas comporta-se como um tensor sob transformações de coordenadas na hipersuperfície. Com isto, podemos decompor a métrica  $g_{\mu\nu}$  em duas partes mutuamente ortogonais, uma normal a  $\Sigma$  e a outra tangencial a  $\Sigma$ . Esta decomposição é chamada de relação de completeza e para a métrica inversa temos:

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad h^{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^3 h^{ab} \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu, \quad (2.3)$$

onde  $\varepsilon = n_\mu n^\mu = \pm 1$ , com  $\varepsilon = +1$  quando  $\Sigma$  é tipo-tempo e  $\varepsilon = -1$  quando  $\Sigma$  é tipo-espaço.

Uma hipersuperfície é tipo-espaço se a métrica induzida é riemanniana, ou seja, possui assinatura positiva  $(+, +, +)$ . Equivalentemente, todos os vetores tangentes em uma hipersuperfície tipo-espaço tem norma definida positiva sob a métrica induzida. Uma hipersuperfície é tipo-tempo se a métrica induzida é lorentziana, ou seja, tem um sinal negativo em sua assinatura  $(-, +, +)$ . Uma hipersuperfície nula tem uma métrica induzida degenerada.

Se uma hipersuperfície  $\Sigma$  é definida pelos níveis de curvas de um campo escalar  $t$  em  $M$ , então um gradiente  $\partial_\mu t$  é normal a  $\Sigma$  no sentido que  $v^a \partial_\mu t = 0$  para cada vetor  $v^a \in \Sigma$ . Então seu vetor dual  $\partial^\mu t$ , é normal a  $\Sigma$ . Este vetor é tipo-tempo se a hipersuperfície é tipo-espaço (e vice-versa). A normal unitária é  $n_\mu = (\varepsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu t \partial_\nu t)^{-1/2} \partial_\mu t$ , onde  $\varepsilon = +1$  é para hipersuperfície tipo-tempo e  $\varepsilon = -1$  é para hipersuperfície tipo-espaço. Note que  $n^\mu n_\mu = -1$  para hipersuperfície tipo-espaço.

Iremos admitir que nossa hipersuperfície é tipo-espaço, pela razão dela coincidir com a superfície de Cauchy  $\Sigma$ , tornando o espaço-tempo  $(M, g)$  globalmente hiperbólico [16]. Em um espaço-tempo globalmente hiperbólico que possui uma superfície de Cauchy, toda a história passada e futura do Universo pode ser prevista (ou retrocedida) a partir das condições no instante do tempo representadas por  $\Sigma$ . Por outro lado, em um espaço-tempo não globalmente hiperbólico temos uma quebra de previsibilidade no sentido que um conhecimento completo das condições em um único “instante de tempo” nunca pode ser suficiente para determinar a história inteira do Universo.

Na referência [103], está provado que para tais espaços-tempos, existe uma função tempo global  $t$ , tal que cada hipersuperfície tipo-espaço em que  $t = \text{constante}$  é uma superfície de Cauchy. Usando esta propriedade, pode-se prosseguir com a foliação da variedade do espaço-tempo  $(M, g)$  em um conjunto de hipersuperfícies tipo-espaço  $3D$ ,  $\{\Sigma\}_t$ , parametrizada por uma função de tempo global  $t$ . De acordo com (2.3), a métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$ , induz uma métrica espacial, ou seja, uma métrica riemanniana  $h_{\mu\nu}$  em cada  $\Sigma_t$ , tipo-espaço, pela fórmula:

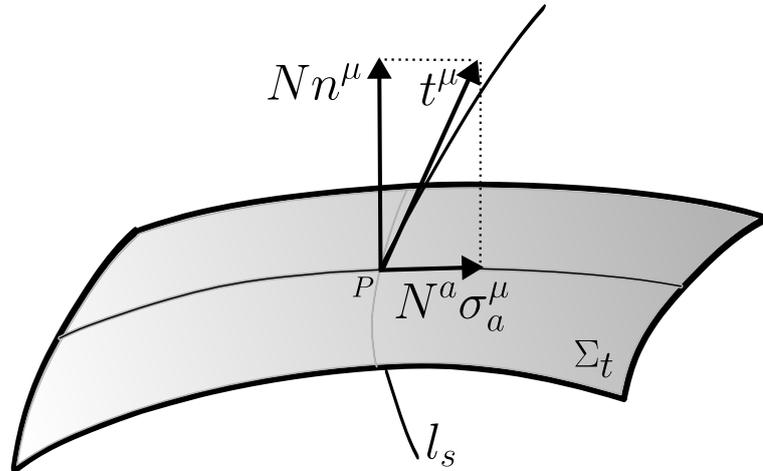
$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.4)$$

Seja  $t^\mu$  um campo vetorial em  $M$  satisfazendo  $t^\mu \partial_\mu t = 1$ . Usando  $n^\mu$  e  $\sigma_a^\mu$  como vetores de base, decomposmos  $t^\mu$  em partes normal e tangencial a  $\Sigma_t$  em termos da função *lapse*  $N$ , e do vetor *shift*  $N^a$  (ver Figura 2), como segue:

$$t^\mu = N n^\mu + N^a \sigma_a^\mu. \quad (2.5)$$

Com isto, um deslocamento em  $M$  é escrito como

$$\begin{aligned} dy^\mu &= t^\mu dt + \sigma_a^\mu dx^a \\ &= (N n^\mu + N^a \sigma_a^\mu) dt + \sigma_a^\mu dx^a \\ &= (N dt) n^\mu + (N^a dt + dx^a) \sigma_a^\mu. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Figura 2 – Decomposição do campo vetorial  $t^\mu$  nas bases  $\{n^\mu, \sigma_a^\mu\}$ .

Fonte: O autor (2024)

Na Figura 3 observamos o papel da função *lapse* e do vetor *shift* na geometria do espaço-tempo. Nesta Figura temos a presença de duas linhas  $(t_0, x_0^a)$  e  $(t_0, x_0^a + dx^a)$ , representando as trajetórias no espaço-tempo de dois observadores cujas separações espaciais relativas  $dx^a$  não se alteram. Observamos que a função *lapse*  $N$  nos dar uma medida da separação entre os pontos  $P(t, x^a)$  e  $P'(t + dt, x^{a'})$  (observe que os pontos  $x^a$  de  $P$  e  $x^{a'}$  de  $P'$  são diferentes). O vetor *shift*  $N^a$  liga os pontos  $P'(t + dt, x^{a'})$  a  $Q(t + dt, x^a)$  e pode ser interpretado como o desvio ou distorção das linhas  $x^a = \text{constante}$  relativamente à normal.

Vemos assim que a geometria do espaço-tempo quadridimensional pode ser vista como representando uma evolução das geometrias das hipersuperfícies tridimensionais. Isto significa que podemos usar as métricas espaciais,  $h_{ab}$ , como graus de liberdade (ou variáveis dinâmicas) do sistema. Consequentemente,  $N$  e  $N^a$  constituem apenas formas de descrever a evolução no tempo e não devem ser interpretadas como variáveis dinâmicas, sendo portanto, funções arbitrárias.

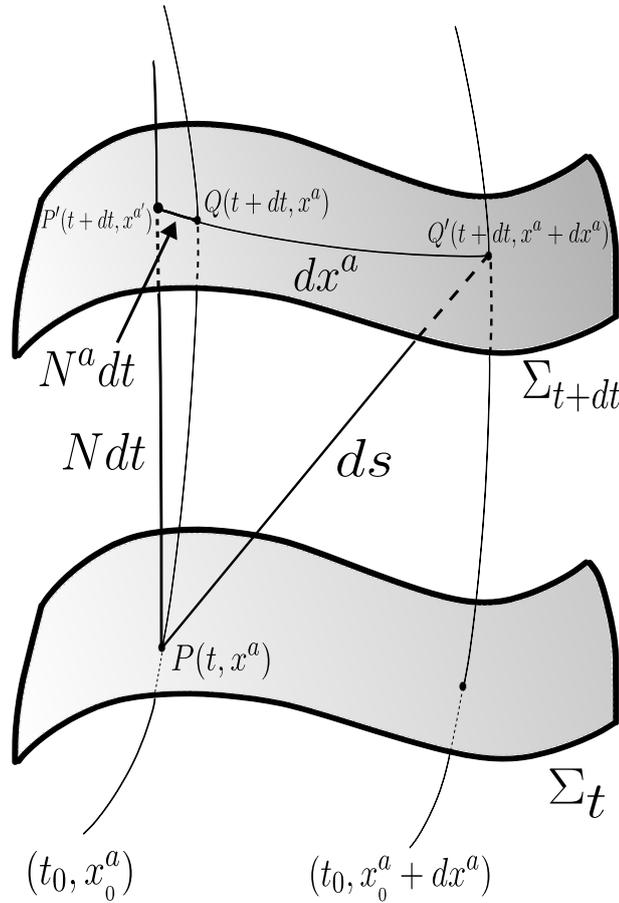
Portanto, o intervalo do espaço-tempo invariante entre os pontos  $P(t, x^a)$  e  $Q'(t + dt, x^a + dx^a)$  que pertence as duas hipersuperfícies muito próximas, expressa em coordenadas  $(t, x^a)$  é:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \\
 &= g_{\mu\nu} \left[ (N dt) n^\mu + (N^a dt + dx^a) \sigma_a^\mu \right] \left[ (N dt) n^\nu + (N^b dt + dx^b) \sigma_b^\nu \right] \\
 &= N^2 dt^2 g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + \left( dx^a + N^a dt \right) \left( dx^b + N^b dt \right) \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu g_{\mu\nu} \\
 &= -N^2 dt^2 + h_{ab} \left( dx^a + N^a dt \right) \left( dx^b + N^b dt \right) \\
 &= - \left( N^2 - N_a N^a \right) dt^2 + 2N_a dx^a dt + h_{ab} dx^a dx^b \quad .
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Em notação matricial

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{ta} \\ g_{at} & g_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \left( N^2 - N_a N^a \right) & N_a \\ N_a & h_{ab} \end{pmatrix} \quad , \tag{2.8}$$

com inversa

Figura 3 – Visualização da função *lapse* e do vetor *shift*.


Fonte: O autor (2024)

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} g^{tt} & g^{ta} \\ g^{at} & g^{ab} \end{pmatrix} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -1 & N^a \\ N^b & N^2 h^{ab} - N^a N^b \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde  $h^{ab}$  é a inversa de  $h_{ab}$  e  $N_a = h_{ab} N^b$ . Podemos obter a seguinte relação

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} \quad . \quad (2.10)$$

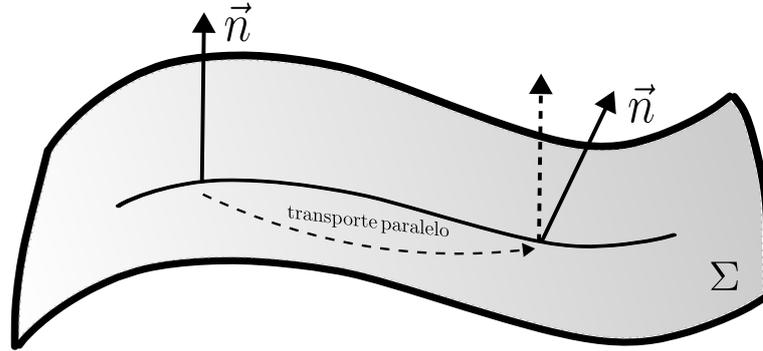
onde  $g$  e  $h$  são os determinantes de  $[g_{\mu\nu}]$  e  $[h_{ab}]$ , respectivamente.

Podemos interpretar o campo vetorial  $t^\mu$  como representando o “fluxo do tempo” em todo o espaço-tempo e a métrica espacial em uma hipersuperfície tridimensional como a variável dinâmica da RG [16]. Agora, podemos introduzir a noção de curvatura extrínseca como representando uma noção bem-definida de “derivada temporal” da métrica espacial em uma hipersuperfície  $\Sigma_t$  imersa no espaço-tempo. A curvatura intrínseca é dada pelo tensor de Riemann tridimensional definido em termos de  $h_{ab}$ . A curvatura extrínseca, por outro lado, é definida em termos do que acontece com o vetor normal  $\vec{n}$  quando ele é transportado paralelamente de um ponto na hipersuperfície para outro (ver Figura 4). A curvatura extrínseca é definida como

$$K_{\nu\mu} := \nabla_\nu n_\mu \quad , \quad (2.11)$$

ou em termos dos vetores de base,

Figura 4 – O tensor de curvatura extrínseca é definido como uma medida da mudança do vetor normal sob transporte paralelo.



Fonte: O autor (2024)

$$K_{ab} := \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu \nabla_\nu n_\mu = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} \quad , \quad (2.12)$$

onde  $\mathcal{L}$  representa a derivada de Lie. A curvatura extrínseca é um tensor simétrico  $K_{ab} = K_{ba}$  [4]. O traço da curvatura extrínseca é denotado por  $K$ ,

$$K \equiv K^a_a = h^{ab} K_{ab} = \nabla_\mu n^\mu \quad . \quad (2.13)$$

Podemos derivar relações entre a curvatura  ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$  de  $\Sigma_t$  e a curvatura do espaço-tempo  $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$ . Para isto, consideramos  $(M, g_{\mu\nu})$  ser um espaço-tempo e  $\Sigma_t$  uma hipersuperfície tipo-espaço suave em  $M$ . Com  $h_{ab}$  denotando a métrica induzida em  $\Sigma_t$  e  $D_a$  representando o operador derivativo associado com  $h_{ab}$ , com  $D_a = \sigma_a^\mu \nabla_\mu$ . Se  $\omega_a$  é um campo vetorial dual em  $\Sigma_t$ , obtido pela projeção na hipersuperfície de um campo vetorial  $\omega_\mu$ , ou seja,  $\omega_a = \sigma_a^\mu \omega_\mu$ , temos:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \quad . \quad (2.14)$$

Definimos a derivada covariante intrínseca de  $\omega_a$  através da projeção de  $\nabla_\mu \omega_\nu$  na hipersuperfície:

$$D_b \omega_c := \sigma_b^\mu \sigma_c^\nu \nabla_\mu \omega_\nu \quad . \quad (2.15)$$

Contudo, temos:

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= D_a (\sigma_b^\mu \sigma_c^\nu \nabla_\mu \omega_\nu) \\ &= D_a (\sigma_b^\mu \sigma_c^\nu h_\mu{}^d h_\nu{}^e \nabla_d \omega_e) \\ &= D_a (h_b{}^d h_c{}^e \nabla_d \omega_e) \\ &= h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k \nabla_f (h_g{}^d h_k{}^e \nabla_d \omega_e) \\ &= h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c{}^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e + h_b{}^d K_{ac} n^e \nabla_d \omega_e \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde usamos a seguinte relação:

$$h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b h_d{}^e = h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b (g_d{}^e + n_d n^e) = K_{ac} n^e \quad . \quad (2.17)$$

Agora, o termo do meio do lado direito da equação (2.16) desaparece quando antisimetrizado em relação a  $a$  e  $b$ . Além disso, temos:

$$h_b^d n^e \nabla_d \omega_e = h_b^d \nabla_d (n^e \omega_e) - h_b^d \omega_e \nabla_d n^e = -K_b^e \omega_e \quad . \quad (2.18)$$

Portanto, encontramos

$$D_a D_b \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e - K_{ac} K_b^e \omega_e \quad , \quad (2.19)$$

$$D_b D_a \omega_c = h_b^f h_a^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e K_{ba} n^d \nabla_d \omega_e - K_{bc} K_a^e \omega_e \quad . \quad (2.20)$$

Substituindo (2.19) e (2.20) em (2.14), temos

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \quad . \quad (2.21)$$

Note que adotamos apenas a notação de índices latinos de (2.16)–(2.21). Isto facilita nossa análise e mostra que as equações são válidas independentes da base escolhida. Por exemplo, se consideramos nossa base  $\sigma_a^\mu$ , a equação (2.21) torna-se:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{abc}{}^d &= \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu \sigma_c^\alpha \sigma_\beta^d h_\mu^f h_\nu^g h_\alpha^k h^\beta{}_j R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \\ &= \sigma_a^\mu \sigma_b^\nu \sigma_c^\alpha \sigma_\beta^d R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir de agora, escrevemos nossas equações e definições apenas em termos dos índices latinos.

Do mesmo modo, podemos obter a relação entre o tensor de Ricc e a curvatura extrínseca, partido da definição do tensor de Riemann [16];

$$R_{abd}{}^c n^d = \nabla_b \nabla_a n^c - \nabla_a \nabla_b n^c \quad . \quad (2.23)$$

Usando (2.12), reescrevemos (2.23) na forma

$$R_{abd}{}^c n^d = \nabla_b \left( h_a^b K_b^c \right) - \nabla_a \left( h_b^a K_a^c \right) = \nabla_b K_a^c - \nabla_a K_b^c \quad . \quad (2.24)$$

Vamos multiplicar (2.24) por  $h_a^b h_b^a h_c^b h_b^c$  para obter

$$\begin{aligned} h_a^b h_b^a h_c^b h_b^c R_{abd}{}^c n^d &= h_a^b h_b^a h_c^b h_b^c \nabla_b K_a^c - h_a^b h_b^a h_c^b h_b^c \nabla_a K_b^c \quad , \\ \delta_a^c h_b^a h_c^b R_{abd}{}^c n^d &= \delta_a^c h_b^a h_c^b \nabla_b K_a^c - \delta_a^c h_b^a h_c^b \nabla_a K_b^c \quad , \\ R_{cbd}{}^b n^d h_b^c &= h_b^a h_a^b \nabla_b K_a^a - h_b^a h_a^b \nabla_a K_b^a \quad , \\ R_{cd} n^d h_b^c &= D_a K_b^a - D_b K_a^a \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

As equações (2.21) e (2.25) são conhecidas como as *relações de Gauss-Codacci*.

Examinando as equações de Einstein no vácuo,  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0$ , encontramos para a componente  $G_{i0}$  (espaço e tempo);

$$0 = G_{cd} n^d h_b^c = R_{cd} n^d h_b^c \quad , \quad (2.26)$$

que pode ser reescrito com a ajuda de (2.25) como

$$D_a K_b^a - D_b K_a^a = 0 \quad . \quad (2.27)$$

Para a componente  $G_{00}$  (tempo e tempo), temos:

$$0 = G_{cd}n^c n^d = R_{cd}n^c n^d + \frac{R}{2} \quad . \quad (2.28)$$

Conforme a equação (2.21), temos:

$${}^{(3)}R_{abcd} = {}^{(3)}R_{abc}{}^d h_{dd} = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j h_{dd} R_{fgk}{}^j - K_{ac}K_b{}^d h_{dd} + K_{bc}K_a{}^d h_{dd} \quad . \quad (2.29)$$

Assim, (2.29) torna-se:

$${}^{(3)}R_{abcd} = R_{abcd} - K_{ac}K_{bd} + K_{bc}K_{ad} \quad . \quad (2.30)$$

Além disso, podemos escrever

$$R_{abcd}h^{ac}h^{bd} = R_{abcd}(g^{ac} + n^a n^c)(g^{bd} + n^b n^d) = R + 2R_{ac}n^a n^c = 2G_{ac}n^a n^c \quad . \quad (2.31)$$

Considerando a equação (2.29), podemos encontrar

$$\begin{aligned} R &= R_{abcd}h^{ac}h^{bd} = {}^{(3)}R_{abcd}h^{ac}h^{bd} + K_{ac}K_{bd}h^{ac}h^{bd} - K_{bc}K_{ad}h^{ac}h^{bd} \\ &= {}^{(3)}R + K^2 - K_b{}^a K_a{}^b \\ &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{ba}h^{aa}K^{ab}h_{aa} \\ &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \quad . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.31), temos

$$G_{ac}n^a n^c = \frac{1}{2} \left( {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \right) \quad . \quad (2.33)$$

Então a componente  $G_{00}$  das equações de Einstein implicam

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 0 \quad . \quad (2.34)$$

As equações (2.27) e (2.34) são vínculos, eles apenas contém derivadas de primeira ordem no tempo. A componente  $G_{ij}$  (espaço e espaço) das equações de Einstein são dinâmicas.

## 2.2 Hamiltoniana da RG

O primeiro passo em obter um funcional hamiltoniano para RG é expressar a ação gravitacional em termos de  $(h_{ab}, N, N_a)$  e suas derivadas no tempo e no espaço. Assim, iniciamos com o princípio de ação de Einstein-Hilbert (EH)

$$S_{EH}[g^{ab}] = \frac{1}{16\pi G} \int_M \mathcal{L}_G d^4x = \frac{1}{16\pi G} \int_M \sqrt{-g} R d^4x \quad , \quad (2.35)$$

onde  $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R$  é a densidade lagrangiana para as equações de Einstein no vácuo.

Expressaremos o escalar de curvatura  $R$ , na forma:

$$R = 2 \left( G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b \right) \quad , \quad (2.36)$$

e

$$G_{ac}n^a n^c = \frac{1}{2} \left( {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \right) \quad , \quad (2.37)$$

onde  $K_{ab}$  é o denominador de curvatura extrínseca e  $K$  é o traço de  $K_{ab}$  [4].

Por outro lado, da definição do tensor de Riemann, temos

$$\begin{aligned}
R_{ab}n^an^b &= R_{acb}{}^bn^an^b \\
&= -n^a(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^c \\
&= (\nabla_an^a)(\nabla_cn^c) - (\nabla_cn^a)(\nabla_an^c) - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) \\
&= K^2 - K_{ab}K^{ab} - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) \quad .
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Portanto, substituindo (2.37) e (2.38) em (2.36), temos

$$\begin{aligned}
R &= 2 \left[ \frac{1}{2} \left( {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \right) - K^2 + K_{ab}K^{ab} + \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) - \nabla_c(n^a\nabla_an^c) \right] \\
&= {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_a(n^a\nabla_cn^c) - 2\nabla_c(n^a\nabla_an^c) \quad .
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo (2.10) e (2.39) em (2.35), encontramos

$$\begin{aligned}
S_{EH} &= \frac{1}{16\pi G} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left[ {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} \nabla_c(n^a\nabla_an^c - n^c\nabla_an^a) d^4x \quad .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

O último termo do lado direito de (2.40) representa o termo de contorno de Gibbons-Hawking-York (GHY), que pode ser escrito como [6]:

$$\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} \nabla_c(n^a\nabla_an^c - n^c\nabla_an^a) d^4x = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{V}} K \sqrt{h} d^3x = S_{GHY} \quad . \tag{2.41}$$

O primeiro termo do lado direito de (2.40) é conhecido como ação ADM [104]. Portanto, escrevemos

$$S_{EH} = S_{ADM} + S_{GHY} \quad , \tag{2.42}$$

com

$$S_{ADM} = \int_{t_1}^{t_2} L_{ADM} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \mathcal{L}_{ADM} \quad , \tag{2.43}$$

onde a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_{ADM}$  é dada por

$$\mathcal{L}_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{h} N \left[ {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right] \quad . \tag{2.44}$$

Os dois últimos termos no lado direito da equação (2.38), quando substituídos na ação (2.35), representam o termo de contorno de Gibbons-Hawking-York.

A curvatura extrínseca  $K_{ab}$ , é relacionada a “derivada temporal”,  $\dot{h}_{ab} \equiv h_a{}^c h_b{}^d \mathcal{L}_t h_{cd}$  de  $h_{ab}$  por

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n h_{ab} \\
&= \frac{1}{2} [n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (n^c) + h_{cb} \nabla_a (n^c)] \\
&= \frac{1}{2N} [N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (N n^c) + h_{cb} \nabla_a (N n^c)] \\
&= \frac{1}{2N} \left[ N \frac{(t^c - N^c)}{N} \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b \left( N \frac{(t^c - N^c)}{N} \right) + h_{cb} \nabla_a \left( N \frac{(t^c - N^c)}{N} \right) \right] \quad (2.45) \\
&= \frac{1}{2N} [t^c \nabla_c h_{ab} - N^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b t^c - h_{ac} \nabla_b N^c + h_{cb} \nabla_a t^c - h_{cb} \nabla_a N^c] \\
&= \frac{1}{2N} [t^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b t^c + h_{cb} \nabla_a t^c - (N^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b N^c + h_{cb} \nabla_a N^c)] \\
&= \frac{1}{2N} [\mathfrak{L}_t h_{ab} - \mathfrak{L}_N h_{ab}] \quad .
\end{aligned}$$

onde  $\mathfrak{L}_n$  é a derivada de Lie com relação ao vetor normal  $n$  e  $\mathfrak{L}_t$  é a derivada de Lie com relação ao tempo [105]. Podemos escrever de acordo com (2.45)

$$\begin{aligned}
K_{cd} &= \frac{1}{2N} [\mathfrak{L}_t h_{cd} - \mathfrak{L}_N h_{cd}] \quad , \\
h_c^a h_d^b K_{ab} &= \frac{1}{2N} [\mathfrak{L}_t h_{cd} - \mathfrak{L}_N h_{cd}] \quad , \\
K_{ab} &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d [\mathfrak{L}_t h_{cd} - \mathfrak{L}_N h_{cd}] \quad (2.46) \\
&= \frac{1}{2N} [h_a^c h_b^d \mathfrak{L}_t h_{cd} - h_a^c h_b^d \mathfrak{L}_N h_{cd}] \\
&= \frac{1}{2N} [\dot{h}_{ab} - h_a^c h_b^d (N^a \nabla_a h_{cd} + h_{ca} \nabla_d N^a + h_{ad} \nabla_c N^a)] \\
&= \frac{1}{2N} [\dot{h}_{ab} - h_a^c h_b^d N^a \nabla_a h_{cd} - h_a^c h_b^d h_{ca} \nabla_d N^a - h_a^c h_b^d h_{ad} \nabla_c N^a] \quad .
\end{aligned}$$

Utilizemos a definição de operador derivativo associada com  $h_{ab}$ ;

$$D_b \omega_c = h_b^d h_c^e \nabla_d \omega_e \quad , \quad (2.47)$$

e o fato que  $D_a h_{bc} = 0$ , para reescrever (2.46) na forma

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{2N} \left[ \dot{h}_{ab} - N^a D_b h_{ac} - h_a^c h_b^d \nabla_d (h_{ac} N^a) + N^a D_b h_{ad} - \right. \\
&\quad \left. h_a^c h_b^d \nabla_c (h_{ad} N^a) + N^a D_a h_{ab} \right] \quad (2.48) \\
&= \frac{1}{2N} \left[ \dot{h}_{ab} - h_a^c h_b^d \nabla_d N_c - h_a^c h_b^d \nabla_c N_d \right] \\
&= \frac{1}{2N} \left[ \dot{h}_{ab} - D_b N_a - D_a N_b \right] \quad .
\end{aligned}$$

O momento canonicamente conjugado a  $h_{ab}$  é

$$\begin{aligned}
\Pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{h}_{ab}} \\
&= \frac{\sqrt{h}N}{16\pi G} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} \left( K_{ab} K^{ab} \right) - \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{h}N}{16\pi G} \left[ K^{ab} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ab}} + K_{ab} \frac{\partial K^{ab}}{\partial \dot{h}^{ab}} - 2K \frac{\partial K}{\partial \dot{h}_{ab}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{h}N}{16\pi G} \left[ K^{ab} \frac{1}{2N} + K_{ab} \frac{\partial (h^{ab} h^{ab} K_{ab})}{\partial \dot{h}^{ab}} - 2K \frac{\partial (h^{ab} K_{ab})}{\partial \dot{h}_{ab}} \right] \quad (2.49) \\
&= \frac{\sqrt{h}N}{16\pi G} \left[ K^{ab} \frac{1}{2N} + K_{ab} h^{ab} h^{ab} \frac{1}{2N} - 2K h^{ab} \frac{1}{2N} \right] \\
&= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} \left[ \frac{K^{ab}}{2} + \frac{K_{ab}}{2} - K h^{ab} \right] \\
&= \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} \left[ K^{ab} - K h^{ab} \right] .
\end{aligned}$$

Contudo,  $\mathcal{L}_{ADM}$  não contém nenhuma derivada temporal de  $N$  ou  $N^a$ , então seus momentos conjugados são identicamente nulos, ou seja,

$$\Pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad , \quad (2.50)$$

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}^a} = 0 \quad . \quad (2.51)$$

As relações (2.50) e (2.51) são chamadas de vínculos primários porque são derivadas da densidade lagrangiana. Eles estarão presentes na densidade hamiltoniana gravitacional por multiplicadores de Lagrange [106, 107]. Em analogia com o caso eletromagnético, interpretamos este fato dizendo que  $N$  e  $N_a$  não poderão ser vistos como variáveis dinâmicas. Nossa densidade hamiltoniana gravitacional canônica será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ADM} &= \dot{h}_{ab} \Pi^{ab} - \mathcal{L}_{ADM} \\
&= \Pi^{ab} (2N K_{ab} + D_a N_b + D_b N_a) - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( {}^{(3)}R + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right) \\
&= \Pi^{ab} \left[ \frac{32\pi GN}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ab} - \frac{\pi h_{ab}}{2} \right) + D_a N_b + D_b N_a \right] - \frac{N\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G} \quad (2.52) \\
&\quad + \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left[ \left( \Pi_{ab} - \frac{\Pi h_{ab}}{2} \right) \left( \Pi^{ab} - \frac{\Pi h^{ab}}{2} \right) - \left( \frac{\Pi}{2} \right)^2 \right] .
\end{aligned}$$

Usamos o fato que  $K = -\frac{16\pi G \Pi}{2\sqrt{h}}$  e  $\Pi = h_{ab} \Pi^{ab}$ . Portanto, simplificando (2.52), encontramos a densidade hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ADM} &= -\frac{N\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G} + \frac{16\pi GN}{\sqrt{h}} \left[ \Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{\Pi^2}{2} \right] + 2\Pi^{ab} D_a N_b \\
&= N \left[ -\frac{\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G} + 16\pi G \left( \frac{\Pi^{ab} \Pi_{ab}}{\sqrt{h}} - \frac{\Pi^2}{2\sqrt{h}} \right) \right] - 2N_b D_a \left( \Pi^{ab} \right) + 2D_a \left( N_b \Pi^{ab} \right) . \quad (2.53)
\end{aligned}$$

O último termo na equação (2.53) contribui apenas como um termo de contorno em  $H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{ADM} d^3x$ . Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{H}_{ADM} = N\mathcal{H} + N^a \mathcal{H}_a \quad , \quad (2.54)$$

onde

$$\mathcal{H} = 16\pi G \mathcal{G}_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R \quad , \quad (2.55)$$

$$\mathcal{H}_a = -2h_{ab} D_c \Pi^{cb} \quad , \quad (2.56)$$

com

$$\mathcal{G}_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ac} h_{bd} + h_{ad} h_{bc} - h_{ab} h_{cd}) \quad , \quad (2.57)$$

é a inversa da métrica de DeWitt,  $\mathcal{G}^{abcd} = \sqrt{h}/2 (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc} - 2h^{ab} h^{cd})$ . A densidade hamiltoniana gravitacional será:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{ADM} &= \mathcal{H}_{ADM} + \lambda \Pi_N + \lambda_a \Pi^a \\ &= N\mathcal{H} + N^a \mathcal{H}_a + \lambda \Pi_N + \lambda_a \Pi^a \quad . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Variação de  $\tilde{\mathcal{H}}_{ADM}$  com relação a  $N$  e  $N_a$  implicam nas equações:

$$\dot{\Pi}_N = \mathcal{H} = 16\pi G \mathcal{G}_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \frac{\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G} \quad , \quad (2.59)$$

$$\dot{\Pi}^a = \mathcal{H}_a = -2h_{ab} D_c \Pi^{cb} \quad . \quad (2.60)$$

Estas equações (2.59) e (2.60) mostram que os vínculos (2.50) e (2.51) não são preservados. Então, devemos impor os seguintes vínculos secundários:

$$\mathcal{H} \approx 0 \quad , \quad (2.61)$$

$$\mathcal{H}_a \approx 0 \quad . \quad (2.62)$$

onde o símbolo “ $\approx$ ” indica a igualdade fraca de Dirac. O vínculo (2.61) é chamado *vínculo super-hamiltoniano* e o vínculo (2.62) é denominado *vínculo supermomento*. Variação de  $\tilde{\mathcal{H}}_{ADM}$  com relação a  $\Pi_N$  e  $\Pi^a$  implicam nas equações:

$$\dot{N} = \lambda \quad , \quad (2.63)$$

$$\dot{N}^a = \lambda_a \quad . \quad (2.64)$$

Os vínculos (2.50) e (2.51) são vínculos primários de segunda classe [106], ou seja, o seu parêntese de Poisson com os vínculos (2.61) e (2.62) não se anulam,

$$\dot{\Pi}_N = \{ \Pi_N, \tilde{\mathcal{H}}_{ADM} \} = \mathcal{H} \quad , \quad (2.65)$$

$$\dot{\Pi}_a = \{ \Pi_a, \tilde{\mathcal{H}}_{ADM} \} = \mathcal{H}_a \quad . \quad (2.66)$$

Isto significa que podemos considerar nulos esses vínculos na densidade hamiltoniana (2.58), possibilitando usar a forma reduzida da hamiltoniana  $\tilde{\mathcal{H}}_{ADM}$ , desde que estamos apenas interessados nas variáveis  $h_{ab}$  e  $\Pi^{ab}$ , ou seja, podemos apenas considerar

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} (N\mathcal{H} + N^a \mathcal{H}_a) d^3x \quad . \quad (2.67)$$

As equações dinâmicas obtidas de  $H_{ADM}$  são [104]

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_{ADM}}{\delta \Pi^{ab}} = \frac{2N}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ab} - \frac{h_{ab}\Pi}{2} \right) 16\pi G + D_a N_b + D_b N_a \quad , \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ab} = & -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta h_{ab}} = -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G} \left( {}^{(3)}R^{ab} - \frac{{}^{(3)}R h^{ab}}{2} \right) + \frac{16\pi G N h^{ab}}{2\sqrt{h}} \left( \Pi_{cd}\Pi^{cd} - \frac{\mathbb{T}^2}{2} \right) \\ & - \frac{32\pi G N}{\sqrt{h}} \left( \Pi^{ac}\Pi_c{}^b - \frac{\Pi\Pi^{ab}}{2} \right) + \sqrt{h} \left( D^a D^b N - h^{ab} D^c D_c N \right) \\ & + \sqrt{h} D_c \left( \frac{N^c \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - \Pi^{ca} D_c N^b - \Pi^{cb} D_c N^a \quad , \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde, novamente, os termos de contornos foram ignorados e a equação (2.60) foi usada. As equações (2.59), (2.60), (2.68) e (2.69) são equivalentes às equações de Einstein no vácuo. Portanto, construímos uma formulação hamiltoniana, com a presença de vínculos, das equações de Einstein.

Para obter a hamiltoniana gravitacional completa  $H_G$ , basta manter o termo de contorno em (2.53) e subtrair o termo de Gibbons-Hawking-York em (2.41):

$$H_G = H_{ADM} + H_G^{(0)} \quad , \quad (2.70)$$

com  $H_G^{(0)}$  escrito como

$$H_G^{(0)} = \int_{\Sigma_t} 2D_a \left( N_b \pi^{ab} \right) d^3x - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{V}} K \sqrt{h} d^3x \quad . \quad (2.71)$$

Com a presença dos vínculos (2.61) e (2.62), a hamiltoniana gravitacional para uma solução no vácuo é um termo puramente de contorno  $H_G^{(0)}$ . Agora devemos pensar sobre o que essa quantidade  $H_G^{(0)}$  significa fisicamente. Observamos que  $H_G^{(0)}$  depende de como escolhemos dividir  $\mathcal{V}$  e também nas linhas de fluxos, especificadas por  $N$  e  $N^a$ . Cada escolha que fazemos para as funções *lapse* e *shift* irá produzir um valor diferente para a hamiltoniana e possivelmente com significados diferentes. A escolha  $N = 1$  e  $N^a = 0$  permite que a hamiltoniana (2.71) defina a massa ADM [16, 108].

### 2.3 Matéria acoplada

Nesta seção, adicionaremos um campo escalar minimamente acoplado com um potencial autointeragindo  $V(\Phi)$ , e derivamos os correspondentes vínculos hamiltoniano e supermomento. Iniciaremos com a funcional ação de um campo escalar acoplado minimamente;

$$S_\Phi = - \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi(x,t) \nabla_\nu \Phi(x,t) + V(\Phi) \right) \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (2.72)$$

onde  $\mathcal{V}$  é uma parte da variedade do espaço-tempo  $M$ , delimitada por duas hipersuperfícies  $\Sigma_{t_1}$  e  $\Sigma_{t_2}$ . Semelhantemente ao caso de gravidade pura, podemos efetuar uma análise 3 + 1 da

funcional ação (2.72). A densidade lagrangiana do campo escalar será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Phi &= -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi(x,t) \nabla_\nu \Phi(x,t) + V(\Phi) \right] \\ &= N\sqrt{h} \left[ \frac{1}{N^2} (\dot{\Phi} - N^a \nabla_a \Phi)^2 - h^{ab} \nabla_a \Phi(x) \nabla_b \Phi(x) - 2V(\Phi) \right] .\end{aligned}\quad (2.73)$$

Aqui, o momento canônico é

$$\Pi_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\sqrt{h}}{N} (\dot{\Phi} - N^a \nabla_a \Phi) . \quad (2.74)$$

A hamiltoniana  $H_\Phi$  é

$$\begin{aligned}H_\Phi &= \int_{\Sigma_t} d^3x [\dot{\Phi} \Pi_\Phi - \mathcal{L}_\Phi(\Phi, \Pi_\Phi)] \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{\Pi_\Phi^2}{\sqrt{h}} \right) + \sqrt{h} (h^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi + 2V(\Phi)) + N^a \Pi_\Phi \nabla_a \Phi \right] .\end{aligned}\quad (2.75)$$

A hamiltoniana acima do campo escalar combinada com a hamiltoniana da gravidade pura (2.67) irá formar a hamiltoniana total do sistema gravidade e campo escalar;

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} (N \mathcal{H} + N^a \mathcal{H}_a) d^3x , \quad (2.76)$$

onde agora

$$\mathcal{H} = 16\pi G \mathcal{G}_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R + \frac{\sqrt{h}}{2} \left( \frac{\Pi_\Phi^2}{h} + h^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi + 2V(\Phi) \right) \approx 0, \quad (2.77)$$

e

$$\mathcal{H}^a = -2D_b \Pi^{ab} + \Pi_\Phi h^{ab} \nabla_b \Phi \approx 0 , \quad (2.78)$$

são os vínculos hamiltoniano e supermomento, respectivamente. As equações de movimento são, então, as equações de Hamilton para a métrica induzida  $h_{ab}$ , o campo escalar  $\Phi$  e os correspondentes momentos. Estas equações podem ser escritas na seguinte maneira:

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_{ADM}}{\delta \Pi^{ab}} ; \quad \dot{\Pi}^{ab} = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta h_{ab}} , \quad (2.79)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\delta H_{ADM}}{\delta \Pi_\Phi} ; \quad \dot{\Pi}_\Phi = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta \Phi} , \quad (2.80)$$

ou em termos dos *parênteses* de Poisson, como

$$\dot{h}_{ab} = \{h_{ab}, H_{ADM}\} ; \quad \dot{\Pi}^{ab} = \{\Pi^{ab}, H_{ADM}\} , \quad (2.81)$$

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_{ADM}\} ; \quad \dot{\Pi}_\Phi = \{\Pi_\Phi, H_{ADM}\} . \quad (2.82)$$

Ambos os métodos acima podem ser usados para obter as equações de movimento. O leitor pode consultar a referência [6] para mais detalhes.

## 2.4 Superespaço

A presença de vínculos nas formulações hamiltonianas das equações de Maxwell e das equações de Einstein, indicam que não isolamos os “verdadeiros graus de liberdade dinâmicos” em nossa escolha do espaço de configuração. O formalismo hamiltoniano da RG deve ter a seguinte quantidade de graus físicos de liberdade [106]:

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{Número de graus de liberdade}) &= (\text{Número de variáveis canônicas independentes}) \\ &= (\text{Número total de variáveis canônicas}) - (\text{Número de vínculos de segunda classe}) \\ &- (\text{Número de vínculos de primeira classe}) - (\text{Número de condições de } gauge) = (\text{Número} \\ &\text{total de variáveis canônicas}) - (\text{Número de vínculos de segunda classe}) - 2 \times (\text{Número de} \\ &\text{vínculos de segunda classe}). \end{aligned}$$

O número total de variáveis canônicas são 20, que correspondem à  $(h_{ab}, \pi^{ab}, N, \Pi_N, N_a, \Pi^a)$ . O número de vínculos de segunda classe são 4, correspondendo à  $\Pi_N$  e  $\Pi^a$ . O número de vínculos de primeira classe também são 4, que correspondem à  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}^a$ . Portanto, isto resulta em 4 graus de liberdade por ponto no espaço para o campo gravitacional (denotado simbolicamente como  $4 \times \infty^3$ ). Sabendo que o campo gravitacional possui  $2 \times \infty^3$  graus de liberdade intrínseco no espaço [16], o formalismo hamiltoniano da RG possui  $2 \times \infty^3$  graus de liberdade a mais no espaço.

Mesmo eliminando  $V$ ,  $N$  e  $N_a$  como variáveis dinâmicas, os vínculos nos dizem que nosso espaço de fase ainda possui graus de liberdade não físicos. Isto, por sua vez, é diretamente relacionado a liberdade de *gauge* presente nas configurações das variáveis de  $h_{ab}$ . Entretanto, podemos fazer o espaço de configuração da RG ser o conjunto equivalente de classes,  $\tilde{h}_{ab}$ , de métricas riemannianas em  $\Sigma_t$ , onde duas métricas são consideradas equivalentes se elas poderem ser transportadas um para a outra por um difeomorfismo. Este espaço de configuração é conhecido como *superespaço* [109]. O vínculo (2.60) é automaticamente eliminado pela escolha do superespaço como o espaço de configuração.

Contudo, o vínculo (2.59) permanece, podendo ser interpretado como um resultado da arbitrariedade de *gauge* envolvida na escolha de como “dividimos” o espaço-tempo em espaço e tempo. Parece não ser possível resolver o vínculo (2.59), porque ele é quadrático no momento. Escolher um espaço de configuração para RG, no qual apenas os “graus de liberdade físicos” estão presentes no seu espaço de fase, aparentemente não é possível. A presença de vínculo (2.59), parece ser uma característica inviolável da formulação hamiltoniana da RG. Isto fornece uma série de obstáculos para a formulação de uma teoria quântica da gravitação pela abordagem da quantização canônica.

## 2.5 Minisuperespaço

Em RG Clássica, as equações de campo muitas vezes tornam-se solúveis se simetrias no espaço-tempo poderem ser aplicadas. Podemos, por exemplo, impor simetria esférica, simetria axial ou homogeneidade. Elas devem corresponder a situações de interesse físico: buracos negros são axialmente simétricos, enquanto o Universo na totalidade pode ser aproximado a espaços-tempos homogêneos e isotrópicos. A ideia é aplicar um procedimento similar na formulação hamiltoniana da RG.

