FALTA DE CONHECIMENTO COMUM SOBRE PREFERÊNCIAS E FALTA DE CONSCIÊNCIA EM JOGOS NA FORMA NORMAL

LARISSA SANTANA BARRETO

Orientador: Prof. Dr. LEANDRO CHAVES RÊGO

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2008

Barreto, Larissa Santana
Falta de conhecimento comum sobre preferências e falta de consciência em jogos na forma normal / Larissa Santana Barreto. – Recife: O Autor, 2008.
ix, 86 folhas : il., quadros., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Departamento de Estatística, 2008.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Teoria dos jogos. 2. Equilíbrio de Nash. I. Título.

519.3 CDD (22.ed.) MEI2008-025

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

28 de fevereiro de 2008
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Larissa Santana Barreto

intitulada

"Falta de Conhecimento comum sobre Preferências e Falta de Consciência em Jogos na Forma Normal"

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Leandro Chaves Rêgo
Leandro Chaves Rego orientador

Campello
Fernando Menezes Campello de Souza

Renato José de Sobral Cintra

A Deus, que é o verdadeiro guia de nossos passos. Aos meus pais, Neuza e Barreto, pela dedicação constante. A Carlos Gadelha, "honey", pelas alegrias que possibilitaram que momentos de stress se transformassem em momentos de descontração.

Agradecimentos

Sou imensamente grata ao nosso bom Deus, que de forma abençoadora, me permitiu forças e perseverança.

Aos meus pais, pelo carinho, dedicação, confiança, paciência e por terem contribuído para a minha formação moral e acadêmica.

À minha família e amigos que ficaram na Bahia, pela enorme paciência e compreensão com a minha ausência.

Ao meu grande incentivador Carlos Gadelha (honey), pela motivação, incentivo e companheirismo.

Ao professor Leandro Chaves Rêgo, pela incrível paciência, atenção e excelente orientação.

Aos professores Humberto Bortolossi, Brígida Sartine e Gilmar Garbugio, os quais me fizeram conhecer e gostar da Teoria dos Jogos.

Aos meus colegas de mestrado Ênio, Geraldo, Lilian, Lidia, Juliana, Raphael, Marcelo, Hemílio, Fabio, Abraão, Valmir, Silvia pela amizade e pelos momentos de alegria.

À Valéria Bittencourt, pelo enorme carinho, paciência e amizade com que sempre tratou a mim e aos demais alunos do mestrado.

À cidade de Recife que me acolheu muito bem durante esses 2 anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Grande parte dos trabalhos desenvolvidos na área da Teoria dos Jogos assume que os jogadores conhecem toda a estrutura do jogo. Nesta dissertação, nós suprimimos esta suposição e modelamos situações onde os agentes podem ser inconscientes de toda a estrutura do jogo. Mais precisamente, nós modelamos jogos em forma normal onde os jogadores podem não ser conscientes de todas as ações disponíveis para eles e para os outros jogadores. Além de mostrarmos como representar tais jogos, nós também propomos um conceito de equilíbrio, para esses jogos, que generaliza o conceito de equilíbrio de Nash para jogos em forma normal, e provamos um resultado de existência de tal equilíbrio. Esses resultados também foram estendidos para os jogos com consciência sobre inconsciência.

Por fim, apresentamos um modelo que permite que os jogadores sejam incapazes de realizar comparações entre alguns possíveis cenários (perfis de estratégias), e além disso permite que os jogadores possam não ter conhecimento comum sobre como os demais jogadores avaliam os possíveis cenários do jogo. Para este modelo nós também apresentamos um novo conceito de equilíbrio e generalizamos um resultado obtido por Bade (Bade, S. (2005), 'Nash equilibrium in games with incomplete preferences', *Economic Theory* 26, 309-332) que proporciona um método para o cálculo de tais equilíbrios.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Consciência, Equilíbrio de Nash, Preferência Incompletas.

Abstract

Most of the work in the field of Game Theory assumes that players know the whole game structure. In this Master Thesis, we remove this assumption and model situations where agents may be unaware of the whole game structure. More precisely, we model games in normal form where players may be unaware of some actions available for them and for the other players. Besides showing how to represent such games, we propose a new equilibrium concept for these games that generalizes the concept of Nash equilibrium for games in normal form, and we prove an existence result of such a concept of equilibrium. These results were also extended to games with awareness of unawareness.

Finally, we present a model that allows players to be unable of making comparisons between some possible scenarios (strategies profiles), and moreover allows that players don't have common knowledge about how the other players evaluate the possible scenarios of the game. For this model, we also present a new concept of equilibrium and generalize a result obtained by Bade (Bade, S. (2005), 'Nash equilibrium in games with incomplete preferences', *Economic Theory* 26, 309-332) that provides a method to calculate such equilibria.

Keywords: Game Theory, Awareness, Nash Equilibrium, Incomplete Preferences.

Índice

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Introdução

História da Teoria dos Jogos

Registros antigos sobre Teoria dos Jogos remontam ao século $XVIII$. Em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, James Waldegrave analisa um jogo de cartas chamado "le Her" e fornece uma solução que é um equilíbrio em estratégia mista (conceito que nos familiarizaremos posteriormente). No início do século XIX, temos o famoso trabalho de Augustin Cournot sobre duopólio (ver Cournot (1838)). Em meados do século XX, entre os anos de 1928 e 1942, o matemático John Von Neumann publicou vários artigos abordando o tema de Teoria dos Jogos. Porém, só foi no ano de 1944, com a publicação do livro *The Theory of Games and Economic Behavior*[1] (Neumann & Morgenstern (1944)), que a Teoria dos Jogos invadiu a economia e a matemática aplicada, pois outros especialistas decidiram contribuir para o desenvolvimento da teoria, que tinha por objetivo inicial estabelecer uma base matemática para a Teoria Econômica. Em 1950, o matemático John Forbes Nash Júnior publicou quatro artigos muito importantes na área de teoria dos jogos. Em "*Equilibrium Points in n-Person Games*" (Nash Jr. (1950*b*)) e "Non-cooperative Games" (Nash Jr. (1951)), Nash provou a existência de um equilíbrio em estratégias mistas para jogos não-cooperativos e sugeriu uma abordagem de estudos de jogos

[1]No ano de 2004 foi lançada a sexagésima edição de aniversário do livro (ver Neumann & Morgenstern (2004)).

cooperativos baseada na redução desses jogos para a forma não-cooperativa. Nos artigos "The Bargaining Problem" (Nash Jr. (1950*a*)) e "Two Person Cooperative Games" (Nash Jr. (1953)), Nash criou a Teoria da Barganha e provou que o problema da barganha de Nash tinha solução.

A principal contribuição desses autores, nesta época, foi mostrar a importância de se usar modelos matemáticos para formular hipóteses nas mais diferentes situações que o mundo econômico possa apresentar.

Contudo, a Teoria dos Jogos, com o passar dos anos, deixou de ser aplicada somente no mundo das relações econômicas; ela passou a ser aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento, como por exemplo:

- na Biologia: para prever a sobrevivência de determinada espécie (ver Maynard Smith & Price (1973) e Maynard Smith (1976));
- na Política: para saber até que ponto uma determinada aliança de partidos é estável (ver Ordeshook (1986) e Aliprantis & Chakrabarti (2000));
- na Sociologia: para identificar situações de conflito entre o indivíduo e o coletivo (ver Souza (2003));
- no direito: para interpretar e aplicar algumas leis (ver Chung & Fortnow (2007));

dentre outras.

O que é a Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos é uma ferramenta matemática criada para melhor entender ou interpretar a maneira com que agentes que tomam decisões interagem entre si. Um jogo pode ser pensado como um cenário onde os jogadores interagem entre si e cada um deles tem um conjunto de decisões passíveis de serem tomadas. Essa tomada de decisão se baseia nas preferências de cada jogador e na sua expectativa sobre as ações dos outros jogadores. É justamente nessa dinâmica que a Teoria dos Jogos foca seu estudo. Ela parte da premissa de equacionar, por meio do raciocínio lógico, os conflitos de interesse que ocorrem freqüentemente na sociedade, verificando as tendências entre os jogadores de maximizar o ganho individual.

1.2 Objetivo

Em geral, a Teoria dos Jogos (Padrão) nos “obriga” a assumir que qualquer modelo utilizado para representar situações onde a Teoria dos Jogos é aplicada deve ser de conhecimento comum[2] entre os jogadores, ou seja, devemos assumir que todos os aspectos significantes de um jogo (utilidades, ações disponíveis, quantidade de jogadores, etc) são de conhecimento comum entre os jogadores.

Existem, na literatura, alguns métodos que são utilizados para se modelar jogos onde alguns aspectos não são de conhecimento comum entre os jogadores; como exemplo, podemos citar os Jogos Bayesianos (ver Myerson (1997)). Entretanto, todos esses métodos de modelagem supõem que os jogadores são, no mínimo, conscientes de todas as possíveis ações do jogo, ou seja, cada jogador deve ser capaz de descrever as ações disponíveis para ele e para cada jogador no jogo. Porém, infelizmente, esta suposição nem sempre se aplica às situações do mundo real. Como exemplo de uma situação real em que essa suposição não se aplica, podemos citar o caso dos mercados financeiros, onde alguns investidores podem não ser conscientes de algumas estratégias de investimentos (por exemplo, complicadas estratégias de proteção ao risco ou estratégias para evitar impostos).

A Teoria dos Jogos usa várias formas para se representar um jogo, das quais as mais importantes são:

- Forma extensa: é a forma mais detalhada para se representar um jogo. Os jogos em forma extensa são apresentados como árvores, onde cada nó representa um ponto de decisão para um jogador. Um jogo é constituído basicamente por um conjunto de jogadores, uma árvore, e um ganho (utilidade) associado a cada possível maneira do jogo se realizar para cada jogador.

- Forma normal (ou estratégica): é uma das maneiras mais simples de se representar um jogo. O jogo em forma normal pode ser apresentado como uma matriz, na qual temos

[2]Segundo Aumann (1976), dizemos que um fato é de conhecimento comum entre os jogadores se todo jogador sabe este fato, todo jogador sabe que todo jogador sabe este fato, e assim por diante; assim toda afirmação da forma “(todo jogador sabe que)^k todo jogador sabe este fato” é verdadeira para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

apresentados os jogadores, as estratégias e os ganhos de cada jogador. Em um jogo em forma normal, nós assumimos que os jogadores atuam simultaneamente ou, ao menos, sem saber as ações que os outros jogadores escolheram.

A seguir, no Capítulo 2 apresentamos uma definição mais formal das formas extensa e normal de um jogo.

Recentemente, Halpern e Rêgo publicaram um trabalho (Halpern & Rêgo (2006)) no qual eles apresentam um maneira apropriada de se representar jogos em forma extensa onde alguns aspectos não são de conhecimento comum entre os jogadores (jogos com consciência em forma extensa).

Nossos principais objetivos nesta dissertação são:

- Fornecer um modelo para representar jogos em forma normal onde alguns jogadores podem não ter consciência de todas as possíveis ações de um jogo. Esse nosso modelo levará em conta possíveis correlações nos jogos que os adversários consideram possíveis, fato que não era necessário no jogo em forma extensa, pois cada jogador se movia sozinho em um dado instante. Esse modelo também será útil para representar jogos com consciência sobre inconsciência onde permitimos que os jogadores possam ser conscientes de sua falta de consciência, isto é, um jogador pode ser consciente que existem movimentos que um outro jogador pode fazer, embora ele não saiba exatamente que movimentos são esses.

- Fornecer um modelo para jogos em forma normal com falta de conhecimento comum sobre preferências. Nosso interesse em modelar este tipo de situação vem do fato de que na vida prática existem muitas situações onde certos elementos do conjunto de escolhas são incomparáveis. Como exemplo de situação onde isto acontece podemos citar o caso onde o agente que toma uma decisão é na verdade um conjunto de agentes, onde cada um tem uma função objetivo diferente; neste caso seria complicado exigir que o tomador de decisão ordene todas as suas preferências.

Todos os modelos que apresentaremos nesta dissertação se baseiam na idéia de jogos com consciência em forma extensa apresentada em Halpern & Rêgo (2006).

1.3 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em 5 capítulos, contando com este capítulo introdutório. No Capítulo 2, intitulado "Representação de Jogos", concentramos na apresentação de várias maneiras de se representar jogos, proporcionando ao leitor uma rápida, porém detalhada, revisão sobre as representações de jogos mais utilizadas. Mais precisamente, mostramos nesse capítulo como representar um jogo nas formas *extensa, normal e Bayesiana*; e apresentamos também a definição de jogos com consciência. No Capítulo 3, intitulado "Falta de Consciência em Jogos em Forma Normal", apresentamos um modelo para a representação de jogos com consciência em forma normal. Também introduzimos o conceito de consciência sobre inconsciência em jogos na forma normal e apresentamos um método para se modelar tal situação. Nesse capítulo, propomos um conceito de equilíbrio, que generaliza o conceito de equilíbrio de Nash para jogos em forma normal, e provamos um resultado de existência de tal equilíbrio. No Capítulo 4, intitulado "Falta de Conhecimento Comum sobre Preferências em Jogos na Forma Normal", apresentamos modelos criados para representar situações onde tanto permitimos que os jogadores sejam incapazes de realizar comparações entre alguns possíveis cenários (perfis de estratégias), como permitimos que os jogadores possam não ter conhecimento comum sobre como os demais jogadores avaliam os possíveis cenários do jogo. Assim como no capítulo anterior, nós propomos um novo conceito de equilíbrio para tais modelos, e generalizamos um resultado obtido por Bade (Bade (2005)) que proporciona um método para o cálculo de tais equilíbrios. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões extraídas do presente trabalho e apontamos direções para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Representação de Jogos

2.1 Introdução

O primeiro passo a ser dado na análise de um jogo é a escolha de um modelo para descrever tal jogo. Esta escolha deve ser feita de modo que aspectos relevantes do jogo sejam levados em consideração, sem que para isso seja necessário um modelo muito complicado. Existem hoje, na literatura, várias formas de se representar um jogo. Neste capítulo apresentaremos três formas, são elas: *forma extensa*, *forma normal (ou estratégica)* e *forma Bayesiana.*

Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor em relação as definições que serão apresentadas nas seções abaixo, utilizaremos um único jogo para exemplificar as definições apresentadas. O jogo, mostrado a seguir, pode ser encontrado em Myerson (1997).

Jogo

Jogado por duas pessoas a quem denominamos *jogador 1* e *jogador 2*, o jogo em questão se procede da seguinte maneira: no início do jogo, ambos os jogadores depositam uma nota de 1 dólar em um pote. Depois disso, o jogador 1 retira uma carta de um baralho, onde metade das cartas são vermelhas e metade são pretas, e olha a carta sem mostra-lá para o jogador 2. Depois de olhar a carta o jogador 1 decide se aumenta sua aposta ou se sai do jogo. Se o jogador 1 escolhe sair do jogo então ele mostra a carta para o jogador 2 e o jogo termina. Neste caso, o jogador 1 ganha o dinheiro, que está no pote, se sua carta for vermelha, mas se sua carta for preta quem ganha o dinheiro é o jogador 2. Se, ao invés de sair do jogo, o jogador 1 escolhe a opção de aumentar sua aposta, então ele deposita 1 dólar no pote e o jogo continua. Agora é o jogador 2 que deve decidir se enfrenta a aposta do jogador 1 ou se passa sua vez. Se ele escolhe enfrentar a aposta, então ele deposita 1 dólar no pote e o jogo termina com o jogador 1 mostrando sua carta. Neste caso, como no caso anterior, o jogador 1 ganha o dinheiro se a carta for vermelha e se a carta for preta quem ganha é o jogador 2. Porém, se ao invés de enfrentar a aposta o jogador 2 decide passar sua vez, então o jogo termina e quem ganha o dinheiro do pote é o jogador 1.

No final deste capítulo, mais precisamente na Seção 2.5, apresentaremos a definição de jogos com consciência.

2.2 Forma Extensa

A representação em forma extensa de um jogo é a mais adequada quando desejamos levar em consideração o fator tempo no desenrolar do jogo. Ela possui uma estrutura mais apropriada para se analisar certas situações (como por exemplo no mundo do negócios ou na política e em alguns jogos de cartas) em que os jogadores tomam suas decisões de forma seqüencial, depois de observar a ação que um outro jogador realizou, especificando assim quem se move, quando, com qual informação e o *payoff* ou ganho de cada jogador para cada possível maneira que o jogo possa se desenvolver. Nesta representação, também podemos exibir as conseqüências que alguns fenômenos aleatórios podem ter no resultado do jogo. Tais fenômenos são representados por um outro jogador usualmente chamado *chance* ou *natureza* cuja estratégia é de conhecimento comum entre os demais jogadores.

Um jogo em forma extensa pode ser representado por um diagrama de árvore, o qual consiste de um conjunto de *ramos* que têm a função de conectar os pontos da árvore, esses pontos são conhecidos como *nós*. O nó onde se inicia a árvore é chamado de nó *raiz*. Não existe na árvore nenhum ramo chegando nesse nó, existem apenas ramos saindo dele. Quanto aos outros nós, temos que apenas um ramo pode chegar em cada nó, mas a quantidade de ramos que saem pode ser ilimitada. Se em um dado nó, não existe nenhum ramo saindo dele, dizemos que este é um *nó terminal* do jogo. Intuitivamente, em cada nó não terminal da árvore um jogador (ou chance) se move, e cada uma das possíveis ações que este jogador pode tomar neste nó é representada por um ramo que sai deste nó. Portanto, cada nó terminal descreve uma possível maneira de como o jogo pode se desenrolar ao longo do tempo. A cada um destes nós terminais, associa-se um ganho para cada jogador.

A seguir apresentamos a descrição formal de um jogo em forma extensa conforme descrito em Osborne & Rubinstein (1994). Um jogo na forma extensa é um vetor $\Gamma = (N, M, H, P, \mathfrak{f}_0, \{\mathcal{I} : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$, onde

- N é o conjunto de jogadores com exceção do jogador chance. O jogador chance é simbolizado aqui pelo número 0.

- M é um conjunto cujos elementos são os movimentos (ou ações) disponíveis para os jogadores (ou para a chance) durante o jogo.

- H é um conjunto formado por seqüências de movimentos (elementos de M). O conjunto H é fechado com relação a prefixos[1], ou seja, se $h \in H$ e h' é um prefixo de h, então $h' \in H$. Cada elemento de H é chamado de *história* e cada nó do jogo é caracterizado por uma história (seqüência de ações necessárias para se alcançar o nó). Defina M_h o conjunto de ações que podem ser tomadas após a história h, ou seja, $M_h = \{m \in M : h \cdot \langle m \rangle \in H\}$, onde $\cdot$ denota a concatenação de seqüências. Uma história terminal, isto é, uma história que não é um prefixo estrito de nenhuma outra história em H é chamada *trajetória completa*. O conjunto de trajetórias completas de H é representado por Z.

- $P : (H - Z) \to N \cup \{0\}$ é uma função que designa para cada elemento de $H - Z$ (conjunto de histórias não terminais) um elemento de $N \cup \{0\}$. $P(h)$ representa o jogador que se

[1]Um prefixo de uma seqüência $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ é qualquer subseqüência de $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ que consiste dos primeiros $l \leq k$ termos de $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$. Por exemplo considere a seqüência $h = \langle a_2, a_7, a_8\rangle$ então o conjunto de prefixos de h, que denotamos por $X(h)$, é dado por $X(h) = \{\langle\rangle, \langle a_2\rangle, \langle a_2, a_7\rangle, \langle a_2, a_7, a_8\rangle\}$. Temos que cada história é um prefixo dela mesma, de forma que quando um prefixo de uma história não é a propria história dizemos que este prefixo é estrito.

move após a história h, assim, se $P(h) = i$ o jogador i se move após h e se $P(h) = 0$ quem se move é o jogador chance após essa história. O conjunto de todas as histórias após as quais o jogador i faz seu movimento será representado por $H_i = \{h : P(h) = i\}$.

- $\mathfrak{f}_0$ é uma função tal que para cada história h, em que $P(h) = 0$, associa uma medida de probabilidade $\mathfrak{f}_0(\cdot|h)$ em M_h. Intuitivamente, $\mathfrak{f}_0$ determina a distribuição de probabilidade dos fenômenos aleatórios que podem influenciar no resultado do jogo, pode-se também enxergar esta função como sendo a estratégia do jogador chance que é fixa e de conhecimento comum entre os demais jogadores.

- $\mathcal{I}_i$ é uma partição do conjunto de histórias onde o jogador i se move, ou seja, $\mathcal{I}_i$ é uma partição do conjunto $H_i = \{h : P(h) = i\}$. Um subconjunto de histórias onde o jogador i se move que faz parte desta partição é chamado de um *conjunto de informação* do jogador i. A intuição que se tem é que se h e h' pertencem ao mesmo conjunto de informação $I \in \mathcal{I}_i$, então h e h' são indistinguíveis do ponto de vista do jogador i, portanto, temos que se as histórias $h, h' \in H_i$ estão em um mesmo conjunto de informação, então as ações disponíveis em h e h' devem ser as mesmas , ou seja, se $I \in \mathcal{I}_i$ e se h e $h' \in I$, então $M_h = M_{h'}$.

- $u_i : Z \to \mathbb{R}$ é uma função que associa para cada trajetória completa do jogo um número real que representa o quão desejável para o jogador i é este possível resultado do jogo. Em comparação com modelos de Teoria da Decisão, onde a função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern representa preferências sobre distribuições sobre conseqüências que são induzidas pelas ações do decisor, temos que u_i já representa o valor esperado da função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern, onde a distribuição sobre conseqüências é determinada pelas ações escolhidas pelos jogadores ao longo do jogo e pelas probabilidades que definem os movimentos do jogador chance. Portanto, apesar de saber-se que utilidades representam preferências sobre distribuições sobre conseqüências, quando estudamos Teoria dos Jogos, por simplicidade utilizamos o termo que utilidade representa preferências sobre perfis de estratégias, tendo em mente que o que se quer dizer é preferências sobre as distribuições sobre conseqüências induzidas por tais perfis.

Um jogo em forma extensa é dito ser finito se os conjuntos N, M, e H forem finitos.

A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra a relação entre o jogo definido na Seção 2.1 e as definições mostradas na Seção 2.2.

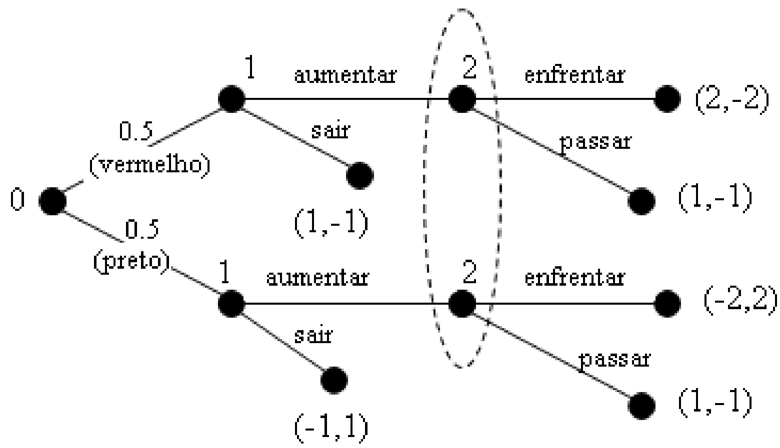


Figura 2.1: Representação em forma extensa do jogo definido na Seção 2.1.

