CORREÇÃO DE BARTLETT NOS MODELOS NÃO-LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO

Orientadora: Profª. Dra. Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Co-orientador: Prof. Dr. Francisco José de A. Cysneiros

Área de concentração: Estatística Matemática

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção de grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2009

Brito, Cícero Carlos Ramos de
Correção de Bartlett nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos / Cícero Carlos Ramos de Brito - Recife : O Autor, 2009.
xii, 160 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística, 2009.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Estatística matemática. I. Título.

519.9 CDD (22. ed.) MEI2009-040

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

19 de fevereiro de 2009
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Cícero Carlos Ramos de Brito

intitulada

"Correção de Bartlett nos Modelos Não-Lineares Simétricos Heteroscedásticos"

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Prof. Klaus Leite P. Vasconcellos
Coordenador de Pós Graduação em Estatística
UFPE

Banca Examinadora:

Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Audrey HeLen Mariz de Aquino Cysneiros orientador

Borko D. Stosic

Borko Darko Stosic (UFRPE)

Francisco José de Azevedo Cysneiros

Francisco José de Azevedo Cysneiros

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Aos meus pais, à minha esposa, meus irmãos e amigos.

Agradecimentos

Ao meu bom Deus, pelo dom da vida, restauração da saúde e, por sempre iluminar meus caminhos e permitir a conclusão dessa etapa.

À minha esposa, Bárbara Cristina, pelo amor, apoio, compreensão e disponibilidade, que foram indispensáveis nesta fase da minha vida.

Aos meus pais (*in memoriam*), que me deram princípios básicos e fundamentais para minha formação.

À minha orientadora Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros, pela confiança, orientação, disponibilidade, pelo profissionalismo e dedicação pelo que faz.

Ao meu co-orientador Francisco José de Azevedo Cysneiros, pelo profissionalismo e dedicação pelo que faz.

Aos professores Antônio José Aleixo da Silva e Gauss Moutinho Cordeiro, pelo grande incentivo e apoio.

Aos professores do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE, pela ajuda e incentivo.

Aos colegas de turma.

À Valéria Bittencourt, por tudo que tem feito, sempre com eficiência, organização e amizade.

Ao professor Marcelo Gama pelo apoio e incentivo.

Ao professor João Silva Rocha pelo apoio e incentivo.

Resumo

Neste trabalho, tratamos de refinamento de testes de hipóteses nos modelos de regressão não-lineares simétricos heteroscedásticos com função de ligação quaisquer para a média e para o parâmetro de escala. Desenvolvemos e apresentamos, em notação matricial, um fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças nesta classe de modelos. Apresentamos também um teste de razão de verossimilhanças. Apresentamos, em notação matricial, fatores de correção de Bartlett para melhorar as estatísticas da razão de verossimilhanças nesta classe de modelos.

Palavras-chave: Correção de Bartlett, Modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos, Estatística da razão de verossimilhanças.

Abstract

In this work, we treated of refinement of tests of hypotheses in symmetric nonlinear regression heteroskedastic models with link function any for the location and for the scale parameter. We developed, in matrix form, a Bartlett's corrections factor to the likelihood ratio statistic in this class of models. We present, in matrix form, closed-form expressions for Bartlett factors for likelihood location.

Keywords: Bartlett correction, likelihood ratio test, symmetric nonlinear models.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Os modelos de regressão são amplamente utilizados em aplicações práticas com o objetivo de relacionar uma variável resposta a uma ou mais variáveis explicativas. Esses modelos supõe que os erros, que representam seu componente aleatório, têm variância constante, propriedade conhecida como homoscedasticidade. A suposição de normalidade sempre foi muito atrativa para os modelos de regressão com resposta contínua e, mesmo quando não era alcançada, tentava-se algum tipo de transformação no sentido de obter a normalidade procurada. Percebemos que a modelagem sob a suposição de erros normalmente distribuídos pode ser altamente influenciada por observações extremas, chamadas também de observações aberrantes. Em muitas situações da modelagem estatística há a necessidade da procura de modelos menos sensíveis a observações aberrantes, incentivando o desenvolvimento de metodologias robustas (menos sensíveis) à presença de tais observações. Na linha de modelos robustos ou menos sensíveis, alternativas à suposição de erros normais têm sido propostas em diversas literaturas. Uma dessas alternativas é assumir para os erros distribuições com caudas mais pesadas do que a normal, a fim de reduzir a influência de pontos aberrantes. Nos últimos anos, diversos resultados de natureza teórica e aplicada surgiram como alternativa à modelagem com erros normais como, por exemplo, o uso de distribuições simétricas. Grande parte desses resultados também podem ser encontrados em Fang, Kotz e Ng (1990) e Fang e Anderson (1990).

A idéia e objetivo desta dissertação é a obtenção da expressão do fator de correção Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos com parâmetro de escala desconhecido. No decorrer do estudo, pudemos perceber que havia necessidade de generalizar os modelos não-lineares simétricos homoscedásticos causando-nos uma grande motivação para estudo desta generalização e, em contato com a orientadora, a mesma sugeriu que esta fosse feita para a classe de modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos.

1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em quatro capítulos e sete apêndices. O primeiro capítulo contém uma breve introdução, a organização da dissertação, em seguida entramos nos assuntos básicos para esta dissertação, como a estimação por máxima verossimilhança, otimização não-linear, a identidade Bartlett, encontramos um resumo do assunto essencial para esta dissertação: a Álgebra matricial e, por fim o suporte computacional utilizado nesta dissertação. Ainda neste capítulo, veremos alguns tópicos que contribuirão para entendimento dos cálculos do fator de correção de Bartlett e base para os mesmos e, ainda, para o desenvolvimento desta pesquisa. O segundo capítulo é dedicado à inferência estatística em modelos de regressão não-lineares com erros tendo distribuição simétrica no qual apresentaremos uma breve introdução, definiremos os modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos. Apresentaremos ainda alguns modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos contidos nas diversas literaturas, tais como a Distribuição Normal, Logística tipo I e II, Distribuição de Cauchy, Exponencial Dupla, Exponencial Potência, Distribuição t-Student, t-Student Generalizada e algumas generalizações e extensões de algumas distribuições simétricas, bem como algumas propriedades e resultados para modelos simétricos em geral. Em particular, mostraremos como fica o teste da razão de verossimilhanças nesta classe de modelos.

No terceiro capítulo, apresentaremos as fórmulas em notação matricial do fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças para três testes de hipóteses associados ao vetor de parâmetros β, γ e (β, γ). O capítulo quatro foi reservado para a conclusão.

Nos apêndices A, B e C apresentamos a obtenção de alguns cumulantes conjuntos de derivadas do logaritmo da função verossimilhança do modelo não-linear simétrico heteroscedástico necessários aos cálculos do termo que define a correção de Bartlett para a estatística RV em relação ao vetor de parâmetro β, ao vetor de parâmetros γ, β e γ conjuntamente e suas derivadas, respectivamente.

Nos apêndices D, E e F apresentamos a obtenção do fator de correção de Bartlett referentes a três testes de hipóteses no modelo não-linear simétrico heteroscedástico.

No apêndice G temos os valores de algumas esperanças associadas à correção de Bartlett para cada distribuição pertencente a classe dos modelos simétricos heteroscedásticos, a saber: distribuições Normal, t-Student, t-Student generalizada, Cauchy,Logística I e Logística II, entre outras.

1.3 Estimação por Máxima Verossimilhança

Seja $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ o valor observado de uma variável aleatória $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ caracterizada por uma função de probabilidade ou densidade com forma analítica $f(y; \theta)$ conhecida mas envolvendo um vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$. Seja $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ o espaço paramétrico representando o conjunto de valores possíveis do vetor θ. A função $f(y; \theta)$ é denominada função do modelo estatístico e define alguma família $\mathcal{F}$ de distribuições de probabilidade.

A função de verossimilhança $L(\theta)$ é definida como sendo igual à função do modelo, embora seja interpretada diferentemente como a função de θ para y conhecido. Isto é, a função de verossimilhança para θ baseada na observação $Y = y$ é dada por $L(\theta) = L(\theta, y) = f(y, \theta), \quad \theta \in \Theta$.