A métrica em  $\Sigma(t = \text{constante})$  pode ser expressa em termos da base  $\{v_a(x)\}$  como [6]:

$$h_{ab}(x, t) = v^c{}_a(x) v^d{}_b(x) \gamma_{cd}(t) = h_{ab}(x) \gamma(t) \quad . \quad (2.83)$$

Note que  $\gamma_{cd}$  são independentes das coordenadas locais de  $\Sigma$ . Então, a forma mais geral da métrica do espaço-tempo é

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2(t) dt^2 + \gamma_{cd}(t) v^c_a(x) v^d_b(x) \left( N^a(t) dt + dx^a \right) \times \left( N^b(t) dt + dx^b \right) \\ &= - \left( N^2(t) - N_a N^a \right) dt^2 + 2N_a dx^a dt + \gamma_{cd}(t) v^c_a(x) v^d_b(x) dx^a dx^b \\ &= - \left( N^2(t) - N_a N^a \right) dt^2 + 2N_a dx^a dt + \gamma(t) h_{ab}(x) dx^a dx^b . \end{aligned} \quad (2.84)$$

Assim, a funcional ação ADM (2.43) reduz para

$$S_{ADM} = \int_{t_1}^{t_2} L_{ADM} dt \quad , \quad (2.85)$$

onde agora a lagrangiana reduzida ADM é

$$L_{ADM} = \frac{vol(\Sigma)}{16\pi G} N \sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} f^{abcd} K_{ab} K_{cd} + {}^{(3)}R \right) . \quad (2.86)$$

Aqui, usamos a seguinte definição:  $\gamma = \det(\gamma_{ab})$  e  $vol(\Sigma)$  é o volume da hipersuperfície orientada fechada dada por

$$vol(\Sigma) = \int \det(v) d^3x \quad , \quad (2.87)$$

$$\det(v) := \det(v^a_b) \quad . \quad (2.88)$$

Também

$$f^{abcd} = \frac{\sqrt{\gamma(t)}}{2} \left( \gamma^{ac}(t) \gamma^{bd}(t) + \gamma^{ad}(t) \gamma^{bc}(t) - 2\gamma^{ab}(t) \gamma^{cd}(t) \right) \quad , \quad (2.89)$$

onde  $f^{abcd}$  é a minisupermétrica e a curvatura extrínseca (2.48) é

$$K_{ab} = \frac{1}{2N(t)} \left[ \dot{\gamma}_{ab} + 2N^i (\gamma_{ca} C_{bi}^c + \gamma_{ac} C_{bi}^c) \right] \quad . \quad (2.90)$$

onde  $C_{mn}^i$  ( $i, m, n = 1, 2, 3$ ) são as constantes de estrutura da álgebra de Lie de  $GL(3, \mathbb{R})$ , para uma certa base  $\{v_a\}$  [6].

Assumindo o espaço-tempo homogêneo, o campo de matéria irá ser apenas uma função do parâmetro tempo  $t$ , e a funcional ação do campo escalar (2.72) irá reduzir para

$$S_m = vol(\Sigma) \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma} N(t) \left( \frac{\dot{\Phi}(t)^2}{2N^2} - V(\Phi) \right) dt \quad . \quad (2.91)$$

Portanto, a lagrangiana total na presença de um campo escalar com potencial  $V(\Phi)$  é

$$L_{ADM} = \frac{vol(\Sigma)}{16\pi G} N \left( f^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R \right) + vol(\Sigma) \sqrt{\gamma} \left( \frac{\dot{\Phi}(t)^2}{2N} - NV(\Phi) \right) . \quad (2.92)$$

Então, o momento conjugado a  $\gamma_{ab}$  e  $\Phi(t)$  são

$$\pi^{ab} = \frac{\partial L_{ADM}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} = \frac{vol(\Sigma)}{16\pi G} f^{abcd} K_{cd} \quad , \quad (2.93)$$

$$\pi_{\Phi} = \frac{\partial L_{ADM}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{vol(\Sigma) \sqrt{\gamma}}{N} \dot{\Phi} \quad . \quad (2.94)$$

A hamiltoniana ADM é

$$H_{ADM} = \dot{\gamma}_{ab}\pi^{ab} + \dot{\Phi}\pi_{\Phi} - L_{ADM} = N(t)\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a \quad , \quad (2.95)$$

onde os vínculos hamiltoniano  $\mathcal{H}$  e momento  $\mathcal{H}_a$ , são

$$\mathcal{H} = \frac{16\pi G}{vol(\Sigma)} f_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - \frac{\sqrt{\gamma}vol(\Sigma)}{16\pi G} {}^{(3)}R + \frac{1}{2vol(\Sigma)\sqrt{\gamma}}\pi_{\Phi}^2 + vol(\Sigma)\sqrt{\gamma}V(\Phi) \approx 0, \quad (2.96)$$

$$\mathcal{H}_a = 2\gamma_{mc}C_{an}^c\pi^{mn} \approx 0 \quad . \quad (2.97)$$

O vínculo hamiltoniano (2.96) será utilizado no capítulo 5 para a quantização canônica do minisuperespaço, que constitui, em princípio, transformar  $\mathcal{H}$  em operador hermitiano, no seu espaço de Hilbert correspondente, e fazê-lo atuar em funções de onda.

### 3 COSMOLOGIA CLÁSSICA

Neste capítulo discutiremos a Cosmologia Clássica (CC) para um universo isotrópico e homogêneo. Um universo com essas características será apresentado na seção 3.1, conhecido como modelo de FLRW. Os resultados desse modelo, como, por exemplo, a idade do Universo e sua taxa de expansão, são abordadas nas seções 3.2 e 3.3, respectivamente. Na seção 3.4 comparamos os resultados do modelo FLRW com dados observacionais recentes e em seguida apresentamos a estatística bayesiana na seção 3.5, útil para obter o melhor ajuste dos parâmetros cosmológicos com os dados observacionais. Por fim, discutimos na seção 3.6 o problema da planura e o modelo inflacionário.

#### 3.1 O universo de FLRW

Os últimos anos fizeram aumentar a confiança dos cosmólogos de que, em largas escalas espaciais, vivemos em um Universo homogêneo e isotrópico. A descrição matemática de um tal Universo foi iniciada pelos cientistas, Alexander A. Friedmann [110], Georges Lemaître [111], Howard P. Robertson [112] e Arthur G. Walker [113]. A métrica para esse modelo é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), e é obtida fazendo o vetor *shift* igual a zero  $N_a = 0$  e  $\gamma(t) \equiv a^2(t)$ , de modo que (2.84) toma a forma [16]

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $N(t)$  é a função *lapse*,  $t$  é o tempo cósmico,  $a(t)$  é o fator de escala,  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  é o elemento de linha padrão para  $S^2$  e  $k = -1, 0, 1$  está associado à natureza da curvatura para um Universo aberto, plano e fechado, respectivamente.

O funcional, que abrange componentes gravitacionais e de matéria, sendo o campo de matéria tratado como um fluido perfeito [103, 114], pode ser expresso como segue

$$S = \frac{1}{16\pi G} \left[ \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} R d^4x + \int_{\partial\mathcal{V}} 2K \sqrt{h} d^3x \right] - \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} \rho(t) d^4x, \quad (3.2)$$

onde  $K$  é o traço da curvatura extrínseca da hipersuperfície tipo-espaço  $(\Sigma, h)$ ,  $\rho$  é a densidade de energia total do fluido e  $\mathcal{V}$  representa uma região compacta arbitrária da variedade  $M$ , com contorno  $\partial\mathcal{V}$  [115, 116]. Assumiremos que a variedade espaço-tempo  $M$ , é uma variedade lorentziana espacialmente compacta e globalmente hiperbólica.

Ao lidar com componentes de fluidos perfeitos sem interação, que possuem uma equação de estado barotrópica  $p^{(i)} = \omega^{(i)} \rho^{(i)}$ , a conservação covariante do campo vetorial implica:  $\rho^{(i)} = \rho_0^{(i)} (a_0/a)^{3(1+\omega^{(i)})}$ . Aqui, o parâmetro  $\omega^{(i)}$  significa a equação de estado da  $i$ -ésima componente do fluido (com a pressão  $p^{(i)}$ ), e o subscrito zero denota os valores no momento da medição [117–119].

O ato de introduzir a métrica homogênea e isotrópica (3.1) na ação funcional (3.2) resulta em uma forma simplificada de Arnowitt–Deser–Misner (ADM) como segue [6]

$$S_{ADM} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{3\mathcal{V}_k}{8\pi G} \left( kNa - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \mathcal{V}_k Na^3 \rho(t) \right], \quad (3.3)$$

onde

$$\mathcal{V}_k = \int_{\Sigma} dr d\theta d\phi \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (3.4)$$

é o volume espacial da hipersuperfície tipo-espaço  $(\Sigma, h)$  e  $k = 0, \pm 1$  é a constante de curvatura. Para que as seções tipo-espaço, denotada por  $\Sigma$ , possuam um volume finito, assume-se que ambos são compactos e sem contornos [120–122].

A lagrangiana que corresponde a ação mencionada (3.3) é

$$L_{ADM} = \frac{3\mathcal{V}_k}{8\pi G} \left( kNa - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \mathcal{V}_k Na^3 \rho(t) \quad . \quad (3.5)$$

Como resultado, a hamiltoniana ADM correspondente é escrita na forma:

$$H_{ADM} = N \left[ \frac{2\pi G \pi_a^2}{3\mathcal{V}_k a} + \frac{3\mathcal{V}_k k a}{8\pi G} - \mathcal{V}_k a^3 \rho \right] \quad , \quad (3.6)$$

onde

$$\pi_a = -\frac{3\mathcal{V}_k a \dot{a}}{4\pi G N} \quad , \quad (3.7)$$

é o momento conjugado do fator de escala. O vínculo hamiltoniano será

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi G \pi_a^2}{3\mathcal{V}_k a} + \frac{3\mathcal{V}_k k a}{8\pi G} - \mathcal{V}_k a^3 \rho = 0 \quad , \quad (3.8)$$

ou equivalentemente

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad , \quad (3.9)$$

que é, na verdade, a equação de Friedmann. Na equação (3.9), como é habitual, estabelecemos o parâmetro de Hubble como a razão da derivada temporal do fator de escala e do próprio fator de escala, denotado como  $H = \dot{a}/a$ , onde o ponto denota derivada no tempo.

Supondo um Universo repleto de uma mistura de poeira não interagente  $\rho^{(m)}$ , radiação  $\rho^{(r)}$  e energia de vácuo  $\rho^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ , a densidade de energia total seria igual a:

$$\rho = \sum_i \rho_0^{(i)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega^{(i)})} = \rho_0^{(m)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \rho_0^{(r)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \rho_0^{(\Lambda)} \quad , \quad (3.10)$$

onde  $\omega^{(i)}$  são os parâmetros das equações de estado dos fluidos perfeitos mencionados ( $i = m, r, \Lambda$ ) e  $\rho_0^{(i)}$  são a densidade de energia dos fluidos no momento da medição quando o fator de escala é  $a_0$ . Além disso, o hamiltoniano ADM (3.6) nos dá a equação de Raychaudhuri no *gauge comóvel*,  $N = 1$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i \rho_0^{(i)} (1 + 3\omega^{(i)}) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega^{(i)})} \quad . \quad (3.11)$$

Embora o hamiltoniano (3.6) dependa do volume espacial  $\mathcal{V}_k$ , as equações de campo (3.9) e (3.11) não dependem do volume do espaço. Isto está relacionado com o fato de que as equações de Einstein, apresentadas como equações diferenciais parciais, são locais e por isso não são afetadas pela geometria não-local, ou seja, pela topologia do espaço-tempo. A equação (3.9) é geralmente reescrita como  $\Omega + \Omega^{(k)} = 1$ , onde os parâmetros densidades de energia são definidos como:

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2} \quad \text{e} \quad \Omega^{(k)} \equiv -\frac{k}{H^2 a^2} \quad , \quad (3.12)$$

que são parâmetros observacionais. Assim, escrevemos a equação de Friedmann (3.9) em termos dos parâmetros de densidade (3.12) atuais, na forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_0^{(m)} \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_0^{(r)}(t_0) \frac{a_0^4}{a^4} + \Omega_0^{(\Lambda)} + \Omega_0^{(k)} \frac{a_0^2}{a^2} \quad , \quad (3.13)$$

onde  $H_0$  é o valor atual do parâmetro Hubble. Além disso,  $\Omega_0^{(m)}$ ,  $\Omega_0^{(r)}$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)}$  denotam os parâmetros de densidade associados à matéria, radiação e constante cosmológica, respectivamente. Estimativas com base em dados observacionais para estes parâmetros cosmológicos, são fornecidas na referência [123], com os seguintes valores:  $\Omega_0^{(m)} = 0,3111 \pm 0,0056$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,6889 \pm 0,0056$ ,  $\Omega_0^{(k)} = 0,0005 \pm 0,004$  e  $H_0 = 67,27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Para uso posterior, vamos obter o valor presente do parâmetro de desaceleração  $q_0$ , definindo na forma  $q \equiv -\ddot{a}/(aH^2)$ :

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[ \Omega_0^{(m)} + 2\Omega_0^{(r)} - \Omega_0^{(\Lambda)} \right] \quad . \quad (3.14)$$

Antes da proposta de uma quantidade, denominada energia escura ser apresentado, acreditava-se que todos os valores viáveis de  $\omega^{(i)}$  eram positivos e a expansão cósmica estava, portanto, desacelerando. Conforme a equação (3.14), se a constante cosmológica  $\Lambda$ , estiver ausente ou for negativa, então  $q$  é obviamente positivo, e a expansão do Universo irá desacelerar.

### 3.2 Idade do Universo

A idade do Universo  $t_0$ , pode ser calculada através da equação [124]:

$$t_0 = \int_0^1 \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}H(\tilde{a})} \quad , \quad (3.15)$$

onde usamos o fator de escala sem dimensão  $\tilde{a} = a/a_0$ . A expressão de  $H(\tilde{a})$  é obtida usando a equação (3.13).

Em geral, a idade do Universo, (3.15), deve ser calculada numericamente. Por exemplo, se  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$  e  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$ , o valor numérico derivado da integral (3.15) é  $t_0 = 0,964 \times H_0^{-1}$ . Para um Universo plano e ignorando a radiação, pode ser calculado analiticamente:

$$t_0 = \frac{2 \log \left( \frac{\sqrt{\Omega_0^{(\Lambda)}} + \sqrt{\Omega_0^{(m)} + \Omega_0^{(\Lambda)}}}{\sqrt{\Omega_0^{(m)}}} \right)}{3H_0 \sqrt{\Omega_0^{(\Lambda)}}} \quad . \quad (3.16)$$

Assumindo  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$  em (3.16), encontramos o valor  $t_0 = 0,964 \times H_0^{-1}$ . Este resultado demonstra que o pequeno valor atual da densidade de radiação tem pouco efeito nos resultados, justificando a sua ausência em algumas equações. Usando  $t_H = H_0^{-1} = 14,5 \text{ Gyr}$ , temos  $t_0 = 13,978 \text{ Gyr}$ .

### 3.3 Evolução do fator de escala

A equação de Friedmann (3.13), pode ser escrita em termos do fator de escala adimensional  $\tilde{a} = a/a_0$  (Por simplicidade, removeremos o *tilde* do fator de escala normalizado):

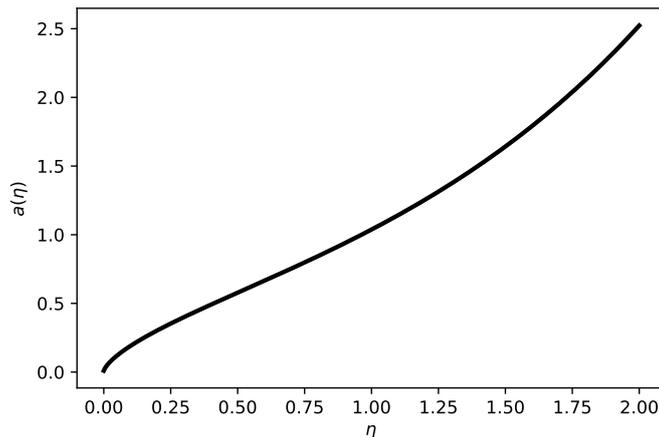
$$\frac{da}{d\eta} = \left[ \frac{\Omega_0^{(m)}}{a} + \frac{\Omega_0^{(r)}}{a^2} + \Omega_0^{(\Lambda)} a^2 + \Omega_0^{(k)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.17)$$

onde usamos o tempo adimensional  $\eta$  definido por

$$d\eta = \frac{dt}{t_H}, \quad (3.18)$$

com  $t_H \equiv H_0^{-1}$ . O tempo adimensional torna-se importante porque as quantidades serão apresentadas em termos de  $H_0$  e não há preocupação com o seu valor exato.

Figura 5 – O comportamento do fator de escala em relação  $\eta$ . Temos assumido  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$  e  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$ .



Fonte: O autor (2024)

Na Figura 5 temos o comportamento do fator de escala em função de  $\eta$ . Observamos que o Universo expandiu de forma desacelerada (curva com concavidade para baixo) e a partir de um dado instante, passou a expandir aceleradamente (curva com a concavidade para cima). Podemos obter por meio de um cálculo numérico este tempo de transição de uma expansão desacelerada para uma expansão acelerada,  $\eta_{trans}$ . Por exemplo, com os mesmos valores dos parâmetros de densidade:  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$  e  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$  encontramos  $\eta_{trans} = 0,524$  e o seguinte valor para o parâmetro de desaceleração  $q_0 = -0,549$ , obtido da equação (3.14).

### 3.4 Parâmetros observacionais em CC

Descreveremos agora uma forma de comparar o modelo de FLRW com os dados observacionais, por meio de medidas de distâncias no Universo em expansão [125]. Uma importante medida de distância, é chamada *distância comóvel*, que possui a característica de permanecer fixa com a expansão do Universo. Dessa forma, podemos calcular a distância que a luz poderia

ter percorrido (na ausência de interação) desde  $t = 0$ . Em um tempo  $dt$ , a luz viaja uma distância comóvel  $dx = c dt/a$ , então a distância comóvel total  $d_t$ , que a luz poderia ter percorrido é:

$$d_t \equiv \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} . \quad (3.19)$$

A razão pela qual essa distância é tão importante é que nenhuma informação poderia ter se propagado por uma distância maior (considerando o tamanho comóvel) do que  $d_t$  desde o início dos tempos. Portanto, regiões separadas por distâncias maior que  $d_t$  não estão causalmente conectadas. Podemos pensar em  $d_t$ , que está aumentando monotonicamente, como uma variável temporal e chamar isto de *tempo conforme*. Do mesmo modo que o tempo  $t$ , a temperatura  $T$ , o *redshift*  $z$ , e o fator de escala  $a$ ,  $d_t$  pode ser usado para fornecer informações da evolução do Universo.

Outra distância comóvel importante é aquela entre um emissor distante e nós. Neste caso, a distância comóvel até um objeto é:

$$d_c(a) = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{c da'}{a'^2 H(a')} . \quad (3.20)$$

Fizemos a mudança na integração sobre  $t'$  para  $a'$ , que traz o fator adicional de  $da/dt = aH$  no denominador.

Outra maneira de inferir distâncias em astronomia é medir o fluxo de um objeto de luminosidade conhecida. Portanto, esquecendo a expansão, o fluxo observado  $F$ , a uma distância  $d$ , de uma fonte de luminosidade conhecida  $L$ , é:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} , \quad (3.21)$$

desde que a luminosidade total por meio de uma casca esférica com área  $4\pi d^2$  seja constante. Para generalizar este resultado para um Universo em expansão, considerando a distância comóvel, desta vez com a fonte centrada na origem, o fluxo observado é:

$$F = \frac{L(d_c)}{4\pi d_c^2} , \quad (3.22)$$

onde  $L(d_c)$  é a luminosidade considerando uma casca esférica (comóvel) com raio  $d_c$ . Para simplificar ainda mais, assumiremos que os fótons são todos emitidos com a mesma energia. Então,  $L(d_c)$  é esta energia multiplicada pelo número de fótons passando através de uma casca esférica (comóvel) por unidade de tempo. Em um intervalo de tempo fixo, os fótons viajam mais longe na escala comóvel nos primeiros momentos do que nos últimos momentos, uma vez que a distância física associada nos primeiros momentos é menor. Portanto, o número de fótons cruzando uma casca no intervalo de tempo fixo irá ser menor hoje do que na emissão, menor por um fator de  $a$ . Semelhantemente, a energia dos fótons hoje irá ser menor hoje do que na emissão, devido à expansão. Portanto, a energia por unidade de tempo passando por uma casca comóvel de uma distância  $d_c$  (ou seja, nossa distância) da fonte irá ser um fator de  $a^2$  menor que a luminosidade da fonte. O fluxo que observamos irá ser portanto:

$$F = \frac{La^2}{4\pi d_c^2} , \quad (3.23)$$

onde  $L$  é a luminosidade na fonte. Podemos manter a equação (3.21) em um Universo em expansão, desde que definamos a *distância luminosidade*:

$$d_L \equiv \frac{d_c}{a} \quad . \quad (3.24)$$

A distância luminosidade pode ser usada para encontrar a *magnitude aparente*  $m$ , que por razões históricas são dadas em uma escala logarítmica, definida como segue [124]:

$$m \equiv -\frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{F}{F_0} \right) \quad , \quad (3.25)$$

onde  $F$  é o fluxo observado e  $F_0$  é algum fluxo de referência para que  $m = 0$ . Deve-se considerar que as observações são feitas por meio de filtros que selecionam uma determinada porção do espectro emitido. Portanto, a medida da magnitude aparente  $m$  depende do filtro usado. Além disso, deve-se também corrigir  $m$  pelo efeito da absorção interestelar de tal forma que seu valor realmente depende apenas de quão longe a fonte está e não da matéria existente ao longo da linha de visão.

A *magnitude absoluta*  $M$ , é a magnitude aparente hipotética de um objeto como se ele estivesse em uma distância de 10 pc. Desde que  $F \propto 1/d_L^2$ , usando a equação (3.25) a magnitude absoluta pode ser escrita como:

$$M \equiv -\frac{5}{2} \log_{10} \left[ \frac{F}{F_0} \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right)^2 \right] = m - 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) - 25 \quad , \quad (3.26)$$

onde na última igualdade introduzimos o Megaparsec (Mpc) como uma escala de distância mais apropriada para cosmologia. A diferença da magnitude aparente e absoluta, define o *módulo de distância*  $\mu = m - M$ .

Considerando as equações (3.20), (3.24) e (3.26), lembrando também que  $a = 1/(1+z)$ , podemos calcular a magnitude aparente  $m$ , em função do *redshift*, da seguinte forma:

$$m = 5 \log_{10} \left( \frac{(1+z)}{1 \text{ Mpc}} \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')} \right) + 25 + M \quad , \quad (3.27)$$

Substituindo o valor de  $H(z')$ , dado pela equação (3.13), temos:

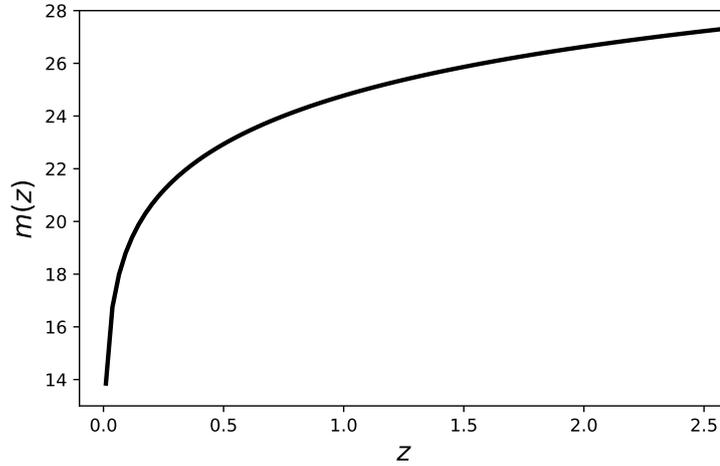
$$m = 5 \log_{10} \left( \frac{(1+z)}{1 \text{ Mpc}} \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\left( \Omega_0^{(k)} (1+z')^2 + \Omega_0^{(m)} (1+z')^3 + \Omega_0^{(r)} (1+z')^4 + \Omega_0^{(\Lambda)} \right)^{1/2}} \right) + 25 + M \quad . \quad (3.28)$$

Os conjuntos de dados obtidos a partir de observações de supernovas do tipo Ia (SNIa) são especialmente úteis para a análise de modelos cosmológicos, uma vez que fornecem evidências importantes da expansão acelerada do Universo. Para se obter os melhores resultados com dados SNIa, começamos comparando a magnitude aparente observada, criada pelas detecções SNIa, com o valor teórico. Para esta investigação, usamos a amostra Pantheon, um conjunto de dados SNIa atual incluindo 1048 módulos de distância em vários *redshifts* na faixa  $0,01 < z < 2,26$  [126].

As Figuras 6 e 7 foram construídas através da equação (3.28), apresentando a variação da magnitude aparente  $m$ , com relação ao *redshift*  $z$ , para valores de  $\Omega_m(t_0) = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda(t_0) = 0.7$ ,  $\Omega_r(t_0) = 0.00001$  e  $H_0 = 67.27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Essas figuras possuem o Pantheon Survey com o diagrama padrão de Hubble de SNIa e magnitude absoluta  $M = -19.36$  [127].

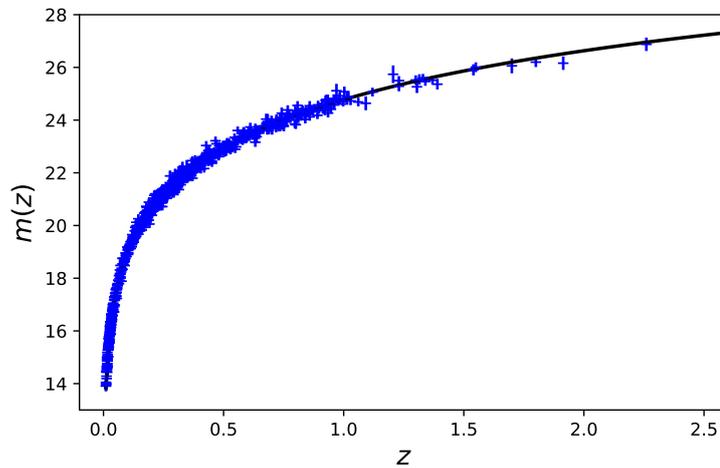
O parâmetro de Hubble, como já definido anteriormente, expressa a taxa com que o Universo se expande em um dado  $z$ . Este parâmetro carrega em si muitas informações características do

Figura 6 – Evolução da magnitude aparente  $m$ , em relação ao *redshift*  $z$ , obtido da equação (3.28), considerando  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$ ,  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$  e  $H_0 = 67,27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , e a magnitude absoluta de banda-B de um fiducial SNIa é  $M = -19,36$  [127].



Fonte: O autor (2024)

Figura 7 – Evolução da magnitude aparente  $m$ , em relação ao *redshift*  $z$ , obtido da equação (3.28), considerando  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$ ,  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$  e  $H_0 = 67,27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , e a magnitude absoluta de banda-B de um fiducial SNIa é  $M = -19,36$  [127]. As medições do módulo de distância que usamos são tiradas da referência [126].

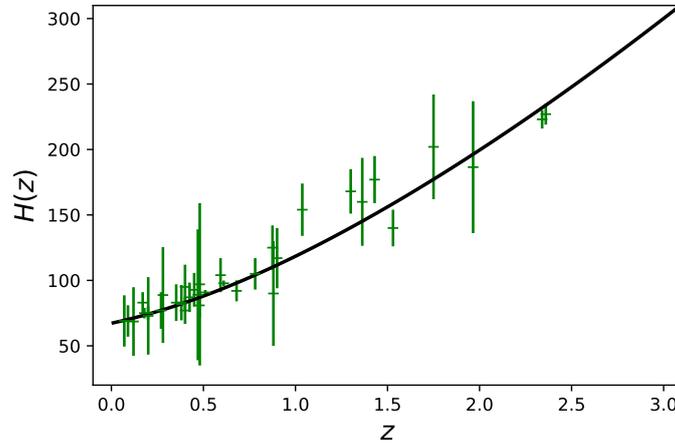


Fonte: O autor (2024)

modelo cosmológico [129]. A determinação de  $H(z)$  em diferentes pontos da evolução do Universo pode nos auxiliar a melhor entender a dinâmica de sua expansão, além disso, tem se mostrado bastante útil na realização de testes cosmológicos.

Existem diferentes métodos para medir  $H(z)$  e um deles utiliza diferença de idade de galáxias [130, 131]. Resultados de outros três métodos são apresentados na Tabela 1 de [128] para 36 medidas de  $H(z)$ : 31 dessas medidas são determinados usando a técnica cronométrica

Figura 8 – A evolução de  $H(z)$  em relação ao *redshift*  $z$  com barras de erro. A linha preta denota a dinâmica do parâmetro Hubble obtido da equação (3.13), considerando  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$ ,  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$  e  $H_0 = 67,27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . As medições dos parâmetros do Hubble que usamos são retiradas da Tabela 1 da referência [128].



Fonte: O autor (2024)

cósmica, três medições correlacionadas são do sinal BAO (Baryon Acoustic Oscillations) radial na distribuição da galáxia, e as duas últimas em  $z = 2,34$  e  $2,36$  são medidas do sinal BAO na distribuição  $\text{Ly}\alpha$  forest isolada ou correlacionadas cruzadamente com QSOs (Quasi-Stellar Objects).

Na Figura 8, plotamos no mesmo gráfico, o parâmetro H de Hubble em relação ao *redshift*  $z$ , com barra de erros, retiradas da Tabela 1 de [128] e o comportamento de  $H(z)$ , obtido da equação (3.13), com a substituição dos valores  $\Omega_0^{(m)} = 0,3$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,7$ ,  $\Omega_0^{(r)} = 0,00001$  e  $H_0 = 67,27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

### 3.5 Método estatístico e análise bayesiana

Em cosmologia é frequente o uso de métodos estatísticos, que permitem fazer comparações entre as previsões teóricas e os dados experimentais ou observacionais [132]. O método empregado é conhecido como estatística bayesiana, tendo sua origem na obra póstuma de Bayes (1763). Durante os anos 80, quando a utilização de técnicas numéricas se tornou mais frequente, a estatística bayesiana se tornou amplamente empregada e é hoje a interpretação predominante em diversos contextos, incluindo a Física [133].

A interpretação bayesiana afirma que a probabilidade é uma medida do grau de confiança ou plausibilidade sobre um evento, hipótese ou parâmetro, tratado cada um desses da mesma maneira. Dessa forma, uma distribuição de probabilidade pode ser atribuída a qualquer hipótese teórica ou parâmetro físico de interesse, que passa a ser determinado pelos dados e observações.

Outra característica da estatística bayesiana é a estimação de parâmetros e suas incertezas, permitindo comparar uma curva ou previsão teórica para um observável e os dados vindos das observações. A técnica amplamente utilizada na Física para a estimação de parâmetros é a *técnica dos mínimos quadrados ou do (qui-quadrado)  $\chi^2$*  [132], onde os  $\bar{m}$  parâmetros de  $\alpha_{\bar{m}}$  de um modelo são determinados pelos valores  $\alpha_{min.}$  que minimizam a expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left( \frac{y(\{\alpha_{\bar{m}}\}, z) - y_i^{obs.}}{\sigma_i} \right)^2, \quad (3.29)$$

através do sistema de  $\bar{m}$  equações  $\partial \chi^2(\alpha) / \partial \alpha_{\bar{m}} = 0$ . Aqui  $\{z_i, y_i^{obs.}\}$  são os  $\bar{N}$  dados observacionais/experimentais, com as barras de erro  $\sigma_i$  que servem como peso (incerteza) de cada medida de  $y_i^{obs.}$ , comparados a curva teórica nos pontos  $y^{teo.} = y(\{\alpha_{\bar{m}}\}, z)$ .

A minimização da equação (3.29) é obtida variando os parâmetros do modelo. Esta técnica baseia-se na premissa de que o modelo é qualitativamente correto, sendo ajustado para minimizar (via  $\chi^2$ ) as diferenças entre o  $y^{teo.}$  e o  $y_i^{obs.}$ . Tais diferenças existem devido apenas a flutuações estatísticas.

Por meio de  $\chi^2$  definimos a *likelihood* (verossimilhança) [134], da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(\alpha_{\bar{m}}, z) = \mathcal{C} e^{-\frac{1}{2} \chi^2(\alpha_{\bar{m}}, z)}, \quad (3.30)$$

onde  $\mathcal{C}$  é uma constante de normalização. A *likelihood* representa a probabilidade de ter um conjunto de dados de certo modelo cosmológico. Estamos interessados no contrário, ou seja, na probabilidade de ter um certo modelo cosmológico dado um conjunto de dados. Isto é chamado *probabilidade a posteriori*. Se não há uma razão *a priori* pela qual alguns valores dos parâmetros sejam preferidos com relação a outros, então a *likelihood* e a probabilidade a posteriori são iguais. Assim, os valores  $\alpha_{min.}$  que minimizam  $\chi^2$  são os valores prováveis da *likelihood*.

As equações (3.29) e (3.30) podem ser generalizadas, considerando que as medidas são correlacionadas e a estimativa da incerteza de uma afeta a da outra, para obter a seguinte *likelihood*

$$\mathcal{L}(\alpha_{\bar{m}}, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\bar{N}/2} |\det C|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left( y_i^{obs.} - y^{teo.} \right) C_{ij}^{-1} \left( y_j^{obs.} - y^{teo.} \right) \right], \quad (3.31)$$

onde  $C_{ij}$  é uma *matriz de covariância* construída a partir dos dados observacionais  $y_i^{obs.}$  e do modelo por  $y^{teo.} = y(\{\alpha_{\bar{m}}\}, z)$ , e seus elementos diagonais são as barras de erro  $\sigma_i^2$  em cada medida [135].

Além dos valores prováveis dos parâmetros, que maximizam a *likelihood*, há também a forma tradicional de apresentar os *intervalos de confiança* nos parâmetros, os quais são definidos por meio de uma analogia à propriedade da densidade de probabilidade gaussiana unidimensional  $p(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ , centrada em  $x_0$  e com variância  $\sigma$ , no qual a probabilidade total  $P = \int p(x) dx$  contida num intervalo centrado em  $x_0$  será:

$$\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} p(x) dx = 68\% \quad , \quad \int_{x_0-2\sigma}^{x_0+2\sigma} p(x) dx = 95\% \quad , \quad \int_{x_0-3\sigma}^{x_0+3\sigma} p(x) dx = 99\% \quad , \quad (3.32)$$

que dão origem aos nomes *regiões de confiança* de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  no espaço  $\bar{m}$ -dimensional dos parâmetros  $\alpha_{\bar{m}}$  que contém a quantidade específica de probabilidade. As regiões de confiança são medidas da incerteza nos parâmetros que influenciam o experimento, que são variáveis aleatórias associadas a uma função densidade de probabilidade, que, por sua vez, pode ser o alvo de uma integração ou *marginalização* em um, ou mais parâmetros, a qual é a integração da função densidade de probabilidade sobre todos os valores possíveis do parâmetro indesejado.

### 3.5.1 Restrições para $\Omega_0^{(m)}$ e $\Omega_0^{(\Lambda)}$

Vamos agora exemplificar a análise bayesiana para o modelo cosmológico de FLRW. Dado que conhecemos a forma teórica do modelo cosmológico subjacente, consideramos ajustar diretamente o módulo de distância da equação (3.28). Por simplicidade, assumiremos que  $\Omega_0^{(r)}$  e  $\Omega_0^{(k)}$  são nulos. Dessa forma, temos:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{(1+z) c}{1 \text{ Mpc } H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\left( \Omega_0^{(m)} (1+z')^3 + \Omega_0^{(\Lambda)} \right)^{1/2}} \right) + 25 \quad . \quad (3.33)$$

Adotamos os valores iniciais  $\Omega_0^{(m)} = 0,27$ ,  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,73$  e  $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  em (3.33). Em seguida utilizamos a estatística bayesiana e as ferramentas do cálculo numérico que fornecem os valores dos parâmetros de densidade que melhor ajustam o modelo aos dados observacionais, maximizando a função densidade de probabilidade:

$$p(\{\Omega_0^{(m)}, \Omega_0^{(\Lambda)}\}, z, I) \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right) \propto \mathcal{L}(\{\Omega_0^{(m)}, \Omega_0^{(\Lambda)}\}, z) \quad , \quad (3.34)$$

onde  $I$  representa a informação subjetiva e externa, disponível a priori, e dessa maneira toda a equação está condicionada ao estado de conhecimento ou informação  $I$ . Formalmente, sendo cada medida um evento estatisticamente independente, a *likelihood* é construída pelo produto das probabilidades de cada uma. Dessa forma, a probabilidade total será:

$$p(\{\Omega_0^{(m)}, \Omega_0^{(\Lambda)}\}, z, I) \propto \prod_{i=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(\frac{-\left(\mu(\{\Omega_0^{(m)}, \Omega_0^{(\Lambda)}\}, z_i) - \mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2}\right) p(\Omega_0^{(m)}, \Omega_0^{(\Lambda)}) \quad , \quad (3.35)$$

onde  $\mu_i$  é o módulo de distância para as Supernovas (SN) e  $z_i$  o *redshift* (ver o gráfico da esquerda da Figura 9, adaptado de [136]). Aplicando o procedimento de marginalização, encontramos os valores  $\Omega_0^{(m)} = 0,25$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)} = 0,73$  que melhor ajustam o modelo aos dados observacionais.

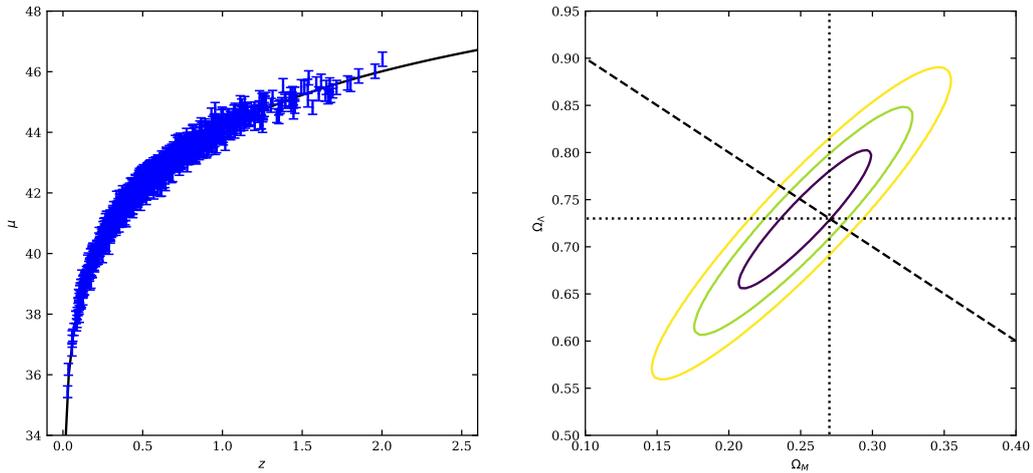
O gráfico da direita na Figura 9, mostram como são os contornos de probabilidade  $1\sigma$  (68,3%),  $2\sigma$  (95,5%) e  $3\sigma$  (99,7%), resultantes da análise bayesiana acima, após aplicar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar as cadeias de Markov Monte Carlo e integrar as cadeias sobre o espaço de parâmetros [136]. Os valores de melhor ajuste estão exatamente no centro das elipses da Figura 9.

Uma das melhores características da análise bayesiana é que, ao mesmo tempo que se estima os parâmetros, verifica-se também a qualidade do ajuste, ou seja, determina se a função ajustada do modelo é verossímil (é necessário que as incertezas tenham sido estimadas corretamente). Isto é feito certificando se o valor do qui-quadrado mínimo ( $\chi_{min.}^2$ ) é próximo do número de graus de liberdade ( $n$ ), dado por  $n = \bar{N} - \bar{m}$ , onde  $\bar{m}$  é o número de parâmetros livres e  $\bar{N}$  o número de dados observacionais.

### 3.5.2 Restrições para $H_0$ e $q_0$

Vamos agora aplicar a análise bayesiana para restringir os valores atuais da constante de Hubble  $H_0$  e do parâmetro de desaceleração  $q_0$ . Consideramos como dados observacionais, os

Figura 9 – Ajuste obtido pela estatística bayesiana para os parâmetros densidades  $\Omega_0^{(m)}$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)}$ . A direita estão os dados observacionais do módulo de distância de SN e a curva que melhor ajusta aos dados. A esquerda está os contornos  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  para os parâmetros densidades  $\Omega_0^{(m)}$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)}$ . As linhas pontilhadas correspondem os valores inicialmente adotados de  $\Omega_0^{(m)}$  e  $\Omega_0^{(\Lambda)}$ . A linha tracejada corresponde ao caso de  $\Omega_0^{(k)} = 0$ , ou seja, um Universo plano.



Fonte: O autor (2024)

1048 valores de magnitude aparente, com relação ao *redshift* de SNIa [126], discutidos no final da seção 3.4.

Nosso modelo teórico é dado pela equação (3.26), com  $M = -19,36$  [127]. Assim, temos

$$m = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25 - 19,36 \quad , \quad (3.36)$$

com a distância luminosidade  $d_L$ , obtida das equações (3.20) e (3.24), resultando:

$$d_L = \frac{1}{a} \int_{t_a}^{t_0} \frac{c \, dt}{a(t)} \quad . \quad (3.37)$$

Uma forma independente do modelo que permite relacionar a evolução do Universo e o tempo, é construída através da expansão em série de Taylor do fator de escala  $a(t)$ . Com o intuito de realizar a integração em (3.37), expandimos o termo  $1/a(t)$  em torno de  $t_0$ , para obter:

$$\frac{1}{a(t)} = 1 - H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad . \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37) e realizando a integral, encontramos:

$$d_L = \frac{c}{a} \left[ (t_0 - t_a) + \frac{H_0}{2}(t_0 - t_a)^2 + \dots \right] \quad . \quad (3.39)$$

Considerando  $a(t) = 1/(1+z)$ , temos de (3.38) a relação

$$z = H_0(t_0 - t_a) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t_0 - t_a)^2 + \dots \quad (3.40)$$

Podemos considerar a seguinte expansão [134]:

$$H_0(t_0 - t_a) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots \quad (3.41)$$

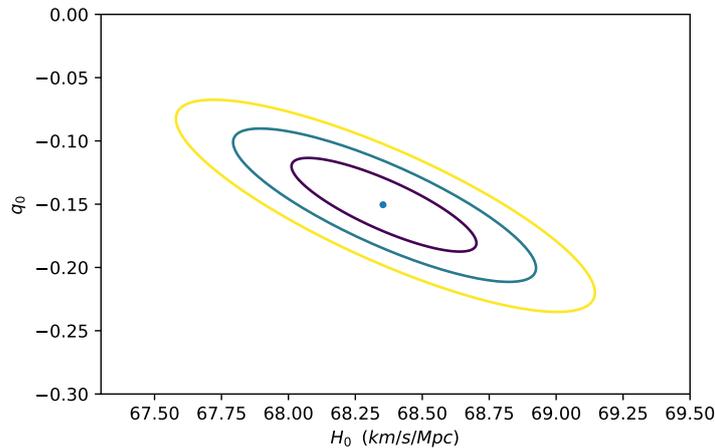
com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  constantes a serem determinadas. Se admitimos  $t_a = t_0$ , devemos ter  $z = 0$ . Com esta condição, o valor de  $\alpha$  fica determinado, que é,  $\alpha = 0$ . Os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  são obtidos pela substituição da expansão (3.41) (considerando até a segunda ordem) em (3.40). Assim, encontramos  $\beta = 1$  e  $\gamma = -(q_0 + 2)/2$ . Portanto, encontramos a distância luminosidade (3.39) em função do *redshift*:

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 - \frac{(1 + q_0)}{2}z^3 + \dots \right] \quad (3.42)$$

Restringindo a expansão (3.42) até segunda ordem e substituindo na expressão da magnitude aparente (3.36), temos:

$$m = 5 \log_{10} \left[ \frac{c}{H_0 \text{ 1Mpc}} \left( z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 \right) \right] + 25 - 19,36 \quad (3.43)$$

Figura 10 – Os contornos  $1\sigma$  (68,3%),  $2\sigma$  (95,4%) e  $3\sigma$  (99,7%), obtidos pela estatística bayesiana, para os parâmetros  $H_0$  e  $q_0$ . Os valores que melhor ajustam o modelo os dados experimentais são:  $H_0 = 68,35 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  e  $q_0 = -0,15$ , indicados por um ponto no centro da elipse. O qui-quadrado mínimo é  $\chi_{min.}^2 = 1116,39$ .