Exemplo 2.2.1. *Baseado na figura acima, temos*

- $N = \{1, 2\}$
- M =*{vermelho, preto, aumentar, sair, enfrentar, passar}*
- $H = \{\langle\ \rangle, \langle vermelho\rangle, \langle preto\rangle, \langle vermelho,\ aumentar\rangle, \langle vermelho,\ sair\rangle, \langle preto,\ aumentar\rangle,$ $\langle preto,\ sair\rangle, \langle vermelho,\ aumentar,\ enfrentar\rangle, \langle vermelho,\ aumentar,\ passar\rangle,$ $\langle preto,\ aumentar,\ passar\rangle, \langle preto,\ aumentar,\ enfrentar\rangle\}$
- $P(\langle\ \rangle) = chance;\ P(\langle vermelho\rangle) = P(\langle preto\rangle) = 1$
  $P(\langle vermelho,\ aumentar\rangle) = P(\langle preto,\ aumentar\rangle) = 2$
- $\mathfrak{f}_0(vermelho \mid \langle\ \rangle) = \mathfrak{f}_0(preto \mid \langle\ \rangle) = \frac{1}{2}$
- $\mathcal{I}_1 = \{\{\langle vermelho\rangle\}, \{\langle preto\rangle\}\}$ *e* $\mathcal{I}_2 = \{\{\langle vermelho, aumentar\rangle, \langle preto,\ aumentar\rangle\}\}$

- $u_1(\langle \textit{vermelho, sair}\rangle) = u_1(\langle \textit{vermelho, aumentar, passar}\rangle) = u_1(\langle \textit{preto, aumentar, passar}\rangle) =$
  $= u_2(\langle \textit{preto, sair}\rangle) = 1$
  $u_2(\langle \textit{vermelho, sair}\rangle) = u_2(\langle \textit{vermelho, aumentar, passar}\rangle) = u_2(\langle \textit{preto, aumentar, passar}\rangle) =$
  $= u_1(\langle \textit{preto, sair}\rangle) = -1$
  $u_1(\langle \textit{vermelho, aumentar, enfrentar}) = u_2(\langle \textit{preto, aumentar, enfrentar}\rangle) = 2$
  $u_2(\langle \textit{vermelho, aumentar, enfrentar}) = u_1(\langle \textit{preto, aumentar, enfrentar}\rangle) = -2$

Para este exemplo, nós utilizamos os valores dos pagamentos para representar os $u_i's$. Em geral, quando se vai aplicar na prática modelos de Teoria dos Jogos ainda é necessário que tais utilidades sejam eduzidas dos jogadores envolvidos, pois ganhos monetários iguais podem ter impactos diferentes para pessoas distintas.

Uma observação muito importante a se fazer quando falamos de jogos na forma extensa é que em toda esta dissertação, estamos trabalhando com a suposição que todos os jogares têm memória perfeita, ou seja, os jogadores se lembram de todos os conjuntos de informação por onde eles passaram bem como as ações que usaram em cada um deles. Mais formalmente, temos que para Γ ser um jogo com informação perfeita é preciso que: se as histórias h e h' estão no mesmo conjunto de informação $I \in \mathcal{I}_i$ e h possui um prefixo h_1 onde $P(h_1) = i$, então h' possui um prefixo h'_1 tal que h_1 e h'_1 estão no mesmo conjunto de informação; além disso, se $h_1 \cdot \langle m\rangle$ for um prefixo de h (de forma que m foi a ação realizada quando h_1 foi atingida na história h), então $h'_1 \cdot \langle m\rangle$ é um prefixo de h' (portanto, i lembra que ele realizou ação m).

2.2.1 Estratégias

Uma estratégia para um jogador i pode ser vista como um plano que descreve todas as ações que o jogador i tomará em cada possível situação que possa vir a ocorrer no jogo. Apresentaremos agora três tipos de estratégias:

Estratégia Pura

Definição 2.2.1. *Uma estratégia pura c_i para um jogador i em um jogo Γ na forma extensa é uma função que associa a cada conjunto de informação $I \in \mathcal{I}_i$ um elemento do conjunto M_I,* *onde M_I é o conjunto de movimentos disponíveis para o jogador i quando ele se move no conjunto de informação I. O conjunto formado por todas as estratégias puras disponíveis para o jogador i em um jogo Γ é dado por C_i.*

Definição 2.2.2. *Um perfil de estratégias puras c é um vetor onde cada coordenada representa uma estratégia pura de um jogador, ou seja, um perfil c é um elemento do conjunto $C = \times_{i \in N} C_i$.*

Quando queremos representar um perfil de estratégias puras $c \in C$ sem a estratégia do jogador i, usamos a notação c_{-i}; já a notação (c_{-i}, d_i) é usada para representar um perfil de estratégias puras onde todos os jogadores menos o jogador i, escolhem as estratégias puras que estão em $c \in C$ e apenas o jogador i escolhe a estratégia $d_i \in C_i$, que pode ser diferente da estratégia c_i.

Podemos notar que um perfil de estratégias puras, em um jogo em forma extensa, induz a uma distribuição de probabilidade sobre possíveis histórias do jogo. Mais precisamente, temos que dado um perfil de estratégias puras c podemos calcular a probabilidade do jogo atingir uma história h, visto que os jogadores seguem esse perfil de estratégias c. Essa probabilidade é representada por $Pr_c(h)$ cujo valor é calculado da seguinte forma:

- $Pr_c(\langle\ \rangle) = 1$;
- se $h = h' \cdot \langle m \rangle$, $P(h') = 0$ e q é a probabilidade com que chance escolherá a ação m, então $Pr_c(h) = qPr_c(h')$;
- se $h = h' \cdot \langle m \rangle$ e $P(h') = i$, então $Pr_c(h) = Pr_c(h')$ se $c_i(h') = m$ ou $Pr_c(h) = 0$ se $c_i(h') \neq m$.

Estratégia Mista

Definição 2.2.3. *Uma estratégia mista para o jogador i em um jogo em forma extensa é uma distribuição de probabilidade δ_i em C_i, ou seja, uma estratégia mista δ_i é um elemento de $\Delta(C_i)$, onde $\Delta(C_i) = \{q : C_i \to \mathbb{R} \mid \sum_{y \in C_i} q(y) = 1 \text{ e } q(y) \geq 0, \forall y \in C_i\}$, ou seja, $\Delta(C_i)$ é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade que tem suporte contido em C_i.*

A definição de perfil de estratégias mistas é semelhante a Definição 2.2.2, a única diferença é que o perfil de estratégias mistas δ é um elemento do conjunto $\Delta = \times_{i \in N} \Delta(C_i)$. Note que ao definir-se um perfil de estratégia desta forma estamos assumindo que os jogadores podem escolher suas estratégias de forma aleatória e que o fazem de maneira independente.

Estratégia Comportamental

Definição 2.2.4. *Uma estratégia comportamental para o jogador i em um jogo em forma extensa é representada pela função σ_i que associa cada conjunto de informação $I \in \mathcal{I}_i$ um elemento de $\Delta(M_I)$.*

Definição 2.2.5. *Um perfil de estratégias comportamentais σ é um vetor onde cada coordenada representa uma estratégia comportamental de um jogador, ou seja, um perfil σ é um elemento do conjunto $\times_{i \in N} \times_{I \in \mathcal{I}_i} \Delta_{M_I}$.*

2.2.2 Equilíbrio de Nash

Dizemos que um perfil de estratégias puras (ou mistas) é um equilíbrio de Nash, se e somente se, nenhum jogador se sente motivado a mudar sua estratégia se os demais não o fizerem, isto é, se todos mantiverem as estratégias descritas pelo equilíbrio de Nash em questão e um jogador apenas resolver mudar sua estratégia, o *payoff* desse jogador não aumentará, sendo isso válido para todos os jogadores. Podemos definir, mais formalmente, um equilíbrio de Nash de duas maneiras, uma usando estratégias puras e outra usando estratégias mistas.

Definição 2.2.6. *Dizemos que um perfil de estratégias puras $c^* \in C$, de um jogo $\Gamma = (N, M, H, P, \mathfrak{f}_0, \{\mathcal{I} : i \in N\}, \{v_i : i \in N\})$, é um equilíbrio de Nash, em estratégias puras, se*

$$u_i(c^*) = \sum_{z \in Z} Pr_{c^*}(z) v_i(z) \geq u_i(c^*_{-i}, d_i) = \sum_{z \in Z} Pr_{(c^*_{-i}, d_i)}(z) v_i(z)$$

para todo $i \in N$ e para todo $d_i \in C_i$.

Definição 2.2.7. *Dizemos que um perfil de estratégias mistas $\delta^* \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash, em estratégias mistas, se*

$$u_i(\delta^*) = \sum_{c \in C} \delta^*(c) \sum_{z \in Z} Pr_c(z) v_i(z) \geq u_i(\delta^*_{-i}, \beta_i) = \sum_{c \in C} \delta^*_{-i}(c_{-i}) \beta(c_i) \sum_{z \in Z} Pr_c(z) v_i(z)$$

para todo $i \in N$ e para toda estratégia mista $\beta_i \in \Delta(C_i)$, onde δ^*_{-i} representa o perfil generalizado δ^* sem a estratégia pertencente ao jogador i.

Exemplo 2.2.2. *Aplicando as definições de estratégia e equilíbrio de Nash, vistas acima, ao jogo apresentado em 2.1 temos os seguintes resultados:*

- *O conjunto de estratégias puras para os jogadores 1 e 2 são: $C_1 = \{aa,\ as,\ sa,\ ss\}$ e $C_2 = \{e,\ p\}$, onde as letras a, s, e e p representam, respectivamente, as ações aumentar, sair, enfrentar e passar;*
- *O jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras;*

2.3 Forma Normal

A forma normal é uma das maneiras mais simples de se representar um jogo. Para representarmos um jogo na forma normal basta sabermos, apenas, o conjunto de jogadores do jogo, o conjunto de estratégias para cada jogador e a maneira como essas estratégias estão relacionadas com o *payoff*s dos jogadores.

Formalmente, definimos um jogo em forma normal como sendo uma tripla $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, onde

- N é o conjunto de jogadores;
- C_i é o conjunto de estratégias disponíveis para o jogador $i \in N$;
- u_i é uma função que leva um perfil de estratégias $c \in \times_{i\in N} C_i$ em um número real, ou seja, para um dado perfil de estratégias $c \in \times_{i\in N} C_i$ o número real $u_i(c)$ representa o *payoff* esperado que o jogador i receberia neste jogo, se c fosse a combinação de estratégias implementada pelos jogadores.

Um jogo em forma normal Ψ é dito ser um jogo finito se o conjunto de jogadores N e os conjuntos de estratégias C_i são ambos finitos.

Ao contrário do que acontece com os jogos em forma extensa, onde temos o fator tempo presente no modelo, temos que na análise dos jogos em forma normal não existe nenhum elemento de tempo, pois para jogos em forma normal assumimos que os jogadores escolhem suas estratégias simultaneamente e uma única vez, ou seja, cada jogador escolhe a estratégia que irá usar durante o jogo, sem que ele tenha alguma informação a respeito das escolhas dos outros jogadores antes das suas escolhas. Também assumimos que os jogadores fazem sua escolha de modo independente, ou seja, os jogadores não podem escolher estratégias que dependem das escolhas dos outros jogadores.

2.3.1 Estratégias

As estratégias utilizadas pelos jogadores em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ podem ser do tipo *pura* ou *mista*. Apresentamos, a seguir, a definição de cada um desses tipos de estratégia.

Estratégia Pura

Definição 2.3.1. *Uma estratégia pura para um jogador i em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ é qualquer estratégia $c_i \in C_i$.*

Estratégia Mista

Definição 2.3.2. *Uma estratégia mista para um jogador i em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ é uma distribuição de probabilidade δ_i em C_i, ou seja, uma estratégia mista δ_i é um elemento do conjunto $\Delta(C_i)$, onde $\Delta(C_i)$ é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade que tem suporte contido em C_i.*

Um perfil de estratégias mistas δ é qualquer vetor que especifica uma estratégia mista para cada jogador. Assim, definimos o conjunto de todos os perfis de estratégias mistas como sendo $\Delta = \times_{i\in N}\Delta(C_i)$.

Para qualquer perfil de estratégias mistas $\delta \in \Delta$, temos que $u_i(\delta)$ denota o *payoff* esperado que o jogador i receberia se os jogadores escolhessem suas estratégias segundo o perfil δ. Logo,

$u_i(\delta)$ é calculado da seguinte forma:

$$u_i(\delta) = \sum_{c \in C} \Big(\prod_{j \in N} \delta_j(c_j) \Big) u_i(c), \ \forall i \in N.$$

Considere agora, o perfil de estratégias mistas (δ_{-i}, τ_i), onde a $i-$ésima componente é τ_i, tal que $\tau_i \in \Delta(C_i)$, e as demais componentes são como em δ; para este perfil temos o seguinte *payoff* esperado:

$$u_i(\delta_{-i}, \tau_i) = \sum_{c \in C} \Big(\prod_{j \in N-i} \delta_j(c_j) \Big) \tau_i(c_i) u_i(c).$$

2.3.2 Equilíbrio de Nash

Um perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash se mesmo que um jogador saiba as estratégias que estão sendo usadas pelos demais, ele não tem incentivo a mudar sua estratégia porque sua estratégia é uma melhor resposta para estratégias dos demais jogadores.

Definição 2.3.3. *Um perfil de estratégias puras c é um equilíbrio de Nash de* $\Psi = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$*, se e somente se,* $u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i)$*,* $\forall i \in N$ *e* $\forall d_i \in C_i$*.*

Definição 2.3.4. *Um perfil de estratégias mistas* δ *é um equilíbrio de Nash de* $\Psi = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$*, se e somente se,* $u_i(\delta) \geq u_i(\delta_{-i}, \tau_i)$*,* $\forall i \in N$ *e* $\forall \tau_i \in \Delta(C_i)$*.*

2.3.3 Exemplos Famosos

Antes de apresentarmos os exemplos de jogos em forma normal, é importante ressaltarmos que quando temos um jogo com apenas 2 jogadores, uma maneira mais conveniente de se representar este jogo seria utilizando uma matriz, tal como apresentada a seguir.

		jogador 2	
		L	R
jogador 1	T	(x_1, x_2)	(y_1, y_2)
	B	(w_1, w_2)	(z_1, z_2)

Nesta matriz, as linhas correspondem às estratégias do jogador 1 e as colunas correspondem às estratégias do jogador 2. Cada célula da matriz possui um par ordenado, onde o primeiro (segundo) número corresponde ao *payoff* esperado para o jogador 1 (jogador 2) quando o perfil de estratégias, representado pela linha e pela coluna que deu origem aquela célula, é escolhido pelos jogadores.

Apresentaremos, agora, alguns exemplos de jogos em forma normal que são bastante comentados quando falamos em teoria dos jogos.

Batalha dos Sexos

Um homem e sua mulher desejam sair para passear. O homem prefere assistir a um jogo de futebol enquanto que sua mulher prefere ir ao cinema. Se eles forem juntos para o futebol, então o homem tem satisfação maior do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então a mulher tem satisfação maior do que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos. Esta situação pode ser modelada como um jogo em forma normal da seguinte maneira:

- $N = \{\text{homem, mulher}\}$;
- $C_{\text{homem}} = \{\text{futebol, cinema}\}$, $C_{\text{mulher}} = \{\text{futebol, cinema}\}$;

As funções utilidade $u_{\text{homem}} : C \to \mathbb{R}$ e $u_{\text{mulher}} : C \to \mathbb{R}$ são descritas pela seguinte matriz de *payoffs*:

		Mulher	
		futebol	cinema
Homem	futebol	(10,5)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(5,10)

Podemos perceber através desta matriz que os únicos equilíbrios de Nash, em estratégias puras, deste jogo são os perfis (futebol, futebol) e (cinema, cinema), pois $u_{\text{homem}}(\text{futebol, futebol}) =$

$10 > 0 = u_{\text{homem}}(\text{cinema, futebol})$ e $u_{\text{mulher}}(\text{futebol, futebol}) = 5 > 0 = u_{\text{mulher}}(\text{futebol, cinema})$, e similarmente para o outro equilíbrio. Podemos perceber também que o perfil de estratégias mistas $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é equilíbrio de Nash, em estratégias mistas, do jogo, pois

$$u_{\text{homem}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 10 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3},$$

$$u_{\text{mulher}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 10 = \frac{10}{3},$$

$$u_{\text{homem}}(p, 1-p\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = p \times \frac{1}{3} \times 10 + p \times \frac{2}{3} \times 0 + (1-p) \times \frac{1}{3} \times 0 + (1-p) \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3},$$

$$u_{\text{mulher}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; q, 1-q) = \frac{2}{3} \times q \times 5 + \frac{2}{3} \times (1-q) \times 0 + \frac{1}{3} \times q \times 0 + \frac{1}{3} \times (1-q) \times 10 = \frac{10}{3},$$

logo, como

$$u_{\text{homem}}(p, 1-p\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = u_{\text{homem}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ \forall (p, 1-p) \in \Delta(C_{\text{homem}})$$

e

$$u_{\text{mulher}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; q, (1-q)) = u_{\text{mulher}}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ \forall (q, 1-q) \in \Delta(C_{\text{mulher}})$$

temos, pela definição de equilíbrio de Nash, que o perfil $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é realmente um equilíbrio de Nash, em estratégias mistas, do jogo.

Combinando Moedas

Neste jogo, conhecido como *matching pennies*, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda para o segundo. Modelamos esta situação do seguinte modo:

- $N = \{1, 2\}$
- $C_1 = \{\text{cara , coroa}\}$, $C_2 = \{\text{cara, coroa}\}$

Esse jogo se encontra representado pela seguinte matriz de *payoff*s:

		jogador 2	
		cara	coroa
jogador 1	cara	(1,-1)	(-1,1)
	coroa	(-1,1)	(1,-1)

Podemos perceber, através da matriz de *payoff* s, que este jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras. Porém, temos que o perfil misto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é um equilíbrio de Nash, em estratégias mistas, do jogo, pois

$$u_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 0,$$

$$u_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-1) = 0,$$

$$u_1(p, 1-p; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = p \times \frac{1}{2} \times 1 + p \times \frac{1}{2} \times (-1) + (1-p) \times \frac{1}{2} \times (-1) + (1-p) \times \frac{1}{2} \times 1 = 0,$$

$$u_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; q, 1-q) = \frac{1}{2} \times q \times (-1) + \frac{1}{2} \times (1-q) \times 1 + \frac{1}{2} \times q \times 1 + \frac{1}{2} \times (1-q) \times (-1) = 0,$$

logo, como

$$u_1(p, 1-p; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = u_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ \forall (p, 1-p) \in \Delta(C_1)$$

e

$$u_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; q, (1-q)) = u_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ \forall (q, 1-q) \in \Delta(C_2)$$

temos, pela definição de equilíbrio de Nash, que o perfil $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é realmente um equilíbrio de Nash, em estratégias mistas, do jogo.

Dilema do Prisioneiro

Possivelmente o exemplo mais conhecido na teoria dos jogos é o dilema do prisioneiro. Ele foi formulado por Albert W. Tucker (Tucker 1950), em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, para ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos. A situação é a seguinte: dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si, o delegado de plantão a faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre delatar o companheiro ou negar o crime. Se os dois negarem o crime, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois delatarem um ao outro, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um delatar e o outro negar, então o que delatou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão. Esta situação também pode ser modelada como um jogo em forma normal da seguinte maneira:

- $N = \{\text{Al, Bob}\}$;
- $C_{\text{Al}} = \{\text{delatar, negar}\}$, $C_{\text{Bob}} = \{\text{delatar, negar}\}$;

As funções utilidade $u_{\text{Al}} : C \to \mathbb{R}$ e $u_{\text{Bob}} : C \to \mathbb{R}$ são descritas pela seguinte matriz de *payoffs*:

		Bob	
		delatar	negar
Al	delatar	(-5,-5)	(0,-10)
	negar	(-10,0)	(-1,-1)

Notemos que o perfil de estratégias puras (delatar, delatar) é o único equilíbrio de Nash deste jogo, pois $u_{\text{Al}}(\text{delatar, delatar}) = -5 > -10 = u_{\text{Al}}(\text{negar, delatar})$ e $u_{\text{Bob}}(\text{delatar, delatar}) = -5 > -10 = u_{\text{Bob}}(\text{delatar, negar})$. O perfil de estratégias puras (delatar, delatar) corresponde ao perfil de estratégias mista $(1, 0; 1, 0)$.

A seguir apresentamos um exemplo, da vida real, onde o dilema do prisioneiro pode surgir.

- *Corrida Armamentista*: Suponha que dois países entrem em uma corrida armamentista. O desejo de ambos é investir o seu dinheiro no sistema de saúde do seu país, mas existe ai um "dilema", pois se um deles gastar seu dinheiro com o sistema de saúde e o outro gastar em armas, então o país que investiu o seu dinheiro no sistema de saúde será invadido.

2.3.4 Conversão entre as Formas Normal e Extensa

Todo jogo em forma extensa Γ pode ser visto como um jogo em forma normal Ψ. A conversão de um jogo em forma extensa Γ para um jogo na forma normal Ψ é feita da seguinte maneira:

1. O conjunto de jogadores N para o jogo Ψ é o mesmo conjunto N do jogo Γ;

2. As estratégias puras para os jogadores no jogo Ψ são as mesmas estratégias para os jogadores no jogo Γ, definidas no começo da Subseção 2.2.1;

3. O *payoff* esperado para o jogador i em Ψ quando todos os jogadores implementam as estratégias que estão em c é dado por $u_i(c) = \sum_{z \in Z} Pr_c(z) w_i(z)$, onde $w_i(z)$ é o *payoff* do jogador i para a trajetória z no jogo Γ e $Pr_c(z)$ é a probabilidade induzida pelo perfil de estratégias c na trajetória z como definido na Subseção 2.2.1.

Note que se o jogo em forma extensa é finito, ou seja se árvore é finita, então o jogo na forma normal, baseado neste jogo em forma extensa, também é finito.

Quando um jogo $\Psi = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ é derivado de um jogo na forma extensa Γ, desta maneira apresentada acima, dizemos que Ψ é a representação em forma normal de Γ. A seguir apresentamos a representação em forma normal do jogo definido na Seção 2.1.

Exemplo 2.3.1. *O jogo definido na Seção 2.1 é representado na forma normal através da seguinte matriz:*

		jogador 2	
		l	p
jogador 1	aa	(0,0)	(1,-1)
	as	(0.5,-0.5)	(0,0)
	sa	(-0.5,0.5)	(1,-1)
	ss	(0,0)	(0,0)

É importante ressaltar que ao convertermos um jogo da forma normal para a forma extensa podemos encontrar várias formas extensas que representam este jogo, pois a forma normal não apresenta todas as informações do jogo, o que torna difícil a realização desta conversão. Assim para encontrarmos a forma extensa procurada só a matriz não é o bastante, é preciso que se tenha informações a mais sobre o jogo.

2.4 Forma Bayesiana

A forma Bayesiana, sugerida em Harsanyi (1967-68), surgiu da necessidade de se modelar jogos onde, no começo do jogo quando os jogadores começam a planejar suas ações, alguns jogadores já possuem informações privadas sobre o jogo que os outros jogadores não sabem. Sempre que isso acontece em um jogo dizemos que se trata de um jogo com *informação incompleta.* Jogos desse tipo são freqüentemente encontrados em situações práticas. Estamos muitas vezes interessados em estudar situações onde os jogadores geralmente têm diferentes informações privadas que eles adquiriram há um longo tempo, e é estranho definir o começo do jogo em algum ponto do passado antes dos jogadores terem adquirido suas informações privadas. As informações privadas que os jogadores possuem no começo do jogo definem os *tipos* dos jogadores.