Muito frequentemente, as componentes de Y são mutuamente independentes para todas as distribuições em $\mathcal{F}$ e a função de verossimilhança de θ pode ser escrita como

$$L(\theta) = \prod_{l=1}^{n} f_l(y_l, \theta)$$

em que f_l corresponde à densidade individual da l-ésima observação. Usualmente, trabalha-se com o logaritmo da função de verossimilhança:

$$\ell(\theta) = \ell(\theta, y) = \log(L(\theta)) = \sum_{l=1}^{n} \log\{f_l(y_l; \theta)\}.$$

Dada a função $L(\cdot)$, a estimativa de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\theta}$ de θ é o valor que maximiza $L(\theta)$ em Θ, isto é, $L(\widehat{\theta}) \geq L(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$. Como a função logaritmo é monótona crescente, maximizar $L(\theta)$ e $\ell(\theta)$ em Θ são processos equivalentes. Então, a EMV é definida de modo que, para todo $\theta \in \Theta, \ell(\widehat{\theta}) \geq \ell(\theta)$.

A função escore $U(\theta) = (U(\theta_1), \ldots, U(\theta_p))^\top$ é definida como

$$U_r(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_r}, \quad r = 1, \ldots, p,$$

e descreve como o logaritmo da função de verossimilhança varia em Θ.

Se θ é um conjunto discreto, calcula-se $\ell(\theta)$ para os diversos valores de θ's e escolhe-se $\hat{\theta}$ como aquele valor de θ correspondente ao máximo $\ell(\theta)$. Quando $\ell(\theta)$ é contínua e diferenciável em Θ, a EMV $\hat{\theta}$ pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações simultâneas $\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_r}$ para $r = 1, \ldots, p$, desde que θ não se encontre na fronteira do espaço paramétrico.

A matriz de primeiras derivadas da função escore com sinal negativo

$$J(\theta) = -\frac{\partial U(\theta)^\top}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top}$$

é denominada matriz de informação observada (Fisher, 1925). A matriz hessiana é simplesmente $-J(\theta)$ e sob condições gerais de regularidade, ver Cox e Hinkley (1974, Cap. 9) e Lehmann (1999, Cap. 7), temos que $E_\theta[J(\theta)] = K(\theta)$, em que o subescrito θ indica que a esperança matemática é calculada supondo que θ é o verdadeiro valor do parâmetro. A $K(\theta)$ é chamada de matriz de informação (esperada) de Fisher para θ. Para $\hat{\theta}$ ser o máximo local as condições $\hat{U} = U(\hat{\theta}) = 0$ e $\hat{J} = J(\hat{\theta}) \geq 0$ ($\hat{J}$ positiva semi-definida) são necessárias, enquanto que $\hat{U} = 0$ e $\hat{J} \geq 0$ ($\hat{J}$ positiva definida) são suficientes.

Lehmann e Casela (1998, Cap. 6) mostram que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\theta}$, obtido como raiz única da equação, apresenta as seguintes propriedades:

(i) É consistente;

(ii) É assintoticamente eficiente, isto é, dentre todos os estimadores consistentes de θ, o estimador de máxima verossimilhança possui variância assintótica mínima;

(iii) É invariante sob transformação biunívoca, ou seja, se $\widehat{\theta}$ é estimador de máxima verossimilhança de θ e g é função bijetora, então $g(\widehat{\theta})$ é estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$;

(iv) Tem distribuição assintótica normal p-variada, onde p é a dimensão do vetor θ, da forma
$$\widehat{\theta} \sim N_p\left(\theta, K(\theta)^{-1}\right);$$

(v) É, em geral, viesado, embora seja assintoticamente não-viesado.

1.4 Otimização Não-Linear em Estatística

Um dos problemas mais freqüentes na inferência estatística é encontrar o estimador de máxima verossimilhança de algum parâmetro desconhecido. Em geral, o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\theta}$ de θ não apresenta forma analítica fechada e as estimativas devem ser encontradas através da maximizaçao numérica do logaritmo da função de verossimilhança. Para isto utilizamos algum procedimento iterativo.

1.4.1 Algoritmo de Newton-Raphson

Este procedimento de maximização é obtido expandindo a função escore $U(\theta)$ em série de Taylor até a primeira ordem em torno de um valor inicial $\theta^{(0)}$, tem-se aproximadamente

$$U(\theta)) = U(\theta^{(0)}) + H(\theta^{(0)})(\theta - \theta^{(0)})$$

em que
$$H(\theta^{(0)}) = \left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\theta\partial\theta^{\top}}\right|_{\theta=\theta^{(0)}}$$
é a matriz de segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança. A seguir, fazendo-se $U(\theta) = 0$ e repetindo o procedimento acima, chega-se à seguinte equação:
$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} H(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}),$$

podendo ser generalizado da forma

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} H(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

em que o termo $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $-H(\theta^{(k)})^{1} U(\theta^{(k)})$, normalmente tomase

$\lambda^{(k)} = 1$. Este processo é repetido até se obter uma distância entre $\theta^{(k+1)}$ e $\theta^{(k)}$ que seja menor que a tolerância especificada.

1.4.2 Algoritmo Escore de Fisher

Este procedimento foi sugerido por Sir Ronald Fisher e baseia-se em substituir a matriz $-H$ por seu valor esperado $E(-H) = K$, a matriz de informação esperada. Assim, a equação (1.1) é reescrita na forma

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} K(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}),$$

em que o termo $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $K(\theta^{(k)})^{-1}U(\theta^{(k)})$.

1.4.3 Método BFGS

Este algoritmo foi desenvolvido por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno. Este método se assemelha ao método de Newton-Raphson, diferenciando-se pelo fato de substituir a matriz $-H^{-1}$ por uma sequência de matrizes simétricas e positivas definidas por $B^{(k)}$ tal que $\lim_{k \longrightarrow \infty} B^{(k)} = -H^{-1}$.

A forma recursiva para se obter tais matrizes é dada pela expressão

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} - \frac{B^{(k)}(g^{(k)})^\top B^{(k)}}{(g^{(k)})^\top B^{(k)} g^{(k)}} + \frac{h^{(k)}(h^{(k)})^\top}{(h^{(k)})^\top g^{(k)}}$$

para $k = 0, 1, \ldots$, em que $g^{(k)} = \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}$ e $h^{(k)} = U(\theta^{(k+1)}) - U(\theta^{(k)})$.

Comumente, toma-se como matriz inicial, $B^{(0)}$, a matriz identidade de mesma ordem, pois ela é positiva definida e simétrica, conduzindo assim a aproximações $B^{(k)}$ positivas definidas e simétricas. Assim, a equação (1.1) fica

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} B^{(k)} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que o termo $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $-B^{(k)}U(\theta^{(k)})$.

1.5 Identidades de Bartlett

Nesta seção, apresentaremos algumas definições de cumulantes, e algumas identidades de Bartlett. Utilizaremos a notação de Lawley (1956) para as derivadas do logaritmo da função de verossimilhança, em que todos os índices variam de $1, \dots, p$, para o vetor β de dimensão p e de $1, \dots, q$, para o vetor γ de dimensão q, sendo $(p+q)$ a dimensão do vetor θ.

1.5.1 Derivadas do log-verossimilhança

Veremos nesta subseção as derivadas até a quarta ordem do logaritmo da função de verossimilhança, em que todos os índices minúsculos r, s, t e u, variam de 1 a p para o vetor β de dimensão p que é um subvetor do vetor θ e da mesma forma os índices maiúsculos R, S, T e U, para o vetor γ de dimensão q, ou seja, $\theta = (\beta^T, \gamma^T)^T$. Logo por definição temos:

$$U_r = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}, \quad U_{rs} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s}, \quad U_{r,s} = U_r U_s = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_s}, \quad U_{rst} = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t},$$

$$U_{rs,t} = U_{rs} U_t = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_t}, \quad U_{r,st} = U_r U_{st} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_s \partial \beta_t},$$

$$U_{r,s,t} = U_r U_s U_s = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_s}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_t}, \quad U_{rstu} = \frac{\partial^4 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t \partial \beta_u},$$

$$U_{rst,u} = U_{rst} U_u = \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_u}, \quad U_{rs,tu} = U_{rs} U_{tu} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s}\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s},$$

$$U_{r,stu} = U_r U_{stu} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_s \partial \beta_t \partial \beta_u}, \quad U_{rs,t,u} = U_{rs} U_t U_u = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_t}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_u},$$

$$U_{r,st,u} = U_r U_{st} U_u = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_s \partial \beta_t}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_u}, \quad U_{r,s,tu} = U_r U_s U_{tu} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_s}\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_t \partial \beta_u},$$

$$U_{r,s,t,u} = U_r U_s U_t U_u = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_s}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_t}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_u}.$$

e de maneira inteiramente análoga obtemos as mesmas expressões para o vetor γ, trocando os índices minúsculos por maiúsculos e para o vetor $(\beta^T, \gamma^T)^T$

aparecem conjuntamente os índices maiúculos e minúsculos.