Fonte: O autor (2024)

Utilizamos esta expressão (3.43) e os 1048 dados observacionais [126] para construir a Figura 10 e obter os valores de  $H_0$  e  $q_0$ , que melhor se ajustam aos dados observacionais. Estes valores estão identificados no centro da elipse da Figura 10, indicando  $H_0 = 68,35 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $q_0 = -0,15$  e  $\chi_{min.}^2 = 1116,39$ , com os contornos correspondendo as regiões de confiança  $1\sigma$  (68,3%),  $2\sigma$  (95,4%) e  $3\sigma$  (99,7%). O leitor pode consultar a referência [137], que possui esta mesma análise detalhadamente com código desenvolvido em Python para a obtenção dos valores de melhor ajuste da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração, bem como para a obtenção das curvas de confiança mostradas na Figura 10 e comparar os resultados.

### 3.6 Problema da planura e o modelo inflacionário

O problema da planura está relacionado ao fato do Universo com valor de parâmetro densidade atual,  $\Omega_0 = \Omega_0^{(m)} + \Omega_0^{(\Lambda)} \approx 1$ , equivalente  $\Omega_0^{(k)} \approx 0$ , apresentar-se como algo “não natural”.

Para entender este problema, partiremos da seguinte equação:

$$\dot{\rho}^{(i)} = -3 \left( \rho^{(i)} + p^{(i)} \right) \frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad (3.44)$$

em que (3.44) é obtido da conservação da energia e momento do fluido perfeito, com densidade de energia  $\rho^{(i)}$  e pressão  $p^{(i)} = \omega^{(i)} \rho^{(i)}$ , onde  $i = m, r, \Lambda$ , são as componentes de matéria, radiação e constante cosmológica, respectivamente. Portanto, encontramos os seguintes resultados para densidade de energia [16]:

$$\rho^{(m)} \propto a^{-3} \quad , \quad \text{para } \omega^{(m)} = 0 \quad (\text{matéria}) \quad . \quad (3.45)$$

$$\rho^{(r)} \propto a^{-4} \quad , \quad \text{para } \omega^{(r)} = \frac{1}{3} \quad (\text{radiação}) \quad . \quad (3.46)$$

$$\rho^{(\Lambda)} = \text{constante} \quad , \quad \text{para } \omega^{(\Lambda)} = -1 \quad (\text{constante cosmológica}) \quad . \quad (3.47)$$

Conforme a definição do parâmetro densidade de curvatura (3.12),

$$\Omega^{(k)} \equiv -\frac{k}{H^2 a^2} \quad , \quad (3.48)$$

com valor observacional [123]:

$$\Omega_0^{(k)} = 0,0005 \pm 0,004 \quad . \quad (3.49)$$

Isto significa que  $|\Omega_0^{(k)}| < 1$ . Podemos obter a seguinte relação:

$$|\Omega^{(k)}| = \left| -\frac{k}{H^2 a^2} \right| = \left| -\frac{k}{H^2 a^2} \frac{H_0^2 a_0^2}{H_0^2 a_0^2} \right| = |\Omega_0^{(k)}| \frac{H_0^2}{H^2 a^2} < \frac{H_0^2}{H^2 a^2} \quad , \quad (3.50)$$

onde temos usado  $a_0 = 1$ . Vamos analisar a expressão (3.50) na era de domínio da radiação, com  $\rho^{(r)} \propto a^{-4}$ . Segundo a equação de Friedmann (3.9), escrevemos:

$$H^2 a^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - k \quad . \quad (3.51)$$

Para o caso que o Universo está na fase de domínio da radiação, temos:

$$H^2 a^2 \propto a^{-2} \quad . \quad (3.52)$$

Portanto, a expressão (3.50), torna-se:

$$|\Omega^{(k)}| = |\Omega_0^{(k)}| a^2 \quad . \quad (3.53)$$

Se considerarmos a era de Planck (dominada por radiação),  $z = 10^{32}$  na relação (3.53), encontramos

$$|\Omega^{(k)}| < 10^{-60} \quad . \quad (3.54)$$

O tempo de Planck é o mais distante que podemos extrapolar nossa teoria clássica e  $10^{-60}$  é algo realmente próximo de zero. O problema aqui é que se por alguma razão  $\Omega^{(k)} \sim 10^{-59}$  na era de Planck, então  $\Omega_0^{(k)}$  seria dez vezes maior e em completo desacordo com a observação.

Uma proposta que visa resolver o problema da planura foi apresentada por Alan Guth [9], baseada na seguinte ideia: considere a equação (3.44) e  $H$  constante, ou seja,  $\Omega^{(k)} \propto a^{-2}$ . Assim, se antes da era dominada pela radiação o Universo primitivo experimentou uma fase em que  $H$  é constante, isso poderia explicar por que  $\Omega^{(k)}$  é tão pequeno. Esta fase primordial com  $H$  constante, ou quase constante, é a inflação.

A inflação deve ocorrer em uma fase primordial da evolução, antes da dominação da radiação, para não conflitar com as previsões bem-sucedidas do modelo do Big Bang quente. Veremos quantitativamente como a inflação pode resolver o problema da planura. Suponha que:

$$\frac{|k|}{a_f^2 H_f^2} = \frac{|k|}{a_I^2 H_I^2} e^{-2N} \approx e^{-2N} \quad , \quad (3.55)$$

onde o índice  $I$  denota o início da inflação e o índice  $f$  o final da inflação, com o fator de escala crescendo por um fator  $e^N$ . O número  $N$  é chamado número de *e-folds*. Portanto, temos:

$$\left| \Omega_0^{(k)} \right| = \frac{|k|}{H_0^2} = \frac{|k|}{a_f^2 H_f^2} \left( \frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 \approx e^{-2N} \left( \frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 \quad . \quad (3.56)$$

Portanto, para se ter  $|\Omega_0^{(k)}| < 1$ , precisamos que

$$\frac{a_f H_f}{H_0} < e^N \quad . \quad (3.57)$$

Para estimar a razão no lado esquerdo de (3.57), supomos que a inflação termine na época de domínio da radiação. Então, de acordo com (3.13), temos:

$$H_f^2 \approx H_0^2 \frac{\Omega_0^{(r)}}{a^4} \quad , \quad (3.58)$$

e assim

$$a_f \approx \left( \Omega_0^{(r)} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_0}{H_f}} \quad . \quad (3.59)$$

Após substituir (3.59) em (3.57), encontramos

$$e^N > \left( \Omega_0^{(r)} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_f}{H_0}} = \left( \Omega_0^{(r)} \right)^{1/4} \left( \frac{\rho_f}{\rho_0} \right)^{1/4} \quad , \quad (3.60)$$

onde  $\rho_f$  é a densidade de energia no final da inflação, mas uma vez que  $H$  é constante durante a fase de inflação, então  $\rho_f$  é denominado apenas de densidade de energia da inflação.

Para a escala de Planck,  $\rho = 5,1 \times 10^{96} \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_0 \propto 10^{-25} \text{ kg/m}^3$  e  $\Omega_0^{(r)} \propto 10^{-5}$  [16], temos

$$e^N > 10^{29} \quad \Rightarrow \quad N > 68 \quad . \quad (3.61)$$

Conforme a equação (3.55), também podemos obter o número de *e-folds* pela relação,

$$N = \ln \left( \frac{a_f}{a_I} \right) \quad . \quad (3.62)$$

Usamos o fato que,  $H_I = H_f = \text{constante}$ , durante a fase inflacionária.

Existe um efeito interessantes e importante que pode ter ocorrido no início do Universo, apenas algumas ordens de magnitude depois do tempo de Planck e diz respeito à dinâmica do Universo primordial.

Alguns modelos da teoria quântica de campos que tentam unificar as interações eletrofracas e fortes, prediz que em temperaturas muito altas, o estado do equilíbrio térmico do campo quântico irá submeter-se a uma transição de fase. Nestes modelos, se ocorrer “super-resfriamento”, pode haver uma importante contribuição do “vácuo”, da forma  $-\Lambda g_{\mu\nu}$ , no qual  $\Lambda \gg 1$  é uma constante positiva, para o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , do campo. Assim, o Universo primordial pode ter passado por uma fase em que a dinâmica era a mesma que ocorreria em um Universo vazio com uma constante cosmológica grande e positiva. Portanto, se esses modelos estiverem corretos, então, como foi sugerido inicialmente por Alan Guth [9], poderia ter havido um regime inflacionário no Universo primordial, onde o Universo era aproximadamente uma solução de Sitter (deS) (que discutiremos no capítulo 4) e se expande muito rapidamente.

## 4 O ESPAÇO-TEMPO DE DE SITTER

Neste capítulo abordaremos o espaço-tempo de de Sitter (deS). Uma descrição inicial da geometria clássica, é apresentada na seção 4.1, para o espaço-tempo  $d$ -dimensional. Em seguida, na seção 4.2 mostramos a relação da constante cosmológica com o comprimento de deS. Abordamos na seção 4.3 as métricas para os espaços de deS: aberto, fechado e plano. Por último, na seção 4.4 discutimos a termodinâmica do espaço-tempo de deS.

### 4.1 A geometria clássica do espaço-tempo de deS

A esfera  $d$ -dimensional  $S^d$  de raio  $L$  é definida como o conjunto de todos os pontos  $(X^1, X^2, \dots, X^{d+1})$  no espaço euclidiano  $(d+1)$ -dimensional,  $E^{d+1}$ , com o elemento de linha  $ds^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \dots + (dX^d)^2 + (dX^{(d+1)})^2$ , satisfazendo

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^d)^2 + (X^{(d+1)})^2 = L^2 \quad . \quad (4.1)$$

De forma análoga, vamos definir o espaço-tempo de deS  $d$ -dimensional ( $deS^d$ ) com escala de comprimento  $L$ , como o conjunto de todos os pontos  $(X^0, X^1, \dots, X^d)$  no espaço-tempo minkowskiano  $(d+1)$ -dimensional,  $M^{d,1}$ , que corresponde ao espaço

$$ds^2 = - (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \dots + (dX^d)^2 \quad , \quad (4.2)$$

satisfazendo

$$- (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^d)^2 = L^2 \quad . \quad (4.3)$$

Neste caso, renomeamos  $X^{d+1}$  por  $X^0$  e o tornamos coordenada temporal. Assim, o espaço-tempo de deS é uma espécie de versão minkowskiana da esfera imersa no espaço-tempo de Minkowsk.

Esta mudança de sinal faz toda a diferença: em um dado  $X^0$ , as coordenadas espaciais  $(X^1, X^2, \dots, X^d)$  forma uma esfera  $(d-1)$ -dimensional  $S^{d-1}$  definida por  $(X^1)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^d)^2 = L^2 + (X^0)^2$ . Topologicamente, o espaço-tempo de deS é então  $R \times S^{d-1}$ : com a coordenada temporal  $X^0$  indo de  $(-\infty)$  à  $(+\infty)$ , o raio  $\sqrt{L^2 + (X^0)^2}$  de  $S^{d-1}$  iniciando no infinito, contraindo a um valor mínimo  $L$ , e então expandindo novamente para o infinito. No plano  $(X^0 - X^d)$ , temos uma hipérbola, e então  $deS^d$  pode também ser considerado um hiperboloide de rotação.

### 4.2 Espaços maximamente simétricos

Conforme a teoria geral de espaços maximamente simétricos [124], o tensor de curvatura de Riemann  $R_{abcd}$  deve ser dado por

$$R_{abcd} = K (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad , \quad (4.4)$$

onde  $K$  é uma constante (Aqui, os índices latinos tomam valores no intervalo  $a = 0, 1, \dots, d-1$ ). Considerando que nossas coordenadas em  $deS^d$  possuam dimensões de comprimento, e que  $g_{ab}$  é definido para ser sem dimensão. Então, por análise dimensional, devemos ter:

$$R_{abcd} = \frac{1}{L^2} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad . \quad (4.5)$$

O tensor de Ricci, o escalar de curvatura e o tensor de Einstein, são obtidos pela contração de índices em (4.5). Assim, temos

$$\begin{aligned} g_{ae}R^e{}_{bcd} &= \frac{1}{L^2} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad , \\ g^{ac}g_{ae}R^e{}_{bcd} &= \frac{1}{L^2} (g^{ac}g_{ac}g_{bd} - g^{ac}g_{ad}g_{bc}) \quad , \\ \delta_e^c R^e{}_{bcd} &= \frac{1}{L^2} (\delta_a^a g_{bd} - \delta_b^a g_{ad}) \quad , \\ R^c{}_{bcd} &= \frac{1}{L^2} (dg_{bd} - g_{bd}) \quad , \\ R_{bd} &= \frac{(d-1)g_{bd}}{L^2} \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

O escalar de curvatura será

$$R = g^{bd}R_{bd} = \frac{(d-1)}{L^2} g^{bd}g_{bd} = \frac{(d-1)}{L^2} \delta_b^b = \frac{d(d-1)}{L^2} \quad . \quad (4.7)$$

Por fim, o tensor de Einstein

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -\frac{(d-1)(d-2)g_{ab}}{2L^2} \quad . \quad (4.8)$$

Observando que as equações (4.5)–(4.8) são igualdades entre tensores, eles são válidos em todos os sistemas de coordenadas.

Constatamos da equação (4.8) que o espaço-tempo de deS é uma solução das equações de campo de Einstein  $G_{ab} = -\Lambda g_{ab}$  [16], com uma constante cosmológica positiva dada por

$$\Lambda = \frac{(d-2)(d-1)}{2L^2} \quad . \quad (4.9)$$

Para  $d = 4$ , temos  $\Lambda = 3/L^2$ .

Na presença da constante cosmológica, a equação de Friedmann (3.9) passa a ser escrita como:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad . \quad (4.10)$$

Na ausência de matéria/energia ordinárias ( $\rho = 0$ ), as soluções de (4.10) dependem dos valores de  $k$ , ou seja,  $k = 0, \pm 1$ . Assim, temos

$$a(t) = e^{Ht} \quad , \quad \text{para } (k = 0) \quad , \quad (4.11)$$

$$a(t) = \cosh(Ht) \quad , \quad \text{para } (k = +1) \quad , \quad (4.12)$$

$$a(t) = \sinh(Ht) \quad , \quad \text{para } (k = -1) \quad , \quad (4.13)$$

onde  $H = \sqrt{\Lambda/3}$  é o parâmetro de Hubble. Portanto, a métrica de FLRW (3.1) como solução

das equações de campo de Einstein na presença de  $\Lambda$ , é escrita na forma:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad \text{para } (k = 0) \quad , \quad (4.14)$$

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + \cosh^2(Ht) \left\{ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad \text{para } (k = +1) \quad , \quad (4.15)$$

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + \sinh^2(Ht) \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad \text{para } (k = -1) \quad . \quad (4.16)$$

Podemos resumir estas três métricas, com curvatura constante, na seguinte expressão:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad (4.17)$$

onde  $k = +1, 0, -1$  para os casos fechado, plano e aberto, respectivamente. A forma de  $a(t)$  irá depender do valor de  $k$ , como podemos verificar em (4.14)–(4.16).

Estas equações revelam que o modelo de deS é apenas um modelo obedecendo às equações de Einstein (com  $\Lambda \neq 0$ ) no qual expande continuamente [4].

### 4.3 Espaço-tempo de deS 5-dimensional

Vamos retornar ao espaço-tempo de deS e escrever a métrica (4.2) em  $4 + 1$  dimensões. Assim, temos

$$ds^2 = - (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2 \quad . \quad (4.18)$$

Considerando os seguintes conjuntos de coordenadas planas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , definidas por

$$(\text{plano}) = \begin{cases} X^0 = L \left( \sinh(t) + \frac{r^2 e^t}{2} \right) & , \\ X^i = L r e^t \omega^i & , \\ X^4 = L \left( \cosh(t) - \frac{r^2 e^t}{2} \right) & . \end{cases} \quad (4.19)$$

$$(\text{fechado}) = \begin{cases} X^0 = L \sinh(t) & , \\ X^i = L r \cosh(t) \omega^i & , \\ X^4 = L \sqrt{1-r^2} \cosh(t) & . \end{cases} \quad (4.20)$$

$$(\text{aberto}) = \begin{cases} X^0 = L \sqrt{1+r^2} \sinh(t) & , \\ X^i = L r \sinh(t) \omega^i & , \\ X^4 = L \cosh(t) & . \end{cases} \quad (4.21)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ , com  $\omega^1 \equiv \sin(\theta) \cos(\varphi)$ ,  $\omega^2 \equiv \sin(\theta) \sin(\varphi)$  e  $\omega^3 \equiv \cos(\theta)$ . Substituindo (4.19)–(4.21) em (4.18), encontramos:

$$ds^2 = - dt^2 + e^{\frac{2t}{L}} \left\{ dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad \text{para a Eq. (4.19)} \quad , \quad (4.22)$$

$$ds^2 = - dt^2 + \cosh^2 \left( \frac{t}{L} \right) \left\{ \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{L^2}} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad \text{para a Eq. (4.20)} \quad , \quad (4.23)$$

$$ds^2 = - dt^2 + \sinh^2 \left( \frac{t}{L} \right) \left\{ \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{L^2}} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad \text{para a Eq. (4.21)} \quad , \quad (4.24)$$

onde fizemos a mudança  $t \rightarrow t/L$  e  $r \rightarrow r/L$  em (4.22)–(4.24). Comparando essas métricas com (4.14)–(4.16), observamos que o Universo na presença da constante cosmológica é descrito por uma métrica de deS com o parâmetro de Hubble igual ao inverso do comprimento de deS,  $H = 1/L$ . Portanto, constatamos, por exemplo, que o espaço-tempo de deS plano descreve um Universo expandindo exponencialmente induzido por uma constante cosmológica positiva.

Intuitivamente, um Universo formado por uma flutuação quântica deve ser extremamente pequeno, tendo um tamanho linear de comprimento de Planck. Isso foi inicialmente um grande desafio, pois não estava claro como criar o enorme Universo em que vivemos a partir do modelo cosmológico de um pequeno Universo quântico compacto. Com o surgimento de teorias inflacionárias nas quais o Universo passa por uma fase deS de crescimento exponencial, o dilema desapareceu. Todas as escalas no Universo são expandidas por um fator gigantesco  $\exp(Ht)$  como resultado da inflação, onde  $H$  é a taxa de expansão constante e  $t$  é a duração da fase inflacionária.

#### 4.4 Termodinâmica do espaço-tempo de deS

A noção de temperatura é bem definida no caso do espaço-tempo de deS pois o horizonte de deS também irradia como um corpo negro [138]. Vamos nesta seção escrever as equações de Einstein em uma forma análoga à equação  $T dS - dE = P dV$ , e assim obter a entropia e energia para um espaço-tempo de deS. A partir de agora, usarei unidades com  $\hbar = c = k_B = 1$ .

Considerando a seguinte métrica para espaços-tempos simetricamente esféricos [16]

$$ds^2 = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (4.25)$$

com um  $f(r)$  geral determinado pelas equações de Einstein.

Esta métrica irá satisfazer as equações de Einstein, desde que o tensor momento da fonte tenha a forma:

$$T_t^t = T_r^r = \frac{\varepsilon(r)}{8\pi G} \quad , \quad (4.26)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{\mu(r)}{8\pi G} \quad , \quad (4.27)$$

onde  $\varepsilon(r)$  e  $\mu(r)$  são funções correlacionadas, que serão definidas posteriormente. A igualdade em (4.26) surge de nossa consideração  $g_{00} = (-1/g_{11})$ . A igualdade (4.27) surge da simetria esférica. Para a métrica (4.25), as equações de Einstein reduzem-se às seguintes equações:

$$\frac{1}{r^2}(1-f) - \frac{f'}{r} = \varepsilon \quad , \quad (4.28)$$

$$\nabla^2 f = -2\mu \quad . \quad (4.29)$$

Considerando algum  $\varepsilon(r)$ , a solução de (4.28) é

$$f(r) = 1 - \frac{L}{r} - \frac{1}{L} \int_L^r \varepsilon(r) r^2 dr \quad , \quad (4.30)$$

com  $L$  sendo uma constante de integração e  $\mu(r)$  é fixado por  $\varepsilon(r)$ , fazendo

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = -2\mu \quad . \quad (4.31)$$

Portanto, encontramos

$$\mu(r) = \varepsilon + \frac{r\varepsilon'(r)}{2} . \quad (4.32)$$

Escolhemos a constante de integração  $L$  em (4.30), tal que  $f(r) = 0$  em  $r = L$ , de forma que esta superfície é um horizonte.

Podemos verificar que: (i)  $\varepsilon = 0$  implica  $\mu = 0$  e conduz ao espaço-tempo de Schwarzschild [16]; (ii)  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{constant}$  implica que  $\mu = \varepsilon_0$  e  $T_a^b \propto \text{diag}(\varepsilon_0, \mu_0, \mu_0, \mu_0)$ , e consequentemente

$$f(r) = 1 - \frac{L}{r} - \frac{\varepsilon_0 L^3}{3r} - \frac{\varepsilon_0 r^2}{3} . \quad (4.33)$$

Isto representa o espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter [139] e quando  $L = 0$ , a métrica reduz-se a do espaço-tempo de deS; (iii)  $\varepsilon = (Q^2/r^4) + \varepsilon_0$  conduz  $\mu = -(Q^2/r^4) + \varepsilon_0$  que corresponde a métrica de Reissner-Nordstron-de Sitter [16].

Considerando  $r = L$  na equação (4.28), temos

$$\frac{f'(L)L}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\varepsilon(L)L^2}{2} . \quad (4.34)$$

Agora é possível fazer uma interessante análise desta equação que irá permitir encontrar a entropia e a energia. Multiplicando a equação (4.34) por  $dL$  e usando  $\varepsilon = 8\pi T_r^r$ , temos:

$$\frac{f'(L)}{4\pi} d\left(\frac{4\pi L^2}{4G}\right) - d\left(\frac{L}{2G}\right) = -T_r^r(L)[4\pi L^2] dL . \quad (4.35)$$

O primeiro e o segundo termo no lado esquerdo de (4.35) possuem as seguintes formas:  $T dS$  e  $dE$ , respectivamente. O termo do lado direito tem a estrutura de  $P dV$ , com  $P = -T_r^r$  e  $dV = 4\pi L^2 dL$ , com sua integral  $V = (4\pi/3)L^3$ , chamado de ‘volume’, é o volume relevante para a análise. Portanto, encontramos a expressão para a entropia  $S_{deS}$  e a energia  $E_{deS}$  (quando  $f'(L) > 0$ ) por ser:

$$S_{deS} = \frac{4\pi L^2}{4G} = \frac{A_{deS}}{4G} , \quad (4.36)$$

$$E_{deS} = \frac{L}{2G} = \left(\frac{A_{deS}}{16\pi G}\right)^{1/2} . \quad (4.37)$$

No caso do buraco negro de Schwarzschild com  $L = 2MG$ , a energia (4.37) será  $E = M$ , como é esperado.

Em 1977, Gibbons e Hawking [140] mostraram que a radiação térmica emana do horizonte deS, similar à radiação que emana do horizonte de Schwarzschild e à radiação vista por um observador acelerado. A física subjacente a cada um desses três casos é bem similar: a flutuação quântica produz um par partícula-antipartícula próximo ao horizonte (o horizonte de Schwarzschild, o horizonte de Rindler e o horizonte deS, conforme o caso), com um deles desaparecendo sobre o horizonte, para nunca ser visto pelo observador. O outro membro do par é observado como radiação térmica [124].

A noção de temperatura é bem definida no caso do espaço-tempo deS, uma vez que o horizonte deS também irradia como um corpo negro; temos  $T = 1/2\pi L$ , onde  $L$  é o raio do horizonte deS [138, 141]. Ao longo dos anos, físicos teóricos se aprofundaram nesse contexto, descobrindo uma rica variedade de relações que entrelaçam temperatura termodinâmica, teoria quântica de campos e as propriedades geométricas dos horizontes. Essas descobertas consolidaram o papel da termodinâmica no estudo de sistemas gravitacionais e abriram novos caminhos para explorar a natureza quântica do próprio espaço-tempo [142].

## 5 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA RELATIVIDADE GERAL

Este capítulo é destinado ao processo de quantização canônica da RG. Demonstramos na seção 5.1 a importância da escala de Planck na teoria quântica da gravitação e posteriormente apresentamos, na seção 5.2, o caminho de quantização do superespaço, seguindo o procedimento de Dirac, que consiste em quantizar os vínculos associados a teoria. No mesmo caminho, apresentamos na seção 5.3, a quantização do minisuperespaço. Também discutiremos neste capítulo as interpretações e dificuldades que existem no processo de quantização da gravidade. Como uma alternativa para estas dificuldades, discutimos na seção 5.4 a aproximação WKB para a equação Wheeler-DeWitt.

### 5.1 Escala de Planck

Uma maneira de compreender a escala de Planck e sua importância na gravitação quântica, é através da comparação entre as intensidades das forças gravitacional e forte, mais especificamente, das suas constantes de estrutura fina  $\alpha_G$  e  $\alpha_s$ , respectivamente [143].

O valor da constante de estrutura fina da força forte é aproximadamente igual à unidade,  $\alpha_s \simeq 1$ . No entanto, a constante de estrutura fina gravitacional é muito menor,  $\alpha_G \simeq 10^{-38}$ . Este valor de  $\alpha_G$  é obtido pela expressão:

$$\alpha_G = \frac{G m_{pr}^2}{\hbar c} \quad , \quad (5.1)$$

onde  $m_{pr}$  é a massa do próton [7], com energia da ordem de 1 GeV. Existe uma escala de energia na qual  $\alpha_G \simeq 1$ , que é a *escala de Planck*.

A escala de Planck demonstra ser importante para a consideração da gravitação quântica, e vale a pena analisar brevemente seu significado físico. Para isto, utilizaremos um resultado da Mecânica Clássica, que mostra a velocidade de escape para um corpo sujeito a gravidade, de uma região esférica é:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{R}} \quad . \quad (5.2)$$

Se consideramos em (5.2), a velocidade igual à velocidade da Luz, ou seja,  $v = c$ , temos que o raio dessa região será

$$R = \frac{2Gm}{c^2} \quad . \quad (5.3)$$

Como nenhum corpo consegue viajar com velocidade maior que a velocidade da Luz, temos que esse raio corresponde a uma região com um campo gravitacional que nem mesmo a luz consegue escapar. Denominamos esse raio de, raio de Schwarzschild  $l_s = 2Gm/c^2$ . A gravitação é predominante e importante para a sua estrutura quando o raio é da ordem do raio de Schwarzschild.

Por outro lado, a mesma região se comporta segundo as leis da MQ em escala da ordem do seu comprimento de Compton  $l_c = \hbar/mc$ . Assim, vemos que existe uma massa no qual  $l_s = l_c$ , ou seja, onde a gravitação será tão importante quanto a MQ para descrever a física dessa região. Denominamos essa massa, de massa de Planck  $m_P$ , cuja expressão é:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 2,2 \times 10^{-8} \text{ kg} \quad . \quad (5.4)$$

Temos que para essa massa de Planck  $m_P$ , a energia é da ordem de  $E \simeq 10^{19}$  GeV. Para essa energia temos  $\alpha_G \simeq 1$ . Portanto, a intensidade da força gravitacional é tão necessária, quanto a intensidade da força forte. Logo, devemos ter uma teoria quântica da gravitação para explicar condizentemente todos os processos físicos nessa escala de energia.

Para essa massa de Planck  $m_P$ , definimos o comprimento de Planck  $l_P$ . Substituindo o valor de  $m_P$  da equação (5.4) no raio de Schwarzschild, encontramos:

$$l_P = \frac{G m_P}{c^2} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1,6 \times 10^{-35} \text{ m} \quad . \quad (5.5)$$

Considerando que o universo expande a uma velocidade igual à velocidade da luz  $c$ , temos o tempo de Planck  $t_P$ , definido como:

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 5,4 \times 10^{-44} \text{ s} \quad . \quad (5.6)$$

A Era de Planck corresponde ao intervalo de tempo do universo, que inicia no Big-Bang ( $t = 0$ ) e vai até  $t \leq t_P = 10^{-44}$  s. Neste intervalo de tempo, a teoria da RG deve ser substituída por uma teoria quântica da gravitação, onde as quatro interações fundamentais estão unificadas.

## 5.2 Quantização de Dirac do superespaço

Nosso ponto de partida é o formalismo canônico introduzido nas seções 2.2 e 2.3. Sua característica fundamental é a existência dos vínculos super-hamiltoniano (2.77) e supermomento (2.78). A primeira pergunta que devemos responder é: como conduzir estes vínculos em uma teoria quântica? Em geral, temos duas escolhas: podemos quantizar primeiro os vínculos e então impor aos vínculos condições sobre as funções de onda (quantização de Dirac), ou podemos primeiro eliminar os vínculos para obter um espaço de fase clássico (quantização do espaço de fase reduzido). Os dois métodos foram aplicados a modelos simples e constatados por serem não equivalentes [144–147]. Não há, infelizmente, nenhuma razão convincente para preferir um ou outro para gravidade quântica.

De acordo com o procedimento de quantização de Dirac da gravidade, que corresponde em realizar a quantização dos vínculos (2.77) e (2.78), é necessário seguir os seis passos apresentados adiante [148], para construir com êxito uma teoria quântica da gravitação:

(1) Construir um espaço de estado  $\mathcal{F}$ , constituído de operadores hermitianos  $\hat{\mathcal{H}}$  e de uma coleção adequada de funções de onda. Este espaço corresponde a uma representação apropriada para as variáveis dinâmicas, no qual elas poderão atuar como operadores. Nós consideramos a representação de Schrödinger, no qual os operadores atuam em funções de onda definidas em  $\mathcal{F}$ .

(2) Identificar as variáveis dinâmicas e seus momentos, de tal forma que os parênteses de Poisson são trocados por comutadores, da seguinte maneira:

$$V_3 = \{V_1, V_2\} \rightarrow \hat{V}_3 = -\frac{i}{\hbar} [\hat{V}_1, \hat{V}_2] \quad . \quad (5.7)$$

Os parênteses de Poisson são fundamentais, pois os vínculos (2.77) e (2.78) só poderão ser

utilizados após calcular todos os parênteses de Poisson em que estivermos interessados, ou seja,

$$\{N(x,t), \Pi_N(y,t)\} = \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.8)$$

$$\{N_a(x,t), \Pi^b(y,t)\} = \delta_a^b \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.9)$$

$$\{h_{ab}(x,t), \Pi^{cd}(y,t)\} = \frac{1}{2} \left( \delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c \right) \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.10)$$

$$\{\Phi(x,t), \Pi_\Phi(y,t)\} = \delta^{(3)}(x-y) \quad . \quad (5.11)$$

onde  $\delta^{(3)}(x-y)$  é a função delta. Os comutadores associados as equações (5.8)–(5.11), são:

$$[\hat{N}(x,t), \hat{\Pi}_N(y,t)] = i\hbar \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.12)$$

$$[\hat{N}_a(x,t), \hat{\Pi}^b(y,t)] = i\hbar \delta_a^b \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.13)$$

$$[\hat{h}_{ab}(x,t), \hat{\Pi}^{cd}(y,t)] = i\frac{\hbar}{2} \left( \delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c \right) \delta^{(3)}(x-y) \quad , \quad (5.14)$$

$$[\hat{\Phi}(x,t), \hat{\Pi}_\Phi(y,t)] = i\hbar \delta^{(3)}(x-y) \quad . \quad (5.15)$$

Aqui, as variáveis dinâmicas e os momentos conjugados são promovidos a operadores, como segue:

$$\hat{N} := N \quad , \quad \hat{\Pi}_N := -i \frac{\delta}{\delta N} \quad , \quad (5.16)$$

$$\hat{N}_a := N_a \quad , \quad \hat{\Pi}^a := -i \frac{\delta}{\delta N_a} \quad , \quad (5.17)$$

$$\hat{h}_{ab} := h_{ab} \quad , \quad \hat{\Pi}^{ab} := -i \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \quad , \quad (5.18)$$

$$\hat{\Phi} := \Phi \quad , \quad \hat{\Pi}_\Phi := -i \frac{\delta}{\delta \Phi} \quad . \quad (5.19)$$

(3) Definir os operadores  $\hat{\mathcal{H}}_a$  e  $\hat{\mathcal{H}}$ , atuando no espaço  $\mathcal{F}$ , que corresponde as quatro primeiras classes de vínculos  $\mathcal{H}_a \approx 0$  e  $\mathcal{H} \approx 0$  da teoria clássica.

(4) A implementação das relações (5.16)–(5.19) para que os estados físicos sejam aniquilados pelos seguintes operadores

$$\hat{\Pi}_N \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = -i \frac{\delta}{\delta N} \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = 0 \quad , \quad (5.20)$$

$$\hat{\Pi}^a \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = -i \frac{\delta}{\delta N_a} \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = 0 \quad , \quad (5.21)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a \left( h_{ab}, \Phi, -i \frac{\delta}{\delta h_{ab}}, -i \frac{\delta}{\delta \Phi} \right) \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = 0 \quad , \quad (5.22)$$

$$\hat{\mathcal{H}} \left( h_{ab}, \Phi, -i \frac{\delta}{\delta h_{ab}}, -i \frac{\delta}{\delta \Phi} \right) \Psi[N, N_a, h_{ab}, \Phi] = 0 \quad . \quad (5.23)$$

As primeiras duas equações (5.20) e (5.21) indicam que o estado físico não depende da função *lapse*  $N$ , e do vetor *shift*  $N_a$ . Assim, a função de onda física depende apenas da geometria tridimensional e dos campos de matéria, ou seja,

$$\Psi[h, \Phi] = \langle h, \Phi | \Psi \rangle \quad . \quad (5.24)$$

A respeito disso, DeWitt seguiu a ideia de Wheeler que o funcional de onda deve ser determinado sobre o superespaço de todas as geometrias tridimensionais possíveis. A equação (5.22), ou vínculo momento, é interpretado como as condições no qual um funcional de onda é invariante sob transformações de coordenadas da geometria tridimensional.

(5) Construir o subespaço físico  $\mathcal{F}_{\text{fís}}$  do espaço de estado  $\mathcal{F}$ , que permite definir um produto interno  $\langle \Psi | \Psi' \rangle$  sob o qual os estados  $|\Psi\rangle$  podem ser normalizados e os observáveis são hermitianos. Este espaço  $\mathcal{F}$  constituído com o produto interno normalizado é um espaço de Hilbert.

(6) Interpretar os estados físicos resultantes, bem como os operadores.

Seguindo esses seis passos de quantização canônica da gravidade, que consiste em quantizar os vínculos (2.77) e (2.78), encontramos as seguintes equações [149]:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi[h_{ab}, \Phi] = \left[ -16\pi G \hbar^2 \mathcal{G}_{abcd} \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \frac{\delta}{\delta h_{cd}} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R + \frac{\sqrt{h}}{2} \left( -\frac{\hbar^2}{h} \frac{\delta^2}{\delta \Phi^2} + h^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi + 2V(\Phi) \right) \right] \Psi[h_{ab}, \Phi] = 0 \quad , \quad (5.25)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^a \Psi[h_{ab}, \Phi] = 2i\hbar D_b \frac{\delta \Psi[h_{ab}, \Phi]}{\delta h_{ab}} - i\hbar h^{ab} \nabla_b \Phi \frac{\delta \Psi[h_{ab}, \Phi]}{\delta \Phi} = 0 \quad . \quad (5.26)$$

A equação (5.25) é a famosa equação de Wheeler-DeWitt (WDW) [8, 150]. De acordo com seu próprio relato, DeWitt já havia formulado essa equação no início da década de 1960; veja [151]. Equações da forma  $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ , podem ser encontradas para a gravidade em [152, 153], mas sua forma explícita não é fornecida.

A equação de WDW precisa de uma condição de contorno para ser resolvida, por exemplo, o estado de  $\Psi[h_{ab}, \Phi]$  em um instante inicial. Porém, não há dependência temporal na equação de WDW, de fato não há, nem deve haver, um “tempo”, já que se  $\Psi[h_{ab}, \Phi]$  deve descrever todo o conteúdo do Universo, então o tempo deve “emergir” das soluções, e não ser uma variável independente. Este e outros aspectos próprios da descrição quântica do Universo levaram a uma longa discussão a respeito da condição inicial. A proposta de Hartle-Hawking, aparentemente consistente com a abordagem geral, é que não haja de fato “contorno” nenhum para o Universo [154]. Por outra parte, outras propostas foram colocadas, por exemplo, a de Vilenkin que contempla uma função de onda que se propaga para longe da origem [155].

### 5.3 Quantização de Dirac do minisuperespaço

Aplicaremos o procedimento de quantização de Dirac para modelos de minisuperespaço [107]. Adotando a representação de Schrödinger, temos:

$$\hat{\Phi} := \Phi \quad ; \quad \hat{N} := N \quad ; \quad \hat{N}_a := N_a \quad ; \quad \hat{\gamma}_{ab} := \gamma_{ab} \quad , \quad (5.27)$$

$$\hat{\pi}_{\Phi} := -i\hbar \frac{\partial}{\partial \Phi} \quad ; \quad \hat{\pi}_N := -i\hbar \frac{\partial}{\partial N} \quad ; \quad \hat{\pi}^a := -i\hbar \frac{\partial}{\partial N_a} \quad ; \quad \hat{\pi}^{ab} := -i\hbar \frac{\partial}{\partial \gamma_{ab}} \quad , \quad (5.28)$$

com as seguintes relações de comutação canônicas:

$$[\hat{\Phi}, \hat{\pi}_{\Phi}] = i\hbar \quad ; \quad [\hat{N}, \hat{\pi}_N] = i\hbar \quad ; \quad [\hat{N}_a, \hat{\pi}^a] = i\hbar \quad , \quad (5.29)$$

$$[\hat{\gamma}_{ab}, \hat{\pi}^{cd}] = i\frac{\hbar}{2} \left( \delta_a^c \delta_b^d + \delta_b^c \delta_a^d \right) = i\hbar \delta_{ab}^{cd} \quad . \quad (5.30)$$

Equivalentemente, no lugar de  $(\gamma_{ab}, \Phi, \pi^{ab}, \pi_\Phi)$  podemos usar as coordenadas  $q^A$  e a correspondente representação para os momentos  $p^A$  definido por

$$q^A := \mu^{A\hat{a}\hat{b}} \gamma_{\hat{a}\hat{b}}(t) \quad , \quad (5.31)$$

$$p^A := \mu^{A\hat{a}\hat{b}} \pi_{\hat{a}\hat{b}} \quad , \quad \hat{a}, \hat{b} = 1, 2, 3, \Phi \quad , \quad (5.32)$$

$$\{q^A, p_B\} = \delta_B^A \quad , \quad A, B = 1, 2, 3, \dots, 7 \quad , \quad (5.33)$$

onde  $\gamma_{\hat{a}\hat{b}} := (\gamma_{ab}, \Phi)$ ,  $\pi_{\hat{a}\hat{b}} := (\pi_{ab}, \pi_\Phi)$ ,  $\gamma_{\Phi\Phi}(t) := \Phi(t)$ ,  $\pi_{\Phi\Phi} := \pi_\Phi$  e

$$\mu^{A\hat{a}\hat{b}} = \mu_{A\hat{a}\hat{b}} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \quad \text{para } \hat{a} \neq \hat{b} \neq \Phi \quad , \\ 1 & , \quad \text{para } \hat{a} = \hat{b} \quad , \\ 0 & , \quad \text{se } (\hat{a}, \hat{b}) \text{ não corresponder a } A \quad . \end{cases} \quad (5.34)$$

Os valores de  $A$  acima correspondem aos pares

$$(1, 1) \quad , \quad (2, 2) \quad , \quad (3, 3) \quad , \quad (1, 2) \quad , \quad (1, 3) \quad , \quad (2, 3) \quad , \quad (\Phi, \Phi) \quad . \quad (5.35)$$

Podemos reescrever o vínculo hamiltoniano (2.96) na seguinte forma

$$\mathcal{H} = \frac{16\pi G}{\text{vol}(\Sigma)} f^{AB} p_A p_B + \text{vol}(\Sigma) U(q^A) \quad , \quad (5.36)$$

onde

$$[f^{AB}] := \begin{pmatrix} \mu^{Aab} \mu^{Bcd} f_{abcd} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{-f}}{32\pi G} \end{pmatrix} \quad , \quad a, b = 1, 2, 3 \quad , \quad (5.37)$$

é a minisupermétrica nas coordenadas  $q^A$ , com a forma matricial de  $f_{abcd}$  escrito como

$$[f_{abcd}] = \begin{pmatrix} f^{1111} & f^{1122} & f^{1133} & f^{1112} & f^{1123} & f^{1113} \\ f^{2211} & f^{2222} & f^{2233} & f^{2212} & f^{2223} & f^{2213} \\ f^{3311} & f^{3322} & f^{3333} & f^{3312} & f^{3323} & f^{3313} \\ f^{1211} & f^{1222} & f^{1233} & f^{1212} & f^{1223} & f^{1213} \\ f^{2311} & f^{2322} & f^{2333} & f^{2312} & f^{2323} & f^{2313} \\ f^{1311} & f^{1322} & f^{1333} & f^{1312} & f^{1323} & f^{1313} \end{pmatrix} \quad . \quad (5.38)$$

Para calcular cada componente na matriz da minisupermétrica, utilizamos a equação (2.89).

O segundo termo do lado direito de (5.36) é o potencial, dado por:

$$U(q^A) := -\frac{1}{32\pi G \sqrt{-f}} {}^{(3)}R(q^A) + \frac{1}{2\sqrt{-f}} V(q^7) \quad , \quad (5.39)$$

e

$$f := \det [f^{abcd}] = -\frac{1}{4\gamma} \quad . \quad (5.40)$$

onde  $\gamma$  é o determinante da métrica  $\gamma^{ab}$ . Para provar esta última relação (5.40), assumiremos uma forma diagonal para a métrica de  $\Sigma$  como

$$[\gamma^{ab}] := \begin{pmatrix} u^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & v^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & w^{-2} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma := \det [\gamma^{ab}] = \frac{1}{(uvw)^2} \quad . \quad (5.41)$$

Então

$$[f^{abcd}] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{uv}{w} & -\frac{uw}{v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{uv}{w} & 0 & -\frac{vw}{u} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{uw}{v} & -\frac{vw}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{uv}{2w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{vw}{2u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{uw}{2v} \end{pmatrix} . \quad (5.42)$$

que nos leva a relação (5.40). Também, se introduzirmos dois índices constantes como  $C_{ab}^c = \varepsilon_{abd}C^{dc}$ , então o vínculo momento (2.97) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_a = 2\gamma_{mc}C_{an}^c\pi^{mn} = 2\varepsilon_{and}\mu_{Amc}\mu^{Bdc}\mu^{Cmn}C_Bq^A p_C , \quad (5.43)$$

onde definimos  $C_B := \mu_{Bmn}C^{mn}$ .