A seguir, apresentamos uma definição formal de um jogo em forma Bayesiana seguindo a notação encontrada em Myerson (1997). Segundo este autor um jogo em forma Bayesiana é um vetor $\Xi = (N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ onde

- N é o conjunto de jogadores;
- C_i é o conjunto de ações disponíveis para o jogador i. O conjunto de todas as possíveis combinações de ações que os jogadores podem usar no jogo é representado por $C = \times_{i\in N} C_i$
- T_i é o conjunto de possíveis tipos do jogador i. O conjunto de todas as possíveis combinações de tipos que os jogadores podem ter no jogo é representado por $T = \times_{i\in N} T_i$. Já $T_{-i} = \times_{j\in N-i} T_j$ representa o conjunto de todas as possíveis combinações de tipos dos jogadores exceto i.
- p_i é uma função que associa para cada tipo $t_i \in T_i$ uma distribuição de probabilidade $p_i(\cdot \mid t_i)$ sobre o conjunto T_{-i}, representando assim a incerteza de cada tipo do jogador i em relação aos tipos dos outros jogadores. Logo temos que para qualquer $t_{-i} \in T_{-i}$, $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ designa a probabilidade subjetiva que o jogador i associa ao evento que t_{-i} é o verdadeiro perfil de tipos dos outros jogadores, se o seu próprio tipo é t_i.

- u_i é uma função que associa a cada par $(c, t) \in C \times T$ um número $u_i(c, t) \in \mathbb{R}$, ou seja, para cada perfil de estratégias $c \in C$ e perfil de tipos $t \in T$ a função u_i determina um número $u_i(c, t) \in \mathbb{R}$ que representa o *payoff* que o jogador i ganharia se os tipos dos jogadores fossem t e eles escolhessem as estratégias especificadas em c.

No jogo em forma Bayesiana Ξ assumimos que é de conhecimento comum entre todos os jogadores o fato que cada jogador i conhece a estrutura completa do jogo, bem como o seu próprio tipo em T_i. Note que isto implica que é de conhecimento comum entre os jogadores que todos os tipos de um jogador possuem as mesmas estratégias disponíveis. Dizemos que o jogo Ξ é finito, se e somente se, o conjunto de jogadores N, o conjunto de ações C e o conjunto de tipos T são finitos.

A seguir, apresentamos um exemplo de jogo em forma Bayesiana que ilustra as definições mostradas acima.

Exemplo 2.4.1. *Considere, neste exemplo, o jogo de cartas apresentado na Seção 2.1 acrescentando apenas o fato que o jogador* 1 *sabe a cor da carta antes do jogo começar. Modelamos esse jogo como um jogo em forma Bayesiana do seguinte modo:*

- $N = \{1, 2\}$

- $T_1 = \{1.v, 1.p\}$ *e* $T_2 = \{2\}$

- $C_1 = \{a, s\}$ *e* $C_2 = \{e, p\}$

- $p_1(2 \mid 1.v) = 1 = p_1(2 \mid 1.p)$ *e* $p_2(1.v \mid 2) = 0.5 = p_2(1.p \mid 2)$

- $u_1(s, e, 1.v, 2) = u_1(a, p, 1.v, 2) = u_1(s, p, 1.v, 2) = u_2(s, e, 1.p, 2) =$
  $= u_1(a, p, 1.p, 2) = u_2(s, p, 1.p, 2) = 1$
  $u_2(s, e, 1.v, 2) = u_2(a, p, 1.v, 2) = u_2(s, p, 1.v, 2) = u_1(s, e, 1.p, 2) =$
  $= u_2(a, p, 1.p, 2) = u_1(s, p, 1.p, 2) = -1$
  $u_1(a, e, 1.v, 2) = u_2(a, e, 1.p, 2) = 2$
  $u_2(a, e, 1.v, 2) = u_1(a, e, 1.p, 2) = -2$

2.4.1 Estratégias

Definição 2.4.1. *Uma estratégia pura para um jogador i em um jogo Bayesiano é uma função que associa para cada tipo $t_i \in T_i$ uma ação $c_i \in C_i$.*

Definição 2.4.2. *Uma estratégia mista para um jogador i em um jogo Bayesiano é uma função que associa para cada tipo $t_i \in T_i$ uma distribuição de probabilidade sobre as ações em C_i.*

2.4.2 Conversão para Forma Normal

Uma maneira de se representar um jogo em forma Bayesiana por um jogo em forma normal é fazendo o uso de uma representação conhecida na literatura como representação tipo-agente. Na representação tipo-agente existe um jogador para cada tipo de cada jogador do jogo Bayesiano. Assim o conjunto de jogadores da representação tipo-agente é igual a $T^* = \cup_{i \in N} T_i$, visto que podemos assumir sem perda de generalidade que $T_i \cap T_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Para todo $i \in N$ e $t_i \in T_i$ temos que o conjunto de estratégias disponíveis para o jogador t_i na representação tipo-agente é $D_{t_i} = C_i$, ou seja, as estratégias disponíveis para o jogador t_i na representação tipo agente são as mesmas estratégias disponíveis para o jogador i no jogo Bayesiano. Agora podemos definir a utilidade para cada jogador $t_i \in T_i$ como sendo igual a utilidade esperada condicional para o jogador $i \in \Xi$ dado que t_i é o verdadeiro tipo do jogador i. Mais formalmente, temos que para todo jogador $i \in N$ e todo tipo $t_i \in T_i$, a função utilidade $v_{t_i} = \times_{s \in T^*} D_s \to \mathbb{R}$ na representação tipo-agente está definida de modo que para todo $d \in \times_{s \in T^*} D_s$,

$$v_{t_i}(d) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(d_t, t),$$

onde t é um perfil de tipos da forma (t_i, t_{-i}) e d_t são as estratégias em d que são adotadas pelo perfil de tipos t dos jogadores.

Dadas as definições acima, podemos agora concluir que, de fato, a representação tipo-agente $(T*, (D_s)_{s \in T^*, (v_s)_{s \in T^*}})$ é um jogo em forma normal e que ela pode representar um dado jogo em forma Bayesiana.

Podemos agora representar o jogo Bayesiano, mostrado no Exemplo 2.4.1, na forma normal usando a representação tipo-agente definida acima.

Exemplo 2.4.2. *A representação tipo-agente do jogo é dada por:*

- $T^* = \{1.v, 1.p, 2\}$

- $D_{1.v} = D_{1.p} = \{a, s\}$ e $D_2\{e, p\}$

- $v_{1.p}(a, a, e) = v_{1.p}(s, a, e) = 1 \times u_1(a, e, 1.p, 2) = -2$

  $v_{1.p}(a, a, p) = v_{1.p}(s, a, p) = 1 \times u_1(a, p, 1.p, 2) = 1$

  $v_{1.p}(a, s, e) = v_{1.p}(s, s, e) = 1 \times u_1(s, e, 1.p, 2) = -1$

  $v_{1.p}(a, s, p) = v_{1.p}(s, s, p) = 1 \times u_1(s, p, 1.p, 2) = -1$

  $v_{1.v}(a, a, p) = v_{1.v}(a, s, p) = 1 \times u_1(a, p, 1.v, 2) = 1$

  $v_{1.v}(a, a, e) = v_{1.v}(a, s, e) = 1 \times u_1(a, e, 1.v, 2) = 2$

  $v_{1.v}(s, a, e) = v_{1.v}(s, s, e) = 1 \times u_1(s, e, 1.v, 2) = 1$

  $v_{1.v}(s, a, p) = v_{1.v}(s, s, p) = 1 \times u_1(s, p, 1.v, 2) = -1$

  $v_2(a, a, e) = \frac{1}{2} \times u_2(a, e, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(a, e, 1.v, 2) = 0$

  $v_2(a, a, p) = \frac{1}{2} \times u_2(a, p, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(a, p, 1.v, 2) = -1$

  $v_2(a, s, e) = \frac{1}{2} \times u_2(s, e, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(a, e, 1.v, 2) = -\frac{1}{2}$

  $v_2(a, s, p) = \frac{1}{2} \times u_2(s, p, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(a, p, 1.v, 2) = 0$

  $v_2(s, a, e) = \frac{1}{2} \times u_2(a, e, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(s, e, 1.v, 2) = \frac{1}{2}$

  $v_2(s, a, p) = \frac{1}{2} \times u_2(a, p, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(s, p, 1.v, 2) = -1$

  $v_2(s, s, e) = \frac{1}{2} \times u_2(s, e, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(s, e, 1.v, 2) = 0$

  $v_2(s, s, p) = \frac{1}{2} \times u_2(s, p, 1.p, 2) + \frac{1}{2} \times u_2(s, p, 1.v, 2) = 0$

2.4.3 Equilíbrio Bayesiano

Um equilíbrio de um jogo em forma Bayesiana, chamado *equilíbrio Bayesiano*, é definido como sendo um equilíbrio de Nash da representação tipo-agente deste jogo. Assim, podemos dizer que um equilíbrio Bayesiano especifica uma estratégia pura ou uma estratégia mista para cada tipo de cada jogador, tal que cada um desses tipos maximiza sua utilidade esperada quando ele sabe seu tipo mas não sabe o tipo dos outros jogadores.

Podemos observar que, em um equilíbrio Bayesiano, a estratégia de um jogador não depende do verdadeiro tipo dos demais jogadores, mas sim do seu próprio tipo. Conforme visto na Subseção 2.4.1, uma estratégia para o jogador i deve não só especificar uma ação para o seu verdadeiro tipo, mas também uma ação para todos os demais tipos, pois caso contrário não poderíamos determinar a utilidade esperada para um jogador que não conhece o verdadeiro tipo dos outros jogadores.

Formalmente, definimos um equilíbrio Bayesiano de seguinte forma:

Definição 2.4.3. *Dado um jogo Bayesiano Ξ definimos um equilíbrio Bayesiano em estratégias mistas, deste jogo, como sendo qualquer perfil de estratégias $\sigma \in \times_{i\in N} \times_{t_i \in T_i} \Delta(C_i)$ tal que para todo $i \in N$ e $t_i \in T_i$,*

$$\sigma_i(\cdot \mid t_i) \in argmax_{\tau_i \in \Delta(C_i)} \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i) \sum_{c \in C} \Big(\prod_{j \in N-\{i\}} \sigma_j(c_j \mid t_j) \Big) \tau_i(c_i) u_i(c,t),$$

onde o número $\sigma_j(c_j \mid t_j)$ representa a probabilidade condicional com que o jogador j escolheria a ação c_j se seu tipo fosse t_j.

2.5 Jogos com Consciência

Mostraremos, nesta seção, uma maneira apropriada de se representar jogos com consciência que, conforme visto no capítulo 1, são jogos onde os jogadores podem não ter plena consciência de toda estrutura do jogo. Este modelo que será apresentado foi desenvolvido por Halpern e Rêgo (Halpern & Rêgo 2006) e é usado para modelar consciência em jogos extensivos (em forma extensa).

O primeiro passo para a modelagem de tais jogos é representar o que os jogadores têm consciência em cada nó do jogo. Isto é feito usando os jogos aumentados. A intuição que se tem de um jogo aumentado é que ele descreve o jogo do ponto de vista de um analista omnisciente (modelador) ou de algum jogador em alguma situação do jogo.

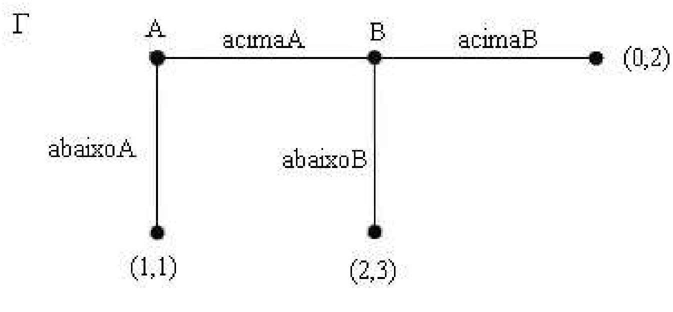
Dado um jogo finito em forma extensa $\Gamma = (N, M, H, P, \mathfrak{f}_0, \{\mathcal{I} : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$ que descreve as ações disponíveis aos jogadores na realidade, Halpern e Rêgo (Halpern & Rêgo 2006) definem um jogo aumentado baseado em Γ como sendo essencialmente um jogo em forma extensa que também determina, para cada história não terminal, o nível de consciência[2] do jogador que se move após esta história. Este nível de consciência do jogador pode mudar ao longo do tempo, conforme ele se torne consciente de mais ações. Formalmente, dado um jogo em forma extensa $\Gamma = (N, M, H, P, \mathfrak{f}_0, \{\mathcal{I} : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$ dizemos que $\Gamma^+ = (N^+, M^+, H^+, P^+, \mathfrak{f}_0^+, \{\mathcal{I}^+ : i \in N^+\}, \{u_i^+ : i \in N^+\}, \{\mathcal{A}_i^+ : i \in N^+\})$, onde $\mathcal{A}_i^+ : H_i^+ \to 2^H$ descreve o nível de consciência do jogador i em cada história que ele se movimenta, é um jogo aumentado baseado em Γ se são satisfeitas algumas condições de consistência. Estas condições podem ser encontradas, na íntegra, em Halpern & Rêgo (2006); elas basicamente asseguram que:

- o nível de consciência de um jogador depende somente das informações que ele capturou através de seus conjuntos de informação;
- os jogadores não esquecem as histórias das quais eles já foram conscientes;
- existe conhecimento comum sobre os *payoff* s e os conjuntos de informação do jogo básico.

Em um jogo aumentado, temos tanto ações do jogo básico como ações de chance que modificam o nível de consciência do jogador.

A seguir, apresentamos um exemplo de como representar um jogo em forma extensa usando os jogos aumentados baseados neste jogo.

Exemplo 2.5.1. *Considere o seguinte jogo em forma extensa:*



Agora, suponha que:

[2]O nível de consciência de um jogador i após uma história h é essencialmente um conjunto de histórias completas de Γ (jogo básico) que o jogador i tem consciência após a história h.

- *os jogadores A e B são conscientes de todas as histórias do jogo;*

- *o jogador A tem incerteza se o jogador B é consciente da trajetória $\langle acimaA, abaixoB \rangle$ e acredita que ele (B) é inconsciente desta trajetória com probabilidade p;*

- *o tipo do jogador B que é consciente da trajetória $\langle acimaA, abaixoB \rangle$ é consciente que o jogador A é consciente de todas as histórias, e sabe que A tem incerteza sobre o seu (B) nível de consciência e sabe a probabilidade p.*

  Como os jogadores A e B são conscientes de todas as histórias do jogo básico, do ponto de vista do modelador, então o jogo aumentado do modelador Γ^m é igual ao jogo Γ mostrado acima. Entretanto, quando o jogador A se move no nó A do jogo do modelador, ele acredita que o verdadeiro jogo é o jogo aumentado Γ^A descrito na Figura 2.2. No jogo Γ^A, a ação inicial do jogador natureza captura a incerteza do jogador A sobre o nível de consciência do jogador B. No conjunto de informação $A.1$, do jogo Γ^A, o jogador A tem consciência de todas as trajetórias do jogo básico e acredita que o verdadeiro jogo é mesmo Γ^A. No nó $B.1$, o jogador B tem consciência de todas as trajetórias do jogo básico e acredita que o verdadeiro jogo é o jogo do modelador (Γ^m); mas no nó $B.2$, o jogador B não tem consciência que ele pode jogar abaixoB, e portanto acredita que o verdadeiro jogo é o jogo aumentado Γ^B descrito na Figura 2.3. Nos nós $A.3$ e $B.3$ do jogo Γ^B, nem o jogador A nem o jogador B são conscientes da ação abaixoB. Além disso, ambos os jogadores acreditam que o verdadeiro jogo é Γ^B.

Portanto, como visto no exemplo acima, temos que para representarmos completamente um jogo com consciência nós precisamos de um conjunto de jogos aumentados. Formalmente, um jogo com consciência baseado em $\Gamma = (N, M, H, P, \mathfrak{f}_0, \{\mathcal{I} : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$ é uma tripla da forma $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, onde

- $\mathcal{G}$ é um conjunto enumerável de jogos aumentados, baseados no jogo básico Γ, no qual um deles é o jogo do modelador Γ^m.

- $\mathcal{F}$ é uma função que leva um jogo aumentado $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$ e uma história $h \in H^+$, tal que

$P^+(h) = i$, para um par (Γ^h, I), onde $\Gamma^h \in \mathcal{G}$ e I é um conjunto de informação do jogador i no jogo Γ^h.

Intuitivamente, temos que se o jogador i se move na história h no jogo $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h) = (\Gamma^h, I)$, então Γ^h é o jogo que o jogador i acredita ser o verdadeiro quando a história é h e I é o conjunto de histórias em Γ^h que ele (i) considera possível.

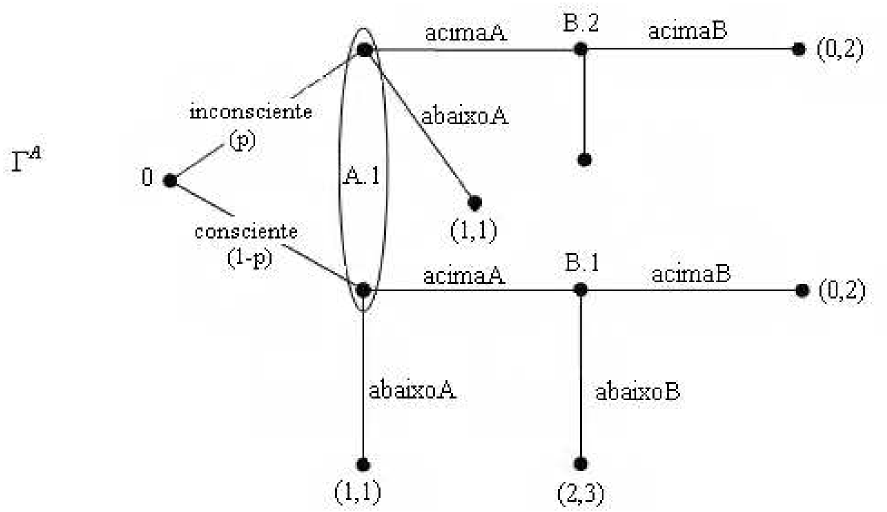


Figura 2.2: Jogo aumentado que representa a visão do jogador A sobre o jogo.

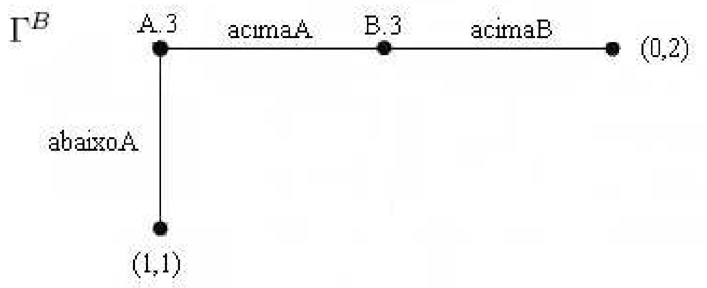


Figura 2.3: Jogo aumentado que representa a visão de A sobre a visão de B do jogo.

Exemplo 2.5.2. *No jogo com consciência apresentado no Exemplo 2.5.1 temos:*

- $\mathcal{G} = \{\Gamma^m, \Gamma^A, \Gamma^B\}$;
- $\mathcal{F}(\Gamma^m, \langle\,\rangle) = (\Gamma^A, \{\langle consciente\rangle, \langle inconsciente\rangle\})$;

$\mathcal{F}(\Gamma^A, \langle \textit{inconsciente, acimaA} \rangle) = (\Gamma^B, \{\langle \textit{acimaA} \rangle\})$;

$\mathcal{F}(\Gamma^A, \langle \textit{consciente, acimaA} \rangle) = (\Gamma^m, \{\langle \textit{acimaA} \rangle\})$.

Apesar da função $\mathcal{F}$ ser uma função determinística, pode-se capturar a incerteza de um jogador sobre o jogo que está sendo jogado através de ação inicial, feita pelo jogador chance. Por exemplo, podemos citar o Exemplo 2.5.1, onde capturamos a incerteza do jogador A em relação a consciência do jogador B, no jogo Γ^A (Figura 2.2), através das ações (consciente e inconsciente) pertencentes ao jogador chance. Observe que as probabilidades relacionadas com a incerteza do jogador são, na verdade, probabilidades subjetivas. De agora em diante, todas as vezes que falarmos em distribuição de probabilidades, deve-se assumir que estamos falando de probabilidades subjetivas.

O jogo do modelador (Γ^m) deve satisfazer algumas condições de consistência (vide Halpern & Rêgo (2006)). Essas condições asseguram que o modelador é consciente de todos os jogadores e movimentos do jogo básico Γ. O jogo do modelador pode ser pensado como o jogo objetivo que descreve a "realidade" e o nível de consciência real dos jogadores.

Assim como acontece com o jogo do modelador, a função $\mathcal{F}$ também deve satisfazer algumas condições de consistência. Essas condições capturam nossa intuição sobre consciência e asseguram que os jogadores se lembram dos jogos que eles consideraram possíveis e das ações que eles realizaram. Maiores detalhes sobre as condições de consistência da função $\mathcal{F}$ podem ser encontrados em Halpern & Rêgo (2006).

Um jogo em forma extensa padrão Γ pode ser representado pelo jogo $(\{\Gamma^m\}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, onde (abusando um pouco da notação) $\Gamma^m = (\Gamma, \mathcal{A}_i : i \in N)$ e, para todas as histórias h pertencentes a I (conjunto de informação do jogador i em Γ), $\mathcal{A}_i(h) = H$ e $\mathcal{F}(\Gamma^m, h) = (\Gamma^m, I)$. Logo, todos os jogadores são conscientes de todas as trajetórias em Γ, e concordam uns com os outros e com o modelador que o jogo é Γ. Esta representação do jogo Γ é conhecida como a representação canônica de Γ como um jogo com consciência.

Estratégia Local

Em um jogo com consciência $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, Halpern e Rêgo não consideram mais uma única estratégia para o jogador i; agora eles levam em consideração um conjunto de estratégias para o jogador i, uma para cada jogo aumentado que ele (i) considera ser o verdadeiro em alguma situação, ou seja, eles levam em consideração o conjunto $\{\sigma_{i,\Gamma'} : \Gamma' \in \mathcal{G}_i\}$, onde $\mathcal{G}_i$ é o conjunto de jogos aumentados, pertencentes a $\mathcal{G}$, que algum jogador acredita que i considera possível.

Intuitivamente, uma estratégia local $\sigma_{i,\Gamma'}$ é a estratégia que o jogador i usaria se ele fosse chamado a jogar e ele pensasse que o verdadeiro jogo fosse Γ'.

Equilíbrio de Nash Generalizado

Dado um jogo com consciência $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, Halpern e Rêgo definem um perfil de estratégias generalizado $\vec{\sigma}$ como sendo um vetor cujas coordenadas representam uma estratégia local para cada jogador em cada jogo que ele é consciente, ou seja, $\vec{\sigma} = \{\sigma_{i,\Gamma'} : i \in N, \Gamma' \in \mathcal{G}_i\}$

Intuitivamente temos que um perfil de estratégias generalizado $\vec{\sigma}$ é um equilíbrio de Nash generalizado se para todo jogador i, se i acredita que ele está jogando Γ', então sua estratégia local $\sigma_{i,\Gamma'}$ é sua melhor resposta às estratégias locais dos outros jogadores em Γ' que fazem parte de $\vec{\sigma}$.