1.5.2 Momentos das derivadas de $\ell(\theta)$

Veremos nesta subseção os momentos dos conjuntos de derivadas de $\ell(\theta)$, ou seja, as esperanças das derivadas do logaritmo da função verossimilhança, e que serão denotados por: $\mu_r = E[U_r]$, $\mu_{rs} = E[U_{rs}]$, $\mu_{r,s} = E[Ur, s] = E[U_r U_r]$, $\mu_{r,st} = E[U_{r,st}] = E[U_r U_{st}]$,$\mu_{rs,t} = E[U_{rs,t}] = E[U_{rs} U_t]$, $\mu_{r,s,t} = E[U_{r,s,t}] = E[U_r U_s U_t]$, $\mu_{rst} = E[U_{rst}]$, $\mu_{rstu} = E[U_{rstu}]$, $\mu_{rst,u} = E[U_{rst,u}] = E[U_{rst} U_u]$, $\mu_{rs,tu} = E[U_{rs,tu}] = E[U_{rs} U_{tu}]$, $\mu_{r,stu} = E[U_{r,stu}] = E[U_r U_{stu}]$, $\mu_{rs,t,u} = E[U_{rs,t,u}] = E[U_{rs} U_t U_u]$, $\mu_{r,st,u} = E[U_{r,st,u}] = E[U_r U_{st} U_u]$, $\mu_{r,s,tu} = E[U_{r,s,tu}] = E[U_r U_s U_{tu}]$ e $\mu_{r,s,t,u} = E[U_{r,s,t,u}] = E[U_r U_s U_t U_t]$, sendo por exemplo $E[U_r]$ representando a esperança ou valor esperado de U_r, e assim por diante.

1.5.3 Cálculo dos Cumulantes

Veremos aseguir como se calcula os cumulantes a partir dos momentos. Então vejamos:

$$k_{r,s} = \mu_{r,s} - \mu_r \mu_r, \quad k_{rs} = \mu_{rs}, \quad k_{rs,t} = \mu_{rs,t} - \mu_{rs}\mu_t, \quad k_{r,st} = \mu_{r,st} - \mu_r \mu_{st},$$

$$k_{r,s,t} = \mu_{r,s,t} - \mu_{r,s}\mu_t - \mu_r \mu_{s,t} - \mu_{r,t}\mu_s + \mu_r \mu_s \mu_t, \quad k_{rs,tu} = \mu_{rs,tu} - \mu_{rs}\mu_{tu},$$

$$k_{r,s,t,u} = \mu_{r,s,t,u} - \sum_{(3)} \mu_{r,s}\mu_{t,u} - \sum_{(3)} \mu_{r,s,t}\mu_u + \sum_{(3)} \mu_{r,s}\mu_t \mu_u - \mu_r \mu_s \mu_t \mu_u,$$

$$k_{r,s,tu} = \mu_{r,s,tu} - \mu_{r,s}\mu_{tu} - \mu_r \mu_{s,tu} - \mu_{r,tu}\mu_s + \mu_r \mu_s \mu_{tu},$$

$$k_{rs,t,u} = \mu_{rs,t,u} - \mu_{rs}\mu_{t,u} - \mu_{rs,t}\mu_u - \mu_{rs,u}\mu_t + \mu_{rs}\mu_t \mu_u,$$

$$k_{r,st,u} = \mu_{r,st,u} - \mu_r \mu_{st} \mu_u + \mu_{r,u}\mu_{st} + \mu_r \mu_{st,u} + \mu_{r,st}\mu_u,$$

$$k_{r,stu} = \mu_{r,stu} - \mu_r \mu_{stu} \quad e \quad k_{rst,u} = \mu_{rst,u} - \mu_{rst}\mu_u.$$

Como $\mu_r = \mu_s = \mu_t = \mu_u = 0$, logo substituindo e efetuando os cálculos obtemos:

$$k_{r,s} = \mu_{r,s}, \quad k_{rs} = \mu_{rs}, \quad k_{rs,t} = \mu_{rs,t}, \quad k_{r,st} = \mu_{r,st}, \quad k_{r,s,t} = \mu_{r,s,t},$$

$$k_{rs,tu} = \mu_{rs,tu} - \mu_{rs}\mu_{tu}, \quad k_{r,s,t} = \mu_{r,s,t}, \quad k_{r,s,t,u} = \mu_{r,s,t,u} - \sum_{(3)} \mu_{r,s}\mu_{t,u},$$

$$k_{r,s,tu} = \mu_{r,s,tu} - \mu_{r,s}\mu_{tu}, \quad k_{rs,t,u} = \mu_{rs,t,u} - \mu_{rs}\mu_{t,u},$$

$$k_{r,st,u} = \mu_{r,st,u} - \mu_{r,u}\mu_{st}, \quad k_{r,stu} = \mu_{r,stu} \quad e \quad k_{rst,u} = \mu_{rst,u},$$

em que $\sum_{(k)}$ representa o somatório sobre todas as k combinações de índices.

1.5.4 Relações de Bartlett

Veremos nesta subseção as demonstrações de algumas Identidades de Bartlett para cálculos dos cumulantes a partir dos momentos. As derivadas dos cumulantes são representadas com notação: $k_{rs}^{(t)} = \partial k_{rs}/\partial\theta_t$, $k_{rs}^{(tu)} = \partial^2 k_{rs}/\partial\theta_t\partial\theta_u$, $k_{rst}^{(u)} = \partial k_{rst}/\partial\theta_u$, etc.

A idéia central na dedução das identidades de Bartlett é a validade em problemas regulares da fórmula

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E[T(Y)] = \int T(Y)\frac{\partial}{\partial\theta}f(y;\theta)dy \tag{1.2}$$

para qualquer estatística $T(Y)$, isto é, pode-se inverter a ordem das operações de diferenciação em relação a θ e integração com respeito a y. As identidades de Bartlett são obtidas expressando a equação (1.2) em termos de momentos e diferenciando-a sucessivamente com relação às componentes de θ. Da definição da função escore tem-se $U_r = L_r/L$, onde $L_r = \partial L/\partial\theta_r$. Diferenciando $\int L dy = 1$ em relação a θ_r vem $\int L_r dy = 0$,temos ainda $\int U_r L dy = 0$ e, então, $k_r = E(U_r) = 0$. Diferenciando a última integral em relação a θ_s,$\int(U_{rs}L + U_r L_s)dy = 0$, encontra-se $\int(U_{rs}L + U_r U_s L)dy = 0$, ou seja, $k_{rs} + k_{r,s} = 0$. Diferenciando a integral $\int(U_{rs}L + U_r U_s L)dy = 0$ em relação a θ_t, encontramos $\int(U_{rst}L + U_{rs}L_t + U_{rt}U_s L + U_r U_{st} L + U_r U_s L_t)dy = 0$, que substituindo L_t por $U_t L$ temos $\int(U_{rst}L + U_{rs}U_t L + U_{rt}U_s L + U_r U_{st} L + U_r U_s U_t L)dy = 0$, ou seja, $k_{rst} + \sum_{(3)} k_{rs,t} + k_{r,s,t} = 0$.

Outras identidades são deduzidas de forma análoga. Temos

$$
\begin{aligned}
&k_{r,st} + k_{rst} - k_{st}^{(r)} = 0;\\
&k_{r,s,t} - 2k_{rst} + \sum_{(3)} k_{rs}^{(t)} = 0;\\
&k_{r,s,t}^{(u)} = k_{rst,u};\\
&k_{r,stu} + k_{rstu} - k_{stu}^{(r)} = 0;\\
&k_{rstu} + \sum_{(4)} k_{r,stu} + \sum_{(3)} k_{rs,tu} + \sum_{(6)} k_{r,s,tu} + k_{r,s,t,u} = 0;\\
&k_{r,s,t,u} = -3k_{rstu} + 2\sum_{(4)} k_{rst}^{(u)} + \sum_{(6)} k_{rs}^{(tu)} + \sum_{(3)} k_{rs,tu};\\
&k_{r,s,tu} = k_{rstu} - 2k_{rtu}^{(s)} + k_{tu}^{(rs)} - k_{rs,tu};\ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Os momentos e cumulantes acima não são independentes, tendo em vista que os cumulantes são calculados a partir desses momentos, porém satisfazem certas equações que facilitam seus cálculos. Estas equações, que representam condições de regularidade, são denominadas de identidades de Bartlett. As mais importantes são $k_r = 0$ e $k_{rs} + k_{r,s} = 0$. Os cumulantes $k's$ referem-se a um total sobre a amostra e, em geral, são de ordem $O(n^{-1})$[1]. Ainda, $-k^{rs} = k^{r,s}$ representa o elemento (r, s) da inversa da matriz de informação esperada $K(\theta)^{-1}$.