Na representação de Schrödinger, temos:

$$\hat{q}^A := q^A , \quad \hat{p}_A := -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^A} , \quad [\hat{q}^A, \hat{p}_B] = i\hbar\delta_B^A . \quad (5.44)$$

Para obter a versão quântica do vínculo hamiltoniano, vamos primeiro considerar a parte cinética de (5.36) e realizar a seguinte substituição

$$f^{AB}p_Ap_B \rightarrow -\square = -\hbar^2\nabla_{LB}^2 := -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-f}}\partial_A\left(f^{AB}\sqrt{-f}\partial_B\right) , \quad (5.45)$$

onde  $\square$  é o d'alembertiano,  $\nabla_{LB}$  é a generalização covariante do operador de Laplace e  $\nabla_{LB}^2$  é o operador Laplace-Beltrami. É importante notar que a dependência da métrica do minisuperespaço nas coordenadas locais do minisuperespaço leva a um problema não trivial de ordenação de operadores na equação WDW resultante. No entanto, esta questão pode ser resolvida de alguma forma garantindo que o processo de quantização seja covariante no minisuperespaço. Isto significa que não deve ser afetado por transformações gerais de coordenadas no minisuperespaço.

#### 5.4 Aproximação WKB

O método WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) é uma técnica para se obter soluções aproximadas em MQ [156]. Em um nível formal, isso também pode ser realizado para as equações (5.25) e (5.26). Primeiramente na ausência de campos/matéria, consideramos o *ansatz* [7]:

$$\Psi[h_{ab}] = C[h_{ab}]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[h_{ab}]\right) , \quad (5.46)$$

onde  $C[h_{ab}]$  é uma amplitude de variação lenta e  $S[h_{ab}]$  é uma fase variando rapidamente. Isto corresponde a,

$$\Pi^{ab} \longrightarrow \frac{\delta S}{\delta h_{ab}} , \quad (5.47)$$

que é a relação clássica para o momento canônico, e de (5.25) e (5.26) encontramos as equações aproximadas

$$16\pi G \mathcal{G}_{abcd} \frac{\delta S}{\delta h_{ab}} \frac{\delta S}{\delta h_{cd}} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} {}^{(3)}R = 0 \quad , \quad (5.48)$$

$$D_a \frac{\delta S}{\delta h_{ab}} = 0 \quad . \quad (5.49)$$

A equação (5.48) é a equação Hamilton-Jacobi para o campo gravitacional. A equação (5.49) expressa novamente o fato que  $S[h_{ab}]$  é invariante sob transformações de coordenadas. As equações (5.48) e (5.49) são completamente equivalentes às equações de campo de Einstein [157].

A aproximação semiclássica e também a função de onda WKB são métodos importantes no contexto da CQ, pois permitem obter soluções aproximadas das equações diferenciais, no qual não possuem soluções analíticas. Além disso, a aproximação semiclássica é empregada para evitar as ambiguidades decorrentes de problemas de ordenação de operadores na equação de WDW, bem como problemas na formulação da integral de caminho da função de onda. A função de onda WKB é mais adequada para aproximar a função de onda no regime semiclássico [158].

Na presença de campo/matéria, a função de onda WKB irá ser, genericamente, da forma [6]

$$\Psi \simeq \mathcal{A} e^{i\mathcal{B}} \quad , \quad (5.50)$$

onde a amplitude  $\mathcal{A}$  e a fase  $\mathcal{B}$  são funções de  $(h_{ab}, \Phi, \dots)$ . Termos adicionais estarão presentes em (5.48) e (5.49). Nestes casos, se não pudermos resolver as restrições de Hamilton-Jacobi exatamente, o método de expansão de acoplamento fraco pode ser empregado [159].

## 6 COSMOLOGIA QUÂNTICA

Neste capítulo abordaremos a Cosmologia Quântica (CQ), mais precisamente, a equação de WDW para alguns modelos cosmológicos e suas possíveis soluções. Iniciamos na seção 6.1 com uma apresentação geral da construção da equação WDW no minisuperespaço. Na seção 6.3 abordaremos a quantização canônica do Universo de deS e o processo de tunelamento da função de onda. Posteriormente, seção 6.5, aplicaremos a quantização canônica do Universo de FLRW na presença de um campo escalar e sua solução no regime ‘*slow roll*’. Na seção 6.6 discutimos a quantização canônica do Universo de FLRW para o modelo  $\Lambda$ CDM e o comportamento da função de onda. Na sub-seção 6.6.1 trataremos o caso de um Universo plano com um único fluido perfeito e na sub-seção 6.6.2 consideramos um Universo dominado por matéria e radiação.

### 6.1 CQ e a equação WDW

Na Cosmologia Clássica (CC), assumimos que a métrica do espaço-tempo e o(s) campo(s) de matéria exibem homogeneidade e isotropia. Consequentemente, a função *lapse* é considerada homogênea, denotada como  $N = N(t)$ , enquanto a função *shift* recebe um valor zero,  $N^a = 0$ . Como resultado, o elemento de linha espaço-tempo (2.84) se reduz a:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + \gamma(t)h_{ab}(x) dx^a dx^b \quad . \quad (6.1)$$

Inserindo a forma restrita do elemento de linha (6.1) no funcional de ação ADM, obtém-se a seguinte forma reduzida da ação [6]:

$$S[q^A(t), N(t)] = \int \left\{ \frac{vol(\Sigma)}{64\pi GN(t)} f_{AB}(q) \dot{q}^A \dot{q}^B - vol(\Sigma) N(t) U(q) \right\} dt \quad , \quad A, B = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (6.2)$$

Nesta equação,  $f_{AB}$  denota a métrica de DeWitt reduzida do minisuperespaço  $n$ -dimensional com assinatura  $(-, +, \dots, +)$ . Além disso, o potencial  $U(q)$ , inclui o escalar de Ricci das hiper-superfícies tridimensionais  $t = const.$  e o potencial dos campos de matéria. As coordenadas do minisuperespaço  $q^A$  podem incluir campos de matéria e componentes 3-métrica. Variação na ação em relação a  $q^A$  produz as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}^A}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \left\{^A_{CD} \right\} \dot{q}^C \dot{q}^D = -f^{AB} \partial_B U(q) \quad , \quad (6.3)$$

onde  $\left\{^A_{CD} \right\}$  são os coeficientes de conexão (símbolos de Christoffel) determinados a partir da métrica do minisuperespaço  $f_{AB}$  (ver equação (2.89));

$$\left\{^A_{CD} \right\} = \frac{1}{2} f^{AE} (f_{CE,D} + f_{DE,C} - f_{CD,E}) \quad . \quad (6.4)$$

Além disso, numa variação em relação à função *lapse*  $N$ , obtém-se o vínculo hamiltoniano (5.36) ou equivalentemente:

$$f_{AB} \dot{q}^A \dot{q}^B + 64\pi GN^2(t) U(q) = 0 \quad . \quad (6.5)$$

Para garantir a consistência, é necessário que as Equações (6.3) e (6.5) sejam iguais as componentes (00) e  $(ij)$  das equações completas de Einstein, respectivamente.

Para definir o hamiltoniano, primeiro precisamos definir os momentos canônicos da maneira usual, que é

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} = \frac{\text{vol}(\Sigma)}{32\pi GN} f_{AB} \dot{q}^B \quad . \quad (6.6)$$

Isso nos leva ao hamiltoniano ADM canônico no minisuperespaço

$$H_{\text{ADM}} = N \left( \frac{16\pi G}{\text{vol}(\Sigma)} f^{AB}(q) p_A p_B + \text{vol}(\Sigma) U(q) \right) \equiv N \mathcal{H} \quad , \quad (6.7)$$

onde  $f^{AB}$  é a inversa da métrica no minisuperespaço. A função *lapse*  $N$  serve como um multiplicador de Lagrange visando satisfazer o vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (5.36).

Na representação coordenada da quantização canônica, o processo envolve a incorporação de uma função de onda, denotada como  $\Psi(q)$ , que é independente do tempo e necessita da condição de que seja tornada nula pelo operador associado ao referido vínculo hamiltoniano. Como resultado, a equação WDW é obtida:

$$\left\{ -\frac{16\pi G}{\text{vol}(\Sigma)} \square + \zeta \mathcal{R} + \text{vol}(\Sigma) U(q) \right\} \Psi(q) = 0 \quad , \quad (6.8)$$

onde  $\square$  é o d'alembertiano (5.45),  $\mathcal{R}$  é a curvatura da métrica do minisuperespaço  $f_{AB}$ , e  $\zeta$  é uma constante arbitrária, diferente de zero apenas quando a dimensão do minisuperespaço é maior que 2 [6]. O fator de ordenamento produzido é a origem do termo de curvatura do minisuperespaço, denotado por  $\mathcal{R}$ .

## 6.2 Condições iniciais na equação WDW

A equação WDW, assim como as equações diferenciais de problemas quânticos, possui inúmeras soluções. Qualquer função de onda  $\Psi$  que satisfaça a equação WDW descreve um possível estado quântico do universo. Para obter uma única solução, é preciso especificar algumas condições de contorno (ou condições iniciais) no superespaço. Isto significa dizer que qualquer tentativa de aplicar a mecânica quântica a todo o Universo é necessário especificar as condições iniciais e analisar algumas de suas soluções [160].

Dentro deste contexto, um estado particular para a função de onda é o estado fundamental ou de excitação mínima. Este estado pode ser obtido utilizando o formalismo de integrais de trajetórias (ou caminhos) de Feynman [161]. A importância desse método consiste em que as condições iniciais impostas as soluções da equação WDW são traduzidas em restrições à classe de variáveis que compõe a integral de trajetória. Além disso, temos que a função de onda do Universo obtida através do formalismo de integral de trajetória é solução da equação WDW, ou seja, os dois formalismo são equivalentes. O que observamos é que a equação de WDW é muito difícil de resolver de forma exata, e por isso recorre-se ao formalismo de integral de trajetória. Pode ocorrer também o uso em conjunto dos dois métodos, permitindo obter uma informação mais precisa sobre a dinâmica quântica do Universo.

Utilizando o formalismo de integral de trajetória, a função de onda do Universo do estado de excitação mínima é escrita como [162]:

$$\Psi[h_{ab}^{(f)}, \Phi^{(f)}] = \int_C \delta[g_{\mu\nu}] \delta[\Phi] G(g_{\mu\nu}, \Phi) \quad . \quad (6.9)$$

A soma é realizada na classe de trajetórias do superespaço que consistem em métricas quadridimensionais  $g_{\mu\nu}$  e campos de matéria  $\Phi$  que correspondem aos argumentos da função de onda  $\Psi$ ,

ou seja, as trajetórias são limitadas pelos valores dos respectivos campos nas duas hipersuperfícies inicial  $\Sigma_i$  e uma final  $\Sigma_f$ . Na hipersuperfície inicial  $\Sigma_i$  os campos  $g_{\mu\nu}$  e  $\Phi$  devem satisfazer certas condições iniciais, designadas de  $C$ , e devem também coincidir com os campos  $h_{ab}^{(f)}$ ,  $\Phi^{(f)}$  definidos na hipersuperfície final  $\Sigma_f$ . O termo  $G(g_{\mu\nu}, \Phi)$  representa o propagador, ou seja, a amplitude de probabilidade para uma transição até ao estado caracterizado por  $\{h_{ab}^{(f)}, \Phi^{(f)}\}$ .

### 6.3 CQ em deS

Nesta seção, aplicaremos a quantização canônica do minisuperespaço para um Universo fechado de FLRW com uma constante cosmológica positiva no vácuo. Lembrando que a ação de Einstein-Hilbert na presença da constante cosmológica é escrita da seguinte maneira [7],

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{GHY} \quad , \quad (6.10)$$

onde  $S_{GHY}$  é o termo de contorno de Gibbons–Hawking–York (2.41). Esta ação (6.10) conduz a equação (4.8) para o espaço-tempo 4-dimensional.

Aqui, o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico, com o elemento de linha dado por (4.17). Portanto, podemos escrever (6.1) na forma:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right\} \quad , \quad (6.11)$$

onde

$$h_{ab}(x, t) = a^2(t) h_{ab}(x) \quad . \quad (6.12)$$

Do mesmo modo, a ação ADM reduzida (6.2) será

$$S_{ADM} = \mathcal{V}_k \int \left( \frac{f_{AB} \dot{q}^A \dot{q}^B}{64\pi GN} - NU(q) \right) dt \quad , \quad (6.13)$$

onde  $\mathcal{V}_k$  é o volume espacial da hipersuperfície tipo-espaço (3.4) e

$$U(q) = \frac{2\Lambda - {}^{(3)}R(q)}{8\pi G \sqrt{-f}} \quad , \quad (6.14)$$

com  $f$  obtido através da relação (5.40). Seja  $q^A$  e  $f_{AB}$  determinados pelas equações (5.31) e (5.37), respectivamente, no qual:

$$f_{AB} = \mu_{Aab} \mu_{Bcd} f^{abcd} \quad , \quad (6.15)$$

onde  $f^{abcd}$  é determinado por (2.89). Após a substituição desses valores na ação (6.13), encontramos:

$$S_{ADM} = \mathcal{V}_k \int \left( \frac{f^{abcd} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}_{cd}}{64\pi GN} + \frac{N\sqrt{\gamma}}{16\pi G} \left( {}^{(3)}R - 2\Lambda \right) \right) dt \quad . \quad (6.16)$$

Calculamos os escalar de curvatura  ${}^{(3)}R$  para o elemento de linha (4.17), obtendo

$${}^{(3)}R = h^{bb}(x, t) {}^{(3)}R_{bab}^a = \frac{6k}{a^2} \quad . \quad (6.17)$$

A forma da métrica de DeWitt do minisuperespaço (2.89), indica que os únicos termos não nulos na ação (6.16) são:  $f^{1122}$ ,  $f^{2211}$ ,  $f^{1133}$ ,  $f^{3311}$ ,  $f^{2233}$  e  $f^{3322}$ . Logo, obtemos

$$S_{ADM} = \mathcal{V}_k \int \left( \frac{-24a\dot{a}^2}{64\pi GN} + \frac{Na^3}{16\pi G} \left( \frac{6k}{a^2} - 2\Lambda \right) \right) dt \quad . \quad (6.18)$$

Para o caso de curvatura constante positiva ( $k = +1$ ), o volume  $\mathcal{V}_{k=1}$  é igual à  $2\pi^2$  [6]. Portanto, podemos escrever a ação ADM do minisuperespaço para um Universo de deS no vácuo com uma geometria de curvatura constante positiva, por [163]:

$$S_{ADM} = \frac{3\pi}{4G} \int \left( -\frac{a(t)}{N(t)} \dot{a}(t)^2 + a(t)N(t) - \frac{\Lambda}{3} N(t)a(t)^3 \right) dt \quad . \quad (6.19)$$

A hamiltoniana do minisuperespaço ADM para o Universo de deS com uma geometria de curvatura constante positiva é então dado por [163]:

$$H_{ADM} = -N \left\{ \frac{1}{3\pi m_{\text{P}}^2 a(t)} \pi_a^2 + \frac{3\pi m_{\text{P}}^2}{4} a(t) \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} a(t)^2 \right) \right\} \quad , \quad (6.20)$$

onde  $m_{\text{P}} = 1/\sqrt{G}$  é a massa de Planck<sup>1</sup>, e

$$\pi_a = -\frac{3\pi m_{\text{P}}^2}{2} \frac{a(t)\dot{a}(t)}{N(t)} \quad , \quad (6.21)$$

é o momento conjugado ao fator de escala  $a(t)$ .

A equação WDW para a função de onda do Universo de deS é obtida por conduzir o momento conjugado  $\pi_a$  a um operador, que de acordo com a equação (5.45), possui o seguinte ordenamento:

$$\pi_a^2 = f^{AA} p_A p_A \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-f}} \partial_A \left( f^{AA} \sqrt{-f} \partial_A \right) = -\hbar^2 a^{-p} \frac{d}{da} a^p \frac{d}{da} \quad , \quad (6.22)$$

onde  $f^{AA} = 1$  e  $\sqrt{-f} = a^p$ , com o parâmetro  $p$  representando a ambiguidade do fator de ordenamento [165]. Portanto, a equação WDW é reescrita como [164]

$$\left\{ -\hbar^2 a^{-p} \frac{d}{da} a^p \frac{d}{da} + \left( \frac{3\pi m_{\text{P}}^2}{2} \right)^2 a^2 \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \right\} \Psi(a) = 0 \quad . \quad (6.23)$$

A impossibilidade de obter soluções analíticas da equação (6.23), nos leva a buscar uma aproximação semiclássica, no qual o parâmetro  $p$  não afeta a função de onda neste regime. Para observar isto, escrevemos a função de onda WKB (5.46) na forma:

$$\Psi(a) = C(a) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} S(a) \right) \quad , \quad (6.24)$$

com  $S(a)$  o funcional ação. Calculando a primeira e a segunda derivada de  $\Psi(a)$  em (6.24), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(a)}{da} &= \left[ C'(a) - \frac{iC(a)}{\hbar} S'(a) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} S(a)} \quad , \\ \frac{d^2\Psi(a)}{da^2} &= \left[ -\frac{C(a)}{\hbar^2} (S'(a))^2 - \frac{iC(a)}{\hbar} (S''(a))^2 - \frac{2iC'(a)}{\hbar} S'(a) + C''(a) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} S(a)} \quad , \end{aligned} \quad (6.25)$$

<sup>1</sup>Usamos na definição da massa de Planck as unidades naturais:  $\hbar = c = k_B = 1$ .

onde  $S' = dS/da$ . Substituindo (6.25) na equação WDW (6.23) e aplicando o limite clássico  $S/\hbar \gg 1$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ), encontramos:

$$\left\{ \left( \frac{dS}{da} \right)^2 + \left( \frac{3\pi m_p^2}{2} \right)^2 a^2 \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \right\} \Psi(a) = 0 \quad . \quad (6.26)$$

Observamos que (6.26) é a equação de Hamilton-Jacobi na cosmologia clássica, equivalente ao vínculo hamiltoniano. Como sabemos, o momento na teoria clássica de Hamilton-Jacobi é dado por  $\pi_a = dS/da$ .

De forma mais direta, podemos assumir inicialmente  $p = 0$  e fazer a seguinte substituição na aproximação clássica:

$$\frac{d^2\Psi(a)}{da^2} \longrightarrow -\frac{(S')^2}{\hbar^2} \Psi(a) \quad . \quad (6.27)$$

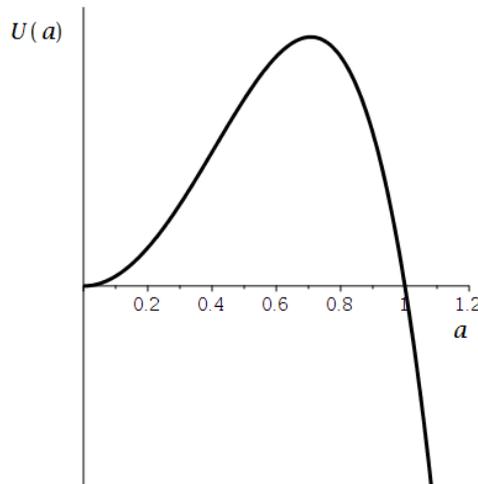
Então desprezamos o operador ordenamento, pois ao assumir ( $\hbar \rightarrow 0$ ) o termo contendo  $\hbar$  no numerador irá desaparecer. Logo, definimos  $p = 0$  e reescrevemos (6.23) da seguinte maneira

$$\frac{d^2\Psi(a)}{da^2} - U(a)\Psi(a) = 0 \quad , \quad (6.28)$$

onde

$$U(a) = \left( \frac{3\pi m_p^2}{2} \right)^2 a^2 \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \quad . \quad (6.29)$$

Figura 11 – Potencial da equação (6.29), assumindo  $3\pi m_p^2 = 1$ ,  $L = \sqrt{3/\Lambda} = 1$ .

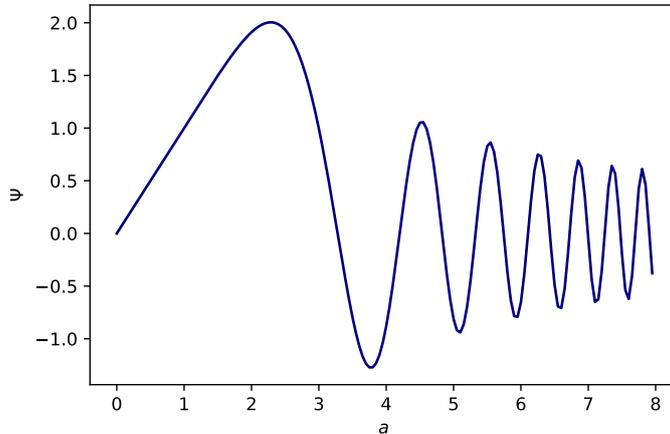


Fonte: O autor (2024)

A equação (6.28) tem a forma de uma Equação de Schrödinger (ES) unidimensional para uma “partícula” descrita por uma coordenada  $a(t)$ , tendo energia zero e movendo-se em um potencial  $U(a)$  (Figura 11). Observamos que existe uma região classicamente permitida, para  $a > L$ , e uma região classicamente proibida, para  $0 < a < L$ .

Na Figura 12 temos uma solução numérica para a equação (6.28), assumindo  $3\pi m_p^2 = 1$ ,  $L = \sqrt{3/\Lambda} = 1$  e que a função de onda desaparece na origem,  $\Psi(0) = 0$  (condição de contorno de DeWitt [6]). A função de onda é amortecida para  $a/L < 1$  correspondendo à ausência de

Figura 12 – Solução numérica para a equação (6.28), assumindo  $3\pi m_p^2 = 1$ ,  $L = \sqrt{3/\Lambda} = 1$  e que a função de onda desaparecendo na origem.



Fonte: O autor (2024)

esferas de raios menores que  $L$  no espaço deS lorentziano. Ela oscila para  $a/L > 1$  decaindo apenas lentamente para  $a$  grande. Isto significa que o espaço deS se expande sem limite [154].

#### 6.4 As funções de onda de Linde–Vilenkin e Hartle–Hawking

Todo o Universo visível parece não ser determinado somente por leis dinâmicas conhecidas. Sendo mais específico, ele contém uma pequena curvatura e exibe uma aproximada homogeneidade e isotropia da distribuição de matéria nas maiores escalas atuais. Assim, o Universo parece exigir condições de contorno criteriosas para seu surgimento. Ou seja, um grau excepcionalmente alto de ordem em seu estágio inicial. A partir disso, ele estará evoluindo com entropia crescente, alinhado com a segunda lei da termodinâmica. A proposta de Hartle–Hawking “sem contorno” [154, 162, 166] e a proposta de “tunelamento” Linde–Vilenkin [155, 167–173] são duas propostas para estados quânticos dos modelos de Universos que acomodam essa perspectiva.

A proposta de Linde–Vilenkin sugere um modelo cosmológico no qual o Universo é criado por tunelamento quântico (ver potencial da Figura 11) do “nada” para o espaço de deS, onde por “nada” significa sem espaço-tempo clássico. Neste modelo o estado inicial do Universo é determinado pelas leis físicas e nenhuma condição de contorno é necessária. Por outro lado, a proposta de Hartle–Hawking [154] refere-se a Universos fechados, onde se assume que o estado fundamental corresponde à uma noção clássica de uma geometria de elevada simetria, como é o Universo em que vivemos. Nessa proposta as condições iniciais  $C$  correspondem a assumir que a única fronteira existente é a hipersuperfície  $\Sigma_f$  o que implica que na integral de trajetória a soma seja feita sobre todas as geometrias em espaço-tempos quadridimensionais compactos. Isso significa que o Universo não tem fronteiras no espaço e no tempo. Assim a função de onda do Universo para uma dada geometria tridimensional, identificada com  $h_{ab}^{(f)}$  e campos materiais  $\Phi^{(f)}$ , é fornecida pela expressão (6.9), sendo a soma efetuada para a classe de todas as métricas quadridimensionais  $g_{\mu\nu}$  compactas e campos materiais  $\Phi$ , cujo limite final corresponde ao estado caracterizado por  $h_{ab}^{(f)}, \Phi^{(f)}$ . Nesse caso a função de onda  $\Psi[h_{ab}^{(f)}, \Phi^{(f)}]$  pode ser interpretada como a amplitude de probabilidade para que o Universo possua uma geo-

metria tridimensional caracterizada por  $h_{ab}^{(f)}$  e por campos materiais  $\Phi^{(f)}$  nela definidos, a partir de uma situação em que a geometria tridimensional e a matéria são inexistentes, isto é, a criação do Universo a partir do “nada”.

De acordo com a proposta de Hartle–Hawking, as funções de onda  $\Psi$  são definidas por

$$\Psi[h_{ab}, \Phi] = \int_C \delta[g_{\mu\nu}] \delta[\Phi] \exp(iS[g_{\mu\nu}, \Phi]) \quad , \quad (6.30)$$

onde  $S[g_{\mu\nu}, \Phi]$  é a ação clássica total para a gravidade acoplada com um campo escalar. Considerando o modelo de minisuperespaço e o caso da função de onda do estado fundamental, a integral funcional gravitacional e campo/matéria (6.30), pode ser calculada separadamente [154]. Sendo assim, a função de onda  $\Psi(a)$  para um espaço de deS, sem a presença de campos/matéria, pode ser calculada pela expressão:

$$\Psi(a) = \mathcal{N} \int da' \exp(-S_E(a')) \quad , \quad (6.31)$$

onde  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização e  $S_E$  é a ação euclidiana com uma métrica que tem assinatura euclidiana.

A razão para escolher esta solução particular da equação de WDW é explicada como segue. Considere a função de Green de uma partícula que se move do ponto  $(0, t')$  para  $(\mathbf{x}, 0)$ :

$$\langle \mathbf{x}, 0 | 0, t' \rangle = \sum_n \Psi_n(\mathbf{x}) \Psi_n(0) e^{iE_n t'} = \int \delta \mathbf{x}(t) \exp\{iS[\mathbf{x}(t)]\} \quad , \quad (6.32)$$

onde  $\Psi_n(\mathbf{x})$  é uma autofunção independente do tempo do operador de energia com autovalor  $E_n \geq 1$ . Vamos agora realizar uma rotação  $t' \rightarrow -it'$  e considerar o limite  $\tau' \rightarrow 0$ . O único termo que sobrevive na soma (6.32) é aquele que corresponde ao menor autovalor  $E_n$  (normalizado para zero). Isso implica que

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = \mathcal{N} \int \delta \mathbf{x} \exp(-S_E[\mathbf{x}(\tau)]) \quad . \quad (6.33)$$

Hartle e Hawking argumentaram que a generalização deste resultado para a CQ na aproximação semiclássica produzirá:

$$\Psi(a) \approx \mathcal{N} \exp(-S_E(a)) \quad . \quad (6.34)$$

Portanto, a função de onda de Hartle–Hawking para a equação WDW unidimensional (6.26), desconsiderando o fator pré-exponencial, é [154]:

$$\Psi_{\text{HH}}(a) = \begin{cases} e^{-\int_a^L |\pi(a')| da'} & , \quad a < L \quad , \\ \cos\left(\int_L^a \pi(a') da' - \frac{\pi}{4}\right) & , \quad a \geq L \quad , \end{cases} \quad (6.35)$$

onde  $L = \sqrt{3/\Lambda}$  é o raio do horizonte de deS. A função de onda (6.35) para  $a \geq L$  descreve uma onda incidindo e uma onda refletida pelo potencial  $U(a)$  da Figura 11. Quando  $a < L$  (ou seja, incidência abaixo da altura do potencial), a onda é amortecida exponencialmente, como podemos observar na Figura 13. O significado físico desta solução pode ser facilmente compreendido lembrando que um espaço de deS fechado com  $\Lambda > 0$  inicialmente se contrai e depois se expande, com  $a(t) = \cosh(t/L)$ .

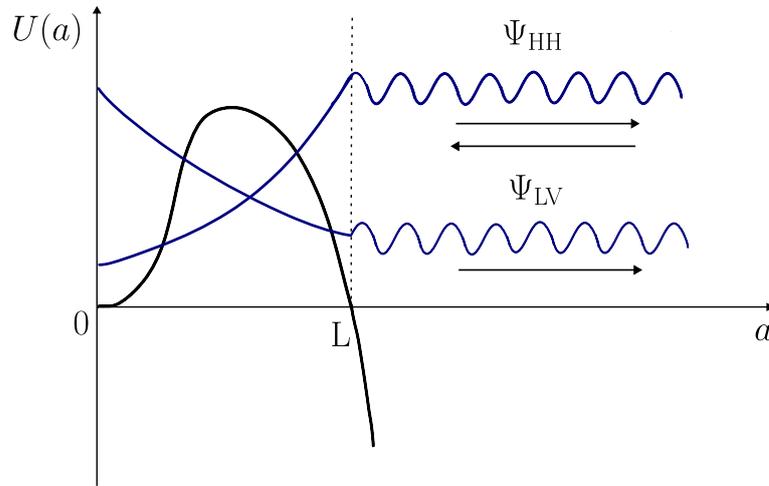
Uma possível interpretação e construção alternativa da função de onda (6.35), pode ser obtida estudando o tunelamento da função de onda através do potencial  $U(a)$  da Figura 11, mas na direção de  $a$  pequeno em vez de  $a$  grande. A função de onda Linde–Vilenkin de tunelamento,

na aproximação WKB, da equação WDW unidimensional (6.26), desconsiderando o fator pré-exponencial, é [165]

$$\Psi_{LV}(a) = \begin{cases} e^{\int_a^L |\pi(a')| da'} & , \quad a < L \quad , \\ e^{-i \int_L^a \pi(a') da' + i \frac{\pi}{4}} & , \quad a \geq L \quad , \end{cases} \quad (6.36)$$

A função de onda decai exponencialmente em direção a  $a = L$  e depois disso oscila, descrevendo um Universo de deS em expansão, como podemos observar na Figura 13.

Figura 13 – O potencial  $U(a)$  da equação (6.29) e uma representação do comportamento das funções de onda de Hartle–Hawking (6.35) e Linde–Vilenkin (6.36).



Fonte: O autor (2024)

A taxa de tunelamento (nucleação) para a função de onda de Linde–Vilenkin nesta aproximação WKB é dada por [170–173]

$$P_{LV} = \frac{|\Psi_{Tun}(L)|^2}{|\Psi_{Tun}(0)|^2} \propto e^{-2 \int_0^L |\pi(a')| da'} = e^{-\frac{\pi m_{\text{P}}^2}{L} (L^2 - a^2)^{3/2} \Big|_0^L} = e^{-\pi m_{\text{P}}^2 L^2} = e^{-S_{\text{deS}}} \quad , \quad (6.37)$$

onde  $S_{\text{deS}}$  é a entropia do espaço-tempo de deS (ver equação (4.36)):

$$S_{\text{deS}} = \frac{4\pi L^2}{4G} = \frac{A_{\text{deS}}}{4G} \quad , \quad (6.38)$$

no qual  $A_{\text{deS}}$  é a área do horizonte [138]. Conforme a abordagem de tunelamento da CQ, acredita-se que nosso Universo tenha começado em um evento de tunelamento. O Universo inicia instantaneamente uma expansão inflacionária de deS quando se nuclea [170]. Por outro lado, a densidade de probabilidade não normalizada para a função de onda Hartle–Hawking pode ser calculada a partir de (6.35), trazendo

$$P_{HH} = \frac{|\Psi_{HH}(L)|^2}{|\Psi_{HH}(0)|^2} \propto e^{2 \int_0^L |\pi(a')| da'} = e^{S_{\text{deS}}} \quad . \quad (6.39)$$

Lembramos que o artigo original de Vilenkin de 1982 [170] alegou que a probabilidade de tunelamento  $P$  é obtida através da ação euclidiana  $S$  (neste caso se torna equivalente à entropia

de deS [174]) pela expressão:  $P \sim e^S$ , portanto o resultado original de Vilenkin coincidiu com o resultado subsequente de Hartle e Hawking de 1983 [154]. Linde obteve pela primeira vez o resultado  $P \sim e^{-S}$  em uma série de artigos, começando com seu primeiro artigo [169] e continuando com seus artigos subsequentes [167, 168]. Foi declarado lá que o resultado original de Vilenkin estava incorreto. Vilenkin chegou à mesma conclusão alguns meses depois. Assim, o resultado  $P \sim e^S$  obtido por Hartle e Hawking foi obtido pela primeira vez por Vilenkin, e o resultado  $P \sim e^{-S}$  atribuído a Vilenkin foi obtido pela primeira vez por Linde.

De acordo com a densidade lagrangiana para um campo escalar (2.73), podemos mostrar que no regime de menor energia deste campo é possível associar o tensor energia-momentum do campo a uma constante cosmológica [175]. Para encontrar este resultado, consideramos a configuração de menor energia, que corresponde ao estado de vácuo de campo escalar, alcançado quando as derivadas parciais são nulas, ou seja, quando não há qualquer energia cinética e gradiente. Assim, o tensor energia-momentum é:  $T^{\mu\nu} = -V(\Phi_0)g^{\mu\nu}$ , onde  $\Phi_0$  é o valor de  $\Phi$  que minimiza o potencial  $V(\Phi)$ . Podemos associar o mínimo do potencial  $V(\Phi)$  com uma densidade de energia do vácuo,  $\rho_\Lambda = V(\Phi_0) := V_0$ . Dessa forma, relacionamos uma constante cosmológica com o potencial,  $\Lambda = 8\pi G V_0 = 8\pi V_0/m_p^2$ , e o comprimento de deS como:

$$L := \sqrt{\frac{3m_p^2}{8\pi V_0}} \quad (6.40)$$

A partir das equações (6.38) e (6.39), fica claro que o tunelamento e os estados sem fronteira levam a diferentes implicações físicas. Conforme a proposta de tunelamento, a maior probabilidade é obtida para os menores valores de entropia. Assim, a função de onda de tunelamento “prevê” que o Universo provavelmente irá nuclear com a menor entropia possível. Pelo contrário, a probabilidade Hartle–Hawking atinge o pico nos menores valores da constante cosmológica e, portanto, a função de onda correspondente tende a prever as condições iniciais com a entropia máxima possível. Ou, em outras palavras, a função de onda de Linde–Vilenkin “prevê” que o Universo irá nuclear com uma grande energia de vácuo [170]. Devido ao sinal negativo (6.39), o estado sem fronteira aumenta a contribuição de Universos vazios com  $V_0 = 0$  em todo o estado quântico, levando à conclusão aparentemente contraditória de que Universos indefinidamente enormes são infinitamente prováveis do que Universos de tamanho finito. A probabilidade na equação (6.38), por outro lado, promove grandes valores de  $V_0$  capazes de causar cenários inflacionários de deS. Como resultado, parece que a proposta de Linde–Vilenkin é fisicamente mais atraente do que a proposta de Hartle–Hawking, enquanto uma inflação de deS é observada neste âmbito reduzido de discussão.

No entanto, suponha que estendemos o resultado acima para incluir um campo escalar inflaton explícito. Nesse caso, a situação muda drasticamente. Existe um domínio geral  $V_0 \leq 10^{-8}m_p^4$  derivado da restrição de amplitude nas ondas gravitacionais geradas durante a inflação em todos os modelos onde o potencial efetivo não muda significativamente durante os estágios finais da inflação. Muitos modelos inflacionários, incluindo a nova inflação e a inflação híbrida, preveem que a inflação ocorrerá em  $V_0 \ll 10^{-8}m_p^4$ . Posteriormente, o tamanho mínimo de um Universo inflacionário fechado é dado por  $1/H = \frac{3m_p}{8\pi\sqrt{V_0}}$ . A probabilidade de criação quântica de um Universo inflacionário é suprimida por um fator de  $e^{-10^{10}}$  em um exemplo específico com  $V_0 = 10^{-12}m_p^4$  [176, 177]. Como notavelmente mostrado nas referências [176–179], a proposta de tunelamento, permite a criação de um Universo aberto ou plano não trivial topologicamente compacto. Além disso, parece provável que ocorra do que o surgimento de um Universo fechado. Como tais processos não são afetados por fatores exponenciais, o Universo pode ser criado mesmo que a densidade de energia durante a inflação seja muito inferior à densidade

de Planck. Após um longo período de inflação, tais Universos tornam-se indistinguíveis dos Universos planos isotrópicos.

### 6.5 CQ em FLRW na presença de campo escalar

Consideramos a métrica (3.1) de FLRW e investigar um novo cenário referente a um Universo inflacionário, considerando a mesma ação correspondente às teorias inflacionárias padrão:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - V(\Phi) \right] , \quad (6.41)$$

onde  $\Phi$  é um campo escalar minimamente acoplado ao escalar de Ricci  $R$ , e usamos as unidades onde  $c = 1 = \hbar$ . Como apenas durante a inflação o ínflaton  $\Phi$  domina a dinâmica, a ação não contém nenhum outro campo de matéria. Portanto, a ação ADM do modelo é

$$S_{\text{ADM}} = \frac{3\mathcal{V}_k}{8\pi G} \int dt N a^3 \left[ \frac{k}{a^2} - \frac{1}{N^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] - \mathcal{V}_k \int dt N a^3 \left[ -\frac{1}{2N^2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right] , \quad (6.42)$$

onde  $\mathcal{V}_k$  é dado por (3.4). Os momentos conjugados associados a  $a$  e  $\Phi$ , respectivamente, são dados por:

$$\pi_a = -\frac{3\mathcal{V}_k}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N} , \quad \pi_\Phi = \frac{a^3 \mathcal{V}_k}{N} \dot{\Phi} , \quad (6.43)$$

pelo qual podemos obter facilmente o hamiltoniano ADM canônico:

$$H_{\text{ADM}} = N \left[ -\frac{2\pi G}{3\mathcal{V}_k a} \pi_a^2 + \frac{1}{\mathcal{V}_k} \frac{\pi_\Phi^2}{2a^3} - \frac{3k\mathcal{V}_k}{8\pi G} a + \mathcal{V}_k a^3 V(\Phi) \right] . \quad (6.44)$$

O hamiltoniano ADM acima leva ao vínculo super-hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\frac{2\pi G}{3\mathcal{V}_k a} \pi_a^2 + \frac{1}{\mathcal{V}_k} \frac{\pi_\Phi^2}{2a^3} - \frac{3k\mathcal{V}_k}{8\pi G} a + \mathcal{V}_k a^3 V(\Phi) = 0 . \quad (6.45)$$

Para obter a equação de WDW, aplicamos o mapa de quantização:

$$\pi_a^2 \rightarrow -a^{-p} \frac{\partial}{\partial a} \left( a^p \frac{\partial}{\partial a} \right) , \quad \pi_\Phi^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} , \quad (6.46)$$

onde o parâmetro de ordenamento  $p$  é considerado o fator de ordenamento ambíguo [165]. Pela ação do operador super-hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  em uma função de onda  $\Psi(a, \Phi)$ , podemos, portanto, escrever a equação WDW:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} - \frac{3m_{\text{P}}^2}{4\pi a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Phi^2} - \frac{9\mathcal{V}_k^2 m_{\text{P}}^4}{16\pi^2} a^2 \left[ k - \frac{8\pi}{3m_{\text{P}}^2} a^2 V(\Phi) \right] \Psi = 0 , \quad (6.47)$$

onde  $m_{\text{P}} = 1/\sqrt{G}$  é a massa de Planck.

Agora investigamos a inflação estabelecida durante um regime ‘*slow roll*’, onde podemos ignorar a dependência de  $\Phi$  na função de onda. Além disso, em tal regime, podemos assumir que o potencial escalar desempenha o papel de uma constante cosmológica efetiva [180]. Mais precisamente, definimos  $\Lambda \equiv (8\pi V_0)/m_{\text{P}}^2 = \text{constante}$  e  $L \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ . A seguir, estamos interessados na aproximação semiclássica e, neste caso, a ordenação dos fatores não desempenha um papel crucial. De acordo com Linde [176], um Universo plano compacto, como o Universo

toroidal ( $k = 0$ ,  $\Sigma = \mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ), é o caso mais simples para resolver o problema das condições iniciais para inflação, em algum estágio muito inicial de sua evolução [181]. Embora a criação quântica de um Universo inflacionário fechado ou aberto infinito seja exponencialmente inibida, o Universo toroidal não o é.

Portanto, substituindo  $p = 0$  e  $k = 0$  na equação WDW (6.47), obtemos

$$\frac{d^2}{da^2} \Psi(a) + \frac{9\gamma_0^2 m_P^4}{16\pi^2 L^2} a^4 \Psi(a) = 0 \quad . \quad (6.48)$$

Uma solução para (6.48) em termos das funções de Bessel é:

$$\Psi(a) = \mathcal{N} \sqrt{a} J_{\frac{1}{6}} \left( \frac{\gamma_0 m_P^2}{4\pi L} a^3 \right) \quad , \quad (6.49)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização. A forma assintótica da função de Bessel, para grandes valores do fator de escala, é:

$$\frac{\gamma_0 a^3}{4\pi l_P^2 L} \gg 1 \quad , \quad (6.50)$$

produz a forma assintótica da função de onda

$$\Psi(a) = \mathcal{N} \cos \left( \frac{\gamma_0 m_P^2}{4\pi L} a^3 - \frac{1}{3} \right) \quad . \quad (6.51)$$

Esta função de onda coleta tanto as fases de expansão  $\exp(-i \frac{\gamma_0 m_P^2}{4\pi L} a^3)$  e contração  $\exp(i \frac{\gamma_0 m_P^2}{4\pi L} a^3)$  do modelo cosmológico, simultaneamente.

Discutiremos agora o limite semiclássico da função de onda. Primeiro, consideramos a função de onda na forma da expressão (6.24) e substituímos na equação WDW (6.48), para obter

$$-\left| \frac{dS}{da} \right|^2 + \frac{9\gamma_0^2 m_P^4}{16\pi^2 L^2} a^4 = 0 \quad . \quad (6.52)$$

Reconhecemos que (6.52) é a equação de Hamilton-Jacobi na CC, que é equivalente ao vínculo hamiltoniano. Como sabemos, o momento na teoria clássica de Hamilton-Jacobi é dado por  $\pi_a = -dS/da$ . Portanto, com esta definição e a relação correspondente em (6.43), obtemos  $\dot{a}/a = 1/L$  ou  $a(t) = a(t_0) \exp((t - t_0)/L)$ .

Assim, mostramos que o fator de escala cresce exponencialmente durante a época inflacionária,  $t_i \leq t \leq t_f$ , que se supõe que ocorra em uma região clássica. Portanto, temos

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \exp \left( \frac{t_f - t_i}{L} \right) \quad . \quad (6.53)$$

Esta solução implica a taxa de expansão durante a expansão deS. O chamado número de  $e$ -folds  $N$  é frequentemente apresentado como  $N = \ln(a(t_f)/a(t_i))$ . Se assumirmos que a inflação ocorreu durante um intervalo de tempo muito pequeno  $t_f - t_i = 10^{-37} s = 10^8 t_P$ , o número mínimo de  $e$ -folds necessárias para resolver os problemas padrão do Big Bang é  $N \simeq 60$ . Substituindo esses valores na solução deS acima, obtemos  $L \simeq 10^7 l_P$ .