2.5.1 Trabalhos Relacionados

Apresentaremos, nesta seção, alguns trabalhos publicados recentemente que abrangem, de certa forma, temas relacionados a jogos com consciência. A seguir mostramos uma relação com alguns trabalhos.

- Rêgo & Halpern (2007): Mostraram como generalizar um número de conceitos de soluções[3] para jogos com consciência; também propuseram técnicas para provar que estes conceitos sempre existem.

[3] Por exemplo o conceito de equilíbrio seqüencial, que é um conceito que pode ser considerado o mais apropriado para jogos extensivos

- Ozbay (2006): Propôs um modelo para jogos com informação imperfeita, onde os jogadores podem ter diferentes níveis de consciência com respeito a um movimento de chance (ou natureza). Neste cenário, um dos jogadores está completamente consciente e pode avisar ao outro jogador sobre esses movimentos antes de o segundo jogador se mover. O interessante, aqui, é que a crença do segundo jogador sobre a probabilidade desses movimentos revelados são formadas como parte da definição de equilíbrio.

- Li (2006): Forneceu um modelo de inconsciência em jogos em forma extensa. Embora sua representação de jogos com consciência seja bastante similar a representação apresentada por Halpern & Rêgo (2006), ela fornece uma noção diferente de equilíbrio de Nash generalizado.

- Feinberg (2005): Forneceu uma definição de equilíbrio de Nash estendido para jogos em forma normal. Contudo sua definição, apesar de originar-se das mesmas intuições apresentadas em (Halpern & Rêgo 2006), é representada sintaticamente.

CAPÍTULO 3

Falta de Consciência em Jogos em Forma Normal

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado um modelo relevante para representarmos situações que ocorrem no nosso dia-a-dia e que podem ser analisadas através da Teoria dos jogos.

Na Seção 3.2 é apresentado o modelo para a representação de jogos com consciência em forma normal, o qual se baseia na idéia da definição de jogos com consciência em forma extensa apresentada em Halpern & Rêgo (2006). Intuitivamente, um jogo com consciência é um jogo no qual alguns jogadores podem não ter consciência de ações que outros jogadores (ou eles mesmos) podem realizar, isto é, quando estes jogadores estão participando do jogo eles não conseguem imaginar ou descrever todas as possíveis ações do jogo. Como exemplo de situação que acontece no nosso dia-a-dia e que é interessante de se modelar podemos citar:

- Na área financeira: alguns investidores podem não ter consciência de algumas estratégias de investimento, tal como uma estratégia complexa para driblar os impostos.

- Na área do Direito: para este caso pode-se tomar como exemplo a seguinte situação: É sabido que a Constituição Americana, hoje, é formada por um número muito reduzido de leis. A questão aqui é que até que ponto é melhor que o legislador (que não está certo se existe, ainda, alguns direitos dos quais ele é inconsciente) escreva todos os direitos que ele é consciente em uma lei. Chung e Fortnow (Chung & Fortnow 2007) utilizou um modelo de jogos com consciência para formalizar o argumento dos fundadores da Constituição Americana que eram contrários a inclusão da "Bill of Rights"dentro da Constituição. A teoria desenvolvida por Chung e Fortnow (Chung & Fortnow 2007) mostra porque muitas explicações podem, de fato, prejudicar na interpretação da lei, utilizando o fato que os legisladores são conscientes de sua falta de consciência sobre futuras situações que podem ocorrer.

Na Seção 3.3, é introduzido o conceito de consciência sobre inconsciência em jogos na forma normal e é apresentado um método para se modelar tal situação. A intuição que se tem a respeito de um jogo com consciência sobre inconsciência é que, neste jogo, os jogadores podem ser conscientes de sua falta de consciência, isto é, um jogador pode ser consciente que existem movimentos que um outro jogador pode fazer, embora ele não saiba exatamente que movimentos são esses. Como exemplo de uma situação real, onde ocorre consciência sobre inconsciência, que é interessante para se modelar podemos citar:

- um jogador pode atrasar a tomada de uma decisão porque ele considera possível que ele descobrirá novas ações disponíveis, mesmo que ele no presente não saiba quais ações são estas.

Nossa principal motivação, para esta nova definição de jogos com consciência, é que com algumas pequenas modificações nos modelos propostos, seremos capazes de modelar jogos com preferências possivelmente incompletas, que serão apresentados no próximo capítulo.

3.2 Representação de Jogos com Consciência em Forma Normal

Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, dividimos essa seção em duas subseções: na primeira subseção, apresentamos um modelo para o caso mais básico, onde temos apenas dois jogadores; enquanto que na segunda subseção, apresentamos um modelo mais geral que é válido para o caso onde temos n jogadores.

O primeiro passo para representar jogos com consciência é representar explicitamente quais perfis de estratégias os jogadores tem consciência e quais eles acreditam que os outros jogadores têm consciência. Para tanto, utilizaremos o que chamamos de um *jogo normal aumentado.* Intuitivamente, um jogo normal aumentado não é nada mais que um jogo normal, com a diferença que agora temos uma componente extra na definição do jogo que determina o nível de consciência dos jogadores a respeito dos perfis de estratégias disponíveis aos demais. Como um jogador pode ter incerteza a respeito de quais perfis de estratégias seu oponente é consciente, definimos o nível de consciência de um jogador como sendo probabilístico. Formalmente,

Definição 3.2.1. *Um jogo normal aumentado baseado no jogo normal* $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ *é um vetor* $\Psi' = (N', (C_i')_{i\in N'}, (u_i')_{i\in N'}, (\mathcal{A}_i')_{i\in N'})$ *tal que*

A1. $\overline{\Psi}' = (N', (C_i')_{i\in N'}, (u_i')_{i\in N'})$ *é um jogo em forma normal;*

A2. $N' = \{i \in N : C_i' \neq \emptyset\}$*;*

A3. $C_i' \subseteq C_i, \forall i \in N'$*;*

A4. $u_i'(c) = u_i(c), \forall i \in N'$ *e* $c \in C'$*;*

A5. *Para todo* $i \in N'$, $\mathcal{A}_i' \in \Delta(2^{C'})$ *de forma que se* $\mathcal{A}_i'(D) > 0$*, então* $D = \times_{j\in N'} D_j$*, onde* $D_j \subseteq C_j', \forall j \in N'$.[1]

Um jogo em forma normal aumentado pode ser utilizado para descrever o jogo do ponto de vista de algum dos jogadores ou do modelador que consideramos ser omnisciente, ou seja, é consciente de todos os perfis de estratégias disponíveis e sabe o nível de consciência dos jogadores. Portanto, para definir completamente um jogo com consciência precisamos de um conjunto de jogos aumentados.

3.2.1 Caso de 2 jogadores

Definimos um jogo com consciência para dois jogadores baseado em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, onde $||N|| = 2$, como sendo $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$, onde

[1] No que se segue adotamos sempre a convenção que $\emptyset \times A = A \times \emptyset = A$ para qualquer conjunto A.

- $\mathcal{G}$ é um conjunto contável de jogos normais aumentados baseados em Ψ.
- $\Psi^m \in \mathcal{G}$ é o jogo do modelador, que assumimos ser omnisciente.
- $\mathcal{F}$ é uma função que leva um jogo normal aumentado $\Psi' \in \mathcal{G}$ e um jogador $i \in N'$ para uma distribuição de probabilidade sobre a classe de jogos aumentados baseados em $\overline{\Psi}'$, ou seja, $\mathcal{F}(\Psi', i) \in \Delta(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}})$, onde $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}$ é o conjunto formado pelos jogos aumentados baseados em $\overline{\Psi}'$, que pertencem a $\mathcal{G}$.

Dizemos que um jogo Ψ'' pertence ao suporte de $\mathcal{F}(\Psi', i) = \mathbf{p}$ se Ψ'' recebe probabilidade positiva de acordo com a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}$. Quando um jogo Ψ'' recebe probabilidade 1 de acordo com a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}$, iremos representar esta distribuição por $[\Psi'']$.

Suponha que j acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' e que o jogador $i \neq j$ se movimenta neste jogo, e $\mathcal{F}(\Psi', i) = \mathbf{p}$, onde $\mathbf{p}$ é uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}$, então o jogador j está incerto quanto ao jogo que i acredita ser o verdadeiro quando ele se move em Ψ'. Os jogos que fazem parte da incerteza do jogador j são os jogos que estão no suporte de $\mathbf{p}$.

É importante explicar porque não é adequado definir $\mathcal{F}$ como sendo uma distribuição de probabilidade em $\mathcal{G}$. O problema é que se um dado jogador j acredita em Ψ', como sendo o verdadeiro jogo, não podemos permitir que $\mathcal{F}(\Psi', i)$ seja um distribuição de probabilidade sobre $\mathcal{G}$, pois ao permitirmos isso estaríamos afirmando que o jogador j seria capaz de descrever estratégias que não fariam parte de C', o que não é verdade pois C' contém todas as estratégias que o jogador j é capaz de imaginar, se ele acredita que o verdadeiro jogo é Ψ'. Portanto, j não pode sequer dar probabilidade zero a jogos que envolvam estratégias que não estão em C', pois tais jogos estão fora de seu espaço amostral. Como os jogos em $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}$ só contém estratégias em C' a definição está adequada.

O jogo normal aumentado Ψ^m, que representa a visão do modelador, deve ser tal que $\overline{\Psi}^m = \Psi$. Assim, garantimos que o modelador está consciente de todas as estratégias e jogadores do jogo básico Ψ. Pode-se interpretar Ψ^m como o jogo objetivo que está realmente sendo jogado e que descreve os verdadeiros níveis de consciência dos jogadores. Os demais jogos em $\mathcal{G}$ são jogos subjetivos, que algum jogador acredita ser o verdadeiro em alguma situação do jogo.

No que se segue, o sobrescrito $'$ nas componentes C, u e $\mathcal{A}$ indicam que elas pertencem ao jogo Ψ' e a mesma relação vale para quaisquer outros sobrescritos; quando as componentes não apresentam sobrescritos está implícito que elas pertencem ao jogo básico, Ψ.

A função $\mathcal{F}$ possui duas restrições que capturam desejáveis propriedades de consciência. São elas:

R0. $\sum_{\Psi'' \in P_{\mathcal{G}\Psi'}, C''=D} \mathcal{F}(\Psi', i)(\Psi'') = \mathcal{A}'_i(D)$, para todo $\Psi' \in \mathcal{G}$, $i \in N'$, e $D \subseteq C'$.

R1. Se, para algum $\Psi' \in \mathcal{G}$ e $i \in N'$, temos que Ψ'' pertence ao suporte de $\mathcal{F}(\Psi', i)$, então $\mathcal{F}(\Psi'', i) = [\Psi'']$.

Note que R0 e R1 implicam que se para algum $\Psi' \in \mathcal{G}$ e $i \in N'$ Ψ'' pertencer ao suporte de $\mathcal{F}(\Psi', i)$, então $\mathcal{A}''_i(C'') = 1$.

A restrição R0 exige que a soma das probabilidades de todos os jogos normais aumentados que o jogador i considera possível em Ψ' que possuem conjunto de possíveis perfis de estratégias igual a D deve ser igual a probabilidade de D segundo o nível de consciência de i em Ψ'.

A intuição que se tem a respeito da restrição R1 é que os jogadores são capazes de realizar introspecção com respeito aos jogos que eles acreditam ser possíveis e que isto é de conhecimento comum entre os jogadores. Em outras palavras, se um jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', então ele deve acreditar que ele acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', de modo que se o verdadeiro jogo fosse Ψ', então i deveria saber deste fato. Como esta capacidade de introspecção dos jogadores, é de conhecimento comum entre eles, se o jogador j que acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' acredita com probabilidade positiva que o jogador i considera que o verdadeiro jogo é Ψ'', então se o verdadeiro jogo fosse Ψ'', o jogador i deveria acreditar com probabilidade 1 que este era realmente o jogo.

Dizemos que um jogo com consciência em forma normal Ψ^* baseado em Ψ é *localmente finito* se Ψ for finito e $\mathcal{F}(\Psi^+, i)$ tiver suporte finito para todo $\Psi^+ \in \mathcal{G}$ e $i \in N^+$.

Dado um jogo Ψ em forma normal podemos representá-lo como um jogo com consciência em forma normal da seguinte maneira: $\Psi^* = (\{\Psi^m\}, \Psi^m, \mathcal{F})$, onde $\overline{\Psi}^m = \Psi$ e $\mathcal{A}_i^m = [C]$ para todo $i \in N$. Chamamos esta representação de *representação canônica de* Ψ *como um jogo com consciência.*

Estratégia Local

É sabido que a tomada de decisão é baseada nas preferências de cada jogador e na sua expectativa sobre as estratégias dos outros jogadores.

Em jogos com consciência, cada jogador i pode ter uma percepção limitada das estratégias sendo utilizadas pelos demais jogadores, tendo em vista que estes podem possuir estratégias que não fazem parte do jogo segundo a percepção de i, ou seja, i pode não ser consciente de algumas ações disponíveis para seus oponentes. Além disso, o jogador i pode estar incerto com respeito ao conjunto de estratégias disponíveis aos demais jogadores, e deve ter uma expectativa diferente para estratégia utilizada pelos outros em cada cenário que ele considera possível. Assim, para jogos deste tipo, faz-se necessário o uso de um conjunto de estratégias para cada jogador, ou seja, em um jogo com consciência em forma normal para cada possível jogo Ψ' que algum jogador acredite que i possa considerar ser o verdadeiro em alguma situação, i deve ter uma *estratégia local* $\delta_{i,\Psi'}$ neste jogo. A intuição é que $\delta_{i,\Psi'}$ é a estratégia que seria utilizada por i se i fosse chamado a jogar e acreditasse que o verdadeiro jogo fosse Ψ'.

Seja $\mathcal{G}_i = \{\Psi' \in \mathcal{G} : \text{para algum } \Psi^+ \in \mathcal{G},\ \mathcal{F}(\Psi^+, i)(\Psi') > 0\}$, o conjunto de jogos que algum jogador acredita que i considera ser o verdadeiro em alguma situação do jogo. Formalmente, temos que a definição de estratégia local é a seguinte:

Definição 3.2.2. *Uma estratégia local para o jogador i em um jogo $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ é uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras de i em Ψ', assim podemos dizer que $\delta_{i,\Psi'} \in \Delta(C_i')$.*

Equilíbrio de Nash Generalizado

Antes de definirmos equilíbrio de Nash generalizado, permita-nos recordar a intuição por trás do equilíbrio de Nash propriamente dito. Em jogos padrões, com conhecimento comum, temos que um perfil de estratégias c é um equilíbrio de Nash, se para cada jogador i sua estratégia em c é sua melhor opção, dentre todas as suas estratégias, contra as estratégias dos outros jogadores em c. Esta definição implicitamente assume que cada jogador é consciente do conjunto de estratégias disponíveis para os demais e que isso é de conhecimento comum entre os jogadores. Contudo, para o caso onde trabalhamos com jogos com consciência não podemos mais usar esta definição de equilíbrio de Nash, pois um jogador pode não ser consciente de uma estratégia disponível para um outro jogador, logo sendo impossível que ele possa escolher uma melhor resposta a esta estratégia que ele não consegue nem imaginar qual seja. Além disso, temos que o jogo não é mais de conhecimento comum, além do jogo objetivo (jogo do modelador), temos agora que cada jogador possui o seu próprio jogo subjetivo, que descreve o jogo objetivo dentro das limitações de percepção que o jogador possui da realidade. Portanto, em um equilíbrio de um jogo com consciência deve-se descrever não somente as estratégias utilizadas pelos jogadores no jogo objetivo, como também as estratégias utilizadas pelos jogadores em algum jogo subjetivo que algum jogador acredite ser o verdadeiro em alguma situação; e essas estratégias não são necessariamente iguais. Por isso, somos levados a construir uma nova definição de *equilíbrio de Nash* para tais jogos.

Considere um *perfil de estratégia generalizado* como sendo um vetor cujas coordenadas são estratégias locais, isto é, $\vec{\delta} = \{\delta_{i,\Psi'} : i \in N, \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$. Assim temos que, dado $\vec{\delta}$, o *payoff* esperado para o jogador i no jogo Ψ' é representado por $u_{i,\Psi'}(\vec{\delta})$. Observe que para calcularmos o valor $u_{i,\Psi'}(\vec{\delta})$ precisamos apenas das estratégias de $\delta_{i,\Psi'}$ e da estratégia local do oponente de i nos jogos em que i acredita que seu oponente considera ser o verdadeiro com probabilidade positiva, isto é, precisamos saber as seguintes estratégias locais $\{\delta_{j,\Psi''} : j \neq i, \mathcal{F}(\Psi', j)(\Psi'') > 0\}$. Note que pela definição da função $\mathcal{F}$ e definição de jogos aumentados, todas essas estratégias locais têm suporte contido em C'_j, portanto se i acredita que o jogo é Ψ', ele é consciente de todas essas estratégias locais e portanto pode calcular o valor esperado deste perfil generalizado de estratégias. O *payoff* esperado para um jogador i em um jogo $\Psi^+ \in \mathcal{G}_i$, dado um perfil generalizado de estratégias $\vec{\delta}$ é calculado da seguinte forma:

$$u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}) = \sum_{\Psi' \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}}} \mathcal{F}(\Psi^+, j)(\Psi')u_i^+(\delta_{i,\Psi^+}, \delta_{j,\Psi'}).$$

Dado um perfil de estratégia generalizado $\vec{\delta}^*$, definimos um equilíbrio de Nash generalizado como a seguir.

Definição 3.2.3. *Um* perfil de estratégia generalizado $\vec{\delta}^*$ *é um* equilíbrio de Nash generalizado *de um jogo normal com consciência $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ se para todo jogador i, jogo $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ e estratégia local δ pertencente ao jogador i em Ψ', o payoff esperado para o jogador i em Ψ' quando os demais jogadores seguem as estratégias locais em $\vec{\delta}^*$ é maior ou igual quando ele usa $\vec{\delta}^*_{i,\Psi'}$ do que quando ele usa δ, ou seja,*

$$u_{i,\Psi'}(\vec{\delta}^*) \geq u_{i,\Psi'}((\vec{\delta}^*_{-(i,\Psi')}, \delta))$$

onde $\vec{\delta}^*_{-(i,\Psi')}$ é o conjunto de todas as estratégias locais em $\vec{\delta}^*$ menos a estratégia $\delta_{i,\Psi'}$.

É fácil ver que $\vec{\delta}^*$ é um equilíbrio de Nash de Ψ, se e somente se, $\vec{\delta}^*$ for um equilíbrio de Nash generalizado da representação canônica de Ψ como um jogo com consciência em forma normal.

Existência do Equilíbrio de Nash Generalizado

Mostraremos, nesta seção, que para todo jogo com consciência $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ baseado em Ψ, onde $||N|| = 2$, localmente finito existe pelo menos um equilíbrio de Nash generalizado. A idéia é definir um jogo em forma normal padrão de tal forma que exista uma correspondência entre os equilíbrios de Nash deste jogo e os equilíbrios de Nash generalizados de Ψ^* para então podermos utilizar resultados conhecidos sobre existência de equilíbrios de Nash.

Para isto, precisamos primeiro construir um jogo na forma normal Ψ^θ, cujas propriedades são:

- $N^\theta = \{(i, \Psi') : \Psi' \in \mathcal{G}_i, i \in N\}$
- $C^\theta_{(i,\Psi')} = C'_i$
- $u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = \sum_{\Psi' \in P_{\mathcal{G}^{\Psi^+}}} \mathcal{F}(\Psi^+, j)(\Psi') u_i^+(\delta_{(i,\Psi^+)}, \delta_{(j,\Psi')})$

Podemos observar que o jogo Ψ^θ, definido acima, possui algumas propriedades interessantes que devem ser levadas em consideração na prova da existência do equilíbrio de Nash generalizado. Primeiro note que existe uma correspondência 1-1 entre os perfis de estratégia generalizados de Ψ^* e os perfis de estratégia mistos de Ψ^θ, pois podemos associar uma estratégia local para i em $\Psi' \in \mathcal{G}$ com a estratégia do jogador (i, Ψ') em Ψ^θ. Temos então as seguintes propriedades: (a) se $\vec{\delta}$ for o perfil de estratégias de Ψ^θ que corresponde ao perfil de estratégias generalizado $\vec{\delta}'$ de Ψ^*, então $u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}')$ e (b) a utilidade esperada de um jogador (i, Ψ^+) depende apenas das estratégias de um subconjunto finito de jogadores de N^θ, pois como Ψ^* é localmente finito por definição $\mathcal{F}(\Psi^+, j)$ tem suporte finito. Essas propriedades são suficientes para demonstrar o teorema e o corolário que são apresentados seguir.

Teorema 3.2.1. *$\vec{\delta}$ é um equilíbrio de Nash de Ψ^θ, se e somente se, $\vec{\delta}'$ for um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^*, onde $\delta'_{i,\Psi'} = \delta_{(i,\Psi')}$ para $i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}_i$.*

Corolário 3.2.1. *Todo jogo com consciência em forma normal, com 2 jogadores, localmente finito tem um equilíbrio de Nash generalizado.*

Para demonstração do Teorema 3.2.1 utilizamos as definições de equilíbrio de Nash e equilíbrio de Nash generalizado bem como a propriedade $u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}')$. Enquanto que na demonstração do Corolário 3.2.1 utilizamos um resultado mostrado em Salonen (2005) que implica que Ψ^θ possui pelo menos um equilíbrio de Nash. Maiores detalhes sobre essas demonstrações podem ser encontrados no apêndice.

A seguir apresentamos um exemplo de um jogo com consciência em forma normal e a representação de Ψ^θ para esse jogo.