A grande vantagem das identidades de Bartlett é facilitar a obtenção dos cumulantes $k's$, já que sob determinada parametrização pode conduzir a um cálculo simples de alguns cumulantes, sendo os demais feitos indiretamente através destas identidades. Esses cumulantes têm grande aplicabilidade no cálculo de correções de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças que será visto adiante.

1.6 Álgebra matricial

Utilizaremos a notação matricial, além das operações e algumas propriedades das matrizes planas, para representar de uma forma elegante e simplificada

[1]Se $\{a_n\}_n \geq 1$ e $\{b_n\}_n \geq 1$ são duas sequências de números reais, dizemos que a_n é de ordem menor que b_n e escrevemos $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dizemos que a_n é de ordem no máximo igual a b_n, denotado por $a_n = O(b_n)$, se existe um número real $M > 0$ tal que $|\frac{a_n}{b_n}| \leq M$. Isto é, a razão $|\frac{a_n}{b_n}|$ é limitada. Observamos que se $a_n = o(b_n)$, então $a_n = O(b_n)$ e que quando $b_n \to 0$ a ordem fornece noção de taxa de correspondência de a_n para zero

as expressões que serão calculadas mais adiante. As operações que serão utilizadas são: adição, subtração, multiplicação e inversas de matrizes, também serão ultilizadas algumas definições, como traço e transpostas, e algumas propriedades envolvendo essas definições e as operações. Utilizaremos também a fórmula para o cálculo da matriz inversa por partição de uma matriz não-singular.

1.7 Suporte computacional

Para a elaboração do texto desta dissertação utilizamos o sistema de tipografia (Plain) LATEX. A opção por esta linguagem fundamenta-se principalmente em dois pontos: flexibilidade e qualidade da apresentação. A versão mais atual do LATEX para a plataforma Windows pode ser obtida gratuitamente em **http://www.miktex.org.** Para maiores detalhes, ver Knuth (1986).

Os gráficos apresentados foram produzidos utilizando o ambiente de programação R em sua versão 2.4.1 para o sistema operacional Windows. Esta linguagem foi criada por Ross Ihaka e Robert Gentleman na Universidade de Auckland com o objetivo de produzir um ambiente de programação parecido com o S. O R se encontra disponível gratuitamente em **http:/ www.r-project.org**. Para maiores detalhes, ver Ihaka e Gentleman (1996).

Todas as simulações apresentadas na disseração foram desenvolvidas a partir de programas construídos usando a linguagem de programação matricial Ox em sua versão 4.02 para sistema operacional Windows. Esta linguagem de programação foi criada por Jurgen Doornik em 1994 na Universidade de Oxford, Inglaterra. Esta é uma linguagem bastante flexível, tendo sido desenvolvida com base na linguagem de programação C. Ox é distribuída gratuitamente para uso acadêmico e se encontra disponível em http://www.doornik.com. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontradas em Doornik (2001).

Capítulo 2

Modelo de regressão não-linear usando distribuição simétrica

2.1 Introdução

Em nosso trabalho, nos concentramos na família de distribuições simétricas com suporte na reta real. Esta família forma uma classe geral de distribuições com a mesma simetria que a distribuição normal padrão. As distribuições t-Student, Cauchy, $t-$Student generalizada, Kotz, Kotz generalizada, Exponencial potência, Logística tipos I e II, e generalizações e extenções de algumas distribuições simétricas, entre outras, pertencente a esta classe como veremos a seguir.

A classe de distribuições simétricas tem recebido crescente atenção na literatura estatística nos últimos anos pois ela assume para os erros, distribuições com caudas mais pesadas do que a normal, afim de reduzir a influência de pontos aberrantes. Uma revisão de diferentes áreas em que distribuições simétricas são aplicadas pode ser encontrada em Chmielewski (1981), Fang, Kotz e Ng(1990), Fang e Zhang (1990), Fang e Anderson (1990) e Gupta e Varga, (1993). Nessa linha podemos citar Lange, Little e Taylor (1989), que propõem o modelo baseado na suposição de erros t-Student enquanto Little (1988) e Yamaguchi (1990) utilizam a distribuição normal contaminada. Em ambos os modelos incorporam-se parâmetros adicionais, os quais permitem ajustar a curtose da distribuição dos dados. No caso da t-Student, os graus de liberdade são usados para controlar a curtose. Taylor (1992) propõe o ajuste de um modelo de regressão linear supondo erros distribuídos como exponencial potência com um parâmetro extra de forma. Arellano-Valle (1994) apresenta vários resultados sobre regressão usando a distribuição t-Student. Ferrari e Uribe-Opazo(2001) estendem esses resultados para modelos de regressão lineares simétricos. Cordeiro, Ferrari, Uribe-Opazo e Vasconcellos (2000) obtiveram a correção do viés do estimador de máxima verossimilhança na classe de modelos não-lineares simétricos. Cordeiro (2004) desenvolveu correção de Bartlett para os modelos de regressão não-lineares simétricos, generalizando assim os resultados de Ferrari e Uribe-Opazo (2001). Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2009) obtiveram a correção de máxima verossimilhança em modelos não-lineares heteroscedásticos. Cordeiro, Cysneiros e Cysneiros (2009) obtiveram a correção de viés de estimadores de máxima verossimilhança em modelos não-lineares heteroscedásticos.

Neste capítulo, apresentamos a classe de modelos de regressão não-lineares simétricos e testes de hipóteses são apresentados: da razão de verossimilhança. Na Subseção 2.2, apresentamos a definição, propriedades destes modelos e características de algumas distribuições simétricas. Posteriormente, na Subseção 2.3, apresentamos o método de estimação dos parâmetros desconhecidos. Na Subseção 2.4, apresentamos os testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças supondo que os vetores de parâmetros β e γ desconhecidos.

2.2 Definição

Dizemos que a variável aleatória Y tem distribuição simétrica, com suporte em $\mathbb{R}$, com parâmetros de locação $\mu \in \mathbb{R}$ e de escala $\phi > 0$, se sua função densidade é da forma

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} g\left(\left(\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}}\right)^2\right), \quad y_l \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

para alguma função $g(\cdot)$ denominada função geradora de densidade, com $g(u) > 0$, para $u > 0$ e $\int_0^\infty u^{-1/2} g(u) du = 1$. Essa condição é necessária para que $f(y; \mu, \phi)$ seja uma função densidade de probabilidade. Denotamos $Y_l \sim S(\mu_l, \phi_l)$ e denominamos Y_l de variável aleatória simétrica. As distribuições mais comuns encontradas na literatura pertencentes a esta família de distribuições não-lineares simétricas são: As distribuições normal, t-Student, Cauchy, t−Student generalizada, Kotz, Kotz generalizada, Exponencial potência, Logística tipos I e II, Laplace, e generalizações e extenções de algumas distribuições simétricas, entre outras, pertencente a esta classe.

Vale ressaltar que algumas propriedades da distribuição normal podem ser estendidas para a classe simétrica de distribuições. Podemos ver que, se $Y_l \sim S(\mu_l, \phi_l)$, então a sua função característica tem a forma

$$\psi_y(t) = e^{it\mu_l}\varphi(t^2\phi_l), \quad t \in \mathbb{R};$$

para alguma função φ, com $\varphi(u) \in \mathbb{R}$, para $u > 0$. Quando existem, $E(Y_i) = \mu_i$ e $Var(Y_i) = \xi\phi$, em que $\xi > 0$ é uma constante dada por $\xi = -2\varphi'(0)$, com $\varphi'(0) = \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0}$ e que não depende dos parâmetros μ e ϕ (Fang, Kotz e Ng, 1990, pg.43). Kelker (1970) nota que, se $u^{\frac{1}{2}(k+1)}g(u)$ é integrável, então o k-ésimo momento de Y existe. Temos também, que se $Y \sim S(\mu, \phi)$ então $a + bY \sim S(a + b\mu, b^2\phi)$, em que a e $b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, ou seja, a distribuição de qualquer transformação linear de uma variável aleatória com distribuição simétrica é também simétrica. Como exemplo, se $Y \sim S(\mu, \phi)$, então $Z = \frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\phi}} \sim S(0, 1)$ com função densidade $f(z) = f(z; 0, 1) = g(z^2), z \in \mathbb{R}$; e chamaremos Z de simétrica padrão.