## 6.6 CQ em FLRW para o modelo $\Lambda$ CDM

Para o Universo de FLRW, a ação é dada pela equação (3.3). Logo, escrevemos

$$S_{ADM} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{3\mathcal{V}_k}{8\pi G} \left( kNa - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \mathcal{V}_k Na^3 \rho(t) \right] . \quad (6.54)$$

Para simplificar o funcional ação (6.54), definamos uma nova coordenada temporal adimensional por  $\eta = H_0 t$ , onde  $H_0$  é o parâmetro de Hubble no tempo presente. Substituindo  $\rho(t) = \sum_i \rho_0^{(i)} (a(t)/a_0)^{-3(1+\omega_i)}$  e nomeando,  $M = 3\mathcal{V}_k H_0 a_0^3 / (4\pi G)$ ,  $\tilde{N} = N/x$  (função *lapse* no referencial conformal),  $x := a/a_0$  (fator de escala adimensional) e  $\dot{x} = dx/d\eta$ , temos:

$$S_{ADM} = \frac{M}{2} \int_{t_i}^{t_f} d\eta \left( -\frac{\dot{x}}{\tilde{N}} - \tilde{N} \Omega_0^{(k)} x^2 - \tilde{N} \sum_i \Omega_0^{(i)} x^{1-3\omega_i} \right) , \quad (6.55)$$

onde  $\Omega_0^{(k)} = -k/a_0^2 H_0^2$  e  $\Omega_0^{(i)} = 8\pi G \rho_0 / (3H_0^2)$ . Portanto, a lagrangiana associada a (6.55) será:

$$L_{ADM} = -\frac{M}{2} \left( \frac{\dot{x}}{\tilde{N}} + \tilde{N} \Omega_0^{(k)} x^2 + \tilde{N} \sum_i \Omega_0^{(i)} x^{1-3\omega_i} \right) . \quad (6.56)$$

O momento conjugado ao fator de escala adimensional  $x$ , e a função *lapse*  $\tilde{N}$ , são dados por

$$\pi_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{M\dot{x}}{\tilde{N}} \quad ; \quad \pi_{\tilde{N}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{N}}} = 0 . \quad (6.57)$$

A hamiltoniana ADM irá ser

$$H_{ADM} = \tilde{N} \left( -\frac{\pi_x^2}{2M} + \frac{M}{2} \Omega_0^{(k)} x^2 + \frac{M}{2} \sum_i \Omega_0^{(i)} x^{1-3\omega_i} \right) . \quad (6.58)$$

A liberdade de *gauge* na escolha da função *lapse* fornece o vínculo super-hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{\pi_x^2}{2M} + \frac{M}{2} \Omega_0^{(k)} x^2 + \frac{M}{2} \sum_i \Omega_0^{(i)} x^{1-3\omega_i} \approx 0 . \quad (6.59)$$

No nível quântico, as variáveis canônicas do super-hamiltoniano (6.59) é promovida a operadores,  $\pi_x := -i\hbar d/dx$  e  $\hat{x} := x$ , fornecendo a correspondente equação WDW

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + M^2 \Omega_0^{(k)} x^2 \Psi(x) + M^2 \sum_i \Omega_0^{(i)} x^{1-3\omega_i} \Psi(x) = 0 , \quad (6.60)$$

onde consideramos  $\hbar = 1$ .

O uso do cálculo numérico é necessário para obter soluções da equação (6.60), quando consideramos a contribuição de todas as componentes de energia. Soluções para o caso  $\Omega + \Omega^{(k)} = 1$  são semelhantes à Figura 12. Nas referências [182–184] o leitor pode encontrar diversos casos para a equação WDW (6.60) e suas soluções como, por exemplo, mantendo o fator de ordenamento e variando a curvatura do espaço.

Em seguida, restringimos a equação (6.60) para situações em que o Universo é plano e preenchido com apenas uma componente do fluido perfeito e quando está dominado por matéria e radiação.

### 6.6.1 Universo plano com apenas uma componente do fluido perfeito

Consideramos um modelo simples de curvatura  $k = 0$  e composto por apenas uma componente do fluido. Para este caso, a solução clássica das equações de campo (6.59) no *gauge*  $\tilde{N} = 1$  é dada por:

$$x = \left( \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2} (3\omega + 1) \eta \right)^{\frac{2}{3\omega+1}} . \quad (6.61)$$

Consequentemente, a equação WDW (6.60) será:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + M^2\Omega_0 x^{1-3\omega}\Psi(x) = 0 . \quad (6.62)$$

Note que o domínio de definição do fator de escala adimensional é,  $x \in (0, \infty)$ , aqui o operador super-hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , é definido sobre um domínio denso  $D(\mathcal{H}) = C_0^\infty(0, \infty)$ . Então, o super-hamiltoniano é hermitiano (ou simétrico) se a função de onda satisfaz a condição de contorno de DeWitt, na forma

$$\Psi(0) = 0 . \quad (6.63)$$

Para encontrar a solução da equação (6.62), primeiro realizamos a transformação  $\Psi(x) = \sqrt{x}\phi(x)$ , resultando em:

$$x^2 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + x \frac{d\phi(x)}{dx} + \left[ M\sqrt{\Omega_0}x^{3(1-\omega)} - \frac{1}{4} \right] \phi(x) = 0 . \quad (6.64)$$

Agora, definimos

$$z = \frac{3}{2} (1 - \omega) M \sqrt{\Omega_0} x^{\frac{3}{2}(1-\omega)} , \quad (6.65)$$

e substituímos na equação (6.64), para obter

$$z^2 \frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + z \frac{d\phi(z)}{dz} + \left[ \frac{4z^2}{9(1-\omega)^2} - \frac{1}{4} \right] \phi(z) = 0 . \quad (6.66)$$

Esta é uma equação diferencial de Bessel cuja solução geral é dada em termos das funções de Bessel de primeira e segunda espécie,  $J_{1/2}(2z/3(\omega-1))$  e  $Y_{1/2}(2z/3(\omega-1))$ , respectivamente [185]. Podemos escrever a segunda solução em termos de  $J_{-1/2}(2z/3(\omega-1))$ , da seguinte maneira:

$$\phi(z) = \frac{A\sqrt{\pi}i}{\sqrt{3(\omega-1)}} J_{1/2} \left[ \frac{2z}{3(\omega-1)} \right] + \frac{B\sqrt{\pi}}{\sqrt{3(\omega-1)}} J_{-1/2} \left[ \frac{2z}{3(\omega-1)} \right] . \quad (6.67)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de normalização. As funções de Bessel de ordem semi-inteira estão relacionadas às funções trigonométricas [185]. Temos a relação:

$$J_{1/2}(y) = \left( \frac{2}{\pi y} \right)^{1/2} \sin(y) . \quad (6.68)$$

$$J_{-1/2}(y) = \left( \frac{2}{\pi y} \right)^{1/2} \cos(y) . \quad (6.69)$$

Portanto, reescrevemos a solução (6.67) na forma:

$$\phi(z) = \frac{A}{\sqrt{2z}} i \sin\left(\frac{2z}{3(\omega-1)}\right) + \frac{B}{\sqrt{2z}} \cos\left(\frac{2z}{3(\omega-1)}\right) . \quad (6.70)$$

Para satisfazer a condição de contorno (6.63), temos que  $B = 0$ . Assim, após substituir o valor de  $z$  (6.65) na solução (6.70), encontramos a solução analítica da equação (6.62)

$$\Psi(x) = -\frac{A \sin\left(M\sqrt{\Omega_0}x^{\frac{3}{2}(1-\omega)}\right)}{\sqrt{3(1-\omega)M\sqrt{\Omega_0}x^{\frac{1}{2}(1-3\omega)}}} . \quad (6.71)$$

Para  $\omega < 1$ , a função de onda (6.71) é real.

### 6.6.2 Universo dominado por matéria e radiação

Consideramos o caso que o Universo é formada por matéria  $\rho^{(m)}$  e radiação  $\rho^{(r)}$ . Neste caso, o vínculo super-hamiltoniano (6.59) é escrito como:

$$\mathcal{H} = -\frac{a_0^2}{2M}\pi_a^2 + \frac{M}{2}\Omega_0^{(k)}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\Omega_0^{(m)}\frac{a}{a_0} + \Omega_0^{(r)}\right) \approx 0 . \quad (6.72)$$

Em  $t = t_0$  o vínculo super-hamiltoniano acima fornece a seguinte relação bem conhecida entre os parâmetros densidades

$$\Omega_0^{(k)} + \Omega_0^{(m)} + \Omega_0^{(r)} = 1 . \quad (6.73)$$

Usando a seguinte definição

$$x(t) := \frac{a}{a_0} + \frac{\Omega_0^{(m)}}{\Omega_0^{(k)}} , \quad (6.74)$$

reescrevemos (6.72) na forma

$$-\frac{\pi_x^2}{2M} + \frac{M}{2}\Omega_0^{(k)}x^2 + \frac{M}{2}\left(\Omega_0^{(r)} - \frac{(\Omega_0^{(m)})^2}{4\Omega_0^{(k)}}\right) = 0 . \quad (6.75)$$

Na representação coordenadas  $\pi_x := -i\hbar d/dx$  e  $\hat{x} := x$ , a equação WDW (6.75) é escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{M}{2}\omega^2x^2\Psi(x) = \frac{M}{2}\left(\Omega_0^{(r)} - \frac{(\Omega_0^{(m)})^2}{4\Omega_0^{(k)}}\right)\Psi(x) , \quad (6.76)$$

onde  $\omega^2 := -\Omega_0^{(k)}$ .

Investigamos o Universo fechado no qual  $\mathcal{V}_{k=1} = 2\pi^2$  [6]. Notamos ainda que o domínio da definição do fator de escala é  $x \in \mathbb{R}^+$ . Consequentemente, o operador  $H := -(\hbar^2/2M)d^2/dx^2 + (M\omega^2x^2)/2$  no lado esquerdo de (6.76) é definido sobre um denso domínio  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$  e está em um limite de um ponto em  $+\infty$  e no limite de um círculo em  $x = 0$ . Aqui,  $H$  não é essencialmente um operador autoadjunto. Ele constitui um operador hermitiano simétrico se:

$$\langle\Psi_1|H\Psi_2\rangle = \langle H\Psi_1|\Psi_2\rangle , \quad \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{D}(H) , \quad (6.77)$$

ou equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{d\Psi_1^*}{dx} \Psi_2 - \Psi_1^* \frac{d\Psi_2}{dx} \right) = 0 \quad . \quad (6.78)$$

Para garantir a validade desta condição, isto é necessário e suficiente que

$$\left( \frac{d\Psi(x)}{dx} + \gamma \Psi(x) \right)_{x=0^+} = 0 \quad , \quad \forall \Psi(x) \in \mathbb{D}(H) \quad , \quad (6.79)$$

onde  $\gamma$  é uma constante real arbitrária. Isto mostra que o parâmetro  $\gamma$  caracteriza uma família de um parâmetro de extensões autoadjuntas de  $H$ .

Para obter a solução geral quadrado integrável da equação (6.76), realizamos a mudança de variável  $x = \sqrt{\hbar/(2M\omega)} \xi$ , encontrando a expressão [186]

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} + \left( \lambda - \frac{\xi^2}{4} \right) \Psi(\xi) = 0 \quad , \quad (6.80)$$

onde  $\lambda = E/\hbar\omega$  e  $E = (M/2) \left( \Omega_0^{(r)} - \left( \Omega_0^{(m)} \right)^2 / \left( 4\Omega_0^{(k)} \right) \right)$ . Mudando novamente de variável, agora fazendo  $\eta = \xi^2/2$ , obtém-se:

$$\eta \frac{d^2\Psi(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \frac{d\Psi(\eta)}{d\eta} + \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\eta}{4} \right) \Psi(\eta) = 0 \quad . \quad (6.81)$$

Finalmente, supondo  $\Psi(\eta) = \exp(-\eta/2)F(\eta)$ , a expressão (6.81) torna-se

$$\eta \frac{d^2F(\eta)}{d\eta^2} + (\beta - \eta) \frac{dF(\eta)}{d\eta} - \alpha F(\eta) = 0 \quad , \quad (6.82)$$

onde  $\alpha = 1/4 - \lambda/2$  e  $\beta = 1/2$ . A solução geral  $F(\eta)$  da equação (6.82) é dada por [185]

$$F(\alpha, \beta; \eta) = A_1 {}_1F_1(\alpha; \beta; \eta) + B\eta^{1-\beta} {}_1F_1(\alpha + 1 - \beta; 2 - \beta; \eta) \quad , \quad (6.83)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de normalização da função de onda, e

$${}_1F_1(\alpha; \beta; \eta) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \eta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} \frac{\eta^3}{3!} + \dots \quad , \quad (6.84)$$

são funções hipergeométricas confluentes. A solução geral de (6.76) será:

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{M\omega x^2}{2\hbar}\right) \left[ A_1 {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega}; \frac{1}{2}; \frac{M\omega x^2}{\hbar}\right) + B \left(\frac{M\omega x^2}{\hbar}\right)^{1/2} {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega}; \frac{3}{2}; \frac{M\omega x^2}{\hbar}\right) \right] \quad . \quad (6.85)$$

Podemos definir, a partir das funções hipergeométricas confluentes, funções pares e ímpares da seguinte forma:

$$F_{\text{par}}(\alpha, \beta; x) = {}_1F_1\left(\alpha_{\text{par}}; \beta_{\text{par}}; \frac{M\omega x^2}{\hbar}\right) \quad , \quad (6.86)$$

$$F_{\text{ímpar}}(\alpha, \beta; x) = \left(\frac{M\omega x^2}{\hbar}\right)^{1/2} {}_1F_1\left(\alpha_{\text{ímpar}}; \beta_{\text{ímpar}}; \frac{M\omega x^2}{\hbar}\right) \quad , \quad (6.87)$$

onde

$$\alpha_{\text{par}} = \frac{1}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega} \quad , \quad \beta_{\text{par}} = \frac{1}{2} \quad , \quad (6.88)$$

$$\alpha_{\text{ímpar}} = \frac{3}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega} \quad , \quad \beta_{\text{ímpar}} = \frac{3}{2} \quad . \quad (6.89)$$

Desta forma, a solução geral (6.85) é escrita como:

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{M\omega x^2}{2\hbar}\right) \left[ AF_{\text{par}}(\alpha_{\text{par}}; \beta_{\text{par}}; x) + BF_{\text{ímpar}}(\alpha_{\text{ímpar}}; \beta_{\text{ímpar}}; x) \right] \quad , \quad (6.90)$$

com as constantes  $A$  e  $B$  escolhidas convenientemente para gerarem as soluções pares e ímpares da equação (6.76) e normalizarem a função de onda. No nosso problema do tipo oscilador harmônico isso consiste em fazer:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0 \quad . \quad (6.91)$$

Analisando a solução (6.90), observamos que ela é o produto de uma exponencial decrescente e uma função hipergeométrica confluyente. Para que a condição (6.91) seja satisfeita, a série que representa a função hipergeométrica confluyente tem que ter necessariamente um conjunto finito de termos. Dessa forma, o parâmetro  $\alpha$  da (6.84) deve ser um número inteiro e não positivo.

Esta condição corresponde a impor, na solução (6.90), que ou  $B = 0$  e  $\alpha_{\text{par}}$  assumam um valor inteiro não-positivo (solução par) ou  $A = 0$  e  $\alpha_{\text{ímpar}}$  também assumam um valor inteiro não-positivo (solução ímpar). A partir das equações (6.88) e (6.89) temos que:

$$\alpha_{\text{par}} = -n = \frac{1}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega} \quad , \quad (6.92)$$

$$\alpha_{\text{ímpar}} = -n = \frac{3}{4} - \frac{E}{2\hbar\omega} \quad , \quad (6.93)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Portanto, encontramos os autovalores possíveis:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (6.94)$$

onde  $n$  é par (ou zero) para as soluções  $\alpha_{\text{par}}$  e ímpar para as soluções  $\alpha_{\text{ímpar}}$ . Por outro lado, a imposição de que  $\alpha$  deve assumir um valor inteiro não-positivo mostra que as funções  $F_{\text{par}}$  e  $F_{\text{ímpar}}$  (equações (6.86) e (6.87)) são diretamente relacionadas com os polinômios de Hermite  $H_n$  [187].

## 7 COSMOLOGIA CLÁSSICA FRACIONÁRIA

Iniciamos neste capítulo a aplicação da quantização canônica da RG na Cosmologia Clássica Fracionária (CCF). Para melhor compreender a fracionabilidade da teoria, apresentamos na seção 7.1 as características do espaço fracionário e na seção 7.2 a derivada fracionária de Riesz. Em seguida, na seção 7.3, mostramos a forma da Equação de Schrödinger Fracionária (ESF) e algumas aplicações, como, por exemplo, para o oscilador harmônico. Por fim, mostramos também na seção 7.4, que é possível obter uma equação WDW fracionária e sua aproximação semiclassica. Por último, apresentamos na seção 7.5 um dos nossos resultados [3], relacionado a CCF no Universo de FLRW.

### 7.1 Espaço fracionário

Embora frequentemente associados, existem diferenças entre sistemas fracionários e sistemas fractais [188]. Um sistema fracionário é bem descrito pelo cálculo fracionário, sendo convenientemente composto pela definição de distância, volumes, simetrias e cálculo diferencial. Desta forma, construímos um espaço fracionário  $\mathcal{E}_\alpha^D$  como um novo objeto, onde a ferramenta matemática do cálculo fracionário está bem estabelecida. Os sistemas fractais possuem características particulares, como estrutura fina, estrutura irregular e autossimilaridade. A característica da estrutura fina está no fato do fractal possuir detalhes em todas as escalas. Intuitivamente, isto significa que sempre encontraremos pontos pertencentes ao fractal, sobre o qual, veremos sempre detalhes não triviais. A estrutura irregular de um fractal não permite que seja descrito pelas ferramentas geométricas tradicionais. Finalmente, a presença de autossimilaridade em fractais surge do fato de podermos fazer várias cópias dos mesmos em diferentes escalas. Os sistemas fractais podem exibir uma ou mais dessas características. Exemplos são: conjuntos de Cantor [189], curvas de von Koch e fractais aleatórios como o movimento browniano [190].

A conexão entre cálculo fracionário e fractais está presente em algumas estruturas, por exemplo, fractais aleatórios e sistemas dinâmicos em determinados regimes estáticos [35, 191]. O movimento browniano é um exemplo de sistema fractal aleatório sendo descrito pelo cálculo fracionário [192]. O processo de caminhada aleatória no movimento browniano tem dimensão de caminhada  $d_W$  igual a dois. Existem várias definições de dimensão em sistemas fractais, por exemplo, a dimensão de contagem de caixas  $d_B$ , dimensão de Hausdorff  $d_H$ , dimensão espectral  $d_S$ , etc. Essas dimensões podem ter valores inteiros como a dimensão topológica do espaço físico  $d_T$ , mas, em geral, possuem números não inteiros.

A dimensão espectral e a dimensão de Hausdorff de um fractal estão relacionadas entre si, através da dimensão do movimento browniano  $d_W$ , da seguinte forma [188]:  $d_W = 2d_H/d_S$ . Para um processo de difusão, temos  $d_S = \beta d_H$ , com  $0 < \beta \leq 1$ . A dimensão Hausdorff do espaço euclidiano fracionário isotrópico é  $d_H = d_T \mu$ , onde  $0 < \mu \leq 1$ . O espaço fracionário é fractal apenas se  $d_W \geq 2$  ( $\beta \leq 1$ ). Para difusão normal ( $\beta = 1$ ), temos  $d_S = d_H = d_T \mu$  e  $d_W = 2$ . O caso  $\beta > 1$  não corresponde a um fractal, pois  $d_S > d_H$ . Em particular, para  $\beta = 1/\mu$  a dimensão espectral coincide com o espaço de dimensão topológica. Portanto, temos  $d_W = 2\mu = \alpha$ , onde  $0 < \alpha \leq 2$  é o chamado parâmetro fracionário de Lévy.

Como os operadores fracionários não são locais e têm ordem estendida como números irracionais, fracionários ou complexos, eles podem modelar fenômenos reais de uma maneira melhor do que aqueles obtidos pelo cálculo comum. Ao contrário do cálculo comum, não existe uma definição única de derivada no cálculo fracionário. O leitor pode encontrar as várias definições de derivadas fracionárias de Riemann–Liouville, Caputo, Erdélyi–Kober, Grünwald–Letnikov, Hadamard, Nishimoto, Riez e Weyl na referência [193].

## 7.2 A derivada fracionária de Riesz

A derivada fracionária de Riesz (o Laplaciano fracionário), em geral, caracteriza um processo de difusão único que surge a partir dos deslocamentos aleatórios de indivíduos que podem se deslocar para locais próximos ou vizinhos e até mesmo se aventurar em locais distantes por meio de voos de Lévy. Tanto os voos literais quanto os conceituais foram observados ou alegados ocorrerem em vários cenários, como movimento turbulento de fluidos e transporte de materiais em meios fraturados. No campo da mecânica, o Laplaciano fracionário descreve o movimento de uma cadeia ou grupo de partículas interligadas por molas elásticas que se conectam não apenas aos seus vizinhos imediatos, mas também a todas as outras partículas. A força das molas diminui à medida que as partículas se afastam, enquanto o arranjo das partículas pode assumir um padrão regular ou fractal. Num sentido mais abstrato, o Laplaciano fracionário representa a influência de um processo não local sobre uma lei de conservação, que não é apenas influenciada pelas condições locais, mas também pelo estado geral de um campo de interesse num momento específico. Sugerimos que o leitor consulte o livro excepcionalmente bem escrito e abrangente de Pozrikidis [194] para obter explicações detalhadas e desenvolver uma compreensão mais profunda do Laplaciano fracionário.

Matematicamente, a derivada fracionária unidimensional de Riesz, sobre uma função  $f(x)$ , é definida na forma [193, 194]:

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) \equiv c_{1,\alpha} \int_0^\infty \frac{f(x-v) - 2f(x) + f(x+v)}{v^{1+\alpha}} dv, \quad (7.1)$$

onde o coeficiente  $c_{1,\alpha}$  é dado por:

$$c_{1,\alpha} \equiv \vartheta_{1,\alpha}^{-2} = \frac{1}{\pi} \Gamma(1+\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad (7.2)$$

e

$$\vartheta_{1,\alpha}^2 = \int_0^\infty \frac{4 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\vartheta^{\alpha+1}} d\vartheta. \quad (7.3)$$

O primeiro índice de  $c_{1,\alpha}$  designa o caso de uma função de uma variável atualmente considerada, e o segundo índice transmite a dependência da ordem fracionária  $\alpha$ .

Mais concretamente, uma série de argumentos e descobertas usando cálculo fracionário na física quântica foram recentemente apresentados [195]. A justificativa primária é que se limitarmos a descrição da integral de caminho da MQ exclusivamente aos caminhos brownianos, explicar fenômenos quânticos essenciais concretos seria complicado [196]. Devido a essas questões, variantes estendidas da Equação de Schrödinger (ES) foram consideradas, onde derivadas de ordem fracionária, por exemplo,  $\partial^\alpha / \partial x^\alpha$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $\alpha$  sendo um número racional, são usadas. Essa ferramenta do cálculo fracionário auxilia a Mecânica Quântica Fracionária (MQF), onde variantes espaço-fracionárias [197], tempo-fracionárias [198] e espaço-tempo-fracionárias [199] da ES comum têm sido objeto de atenção. Além disso, nos últimos anos, a MQF tem sido empregada como um meio de explorar características na teoria quântica de campos e gravidade para espaço-tempo fracionário [95, 96] e a teoria quântica de campos fracionária em temperatura positiva [58, 200]. Ela apontou para oportunidades interessantes; consulte [60, 61, 95], para uma pesquisa recente.

### 7.3 A Equação de Schrödinger Fracionária

Em dois artigos seminais, Laskin [196, 197] introduziu uma formulação inovadora conhecido como Mecânica Quântica Fracionária Espacial (MQFE) através da aplicação de uma abordagem puramente baseada na física. O trabalho revolucionário de Laskin foi construído sobre a base sólida da MQ não relativística formulada por Feynman e Hibbs, que utilizou extensivamente uma representação integral de trajetória empregando trajetórias brownianas [161]. Além disso, Naber obteve a ESF dependente do tempo, com base no movimento browniano fracionário [201, 202]. Inspirado nos trabalhos acima mencionados, a ES fracionária generalizado foi obtido onde as derivadas espaciais e temporais foram substituídas por correspondências fracionárias. No entanto, a contribuição inovadora de Laskin foi substituir estas trajetórias brownianas convencionais por trajetórias caracterizados por trajetórias de Lévy, dando assim origem a fascinante área da MQFE e expandindo a nossa compreensão dos fenômenos quânticos no espaço.

A seguir, apresentaremos uma breve visão geral da dinâmica quântica fracionária, gerada pela função hamiltoniana  $H_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}) := D_\alpha |\mathbf{p}|^\alpha + V(\mathbf{r})$  (para uma revisão detalhada, veja [203]), onde  $D_\alpha$  é um coeficiente de escala, e o parâmetro fracionário de Lévy  $\alpha$  relevante para o conceito de trajetória de Lévy [195] está definido como  $1 < \alpha \leq 2$ . Então, para construir o hamiltoniano quântico correspondente do sistema, devemos aplicar o procedimento de quantização canônica padrão, ou seja,  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$ . Portanto, obtemos  $H^{(\alpha)} = D_\alpha (-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} + V(\mathbf{r})$ .

No âmbito do MQFE, pode-se iniciar a análise considerando a ES convencional dependente do tempo, sendo expressa da seguinte forma:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (7.4)$$

Esta equação serve como ponto de partida para futuras explorações, onde se pode aprofundar sua correspondência fracionária, conforme proposto por Laskin [204]. A ES fracionário é obtido substituindo o operador Laplace tradicional  $\Delta$  pela derivada fracionária de Riesz  $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$ , que pode ser expressa como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \rightarrow D_\alpha (-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \quad . \quad (7.5)$$

Esta substituição permite construir a ES no espaço fracionário [35]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}^{(\alpha)}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}) \Psi(\mathbf{r}, t) = D_\alpha (-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad , \quad (7.6)$$

onde  $\alpha \in (1, 2]$  é o índice de Lévy, e  $D_\alpha$  é, de acordo com Laskin, um “coeficiente de difusão quântico fracionário generalizado” de dimensão  $J^{1-\alpha} m^\alpha s^{-\alpha}$ . Como mencionado anteriormente,  $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$  é uma generalização da derivada fracionária de Riesz, conhecida como Laplaciano fracionário [194]:

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1} |\mathbf{p}|^\alpha \mathcal{F} \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} |\mathbf{p}|^\alpha \varphi(\mathbf{p}, t) \quad , \quad (7.7)$$

onde  $\mathbf{p} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$  e  $\mathcal{F}$  representa a transformada de Fourier, que relaciona  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  e  $\varphi(\mathbf{p}, t)$ . Para o caso especial quando  $\alpha = 2$ ,  $D_\alpha$  reduz para  $D_2 = 1/2m$ , onde  $m$  é a massa da partícula.

Aqui, é importante notar que  $H^{(\alpha)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  serve como extensão fracionária para o hamiltoniano do sistema em consideração. Este hamiltoniano pode ser expresso matematicamente como:

$$H^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = D_\alpha |\mathbf{p}|^\alpha + V(\mathbf{r}, t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad . \quad (7.8)$$

Vale ressaltar que no cenário particular onde  $\alpha$  assume o valor 2, a equação (7.8) simplifica para o hamiltoniano padrão, definido como  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r}, t)$ .

### 7.3.1 A ESF independente do tempo

A seguir, estudaremos o caso especial [203] quando o hamiltoniano  $H^{(\alpha)}$  não depende explicitamente do tempo, ou seja, seu valor é igual a uma constante  $E$  do sistema. Embora o conteúdo nesta subseção seja inteiramente não relativístico, este caso de estudo é de interesse (precisamente em termos formais, enfatizamos) em CQ, através do qual a equação WDW também carrega uma expressão  $H = E = \text{constante}$ , embora muito diferente no contexto e significado. Assim, existe a solução da forma (usamos o caso unidimensional para facilitar a notação)

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \phi(x) \quad , \quad (7.9)$$

onde  $\phi(x)$  satisfaz

$$H^{(\alpha)}\phi(x) := -D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha \phi(x) + V(x)\phi(x) = 0 \quad , \quad (7.10)$$

com, lembrando,  $1 < \alpha \leq 2$ .

A equação (7.10) é a ESF independente do tempo. Do mesmo modo, poderíamos atribuir, neste contexto fracionário, a probabilidade de encontrar uma partícula em  $x$  como o quadrado absoluto da função de onda  $|\Psi|^2$  ou  $|\phi|^2$ .

### 7.3.2 O oscilador harmônico fracionário

O oscilador harmônico fracionário em uma dimensão tem a seguinte função de Hamilton [203]

$$H^{(\alpha)} = D_\alpha |p|^\alpha + |x|^\beta \quad , \quad 1 < \beta \leq 2 \quad . \quad (7.11)$$

Para o caso especial, quando  $\alpha = \beta$ , assumindo  $1 < \alpha \leq 2$ , a hamiltoniana (7.11) pode ser considerado a generalização fracionário da hamiltoniana do oscilador harmônico da MQ padrão. Escolhemos a energia total igual a  $E$ , assim:

$$E = D_\alpha |p|^\alpha + |x|^\beta \quad . \quad (7.12)$$

Temos os seguintes valores possíveis para o momento,  $|p| = \left(\frac{1}{D_\alpha}(E - |x|^\beta)\right)^{1/\alpha}$ , onde  $|p| = 0$  é um ponto de retorno. Assim, o movimento clássico é apenas possível no intervalo  $|x| \leq (E)^{1/\beta}$ .

Usando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld, temos

$$2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \oint p dx = 4 \int_0^{x_m} p dx = 4 \int_0^{x_m} D_\alpha^{-1/\alpha} (E - |x|^\beta)^{1/\alpha} dx \quad , \quad (7.13)$$

onde  $\oint$  indica que a integral é sobre um período completo do movimento clássico;  $x_m = E^{1/\beta}$  é o ponto de retorno do movimento clássico. Para calcular a integral no lado direito da equação (7.13), introduzimos uma nova variável  $y = x(E)^{-1/\beta}$ . Então, temos

$$\int_0^{x_m} D_\alpha^{-1/\alpha} (E - |x|^\beta)^{1/\alpha} dx = \frac{E^{1/\beta+1/\alpha}}{D_\alpha^{1/\alpha}} \int_0^1 (1 - y^\beta)^{1/\alpha} dy \quad . \quad (7.14)$$

A integral sobre  $dy$  pode ser expressa em termos das funções beta. Dessa forma, fazendo a substituição  $z = y^\beta$ , temos<sup>1</sup>

$$\int_0^1 (1 - y^\beta)^{1/\alpha} dy = \frac{1}{\beta} \int_0^1 (1 - z)^{\frac{1}{\alpha}} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz = \frac{1}{\beta} B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad . \quad (7.16)$$

Utilizando (7.16), podemos reescrever a equação (7.13) como

$$2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{4E^{1/\beta+1/\alpha}}{D_\alpha^{1/\alpha} \beta} B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad . \quad (7.17)$$

A equação (7.17) fornece os valores das energias dos estados estacionários para o oscilador fracionário em uma dimensão,

$$E_n = \left( \frac{\pi\hbar\beta D_\alpha^{1/\alpha}}{2B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \quad . \quad (7.18)$$

Esta equação generaliza o conhecido espectro de energias do oscilador harmônico da MQ e é transformado nele quando  $\alpha = 2, \beta = 2$ .

Notamos que para

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad , \quad (7.19)$$

a equação (7.18) fornece um espectro de energias equidistante. Quando  $1 < \alpha \leq 2$  e  $1 < \beta \leq 2$  a condição dada por (7.19) acontece apenas para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$ . Isto significa que somente o oscilador da MQ padrão possui espectro de energias equidistante. O leitor pode consultar mais exemplos de sistemas quânticos fracionais na referência [203].

#### 7.4 A equação WDW fracionária

Para adquirir o equivalente fracionário da equação WDW (6.8), é necessário substituir o operador d'Alembertiano típico (5.45) pelo operador fracionário Riesz-d'Alembertiano dado por [205, 206]

$$(-\square)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(q) = \mathcal{F}^{-1} \left( |p_q|^\alpha \mathcal{F} \Psi(p_q) \right) \quad , \quad (7.20)$$

onde  $|p_q| = \sqrt{f^{AB} p_A p_B}$ , e  $\mathcal{F}$  representa uma transformação de Fourier. Portanto, o equivalente fracionário da equação WDW (6.8) pode ser expresso como [1, 6, 60, 61]

$$\left\{ \frac{D_\alpha(m_P)}{2} (-\square)^{\frac{\alpha}{2}} + \zeta \mathcal{R} + U(q) \right\} \Psi(q) = 0 \quad , \quad (7.21)$$

<sup>1</sup>A função beta é definida por:

$$B(u, v) = \int_0^1 y^{u-1} (1-y)^{v-1} dy \quad . \quad (7.15)$$

onde  $(-\square)^{\alpha/2}$  é o d'alembertiano fracionário e  $D_\alpha(m_P)$  é o coeficiente, dependendo da massa de Planck  $m_P = 1/\sqrt{G}$ , que se reduz à unidade no limite  $\alpha = 2$ .

O vínculo hamiltoniano fracionário, equivalente a (5.36), é definido por

$$\mathcal{H}^{(\alpha)}(q^A, p_A) = \frac{D_\alpha(m_P)}{2} |f^{AB} p_A p_B|^{\frac{\alpha}{2}} + U(q) = 0 \quad . \quad (7.22)$$

Esta equação (7.22) nos dá a extensão fracionária de (6.5). Além disso, pode-se obter a correspondência fracionária de Euler-Lagrange de (6.3) pelas equações de Hamilton:

$$\frac{dq^A}{dt} = \frac{\partial H_{\text{ADM}}^{(\alpha)}}{\partial p_A} \quad , \quad \frac{dp_A}{dt} = -\frac{\partial H_{\text{ADM}}^{(\alpha)}}{\partial q^A} \quad , \quad (7.23)$$

onde  $H_{\text{ADM}}^{(\alpha)}$  é o hamiltoniano ADM fracionário definido por

$$H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} = N \left( \frac{D_\alpha(m_P)}{2} |f^{AB} p_A p_B|^{\frac{\alpha}{2}} + U(q) \right) \quad . \quad (7.24)$$

Para uma análise no minisuperespaço, com o elemento de linha dado por (6.1), o correspondente vínculo hamiltoniano fracionário (7.22), tem a sua derivada fracionária escrita na forma (considerando o operador ordenamento  $p = 0$ ):

$$-(\square)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(a) = - \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{da^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(a) \quad . \quad (7.25)$$

Para obter soluções semiclássicas desta equação WDW fracionária, vamos utilizar a derivada fracionária de Riesz (7.1), na forma:

$$-\left( -\hbar^2 \frac{d^2}{da^2} \right)^{\alpha/2} \Psi(a) = c_{1,\alpha} \hbar^\alpha \int_0^\infty \frac{\Psi(a-v) - 2\Psi(a) + \Psi(a+v)}{v^{\alpha+1}} dv \quad , \quad (7.26)$$

onde  $c_{1,\alpha}$  é expresso em (7.2).

Consideramos a forma exponencial da função de onda:

$$\Psi(a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S(a)\right) \quad . \quad (7.27)$$

Com isso, expandimos a função de onda  $\Psi(a \pm v)$  em série de Taylor, em torno de  $a$ , para obter

$$\Psi(a \pm v) = \Psi(a) \pm \frac{1}{1!} \Psi'(a)v + \frac{1}{2!} \Psi''(a)v^2 \pm \frac{1}{3!} \Psi'''(a)v^3 + \frac{1}{4!} \Psi''''(a)v^4 \pm \dots \quad . \quad (7.28)$$

Após substituir (7.28) no numerador da integral em (7.26), encontramos

$$\Psi(a-v) - 2\Psi(a) + \Psi(a+v) = \frac{2}{2!} \Psi''(a)v^2 + \frac{2}{4!} \Psi''''(a)v^4 + \dots \quad . \quad (7.29)$$

Com a função de onda (7.27) e suas derivadas, temos

$$\Psi(a-v) - 2\Psi(a) + \Psi(a+v) = -\frac{2}{2!} \Psi(a) \left( \frac{S'v}{\hbar} \right)^2 + \frac{2}{4!} \Psi(a) \left( \frac{S'v}{\hbar} \right)^4 - \frac{2}{6!} \Psi(a) \left( \frac{S'v}{\hbar} \right)^6 + \dots \quad (7.30)$$

Desconsideramos derivadas de ordem superior de  $S' = dS/da$  em (7.30). Observando a forma da expansão da função cosseno:

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \quad (7.31)$$

Escrevemos a expressão (7.30) como:

$$\begin{aligned} \Psi(a-v) - 2\Psi(a) + \Psi(a+v) &= \left[ -2 + 2\cos\left(\frac{S'v}{\hbar}\right) \right] \Psi(a) \quad , \\ &= -2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{S'v}{\hbar}\right) \right] \Psi(a) \quad , \\ &= -4 \sin^2\left(\frac{S'v}{2\hbar}\right) \Psi(a) \quad , \\ &= -4 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \Psi(a) \quad , \end{aligned} \quad (7.32)$$

onde  $\vartheta = S'v/\hbar$ . Substituindo (7.32) em (7.26), obtemos:

$$-\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{da^2}\right)^{\alpha/2} \Psi(a) = -\hbar^\alpha \left(\frac{S'}{\hbar}\right)^\alpha \Psi(a) c_{1,\alpha} \int_0^\infty \frac{4 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\vartheta^{\alpha+1}} d\vartheta \quad (7.33)$$

Sabendo que  $c_{1,\alpha} = \vartheta_{1,\alpha}^{-2}$  e  $\vartheta_{1,\alpha}^2 = \int_0^\infty \frac{4 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\vartheta^{\alpha+1}} d\vartheta$  [194], chegamos a relação fracionária

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{da^2}\right)^{\alpha/2} \Psi(a) = (S')^\alpha \Psi(a) \quad , \quad (7.34)$$

com  $S' = \pi_a$ , sendo a relação clássica para o momento canônico. Para  $\alpha = 2$  obtemos a relação ordinária (6.27). Assim, o vínculo hamiltoniano fracionário (7.22) na aproximação WKB será:

$$\frac{D_\alpha(m_P)}{2} |\pi_a|^\alpha + U(a) = 0 \quad (7.35)$$

A função de onda (7.27) no espaço fracionário passa a ser obtida por

$$\Psi(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int |\pi_a| da} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int \left(-\frac{2U(a)}{D_\alpha(m_P)}\right)^{1/\alpha} da} \quad (7.36)$$

Aplicaremos este procedimento na CCF, discutida na próxima seção.

## 7.5 Cosmologia Clássica Fracionária no Universo de FLRW

O objetivo principal desta seção é estabelecer uma estrutura cosmológica fracionária apropriada para examinar a questão da sincronicidade, entre outros enigmas ligados ao modelo  $\Lambda$ CDM. Nossa investigação se esforça para abordar o problema da sincronicidade, e para isso, iniciamos com a abordagem da CQF [2, 34, 60, 61, 207]. A metodologia básica e preliminar do CQF é usar a MQF [196, 203, 204] em CQ [208] para obter as consequências cosmológicas correspondentes no minisuperespaço apropriado. Porém, aqui consideramos apenas o limite (semi)clássico desta teoria; para ver outros modelos semiclássicos estabelecidos aplicando várias teorias gravitacionais como estruturas subjacentes, veja, por exemplo, [118]. Vários trabalhos abordaram a proposta de uma Cosmologia Clássica Fracionária (CCF) [71, 94, 209], uma

vez que o uso do cálculo fracionário em cosmologia está atualmente produzindo resultados encorajadores e promissores [70].

O minisuperespaço da cosmologia FLRW, correspondente ao vínculo hamiltoniano (3.8), é unidimensional com  $f^{AB} p_A p_B = \pi_a^2/a$ . Em relação às dimensões de  $[\pi_a^2/a] = 1/(\text{comprim.})^3$  e  $[\mathcal{H}] = 1/(\text{comprim.})$ , pode-se facilmente verificar que  $D_\alpha(m_P) = m_P^{3(2-\alpha)}$ . Portanto, a extensão fracionária do hamiltoniano ADM (3.6) e dos vínculos hamiltonianos (3.8) são dadas por:

$$H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} = N \left[ \frac{2\pi l_P^{3\alpha-4}}{3\mathcal{V}_k} \left| \frac{\pi_a^2}{a} \right|^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{3\mathcal{V}_k k a}{8\pi G} - \mathcal{V}_k a^3 \rho \right] , \quad (7.37)$$

$$\frac{2\pi l_P^{3\alpha-4}}{3\mathcal{V}_k} \left| \frac{\pi_a^2}{a} \right|^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{3\mathcal{V}_k k a}{8\pi G} - \mathcal{V}_k a^3 \rho = 0 , \quad (7.38)$$

onde  $l_P = \sqrt{G}$  é o comprimento de Planck.

No *gauge comóvel*  $N = 1$ , usando as equações de Hamilton,  $\dot{a} = \partial H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} / \partial \pi_a$ , e redimensionando o tempo cósmico por:

$$t \rightarrow \frac{\alpha}{4^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \left( \frac{3\mathcal{V}_k}{2\pi} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} t , \quad (7.39)$$

nos leva à seguinte extensão fracionária da equação de Friedmann

$$H^{\frac{2}{3-D}} = \frac{1}{(l_P^2 a^3)^{\frac{D-2}{3-D}}} \left[ \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \right] , \quad (7.40)$$

onde  $\rho$  é dado pela relação (3.10), e o parâmetro  $D$  está relacionado ao parâmetro fracionário de Lévy  $\alpha$ , por

$$D = \frac{2}{\alpha} + 1, \quad 2 \leq D < 3 . \quad (7.41)$$

Substituindo  $\alpha = 2$  (ou equivalentemente  $D = 2$ ) na equação (7.40), obtemos o resultado padrão. Devemos observar que existem diversas variantes da equação fracionária de Friedmann na literatura; veja, por exemplo, [94, 209].

Semelhante ao modelo padrão da cosmologia, pode-se definir a extensão fracionária dos parâmetros de densidade  $\left\{ \Omega^{(i)} = \frac{8\pi G \rho^{(i)}}{3H^2}, \Omega^{(k)} = -\frac{k}{a^2 H^2} \right\}$ , por

$$\tilde{\Omega}^{(i)} = \frac{1}{(l_P^2 a^3)^{\frac{D-2}{3-D}}} \frac{8\pi G \rho^{(i)}}{3H^{\frac{2}{3-D}}}, \quad \tilde{\Omega}^{(k)} = -\frac{1}{(l_P^2 a^3)^{\frac{D-2}{3-D}}} \frac{k}{a^2 H^{\frac{2}{3-D}}} . \quad (7.42)$$

Deve-se notar que os parâmetros de densidade mencionados acima seguem as definições padrão em  $\Lambda$ CDM quando  $D = 2$ . Como resultado, a equação de Friedmann fracionária (7.40) obedece à seguinte relação padrão:

$$\tilde{\Omega}^{(m)} + \tilde{\Omega}^{(rad)} + \tilde{\Omega}^{(\Lambda)} + \tilde{\Omega}^{(k)} = 1 , \quad (7.43)$$

que também é conhecida como relação de fechamento.

A equação de Raychaudhuri, também conhecida como segunda equação de Friedmann, pode ser obtida tomando a derivada temporal da equação (7.40) e combinando-a com a equação de continuidade. Na cosmologia fracionária, o tensor energia-momento de um fluido perfeito está

sujeito à mesma equação de conservação covariante que na cosmologia padrão. Esta equação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\dot{\rho}^{(i)} + 3H(\rho^{(i)} + p^{(i)}) = 0 \quad , \quad (7.44)$$

onde  $p^{(i)} = \omega_i \rho^{(i)}$ .

Esses dois nos levam à equação fracionária de Raychaudhuri

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi(3-D)G}{3(H^2 l_p^2 a^3)^{\frac{D-2}{3-D}}}(\rho + 3p) - \frac{D-2}{2}H^2 \quad . \quad (7.45)$$

Para  $D = 2$  em (7.45), recuperamos a equação (3.11).