Exemplo 3.2.1. *Considere o jogo básico Ψ apresentado na figura abaixo.*

Ψ		jogador B	
		acimaB	abaixoB
jogador A	acimaA	(0,2)	(2,3)
	abaixoA	(1,1)	(1,1)

Agora suponha que para este jogo

- *os jogadores A e B são conscientes de todas as estratégias do jogo;*
- *o jogador A tem incerteza a respeito da consciência de B, ou seja, o jogador A acredita que B é inconsciente da estratégia "abaixo$''_B$ com probabilidade p;*
- *o tipo do jogador B que é consciente de "abaixo$_B$" é consciente que o jogador A é consciente de todas as estratégias do jogo e ele sabe da incerteza do jogador A a respeito do seu nível de consciência e sabe a probabilidade p.*

A partir dessas informações construímos o jogo normal com consciência Ψ^* baseado em Ψ, onde:

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^A, \Psi^B\}$;
- $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^m}} = P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^A}} = \{\Psi^m, \Psi^A, \Psi^B\}$ *e* $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^B}} = \{\Psi^B\}$
- $\mathcal{A}_A^m(C^A) = \mathcal{A}_B^m(C^m) = 1$;

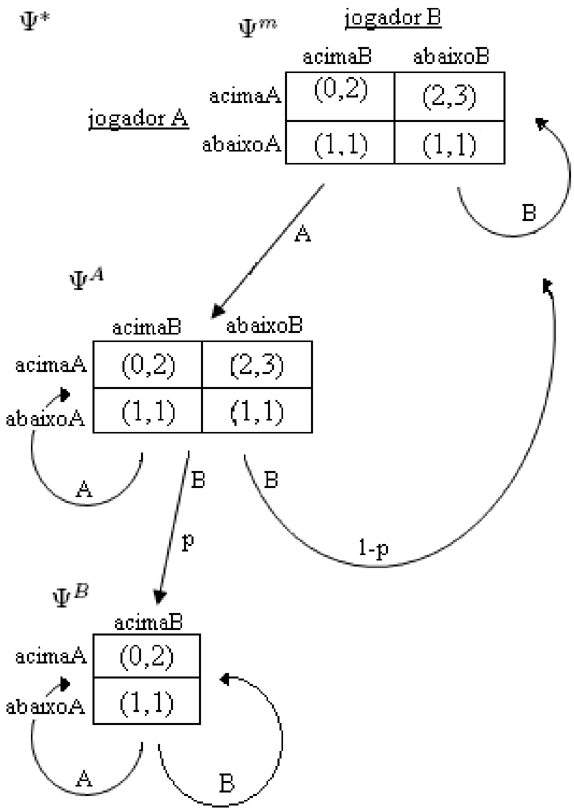
  $\mathcal{A}_A^A(C^A) = 1$, $\mathcal{A}_B^A(C^m) = (1-p)$ *e* $\mathcal{A}_B^A(C^B) = p$;

  $\mathcal{A}_A^B(C^B) = \mathcal{A}_B^B(C^B) = 1$.
- $\mathcal{F}(\Psi^m, B)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^m, A)(\Psi^A) = 1$;

  $\mathcal{F}(\Psi^A, B)(\Psi^B) = p$;

  $\mathcal{F}(\Psi^A, B)(\Psi^m) = 1 - p$;

  $\mathcal{F}(\Psi^B, A)(\Psi^B) = \mathcal{F}(\Psi^B, B)(\Psi^B) = 1$.



A representação Ψ^θ do jogo com consciência Ψ^* é a seguinte:

Ψ^θ

		(A,Ψ^B)		(B,Ψ^m)
		acimaA	abaixoA	acimaB
(A,Ψ^A)	acimaA	(0,0,2,2)	(0,1,2,1)	
	abaixoA	(1,0,1,2)	(1,1,1,1)	

		(A,Ψ^B)		(B,Ψ^m)	(B,Ψ^B)
		acimaA	abaixoA	abaixoB	
(A,Ψ^A)	acimaA	(2-2p,0,3,2)	(2-2p,1,3,1)		acimaB
	abaixoA	(1,0,1,2)	(1,1,1,1)		

onde:

- $N^\theta = \{(A, \Psi^A), (A, \Psi^B), (B, \Psi^m), (B, \Psi^B)\}$;

- $C^\theta_{(A,\Psi^A)} = \{acimaA,\ abaixoA\} = C^\theta_{(A,\Psi^B)}$,

  $C^\theta_{(B,\Psi^m)} = \{acimaB,\ abaixoB\}$ *e* $C^\theta_{(B,\Psi^B)} = \{acimaB\}$;

- *as utilidades dos jogadores, segundo cada perfil de estratégias, são mostradas na figura. Essas utilidades foram calculadas usando a fórmula*

$$u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = \sum_{\Psi' \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}}} \mathcal{F}(\Psi^+, j)(\Psi')u_i^+(\delta_{(i,\Psi^+)}, \delta_{(j,\Psi')}),$$

  da seguinte maneira:

  $u_{A,\Psi^A}(\delta_{(A,\Psi^A)}, \delta_{(A,\Psi^B)}, \delta_{(B,\Psi^m)}, \delta_{(B,\Psi^B)}) = u_{A,\Psi^A}([acimaA], [acimaA], [abaixoB], [acimaB]) =$

  $= (1-p) \times 2 + p \times 0 = 2 - 2p$, *onde* $(1-p) = \mathcal{F}(\Psi^A, B)(\Psi^m)$, $2 = u_A^A([acimaA], [abaixoB])$, $p = \mathcal{F}(\Psi^A, B)(\Psi^B)$ *e* $0 = u_A^A([acimaA], [acimaB])$.

Para o jogo com consciência Ψ^*, do exemplo mostrado acima, encontramos os seguintes equilíbrios de Nash generalizado:

- Se $p < \frac{1}{2}$ então o perfil onde δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^B} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [abaixoB] e δ_{B,Ψ^B} = [acimaB] é um equilíbrio de Nash generalizado do jogo;

- Se $p > \frac{1}{2}$ então o perfil onde δ_{A,Ψ^A} = [abaixoA], δ_{A,Ψ^B} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [abaixoB] e δ_{B,Ψ^B} = [acimaB] é um equilíbrio de Nash generalizado do jogo;

- Se $p = \frac{1}{2}$ então os dois perfis apresentados acima são equilíbrios de Nash generalizado do jogo;

- Independente do valor que p assume, o perfil onde δ_{A,Ψ^A} = [abaixoA], δ_{A,Ψ^B} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB] e δ_{B,Ψ^B} = [acimaB] é um equilíbrio de Nash generalizado do jogo.

3.2.2 Caso de n jogadores

Para o caso mais geral, onde temos $n \geq 2$ jogadores, a definição de um jogo com consciência é praticamente a mesma usada no caso onde temos apenas dois jogadores; precisamos mudar apenas a definição da função $\mathcal{F}$.

A necessidade de se redefinir a função $\mathcal{F}$ surge do fato de que para o caso mais geral, onde temos $n > 2$ jogadores, é importante analisarmos a correlação entre os jogos que os jogadores consideram possíveis, ou seja, dado um jogador i que acredita em Ψ' como sendo o verdadeiro jogo é necessário analisar as correlações entre os jogos que o jogador i acredita que os outros jogadores acreditam serem os verdadeiros quando estão jogando em Ψ'. Com isso, se nós utilizássemos a função $\mathcal{F}$ anterior, só teríamos informações sobre as distribuições marginais dos jogos que os jogadores consideram possíveis, sem que pudéssemos saber como estão correlacionados esses jogos. Nos casos em que tínhamos jogos com consciência em forma extensa e jogos com consciência em forma normal (com apenas 2 jogadores) não precisávamos desta correlação, pois para o caso dos jogos com consciência em forma extensa a função $\mathcal{F}$ era determinística e para o caso dos jogos com consciência em forma normal (com apenas 2 jogadores) não era necessário analisar as correlações entre os jogos, visto que como tínhamos apenas 2 jogadores somente existia um único jogador diferente de i.[2]

Agora, definimos $\mathfrak{F}$ como uma função que leva um jogo normal aumentado Ψ^+, pertencente a $\mathcal{G}$, em uma distribuição de probabilidade sobre $\times_{i \in N^+}(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}})$. Note que $\mathfrak{F}(\Psi')$ agora descreve a incerteza conjunta dos jogadores com respeito ao verdadeiro jogo sendo jogado quando o verdadeiro jogo é Ψ'. Para analisarmos a incerteza do ponto de vista de um único jogador j, podemos a partir de $\mathfrak{F}(\Psi')$ determinar a distribuição marginal com respeito a coordenada que corresponde ao jogador j, denotaremos tal distribuição por $\mathfrak{F}_j(\Psi')$.

Essa nova função $\mathfrak{F}$, do mesmo modo como a função $\mathcal{F}$ definida na Subseção 3.2.1, apresenta duas restrições:

R*0. $\sum_{\Psi^+ \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}, C^+ = D} \mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi+) = \mathcal{A}'_i(D)$, para todo $\Psi' \in \mathcal{G}$, $D \subseteq C'$ e $i \in N'$.

R*1. Se $\mathfrak{F}_i(\Psi^+)(\Psi') > 0$, então $\mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi') = 1$ para todo $i \in N^+$.

[2]Vale ressaltar que mesmo no caso de 2 jogadores se quiséssemos modelar o fato que os jogos que os dois jogadores consideram possíveis fossem correlacionados no jogo do modelador, teríamos que utilizar o modelo mais geral descrito nesta seção.

Estratégia Local e Equilíbrio de Nash generalizado

As definições de estratégia local e equilíbrio de Nash generalizado são similares as definições apresentadas na Seção 3.2.1, a única diferença é que agora utilizamos uma nova função $\mathfrak{F}$ e conseqüentemente uma nova definição para o grupo de jogos que o jogador i pode acreditar ser o verdadeiro em alguma situação, ou seja, $\mathcal{G}_i$ passa agora a ser igual ao conjunto $\{\Psi' \in \mathcal{G}$: para algum $\Psi^+ \in \mathcal{G},\ \mathfrak{F}_i(\Psi^+)(\Psi') > 0\}$. O cálculo de u_{i,Ψ^+} também é modificado para levar em conta a nova definição de $\mathfrak{F}$ e é dado por:

$$u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}) = \sum_{\xi \in \times_{i \in N^+}(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}})} \mathfrak{F}(\Psi^+)(\xi) u_i^+(\times_{j \in N^+} \delta_{j,\xi_j}).$$

Note que ξ é um vetor cujas componentes são jogos aumentados e que $\xi_j \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}}$ para todo $j \in N^+$ e além disso como $\Psi^+ \in \mathcal{G}_i$, temos que para todo ξ tal que $\mathfrak{F}(\Psi^+)(\xi) > 0$, R*0 e R*1 implicam que devemos ter $\xi_i = \Psi^+$.

Existência do equilíbrio de Nash generalizado

Agora mostraremos que todo jogo com consciência localmente finito possui pelo menos um equilíbrio de Nash generalizado. Para isso usaremos o mesmo raciocínio aplicado para a prova no caso onde temos apenas dois jogadores. Primeiro construímos o jogo normal Ψ^θ de tal forma que

- N^θ e $C^\theta_{(i,\Psi')}$ são definidos como em 3.2.1
- $u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = \sum_{\xi \in \times_{i \in N^+}(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}})} \mathfrak{F}(\Psi^+)(\xi) u_i^+(\times_{j \in N^+} \delta_{(j,\xi_j)})$.

Podemos observar que o jogo Ψ^θ, definido acima, possui as mesmas propriedades apresentadas no jogo Ψ^θ do caso onde tínhamos apenas dois jogadores. Assim, podemos utilizar as mesmas técnicas aplicadas para demonstrar o Teorema 3.2.1 e o Corolário 3.2.1 para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Todo jogo com consciência em forma normal localmente finito tem um equilíbrio de Nash generalizado.*

Notemos que este teorema não faz restrição quanto ao número de jogadores, desde que este número seja finito.

A seguir apresentamos um exemplo de um jogo com consciência em forma normal, com três jogadores, e a representação de Ψ^θ para esse jogo.

Exemplo 3.2.2. *Considere o jogo básico Γ apresentado na figura abaixo.*

jogador B, jogador C: acimaC

jogador A	acimaB	abaixoB
acimaA	(1,2,3)	(2,0,0)
abaixoA	(0,1,-1)	(0,1,-1)

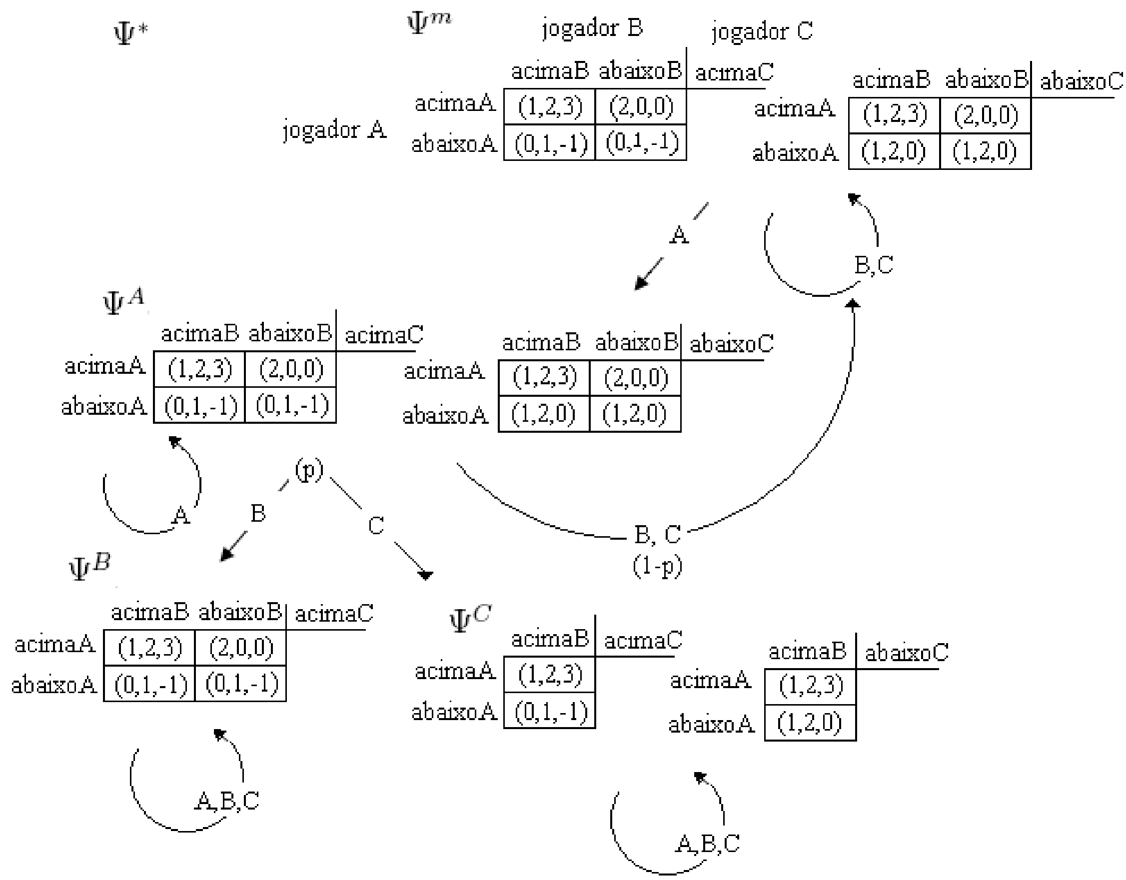
jogador C: abaixoC

jogador A	acimaB	abaixoB
acimaA	(1,2,3)	(2,0,0)
abaixoA	(1,2,0)	(1,2,0)

Agora suponha que para este jogo

- *os jogadores A, B e C são conscientes de todas as estratégias do jogo;*
- *o jogador A tem incerteza a respeito da consciência de B e C, ou seja, o jogador A acredita que B é inconsciente da estratégia "$abaixo_C$" e que o jogador C é inconsciente da estratégia "$abaixo_B$" com probabilidade p; além disso A acredita que B é inconsciente de "$abaixo_C$", se e somente se, C for inconsciente de "$abaixo_B$".*
- *o tipo do jogador B que é consciente de "$abaixo_C$" é consciente que o jogador A é consciente de todas as estratégias do jogo e ele sabe da incerteza do jogador A a respeito do seu nível de consciência e do nível de consciência de C; e sabe as probabilidades.*
- *o tipo do jogador C que é consciente de "$abaixo_B$" é consciente que o jogador A é consciente de todas as estratégias do jogo e ele sabe da incerteza do jogador A a respeito do seu nível de consciência e do nível de consciência de B; e sabe as probabilidades.*

A partir dessas informações construímos o seguinte jogo normal com consciência baseado em Ψ:



onde:

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^A, \Psi^B, \Psi^C\}$;

- $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^m}} = P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^A}} = \{\Psi^m, \Psi^A, \Psi^B, \Psi^C\}$, $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^B}} = \{\Psi^B\}$ *e* $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^C}} = \{\Psi^C\}$;

- $\mathcal{A}^m_A(C^A) = \mathcal{A}^m_B(C^m) = \mathcal{A}^m_C(C^m) = 1$;

  $\mathcal{A}^A_A(C^A) = 1, \mathcal{A}^A_B(C^B) = \mathcal{A}^A_C(C^C) = p$ *e* $\mathcal{A}^A_B(C^m) = \mathcal{A}^A_C(C^m) = (1-p)$;

  $\mathcal{A}^B_A(C^B) = \mathcal{A}^B_B(C^B) = \mathcal{A}^B_(C^B) = 1$;

  $\mathcal{A}^C_A(C^C) = \mathcal{A}^C_B(C^C) = \mathcal{A}^C_C(C^C) = 1$.

- $\mathfrak{F}_A(\Psi^m)(\Psi^A) = \mathfrak{F}_B(\Psi^m)(\Psi^m) = \mathfrak{F}_C(\Psi^m)(\Psi^m) = 1$;

  $\mathfrak{F}_A(\Psi^A)(\Psi^A) = 1$, $\mathfrak{F}_B(\Psi^A)(\Psi^B) = \mathfrak{F}_C(\Psi^A)(\Psi^C) = p$ *e*

$\mathfrak{F}_B(\Psi^A)(\Psi^m) = \mathfrak{F}_C(\Psi^A)(\Psi^m) = (1-p);$

$\mathfrak{F}_A(\Psi^B)(\Psi^B) = \mathfrak{F}_B(\Psi^B)(\Psi^B) = \mathfrak{F}_C(\Psi^B)(\Psi^B) = 1;$

$\mathfrak{F}_A(\Psi^C)(\Psi^C) = \mathfrak{F}_B(\Psi^C)(\Psi^C) = \mathfrak{F}_C(\Psi^C)(\Psi^C) = 1;$

A representação Ψ^θ do jogo com consciência Ψ^* é a seguinte:

- $N^\theta = \{(A, \Psi^A), (A, \Psi^B), (A, \Psi^C), (B, \Psi^m), (B, \Psi^B), (B, \Psi^C), (C, \Psi^m), (C, \Psi^C), (C, \Psi^B)\}$
- $C_{(A,\Psi^A)} = C_{(A,\Psi^B)} = C_{(A,\Psi^C)} = \{acimaA,\ abaixoA\}$

  $C_{(B,\Psi^m)} = C_{(B,\Psi^B)} = \{acimaB,\ abaixoB\}$

  $C_{(C,\Psi^m)} = C_{(C,\Psi^C)} = \{acimaC,\ abaixoC\}$

  $C_{(B,\Psi^C)} = \{acimaB\}$ *e* $C_{(C,\Psi^B)} = \{acimaC\}$
- *As utilidades podem ser calculadas de acordo com a definição de Ψ^θ, a seguir apresentamos alguns exemplos:*
  - $u_{(A,\Psi^A)}(\delta_{(A,\Psi^A)}, \delta_{(A,\Psi^B)}, \delta_{(A,\Psi^C)}, \delta_{(B,\Psi^m)}, \delta_{(B,\Psi^B)}, \delta_{(B,\Psi^C)}, \delta_{(C,\Psi^m)}, \delta_{(C,\Psi^C)}, \delta_{(C,\Psi^B)}) =$ $= u_{(A,\Psi^A)}([acimaA], [acimaA], [acimaA], [acimaB], [acimaB], [acimaB], [acimaC],$ $[acimaC], [acimaC]) = p \times 1 + (1-p) \times 1,$ *onde* $p = \mathfrak{F}(\Psi^A)(\Psi^A, \Psi^B, \Psi^C),$ $1 = u_A^A([acimaA], [acimaB], [acimaC])$ *e* $(1-p) = \mathfrak{F}(\Psi^A)(\Psi^A, \Psi^m, \Psi^m).$
  - $u_{(B,\Psi^B)}(\delta_{(A,\Psi^A)}, \delta_{(A,\Psi^B)}, \delta_{(A,\Psi^C)}, \delta_{(B,\Psi^m)}, \delta_{(B,\Psi^B)}, \delta_{(B,\Psi^C)}, \delta_{(C,\Psi^m)}, \delta_{(C,\Psi^C)}, \delta_{(C,\Psi^B)}) =$ $= u_{(B,\Psi^B)}([acimaA], [acimaA], [acimaA], [acimaB], [acimaB], [acimaB], [acimaC],$ $[acimaC], [acimaC]) = 1 \times 2,$ *onde* $1 = \mathfrak{F}(\Psi^B)(\Psi^B, \Psi^B, \Psi^B)$ *e* $2 = u_B^B([acimaA],$ $[acimaB], [acimaC]).$

Omitimos a representação gráfica do jogo Ψ^θ, pois seria inviável e desinteressante fazê-la aqui.

Em todos os equilíbrios de Nash generalizado deste jogo temos que δ_{A,Ψ^B} = [acimaA], δ_{B,Ψ^B} = [acimaB], δ_{C,Ψ^B} = [acimaC], e δ_{B,Ψ^C} = [acimaB]. Além disso, encontramos os seguintes equilíbrios de Nash generalizados em estratégias puras:

- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [acimaA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [abaixoC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [abaixoA], δ_{A,Ψ^C} = [acimaA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [abaixoC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [abaixoC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [abaixoA], δ_{A,Ψ^C} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [abaixoC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [acimaA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [acimaC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [abaixoA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [acimaC], e δ_{C,Ψ^C} = [abaixoC];
- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [acimaA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [acimaC], e δ_{C,Ψ^C} = [acimaC];
- δ_{A,Ψ^A} = [acimaA], δ_{A,Ψ^C} = [acimaA], δ_{B,Ψ^m} = [acimaB], δ_{C,Ψ^m} = [abaixoC], e δ_{C,Ψ^C} = [acimaC];

Esses equilíbrios independem do valor que p assume no intervalo $(0, 1)$.

3.3 Consciência sobre Inconsciência

Nesta seção, focaremos nossos estudos em jogos onde um jogador pode ser consciente que existem no jogo estratégias, de outros jogadores, que ele não sabe quais são. Este tipo de situação, o qual chamamos de consciência sobre inconsciência, é bastante relevante na prática. Como exemplo da necessidade de se modelar tal situação, citamos o caso onde em um cenário de guerra um dos lados não sabe qual a arma disponível para o inimigo, mas sabe que ele possui alguma. Esta situação pode até estimular propostas de paz.

Mostraremos, aqui, uma maneira de extender nossa representação de jogos com consciência em forma normal para lidar com situações onde há consciência sobre inconsciência. Seguindo a mesma idéia utilizada por Halpern e Rêgo (Halpern & Rêgo 2006), modelamos esta situação permitindo que o jogador j possa realizar ações "virtuais" no jogo em que i acredita ser o verdadeiro, intuitivamente, esta ação virtual permite que i descreva o que ele acredita que irá ocorrer se esta ação que ele não conhece for tomada pelo jogador j. Se uma estratégia mista contém uma ação virtual em seu suporte ela é chamada de *estratégia virtual*. Estas estratégias virtuais não correspondem obrigatoriamente a estratégias do jogo básico, pois o jogador i pode erroneamente acreditar que o jogador j possua uma estratégia que ele i não é consciente. Devemos admitir que o jogador j possa ter várias estratégias virtuais no jogo do ponto de vista de i, mas não devemos incluir estratégias virtuais para i. Uma explicação para esta última afirmação é que o fato do jogador i ter uma estratégia virtual no jogo do seu ponto da vista significa que ele é consciente que tem uma estratégia mas não sabe qual é essa estratégia, isso implica que ele nunca jogará tal estratégia. Por isso não faz sentido ter essa estratégia no jogo que ele (i) acredita.