Considerando o caso em que $Z \sim S(0, 1)$ e assumindo que seus momentos existem, Berkane e Bentler (1986) mostram que a função característica de z pode ser expandida como

$$\psi_z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i^k \mu'_k \frac{t^k}{k!},$$

em que $\mu'_k = E(y^k) = i^{-k}\psi_z^{(k)}(0)$, sendo que $\psi_z^{(k)}(0)$ é a k-ésima derivada de $\psi_z(t)$ avaliada em $t = 0$. Então,

$$\mu'_k = \begin{cases} 0, & \text{para } k \text{ ímpar} \\ \dfrac{(2m)!}{2^m m!}(\mu'_2)^m(k(m)+1), & \text{para } k = 2m, \quad m = 1, 2, \end{cases}$$

em que

$$k(m) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{(\varphi^{(1)}(0))^m} - 1$$

sendo $\varphi^{(r)}(0)$ a r-ésima derivada da função φ avaliada em zero. Os coeficientes $k(m), m = 1, 2, \ldots$, são conhecidos como parâmetros de momentos e generalizam o coeficiente de curtose $Cc = 3(k(2)+1)$ de uma distribuição $S(\mu, \phi)$ (Muirhead, 1982). Cambanis, Huang e Simons (1981) observaram que a família de distribuições simétricas coincide com a classe de distribuições elípticas univariadas. A partir dos trabalhos de Kelker (1970) vários artigos foram publicados sobre distribuições elípticas univariadas e multivariadas. Podemos citar alguns trabalhos que discutem propriedades dessas distribuições: Berkane e Bertler (1986), Muirhead (1980, 1982), Rao (1990), Cambanis, Huang e Simons (1981) e Anderson e Fang (1987). A classe de distribuições simétricas tem recebido crescente atenção na literatura estatística nos últimos anos, ver por exemplo, os livros de Fang, Kotz e Ng (1990), Fang e Anderson (1990), Fang e Zhang (1990).

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas, tais que $Y_l \sim S(\mu_l, \phi_l)$, para $l = 1, 2, \ldots n$. Assumimos que cada Y_l tem função densidade na forma dada por (2.1) em que o parâmetro de escala ϕ_l não é necessariamente comum para todas as variáveis, e o parâmetro de locação μ_l não é necessariamente igual à média de Y_i, por exemplo podemos citar a distribuição Cauchy. Considere a estrutura de regressão não-linear que relaciona o parâmetro de locação μ_l com as variáveis x_l de interesse, o parâmetro de escala ϕ_l com as variáveis τ_l e $Q_{(l)}$ em que

$$\mu_l = f(x_l; \beta) \tag{2.2}$$

$$\phi_l = h(\tau_l) \tag{2.3}$$

$$\tau_l = Q_{(l)}^\top \gamma \tag{2.4}$$

respectivamente, em que $x_l = (x_{l1}, \ldots, x_{lm})^\top$ é um vetor de valores conhecidos de variáveis explicativas associadas à l-ésima observação e, $Q_{(l)} = (Q_{l1}, \ldots, Q_{lq})^\top$ é um vetor de valores conhecidos das covariadas associadas à l-ésima observação, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$ $p \times 1$ e $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)^\top$ $q \times 1$ de parâmetros desconhecidos a serem estimados, tais que $\beta \in \Omega_\beta \subset \mathbb{R}^p$ e $\gamma \in \Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^q$, $f(\cdot;\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções, possivelmente não-lineares no segundo argumento e no argumento respectivamente, contínua, diferenciável com respeito aos componentes de β e de γ, tais que as matrizes $n \times p$ de derivadas $\tilde{X} = \partial\mu/\partial\beta^\top = [\partial\mu_l/\partial\beta_j]_{nxp}$ com $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top$ tenha posto p para todo β e $n \times q$ de derivadas $\tilde{Q} = \partial\tau/\partial\gamma^\top = [\partial\tau_l/\partial\gamma_j]_{nxq}$ com $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^\top$ tenha posto q para todo γ. As matrizes $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Q}$ tem elementos que são em geral, respectivamente funções do vetor de parâmetros β e funções do vetor de parâmetros γ desconhecidos.

O modelo de regressão não-linear simétrico heteroscedástico é, então, definido por (2.1) a (2.4). Esta classe de modelos de regressão estende a classe dos modelos não-lineares em duas direções. Primeiro, inclui importantes distribuições não-normais e, segundo, permite, uma estrutura possivelmente não-linear no parâmetro de locação μ e no parâmetro de escala ϕ. Expressando a componente sistemática na forma de uma função, ou seja $\mu_l = f(x_l; \beta)$ e, $\phi = h(Q_{(l)}^{\top}\gamma)$ temos um modelo de regressão não-linear simétrico.

A seguir, descrevemos algumas distribuições especiais de (2.1), extenções e generalizações, que são de grande importância para aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento: ver Fang, Kotz e Ng (1990).

2.2.1 Distribuição Normal

A normal é a distribuição pertencente à classe simétrica mais utilizada, devido a todo desenvolvimento teórico e aplicado estabelecido no decorrer dos anos. Os primeiros trabalhos consideram a distribuição somente como uma aproximação conveniente para a distribuição binomial. No ínicio do século XIX, o reconhecimento da sua importância teórica foi propagado por Laplace e por Gauss. A distribuição normal possui várias propriedades que permitem caracterizá-la dentro da classe das distribuições simétricas nas chamadas distribuições normais compostas. Alguns resultados nesse sentido podem ser vistos em Muirhead (1982) e Devlin, Gnanadesikan e Kettenring (1976). Se $Y \sim S(\mu, \phi)$ e a função geradora de densidade $g(\cdot)$ é da forma

$$g(u) = \frac{1}{c(0)} \exp\left\{\frac{-u}{2}\right\}; u > 0 \quad e \quad c(0) = \sqrt{2\pi},$$

então Y tem distribuição normal denotada por $Y \sim N(\mu, \phi)$, e sua função característica é dada por

$$\psi_y(t) = e^{itu} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\phi\right\}, t \in \mathbb{R} \quad e$$

sua função densidade é dada por

$$\pi(y; \mu, \phi) = \frac{1}{c(0)\sqrt{\phi}} \exp\left\{\frac{-(\frac{y-\mu}{\sqrt{\phi}})^2}{2}\right\} e \quad c(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Se $Y \sim N(\mu, \phi)$, então $E(Y) = \mu$, $Var(Y) = \phi\frac{c(2)}{c(0)} = \phi$, e os momentos centrais de ordem r são

$$E\{(Y-\mu)^r\} = \begin{cases} \phi^{r/2}\dfrac{c(r)}{c(0)} = 0, & r \text{ ímpar} \\ \phi^{r/2}\dfrac{c(r)}{c(0)} = \phi^{r/2}\dfrac{r!}{2^{r/2}(r/2)!}, & r \text{ par}, \end{cases}$$

em que $c(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$. Considere a seguinte expressão $Cg(r) = \frac{E\{(Y-\mu)^r\}}{E\{(Y-\mu)^2\}^{R/2}}$, ou ainda, podemos escrever $Cg(r) = \frac{C(r)C(0)^{r/2}}{C(0)C(2)^{r/2}}$, assim para r=4, temos o coeficiente de curtose dada pela expressão $Cc = Cg(4) = \frac{E\{(Y-\mu)^4\}}{E\{(Y-\mu)^2\}^2}$ e portanto, o coeficiente de curtose é $Cc = Cg(4) = \frac{C(4)C(0)}{C(2)C(2)} = 3$. Já para r=3, temos o coeficiente de assimetria dada pela expressão $Ca = Cg(3) = \frac{E\{(Y-\mu)^3\}}{E\{(Y-\mu)^2\}^{3/2}}$, e portanto $Ca = Cg(3) = 0$.