Além disso, a equação de Friedmann fracionária (7.40) pode ser reescrita, utilizando a equação de continuidade (7.44), como

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{2}{3-D}} = \frac{1}{a^{3\frac{D-2}{3-D}}} \left\{ \sum_i \frac{\tilde{\Omega}_0^{(i)}}{a^{3(1+\omega_i)}} + \frac{\tilde{\Omega}_0^{(k)}}{a^2} \right\} \quad , \quad (7.46)$$

onde  $\tilde{\Omega}_0^{(i)}$  e  $\tilde{\Omega}_0^{(k)}$  denotam os parâmetros de densidade na época atual, ( $a = 1$ ).

Usando-se o mesmo método pode-se obter o parâmetro de desaceleração  $q$ . Realizando uma derivada temporal da equação de Friedmann (7.40), e utilizando também a equação de continuidade e os parâmetros de densidade fracionária (7.42), encontramos:

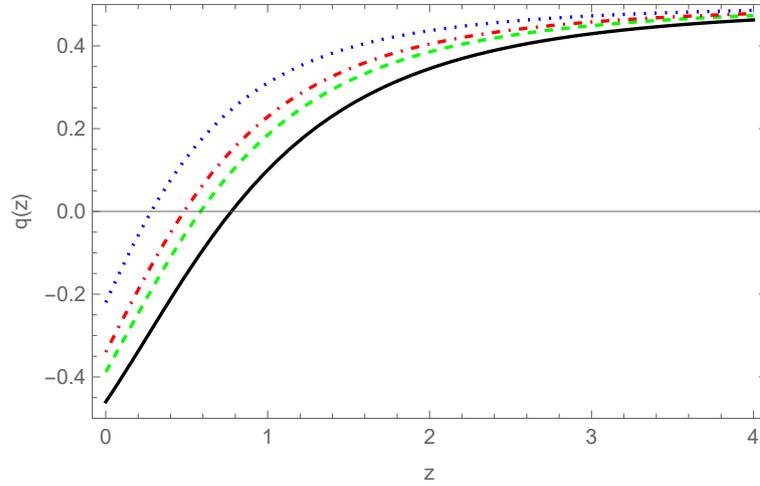
$$\begin{aligned} q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} &= \frac{3-D}{2} \sum_i (1+3\omega_i) \tilde{\Omega}^{(i)} + \frac{D-2}{2} \\ &= \frac{(3-D)(1+z)^{3\frac{D-2}{3-D}}}{2\left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{2}{3-D}}} \sum_i (1+3\omega_i)(1+z)^{3(1+\omega_i)} \tilde{\Omega}_0^{(i)} + \frac{D-2}{2} \quad , \end{aligned} \quad (7.47)$$

onde, na segunda igualdade, utilizamos a definição do *redshift*  $1+z = 1/a$ .

Para observar o impacto geral do parâmetro fracionário de Lévy na evolução cósmica, é instrutivo examinar um modelo simples e plano ( $k = 0$ ) do Universo, consistindo de poeira cósmica e a constante cosmológica. O comportamento do  $q$  em relação ao *redshift*  $z$  está representado nas Figuras 14 e 15. Na Figura 14, mantemos um valor constante de  $D = 2,2$  e examinamos o impacto de  $\tilde{\Omega}_0^{(m)}$  na variável  $q$  em termos de  $z$ . Nossa observação revela que  $q(z)$  não responde significativamente aos valores atuais de  $\tilde{\Omega}_0^{(m)}$ . Porém, na Figura 15, fica aparente que  $q$  é altamente sensível ao parâmetro fracionário de Lévy. Ao analisar a Figura 15, podemos deduzir que à medida que  $\alpha$  aumenta, a transição de uma fase de desaceleração para uma fase de aceleração ocorre em *redshifts* mais baixos.

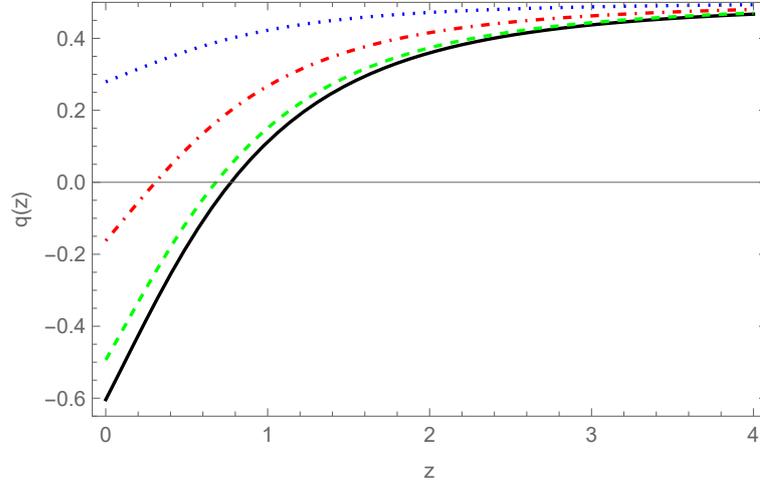
Em seguida revisamos brevemente os conjuntos de dados cosmológicos disponíveis. Depois, consideramos os conjuntos de dados observacionais, como SNIa (Type Ia Supernova), CMB (Cosmic Microwave Background), BAO (Baryon Acoustic Oscillations), BBN (Big Bang Nucleosynthesis) e OHD (Observational Hubble Data), para estimar tanto a idade do Universo quanto os parâmetros livres do modelo.

Figura 14 – A evolução do parâmetro de desaceleração  $q$ , como uma função do *redshift*  $z$ , para  $D = 2,2$  e  $\tilde{\Omega}_0^{(m)} = 0,2$  (linha sólida),  $\tilde{\Omega}_0^{(m)} = 0,26$  (tracejada),  $\tilde{\Omega}_0^{(m)} = 0,3$  (ponto-tracejada), e  $\tilde{\Omega}_0^{(m)} = 0,4$  (pontilhada).



Fonte: Costa et al. (2023, p.10)

Figura 15 – A evolução do parâmetro de desaceleração  $q$ , como uma função do *redshift*  $z$ , para  $\tilde{\Omega}_0^{(m)} = 0,264$  e  $D = 2$  (linha sólida),  $D = 2,1$  (tracejada),  $D = 2,4$  (ponto-tracejada), e  $D = 2,8$  (pontilhada).



Fonte: Costa et al. (2023, p.10)

### 7.5.1 Parâmetros observacionais em CCF

Nesta seção, comparamos nossos resultados teóricos com observações. Examinamos cinco conjuntos de dados significativos, nomeadamente BAO, SNIa, CMB, BBN e OHD. Alguns artigos sugerem que o Dados Observacionais do Hubble (OHD), obtido com base no *redshift*, pode ser comparado com o conjunto de dados SNIa. Se o leitor estiver interessado, pode consultar a referência [210] e outras fontes relevantes. A maior amostra combinada de SNIa, denominada Amostra Pantheon, consiste em 1048 SNIa na faixa de *redshift* de  $[0,01, 2,3]$ , conforme apresentado por Scolnic et al. [126]. Nesta análise, usamos o conjunto de dados Pantheon SNIa,

que consiste em 40 pontos de dados no intervalo de  $0,014 < z < 1,61$ . Na referência [211], a introdução de  $\chi_{SN}^2$  como

$$\chi_{SN}^2(p) = S_2(p) - \frac{S_1^2(p)}{S_0} + \ln \frac{S_0}{2\pi} + \ln |2\pi S_{SN}| \quad , \quad (7.48)$$

no qual

$$S_0 = V \cdot S_{SN}^{-1} \cdot V^T \quad , \quad S_1 = W \cdot S_{SN}^{-1} \cdot V^T \quad , \quad S_2 = W \cdot S_{SN}^{-1} \cdot W^T \quad , \quad (7.49)$$

onde temos a matriz de covariância, denotada por  $S$ , calculada usando a amostra binned Pantheon, considerando erros estatísticos e sistemáticos. Além disso,  $V$  é um vetor linha que consiste em elementos unitários, enquanto  $W_i$  representa a diferença entre os módulos de distância,  $\mu_{b,i}$  e  $\mu(z_i)$ . Vimos na seção 3.4 que o módulo de distância é definido em termos da magnitude aparente,  $m(z)$ , obtida pela equação (3.27).

As constantes de normalização independentes do modelo cosmológico podem ser eliminadas para este conjunto de dados específico. Posteriormente, incorporamos os dados obtidos pela observação de assinaturas acústicas no aglomerado de galáxias em grande escala. Ao utilizar os dados BAO, é possível minimizar o  $\chi_{BAO}^2$  definido como [212]

$$\chi_{BAO}^2 = Y^T C_{BAO}^{-1} Y \quad . \quad (7.50)$$

Como os dados SNIa e BAO contêm informações valiosas sobre o Universo em *redshifts* mais baixos, incorporamos as informações do deslocamento da CMB considerando a likelihood da CMB. Esta likelihood é discutida na Tabela 1 da ref. [213] e concentra-se na escala angular do horizonte sonoro no último espalhamento, denotado como  $l_a$ , bem como no parâmetro de densidade bariônica. Ao incluir esta informação, planejamos explorar toda a história da expansão que conduz à última superfície de espalhamento. Para conseguir isso, nos referimos às equações (22)–(33) na referência [214]. Além disso, a Nucleossíntese do Big Bang (BBN) oferece um ponto de dados que ajuda a restringir principalmente  $\Omega_0^{(b)}$ , conforme mencionado no trabalho de Serra et al. [215].

O  $\chi_{BBN}^2$  é dado por:

$$\chi_{BBN}^2 = \frac{(\Omega_0^{(b)} h^2 - 0,022)^2}{0,002^2} \quad . \quad (7.51)$$

Finalmente, incorporamos adicionalmente os dados obtidos a partir do parâmetro observacional de Hubble. Nesta investigação específica, utilizamos os 31 pontos de dados derivados das estimativas recentes e precisas de  $H(z)$  na faixa de desvio para o vermelho de  $0,07 \leq z \leq 1,965$ . Esses pontos de dados específicos são independentes dos pontos de dados da Oscilação Acústica Bariônica (BAO) e foram apresentados inicialmente em [216]. Neste caso, podemos escrever:

$$\chi_{OHD}^2(p) = \sum_i \frac{(H(z_i, p) - H_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (7.52)$$

onde  $\sigma_i$  é o erro gaussiano no valor medido de  $H_i$ .

O modelo  $\Lambda$ CDM, também conhecido como Modelo de Concordância, é amplamente aceito na cosmologia, pois se ajusta com precisão às observações atuais. Foi extensivamente testado usando várias medições cosmológicas. Nossos resultados de análise estatística são apresentados na Tabela 1. O modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, por outro lado, introduz um parâmetro adicional independente ( $\alpha$  ou  $D$ ) que representa a não localidade associada à derivada fracionária. A análise estatística deste modelo é apresentada na Tabela 2.

Tabela 1 – Os parâmetros de melhor ajuste com níveis de confiança (CLs)  $1\sigma$  e  $2\sigma$  para o modelo FLRW.

Parâmetro	68% CL	95% CL	Valor de melhor ajuste
$\Omega_0^{(cdm)}$	$0,226^{+0,020}_{-0,018}$	$0,226^{+0,033}_{-0,036}$	$0,226^{+0,044}_{-0,048}$
$\Omega_0^{(b)}$	$0,0476^{+0,0015}_{-0,0018}$	$0,0476^{+0,0034}_{-0,0032}$	$0,0476^{+0,0045}_{-0,0037}$
$\Omega_0^{(m)}$	$0,274^{+0,021}_{-0,018}$	$0,274^{+0,034}_{-0,037}$	$0,274^{+0,040}_{-0,050}$
$\Omega_0^{(k)}$	$0,052 \pm 0,045$	$0,052^{+0,089}_{-0,089}$	$0,05^{+0,11}_{-0,11}$
$H_0$	$68,9 \pm 1,2$	$68,9^{+2,3}_{-2,3}$	$68,9^{+2,7}_{-3,0}$
$\chi^2_{min}$	$68,6^{+1,3}_{-3,3}$	$68,6^{+5,6}_{-4,2}$	$69^{+9}_{-5}$

Fonte: Costa et al. (2023, p.12)

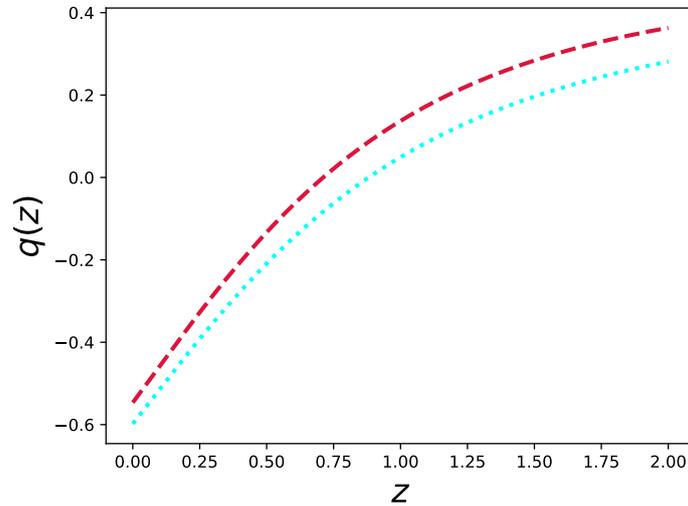
Tabela 2 – Os parâmetros de melhor ajuste com níveis de confiança (CLs)  $1\sigma$  e  $2\sigma$  para o modelo FLRW fracionário.

Parâmetro	68% CL	95% CL	Valor de melhor ajuste
$\tilde{\Omega}_0^{(cdm)}$	$0,226 \pm 0,018$	$0,226^{+0,036}_{-0,038}$	$0,226^{+0,046}_{-0,050}$
$\tilde{\Omega}_0^{(b)}$	$0,0480 \pm 0,0018$	$0,0480^{+0,0036}_{-0,0036}$	$0,0480^{+0,0052}_{-0,0045}$
$\tilde{\Omega}_0^{(m)}$	$0,274 \pm 0,018$	$0,274^{+0,032}_{-0,036}$	$0,274^{+0,045}_{-0,049}$
$\tilde{\Omega}_0^{(k)}$	$0,049^{+0,050}_{-0,060}$	$0,05^{+0,11}_{-0,10}$	$0,05^{+0,14}_{-0,13}$
$H_0$	$68,6^{+1,2}_{-1,4}$	$68,6^{+2,6}_{-2,4}$	$68,6^{+3,5}_{-3,4}$
$D$	$2,0069^{+0,0036}_{-0,0061}$	$2,007^{+0,011}_{-0,0087}$	$2,007^{+0,015}_{-0,010}$
$\chi^2_{min}$	$68,4^{+1,5}_{-3,3}$	$68,4^{+5,8}_{-4,4}$	$68^{+9}_{-5}$

Fonte: Costa et al. (2023, p.13)

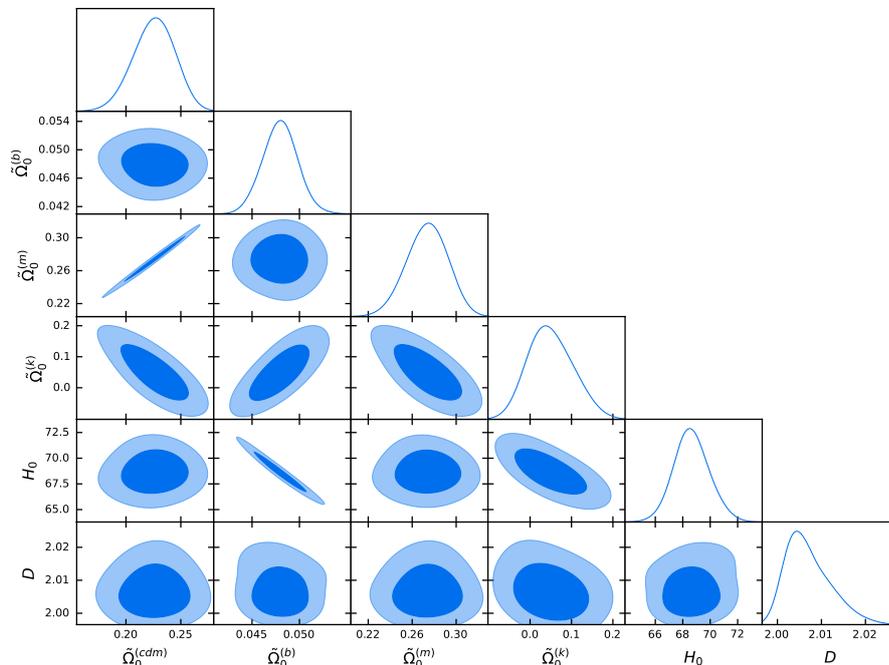
A Figura 16 mostra a evolução do parâmetro de desaceleração  $q(z)$  em relação ao *redshift* para os modelos  $\Lambda$ CDM e fracionário  $\Lambda$ CDM. Como podemos ver nesta figura, o parâmetro de desaceleração do modelo padrão da cosmologia é relativamente maior do que o parâmetro de desaceleração fracionária em todos os *redshifts*. A Figura 17 ilustra as regiões de confiança  $1\sigma$  e  $2\sigma$  que são obtidas ajustando o modelo fracionário  $\Lambda$ CDM a um conjunto abrangente de dados, incluindo Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO), Supernovas (SN), Fundo Cósmico de Microondas (CMB), Nucleossíntese do Big Bang (BBN) e Dados Observacionais do Hubble (OHD). Este processo de ajuste determina a melhor concordância possível entre o modelo e os dados observados. A fim de avaliar melhor a precisão do modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, a Tabela 2 foi preparada para mostrar a consistência entre os valores derivados de  $\tilde{\Omega}_m$  e  $H_0$  obtidos do BAO+SN Conjuntos de dados +CMB+BBN+OHD e os valores correspondentes relatados pela Colaboração Planck 2018. Ao comparar os dois, podemos obter informações valiosas sobre a confiabilidade dos nossos ajustes. Além disso, a Figura 18 foi incluída para fornecer uma representação visual do desempenho de nossos ajustes em comparação com o modelo  $\Lambda$ CDM bem estabelecido. Vale ressaltar que tanto o modelo fracionário  $\Lambda$ CDM quanto o modelo  $\Lambda$ CDM apresentam concordância com as observações cosmológicas mais atualizadas no que diz respeito aos seus respectivos valores do parâmetro de desaceleração  $q_0$  e o *redshift* de transição associada  $z_t = 0,72$ . Isto confirma, ainda mais, os resultados obtidos nesta tese.

Figura 16 – A evolução do parâmetro de desaceleração  $q(z)$  é mostrada contra o *redshift*. A linha pontilhada representa o modelo  $\Lambda$ CDM ( $D = 2$ ), enquanto a linha tracejada representa o modelo fracionário  $\Lambda$ CDM para os dados da Tabela 2 ( $D = 2,007$ ).



Fonte: Costa et al. (2023, p.12)

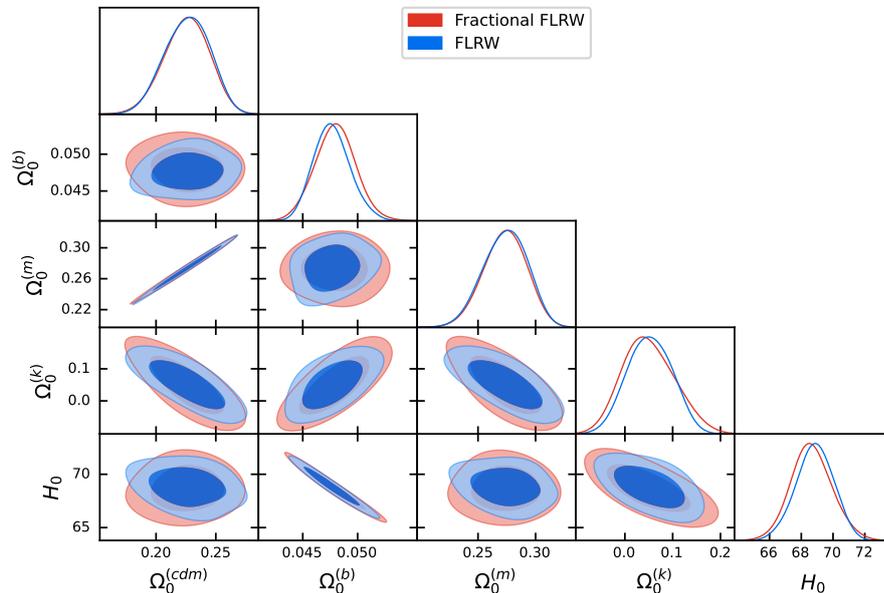
Figura 17 – Os contornos bidimensionais e as distribuições de probabilidades unidimensionais representam os parâmetros fracionários do modelo  $\Lambda$ CDM com 68% CL e 95% CL, respectivamente.



Fonte: Costa et al. (2023, p.12)

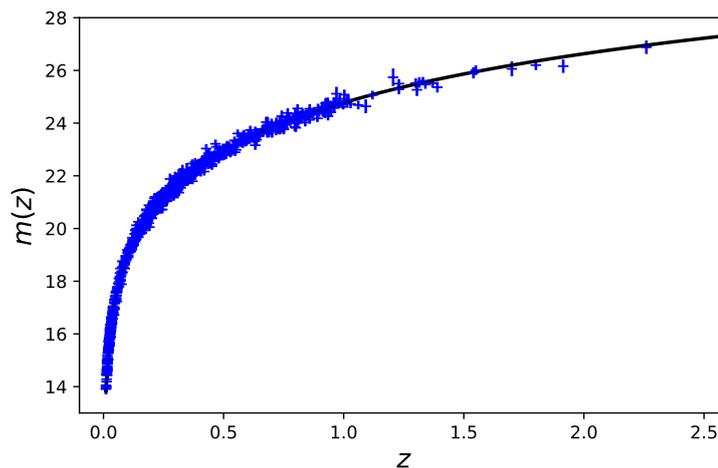
Observações do Tipo SNIa fornecem dados cruciais para a compreensão da expansão do Universo, como também servem como evidência primária da sua expansão acelerada. Para obter os melhores resultados possíveis, comparamos a magnitude aparente, observada da detec-

Figura 18 – Os contornos de restrição 68% e 95% no parâmetro de densidade de matéria escura fria  $\Omega_0^{(cdm)}$ , parâmetro de densidade de bárion  $\Omega_0^{(b)}$ , parâmetro de densidade de matéria  $\Omega_0^{(m)}$ , parâmetro de densidade de curvatura  $\Omega_0^{(k)}$  e parâmetro de Hubble  $H_0$  ao usar dados do BAO+SN+CMB+BBN+OHD.



Fonte: Costa et al. (2023, p.13)

Figura 19 – A magnitude aparente das SN (pontos de dados) é comparado com a magnitude aparente teoricamente prevista (linha sólida) em um modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, com os dados da Tabela 2.

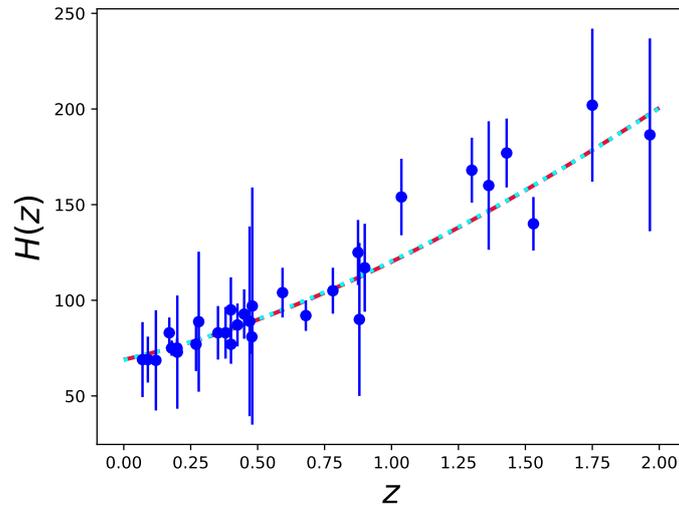


Fonte: Costa et al. (2023, p.14)

ção de SNIa, com os valores teórico da equação (3.27). Nesse sentido, utilizamos a amostra Pantheon, sendo um conjunto de dados atualizado de SNIa com 1048 módulos de distância ( $\mu$ ) em vários *redshifts* no intervalo de  $0,01 < z < 2,26$ . Na Figura 19, ilustramos o comportamento da magnitude aparente  $m$  em função do *redshift*  $z$ , através das equações (3.27) e (7.46), com os

dados da Tabela 2 e uma magnitude absoluta de  $M = -19,36$  [127]. Podemos assim comparar nosso modelo com o modelo  $\Lambda$ CDM, mostrando semelhanças significativas.

Figura 20 – O gráfico mostra a evolução do parâmetro Hubble,  $H(z)$ , em unidades de  $\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  em relação ao *redshift*  $z$ , com barras de erro. A linha tracejada vermelha representa a dinâmica do parâmetro Hubble obtido da equação (7.46). A linha pontilhada azul corresponde ao comportamento do parâmetro de Hubble para  $D = 2$ . Os valores dos parâmetros de densidade, parâmetros de densidade fracionária e constante de Hubble na época atual são os valores mais adequados das Tabelas 1 e 2, respectivamente.



Fonte: Costa et al. (2023, p.14)

O parâmetro Hubble plotado em relação ao *redshift*  $z$  é representado na Figura 20, utilizando os dados extraídos das Tabelas 1 e 2. Torna-se evidente que o nosso modelo demonstra um notável grau de concordância com a CC, substanciando assim a sua validade e confiabilidade.

### 7.5.2 O problema da sincronicidade

Revisaremos a propriedade crítica do modelo  $\Lambda$ CDM relacionada ao problema de sincronicidade. O caso limite de  $D = 2$  na equação de Friedmann (7.46) nos dá a equação de Friedmann (3.13) no modelo padrão ( $\Lambda$ CDM) da cosmologia:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \frac{\Omega_0^{(i)}}{a^{3(1+\omega_i)}} + \frac{\Omega_0^{(k)}}{a^2}, \quad (7.53)$$

onde  $\Omega_0^{(i)} = \frac{8\pi G\rho_0^{(i)}}{3H_0^2}$ , e  $\Omega_0^{(k)} = -\frac{k}{H_0^2}$ . As soluções da equação acima mencionada para um Universo plano, quando a radiação, a poeira cósmica ou a constante cosmológica dominam, são

dadas por

$$a(t) = \begin{cases} \left( \frac{\sqrt{H_0 \Omega_0^{(r)}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} & , \quad \omega = \frac{1}{3} \quad , \\ \left( \frac{2\sqrt{H_0 \Omega_0^{(m)}}}{3} \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} & , \quad \omega = 0 \quad , \\ C \exp \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) & , \quad \omega = -1 \quad , \end{cases} \quad (7.54)$$

onde, na última igualdade,  $C$  é uma constante de integração. É fácil verificar que temos  $Ht = 1/2$  e  $Ht = 2/3$  nos dois primeiros casos, respectivamente. No contexto da expansão da lei de potência, a razão entre a idade do Universo e o tempo de Hubble é uma constante. Esta é uma propriedade geral. No entanto, quando a constante cosmológica domina na cosmologia tardia, temos a equação  $Ht = \sqrt{\Lambda/3}t$ . Isto significa que na época atual, no que diz respeito às observações cosmológicas, temos  $t_0 \propto \sqrt{3/\Lambda}$ . Esta equação, na verdade, é uma expressão do problema de sincronicidade da idade do Universo.

Analisemos o efeito do parâmetro fracionário de Lévy no problema de sincronicidade da idade do Universo. Obtemos soluções explícitas para o fator de escala em um Universo plano com um fluido perfeito monocomponente. Assim, consideremos que a  $i$ -ésima componente é dominada na equação de Friedmann (7.46). Em relação às Equações (7.46) e (7.47), o fator de escala e o parâmetro de desaceleração para um fluido perfeito com a equação de estado  $p^{(i)} = \omega_i \rho^{(i)}$  são

$$a(t) = \left( \frac{3H_0[1 + \omega_i(3 - D)]\tilde{\Omega}_0^{(i)}}{2} \right)^{\frac{2}{3(1 + \omega_i(3 - D))}} t^{\frac{2}{3(1 + \omega_i(3 - D))}} \quad , \quad (7.55)$$

$$q_i = \frac{1 + 3\omega_i(3 - D)}{2} \quad . \quad (7.56)$$

Isso demonstra que no Universo dominado pela radiação ( $\omega = 1/3$ ), a taxa de expansão é  $a(t) \propto t^{\frac{2}{6-D}}$ . Além disso, vale ressaltar que a natureza do fator de escala em um Universo dominado pela matéria ( $\omega = 0$ ) permanece não afetada pelo parâmetro fracionário de Lévy e é dada por  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ . Por outro lado, para um Universo deS ( $\omega = -1$ ) e  $D \neq 2$ , a forma de fator de escala acima se reduz a  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(D-2)}}$ . Além disso, conforme a equação (7.56), pode-se inferir que no contexto da cosmologia fracionária, nosso universo experimentou um período de desaceleração durante as fases dominadas pela radiação e pela matéria sem pressão. Resumindo, ao considerar a presença de radiação e matéria sem pressão, a cosmologia fracionária é incapaz de elucidar a transição de fase cósmica da desaceleração para a aceleração que ocorreu ao longo da história do Universo, a menos que a inclusão da energia escura (no nosso modelo, uma constante cosmológica) seja considerada. Além disso, o parâmetro de desaceleração (7.56) mostra que temos um Universo acelerado para  $D < 8/3$  valores restritos de  $D$ .

A solução (7.55) mostra que no modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, o Universo segue uma expansão acelerada pela lei de potência mesmo em tempos recentes, ao contrário do modelo padrão, onde a aceleração tardia é explicada pela expansão exponencial de deS. No modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, para o  $i$ -ésimo componente do fluido cósmico, temos:

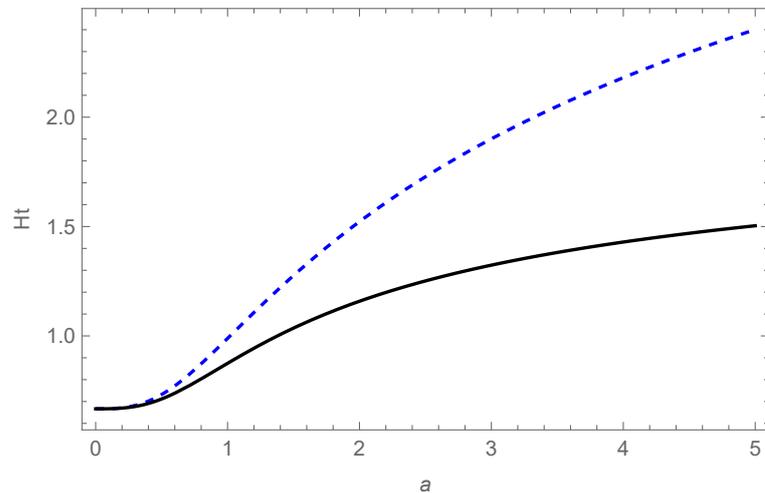
$$Ht = \frac{2}{3(1 + \omega_i(3 - D))} \quad . \quad (7.57)$$

Assim, para um Universo de deS, encontramos:

$$Ht = \frac{2}{3(D-2)} \quad . \quad (7.58)$$

A Figura 21 mostra a evolução de  $Ht$  em relação ao fator de escala tanto para o modelo padrão da cosmologia quanto para sua extensão fracionária. Observamos que na época atual, ambos os modelos possuem valores muito próximo para  $H_0t_0$ . No entanto, no futuro, os seus comportamentos irão divergir. No modelo  $\Lambda$ CDM,  $Ht$  aumenta para  $a > 1$ , enquanto no caso do  $\Lambda$ CDM fracionário, permanece constante, como observamos no referido fluido monocomponente.

Figura 21 – A evolução de  $Ht$  com o fator de escala é representada para  $D = 2$  (tracejado) e  $D = 2,3$  (linha). Os valores de melhor ajuste para os parâmetros de densidade e parâmetros de densidade fracionária são substituídos nas Tabelas 1 e 2, respectivamente.



Fonte: Costa et al. (2023, p.16)

O conteúdo do Universo foi predominantemente composto de poeira cósmica durante a maioria de sua história. Em relação a este fato e ignorando os termos de radiação e curvatura, podemos calcular a idade do Universo através da equação (3.15) da seguinte maneira:

$$Ht = H(a) \int_0^a \frac{dx}{xH(x)} \quad , \quad H(x) = x^{\frac{3(2-D)}{2}} \left( \frac{\tilde{\Omega}_0^{(m)}}{x^3} + 1 - \tilde{\Omega}_0^{(m)} \right)^{\frac{3-D}{2}} \quad . \quad (7.59)$$

Utilizando a equação acima, descobrimos que quando  $2 \leq D < 3$ , a idade atual do Universo, em unidades de tempo de Hubble, está restrita a:

$$0,6667 < H_0t_0 \leq 0,9887 \quad . \quad (7.60)$$

A Figura 22 ilustra como a idade atual do Universo é restrita para diferentes valores de parâmetros fracionários. Com base na desigualdade (7.60), podemos observar que quando o parâmetro fracionário  $D$  se aproxima de 2, o valor de  $H_0t_0$  torna-se quase igual a um. Porém, no modelo padrão da cosmologia, onde  $D = 2$ ,  $Ht$  tende ao infinito em um futuro distante. Para outros valores de parâmetros fracionários,  $Ht$  permanece finito. Com base nas informações

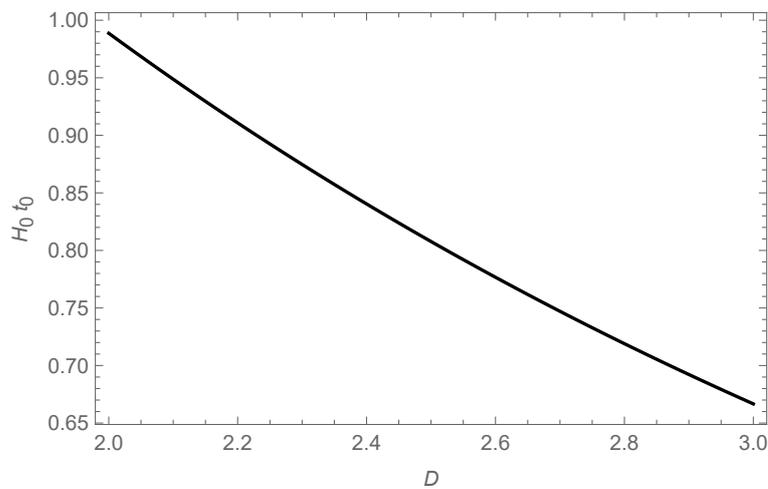
apresentadas na Tabela 2, o parâmetro fracionário tem um valor ajustado de  $D = 2,007$ . Para este valor de  $D$ , obtemos:

$$H_0 t_0 = 0,9858 \quad , \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Ht = 95,238 \quad , \quad t_0 = 13,8196 \text{ Gyr} \quad . \quad (7.61)$$

Além disso, no limite superior do parâmetro fracionário,  $D \rightarrow 3$ , temos:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} Ht = 0,6667 \quad . \quad (7.62)$$

Figura 22 – A dependência de  $H_0 t_0$  com o parâmetro fracionário,  $D$ . O valor mais adequado do parâmetro de densidade fracionária de poeira cósmica é substituído conforme a Tabela 2.



Fonte: Costa et al. (2023, p.16)

A análise realizada mostra que no modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, o valor de  $Ht$  é sempre finito quando o Universo se expande para o infinito e, na época atual, seu valor é bem próximo da unidade.

Vale ressaltar que a cosmologia fracionária pode gerar consequências consideráveis numa fase inflacionária. Utilizar um campo escalar com um potencial apropriado e dominante em comparação com a densidade de energia inicial do Universo é o método típico empregado para atingir a inflação. Esta abordagem inflacionária desencadeia uma rápida expansão do fator de escala do Universo. De acordo com as teorias para a inflação, esta expansão se manifesta como um crescimento exponencial, semelhante ao espaço deS, à medida que o campo escalar se move gradualmente em direção ao seu mínimo global. Ao considerar que o potencial do campo escalar produz a inflação, podemos deduzir, com base no parâmetro de desaceleração fracionária, que durante o início do Universo, a aceleração foi experimentada quando o valor de  $D$  estava entre 2 e 2,667. Esta faixa específica de valores  $D$  estabelece um modelo inflacionário de lei de potência e, dentro deste modelo, o parâmetro fracionário  $\alpha$  assume um papel significativo. Se assumirmos que a época inflacionária ocorreu em um intervalo de tempo de  $t_i = 10^{-36}$  s, e  $t_f = 10^{-33}$  s, podemos calcular o número de  $e$ -foldings:

$$N = \ln \left( \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \frac{2}{3(D-2)} \ln \left( \frac{t_f}{t_i} \right) = \frac{2 \ln(10)}{D-2} \quad . \quad (7.63)$$

Obtemos  $D \leq 2,072$  ou  $\alpha \geq 1,866$  se assumirmos um mínimo de 64  $e$ -foldings para resolver problemas comuns do Big Bang.

### 7.5.3 Conclusões para CCF no Universo de FLRW

O conceito de sincronicidade é intrigante porque o tempo cósmico adimensional, representado como  $H_0 t_0$ , pode variar significativamente no modelo padrão da cosmologia. Este modelo explica a expansão acelerada tardia como um Universo deS. Neste modelo, a coincidência atual do tempo cósmico e do tempo de Hubble é válida apenas para o momento presente. No entanto, a idade do Universo não estará tão próxima do tempo de Hubble no passado ou no futuro, e  $Ht$  poderá até ser infinito no futuro.

Neste trabalho, observamos que no modelo fracionário  $\Lambda$ CDM, durante tempos recentes, quando a constante cosmológica é dominada, o Universo exhibe um fenômeno notável e intrigante caracterizado por uma expansão acelerada pela lei de potência. Isto confronta fortemente com o modelo padrão, no qual uma expansão exponencial deS é obtida para explicar a aceleração tardia. Portanto, a idade do Universo está continuamente ligada ao tempo de Hubble em qualquer momento, criando uma relação proporcional entre os dois fenômenos. Isto contrapõe com a estrutura cosmológica tradicional, onde a época atual na vasta extensão do Universo é percebida como um instante específico no tempo.

Nossa análise estatística revelou que o parâmetro fracionário proposto por Lévy, que caracteriza o grau de não localidade em um sistema, é determinado como tendo o melhor valor de  $\alpha = 1,986$ . Também determinamos a idade do Universo através do estudo minucioso de vários fenômenos cosmológicos e do uso de técnicas sofisticadas. Nossos cálculos mostram que a idade do Universo é da ordem de  $t_0 = 13,8196$  bilhões de anos. Além disso, ao calcular a idade adimensional do Universo, obtivemos que  $H_0 t_0 = 0,9858$ , e  $Ht = 95,238$  para um futuro distante. Estes resultados indicam que o nosso modelo é um modelo cosmológico plausível. Abrange com sucesso um estágio inicial crucial de domínio da matéria, essencial para a formação e surgimento de estruturas intrincadas no Universo. Além disso, o nosso modelo incorpora também uma fase de aceleração mais recente que corresponde harmoniosamente às observações feitas no campo da cosmologia.

## 8 COSMOLOGIA QUÂNTICA FRACIONÁRIA

Resultados recentes da gravidade quântica, como a mudança da dimensão do espaço-tempo com a variação da escala de comprimento, deram um impulso significativo ao uso crescente do cálculo fracionário na CQ [40, 44, 48, 51, 53]. Como os operadores íntegro-diferenciais fracionários podem descrever esses processos, o uso de processos fractais na física quântica é um precursor da incorporação do cálculo fracionário na teoria quântica [217].

O principal objetivo deste capítulo é reexaminar o Universo de deS no contexto da Cosmologia Quântica Fracionária (CQF) como uma nova ferramenta para estudar o estado inicial do Universo [1]. Estamos cientes das dificuldades matemáticas e interpretativas presentes. No entanto, aspectos novos podem ser encontrados. Na seção 6.3, apresentamos uma revisão do modelo no contexto da CQ canônica e obtemos as funções de onda semiclássicas. Neste capítulo, foquemos na extensão fracionária do espaço-tempo de deS. Então, ao analisar as implicações da CQF, examinamos por que elas podem ser mais gerais do que aquelas alcançadas na seção 6.3.

### 8.1 Espaço fechado em CQF

Vamos agora focalizar nossa discussão na formulação quântica fracionária do espaço-tempo de deS. Portanto, partindo da equação (6.23), nossa equação WDW fracionária de um espaço-tempo de deS é

$$\left(-\frac{d^2}{da^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(a) + \frac{9\pi^2 m_{\text{P}}^{\alpha+2}}{4} \left(a^2 - \frac{\Lambda}{3} a^4\right) \Psi(a) = 0 \quad . \quad (8.1)$$

Na aproximação WKB, reescrevemos a função de onda como em (7.27) para obter:

$$|\pi_a|^\alpha + \frac{9\pi^2}{4} m_{\text{P}}^{2+\alpha} a^2 \left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right) = 0 \quad . \quad (8.2)$$

onde  $L$  é dado por (6.40).

Dentro do nosso procedimento de aproximação WKB escolhido, podemos mostrar que as funções de onda WKB fracionária correspondentes, no caso das propostas de Hartle–Hawking e Linde–Vilenkin, ainda carregam a estrutura formal como em (6.36) ou (6.35). Vamos observar que a presença explícita do parâmetro  $\alpha$  introduzido pelo uso da derivada de Riesz traz modificações significativas.

A função de onda WKB Linde–Vilenkin da equação WDW fracionária unidimensional acima, é obtida isolando o momento  $\pi_a$  em (8.2), ou seja,

$$|\pi_a| = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{D-1} m_{\text{P}}^D \left[a^2 \left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right)\right]^{\frac{D-1}{2}} \quad , \quad (8.3)$$

onde  $D$  é a dimensão que depende do parâmetro fracionário de Lévy,  $\alpha$ ,

$$D = \frac{2 + \alpha}{\alpha} \quad , \quad 2 \leq D < 3 \quad . \quad (8.4)$$

Considerando a função de onda WKB Linde–Vilenkin (6.36) e o valor de  $\pi_a$ , obtido da equação

(8.3). Realizando a integração e desconsiderando o fator pré-exponencial, encontramos:

$$\Psi_{LV}(a) \simeq \begin{cases} e^{Ca^D F(\frac{D}{2}, \frac{1-D}{2}; 1 + \frac{D}{2}; (\frac{a}{L})^2)} & , \quad a < L \\ e^{-iCa^D F(\frac{D}{2}, \frac{1-D}{2}; 1 + \frac{D}{2}; (\frac{a}{L})^2) + i\frac{\pi}{4}} & , \quad a \geq L \end{cases} \quad (8.5)$$

onde  $C := (\frac{3\pi}{2})^{D-1} m_{\text{P}}^D$ , e  $F(a, b; c; z)$  é a função hipergeométrica.

Semelhantemente, é possível escrever a função de onda de Hartle–Hawking em termos de funções hipergeométricas.