Formalmente, definimos um jogo com consciência sobre inconsciência baseado no jogo básico Ψ como $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$. Existem, agora, algumas diferenças entre a tripla $(\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$ da definição de jogos com consciência e a tripla $(\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$ da definição de jogos com consciência sobre inconsciência. O conjunto dos jogos que podem aparecer em $\mathcal{G}$, por exemplo, é diferente para o caso onde temos consciência sobre inconsciência, anteriormente só poderíamos ter jogos que continham perfis de estratégias em Ψ, agora isto não é mais verdade já que podemos permitir as estratégias virtuais. Para definir quais os jogos que fazem parte deste novo conjunto $\mathcal{G}$ precisaremos primeiro redefinir o que é um jogo normal aumentado Ψ' baseado em Ψ; neste caso a definição é como anteriormente só que as restrições são A1 e as seguintes variações das demais restrições:

A'2. $N' = \{i : C'_i \neq \emptyset\}$;

A'4. $u'_i(c) = u_i(c), \forall i \in N' \cap N$ e $c \in C' \cap C$;

A'5. Para todo $i \in N'$, $\mathcal{A}'_i \in \Delta(2^{C' \cap C})$ de forma que se $\mathcal{A}'_i(D) > 0$, então $D = \times_{j \in N'} D_j$, onde

$D_j \subseteq C'_j, \forall j \in N'$.

Intuitivamente, agora permitimos que existam tanto ações virtuais como jogadores virtuais. O nível de consciência dos jogadores continua sendo uma distribuição de probabilidade sobre possíveis perfis de estratégias que não incluam estratégias virtuais.

Feito isto, podemos definir agora o conjunto $\mathcal{G}$ como sendo um conjunto formado por jogos normais aumentados baseados em Ψ. Neste caso $\mathfrak{F}$ é definida como sendo uma função que leva um jogo normal aumentado Ψ^+, pertencente a $\mathcal{G}$, em um distribuição de probabilidade sobre $\times_{i \in N^+}(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}})$, onde $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}^+}}$ é o conjunto formado pelos jogos normais aumentados baseados em $\overline{\Psi}^+$, que pertencem a $\mathcal{G}$, seguindo a nova definição de jogos normais aumentados apresentada anteriormente.

Para um jogo com consciência sobre inconsciência, a função $\mathfrak{F}$ além da restrição R*1 satisfaz:

R'0. $\sum_{\Psi^+ \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}, C^+ \cap C = D} \mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi^+) = \mathcal{A}_i(D)$, para todo $\Psi' \in \mathcal{G}$, $D \subseteq C'$ e $i \in N'$.

R'2. Se $\mathfrak{F}_i(\Psi^+)(\Psi') > 0$, então $C'_i \subseteq C^+_i$.

Neste cenário, precisamos definir como seriam as utilidades para os jogadores quando o perfil de estratégias possui uma estratégia virtual.

Dizemos que uma utilidade para um jogador é uma utilidade virtual quando o perfil de estratégias relacionado a ela possui uma estratégia virtual. O valor da utilidade virtual é dado pelo jogador que acredita que esse perfil pode ser realmente jogado, ou seja, se estamos em um jogo onde o jogador i acredita ser o verdadeiro jogo então as utilidades virtuais deste jogo são fornecidas pelo jogador i. É importante lembrar que essas utilidades não são necessariamente iguais as utilidades do jogo básico. Intuitivamente, essa utilidade virtual representa a percepção subjetiva do jogador i do que ocorrerá se uma estratégia que ele não é consciente for jogada.

No que diz respeito ao jogo do modelador (Ψ^m), nada é mudado; o modelador continua consciente de todas as estratégias do jogo básico, ou seja, não existem estratégias virtuais no jogo Ψ^m.

Dizemos que um jogo com consciência sobre inconsciência em forma normal Ψ^* baseado em Ψ é *localmente finito* se todo $\Psi^+ \in \mathcal{G}$ for finito e $\mathfrak{F}(\Psi^+)$ tiver suporte finito para todo $\Psi^+ \in \mathcal{G}$.

Agora, da mesma maneira como fizemos para jogos com consciência, podemos definir estratégias locais, perfil de estratégias generalizadas e equilíbrio de Nash generalizado para jogos com consciência sobre inconsciência. Podemos também, a partir das técnicas utilizadas para mostrar o Corolário 3.2.1, mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. *Todo jogo com consciência sobre inconsciência localmente finito tem um equilíbrio de Nash generalizado.*

CAPÍTULO 4

Falta de Conhecimento Comum sobre Preferências em Jogos na Forma Normal

4.1 Introdução

Nos modelos de jogos discutidos até agora, os jogadores sempre são capazes de comparar dois perfis de estratégias quaisquer, utilizando por exemplo o valor esperado de sua função utilidade. Como veremos a seguir, quando ao utilizarmos, uma única função utilidade para descrever como o jogador avalia um perfil de estratégia, estamos assumindo que suas preferências entre esses perfis são completas, ou seja, ele é capaz de ordenar todos os perfis de estratégias de acordo com suas preferências. Contudo, em várias situações práticas, é comum que o jogador possa não saber comparar alguns pares de perfis de estratégias, quando isto ocorre diz-se que a preferência do jogador é incompleta.

A teoria das preferências incompletas tem sido muito discutida na recente literatura. Entre os artigos publicados recentemente que discutem a teoria das preferências incompletas estão Ok (2002), Sagi (2003), Dubra et al. (2004), Bade (2005), dentre outros. Destes artigos citados destacamos o artigo publicado por Bade (Bade 2005), onde ela investiga equilíbrio de Nash sobre a possibilidade de que as preferências, em um jogo, podem ser incompletas. Um dos resultados apresentados por Bade, neste artigo, é que o conjunto de equilíbrios de Nash de jogos com preferências incompletas pode ser caracterizado como a união de conjuntos de equilíbrios de Nash de jogos com preferências completas, derivados deste jogo com preferências incompletas.

Nossa contribuição, neste capítulo, é generalizar este resultado apresentado por Bade, visto que ele não pode ser utilizado para situações onde os jogadores são igualmente ignorantes sobre as preferências de outros jogadores; no resultado obtido por Bade apenas o modelador pode ser ignorante a respeito das preferências dos jogadores e modela-as de acordo com uma relação de preferência incompleta.

A importância desta teoria torna-se mais evidente quando levamos em consideração os casos econômicos onde o tomador de decisão é na verdade um grupo de agentes, cada um com uma função objetivo possivelmente diferente. Neste caso exigir que a preferência do tomador de decisão seja completa seria exigir demais, pois neste caso o grupo deve concordar com uma mesma decisão, o que é de fato muito complicado, visto que seus ideais são diferentes; para que as preferências sejam completas, neste caso, sempre alguém terá que ceder.

Neste capítulo mostraremos como modelar jogos onde os jogadores podem possuir preferências incompletas. Porém, antes de apresentarmos nosso modelo, precisamos introduzir algumas definições que serão muito úteis para uma boa compreensão do modelo. Nas seções 4.2, 4.3, que se seguem, serão apresentadas algumas definições, tais como relação binária, relação de preferência completa e preferência incompleta; já na última seção apresentaremos alguns modelos para representar situações onde as preferências de um agente podem ser incompletas.

4.2 Relação de Preferência Completa

Antes de definirmos o que é uma relação de preferência completa é preciso primeiro apresentar a definição de relação binária.

Definição 4.2.1. *Dizemos que B é uma relação binária no conjunto X se B é um subconjunto de $X \times X$ onde os pares $(x, y) \in B$ satisfazem a relação B. Um outro modo de se representar $(x, y) \in B$ é usando a notação xBy, já para representarmos $(x, y) \notin B$ usamos $\neg xBy$.*

Dependendo da relação entre objetos do conjunto X que se queira modelar através de uma relação binária B, é natural requerer que B satisfaça algumas propriedades. Dentre as várias propriedades, existentes na literatura, destacamos algumas que julgamos úteis para a compreensão das definições posteriores. Segundo estas propriedades uma relação binária pode ser:

- reflexiva se xBx, $\forall x \in X$;
- assimétrica se xBy implica $\neg yBx$;
- antissimétrica se xBy e yBx implica $x = y$;
- transitiva se xBy e yBz implica xBz;
- completa se $\forall x, y \in X, xBy$ ou yBx.

Enfim, podemos definir agora o que é uma relação de preferência completa. Intuitivamente, queremos utilizar uma relação de preferência para representar como um decisor compara dois objetos quaisquer de um dado conjunto X. Mais formalmente, uma relação de preferência completa $\succeq$ é uma relação binária onde dizemos que $x \succeq y$, se o objeto x é preferível ao objeto y para um determinado decisor.

Formalmente, define-se uma relação de preferência completa da seguinte forma:

Definição 4.2.2. *Uma relação de preferência completa $\succeq$ em um conjunto X é uma relação binária completa, transitiva e reflexiva.*

Intuitivamente, temos que estas três propriedades são bastante razoáveis para se definir tal relação pois, *i*) como o próprio nome já diz a relação tem que ser completa, *ii*) a propriedade da transitividade veta comportamentos irracionais do tipo pêssego$\succeq$laranja, laranja$\succeq$maçã e maça$\succeq$pêssego e *iii*) o fato de ser reflexiva garante que somos sempre indiferentes quando comparamos duas coisas idênticas, que de fato é um comportamento sensato.

A seguir apresentamos um exemplo de relação de preferência completa.

Exemplo 4.2.1. *Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. Temos então que $\geq$ em X é uma relação binária*

- *completa:* $2 \geq 1$, $3 \geq 1$ *e* $3 \geq 2$*;*
- *transitiva:* $3 \geq 2$ *e* $2 \geq 1$ *implica* $3 \geq 1$*;*

- *reflexiva:* $1 \geq 1$, $2 \geq 2$ *e* $3 \geq 3$*;*

logo podemos dizer que $\geq$ *é uma relação de preferência completa no conjunto* $X = \{1, 2, 3\}$.

Dada uma relação de preferência completa $\succeq$, podemos definir duas outras relações binárias:

- $x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y$ e $y \not\succeq x$, $\succ$ é freqüentemente chamada de relação de preferência estrita.
- $x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y$ e $y \succeq x$, $\sim$ é freqüentemente chamada de relação de indiferença.

Note que assumimos que o agente ou decisor é apenas capaz de expressar relações de preferência entre objetos. As noções de preferência estrita e indiferença são na verdade derivadas da relação de preferência devida a ausência de preferência entre um dado par ordenado de objetos, e o próprio decisor pode considerar equivocada esta interpretação utilizada para as relações de preferência estrita e de indiferença.

4.2.1 Representação Ordinal

Desde que o conjunto X seja um conjunto contável, pode-se mostrar que qualquer relação de preferência completa $\succeq$ pode ser representada por uma função utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ no seguinte sentido:

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y),\ \forall x, y \in X,$$

(vide Kreps (1988)).

Apresentamos, a seguir, um teorema o qual afirma que a função utilidade u, mostrada acima, é única, exceto por uma transformação estritamente crescente (vide Kreps (1988)).

Teorema 4.2.1. *Dado um conjunto* X*, uma relação de preferência* $\succeq$ *e funções* u *e* u' *que representam* $\succeq$*, então existe uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que: i)* f *é estritamente crescente no conjunto* $\{r : \exists x \in X, r = u(x)\}$ *e ii)* $u'(x) = f(u(x)), \forall x \in X$*. Além disso, para qualquer função estritamente crescente* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $u''(x) = g(u(x)), \forall x \in X$ *também representa* $\succeq$*.*

Por esta afirmação, feita no teorema, é que nós chamamos tais funções de utilidade de ordinais.

4.2.2 Representação Cardinal

Considere um conjunto finito Z de prêmios e um conjunto P de loterias, onde as loterias são distribuições de probabilidade em Z da forma $p : Z \to [0, 1]$ tal que $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$.

von Neumann e Morgestern (Neumann & Morgenstern 1944) investigaram sobre que condições uma relação de preferência em um conjunto de loterias P pode ser representada pelo valor esperado de uma função real (função utilidade) $u : Z \to \mathbb{R}$ de forma que

$$p \succeq q \Leftrightarrow U(p) \equiv \sum_{z \in Z} p(z)u(z) \geq \sum_{z \in Z} q(z)u(z) = U(q),$$

para todo $p, q \in P$.

Pode-se mostrar que para que $\succeq$ possa ser representada desta maneira é necessário e suficiente que ela satisfaça os axiomas apresentados seguir.

Sejam $p, q, r \in P$.

Axioma 1. *Completeza*: $p \succeq q$ ou $q \succeq p$, isto é, $p \succ q$, ou $q \succ p$, ou $q \sim p$.

Axioma 2. *Transitividade*: *i*) Se $p \succ q$ e $q \succeq r$ então $p \succ r$; *ii*) se $p \sim q$ e $q \sim r$ então $p \sim r$;

Axioma 3. *Dominância*: *i*) Se $p \succ q$ e $0 < \lambda \leq 1$, então para todo $r \in P$ tem-se $\lambda p + (1 - \lambda)r \succ \lambda q + (1 - \lambda)r$; *ii*) se $p \sim q$ e $0 < \lambda \leq 1$, então para todo $r \in P$ tem-se $\lambda p + (1 - \lambda)r \sim \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Axioma 4. *Arquimediano*: Se $p \succ q \succ r$, então existem números λ e μ com $0 < \mu < \lambda < 1$ tais que $\lambda p + (1 - \lambda)r \succ q \succ \mu p + (1 - \mu)r$.

Para uma descrição mais detalhada e comentários sobre os axiomas citados acima ver Campello de Souza (2007).

Um grande número de autores[1], na literatura, dizem não estar evidente se o axioma da completeza é um princípio de racionalidade fundamental do mesmo modo que é o axioma da transitividade. Os autores sugerem que uma relação de preferência deve, de fato, ser considerada como incompleta, pois assim permitirá uma eventual indecisão do agente. Por exemplo, Campello

[1] Efe Ok, Fabio Maccheroni, Fernando Campello, Juan Dubra, Robert Aumann, Sophie Bade, dentre outros.

(Campello de Souza 2007) diz que: "*Não é difícil imaginar-se situações nas quais não faz sentido existir uma ordem total. É exigir demais. O mais adequado seria admitir a existência de uma ordem parcial*". Nas seções que se seguem, apresentamos o conceito de preferências incompletas e mostramos como lidar com situações onde existem tais preferências.

4.3 Preferências Incompletas

Intuitivamente, temos que quando um jogador é incapaz de comparar todos os elementos de um conjunto X, par a par, usando as afirmações "Eu prefiro x a y" ou "Eu estou indiferente entre x e y" dizemos que a relação utilizada para a comparação é uma relação de preferência incompleta. Formalmente, dizemos que $\succeq$ é uma relação de preferência incompleta se ela for uma relação binária reflexiva e transitiva.

Exemplo 4.3.1. *Seja o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$. Considere a relação binária C em X como sendo o conjunto $C = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, d), (a, d), (a, c)\}$, temos assim que a relação C é*

- *simétrica: aCa, bCb, cCc e dCd;*
- *transitiva: aCb e bCd implica aCd;*

porém não é completa pois os elementos b e d não se relacionam com o elemento c. Logo podemos afirmar que C é uma relação de preferência incompleta.

Visto que para preferências incompletas o axioma da completeza não é satisfeito, então não poderemos utilizar, para este caso, o resultado desenvolvido por von Neumann e Morgestern (Neumann & Morgenstern 1944), ou seja, em geral, pode não ser possível representar uma relação de preferência incompleta $\succeq$ pelo valor esperado de uma única função utilidade de von Neumann-Morgenstern. Para a representação desta relação de preferência sugerimos os resultados apresentados em Dubra et al. (2004), onde eles modificam o teorema da utilidade esperada, enunciado por von Neumann e Morgestern (Neumann & Morgenstern 1944), para permitir preferências incompletas dentro da sua cobertura. A nova versão do teorema da utilidade esperada, enunciada por eles, diz que quando o espaço de prêmios é um espaço métrico compacto, uma relação de preferência incompleta admite uma representação "multiutilidade" desde que esta relação satisfaça os axiomas padrão da continuidade e independência.

Dizemos que uma relação binária $\succeq^c$ em C é um *completamento* de uma relação de preferência incompleta $\succeq$ em C se

1. $\succeq^c$ é uma relação de preferência completa;

2. se $a \succeq b$ implica $a \succeq^c b$;

3. se $a \succ b$ implica $a \succ^c b$.

Exemplo 4.3.2. *Seja X o mesmo conjunto apresentado no exemplo 4.3.1. Considere agora a relação binária D em X como sendo o conjunto $D = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,d),(d,c),$ $(b,c),(a,d),(a,c)\}$, temos assim que a relação D é*

- *simétrica: aCa, bCb, cCc e dCd;*
- *transitiva:*
  - *aCb e bCd implica aCd,*
  - *bCd e dCc implica bCc,*
  - *aCd e dCc implica aCc;*
- *completa: aDb, bDd, dDc, bDc, aDd e aDc.*

Logo podemos afirmar que D é uma relação de preferência completa. Além disso, podemos concluir, através da definição de completamento apresentada acima, que a relação D é um completamento da relação C apresentada no exemplo 4.3.1, pois D é uma relação de preferência completa e as seguintes implicações são verdadeiras:

- *aCb implica aDb;*
- *bCd implica bDd;*

- *aCd implica aDa;*
- *aCc implica aDc.*

4.4 Jogos em Forma Normal × Relação de Preferência

Na Seção 2.3, foi apresentada uma definição de jogo na forma normal que faz uso de funções utilidade para representar as preferências dos jogadores sobre os diversos perfis de estratégias que podem ser jogados em um dado jogo. Conforme vimos na Seção 4.2.1, ao trabalharmos com uma função utilidade estamos implicitamente assumindo que as relações de preferências dos jogadores são reflexivas, transitivas e completas. Como nosso objetivo neste capítulo é modelar jogos em forma normal onde os jogadores podem possuir preferências incompletas, tal modelo não é adequado. Portanto, de agora em diante, ao descrever um jogo em forma normal iremos descrever explicitamente as relações de preferências dos jogadores. A seguir apresentamos a descrição formal de um jogo em forma normal usando relações de preferência completas, que pode ser encontrada em Osborne & Rubinstein (1994).

Um jogo na forma normal é um vetor $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$, onde

- N é um conjunto (finito) de jogadores;
- C_i é um conjunto de estratégias disponíveis para o jogador i;
- $\succeq_i$ é a relação de preferência completa do jogador i em $C = \times_{j\in N} C_j$.

Um conceito de solução para este jogo é o equilíbrio de Nash. A idéia por trás do equilíbrio de Nash é a mesma mostrada na Seção 2.3, a única diferença é que agora estamos trabalhando com relação de preferência completa ao invés de função utilidade.

Definição 4.4.1. *Um perfil de estratégias $c^* \in C$ é um equilíbrio de Nash de um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ se para todo $i \in N$ temos*

$$c^* \succeq_i (c^*_{-i}, c_i),\ \forall c_i \in C_i.$$

Assim temos que para c^* ser um equilíbrio de Nash é preciso que nenhum jogador i tenha uma estratégia que produza um resultado que ele prefere do que um resultado produzido quando ele escolhe a estratégia c_i^*, dado que todos os outros jogadores escolhem suas estratégias em c^*.

Pode-se agora definir um jogo em forma normal com preferências incompletas apenas permitindo que as relações binárias $\{\succeq_i : i \in N\}$ que representam as preferências dos jogadores com respeito aos perfis de estratégia C sejam relações de preferências incompletas. Quando temos um jogo onde as preferências são incompletas a definição de equilíbrio de Nash muda um pouco. Para esses casos, define-se equilíbrio de Nash da seguinte forma:

Definição 4.4.2. *Um perfil de estratégias $c^* \in C$ é um equilíbrio de Nash de um jogo com preferências incompletas em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ se para nenhum jogador $i \in N$ existir uma ação $c_i \in C_i$ tal que*

$$(c^*_{-i}, c_i) \succ_i c^*.$$

Denotamos o conjunto de equilíbrios de Nash do jogo Ψ por $N(\Psi)$.

Definição 4.4.3. *Dizemos que um jogo $\Psi^c = (N, C_i, \succeq_i^c)$ é um completamento de um jogo com preferências incompletas $\Psi = (N, C_i, \succeq_i)$ se $\succeq_i^c$ é um completamento de $\succeq_i$ para todo $i \in N$.*

Bade (Bade 2005) demonstrou o seguinte teorema que propõe um método para encontrar os equilíbrios de Nash em jogos com preferências incompletas.

Teorema 4.4.1. *Para qualquer jogo com preferências incompletas $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ temos que o conjunto de equilíbrios de Nash deste jogo é igual a união dos conjuntos de equilíbrios de Nash de cada possível completamento de Ψ, ou seja, $N(\Psi) = \bigcup\{N(\Psi^c) : \Psi^c$ é um completamento de $\Psi\}$.*

Este teorema reduz o problema de encontrar equilíbrios de Nash em um jogo com preferências incompletas para um problema mais comum que é o de encontrar equilíbrios de Nash em um conjunto de jogos com preferências completas.

4.5 Representação de Jogos em Forma Normal com Falta de Conhecimento Comum sobre Preferências

Antes de definirmos um jogo em forma normal com falta de conhecimento comum sobre preferências é preciso reformular a definição de jogo normal aumentado, para que, desta maneira, ela possa ser utilizada dentro do contexto de relações de preferência. Chamaremos esse jogo normal aumentado reformulado de *jogo estendido*.

Definição 4.5.1. *Um jogo estendido baseado em um jogo normal* $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ *é um vetor* $\Psi' = (N', (C'_i)_{i\in N'}, (\succeq'_i)_{i\in N'}, (\succeq'_{ij})_{(i,j)\in N^2})$ *tal que*

A1 $\overline{\Psi}' = (N', (C'_i)_{i\in N'}, (\succeq'_i)_{i\in N'})$ *é um jogo em forma normal;*

A2 $N' = N$*;*

A3 $C'_i = C_i$*;*

A4 $\succeq'_{jj} = \succeq'_j$

Intuitivamente, a diferença entre um jogo em forma normal e um jogo estendido é que em um jogo estendido temos a presença de uma componente extra na definição do jogo, que representa a crença de cada um dos jogadores a respeito das preferências dos demais jogadores. Deste modo, $\succeq'_{ij}$ é uma relação de preferência que o jogador i acredita que o jogador j possui quando o verdadeiro jogo é Ψ'.

A seguir, apresentamos a definição de completamento de um jogo estendido.

Definição 4.5.2. *Dizemos que* Ψ'^c *é um completamento de um jogo estendido* Ψ' *se* $\overline{\Psi}'^c$ *é um completamento de* $\overline{\Psi}'$ *e* $\succeq'^c_{ij}$ *for um completamento de* $\succeq'_{ij}$ *para todo* $(i, j) \in N^2$.

Representamos um jogo em forma normal com falta de conhecimento comum sobre preferências, baseado em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$, através da tripla $\Psi^\Delta = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ onde

- $\mathcal{G}$ é um conjunto formado por jogos estendidos baseados em Ψ. Pela definição de jogo estendido temos que todos os jogos em $\mathcal{G}$ possuem os mesmos jogadores, o mesmo conjunto de estratégias para os jogadores, mas as relações de preferências incompletas e as crenças dos jogadores a respeito das preferências dos demais em cada jogo podem ser diferentes.

- Ψ^m é o jogo do modelador. Como o modelador é omnisciente, exigimos que $\overline{\Psi}^m = \Psi$. Pode-se pensar em Ψ^m como sendo o jogo objetivo que descreve as verdadeiras preferências dos jogadores. Os demais jogos em $\mathcal{G}$ descrevem jogos do ponto de vista de algum jogador do jogo, são jogos subjetivos.

- $\mathcal{F}$ é uma função que leva um jogo normal estendido $\Psi' \in \mathcal{G}$ e um jogador $i \in N$ em um jogo normal estendido $\Psi'' \in \mathcal{G}$, isto é, $\mathcal{F} : (\mathcal{G}, N) \to \mathcal{G}$.