2.2.2 Distribuição Logística I

Dizemos que a variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ tem distribuição logística I se a função geradora de densidade $g(\cdot)$ tem a forma

$$g(u) = \frac{1}{c(0,2,1)}\frac{e^{-u}}{[1+e^{-u}]^2}; \quad u > 0,$$

em que $c(0,2,1)$ é a constante normalizadora da distribuição, obtida da relação $\int_0^{\infty} u^{1/2} g(u) du = 1$; logo $c(0,2,1) \approx 0,673718238$ e é denotada por $Y_l \sim LI(\mu_l, \phi_l, 2, 1)$. E sua função densidade é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, 2, 1) = \frac{1}{C(0,2,1)\sqrt{\phi_l}}\frac{\exp(-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2)}{[1+\exp(-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2)]^2}, \quad e$$

$$C(0,2,1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2)}{[1+\exp(-x^2)]^2} dx.$$

Temos que $E(Y_l) = \mu_l$, $Var(Y_l) \approx 0.79569\phi_l$, o coeficiente de curtose $Cc \approx 2,385165$ e o coeficiente de assimetria $Ca = 0$. Note que o coeficiente de curtose desta distribuição é menor do que o coeficiente de curtose da distribuição normal. Na Figura 2.1, temos os gráficos das densidades normal e logística I. Podemos observar a forma achatada no patamar da distribuição logística I que difere da distribuição normal.

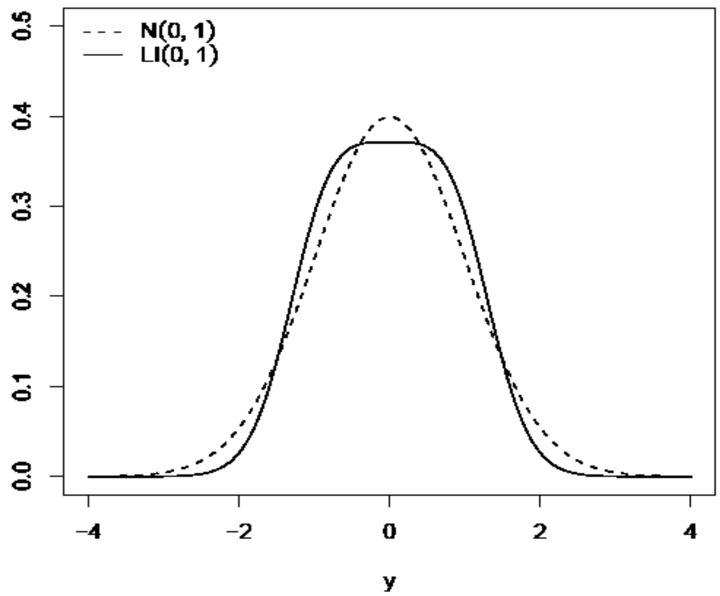

Figura 2.1: Gráficos de funções densidade logística I e normal

2.2.3 Distribuição Logística II

Dizemos que a variável aleatória $Y_l \sim S(\mu_l, \phi_l, 2, 2)$ tem distribuição logística II se a função geradora de densidade $g(\cdot)$ tem a forma

$$g(u) = \frac{1}{c(0,2,2)} \frac{\exp(-u^{1/2})}{[1+\exp(-u^{1/2})]^2}, \quad u > 0,$$

e a denotamos por $Y_l \sim LII(\mu_l, \phi_l, 2, 2)$. A função característica é dada por

$$\psi_y(t) = \frac{2(e^{it\mu}\pi\phi t)}{e^{\pi\phi t} - e^{-\pi\phi t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e sua função densidade é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, 2, 2) = \frac{1}{c(0,2,2)\sqrt{\phi_l}} \frac{\exp(-\{(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\}^{1/2})}{[1+\exp(-\{(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\}^{1/2})]^2}, \quad u > 0,$$

$$C(0,2,2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\{x^2\}^{1/2})}{[1+\exp(-\{x^2\}^{1/2})]^2} dx.$$

Temos que $E(Y_l) = \mu_l$, $Var(Y_l) = \pi^2\phi_l/3$, o coeficiente de assimetria é Ca = 0 e o coeficiente de curtose é $Cc = 4,2$, que é maior que as curtoses das distribuições normal e logística I. Adicionalmente, a mediana e a moda são iguais à média.

Uma relação muito útil para gerar amostras aleatórias é dada por Has-tings e Peacock (1975). Seja $u \sim U(0,1)$ e $Y = \mu + \sqrt{\phi}\log(\frac{u}{1-u})$, então $Y \sim LII(\mu, \phi)$.

Esta distribuição foi utilizada por Verhulst (1838, 1845) para o ajuste de curvas de crescimento demográfico. Pearl e Reed (1920, 1924), Pearl, Reed e Kish (1940) e Schultz (1930) aplicaram o modelo logístico como modelo de crescimento em populações humanas e em alguns organismos biológicos. Para aplicação em análise de sobrevivência, ver Plackett (1959) e para aplicação em modelagem de distribuição de renda, ver Fisk (1961).

Na Figura 2.2 observamos a forma da distribuição logística II e constatamos que ela tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal.

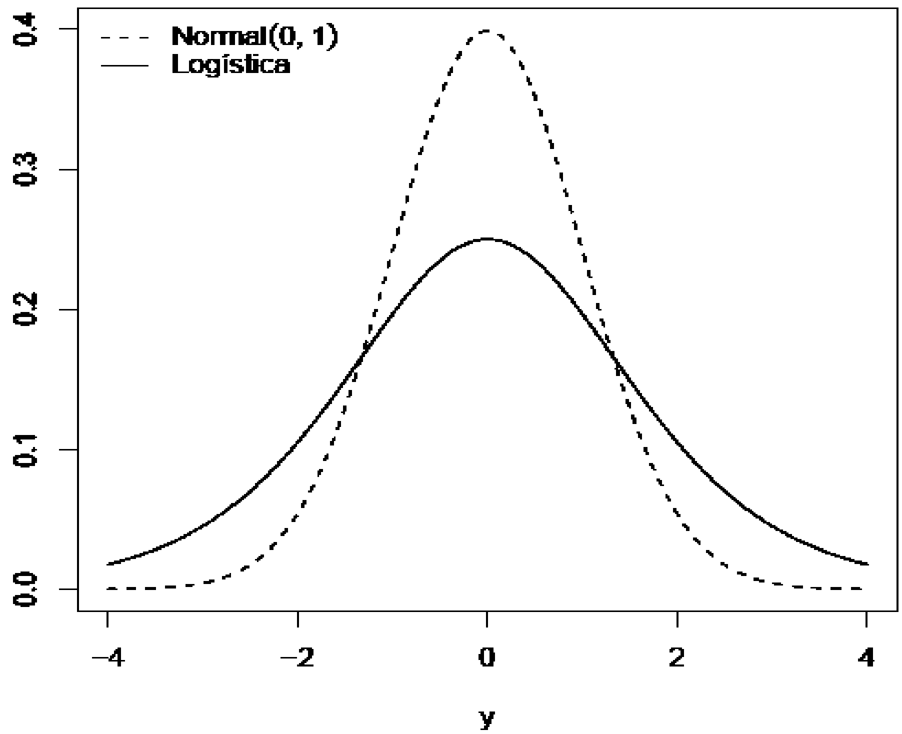

Figura 2.2: Gráficos de funções densidade logística II e normal

2.2.4 Distribuição Cauchy

Dizemos que a variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ tem distribuição de Cauchy se sua função geradora da densidade $g(\cdot)$ tem a forma

$$g(u) = \frac{1}{\pi}(1+u)^{-1}, \quad u > 0.$$

Essa distribuição também é conhecida como distribuição de Pearson tipo VII. Nós a denotamos por $Y \sim C(\mu, \phi)$. A sua função característica é da forma

$$\psi_y(t) = \exp\{it\mu - |t|\sqrt{\phi}\}; t \in \mathbb{R}$$

A distribuição é simétrica em torno de μ e os pontos de inflexão da função densidade são $\mu \pm \sqrt{3\phi}$, os valores da função de distribuição acumulada nos pontos de inflexão são $0,273$ e $0,723$, que podem ser comparados com os correspondentes valores, $0,159$ e $0,841$, da distribuição normal. Em particular, a distribuição não tem momentos finitos e, portanto, não tem valor esperado nem desvio-padrão. Ela tem mediana e moda iguais a μ e os quartis superior e inferior são $\mu \pm \sqrt{\phi}$. Note que a distribuição Cauchy possui caudas mais pesadas do que a distribuição normal; ver Figura 2.3.

Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes em que cada Y_l possui distribuição Cauchy, então $S = \sum_{l=1}^n Y_l$ tem distribuição de Cauchy com parâmetros de locação $\mu = \sum_{l=1}^n \mu_l$ e de escala $\phi = \sum_{l=1}^n a_l^2\phi_l$. Um resultado interessante é que para $a_l \neq 0$, $\sum_{l=1}^n a_l Y_l$ tem distribuição de Cauchy com parâmetros de locação $\sum_{l=1}^n a_l\mu_l$ e de escala $\sum_{l=1}^n a_l^2\phi_l$. Em particular, se os Y_l são i.i.d (independentes identicamente distribuídos) com $Y_l \sim C(\mu, \phi)$, então $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n Y_l \sim C(\mu, \phi)$. Quando os valores dos parâmetros de locação e de escala são iguais a 0 e 1, respectivamente, a distribuição Cauchy passa a ser chamada como Cauchy padrão ou t-Student central com um grau de liberdade. Temos, ainda, a relação $Y = \mu + \sqrt{\phi}N_1/N_2$ em que $N_i \sim N(0,1)$ para $i = 1, 2$, sendo N_1 e N_2 independentes, que pode ser usada para definir um gerador de números aleatórios para a distribuição de Cauchy com parâmetros (μ, ϕ). E sua função densidade é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, 1) = \frac{1}{C(0,1,1)\sqrt{\phi_l}}[1 + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-1}, \quad em \quad que \quad C(0,1,1) = \pi.$$

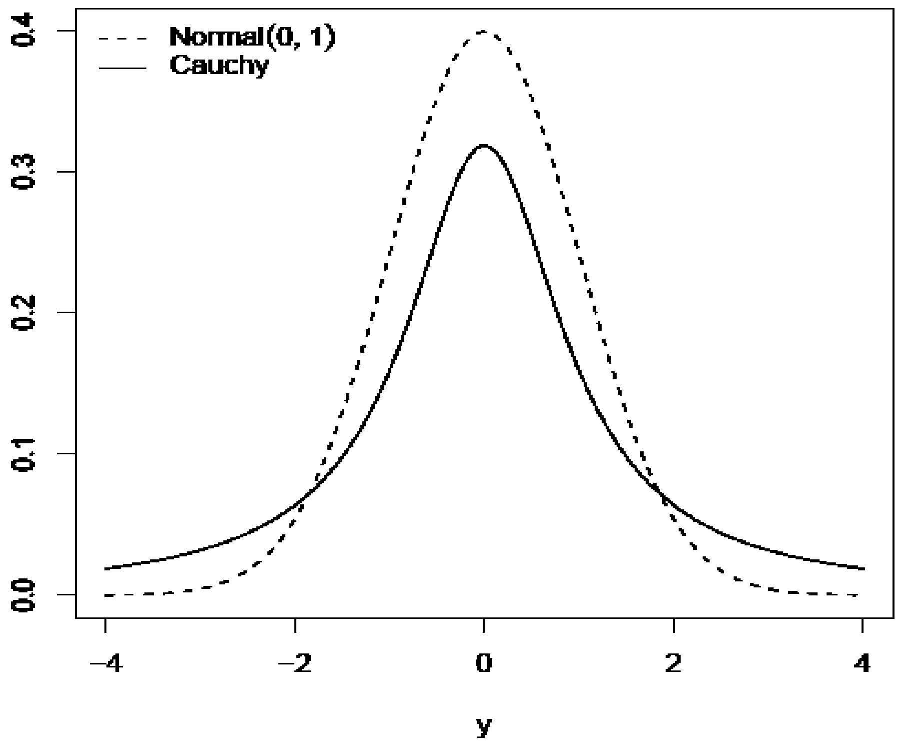

Figura 2.3: Gráficos de funções densidade cauchy e normal

2.2.5 Distribuição t-Student

A variável aleatória $y_l \sim t(\mu_l, \phi_l, \nu)$ tem distribuição t-Student com ν graus de liberdade se sua função geradora de densidade $g(\cdot)$ é dada por

$$g(u) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)}[\nu + u]^{-(\nu+1)/2}, \quad u > 0 \quad e \quad \nu > 0,$$

em que $B(\cdot, \cdot)$ é a função Beta; denotamos por $y_l \sim t(\mu_l, \phi_l, \nu)$. Podemos encontrar a função característica definida em Fang, Kotz e Ng (1990). E sua função densidade é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, \nu) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)\sqrt{\phi_l}}[\nu + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 0,$$

A distribuição t é simétrica em torno de μ. Quando $\nu \longrightarrow \infty$, a distribuição de y tende para a distribuição normal com média μ e variância ϕ. Quando $\nu = 1$, a distribuição reduz-se à distribuição Cauchy com parâmetros μ e ϕ. A distribuição t com ν graus de liberdade foi originada através da razão $t_\nu = U(\frac{\chi^2_\nu}{\nu})^{-1/2}$, em que U é a variável aleatória normal padrão e χ^2_ν é uma variável aleatória qui-quadrado com ν graus de liberdade, sendo ambas independentes.

Todos os momentos ordinários são da forma

$$E\{(Y_l - \mu_l)^r\} = \begin{cases} \dfrac{\nu^{r/2}\Gamma((r+1)/2)\Gamma((\nu-r)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}\phi_l = 0, & r \text{ ímpar} \\ \dfrac{\nu^{r/2}\Gamma((r+1)/2)\Gamma((\nu-r)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}\phi_l, & r \text{ par} \end{cases}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama. Assim, $E(Y_l) = \mu_l$, se $\nu > 1$ e $Var(Y_l) = \phi_l\nu/(\nu-2)$, se $\nu > 2$. Se $\nu \leq r$ e r é par, o momento de ordem r é infinito. O desvio médio é dado por

$$E[|Y|] = \frac{\nu^{1/2}\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}.$$

O coeficiente de assimetria é $Ca = 0$ e o coeficiente de curtose é $Cc = 3+6/(\nu-4)$ para $\nu > 4$, sendo este coeficiente maior do que o coeficiente de curtose da distribuição normal. A função densidade de Y tem pontos de inflexão em $y = \pm\sqrt{\nu/(\nu+2)}$.

A distribuição t-Student é utilizada para modelar o comportamento de dados que provêm de uma distribuição com caudas mais pesadas que a normal, permitindo reduzir a influência de observações aberrantes. Lange, Little e Taylor (1989) propõem o modelo t-Student como uma extensão paramétrica robusta do modelo normal, já que a t-Student é uma distribuição que permite ajustar a curtose da distribuição dos dados através do parâmetro ν. Na Figura 2.4, observamos a forma da distribuição t-Student para alguns valores de ν.

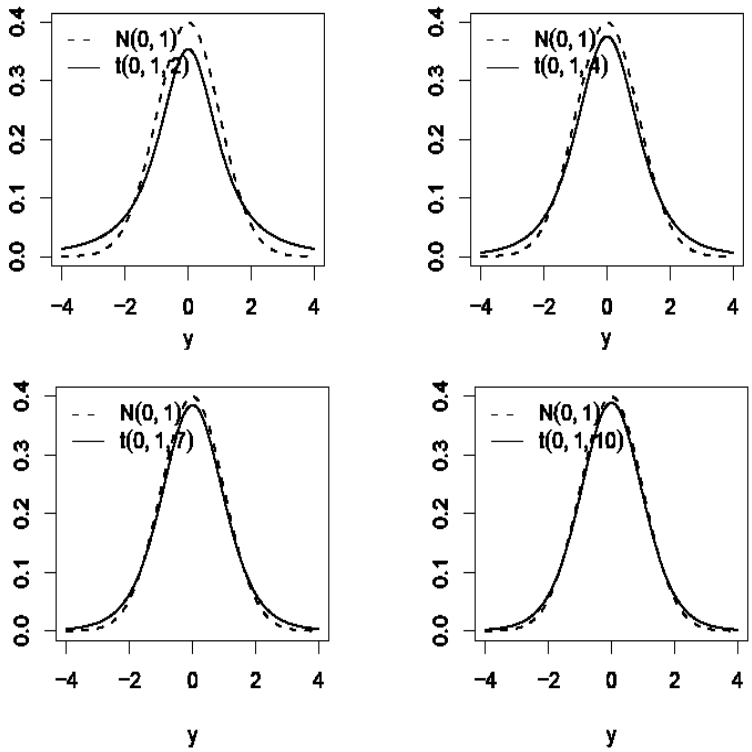

Figura 2.4: Gráficos de funções densidade t−Student e normal

2.2.6 Distribuição t-Student generalizada

Se uma variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ e a função geradora de densidade $g(\cdot)$ tem a forma

$$g(u) = \frac{s^{r/2}}{B(1/2, r/2)}(s+u)^{-(r+1)/2}, \quad u > 0 \quad e \quad s, r > 0,$$

então, Y possui uma distribuição t-Student generalizada, o que denotamos por $Y \sim tG(\mu, \phi, s, r)$.