Consideremos agora as distribuições de probabilidade de Linde–Vilenkin e Hartle–Hawking. De acordo com (6.37) e (6.39), elas são escritas como:

$$\begin{aligned} P_{LV} &= \frac{|\Psi_{LV}(L)|^2}{|\Psi_{LV}(0)|^2} \propto e^{-2 \int_0^L |\pi(a')| da'} = e^{-2Ca^D F(\frac{D}{2}, \frac{1-D}{2}; 1 + \frac{D}{2}; (\frac{a'}{L})^2)} \Big|_0^L, \\ &= e^{-2CL^D \frac{\Gamma(1+\frac{D}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+D)}} = e^{-\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{D-1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(D)}{\Gamma(D+\frac{1}{2})} \left(\frac{3}{8\pi G^2 V_0}\right)^{\frac{D}{2}}}, \\ P_{HH} &= \frac{|\Psi_{HH}(L)|^2}{|\Psi_{HH}(0)|^2} = P_{LV}^{-1}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Comparando as equações (6.37) e (6.38) com o resultado acima, podemos definir uma entropia fracionária<sup>1</sup> como

$$S_{\text{Frac}} := \frac{A_{\text{Frac}}}{4G}, \quad (8.7)$$

onde

$$A_{\text{Frac}} := 4\sqrt{\pi} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{D-1} \frac{\Gamma(D)}{\Gamma(D+1/2)} l_{\text{P}}^2 \left(\frac{L}{l_{\text{P}}}\right)^D, \quad (8.8)$$

é a área fractal do horizonte deS,  $D$  é a dimensão fractal do horizonte e  $l_{\text{P}} = 1/m_{\text{P}}$  é o comprimento de Planck. Especificamente, na expressão acima a superfície do horizonte é uma superfície fractal cuja dimensão  $D$  é dado por (8.4). Observe que para  $\alpha = 2$  (ou equivalentemente,  $D = 2$ ) a área fractal do horizonte reduzirá a área suave original do espaço de deS. As equações (8.7) e (8.8) mostram que aumentar o parâmetro fracionário de Lévy  $\alpha$ , também aumenta a fractalidade da área do horizonte, o que por sua vez causa a mudança da entropia efetiva de Gibbons–Hawking, tornando-a maior do que no caso padrão suave.

Vamos elaborar mais sobre as implicações de (8.2), e estabelecer como a situação na proposta fracionária, os casos tornam-se bastante diferentes. A equação (8.2) permite extrair e escrever que o hamiltoniano ADM fracionário efetivo é dado por:

$$H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} = -N \left\{ \frac{|\pi_a|^\alpha}{3\pi m_{\text{P}}^\alpha a(t)} + U(a) \right\}, \quad (8.9)$$

<sup>1</sup>Na referência [207] uma formulação espaço-fracionária para o buraco negro de Schwarzschild permitiu formular que o horizonte revelou uma estrutura fractal e dependente de  $\alpha$ . A entropia fracionária proposta do buraco negro é:  $S_{\text{BH}} = \left(\frac{A_{\text{BH}}}{4G}\right)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} = \frac{A_{\text{Frac}}}{4G}$ , por meio do qual é definido  $A_{\text{Frac}}$ . No espaço-tempo de deS apresentado, foi proposto uma definição de entropia que é semelhante:  $S_{\text{des}} = \frac{A_{\text{des}}}{4G}$ . Acharmos que é aceitável perguntar se os resultados para a estrutura fractal do horizonte de eventos (e a entropia correspondente) são um comportamento geral.

onde

$$U(a) := \frac{3\pi m_{\text{P}}^2}{4} a(t) \left( 1 - \frac{8\pi V_0}{3m_{\text{P}}^2} a(t)^2 \right) . \quad (8.10)$$

Então, as equações de Hamilton,  $\dot{a} = \partial H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} / \partial \pi_a$ ,  $\dot{\pi}_a = -\partial H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} / \partial a$  com o vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H}^{(\alpha)} = H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} / N = 0$  nos leve às equações fracionárias de Friedmann em referencial comóvel ( $N = 1$ ):

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{a^{2(1-D)}}{(D-1)^2} \left( \frac{2\sqrt{G}}{3\pi} \right)^{2(D-2)} \left( \frac{a^2}{L^2} - 1 \right)^{3-D} , \quad (8.11)$$

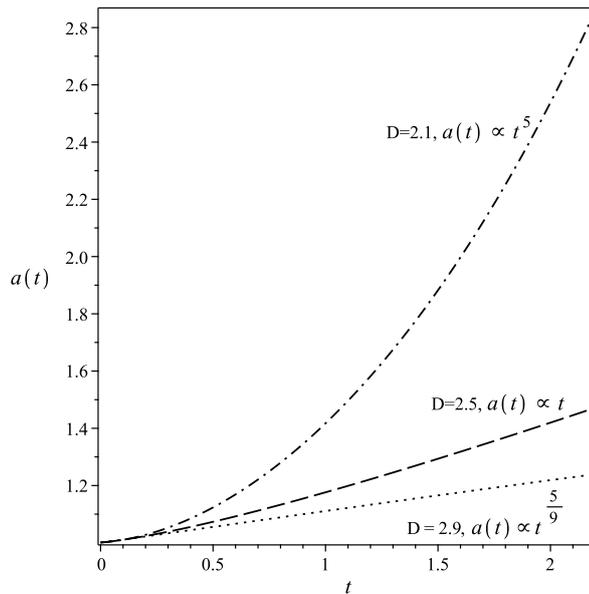
$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{(5-2D)(-U)^{2-D}}{(D-1)^2 (3\pi)^{D-2} a^D} \left( \frac{a^2}{L^2} + \frac{D-2}{5-2D} \right) , \quad (8.12)$$

onde  $L$  é definido por (6.40).

Observe também que para  $D = 2$  as equações de campo acima são reduzidas as equações originais usuais de Friedmann. Além disso, como mostram as equações de campo acima, para  $D \neq 2$  (ou equivalentemente  $\alpha \neq 2$ ; ver Figura 23), nosso Universo modelo deS não se expande exponencialmente. O Universo nuclea do nada sendo acelerado apenas para  $D < 2,5$ , aumentando como uma expansão da lei de potência:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2(D-2)}} . \quad (8.13)$$

Figura 23 – Gráfico do fator de escala para três valores de dimensão fractal,  $D = 2,1$  (traço-ponto),  $D = 2,5$  (traço) e  $D = 2,9$  (ponto). O comportamento assintótico dos fatores de escala correspondentes também é indicado no gráfico. Usamos unidades em que,  $m_{\text{P}} = L = 1$ .



Fonte: Jalalzadeh, Costa e Moniz (2022, p.5)

O número de  $e$ -foldings antes do  $t_{\text{f}}$  de um período de inflação e a partir de um momento  $t_*$  torna-se  $N_* = \ln(t_{\text{end}}/t_*) / (2(D-1))$ . Por exemplo, para  $D = 2,001$ , encontramos  $N_* =$

$50 \ln(t_{\text{end}}/t_*) > 50$ ; a escala que observamos a partir dos dados cósmicos de fundo em micro-ondas está conforme o  $e$ -folding no intervalo  $50 < N_* < 60$  [218]. Normalmente, este tipo de expansão da lei de potência pode ser realizada se um campo escalar com potencial exponencial dominar a densidade de energia do Universo num estágio inicial [219]. Como vimos na equação (8.13), na extensão fracionária da CQ, para  $D \neq 2$ , a probabilidade de haver uma expansão da lei de potência é real e sem tal potencial exponencial. Isto permite levantar a possibilidade de que a inflação, um estágio inicial acelerado de expansão, possa ocorrer da perspectiva da MQF. Isto é interessante e a forma usual de inflação de deS ocorrerá apenas para  $D = 2$ .

Acrescentemos que devido ao sinal negativo em (8.6), o estado sem contorno aumenta não apenas a contribuição de Universos vazios com  $V_0 = 0$  em todo o estado quântico, mas também horizontes altamente fractais com dimensão próxima a três,  $D \rightarrow 3$ . Esses dois efeitos levam à conclusão aparentemente contraditória de que Universos bastante grandes e em desaceleração são infinitamente prováveis do que Universos de tamanho finito. A probabilidade da função de onda de tunelamento como na equação (8.6), por outro lado, promove grandes valores de  $V_0$  simultaneamente com horizonte fractal com dimensão próxima a dois,  $D \rightarrow 2$ , e capaz de induzir uma lei de potência acelerada a cenários de expansão. Como resultado, parece que a fórmula de tunelamento se torna mais atraente dentro da CQF aqui apresentada, quando contrastada com a fórmula sem contornos.

Similarmente ao parágrafo final da subseção 6.4, abordemos novamente os pontos ali introduzidos. No entanto, estendendo o contexto em direção à CQF. Mais precisamente, lembre-se o intervalo geral,  $V_0 \leq 10^{-8} m_P^4$ , derivado da restrição de amplitude nas ondas gravitacionais geradas durante a inflação. De  $V_0 = 10^{-12} m_P^4$ , a distribuição de probabilidade (8.6), produz  $10^{-10^{17}} < P_{\text{LV}} \leq 10^{-10^{10}}$ , onde o limite inferior é obtido para  $D \simeq 3$  e o limite superior é calculado para  $D = 2$ . Assim, o Universo fracionário aqui fechado pode não ser favorecido.

## 8.2 Espaço aberto em CQF

Na verdade, se considerarmos, em vez disso, a criação de Universos compactos, topologicamente não triviais, abertos ou planos (ver referências [176–179]), então a equação WDW fracionária de um espaço-tempo de deS (8.1) torna-se:

$$\left(-\frac{d^2}{da^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(x) + \frac{9\mathcal{V}_k^2 m_P^{\alpha+2}}{16\pi^2} \left(ka^2 - \frac{\Lambda}{3}a^4\right) \Psi(a) = 0 \quad , \quad (8.14)$$

onde  $k = -1, 0$ , e  $\mathcal{V}_k$  denota o volume finito das hipersuperfícies espaciais compactas não triviais [6]. Além disso, o hamiltoniano ADM fracionário efetivo (8.9) será generalizado para:

$$H_{\text{ADM}}^{(\alpha)} = -N \left\{ \frac{2\pi}{3\mathcal{V}_k m_P^\alpha a} |\pi_a|^\alpha + \frac{3\mathcal{V}_k m_P^2}{8\pi} a \left( k - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \right\} \quad . \quad (8.15)$$

A equação fracionária de Friedmann obtida para tal Universo será:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{a^{2(1-D)}}{(D-1)^2} \left(\frac{3\mathcal{V}_k m_P}{4\pi}\right)^{2(D-2)} \left(\frac{a^2}{L^2} - k\right)^{3-D} \quad . \quad (8.16)$$

A solução semiclássica de (8.14) para Universo aberto, ( $k = -1$ ), é obtida isolando o momento  $|\pi_a|$  em (8.15), ou seja,

$$|\pi_a| = \left(\frac{3\mathcal{V}_k}{4\pi}\right)^{D-1} m_P^D \left[ a^2 \left( 1 + \frac{a^2}{L^2} \right) \right]^{\frac{D-1}{2}} \quad . \quad (8.17)$$

Portanto, a função de onda  $\Psi(a)$  é encontrada através da integração:

$$\Psi(a) \simeq \exp \pm \left[ \int_0^a |\pi(a')| da' \right] , \quad (8.18)$$

onde  $|\pi(a')|$  corresponde a equação (8.17). Desconsiderando o fator pré-exponencial, a função de onda é

$$\Psi(a) \simeq \exp \pm \left[ iCa^D F \left( \frac{D}{2}, \frac{1-D}{2}; 1 + \frac{D}{2}; - \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right) \right] , \quad (8.19)$$

onde  $C = \left( \frac{3\gamma_k}{4\pi} \right)^{D-1} m_P^D$ , e um sinal positivo corresponde a um Universo em expansão.

O fator pré-exponencial é uma amplitude que corresponde à  $A/\sqrt{|\pi_a|}$ , com  $A$  uma constante [156]. A aproximação WKB será válida quando esta amplitude variar lentamente, ou seja, para grandes valores do fator de escala.

### 8.3 Espaço plano em CQF

Fazendo uso da equação (8.16), identificamos que para CQF plana, ( $k = 0$ ), a evolução do fator de escala (8.16) e a função de onda semiclássica fracionária são dadas por:

$$a(t) = \pm \left[ \frac{2(D-2)}{(D-1)} \right]^{\frac{1}{2(D-2)}} \left( \frac{4\pi L}{3\gamma_0 m_P} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{t}{L} \right)^{\frac{1}{2(D-2)}} , \quad (8.20)$$

$$\Psi(a) \simeq a^{-1} \exp \pm \left[ \frac{im_P}{2D-1} \left( \frac{3\gamma_0^2 V_0}{2\pi} \right)^{\frac{D-1}{2}} a^{2D-1} \right] , \quad (8.21)$$

onde um sinal positivo em (8.21) corresponde a um Universo em expansão. Observe que para  $D = 2$  a expressão acima se reduz à função de onda semiclássica obtida por Linde em [176]. Esta aproximação se divide em  $a \leq (m_P V_0^{(D-1)/2})^{1/(1-2D)}$ , onde para  $a \gg (m_P V_0^{(D-1)/2})^{1/(1-2D)}$  o Universo pode ser descrito em termos do espaço-tempo clássico. A nossa proposta de um modelo CQF deS para o Universo plano, demonstra ser viável, comparada com as propostas nas referências [168, 177].

Relembrando que durante a inflação, o parâmetro de desaceleração é  $q = -1$ . Porém, na modificação fracionária do mesmo modelo, obtemos:

$$q = -\frac{\ddot{a}/a}{H^2} = 2D - 5 , \quad (8.22)$$

onde usamos (8.20). Conforme a equação (8.22), o Universo inicial é acelerado se  $2 < D < 2,5$ , e para esses valores de  $D$ , temos um modelo inflacionário de lei de potência. Aqui, o parâmetro fracionário de Lévy,  $\alpha$ , desempenha um papel crucial neste modelo.

Supondo que a época inflacionária ocorreu durante um intervalo de tempo  $t_f - t_i = 10^{-37} \text{ s} = 10^8 t_P$  após o tempo de Planck, obtemos o número de  $e$ -foldings como

$$N = \ln \left( \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \frac{1}{2(D-2)} \ln \left( \frac{t_f}{t_i} \right) = \frac{\ln(10)}{2(D-2)} \simeq \frac{1}{D-2} , \quad (8.23)$$

onde usamos a forma fracionária do fator de escala (8.20). Observe que esta expressão (8.23) difere da equação do número de  $e$ -foldings (7.63), porque os fatores de escalas forma obtidos

com métodos diferentes. No caso da CCF, não utilizamos a aproximação WKB para construir a equação fracionária de Friedmann.

Por exemplo, assumindo na equação (8.23) o valor  $D = 2,019$ , obtemos  $N \simeq 60$ , sendo o número mínimo de  $e$ -foldings necessários para resolver os problemas padrão da cosmologia do Big Bang.

#### 8.4 Conclusões para CQF

Na CQF no espaço de deS, o objetivo foi, portanto, empregar uma equação WDW fracionária particular do espaço deS, adotando-a como um modelo de prova. Estamos cientes do escopo restritivo, mas características fascinantes puderam ser recuperadas. Mais concretamente, para uma geometria deS fechada, obtemos a função de onda fracionária de tunelamento (Linde–Vilenkin) e a extensão fracionária da função de onda sem contorno (Hartle–Hawking), seguido pelo cálculo das distribuições de probabilidade correspondentes. Comparando posteriormente essas expressões com as taxas de nucleação usuais correspondentes da função de onda de Linde–Vilenkin e para a função de onda de Hartle–Hawking deS, nossos resultados sugerem que um comportamento fracionário para o horizonte deS pode ser estimado: a função de onda de tunelamento (Linde–Vilenkin) favorece dimensões fracionárias menores que 2,5; enquanto no caso da proposta sem limite (Hartle–Hawking), a função de onda correspondente seleciona um horizonte fracionário com dimensões próximas a 3. Além disso, após a nucleação, o Universo pode entrar em uma fase acelerada de lei de potência (função de onda Linde–Vilenkin) ou pode, em vez disso, prosseguir para uma fase desacelerada (caso Hartle–Hawking). Mesmo diante disso, nossa análise permitiu discutir cenários planos e abertos (compactos não triviais). Como a probabilidade de criação de um Universo inflacionário fechado na proposta de tunelamento é exponencialmente suprimida, um Universo plano ou aberto emerge, sendo favorecido no Universo quântico inflacionário fracionário.

Nosso modelo simples traz uma nova perspectiva, segundo a qual as características da MQF poderiam ter influenciado os estágios iniciais da inflação do Universo. As propriedades de um campo ínflaton são restringidas por observações de flutuações na CMB e na distribuição de matéria do Universo. Apesar de a massa desse ínflaton e sua interação com os campos de matéria não serem determinadas, argumentos bem conhecidos favorecem um campo pesado (escalar) com massa de  $10^{13}$  GeV [220], próximo à escala GUT (Grand Unification Theory), sendo frequentemente usada como evidência da presença de uma nova física na junção das escalas eletrofraca e Planck. Nossas descobertas sugerem que a inflação na CQF pode emergir por meio de uma perspectiva diferente. Ou seja, considerando o horizonte de eventos do Universo nucleado como uma superfície fractal com dimensão  $D$ . Como a proposta de tunelamento indica uma supressão exponencial da probabilidade de criação quântica de um Universo inflacionário fechado, os resultados sugerem que um Universo quântico inflacionário fracionário pode favorecer, em vez disso, Universos planos ou abertos.

Vale ressaltar que o modelo padrão e sua correspondência fracionária produzem resultados completamente diferentes para a evolução do fator de escala: para o caso padrão, o fator de escala  $a(t)$  não apenas acelera com a lei exponencial do tempo, mas também tal evolução é afetada apenas pela matéria (ou seja, o potencial constante; equação (6.53)) e, portanto, o número de  $e$ -folding depende apenas da constante  $L$ . No caso fracionário, o fator de escala é uma função de lei de potência do tempo, sendo completamente independente da matéria; mas em vez disso, apenas o parâmetro fracionário de Lévy  $\alpha$  e o volume do espaço 3-compacto  $\Sigma$ ,  $\mathcal{V}_0$ , determinam como o fator de escala evolui (relação (8.20)). Isso nos dá outra dependência para o número de  $e$ -folding. Tais consequências são interpretadas como características distintas da

gravidade quântica fracionária.

Como mencionado, ao contrário da solução usual de deS (6.53), a evolução do fator de escala associado ao caso fracionário (8.20), depende da geometria global que afeta a topologia do Universo na totalidade. A geometria global do Universo, ou seja, a curvatura espacial e a topologia e consequentemente a forma de todo o Universo, não são determinadas pelas equações do campo gravitacional de Einstein, uma vez que são equações diferenciais que determinam apenas as características locais do espaço-tempo. Portanto, a dependência de 3-volumes do fator de escala é inteiramente um efeito de gravidade quântica fracionária. Como vemos em (8.20), o valor do fator de escala no tempo inicial  $t = L$  é proporcional à inversa da raiz quadrada de  $\mathcal{V}_0$ , de modo que quanto menor o valor do 3-volume, maior será o fator de escala inicial.

Curiosamente, os autores da referência [221] (para uma análise recente, ver [222–224]) mostraram que os dados de 3 anos do WMAP (Wilkinson Microwaves Anisotropy Probe) são consistentes com a possibilidade de vivermos em um ‘pequeno Universo’ em forma de um toro plano de 3-toros  $\mathbb{T}^3$  cujo domínio fundamental é um cubo com um volume de  $5 \times 10^3 \text{ Gpc}^3$ . Acontece que o modelo torus descreve os dados com excelentes resultados do que o modelo  $\Lambda$ CDM de melhor ajuste, ao mostrar a supressão da anisotropia CMB em grandes escalas observada pela primeira vez pelo COBE.

Na referência [207], os autores mostram que o parâmetro fracionário  $\alpha$ , de Lévy, representa a dimensão fractal (denotada por  $D$ ) do horizonte do buraco negro. Semelhantemente, mostramos na seção 8.1 que  $D$  denota a dimensão fractal do horizonte cosmológico. Além disso, como vimos em (8.20), como resultado de grandes saltos no minisuperespaço, o valor inicial do fator de escala clássico emergido, depende da geometria global (ou topologia) do Universo. Mesmo diante disso, a equação (8.23) mostra que a aceleração do Universo e o  $e$ -folding da época da inflação são consequências diretas de sua topologia.

## 9 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta tese teve como objetivo principal analisar as consequências do espaço fracionário na CQ. Para isto, apresentamos o processo de quantização canônica da RG, que consiste em elaborar uma formulação hamiltoniana para o campo gravitacional. Dessa forma, consideramos uma hipersuperfície, imersa em uma variedade quadridimensional na qual a 4-métrica é  $g_{\mu\nu}$ . A hipersuperfície é definida pela 3-métrica  $h_{ab}$ , na qual uma configuração de campo de matéria pode ser definida. Essa incorporação é descrita pela decomposição (3 + 1) da 4-métrica. O hamiltoniano é uma soma dos vínculos hamiltoniano e supermomento, com multiplicadores de Lagrange a função *lapse*  $N$  e o vetor *shift*  $N_a$ , respectivamente, que surgem devido à escolha da divisão do espaço-tempo.

Na abordagem de quantização canônica, esses vínculos desempenham um papel central. O vínculo supermomento implica na invariância da teoria sob difeomorfismos tridimensionais. Além disso, a equação de WDW denota a invariância de reparametrização da teoria. A descrição clássica ocorre no superespaço, o espaço de todas as configurações de 3-métricas e campo de matéria  $(h_{ab}(x), \Phi(x))$  em uma hipersuperfície. A dinâmica para o caso da RG é inteiramente determinada pelos vínculos. Seguindo Dirac, a quantização de sistemas vinculados é obtida com o vínculo clássico se tornando um vínculo nas funções de onda fisicamente permitidas  $\Psi[h_{ab}, \Phi]$  no superespaço. A equação de WDW descreve a dinâmica da função de onda no superespaço e é uma equação diferencial funcional hiperbólica de segunda ordem. Em geral, a equação de WDW tem muitas soluções, então, para ter uma solução única, algumas condições de contorno são necessárias.

Nesta tese, abordamos a CQ e suas aplicações para o Universo fechado de deS e o Universo de FLRW, seja na presença de campo escalar ou para o modelo  $\Lambda$ CDM. Nos três casos a equação WDW possui papel importante, gerando as funções de onda que trazem informações valiosas da dinâmica do Universo. Considerar uma condição de contorno apropriada para a função de onda do Universo tem sido um objetivo primordial da QC. Duas abordagens diferentes foram apresentadas no decorrer do texto, sendo a proposta sem contorno de Hartle–Hawking e a proposta de tunelamento de Linde–Vilenkin. É crucial mencionar que essas condições de contorno foram escolhidas *ad hoc*, em uma perspectiva física particular.

Investigamos também um Universo FLRW com todos os três índices de curvatura, uma energia cinética canônica associada a um campo escalar minimamente acoplado à gravidade e um potencial escalar. Então, considerando um parâmetro de ordenação diferente de zero, construímos a equação WDW padrão. Para explorar os objetivos do nosso trabalho, nos concentramos em estudar o estado inicial do Universo. Com isto em mente, nos limitamos a um caso semi-clássico, onde o regime de rolagem lenta e um parâmetro de ordenação desaparecendo foram assumidos para um Universo plano compacto, representando o estudo de caso mais simples para o problema de condições iniciais. Mostramos então que a solução da equação diferencial simplificada pode ser expressa pela função de Bessel. Concretamente, o modelo foi estudado assumindo a condição WKB. Para tal regime semiclássico, mostramos que o fator de escala do Universo evolui exponencialmente nos primeiros tempos, correspondendo à expansão acelerada de deS. Além disso, mostramos que  $L \equiv \sqrt{3/\Lambda}$  deve assumir um valor  $10^7 l_p$  para obter um número *e*-folding suficiente necessário para resolver os problemas da cosmologia padrão.

Nossa consideração do Universo de FLRW para o modelo  $\Lambda$ CDM, permitiu obter soluções analíticas (funções de onda) para os casos de um Universo plano preenchido apenas com uma componente do fluido perfeito e quando temos a contribuição de matéria e radiação. Neste segundo caso, a equação WDW é do tipo oscilador harmônico e os parâmetros densidades satisfazem uma equação de autovalores.

O estudo da quantização canônica nesta tese não se limitou apenas a CQ, mas se expandiu para CCF e CQF. Inicialmente, apresentamos as aplicações do espaço fracionário na mecânica quântica, sua correspondente ESF e derivamos a equação WDW fracionária e o hamiltoniano ADM fracionário. Para resolver a equação WDW fracionária, aplicamos novamente a aproximação WKB e definimos  $N = 1$ . Apesar do caso padrão, mostramos que o fator de escala do Universo assume a forma de uma função de lei de potência do tempo. Vê-se que não depende apenas do parâmetro fracionário de Lévy  $\alpha$ , mas também do volume compacto da hipersuperfície tridimensional,  $\mathcal{V}_k$ . Em seguida, mostramos nossos resultados ao construir a CCF no Universo de FLRW e estimar a idade do Universo. Além disso, investigamos a CQF no espaço de deS, como também no processo de inflação.

Reforçamos que o nosso modelo cosmológico quântico fracionário, com essas simples características, influenciou efetivamente a fase inflacionária inicial do Universo. As observações das flutuações da CMB e da distribuição da matéria no Universo restringem as propriedades do campo do ínflaton. Um campo escalar pesado com uma massa de  $10^{13}$  GeV, próximo à escala da grande teoria unificada, é preferido por argumentos bem conhecidos, embora a massa de tal ínflaton e sua interação com campos de matéria sejam desconhecidas. Este campo é amplamente citado como evidência de que há uma nova física na interseção das escalas eletrofraca e de Planck. Nossos resultados implicam que a inflação da lei de potência dentro da CQF pode emergir de um novo ângulo, contabilizando os efeitos da gravidade quântica através da derivada fracionária. Concluindo, é essencial enfatizar que nosso modelo fracionário, que serve como uma teoria da gravidade modificada, está atualmente em seu estágio inicial e necessita de maior exploração e desenvolvimento.

Mesmo conhecendo as dificuldades de interpretações e de ferramentas matemáticas na resolução de problemas na CQF, temos as seguintes perspectivas futuras:

- Estudar o comportamento da função de onda, com o parâmetro de ordenamento diferente de zero, e sua implicação na CQF.
- Analisar a CQF para o Universo de deS com perturbação.
- Discutir como a extensão fracionária afeta a simetria presente nestas teorias.
- Investigar a CQF com a presença do tempo.
- Aplicar o procedimento de quantização canônica em teorias escalares-tensoriais para D-dimensões e expandi-las para o caso fracionário.

## A TEMPO PARAMETRIZADO E VÍNCULOS CLÁSSICOS

Neste apêndice, consideraremos alguns modelos que exibem certas características da relatividade geral, mas que são menos complexos para discutir. Neste sentido, eles constituem uma importante preparação conceitual para quantização canônica da RG.

Os vínculos que surgem na formulação hamiltoniana da RG (ver o capítulo 2), não são uma característica apenas desta teoria, mas uma característica de sistemas parametrizados [106]. De modo geral, se uma lagrangiana é homogênea de primeiro grau das velocidades, a hamiltoniana do sistema é zero. Isto é uma consequência imediata das equações:  $p = \partial L / \partial \dot{q}$ ,  $H(p, q) = p\dot{q} - L$  e do teorema de Euler das funções homogêneas [185]. Portanto, com uma lagrangiana homogênea, é possível parametrizar o parâmetro de evolução do sistema, mantendo a ação invariante e as equações de movimento independentes do parâmetro de evolução. Trataremos estes sistemas por invariantes por reparametrização. Para exemplificar nossa discussão, proponho considerarmos na seção A.1 a parametrização de uma partícula não relativística. O caso de uma partícula relativística será abordado na seção A.2.

### A.1 Parametrização do tempo na mecânica clássica não relativística

Um fenômeno interessante ocorre quando tentamos incluir o tempo como uma coordenada generalizada com o emprego de um parâmetro auxiliar  $\theta$  capaz de descrever a evolução do sistema [7]. No caso de uma partícula,  $\theta$  poderia ser a distância percorrida ao longo de sua trajetória no espaço. A única restrição sobre  $\theta$  é  $d\theta/dt > 0$ , isto é,  $t$  deve ser uma função crescente de  $\theta$ . Façamos, portanto,  $t = t(\theta)$  e escrevemos a ação de uma partícula pontual na Mecânica Clássica,

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \quad , \quad (\text{A.1})$$

na seguinte forma,

$$S[q(\theta), t(\theta)] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{dt}{d\theta} L\left(q, \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}\right) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \tilde{L}(q, \dot{q}, \dot{t}) \quad , \quad (\text{A.2})$$

onde derivadas com relação a  $\theta$  é denotado por um ponto e  $\tilde{L} = \dot{t}L(q, \dot{q}/\dot{t})$ . A lagrangiana  $\tilde{L}$  possui a importante propriedade que é homogênea de primeiro grau nas velocidades [185], ou seja,

$$\tilde{L}(q, \lambda \dot{q}, \lambda \dot{t}) = \lambda \tilde{L}(q, \dot{q}, \dot{t}) \quad , \quad (\text{A.3})$$

onde  $\lambda \neq 0$  pode ser uma função arbitrária de  $\theta$ .

Lagrangianas homogêneas conduz a ações que são invariantes sob reparametrizações,  $\theta \rightarrow \tau = f(\theta)$ , sob a mesma lagrangiana, dependendo agora em  $dq/d\tau$ . Assumindo,  $\dot{f} > 0$ , encontramos

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \tilde{L}(q, \dot{q}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\dot{f}} L\left(q, \frac{dq}{d\tau} \dot{f}\right) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) \quad . \quad (\text{A.4})$$

O momento canônico para  $q$  é

$$\tilde{p}_q = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial (\dot{q}/\dot{t})} \frac{1}{\dot{t}} = \frac{\partial L}{\partial (dq/dt)} = p_q \quad , \quad (\text{A.5})$$

isso coincide com o momento correspondente à (A.1). Mas agora existe também um momento canonicamente conjugado a  $t$ ,

$$\begin{aligned}
 p_t &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = L(q, \dot{q}/\dot{t}) + \dot{t} \frac{\partial L(q, \dot{q}/\dot{t})}{\partial \dot{t}} = L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) + \dot{t} \frac{\partial L(q, dq/dt)}{\partial (dq/dt)} \frac{\partial (dq/dt)}{\partial \dot{t}} \\
 &= L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) + \frac{\partial L(q, dq/dt)}{\partial (dq/dt)} \left( \frac{\partial (\dot{t} dq/dt)}{\partial \dot{t}} - \frac{dq}{dt} \frac{\partial \dot{t}}{\partial \dot{t}} \right) \\
 &= L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) + \frac{\partial L(q, dq/dt)}{\partial (dq/dt)} \left( \frac{\partial (dq/d\theta)}{\partial \dot{t}} - \frac{dq}{dt} \right) \\
 &= L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) - \frac{\partial L(q, dq/dt)}{\partial (dq/dt)} \frac{dq}{dt} = - \left( \frac{dq}{dt} p_q - L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \right) = -H \quad .
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A hamiltoniana correspondente a  $\tilde{L}$  é encontrada como:

$$\tilde{H} = \tilde{p}_q \dot{q} + p_t \dot{t} - \tilde{L} = p_q \dot{q} + p_t \dot{t} - iL = p_q \frac{dq}{dt} \dot{t} + p_t \dot{t} - iL = \dot{t} (H + p_t) \quad . \tag{A.7}$$

Mas, devido a (A.6), isto é um vínculo que desaparece. Logo, é apropriado introduzir uma nova quantidade chamada *super-hamiltoniana*. Isto é definido como:

$$H_s \equiv H + p_t \quad , \tag{A.8}$$

e encontramos o seguinte vínculo

$$H_s \approx 0 \quad . \tag{A.9}$$

O símbolo “ $\approx$ ” nestas equações irão significar “para desaparecer como vínculo” ou “igualdade fraca” no sentido de Dirac [107]. Isto define um subespaço no espaço de fase e pode ser um conjunto igual a zero somente após todos os *brackets* de Poisson serem calculados.

Podemos agora usar no lugar de (A.1) o novo princípio de ação

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta (p_q \dot{q} + p_t \dot{t} - N H_s) \quad , \tag{A.10}$$

onde todas as quantidades (incluindo  $N$ ) devem ser variadas.  $N$  é um multiplicador de Lagrange, e a variação com relação a ele fornece o vínculo (A.9).

As equações de movimento decorrentes de  $\delta S = 0$  são

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_q} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_q} = 0 \quad , \tag{A.11}$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_t} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_t} = 0 \quad , \tag{A.12}$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{N}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial N} = 0 \quad , \tag{A.13}$$

onde  $\tilde{L}$  é fornecido de (A.10). Logo, as equações de movimento (A.11), (A.12) e (A.13) serão:

$$\frac{dp_q}{d\theta} + N \frac{\partial H_s}{\partial q} = 0 \quad ; \quad -\dot{q} + N \frac{\partial H_s}{\partial p_q} = 0 \quad , \tag{A.14}$$

$$\frac{dp_t}{d\theta} + N \frac{\partial H_s}{\partial t} = 0 \quad ; \quad -\dot{t} + N \frac{\partial H_s}{\partial p_t} = 0 \quad , \tag{A.15}$$

$$H_s = 0 \quad . \tag{A.16}$$

De acordo com a segunda equação em (A.15), temos:

$$i = N \frac{\partial H_s}{\partial p_t} = N \quad . \quad (\text{A.17})$$

Portanto,  $N$  é chamado a função *lapse*, porque fornece a taxa de mudança do tempo  $t$  de Newton com relação ao parâmetro  $\theta$ .

A existência do vínculo (A.9) é uma consequência da invariância por reparametrização com relação a  $\theta$ . Para ver isto explicitamente, observamos que tendo uma lagrangiana homogênea nas velocidades  $\tilde{L}$ , é equivalente a uma hamiltoniana canônica  $H(c)$  igual a zero. Vimos que homogeneidade é equivalente à invariância por reparametrização.

Em suma, pode-se tratar o tempo em igualdade de condições com as coordenadas generalizadas desde que se esteja disposto a lidar com um espaço de fase estendido  $(p, q) \equiv (p_q, p_t, q, t)$ , no qual há um vínculo, isto é, as variáveis canônicas não são mutuamente independentes.

Um sub-produto formal desse tratamento é que o tempo e a hamiltoniana aparecem como variáveis canonicamente conjugadas. Podemos resolver o vínculo (A.9), fixando o *gauge*, ou seja, escolhendo  $\theta = t$ , para encontrar da ação (A.10)

$$S = \int dt \left( p_q \frac{dq}{dt} - H \right) \quad , \quad (\text{A.18})$$

que é, justamente a ação padrão (a hamiltoniana de (A.1)). Este processo é chamado de deparametrização.

A parametrização pode levar o sistema a ser transformado artificialmente de uma forma geralmente covariante. Isto leva a elementos absolutos, não dinâmicos, permanecerem clássicos no processo de quantização. Contudo, a RG possui naturalmente a covariância geral, no sentido que a métrica é completamente dinâmica, ou seja, estão presentes apenas os elementos dinâmicos.

Um vínculo clássico é implementado na teoria quântica como uma restrição nas funções de ondas permitidas [107]. Assim, (A.9) é substituído por:

$$\hat{H}_s \Psi = 0 \quad , \quad (\text{A.19})$$

onde  $\hat{H}_s$  denota o operador super-hamiltoniano associado com a super-hamiltoniana clássica  $H_s$ . Na representação posição, o  $\hat{q}$  são representados por multiplicações por  $q$  e o momento  $\hat{p}$  são representados por derivadas  $(\hbar/i) \partial / \partial q$ . Para a partícula parametrizada, isto inclui também  $\hat{p}_t = (\hbar/i) \partial / \partial t$ . Portanto, a versão quântica do vínculo (A.9) é

$$\left( \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(q, t) = 0 \quad , \quad (\text{A.20})$$

que é justamente a Equação de Schrödinger (ES). Contudo, o tempo  $t$  em Mecânica Quântica (MQ) não é uma variável dinâmica e não podemos representar por um operador. Isto é uma consequência de ter uma estrutura absoluta disfarçada, ela permanece como uma estrutura absoluta na teoria quântica, apesar de sua aparência formal como uma variável quântica.

O vínculo da equação (A.9) é chamado de *vínculo primário*, porque é decorrente unicamente da forma da lagrangiana. Também podem surgir no sistema *vínculos secundários*, que são decorrentes das equações de movimento.

Conforme a teoria dos sistemas hamiltonianos com vínculos [106], as equações de vínculo na forma  $\phi_m(p, q) \approx 0$ , são restritas a valer zero, mas não identicamente nula como função sobre todo o espaço de fase. Em particular, os  $\phi_m$  tem parênteses de Poisson não nulos com as variáveis canônicas. De modo mais geral, duas funções  $F$  e  $G$ , que coincidem na hipersuperfície

do espaço de fase definido pelos vínculos  $\phi_m \approx 0$  são ditas *fracamente iguais*, e escrevemos  $F \approx G$ . Por outro lado, uma igualdade que vale em todo o espaço de fase, e não apenas na hipersuperfície  $\phi_m \approx 0$ , é dita *forte* e o símbolo usual de igualdade é usado neste caso.

## A.2 Parametrização do tempo na mecânica clássica relativística

Vimos na seção A.1 que para a hamiltoniana de um sistema seja zero, a condição necessária e suficiente é que a lagrangiana seja uma função homogênea de primeiro grau das velocidades. Defini um sistema com o tempo parametrizado como aquele cujas equações de movimento independem do parâmetro de evolução escolhido ou, equivalentemente, cuja ação é invariante sob transformações do parâmetro de evolução temporal. Um sistema com o tempo parametrizado é necessariamente descrito por uma lagrangiana que é função homogênea de primeiro grau das velocidades generalizadas [225].

Consideramos agora a parametrização de uma partícula livre relativística com uma massa  $m \neq 0$  [6]. A ação é escrita na forma:

$$S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad . \quad (\text{A.21})$$

Em unidades onde  $c = 1$ , a ação torna-se

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}} = -m \int dt \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\nu u^\mu} \quad , \quad (\text{A.22})$$

onde  $u^\mu = dx^\mu/dt$  e  $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ . No lugar do tempo  $t$ , a ação será parametrizada por um parâmetro arbitrário  $\theta$ , ou seja,  $t = t(\theta)$ . Assim, escrevemos

$$S = -m \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{dt}{d\theta} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dx^\mu}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}} = -m \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{-\eta_{\mu\nu} V^\nu V^\mu} \quad , \quad (\text{A.23})$$

onde  $V^\mu = dx^\mu/d\theta$ . Podemos imediatamente reconhecer que a lagrangiana é homogênea nas velocidades e que, portanto, a ação é invariante sob  $\theta \rightarrow f(\theta)$ .

De acordo com (A.23), a lagrangiana covariante é

$$L = -m \sqrt{-V_\mu V^\mu} \quad , \quad (\text{A.24})$$

e o quadrimomento canônico é

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial V_\mu} = -\frac{m}{2} \frac{(-V^\mu - g^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu V_\mu)}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}} = \frac{m V^\mu}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}} \quad , \quad (\text{A.25})$$

e satisfaz a equação

$$P^\mu P_\mu + m^2 = 0 \quad , \quad (\text{A.26})$$

que constitui um vínculo no espaço de fase estendido e pode ser mais propriamente escrito como  $P^\mu P_\mu + m^2 \approx 0$ . Devido à invariância por reparametrização, a hamiltoniana canônica desaparece:

$$H_c = P_\mu V^\mu - L = \frac{m V^\mu V_\mu}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}} + m \sqrt{-V_\mu V^\mu} = -m \sqrt{-V_\mu V^\mu} + m \sqrt{-V_\mu V^\mu} = 0 \quad . \quad (\text{A.27})$$

Podemos também escrever

$$\begin{aligned} H_c &= -P^0 V^0 + \vec{P}\vec{V} - L = -P^0 V^0 + \frac{\vec{P}^2 V^0}{m V^0} + m \sqrt{(V^0)^2 - \vec{V}^2} \\ &= -P^0 V^0 + \frac{\vec{P}^2 V^0}{P^0} + \sqrt{(P^0)^2 - \vec{P}^2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

De acordo com (A.26), temos:

$$P^0 = \pm \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \quad . \quad (\text{A.29})$$

Substituindo (A.29) em (A.28), encontramos

$$\begin{aligned} H_c &= -P^0 V^0 + \frac{\vec{P}^2 V^0}{\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}} + m = V^0 \left( -P^0 + \frac{\vec{P}^2}{\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}} + \frac{m}{V^0} \right) \\ &= V^0 \left( -P^0 + \frac{\vec{P}^2}{\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}} \right) = V^0 \left( -P^0 + \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \right) \approx 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

onde a raiz quadrada positiva foi escolhida,  $P^0 = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2}$ , com o intuito de manter a energia positiva. Portanto, a hamiltoniana total do sistema será

$$\tilde{H} = P_\mu V^\mu - L + N H_s \quad , \quad (\text{A.31})$$

onde

$$H_s = P_\mu P^\mu + m^2 \approx 0 \quad , \quad (\text{A.32})$$

corresponde ao super-hamiltoniano, ou seja, um vínculo primário no sistema. De acordo com (A.27),  $H_c = 0$ , e escrevemos  $\tilde{H} = N H_s$ .

Se aplicarmos a regra de quantização de Dirac ao vínculo clássico (A.32), encontramos:

$$\hat{H}_s \Psi(x^\mu) \equiv (-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Psi(x^\mu) = 0 \quad . \quad (\text{A.33})$$

Isto é a equação de Klein-Gordon para uma partícula relativística da MQ (partícula sem spin). Enfatizamos que o parâmetro clássico  $\theta$ , não aparece, pois as trajetórias de partículas não existem na teoria quântica.

A ação passa a ser escrita da seguinte forma:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta (P_\mu V^\mu - \tilde{H}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta (P_\mu V^\mu - N H_s) \quad . \quad (\text{A.34})$$

As equações de movimento decorrentes de  $\delta S = 0$  são

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial V_\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial P_\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial P_\mu} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial N} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial N} = 0 \quad , \quad (\text{A.35})$$

onde  $\tilde{L}$  é dado por (A.34). Assim, encontramos

$$\frac{dP_\mu}{d\theta} = -N \frac{\partial H_s}{\partial x_\mu} \quad ; \quad V^\mu = N \frac{\partial H_s}{\partial P_\mu} \quad ; \quad H_s \approx 0 \quad . \quad (\text{A.36})$$

A interpretação do multiplicador de Lagrange  $N$  pode ser obtido de (A.36),

$$N = \frac{V^\mu}{2P^\mu} = \frac{V^\mu P_\mu}{2P^\mu P_\mu} = -\frac{V^\mu P_\mu}{2m^2} = -\frac{1}{2m} \frac{V_\mu V^\mu}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}} \quad , \quad (\text{A.37})$$

onde usamos em (A.37), o momento canônico (A.25) e o vínculo (A.26), para obter

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2m} \sqrt{-V_\mu V^\mu} = \frac{1}{2m} \sqrt{(V^0)^2 - \vec{V}^2} = \frac{V^0}{2m} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{V}}{V_0}\right)^2} = \frac{1}{2m} \frac{dx^0}{d\theta} \sqrt{1 - v^2} \\ &= \frac{1}{2m} \frac{d\left(t\sqrt{1 - v^2}\right)}{d\theta} = \frac{1}{2m} \frac{d\tau}{d\theta} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio. A função *lapse*  $N$  é proporcional a taxa de mudança do tempo próprio com relação ao parâmetro tempo  $\theta$ . Observamos, por exemplo, que a escolha  $N = 1/2m$  corresponde a tomar  $\theta$  como o tempo próprio  $\tau$ , pois neste caso  $V^\mu = U^\mu$  onde  $U^\mu$  é a quadrivelocidade. Com essa escolha, encontramos  $dP^\mu/d\tau = 0$  com  $P^\mu = mU^\mu$ , sendo o esperado para uma partícula livre.