A intuição que se tem a respeito da função $\mathcal{F}$ é que se estamos em alguma situação onde um jogador j acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' e que o jogador i se movimenta neste jogo, então $\mathcal{F}(\Psi', i) = \Psi''$ significa que o jogador j acredita que o jogador i acredita que Ψ'' é o verdadeiro jogo quando ele se move em Ψ'.[2]

A função $\mathcal{F}$ possui algumas restrições que capturam propriedades desejáveis para que possamos modelar a falta de conhecimento comum sobre as preferências dos jogadores. As restrições da função $\mathcal{F}$ são apresentadas a seguir:

R1 Se $\mathcal{F}(\Psi', i) = \Psi''$ então $\succeq''_j = \succeq'_{ij}$, $\forall j \in N''$, ou seja, se o jogador, que acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', acredita que o jogador i acredita que Ψ'' é o verdadeiro jogo quando ele está jogando em Ψ' então as preferências para os jogadores em Ψ'' devem ser iguais as preferências que representam a crença do jogador i, no jogo Ψ', em relação as preferências dos outros jogadores. Particularmente, temos que se $\mathcal{F}(\Psi', i) = \Psi''$, então $\succeq'_i = \succeq''_i$.

R2 Se $\mathcal{F}(\Psi', i) = \Psi''$ então $\mathcal{F}(\Psi'', i) = \Psi''$, ou seja, esta condição garante que se o jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ'', então ele acredita que ele acredita que o verdadeiro jogo é Ψ'' e que além disto este fato é de conhecimento comum entre os jogadores.

[2]Note que com esta definição não podemos modelar a situação que o jogador j tenha incerteza sobre o jogo que o jogador i acredita ser o verdadeiro, pois estamos assumindo que a função $\mathcal{F}$ é determinística. Na Seção 4.6, eliminaremos esta hipótese.

O completamento de um jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências é definido da seguinte forma:

Definição 4.5.3. *Dizemos que* $\Psi^{\Delta c} = (\mathcal{G}^c, \Psi^{mc}, \mathcal{F}^c)$ *é um completamento de um jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências* $\Psi^{\Delta} = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ *se*

(a) $\Psi^{\Delta c}$ *for um jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências;*

(b) $\mathcal{G}^c = \{\Psi'^c : \Psi'^c$ *é um completamento de* $\Psi' \in \mathcal{G}\}$*;*

(c) $\Psi^{mc} = (\Psi^m)^c$*; e*

(d) $\mathcal{F}^c : (\mathcal{G}^c, N) \to \mathcal{G}^c$ *tal que* $\mathcal{F}^c(\Psi'^c, i) = (\mathcal{F}(\Psi', i))^c$.

Estratégia Local Pura

A definição de estratégia local pura é baseada na definição de estratégia local apresentada na Subseção 3.2.1, a única diferença é que aqui, como os jogadores possuem preferências sobre perfis de estratégias puras, nós não permitiremos que os jogadores randomizem ao escolherem suas ações, ou seja, excluiremos, por enquanto, o uso de estratégias mistas.

Seja $\mathcal{G}_i = \{\Psi' \in \mathcal{G} : \text{para algum } \Psi^+ \in \mathcal{G}, \mathcal{F}(\Psi^+, i) = \Psi'\}$ o conjunto de jogos que algum jogador (ou o modelador) acredita que i considera ser o verdadeiro em alguma situação do jogo. Formalmente, definimos estratégia local pura como:

Definição 4.5.4. *Uma estratégia local pura* $c_{i,\Psi'}$ *para um jogador* i *em um jogo* $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ *nada mais é do que uma estratégia pura para* i *em* Ψ'*. Assumiremos que o jogador* i*, utilizará a estratégia local* $c_{i,\Psi'}$ *em todo jogo* $\Psi^+ \in \mathcal{G}$ *tal que* $\mathcal{F}(\Psi^+, i) = \Psi'$.

Dada a definição de estratégia local pura, definimos um *perfil de estratégia generalizado*, c^{Δ}, como sendo um vetor cujas coordenadas são estratégias locais puras, ou seja, $c^{\Delta} = \{c_{i,\Psi'} : i \in N, \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$. Definimos também o vetor $c^{\Delta'}$ como sendo um vetor cujo as coordenadas são as estratégias locais puras, pertencentes ao perfil c^{Δ}, que os jogadores escolhem no jogo Ψ', ou seja, $c^{\Delta'} = (c^{\Delta}_{i,\mathcal{F}(\Psi',i)})_{i \in N}$. A notação $(c^{\Delta'})_{-i}$ representa o vetor $c^{\Delta'}$ sem a estratégia local pura que o jogador i escolhe em Ψ'.

Equilíbrio de Nash Generalizado

Dado um perfil de estratégia generalizado c^Δ definimos um equilíbrio de Nash generalizado como a seguir.

Definição 4.5.5. *Um perfil de estratégia generalizado c^Δ é um equilíbrio de Nash generalizado de um jogo Ψ^Δ se para todo $i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}_i$, não existir nenhuma estratégia local $d_i \in C'_i$ tal que*

$$((c^{\Delta'})_{-i}, d_i) \succ'_i (c^{\Delta'}).$$

Encontrando Equilíbrio de Nash Generalizado

Mostraremos, agora, como generalizar o Teorema 4.4.1 apresentado na Seção 4.4. Aqui o termo generalização é aplicado no seguinte sentido: o teorema apresentado por Bade (Bade 2005) é utilizado para situações em que apenas o modelador não conheça em detalhes as preferências dos jogadores, conforme afirma Bade (Bade 2005), página 313, *"Este método pressupõe que apenas o modelador não sabe as preferências dos jogadores. Se assumirmos que os jogadores são igualmente ignorantes sobre as preferências dos outros jogadores o resultado de robustez do Teorema 4.4.1 é violado..."*. Nosso modelo vem, portanto, generalizar o método proposto por Bade, de forma que os jogadores também possam ser ignorantes a respeito das preferências dos demais. Ainda assim, somos capazes de provar um resultado análogo ao Teorema 4.4.1.

Para fazermos esta generalização precisamos primeiro construir um jogo com preferências incompletas em forma normal $(\Psi^\Delta)^\nu = (N^\nu, (C^\nu_{(i,\Psi')})_{(i,\Psi')\in N^\nu}, (\succeq^\nu_{(i,\Psi')})_{(i,\Psi')\in N^\nu})$, baseado no jogo $\Psi^\Delta = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$, cujas propriedades são :

- $N^\nu = \{(i, \Psi') : i \in N, \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$;
- $C^\nu_{(i,\Psi')} = C'_i$;
- $\forall a, b \in C^\Delta$ temos que $a \succeq^\nu_{(i,\Psi')} b \Leftrightarrow a' \succeq'_i b'$

Podemos notar que existe uma correspondência $1-1$ entre os perfis de estratégia generalizados de Ψ^Δ e os perfis de estratégia puras de $(\Psi^\Delta)^\nu$, pois podemos associar uma estratégia local pura para o jogador i em $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ com a estratégia pura do jogador (i, Ψ') em $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$. A existência dessa correspondência é um ponto muito importante, e juntamente com as propriedades do jogo $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$, apresentadas acima, nos ajuda a demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.5.1. *c^{ν} é um equilíbrio de Nash do jogo $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$, se e somente se, c^{Δ} é um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^{Δ}, onde $c^{\nu}_{(i\,\Psi')} = c^{\Delta}_{i,\Psi'}$, para todo $i \in N$, e $\Psi' \in \mathcal{G}_i$.*

Para a demonstração deste teorema utilizamos as definições de equilíbrio de Nash e equilíbrio de Nash generalizado, bem como as propriedades do jogo $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$.

Denotaremos por $(\Psi^{\Delta})^{\nu c}$ um completamento do jogo $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$.

O lema apresentado a seguir mostra que existe uma relação entre os completamentos de Ψ^{Δ} e $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$.

Lema 4.5.1. *Existe uma correspondência entre os completamentos de Ψ^{Δ} e $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$, tal que $(\Psi^{\Delta c})^{\nu} = (\Psi^{\Delta})^{\nu c}$.*

Para a demonstração deste lema utilizamos as definições de completamento para jogos e para preferências. Maiores detalhes sobre a demonstração do Teorema 4.5.1 e do Lema 4.5.1 podem ser encontrados no apêndice.

Nosso principal interesse aqui é mostrar que podemos encontrar equilíbrios de Nash generalizado, para o nosso modelo de jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências, utilizando um resultado que é uma "generalização" do resultado apresentado por Bade (Bade 2005). O resultado apresentado em Bade (2005) é o Teorema 4.4.1, apresentado na Seção 4.4, já o resultado que nós obtivemos é o seguinte teorema:

Teorema 4.5.2. *Para todo jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências Ψ^{Δ} temos que o conjunto de equilíbrios de Nash generalizado desse jogo é igual a união dos conjuntos de equilíbrios de Nash generalizado de cada completamento de Ψ^{Δ}, ou seja, $N(\Psi^{\Delta}) = \cup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ é um completamento de $\Psi^{\Delta}\}$.*

Para a demonstração deste teorema usamos o Teorema 4.4.1 apresentado e demonstrado por Bade (Bade 2005), o Teorema 4.5.1 e o Lema 4.5.1. A demonstração deste teorema por completo se encontra no apêndice.

4.5.1 Restrição: Conhecimento Parcial sobre Preferências

No jogo que definimos na seção anterior, além dos jogadores poderem não saber sobre as preferências dos demais, permitimos que um jogador tivesse falsas crenças sobre as preferências dos demais, isto é, poderia acontecer um caso que o jogador i preferisse estritamente c a c', mas o jogador j acreditasse (falsamente) que i preferisse c' a c. Nesta subseção vamos mostrar como ficam os resultados apresentados acima para o caso onde não permitiremos que os jogadores possuam falsas crenças com respeito as preferências dos demais, somente permitiremos que os jogadores possam não saber como os demais jogadores comparam dois perfis de estratégias.

Para este caso nós iremos manter a mesma definição de jogo estendido, apresentada no começo desta seção, mas acrescentaremos a ela uma das duas condições a seguir:

A5 $\succeq'_{ij} \subseteq \succeq'_j$, $\forall j \in N'$;

A6 Se $a \succeq'_{ij} b$ então $a \succeq'_j b$ e

Se $a \succ'_{ij} b$ então $a \succ'_j b$.

Ao adicionarmos A5, então todo jogador i só pode acreditar que um perfil c é preferível a um perfil c' de acordo com as preferências de qualquer outro jogador j, se j realmente tem uma preferência por c em relação a c'. Contudo, A5 não é forte o suficiente para excluir a seguinte possibilidade. Suponha que o jogador j seja indiferente entre c e c', logo temos $c \succeq_j^m c'$ e $c' \succeq_j^m c$ no jogo Ψ^m, suponha ainda que um outro jogador i não saiba que $c' \succeq_j^m c$, mas saiba que $c \succeq_j^m c'$, ou seja, se $\mathcal{F}(\Psi^m, i) = \Psi'$, então $c \succeq'_j c'$, e $c' \not\succeq'_j c$, portanto $c \succ'_j c'$, o que implica que o jogador i acredita falsamente que j tem uma preferência estrita por c quando comparado com c'. Para eliminarmos este caso, precisamos da condição A6 que garante que tal situação não pode ocorrer.

A representação do jogo é a mesma utilizada na seção anterior, $\Psi^\Delta = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$, com a diferença que adicionaremos uma das condições acima na definição de jogo estendido.

É fácil observar que ao adicionarmos uma nova condição a definição de jogo estendido, este novo jogo Ψ^Δ continua satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.5.2, portanto o mesmo continua válido desde que não requeiramos que os completamentos de Ψ^{Δ} satisfaçam A5 ou A6. Uma pergunta natural é saber se o Teorema 4.5.2 permanece válido se restringirmos a classe de completamentos de um dado jogo também exigindo que se um jogo Ψ^{Δ} satisfaz A5 ou A6 o seu completamento também satisfará as respectivas condições. Mostramos a seguir um contra-exemplo que comprova que com estas novas restrições o Teorema 4.5.2 não é mais válido.

contra-exemplo

Considere o seguinte jogo $\Psi^{\Delta} = (\{\Psi^m, \Psi'\}, \Psi^m, \mathcal{F})$, onde:

- $N = \{1, 2\}$;
- $C_1 = \{A, B\}$, $C_2 = \{a, b\}$;
- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1) = \Psi'$, $\mathcal{F}(\Psi^m, 2) = \Psi^m$, $\mathcal{F}(\Psi', 1) = \mathcal{F}(\Psi', 2) = \Psi'$;
- $(A, a) \succ_1^m (A, b) \succ_1^m (B, a) \succ_1^m (B, b)$;
- $(B, b) \succ_2^m (B, a) \succ_2^m (A, b) \succ_1^m (A, a)$;
- $(A, a) \succ_1' (A, b) \succ_1' (B, a) \succ_1' (B, b)$;
- $(B, b) \succ_2' (A, b)$ e $(B, a) \succ_2' (A, a)$.

Assuma ainda que Ψ^{Δ} satisfaz as restrições $A4$ e $R1$. Note que isto implica que ela satisfaz $A5$ e $A6$. Note ainda que existe um equilíbrio de Nash generalizado c^* tal que $c^*_{1,\Psi'} = A$, $c^*_{2,\Psi^m} = b$ e $c^*_{2,\Psi'} = a$.

O único completamento de Ψ^{Δ} que satisfaz $A5$ ou $A6$ é $\Psi^{\Delta c}$ tal que $\succeq_1^{mc} = \succeq_1'^{c} = \succeq_1^m$ e $\succeq_2^{mc} = \succeq_2'^{c} = \succeq_2^m$. Podemos observar que este jogo tem apenas um equilíbrio de Nash generalizado d^*, onde $d^*_{1,\Psi'^c} = A$, $d^*_{2,\Psi^{mc}} = b$ e $d^*_{2,\Psi'^c} = b$.

Assim, mostramos que os equilíbrios de Nash generalizados de Ψ^{Δ} não podem ser obtidos olhando apenas os equilíbrios de Nash generalizados dos completamentos de Ψ^{Δ} que satisfazem $A5$ ou $A6$. Assim, temos então o seguinte resultado:

Teorema 4.5.3. *Sejam os conjuntos* $\mathcal{C}(\Psi^{\Delta}) = \{\Psi^{\Delta c} : \Psi^{\Delta c}$ *é um completamento de* $\Psi^{\Delta}\}$ *e* $\mathcal{D}(\Psi^{\Delta}) = \{\Psi^{\Delta d} : \Psi^{\Delta d}$ *é um completamento de* Ψ^{Δ} *que satisfaz as restrições* A5 *ou* A6$\}$*; então para todo jogo com conhecimento parcial sobre preferências* Ψ^{Δ} *temos que*

$$\cup\{N(\Psi^{\Delta d}) : \Psi^{\Delta d} \in \mathcal{D}(\Psi^{\Delta})\} \subset \cup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c} \in \mathcal{C}(\Psi^{\Delta})\} = N(\Psi^{\Delta}).$$

A igualdade do teorema já foi demonstrada anteriormente e a expressão $\cup\{N(\Psi^{\Delta d})\} \subset \cup\{N(\Psi^{\Delta c})\}$ é fácil verificar, visto que $\mathcal{D}(\Psi^{\Delta}) \subseteq \mathcal{C}(\Psi^{\Delta})$.

4.6 Incerteza sobre Preferências

Por facilidade de exposição, na seção anterior não permitimos que os jogadores tivessem incerteza sobre as preferências dos demais, exigindo sempre que a função $\mathcal{F}$ fosse determinística. Mostraremos, nesta seção, como ficam os resultados (Teorema 4.5.1, Lema 4.5.1 e Teorema 4.5.2) apresentados acima, para o caso onde um jogador possa ter dúvidas a respeito dos jogos que os outros jogadores estão jogando, ou seja, nós permitiremos que um jogador i, jogando em um jogo Ψ', tenha dúvidas sobre quais os jogos que os outros jogadores, que estão jogando com ele, acham que estão jogando. Mais precisamente, temos que se i acredita que está jogando Ψ', queremos agora modelar a incerteza que i pode ter com respeito a crença que os demais jogadores em Ψ' têm sobre as relações de preferências uns dos outros.

Para que possamos modelar incerteza sobre preferências, os jogadores agora têm que ser capazes de expressar preferências sobre distribuições sobre perfis de estratégias, ou seja, as preferências $\succeq_i$ em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ agora são entre elementos de $\Delta(\times_{i\in N} C_i)$. Considere, agora, R' como sendo o conjunto de todas as relações de preferência, assimétricas e transitivas, em $\Delta(\times_{i\in N'} C'_i)$. Seja $B'_{ij} \in \Delta(R')$ uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de possíveis relações de preferências incompletas que representam a incerteza que o jogador i tem a respeito das preferências do jogador j no jogo Ψ'. Agora podemos redefinir um jogo estendido da seguinte forma:

Definição 4.6.1. *Um jogo estendido baseado em um jogo normal* $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$ *é um vetor* $\Psi' = (N', (C'_i)_{i\in N'}, (\succeq'_i)_{i\in N'}, (B'_{ij})_{(i,j)\in N^2})$ *que satisfaz A1-A3 e*

A*4 $B'_{jj} = [\succeq'_j], \forall j \in N'$.

Para representarmos esse novo jogo, onde permitimos a incerteza dos jogadores, usaremos a notação $\Psi^\Lambda = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$ onde o conjunto $\mathcal{G}$ e o jogo Ψ^m são iguais aos da definição de Ψ^Δ, apresentada na seção anterior, mas agora usando a nova definição para jogo normal estendido. A diferença entre esta nova representação Ψ^Λ e a representação Ψ^Δ é que agora a função $\mathfrak{F}$ não é mais uma função determinística como era em Ψ^Δ. A função $\mathfrak{F}$ é agora uma função que leva um jogo normal aumentado Ψ', pertencente a $\mathcal{G}$, em uma distribuição de probabilidade sobre $\times_{i\in N'}\mathcal{G}$. Dada uma função $\mathfrak{F}$, seja $\mathfrak{F}_i$ a distribuição marginal de $\mathfrak{F}$ correspondente ao i-ésimo jogador. Essa nova função $\mathfrak{F}$ apresenta as seguintes restrições:

R0 $\sum_{\Psi''\in \mathcal{G}, \succeq''_j = B} \mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi'') = B'_{ij}(B)$, $\forall B \in R$ e $(i,j) \in N'^2$.

R*1 Se $\mathfrak{F}_i(\Psi^+)(\Psi') > 0$, então $\mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi') = 1$;

Uma explicação mais intuitiva sobre a função $\mathfrak{F}$ é a seguinte: se estamos em alguma situação onde um jogador j acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' e que o jogador $i \neq j$ se movimenta neste jogo, e $\mathfrak{F}_i(\Psi')(\Psi'') = \frac{1}{2}$ então o jogador j acredita com probabilidade $\frac{1}{2}$ que o jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ'' quando ele está jogando em Ψ'.

Definimos o completamento de um jogo com incerteza sobre preferências do tipo $\Psi^\Lambda = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$ como a seguir.

Definição 4.6.2. *Dizemos que* $\Psi^{\Lambda c} = (\mathcal{G}^c, \Psi^{mc}, \mathfrak{F}^c)$ *é um completamento de* $\Psi^\Lambda = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathfrak{F})$ *se* $\mathcal{G}^c = \{\Psi'^c : \Psi'^c$ *é um completamento de* $\Psi' \in \mathcal{G}\}$, *onde* Ψ^{mc} *é o completamento de* Ψ^m *e* $\mathfrak{F}^c$ *é tal que* $\mathfrak{F}^c(\Psi'^c)(\xi) = \mathfrak{F}(\Psi')(\varphi)$, *onde* $\xi \in \times_{i\in N'}\mathcal{G}^c$, $\varphi \in \times_{i\in N'}\mathcal{G}$, *e* $\xi_i = \varphi_i^c$ *para todo* $i \in N'$.

Estratégia Local

A definição que nós usaremos para estratégia local, neste caso, é a mesma apresentada na Subseção 3.2.1.

Seja $\mathcal{G}_i = \{\Psi' \in \mathcal{G} :$ para algum $\Psi^+ \in \mathcal{G},\ \mathfrak{F}_i(\Psi^+)(\Psi') > 0\}$, o conjunto de jogos que algum jogador acredita que i considera ser o verdadeiro em alguma situação do jogo. Formalmente, temos que a definição de estratégia local é a seguinte:

Definição 4.6.3. *Uma estratégia local* $\delta_{i,\Psi'}$ *para o jogador* i *em um jogo* $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ *é uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras de* i *em* Ψ'*, assim podemos dizer que* $\delta_{i,\Psi'} \in \Delta(C'_i)$.

Dada a definição de estratégia local, definimos um *perfil de estratégia generalizado* δ^Λ como sendo um vetor cuja as coordenadas são estratégias locais, ou seja, $\delta^\Lambda = \{\delta_{i,\Psi'} : i \in N, \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$. O conjunto de todos os perfis de estratégia generalizados é representado por C^Λ. Definimos também $\delta^{\Lambda'}$ que é uma distribuição de probabilidade em C' tal que para todo $d \in C'$:

$$\delta^{\Lambda'}(d) = \sum_{\xi \in \times_{i \in N'} \mathcal{G}} \mathfrak{F}(\Psi')(\xi)(\prod_{i \in N'} \delta_{i,\xi_i}(d_i)) \tag{4.1}$$

Para qualquer estratégia local $d_{i,\Psi'}$ para o jogador i em Ψ', denotamos por $((\delta^{\Lambda'})_{-i}, d_{i,\Psi'})$ a distribuição de probabilidade em C' que se obtém utilizando a Equação 4.1 quando o perfil de estratégia generalizado utilizado é $(\delta^\Lambda_{-i,\Psi'}, d_{i,\Psi'})$.

Conforme foi dito no começo desta seção, os jogadores agora são capazes de expressar suas preferências sobre distribuições de probabilidade sobre perfis de estratégias. Note que $\delta^{\Lambda'}$ é uma distribuição em C'; intuitivamente, se um jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', então $\delta^{\Lambda'}$ é a distribuição sobre os possíveis perfis de estratégia C' que i acredita se os jogadores seguem as estratégias em δ^Λ.

Equilíbrio de Nash generalizado

Dado um perfil de estratégia generalizado δ^Λ, definimos um equilíbrio de Nash generalizado como a seguir.

Definição 4.6.4. *Um perfil de estratégia generalizado* δ^Λ *é um equilíbrio de Nash generalizado de um jogo* Ψ^Λ *se para todo* $i \in N$ *e* $\Psi' \in \mathcal{G}_i$*, não existir nenhuma estratégia local* $\delta_{i,\Psi'}$ *tal que*

$$((\delta^{\Lambda'})_{-i}, \delta_{i,\Psi'}) \succ'_i (\delta^{\Lambda'})$$

Note que tanto $((\delta^{\Lambda'})_{-i}, \delta_{i,\Psi'})$ como $(\delta^{\Lambda'})$ são distribuições de probabilidade em C'. Intuitivamente, esta definição afirma que para qualquer jogador i, se i acredita que o jogo é Ψ', então i

não pode unilateralmente conseguir obter uma melhor distribuição sobre C' dado que os demais jogadores seguem as estratégias de acordo com δ^{Λ}.