Em problemas invariantes sob transformações do parâmetro de evolução temporal, o procedimento para se passar do espaço de fase estendido, onde há o vínculo super-hamiltoniano  $H_s(p, q) = 0$ , para o espaço de fase reduzido, no qual as variáveis canônicas são mutuamente independentes, consiste em percorrer o caminho inverso do que conduziu a (A.34). Dada uma ação da forma (A.34), escolhe-se uma variável canônica para desempenhar o papel do tempo e resolve-se a equação  $H_s(p, q) = 0$  para a variável canonicamente conjugada correspondente. Esta variável conjugada ao tempo, agora expressa em função das demais variáveis canônicas, deve ser introduzida na ação. A coordenada escolhida como tempo e o seu momento conjugado não mais aparecem na ação reduzida resultante, que tem a forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt \quad , \quad (\text{A.39})$$

a qual permite identificar a hamiltoniana não-nula  $H(p, q, t)$  no espaço de fase reduzido.

A passagem ao espaço de fase reduzido pode ser realizada escolhendo  $\theta = x^0 = t$  e resolvendo a equação de vínculo (A.26) para a variável canonicamente conjugada  $P_0$ :

$$P^0 = P_0 = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \quad . \quad (\text{A.40})$$

A solução negativa para  $P^0$  deve ser descartada porque a energia  $E = P^0$  de uma partícula livre é positiva. Levando este resultado na ação (A.34) resulta:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -P^0 \frac{dx_0}{dt} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \right) \quad , \quad (\text{A.41})$$

que é da forma (A.39) com a seguinte hamiltoniana

$$H = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \quad , \quad (\text{A.42})$$

exatamente igual à energia de uma partícula livre relativística.

No caso de uma parametrização de uma teoria de campo escalar relativística no espaço de Minkowski [7], temos a presença de uma densidade super-hamiltoniana. Dessa forma, as equações de Hamilton devem ser obtidas mediante uma integração, no espaço-tempo, desta densidade. Para manter o conceito de covariância, o espaço-tempo de Minkowski deve ser dividido em partes espacial e temporal [226].

## REFERÊNCIAS

- 1 JALALZADEH, S.; COSTA, E. O.; MONIZ, P. de sitter fractional quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 105, n. 12, p. L121901, jun. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.L121901>.
- 2 RASOULI, S. M. M. et al. Inflation and fractional quantum cosmology. *Fractal Fract.*, MDPI, v. 6, n. 11, p. 655, nov. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract6110655>.
- 3 COSTA, E. W. de O. et al. Estimated Age of the Universe in Fractional Cosmology. *Fractal Fract.*, MDPI, v. 7, p. 854, nov. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7120854>.
- 4 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New Jersey: Princeton university press, 2018. ISBN 9780691177793. Disponível em: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691177793/gravitation>.
- 5 COHEN-TANNOUJJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. 2. ed. Nova Jersey: Wiley, 2020. (A Wiley - Interscience publication, 1). ISBN 978-3-527-82271-3.
- 6 JALALZADEH, S.; MONIZ, P. V. *Challenging Routes in Quantum Cosmology*. Singapore: World Scientific, 2022. ISBN 978-981-4415-06-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/8540>.
- 7 KIEFER, C. *Quantum gravity*. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 2012. ISBN 9780199585205. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199585205.001.0001>.
- 8 DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, APS, v. 160, p. 1113–1148, ago. 1967. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>.
- 9 GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, APS, v. 23, p. 347–356, jan. 1981. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>.
- 10 ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 48, p. 1220–1223, abr. 1982. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>.
- 11 LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, fev. 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382912199>.
- 12 COLEMAN, S.; WEINBERG, E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, APS, v. 7, p. 1888–1910, mar. 1973. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.1888>.
- 13 STEINHARDT, P. J.; TURNER, M. S. Prescription for successful new inflation. *Phys. Rev. D*, APS, v. 29, p. 2162–2171, maio 1984. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.29.2162>.

- 14 ELLIS, J. et al. Primordial supersymmetric inflation. *Nucl. Phys. B*, Elsevier, v. 221, n. 2, p. 524–548, jul. 1983. ISSN 0550-3213. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383905928>.
- 15 TRYON, E. P. Is the universe a vacuum fluctuation? *Nature*, v. 246, n. 5433, p. 396–397, dez. 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/246396a0>.
- 16 WALD, R. M. *General relativity*. Chicago: University of Chicago press, 1984. ISBN 0-226-87003-2.
- 17 EINSTEIN, A.; SITTER, W. de. On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, National Academy of Sciences of the USA, v. 18, p. 213–214, mar. 1932. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1076193/?page=1>.
- 18 CHABOYER, B. et al. A Lower limit on the age of the universe. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 271, p. 957–961, fev. 1996. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.271.5251.957>.
- 19 AVELINO, A.; KIRSHNER, R. P. The dimensionless age of the universe: a riddle for our time. *Astrophys. J.*, IOP, v. 828, n. 1, p. 35, ago. 2016. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/828/1/35>.
- 20 TONRY, J. L. et al. Cosmological results from high-z supernovae. *Astrophys. J.*, IOP, v. 594, p. 1–24, set. 2003. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1086/376865>.
- 21 CASADO, J. Linear expansion models vs. standard cosmologies: a critical and historical overview. *Astrophys. Space Sci*, Springer, v. 365, n. 1, p. 16, jan. 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10509-019-3720-z>.
- 22 TIAN, S. X. Cosmological consequences of a scalar field with oscillating equation of state. iv. primordial nucleosynthesis and the deuterium problem. *Phys. Rev. D*, APS, v. 106, p. 043524, ago. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.043524>.
- 23 ALBUQUERQUE, I. S.; FRUSCIANTE, N.; MARTINELLI, M. Constraining cosmological scaling solutions of a Galileon field. *Phys. Rev. D*, APS, v. 105, n. 4, p. 044056, fev. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.044056>.
- 24 KLEIDIS, K.; SPYROU, N. K. Dark Energy: The Shadowy Reflection of Dark Matter? *Entropy*, MDPI, v. 18, n. 3, p. 94, mar. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/e18030094>.
- 25 KLEIDIS, K.; SPYROU, N. K. Cosmological perturbations in the  $\Lambda$ CDM-like limit of a polytropic dark matter model. *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 606, p. A116, out. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201630364>.
- 26 JOSEPH, A.; SAHA, R. Forecast Analysis on Interacting Dark Energy Models from Future Generation PICO and DESI Missions. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Oxford University Press, v. 519, n. 2, p. 1809–1822, dez. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stac3586>.
- 27 TEIXEIRA, E. M. et al. Dissecting kinetically coupled quintessence: phenomenology and observational tests. *JCAP*, IOP, v. 11, p. 059, nov. 2022. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2022/11/059>.

- 28 LIU, Y. et al. Dark matter haloes in interacting dark energy models: formation history, density profile, spin, and shape. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Oxford University Press, v. 511, n. 2, p. 3076–3088, jan. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stac229>.
- 29 NAYAK, B. Interacting Holographic Dark Energy, the Present Accelerated Expansion and Black Holes. *Grav. Cosmol.*, Springer, v. 26, n. 3, p. 273–280, set. 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1134/S020228932003010X>.
- 30 ESCAMILLA-RIVERA, C.; GAMBOA, A. A new parameterized interacting holographic dark energy. *Eur. Phys. J. Plus*, Springer, v. 137, n. 2, p. 254, fev. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02490-4>.
- 31 LANDIM, R. G. Note on interacting holographic dark energy with a Hubble-scale cutoff. *Phys. Rev. D*, APS, v. 106, n. 4, p. 043527, ago. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.043527>.
- 32 Shimon, M. Elucidation of 'Cosmic Coincidence'. *New Astronomy*, Elsevier, v. 106, p. 102126, fev. 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.newast.2023.102126>.
- 33 ANARI, V.; SADJADI, H. M. Constant-roll, cosmic acceleration, and massive neutrinos. *JCAP*, IOP, v. 07, n. 07, p. 043, jul. 2022. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2022/07/043>.
- 34 JALALZADEH, S.; MOHAMMADI, A.; DEMIR, D. A quantum cosmology approach to cosmic coincidence and inflation. *Phys. Dark Univ.*, Elsevier, v. 40, p. 101227, maio 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.dark.2023.101227>.
- 35 KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amesterdã, Países Baixos: elsevier, 2006. v. 204. ISBN 9780444518323. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/north-holland-mathematics-studies/vol/204/suppl/C>.
- 36 PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. 1. ed. Amesterdã, Países Baixos: Elsevier, 1998. ISBN 9780125588409. Disponível em: <https://shop.elsevier.com/books/fractional-differential-equations/podlubny/978-0-12-558840-9>.
- 37 HERRMANN, R. *Fractional Calculus*. 3. ed. Singapore: World Scientific, 2018. ISBN 978-981-327-457-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/11107>.
- 38 PODLUBNY, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv*, out. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0110241>.
- 39 DU, M.; WANG, Z.; HU, H. Measuring memory with the order of fractional derivative. *Scientific reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 1, p. 3431, dez. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep03431>.
- 40 LAUSCHER, O.; REUTER, M. Fractal spacetime structure in asymptotically safe gravity. *J. High Energ. Phys.*, Springer, v. 10, p. 050, out. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2005/10/050>.

- 
- 41 NIEDERMAIER, M.; REUTER, M. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.*, Springer, v. 9, p. 5–173, dez. 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.12942/lrr-2006-5>.
- 42 REUTER, M.; SAUERESSIG, F. Fractal space-times under the microscope: A renormalization group view on monte carlo data. *J. High Energ. Phys.*, Springer, v. 2011, n. 12, p. 1–27, dez. 2011. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP12\(2011\)012](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2011)012).
- 43 REUTER, M.; SAUERESSIG, F. Asymptotic Safety, Fractals, and Cosmology. *Lect. Notes Phys.*, Springer, v. 863, p. 185–223, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1205.5431>.
- 44 AMBJØRN, J.; JURKIEWICZ, J.; LOLL, R. Spectral dimension of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 95, p. 171301, out. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.171301>.
- 45 MODESTO, L.; NICOLINI, P. Spectral dimension of a quantum universe. *Phys. Rev. D*, APS, v. 81, p. 104040, maio 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.104040>.
- 46 SOTIRIOU, T. P. Horava–Lifshitz gravity: a status report. *J. Phys.: Conf. Ser.*, IOP, v. 283, n. 1, p. 012034, fev. 2011. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/283/1/012034>.
- 47 AMBJØRN, J. et al. Nonperturbative quantum gravity. *Physics Reports*, Elsevier, v. 519, n. 4-5, p. 127–210, out. 2012. ISSN 0370-1573. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312001482>.
- 48 MODESTO, L. Fractal Structure of Loop Quantum Gravity. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 26, p. 242002, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/24/242002>.
- 49 PEREZ, A. The Spin Foam Approach to Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.*, Springer, v. 16, n. 3, p. 1–121, fev. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.12942/lrr-2013-3>.
- 50 ROVELLI, C. *Quantum gravity*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780511755804. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755804>.
- 51 HORAVA, P. Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 102, p. 161301, abr. 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.161301>.
- 52 SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Spectral dimension as a probe of the ultraviolet continuum regime of causal dynamical triangulations. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 107, p. 131303, set. 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.131303>.
- 53 BISWAS, T. et al. Towards singularity and ghost free theories of gravity. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 108, p. 031101, jan. 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.031101>.
- 54 CALCAGNI, G.; MODESTO, L. Nonlocal quantum gravity and m-theory. *Phys. Rev. D*, APS, v. 91, p. 124059, jun. 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.124059>.

- 55 MODESTO, L. Super-renormalizable quantum gravity. *Phys. Rev. D*, APS, v. 86, p. 044005, ago. 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.044005>.
- 56 TARASOV, V. E. Fractional quantum field theory: From lattice to continuum. *Adv. High Energy Phys.*, Wiley Online Library, v. 2014, n. 1, p. 957863, out. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2014/957863>.
- 57 CALCAGNI, G. Quantum scalar field theories with fractional operators. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 38, n. 16, p. 165006, ago. 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac103c>.
- 58 LIM, S. C. Fractional derivative quantum fields at positive temperature. *Physica A*, Elsevier, v. 363, n. 2, p. 269–281, maio 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.08.005>.
- 59 VARÃO, G.; LOBO, I. P.; BEZERRA, V. B. Fractional quantum mechanics meets quantum gravity phenomenology. *arXiv*, maio 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2405.13544>.
- 60 RASOULI, S.; JALALZADEH, S.; MONIZ, P. Broadening quantum cosmology with a fractional whirl. *Mod. Phys. Lett. A*, World Scientific Press, v. 36, n. 14, p. 2140005, maio 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217732321400058>.
- 61 MONIZ, P. V.; JALALZADEH, S. From Fractional Quantum Mechanics to Quantum Cosmology: An Overture. *Mathematics*, MDPI, v. 8, n. 3, p. 313, mar. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/math8030313>.
- 62 CALCAGNI, G. Multi-fractional spacetimes, asymptotic safety and Hořava–Lifshitz gravity. *Int. J. Mod. Phys. A*, WSP, v. 28, n. 19, p. 1350092, jul. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217751X13500929>.
- 63 CALCAGNI, G. Multi-scale gravity and cosmology. *JCAP*, IOP, v. 12, p. 041, dez. 2013. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/12/041>.
- 64 CALCAGNI, G. Multifractional theories: an unconventional review. *JHEP*, Springer, v. 03, p. 138, mar. 2017. [Erratum: *JHEP* 06, 020 (2017)]. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2017\)138](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2017)138).
- 65 CALCAGNI, G. Multiscale spacetimes from first principles. *Phys. Rev. D*, APS, v. 95, p. 064057, mar. 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.064057>.
- 66 CALCAGNI, G. Classical and quantum gravity with fractional operators. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 38, n. 16, p. 165005, jul. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac1081>.
- 67 CALCAGNI, G. Multifractional theories: an updated review. *Mod. Phys. Lett. A*, World Scientific Press, v. 36, n. 14, p. 2140006, abr. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S021773232140006X>.
- 68 CALCAGNI, G.; FELICE, A. D. Dark energy in multifractional spacetimes. *Phys. Rev. D*, APS, v. 102, n. 10, p. 103529, nov. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.103529>.

- 69 CALCAGNI, G.; VARIESCHI, G. U. Gravitational potential and galaxy rotation curves in multi-fractional spacetimes. *J. High Energ. Phys.*, Springer, v. 08, p. 024, ago. 2022. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2022\)024](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2022)024).
- 70 LEON, G. et al. Cosmology under the fractional calculus approach: a possible  $H_0$  tension resolution? abr. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.14465>.
- 71 GARCÍA-ASPEITIA, M. A. et al. Cosmology under the fractional calculus approach. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Oxford University Press, v. 517, n. 4, p. 4813–4826, dez. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stac3006>.
- 72 SHCHIGOLEV, V. K. Cosmic Evolution in Fractional Action Cosmology. *Discontinuity-n-linearity and Complexity*, v. 2, n. 2, p. 115–123, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.3454>.
- 73 SHCHIGOLEV, V. K. Fractional Einstein-Hilbert Action Cosmology. *Mod. Phys. Lett. A*, World Scientific Press, v. 28, p. 1350056, abr. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500569>.
- 74 SHCHIGOLEV, V. K. Testing Fractional Action Cosmology. *Eur. Phys. J. Plus*, Springer, v. 131, n. 8, p. 256, ago. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16256-6>.
- 75 SHCHIGOLEV, V. K. Fractional-order derivatives in cosmological models of accelerated expansion. *Mod. Phys. Lett. A*, World Scientific Press, v. 36, n. 14, p. 2130014, abr. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217732321300147>.
- 76 GONZÁLEZ, E.; LEON, G.; FERNANDEZ-ANAYA, G. Exact solutions and cosmological constraints in fractional cosmology. *Fractal Fract.*, MDPI, v. 7, p. 368, abr. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7050368>.
- 77 SOCORRO, J.; ROSALES, J. J. Quantum Fractionary Cosmology: K-Essence Theory. *Universe*, MDPI, v. 9, n. 4, p. 185, abr. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/universe9040185>.
- 78 CALCAGNI, G.; KUROYANAGI, S. Stochastic gravitational-wave background in quantum gravity. *JCAP*, IOP, v. 03, p. 019, mar. 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/03/019>.
- 79 CALCAGNI, G. et al. Quantum gravity and gravitational-wave astronomy. *JCAP*, IOP, v. 10, p. 012, out. 2019. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/10/012>.
- 80 CALCAGNI, G. Complex dimensions and their observability. *Phys. Rev. D*, APS, v. 96, n. 4, p. 046001, ago. 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.046001>.
- 81 CALCAGNI, G.; KUROYANAGI, S.; TSUJIKAWA, S. Cosmic microwave background and inflation in multi-fractional spacetimes. *JCAP*, IOP, v. 08, p. 039, ago. 2016. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/08/039>.
- 82 EL-NABULSI, R. A. Gravitons in fractional action cosmology. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 51, p. 3978–3992, ago. 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-012-1290-8>.

- 83 EL-NABULSI, R. A. A Cosmology Governed by a Fractional Differential Equation and the Generalized Kilbas-Saigo-Mittag-Leffler Function. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 55, n. 2, p. 625–635, jun. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-015-2700-5>.
- 84 JAMIL, M.; MOMENI, D.; RASHID, M. A. Fractional Action Cosmology with Power Law Weight Function. *J. Phys. Conf. Ser.*, IOP, v. 354, p. 012008, mar. 2012. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/354/1/012008>.
- 85 EL-NABULSI, R. A. Nonstandard fractional exponential Lagrangians, fractional geodesic equation, complex general relativity, and discrete gravity. *Can. J. Phys.*, NRC Research Press, v. 91, n. 8, p. 618–622, maio 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1139/cjp-2013-0145>.
- 86 EL-NABULSI, A. R. Non-minimal coupling in fractional action cosmology. *Indian J. Phys.*, Springer, v. 87, p. 835–840, abr. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12648-013-0295-3>.
- 87 RAMI, E.-N. A. Fractional action oscillating phantom cosmology with conformal coupling. *Eur. Phys. J. Plus*, Springer, v. 130, n. 6, p. 102, jun. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2015-15102-9>.
- 88 EL-NABULSI, R. A. Implications of the Ornstein-Uhlenbeck-like fractional differential equation in cosmology. *Rev. Mex. Fis.*, Scielo, v. 62, n. 3, p. 240, maio 2016. Disponível em: [https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0035-001X2016000300240&script=sci\\_arttext\plus&tlng=en](https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0035-001X2016000300240&script=sci_arttext\plus&tlng=en).
- 89 EL-NABULSI, R. A. Fractional Action Cosmology with Variable Order Parameter. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 56, n. 4, p. 1159–1182, jan. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-016-3260-z>.
- 90 EL-NABULSI, R. A. Wormholes in fractional action cosmology. *Can. J. Phys.*, NRC Research Press, v. 95, n. 6, p. 605–609, mar. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1139/cjp-2017-0109>.
- 91 EL-NABULSI, R. A. New Metrics from a Fractional Gravitational Field. *Commun. Theor. Phys.*, IOP, v. 68, n. 3, p. 309, set. 2017. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0253-6102/68/3/309>.
- 92 DEBNATH, U.; JAMIL, M.; CHATTOPADHYAY, S. Fractional Action Cosmology: Emergent, Logamediate, Intermediate, Power Law Scenarios of the Universe and Generalized Second Law of Thermodynamics. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 51, p. 812–837, set. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-011-0961-1>.
- 93 DEBNATH, U.; CHATTOPADHYAY, S.; JAMIL, M. Fractional action cosmology: some dark energy models in emergent, logamediate, and intermediate scenarios of the universe. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 7, p. 25, maio 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/2251-7235-7-25>.
- 94 SHCHIGOLEV, V. Cosmological models with fractional derivatives and fractional action functional. *Communications in Theoretical Physics*, IOP, v. 56, n. 2, p. 389, ago. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/56/2/34>.
- 95 CALCAGNI, G. Fractal universe and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 104, p. 251301, jun. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.251301>.

- 96 CALCAGNI, G. Quantum field theory, gravity and cosmology in a fractal universe. *JHEP*, Springer, v. 2010, n. 3, p. 1–38, mar. 2010. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2010\)120](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)120).
- 97 LANDIM, R. G. Fractional dark energy. *Phys. Rev. D*, APS, v. 103, n. 8, p. 083511, abr. 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.083511>.
- 98 LANDIM, R. G. Fractional dark energy: Phantom behavior and negative absolute temperature. *Phys. Rev. D*, APS, v. 104, n. 10, p. 103508, nov. 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.103508>.
- 99 GIUSTI, A. MOND-like Fractional Laplacian Theory. *Phys. Rev. D*, APS, v. 101, n. 12, p. 124029, jun. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.124029>.
- 100 TORRES, I. et al. Quantum Cosmology of Fab Four John Theory with Conformable Fractional Derivative. *Universe*, MDPI, v. 6, n. 4, p. 50, mar. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/universe6040050>.
- 101 JÚNIOR, P. F. d. S. *On the emergence of fractal cosmic space from fractional quantum gravity*. 118 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, mar. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/57317>.
- 102 BARRIENTOS, E.; MENDOZA, S.; PADILLA, P. Extending Friedmann equations using fractional derivatives using a Last Step Modification technique: the case of a matter dominated accelerated expanding Universe. *Symmetry*, MDPI, v. 13, n. 2, p. 174, jan. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/sym13020174>.
- 103 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Oxford: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780511524646. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511524646>.
- 104 ARNOWITT, R. L.; DESER, S.; MISNER, C. W. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, Springer, v. 40, p. 1997–2027, maio 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0405109>.
- 105 NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. 2. ed. Boca Raton, Flórida: CRC press, 2003. ISBN 9781315275826. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781315275826>.
- 106 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of gauge systems*. New Jersey: Princeton university press, 1992. ISBN 9780691037691.
- 107 DIRAC, P. A. M. *Lectures on quantum mechanics*. Nova York: Dover Publications, 2001. ISBN 978-0486417134.
- 108 SILVA, F. R. d. *Canonical quantization of general relativity with application to the Schwarzschild black hole*. 71 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, jul. 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/49487>.
- 109 WHEELER, J. A. Superspace and the Nature of Quantum Geometroynamics. *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.*, v. 3, p. 27–92, 1987. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121623987>.

- 110 FRIEDMANN, A. A. Über die krümmung des raumes. *Z. Phys.*, Russian Academy of Sciences, Branch of Physical Sciences, v. 10, n. 1, p. 377–386, dez. 1922. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01332580>.
- 111 LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, v. 47, p. 49–59, 1927. Traduzido por: Kenneth R. Lang e Owen Gingerich. Disponível em: <https://doi.org/10.4159/harvard.9780674366688.c135>.
- 112 ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. *Astrophys. J.*, Princeton University, v. 82, p. 284–301, ago. 1935. Disponível em: <https://adsabs.harvard.edu/pdf/1935ApJ...82..284R>.
- 113 WALKER, A. G. On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 90–127, jun. 1937. Disponível em: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.90>.
- 114 FATHI, M.; JALALZADEH, S. Quantum Hamilton-Jacobi cosmology and classical-quantum correlation. *Int. J. Theor. Phys.*, Springer, v. 56, n. 7, p. 2167–2177, abr. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10773-017-3363-1>.
- 115 RASHKI, M.; JALALZADEH, S. The Quantum State Of The Universe From Deformation Quantization and Classical-Quantum Correlation. *Gen. Rel. Grav.*, Springer, v. 49, n. 2, p. 14, jan. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10714-016-2178-3>.
- 116 JALALZADEH, S.; MONIZ, P. V. Dirac observables and boundary proposals in quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083504, mar. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.083504>.
- 117 FATHI, M.; JALALZADEH, S.; MONIZ, P. V. Classical Universe emerging from quantum cosmology without horizon and flatness problems. *Eur. Phys. J. C*, Springer, v. 76, n. 10, p. 527, set. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4373-5>.
- 118 JALALZADEH, S.; RASOULI, S. M. M.; MONIZ, P. V. Quantum cosmology, minimal length and holography. *Phys. Rev. D*, APS, v. 90, n. 2, p. 023541, jul. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.023541>.
- 119 RASHKI, M.; JALALZADEH, S. Holography from quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 91, n. 2, p. 023501, jan. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.023501>.
- 120 BENEDETTI, R.; PETRONIO, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. ISBN 978-3-642-58158-8. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-58158-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-58158-8_1).
- 121 WEEKS, J. R. *Hyperbolic Structures on Three-Manifolds*. 77 p. Tese — Universidade de Princeton, Princeton, Nova Jérsei, 1985. Disponível em: <https://catalog.princeton.edu/catalog/992732123506421>.
- 122 MATVEEV, S. V.; FOMENKO, A. T. Constant energy surfaces of hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds. *Russ. Math. Surv.*, IOP, v. 43, n. 1, p. 3, fev. 1988. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1070/RM1988v043n01ABEH001554>.

- 123 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 641, p. A6, ago. 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)]. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910e>.
- 124 ZEE, A. *Einstein Gravity in a Nutshell*. New Jersey: Princeton University Press, 2013. (In a Nutshell). ISBN 9781400847457. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5Dy1hlKvmCYC>.
- 125 DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern cosmology*. 2. ed. San Diego, California: Academic press, 2020. ISBN 9780128159484. Disponível em: <https://shop.elsevier.com/books/modern-cosmology/dodelson/978-0-12-815948-4>.
- 126 SCOLNIC, D. M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *Astrophys. J.*, IOP, v. 859, n. 2, p. 101, maio 2018. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aab9bb/meta>.
- 127 WANG, Y. Flux-averaging analysis of type ia supernova data. *Astrophys. J.*, IOP, v. 536, n. 2, p. 531, jun. 2000. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/308958/meta>.
- 128 YU, H.; RATRA, B.; WANG, F.-Y. Hubble parameter and baryon acoustic oscillation measurement constraints on the hubble constant, the deviation from the spatially flat  $\lambda$ cdm model, the deceleration–acceleration transition redshift, and spatial curvature. *Astrophys. J.*, IOP, v. 856, n. 1, p. 3, mar. 2018. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aab0a2/meta>.
- 129 NETO, G. P. d. S. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, p. e2318, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0247>.
- 130 JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *Astrophys. J.*, IOP, v. 573, n. 1, p. 37–42, jul. 2002. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1086/340549>.
- 131 ZHANG, C. et al. Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven. *Res. Astron. Astrophys.*, IOP, v. 14, n. 10, p. 1221–1233, out. 2014. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1674-4527/14/10/002>.
- 132 WALL, J. V.; JENKINS, C. R. *Practical statistics for astronomers*. 2. ed. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2012. 374 p. ISBN 9780521732499. Disponível em: <https://www.cambridge.org/br/universitypress/subjects/physics/astronomy-general/practical-statistics-astronomers-2nd-edition?format=PB&isbn=9780521732499>.
- 133 OLIVEIRA, P. L. C. d. *Supernovae Tipo Ia e Cosmologia*. 112 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo, ago. 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufes.br/server/api/core/bitstreams/b239cad0-364e-4b8b-94da-e82c47b4db9c/content>.
- 134 PIATTELLA, O. F. *Lecture Notes in Cosmology*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018. 418 p. (UNITEXT for Physics). ISBN 978-3-319-95569-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4>.

- 135 GREGORY, P. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2005. 468 p. ISBN 9780511791277. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791277>.
- 136 IVEZIĆ, Ž. et al. *Statistics, data mining, and machine learning in astronomy: a practical Python guide for the analysis of survey data*. New Jersey: Princeton University Press, 2019. v. 8. 560 p. ISBN 9780691198309. Disponível em: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691198309/statistics-data-mining-and-machine-learning-in-astronomy-pdf>.
- 137 NASCIMENTO, E. C. Estimando parâmetros cosmológicos com supernovas do tipo Ia. *Universidade de Brasília, Instituto de Física*, jul. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação). Disponível em: <https://bdm.unb.br/handle/10483/36663>.
- 138 PADMANABHAN, T. Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric space-times. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 19, p. 5387–5408, out. 2002. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/19/21/306>.
- 139 SPRADLIN, M.; STROMINGER, A.; VOLOVICH, A. Les Houches lectures on de Sitter space. In: *Les Houches Summer School: Session 76: Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics: Gravity, Gauge Theory and Strings*. DP Sci., 2001. p. 423–453. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0110007>.
- 140 GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Phys. Rev. D*, APS, v. 15, p. 2738–2751, maio 1977. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2738>.
- 141 POLLOCK, M. D. Gravitational thermodynamics and the Wheeler-DeWitt equation. *Int. J. Mod. Phys. D*, World Scientific, v. 20, p. 23–42, jan. 2011. [Erratum: *Int.J.Mod.Phys.D* 24, 1592002 (2015)]. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218271811018603>.
- 142 JALALZADEH, S.; MORADPOUR, H.; TEBYANIAN, H. Holographic vacuum energy regularization and corrected entropy of de sitter space. *Class. and Quantum Grav.*, IOP, v. 41, n. 16, p. 165006, jul. 2024. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad5eed>.
- 143 HORVATH, J. et al. *Cosmologia Física do Micro ao Macro Cosmos e Vice-Versa*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. ISBN 9788588325678.
- 144 ASHTEKAR, A.; HOROWITZ, G. t. On the canonical approach to quantum gravity. *Phys. Rev. D*, APS, v. 26, p. 3342–3353, dez. 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.26.3342>.
- 145 ROMANO, J. D.; TATE, R. S. Dirac Versus Reduced Space Quantization of Simple Constrained Systems. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 6, p. 1487–1500, out. 1989. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/6/10/017>.
- 146 SCHLEICH, K. Is reduced phase space quantization equivalent to Dirac quantization? *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 7, p. 1529–1538, ago. 1990. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/7/8/028>.
- 147 EPP, R. J.; KUNSTATTER, G. Dirac versus reduced quantization of the Poincare symmetry in scalar electrodynamics. *Phys. Rev. D*, APS, v. 51, p. 781–799, jan. 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.781>.

- 148 KUCHAR, K. Canonical Methods of Quantization. In: *Oxford Conference on Quantum Gravity*. Oxford, Reino Unido: Clarendon Press, 1980. p. 329–376. ISBN 0198519524.
- 149 CHRISTODOULAKIS, T.; ZANELLI, J. Canonical approach to quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 4, p. 851–867, jul. 1987. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/4/4/020>.
- 150 WHEELER, J. A. Superspace and the nature of quantum geometrodynamics. *New York, Battelle rencontres; 1967 lectures in mathematics and physics*, p. 242–307, jan. 1968. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/4124259>.
- 151 DEWITT, B. S. The quantum and gravity: the Wheeler-DeWitt equation. In: *Richard Arnowitt Fest: A Symposium on Supersymmetry and Gravitation*. [S.l.]: World Scientific, 1998. p. 70–92.
- 152 DIRAC, P. A. M. Fixation of coordinates in the hamiltonian theory of gravitation. *Phys. Rev.*, APS, v. 114, p. 924–930, maio 1959. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.114.924>.
- 153 BERGMANN, P. G. Hamilton-jacobi and schrödinger theory in theories with first-class hamiltonian constraints. *Phys. Rev.*, APS, v. 144, p. 1078–1080, abr. 1966. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.144.1078>.
- 154 HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the universe. *Phys. Rev. D*, APS, v. 28, p. 2960–2975, dez. 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960>.
- 155 VILENKIN, A. Quantum creation of universes. *Phys. Rev. D*, APS, v. 30, p. 509–511, jul. 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.30.509>.
- 156 GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3. ed. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2018. 508 p. ISBN 9781316995433. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/9781316995433>.
- 157 GERLACH, U. H. Derivation of the ten einstein field equations from the semiclassical approximation to quantum geometrodynamics. *Phys. Rev.*, APS, v. 177, p. 1929–1941, jan. 1969. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.177.1929>.
- 158 COOKE, M. *An introduction to quantum cosmology*. Dissertação (Mestrado) — Imperial College London, 2010. Disponível em: <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2010/Michael-Patrick-Cooke-Dissertation.pdf>.
- 159 CHATAIGNIER, L.; KIEFER, C.; MONIZ, P. Observations in quantum cosmology. *Class. and Quantum Grav.*, IOP, v. 40, n. 22, p. 223001, out. 2023. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/acfa5b>.
- 160 MONIZ, P. V. Cosmologia Quântica. I—Uma Introdução Básica. *GFIS*, SPF, v. 14, n. 4, p. 132–141, nov. 1991. Disponível em: <https://www.spf.pt/magazines/GFIS/428/1419>.
- 161 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYER, D. F. *Quantum mechanics and path integrals*. Mineola, Nova York: Dover Publications, 2010. ISBN 9780486477220. Disponível em: <https://store.doverpublications.com/products/9780486477220>.

- 162 HARTLE, J. B. Prediction in Quantum Cosmology. ago. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2108.00494>.
- 163 RUBAKOV, V. A. Quantum Mechanics in the Tunneling Universe. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 148, p. 280–286, nov. 1984. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(84\)90088-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)90088-1).
- 164 JALALZADEH, S.; DARABI, F. Cosmological quantum tunneling and dimension of the universe. *Theor. Math. Phys.*, Springer, v. 175, n. 2, p. 710–716, jun. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0056-7>.
- 165 VILENKIN, A. Quantum Cosmology and the Initial State of the Universe. *Phys. Rev. D*, APS, 37, p. 888–897, fev. 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.37.888>.
- 166 HAWKING, S. W. The Quantum State of the Universe. *Nucl. Phys. B*, Elsevier, v. 239, p. 257–276, jun. 1984. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90093-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90093-2).
- 167 LINDE, A. D. The inflationary universe. *Rept. Prog. Phys.*, IOP, v. 47, n. 8, p. 925–986, ago. 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/47/8/002>.
- 168 LINDE, A. D. Quantum Creation of the Inflationary Universe. *Lett. Nuovo Cim.*, v. 39, p. 401–405, abr. 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02790571>.
- 169 LINDE, A. D. Quantum generation of the inflationary universe. *Z. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 87, p. 369–374, ago. 1984. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984ZhETF..87..369L>.
- 170 VILENKIN, A. Creation of Universes from Nothing. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 117, p. 25–28, nov. 1982. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90866-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90866-8).
- 171 VILENKIN, A. Boundary conditions in quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 33, p. 3560–3569, jun. 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.33.3560>.
- 172 VILENKIN, A. Approaches to quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, APS, v. 50, p. 2581–2594, ago. 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.2581>.
- 173 VILENKIN, A. The Wave function discord. *Phys. Rev. D*, APS, v. 58, p. 067301, ago. 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.067301>.
- 174 CASTRO, C. The Euclidean gravitational action as black hole entropy, singularities, and spacetime voids. *J. Math. Phys.*, AIP, v. 49, n. 4, p. 042501, abr. 2008. ISSN 0022-2488. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.2898115>.
- 175 LINDE, A. D. *Particle physics and inflationary cosmology*. Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers, 1990. v. 5. 270 p. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0503203>.
- 176 LINDE, A. D. Creation of a compact topologically nontrivial inflationary universe. *JCAP*, IOP, v. 10, n. 10, p. 004, out. 2004. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2004/10/004>.
- 177 LINDE, A. D. On the problem of initial conditions for inflation. *Found. Phys.*, Springer, v. 48, n. 10, p. 1246–1260, jul. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10701-018-0177-9>.

- 178 COULE, D. H.; MARTIN, J. Quantum cosmology and open universes. *Phys. Rev. D*, APS, v. 61, p. 063501, fev. 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.063501>.
- 179 LINDE, A. Inflationary Cosmology after Planck 2013. In: *100e Ecole d'Ete de Physique: Post-Planck Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2015. p. 231–316. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198728856.003.0006>.
- 180 LINDE, A. Inflation and quantum cosmology. In: *1989 Summer School in High Energy Physics and Cosmology*. Singapore: World Scientific, 1990. p. 537–585. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/9789814540568>.
- 181 LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large scale structure*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2012. 400 p. ISBN 9781139175180. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139175180>.
- 182 VIEIRA, H. S. et al. Class of solutions of the Wheeler-DeWitt equation with ordering parameter. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 809, p. 135712, out. 2020. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320305153>.
- 183 VIEIRA, H. S. et al. Quantum relativistic cosmology: Dynamical interpretation and tunneling universe. *Int. J. Mod. Phys. D*, World Scientific, v. 30, n. 01, p. 2050123, dez. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218271820501230>.
- 184 MUNIZ, C. et al. Exact solutions of the wheeler–dewitt equation with ordering term in a dark energy scenario. *Phys. Dark Univ.*, Elsevier, v. 28, p. 100547, maio 2020. ISSN 2212-6864. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686420301230>.
- 185 HASSANI, S. *Mathematical methods: for students of physics and related fields*. 2. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN 978-0-387-09504-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09504-2>.
- 186 ALMEIDA, M. M.; GUIMARÃES, M. N.; PRUDENTE, F. V. Sobre o confinamento espacial de sistemas quânticos: o oscilador harmônico unidimensional e o átomo de hidrogênio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, p. 395–405, set. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172005000300017>.
- 187 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Cambridge, Massachusetts: Academic press, 2011. ISBN 978-0-12-384654-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-30629-7>.
- 188 CALCAGNI, G. Geometry of fractional spaces. *Adv. Theor. Math. Phys.*, International Press, v. 16, n. 2, p. 549–644, abr. 2012. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011arXiv1106.5787C/abstract>.
- 189 NIGMATULLIN, R. Fractional integral and its physical interpretation. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, v. 90, n. 3, p. 242–251, mar. 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01036529>.
- 190 TATOM, F. B. The relationship between fractional calculus and fractals. *Fractals*, World Scientific, v. 3, n. 01, p. 217–229, mar. 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218348X95000175>.

- 191 DAS, S. *Functional fractional calculus*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20545-3>.
- 192 FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/0470013850>.
- 193 XIAO-JUN, Y. *General Fractional Derivatives: Theory, Methods and Applications*. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2019. ISBN 9781138336162. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mma.7000>.
- 194 POZRIKIDIS, C. *The fractional laplacian*. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2018. ISBN 9781315367675. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781315367675>.
- 195 LASKIN, N. *Fractional Quantum Mechanics*. Singapore: World Scientific, 2018. ISBN 978-981-322-379-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/10541>.
- 196 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics. *Phys. Rev. E*, APS, v. 62, p. 3135, set. 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.3135>.
- 197 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics and Levy paths integrals. *Phys. Lett. A*, Elsevier, v. 268, p. 298–305, abr. 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00201-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00201-2).
- 198 LASKIN, N. Time fractional quantum mechanics. *Chaos Solitons Fractals*, Elsevier, v. 102, p. 16–28, set. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.010>.
- 199 WANG, S.; XU, M. Generalized fractional Schrödinger equation with space-time fractional derivatives. *J. Math. Phys.*, AIP, v. 48, n. 4, p. 043502–043502, abr. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.2716203>.
- 200 LIM, S.; TEO, L. Casimir effect associated with fractional klein–gordon field. In: *Fractional Dynamics: Recent Advances*. World Scientific, 2011. p. 483–506. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/8087>.
- 201 NABER, M. Time fractional schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, AIP, v. 45, n. 8, p. 3339–3352, ago. 2004. ISSN 1089-7658. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1769611>.
- 202 ACHAR, B. N. et al. Time fractional schrodinger equation revisited. *Adv. Math. Phys.*, Hindawi, v. 2013, jul. 2013. Disponível em: <https://www.hindawi.com/journals/amp/2013/290216/>.
- 203 LASKIN, N. Principles of Fractional Quantum Mechanics. In: *Fractional Dynamics*. Singapore: World Scientific, 2011. p. 393–427.
- 204 LASKIN, N. Fractional Schrodinger equation. *Phys. Rev. E*, APS, v. 66, p. 056108, nov. 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056108>.
- 205 RIESZ, M. L'intégrale de riemann-liouville et le problème de cauchy. *Acta Mathematica*, Institut Mittag-Leffler, v. 81, n. 48173, p. 1–222, abr. 1949. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02395016>.
- 206 TARASOV, V. E. Fractional Derivative Regularization in QFT. *Adv. High Energy Phys.*, Wiley Online Library, v. 2018, p. 7612490, maio 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2018/7612490>.

- 207 JALALZADEH, S.; SILVA, F. R. da; MONIZ, P. Prospecting black hole thermodynamics with fractional quantum mechanics. *EPJC*, Springer, v. 81, n. 7, p. 632, jul. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09438-5>.
- 208 CALCAGNI, G. *Classical and Quantum Cosmology*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. (Graduate Texts in Physics). ISBN 978-3-319-41125-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-41127-9>.
- 209 VARIESCHI, G. U. Relativistic fractional-dimension gravity. *Universe*, MDPI, v. 7, n. 10, p. 387, out. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/universe7100387>.
- 210 FAROOQ, O.; RATRA, B. Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift. *Astrophys. J. Lett.*, IOP, v. 766, p. L7, mar. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/2041-8205/766/1/L7>.
- 211 CAMARENA, D.; MARRA, V. Impact of the cosmic variance on  $H_0$  on cosmological analyses. *Phys. Rev. D*, APS, v. 98, n. 2, p. 023537, jul. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.023537>.
- 212 HINSHAW, G. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *Astrophys. J. Suppl.*, The American Astronomical Society, v. 208, n. 2, p. 19, set. 2013. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19>.
- 213 CHEN, L.; HUANG, Q.-G.; WANG, K. Distance Priors from Planck Final Release. *JCAP*, IOP, v. 02, p. 028, fev. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/028>.
- 214 DAVARI, Z.; RAHVAR, S. MOG cosmology without dark matter and the cosmological constant. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Oxford University Press, v. 507, n. 3, p. 3387–3399, ago. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab2350>.
- 215 SERRA, P. et al. No Evidence for Dark Energy Dynamics from a Global Analysis of Cosmological Data. *Phys. Rev. D*, APS, v. 80, p. 121302, dez. 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.121302>.
- 216 MARRA, V.; SAPONE, D. Null tests of the standard model using the linear model formalism. *Phys. Rev. D*, APS, v. 97, n. 8, p. 083510, abr. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.083510>.
- 217 NELSON, E. Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics. *Phys. Rev.*, APS, v. 150, n. 4, p. 1079–1085, out. 1966. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.150.1079>.
- 218 ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 571, p. A22, out. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321569>.
- 219 YOKOYAMA, J.; MAEDA, K.-i. On the Dynamics of the Power Law Inflation Due to an Exponential Potential. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 207, p. 31–35, jun. 1988. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)90880-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)90880-5).
- 220 LINDE, A. D. Chaotic inflation. *Phys. Lett. B*, Elsevier, v. 129, n. 3, p. 177–181, set. 1983. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383908377>.

- 
- 221 AURICH, R. et al. Do we Live in a Small Universe? *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 25, p. 125006, jun. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/12/125006>.
- 222 ASLANYAN, G.; MANOHAR, A. V.; YADAV, A. P. S. The Topology and Size of the Universe from CMB Temperature and Polarization Data. *JCAP*, IOP, v. 08, p. 009, ago. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/08/009>.
- 223 AURICH, R. A spatial correlation analysis for a toroidal universe. *Class. Quant. Grav.*, IOP, v. 25, p. 225017, nov. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/22/225017>.
- 224 ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 571, p. A26, out. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321546>.
- 225 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. ISBN 9788588325241.
- 226 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. 3. ed. Londres, Reino Unido: Pearson, 2001. ISBN 9780201657029.