Encontrando Equilíbrio de Nash Generalizado

Mostraremos, agora, que o Teorema 4.5.2 também pode ser usado para encontrar equilíbrios de Nash generalizado em jogos com incerteza sobre preferências Ψ^{Λ}. Os passos para mostrarmos este resultado são basicamente os mesmos usados para a demonstração do Teorema 4.5.2.

Primeiro construímos um jogo em forma normal $(\Psi^{\Lambda})^{\nu} = (N^{\nu}, (C^{\nu}_{(i,\Psi')})_{(i,\Psi')\in N^{\nu}}, (\succeq^{\nu}_{(i,\Psi')})_{(i,\Psi')\in N^{\nu}})$, baseado no jogo $\Psi^{\Lambda} = (\mathcal{G}, \Psi^{m}, \mathfrak{F})$, com as seguintes propriedades:

- $N^{\nu} = \{(i, \Psi') : i \in N, \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$;
- $C^{\nu}_{(i,\Psi')} = C'_i$;
- $\forall a, b \in C^{\Lambda}$ temos que $a \succeq^{\nu}_{(i,\Psi')} b \Leftrightarrow a' \succeq'_i b'$

Baseado na definição do jogo $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$, podemos associar uma estratégia local para o jogador i em $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ com a estratégia mista do jogador (i, Ψ') em $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$, evidenciando assim a existência de uma correspondência $1-1$ entre os perfis de estratégia generalizados de Ψ^{Λ} e os perfis de estratégias mistas de $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$.

Teorema 4.6.1. *δ^{ν} é um equilíbrio de Nash do jogo $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$, se e somente se, δ^{Λ} é um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^{Λ}, onde δ^{ν} e δ^{Λ} são tais que $\delta^{\nu}_{(i,\Psi')} = \delta^{\Lambda}_{i,\Psi'}$, para todo $(i, \Psi') \in N^{\nu}$.*

A demonstração deste teorema é análoga a demonstração do Teorema 4.5.1, com a diferença que agora estamos trabalhando com estratégias mistas.

A seguir apresentamos um lema que mostra a existência de uma relação entre os completamentos de Ψ^{Λ} e $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$.

Lema 4.6.1. *Existe uma correspondência entre os completamentos de Ψ^{Λ} e $(\Psi^{\Lambda})^{\nu}$, tal que $\Psi^{\Lambda c} = (\Psi^{\Lambda})^{\nu c}$*

A demonstração deste lema é análoga a demonstração do Lema 4.5.1.

Devemos atentar para o fato que nas demonstrações do Teorema 4.6.1 e do Lema 4.6.1 a definição do vetor $a' \in C^{\Lambda'}$ é diferente da definição de $a' \in C^{\Delta'}$.

Através do Teorema, enunciado a seguir, mostramos que um equilíbrio de Nash generalizado de um jogo com incerteza sobre preferências Ψ^{Λ} pode ser encontrado da mesma forma que um equilíbrio de Nash generalizado de um jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências Ψ^{Δ}.

Teorema 4.6.2. *Para todo jogo com incerteza sobre preferências Ψ^{Λ} temos que o conjunto de equilíbrios de Nash generalizado desse jogo é igual a união dos conjuntos de equilíbrios de Nash generalizados de cada completamento de Ψ^{Λ}, ou seja, $N(\Psi^{\Lambda}) = \cup\{N(\Psi^{\Lambda c}) : \Psi^{\Lambda c}$ é um completamento de $\Psi^{\Lambda}\}$*

A demonstração deste teorema é análoga a demonstração do Teorema 4.5.2, com a diferença que para esta demonstração usaremos o Teorema 4.6.1 e o Lema 4.6.1 ao invés do Teorema 4.5.1 e do Lema 4.5.1.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Direções para Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

No desenvolvimento deste trabalho, foram apresentados alguns modelos capazes de representar situações onde o conhecimento comum não é mais uma hipótese obrigatória. Esses resultados são de suma importância, visto a dificuldade que se tem em aplicar os modelos existentes de Teoria dos Jogos (Padrão) em situações do nosso cotidiano, onde a hipótese de conhecimento comum, geralmente, não é satisfeita. Os modelos desenvolvidos neste trabalho ajudarão a prever com mais eficiência a escolha ótima de um agente diante de situações que ocorrem no nosso dia-a-dia.

Um dos pontos abordados, neste trabalho, foi a representação de jogos com consciência em forma normal. Para este caso, nós obtivemos os seguintes resultados

- Propusemos um modelo em que se permite que os jogadores possam ser inconscientes das ações disponíveis para eles e para os outros jogadores. Este modelo se baseou no modelo proposto por Halpern e Rêgo (Halpern & Rêgo 2006) para jogos com consciência em forma extensa.

- A flexibilidade do modelo proposto por Halpern e Rêgo (Halpern & Rêgo 2006), no que diz respeito ao caso de lidar com consciência sobre inconsciência, foi também encontrada no nosso modelo.

- Para esses dois casos (jogos com consciência e consciência sobre inconsciência), nós mostramos como generalizar o conceito de equilíbrio de Nash e também provamos a sua existência em jogos localmente finitos.

Outro ponto abordado nesta dissertação foi a modelagem de jogos com preferências incompletas. Para este caso, nós obtivemos os seguintes resultados:

- Propusemos um modelo em que se permite que os jogadores sejam incapazes de realizar comparações entre alguns possíveis cenários (perfis de estratégias), e também que os jogadores possam não ter conhecimento comum sobre como os demais jogadores avaliavam os possíveis cenários do jogo.
- Para esses jogos foi também apresentado o conceito de equilíbrio de Nash generalizado.
- Por fim, apresentamos um teorema que generalizou o resultado obtido por Bade (Bade 2005), no qual ela apresenta uma maneira de se encontrar o equilíbrios de Nash de um jogo com preferências incompletas. Esse termo generalização vem do fato de que no nosso teorema foi permitido que não apenas o modelador, mas também os jogadores pudessem ser ignorantes a respeito das preferências dos demais.

5.2 Direções para Trabalhos Futuros

Listamos a seguir algumas questões que permanecem ainda em aberto. Esperamos que algumas dessas questões possam ser bem exploradas e que resultem em bons trabalhos.

- Estudar a existência de novos conceitos de solução para jogos com consciência em forma normal;
- Investigar a existência de técnicas computacionais eficientes para computar equilíbrio de Nash generalizado;
- Estudar o conceito de consciência em jogos cooperativos;

- Verificar se o resultado apresentado por Bade (Bade 2005), para o caso restrito onde as relações de preferência para os jogadores são relações de preferência representáveis[1], continua válido para o nosso modelo para Falta de Conhecimento Comum sobre Preferências em Jogos na Forma Normal.

[1]A relação $\succeq$ é dita ser representável se existe uma função $u : C \to \mathbb{R}^n$ tal que $a \succeq b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b)$, onde a expressão $u(a) \geq u(b)$ significa que $u_i(a) \geq u_i(b)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

APÊNDICE A

Demonstrações

Teorema 3.2.1. *$\vec{\delta}$ é um equilíbrio de Nash de Ψ^θ, se e somente se, $\vec{\delta}'$ for um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^*, onde $\delta'_{i,\Psi'} = \delta_{(i,\Psi')}$ para $i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}_i$.*

Demonstração: Seja $\vec{\delta}$ um equilíbrio de Nash de Ψ^θ. Por definição temos então que

$$u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) \geq u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}_{-(i,\Psi^+)}, s),$$

$\forall\,(i,\Psi^+) \in N^\theta, s \in \Delta(C^\theta_{(i,\Psi^+)})$.

Agora, utilizando os seguintes fatos:

1. $\delta_{(i,\Psi^+)} = \delta'_{i,\Psi^+}$ para todo $(i,\Psi^+) \in N^\theta$;

2. $u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) = u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}')$;

3. $C^\theta_{(i,\Psi^+)} = C^+_i$;

temos

$$u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}') = u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}) \geq u_{(i,\Psi^+)}(\vec{\delta}_{-(i,\Psi^+)}, s) = u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}'_{-(i,\Psi^+)}, s).$$

Assim, temos que $u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}') \geq u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}'_{-(i,\Psi^+)}, s)$, $\forall\, i \in N, \Psi^+ \in \mathcal{G}$ e estratégia local s para i em Ψ^+. Portanto, $\vec{\delta}'$ é um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^*. A demonstração da volta é análoga.

Corolário 3.2.1. *Todo jogo com consciência em forma normal, com 2 jogadores, localmente finito tem um equilíbrio de Nash generalizado.*

Demonstração: Para esta demonstração utilizaremos o seguinte resultado apresentado em Salonen (2005): *Um jogo em forma normal possui um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se, para cada jogador $i \in N$, o conjunto de estratégias puras S_i é um espaço métrico compacto e as funções utilidade $u_i : S \to \mathbb{R}$ são contínuas para todo $i \in N$.*

Podemos observar que no jogo Ψ^θ todos os jogadores tem um número finito de estratégias puras; isso nos permite afirmar que S_i é um espaço métrico compacto. Além disso, temos que a utilidade de cada jogador em Ψ^θ depende somente das estratégias de um número finito de jogadores, assim é fácil ver que $u_i : S \to \mathbb{R}$ é contínua para cada jogador $i \in N$. Logo, aplicando o resultado apresentado acima, temos que o jogo Ψ^θ tem um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Então, o Teorema 3.2.1 implica que todo jogo com consciência em forma normal, com 2 jogadores, localmente finito tem um equilíbrio de Nash generalizado.

Obervação: Note que em nenhum momento nas demonstrações do Teorema 3.2.1 ou do Corolário 3.2.1, utilizamos o fato que $||N|| = 2$, portanto, como mencionamos no Capítulo 3, a prova do resultado para o caso de n jogadores é idêntica.

Teorema 4.5.1. *c^ν é um equilíbrio de Nash do jogo $(\Psi^\Delta)^\nu$, se e somente se, c^Δ é um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^Δ, onde $c^\nu_{(i,\Psi')} = c^\Delta_{i,\Psi'}$, para todo $i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}_i$.*

Demonstração: Seja c^ν um equilíbrio de Nash do jogo $(\Psi^\Delta)^\nu$. Então, por definição, temos que $\forall (i, \Psi') \in N^\nu$, $\nexists c_{(i,\Psi')} \in C^\nu_{(i,\Psi')}$ tal que

$$((c^\nu)_{-(i,\Psi')}, c_{(i,\Psi')}) \succ^\nu_{(i,\Psi')} c^\nu.$$

Agora, utilizando as propriedades

$$C^\nu_{(i,\Psi')} = C'_i \text{ e } a \succeq^\nu_{(i,\Psi')} b \Leftrightarrow a' \succeq'_i b'$$

e também o fato que o perfil de estratégias puras c^ν corresponde ao perfil de estratégia generalizado c^Δ, temos que $\forall\, i \in N^\Delta, \Psi' \in \mathcal{G}_i, \nexists\, c'_i \in C'_i$ tal que

$$((c^{\Delta'})_{-i}, c'_i) \succ'_i (c^{\Delta'}).$$

Assim, por definição temos que c^{Δ} é um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^{Δ}. A demonstração da volta é análoga.

Lema 4.5.1 *Existe uma correspondência entre os completamentos de* Ψ^{Δ} *e* $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$*, tal que* $(\Psi^{\Delta c})^{\nu} = (\Psi^{\Delta})^{\nu c}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que um completamento em Ψ^{Δ} corresponde a um completamento em $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$.

Seja $\Psi^{\Delta c}$ um completamento de Ψ^{Δ}, então $\forall \Psi' \in \mathcal{G}$ existe um $\Psi'^{c} \in \mathcal{G}^{c}$, tal que Ψ'^{c} é um completamento de Ψ'. Assim temos que $\forall i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}$, a relação $\succeq_i'^{c}$ é um completamento de $\succeq_i'$.

Defina agora um jogo $(\Psi^{\Delta})^{\nu x}$ tal que $N^{\nu x} = N^{\nu}$, $C^{\nu x} = C^{\nu}$ e $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x} b \Leftrightarrow a' \succeq_i'^{c} b'$. Como $\forall i \in N$ e $\Psi'^{c} \in \mathcal{G}^{c}$ a relação $\succeq_i'^{c}$ é completa então podemos afirmar que $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x}$ é também uma relação completa $\forall (i, \Psi') \in N^{\nu}$. Precisamos mostrar agora que $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x}$ é um completamento de $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu}$, $\forall (i, \Psi') \in N^{\nu}$; para isso vamos mostrar que:

i) $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu} b \Rightarrow a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x} b$

ii) $a \succ_{(i,\Psi')}^{\nu} b \Rightarrow a \succ_{(i,\Psi')}^{\nu x} b$.

Parte *i)* Seja $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu} b$ logo, pela definição de $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$, temos que $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu} b \Rightarrow a' \succeq_i' b'$ e como $\succeq_i'^{c}$ é um completamento de $\succeq_i'$ então, pela definição de completamento $a' \succeq_i' b' \Rightarrow a' \succeq_i'^{c} b'$, logo $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu} b \Rightarrow a' \succeq_i'^{c} b$. Assim, usando a definição de $(\Psi^{\Delta})^{\nu x}$, onde $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x} b \Leftrightarrow a' \succeq_i'^{c} b'$, temos que $a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu} b \Rightarrow a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x} b$. A prova da parte *ii)* é análoga.

Com isso mostramos que $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu x}$ é um completamento de $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu}$, $\forall (i, \Psi') \in N^{\nu}$, logo podemos concluir que um completamento em Ψ^{Δ} corresponde a um completamento em $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$.

Agora mostraremos a recíproca que um completamento em $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$ corresponde a um completamento em Ψ^{Δ}.

Seja $(\Psi^{\Delta})^{\nu c}$ um completamento de $(\Psi^{\Delta})^{\nu}$. Então temos que $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu c}$ é um completamento de $\succeq_{(i,\Psi')}^{\nu}$, $\forall (i, \Psi') \in N^{\nu}$. Defina agora um jogo $\Psi^{\Delta x} = (\mathcal{G}^{x}, \Psi^{mx}, \mathcal{F}^{x})$, onde $\mathcal{G}^{x} = \{\Psi'^{x} = (N', C_i', \succeq_i'^{x}) : \Psi' = (N', C_i', \succeq_i') \in \mathcal{G}$ e $a' \succeq_i'^{x} b' \Leftrightarrow a \succeq_{(i,\Psi')}^{\nu c} b, \forall i \in N\}$. Agora precisamos mostrar que $\succeq_i'^{x}$ é um completamento de $\succeq_i'$, $\forall i \in N$; para isto vamos mostrar que:

i) $a' \succeq'_i b' \Rightarrow a' \succeq'^x_i b'$

ii) $a' \succ'_i b' \Rightarrow a' \succ'^x_i b'$.

Parte *i)* Seja $a' \succeq'_i b'$ logo, pela definição de Ψ^ν, temos que $a' \succeq'_i b' \Rightarrow a \succeq^\nu_{(i,\Psi')} b$ e como $\succeq^{\nu c}_{(i,\Psi')}$ é um completamento de $\succeq^\nu_{(i,\Psi')}$ então, pela definição de completamento $a \succeq^\nu_{(i,\Psi')} b \Rightarrow a \succeq^{\nu c}_{(i,\Psi')} b$, logo temos que $a' \succeq'_i b' \Rightarrow a \succeq^{\nu c}_{(i,\Psi')} b$. Assim, usando a definição de $\Psi^{\Delta x}$ temos que $a' \succeq'_i b' \Rightarrow a' \succeq'^x_i b'$. A prova da parte *ii)* é análoga.

Com isso podemos afirmar que $\succeq'^x_i$ é um completamento de $\succeq'_i$, $\forall i \in N$ e $\Psi' \in \mathcal{G}$. Logo podemos concluir que um completamento em $(\Psi^\Delta)^\nu$ corresponde a um completamento em Ψ^Δ.

Teorema 4.5.2 *Para todo jogo com falta de conhecimento comum sobre preferências Ψ^Δ temos que o conjunto de equilíbrios de Nash generalizado desse jogo é igual a união dos conjuntos de equilíbrios de Nash generalizado de cada completamento de Ψ^Δ, ou seja, $N(\Psi^\Delta) = \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) :$ $\Psi^{\Delta c}$ é um completamento de $\Psi^\Delta\}$*

Demonstração: Temos que mostrar que

(1) $N(\Psi^\Delta) \subset \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ são completamentos de $\Psi^\Delta\}$

(2) $N(\Psi^\Delta) \supset \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ são completamentos de $\Psi^\Delta\}$

Parte (1): Seja a^Δ um equilíbrio de Nash generalizado de Ψ^Δ. Assim pelo Teorema 4.5.1 temos que a^ν, tal que $a^\nu_{(i,\Psi')} = a^\Delta_{i,\Psi'}$ para todo $(i, \Psi') \in N^\nu$, é um equilíbrio de Nash de $(\Psi^\Delta)^\nu$. Aplicando o Teorema 4.4.1 para o jogo $(\Psi^\Delta)^\nu$ temos o seguinte resultado: $N((\Psi^\Delta)^\nu) \subset \bigcup\{N((\Psi^\Delta)^{\nu c}) : (\Psi^\Delta)^{\nu c}$ são completamentos de $(\Psi^\Delta)^\nu\}$. Assim temos que $a^\nu \in \bigcup\{N((\Psi^\Delta)^{\nu c}) :$ $(\Psi^\Delta)^{\nu c}$ são completamentos de $(\Psi^\Delta)^\nu\}$; logo temos que $a^\nu \in N((\Psi^\Delta)^{\nu c})$ para ao menos um completamento de $(\Psi^\Delta)^\nu$. Pelo Lema 4.5.1, sabemos que existe um completamento $\Psi^{\Delta c}$ de Ψ^Δ tal que $(\Psi^{\Delta c})^\nu = (\Psi^\Delta)^{\nu c}$, logo $a^\nu \in N((\Psi^{\Delta c})^\nu)$. Aplicando mais uma vez o Teorema 4.5.1, temos que $a^\Delta \in N(\Psi^{\Delta c})$, logo $a^\Delta \in \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ são completamentos de $\Psi^\Delta\}$. Assim mostramos (1).

Parte (2): Seja $b^\Delta \in \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ são completamentos de $\Psi^\Delta\}$; então $b^\Delta \in N(\Psi^{\Delta c})$ para ao menos um completamento de Ψ^Δ. Pelo Teorema 4.5.1, temos que b^ν, tal que $b^\nu_{(i,\Psi')} = b^\Delta_{i,\Psi'}$

para todo $(i, \Psi') \in N^\nu$, é um equilíbrio de Nash de $(\Psi^{\Delta c})^\nu$. Pelo Lema 4.5.1, sabemos que existe um completamento $(\Psi^\Delta)^{\nu c}$ de $(\Psi^\Delta)^\nu$ tal que $(\Psi^\Delta)^{\nu c} = (\Psi^{\Delta c})^\nu$, logo $b^\nu \in N((\Psi^\Delta)^{\nu c})$. Portanto, pelo Teorema 4.4.1 obtemos $b^\nu \in N((\Psi^\Delta)^\nu)$. Assim aplicando novamente o Teorema 4.5.1, temos que $b^\Delta \in N(\Psi^\Delta)$. Com isso, mostramos que $N(\Psi^\Delta) \supset \bigcup\{N(\Psi^{\Delta c}) : \Psi^{\Delta c}$ são completamentos de $\Psi^\Delta\}$.

APÊNDICE B

Plataforma Computacional

O sistema de tipografia utilizado na digitação desta dissertação foi o LaTeX. O sistema LaTeX, desenvolvido por Leslie Lamport em 1985, consiste em uma série de macros ou rotinas do sistema TeX (criado por Donald Knuth na Universidade de Stanford em 1983) que facilitam o desenvolvimento da edição do texto. O LaTeX possui comandos muito cômodos e elegantes para a criação de tabelas, índices, bibliografia, referências cruzadas, etc., permitindo ao usuário concentrar-se no conteúdo do documento em vez de detalhes puramente técnicos. Para maiores detalhes sobre o sistema de tipografia LaTeX ver De Castro (2003) ou através do site `http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex`.

Referências Bibliográficas

Aliprantis, C. & Chakrabarti, S. (2000), *Games and Decision Making*, Oxford University Press, Oxford.

Aumann, R. J. (1976), 'Agreeing to desagree', *Annals of Statistics* **4**, 1236–1239.

Bade, S. (2005), 'Nash equilibrium in games with incomplete preferences', *Economic Theory* **26**, 309–332.

Campello de Souza, F. M. (2007), *Decisões Racionais em Situações de Incerteza*, Editora Universitária, Recife.

Chung, K. & Fortnow, L. (2007), 'Loopholes', *Manuscrito não publicado* .

Cournot, A. A. (1838), *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, manuscrito não publicado edn.

De Castro, R. (2003), *El universo LaTeX*, Universidade Nacional da Colombia, Colombia.

Dubra, J., Ok, E. A. & Maccheroni, F. (2004), 'Expected utility theory without the completeness axiom', *Journal of Economic Theory* **115**, 118–133.

Feinberg, Y. (2005), *Games with incomplete awareness*, Technical Report Resarch Paper Series.

Halpern, J. & Rêgo, L. C. (2006), 'Extensive games with possibly unaware players', *publicado nos anais da AAMAS'06 - 5th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* pp. 744–751.

Harsanyi, J. C. (1967-68), 'Games with incomplete information played by bayesian players', *Management Science* **14**, 159–182, 320–334, 486–502.

Kreps, D. (1988), *Notes on the Theory of Choice*, Underground Classics in Economics.

Li, J. (2006), 'Dynamic games with unawareness', *Manuscrito não publicado* .

Maynard Smith, J. (1976), 'Evolution and the theory of games', *American Scientist* **64**, 41–45.

Maynard Smith, J. & Price, G. (1973), 'The logic of animal conflict', *Nature* **146**, 15–18.

Myerson, R. B. (1997), *Game Theory: Analysis of Conflict*, Havard University Press, Cambridge.

Nash Jr., J. F. (1950*a*), 'The bargaining problem', *Econometrica* pp. 155–162.

Nash Jr., J. F. (1950*b*), 'Equilibrium points in n-person games', *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* pp. 48–49.

Nash Jr., J. F. (1951), 'Non-cooperative games', *Annals of Mathematics* pp. 286–295.

Nash Jr., J. F. (1953), 'Two-person cooperative games', *Econometrica* pp. 128–140.

Neumann, J. V. & Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton.

Neumann, J. V. & Morgenstern, O. (2004), *Theory of Games and Economic Behaviour*, 60 edn, Princeton University Press, Princeton.

Ok, E. A. (2002), 'Utility representation of an incomplete preference relation', *Journal of Economic Theory* **104**, 429–449.

Ordeshook, P. (1986), *Game Theory and Political Theory*, Cambridge University Press, Cambridge UK.

Osborne, M. J. & Rubinstein, A. (1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge.

Ozbay, E. (2006), 'Unawareness and strategic announcements in games with uncertainty', *Manuscrito não publicado* .

Rêgo, L. C. & Halpern, J. (2007), 'Generalized solution concepts in games with possibly unaware players', *Publicado no 11th Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK07), Belgium* .

Sagi, J. (2003), 'Anchored preference relations', *Mimeo, UC-Berkeley* .

Salonen, H. (2005), 'Nash equilibria in normal form games', *Manuscrito não publicado* .

Souza, A. A. (2003), A teoria dos jogos e as ciências sociais, Master's thesis, Universidade Estadual Paulista.

Tucker, A. (1950), 'A two-person dilemma', *Stanford University mimeo. Reprinted in Rasmusen, Eric, ed.* (2001)*, Readings in Games and Information, Oxford: Blackwell Publishing* .