Na Figura 2.5, observamos a forma da t-Student generalizada para vários valores de r, s. Quando $r = s = \nu$, a distribuição t-Student generalizada coincide com a distribuição t-Student com parâmetros μ, ϕ e r graus de liberdade. Quando $r = s = 1$, temos a distribuição Cauchy.

Supondo que $(Y|v = \nu) \sim N(\mu, \nu\phi)$ em que $v \sim GI(r/2, s/2)$, independentes com $s > 0$ e $r > 0$ podendo ser não inteiros. Temos as seguintes propriedades: $Y \sim tG(\mu, \phi, s, r)$; $E(Y) = \mu$, para $r > 1$, $Var(Y) = (s/(r-2))\phi$, para $r > 2$, e o coeficiente de curtose é $Cc = 3 + 6/(r-4)$, para $r > 4$, que é maior que o coeficiente de curtose da distribuição normal, e não depende do valor do parâmetro s e o coeficiente de assimetria é $Ca = 0$.

Se definimos $y = v^{-1/2}z$, com z e v variáveis aleatórias independentes, em

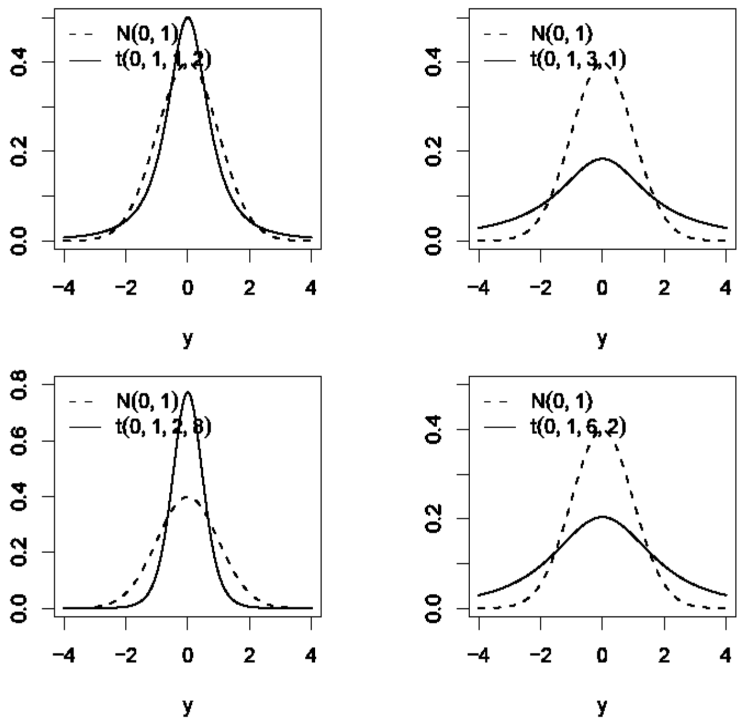

Figura 2.5: Gráficos de funções densidade t−Student generalizada e normal

que $z \sim N(0,1)$ e $v \sim GI(r/2, s/2)$, então $y \sim tG(0,1,s,r)$. Esta propriedade é importante para gerar observações de uma distribuição t-Student genera-lizada.

2.2.7 Distribuição de Laplace

Se Y tem uma função densidade de uma distribuição de Laplace ou Exponencial dupla, então a função geradora de densidades $g(\cdot)$ é da forma

$$g(u) = \frac{1}{2}\exp\{-\sqrt{u}\}, \quad u > 0.$$

e escrevemos $Y \sim ED(\mu, \phi)$. Sua função característica tem a forma

$$\Psi_y(t) = \frac{e^{it\mu}}{1+t^2\phi}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A mediana, a moda e a média da variável y são iguais a μ, $Var(y) = 2\phi$ e o coeficiente de curtose é $Cc = 6$ e o coeficiente de assimetria é $Ca = 0$. Os quartis superior e inferior são $\mu \pm 0.534\sqrt{\phi}$. Esta distribuição surge a partir da diferença entre duas variáveis independentes com distribuição exponencial.

2.2.8 Distribuição Exponencial Potência

Se uma variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ e sua função geradora de densidade tem a forma distribuição exponencial potência é dada por

$$g(u) = C(k)\exp\{-u^{1/(1+k)}/2\}, -1 < k \leq 1, u > 0,$$

em que $C(k)^{-1} = \Gamma(1 + (1 + k)/2)2^{1+(1+k)/2}$, então Y possui uma distribuição exponencial potência e denotamos por $Y \sim EP(\mu, \phi, k)$. Temos ainda que $E[Y] = \mu$ e $Var(Y) = 2^{(1+k)}\{\Gamma(\frac{3(1+k)}{2})/\Gamma(\frac{1+k}{2})\}\phi$. Podemos ver o parâmetro k como uma medida de curtose, ou mesmo, como uma medida de não normalidade pois quando $k = 0$ temos a distribuição normal. Em particular, quando $k = 1$ temos a distribuição exponencial dupla. Se k tende a -1, a distribuição tende a uma uniforme no intervalo $(\mu - \sqrt{3\phi}, \mu + \sqrt{3\phi})$.

2.2.9 Distribuição de Kotz

Uma variável aleatória Y tem distribuição de Kotz se a função geradora de densidade $g(\cdot)$ tem a forma

$$g(u) = \frac{r^{(2N-1)/2}}{\Gamma((2N-1)/2)}u^{N-1}\exp(-ru), \quad r > 0, \quad N > 1, \quad u > 0.$$

e denotamos por $Y \sim k(\mu, \phi, N, r)$. Se Y tem distribuição de Kotz, então a média de Y é igual a μ e a variância é {(2n-1)/2 }. O coeficiente de curtose é dado por $\gamma_2 = (2n+1)/(2n-1)$ e os momentos centrais de ordem $2m$ são da forma

$$E[(y-\mu)^{2m}] = \frac{\Gamma((2m+2n-1)/2)}{r^m\Gamma((2n-1)/2)}\phi^m.$$

Quando $N = 1$, a distribuição de Kotz se reduz à distribuição normal de parâmetros μ e $\phi/(2r)$. Ainda se $N > 1$, adistribuição é bimodal com modas em $y = \mu \pm \sqrt{(N-1)/r\phi}$. Temos que $E(Y) = \mu$ e $Var(Y) = \{(2N-1)/(2r)\}\phi$. Além disto, a variável $Z^2 = (Y-\mu)^2/\phi$ tem distribuição $Gama((2N-1)/2, r)$. Em particular, se $N = 1$ e $r = 1/2$, então $Z^2 \sim \chi^2_1$.

2.2.10 Estatísticas de Algumas Distribuições Simétricas

A Tabela 2.1, a seguir, apresenta as variâncias e os coeficientes de curtose para algumas distribuições simétricas.

Tabela 2.1: Valores das variâncias e do coefiente de curtose para algumas distribuições simétricas.

Distribuição	variância	curtose
Normal	ϕ_l	3
t-Student	$\{\nu(\nu-2)\}\phi_l$	$3+6/(\nu-4)$
t-Student generalizada	$(s/(r-2))\phi_l$	$3+6/(r-4)$
Logística I	$0.79569\phi_l$	$2,385165$
Logística II	$\pi^2\phi_l/3$	$4,2$
Cauchy	não existe	não existe
Laplace	$2\phi_l$	6

2.3 Estimação por Máxima Verossimilhança

Considere n variáveis aleatórias independentes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, em que cada Y_l tem função densidade contínua na forma (2.1). Seja $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ uma amostra aleatória de tamanho n da família de distribuições simétricas, em que os y_l's são valores observados de cada Y_l. Seja $L(\theta)$, em que $\theta = (\beta^T, \gamma^T)^T$, a função de verossimilhança do modelo definido em (2.1) e (2.2), dados $y_1, \ldots, y_n$. Temos

$$L(y;\theta) = \prod_{l=1}^{n} \pi(y_l; \mu_l, \phi_l)$$
$$L(y;\theta) = \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} g\left(\left(\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}}\right)^2\right).$$

Seja $\ell(\theta)$ o logaritmo da função de verossimilhança, definido como

$$\ell(y;\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^{n} \log g\left(\left(\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}}\right)^2\right)$$
$$\ell(y;\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^{n} \log g(z_l^2), \tag{2.5}$$

em que $t(z_l) = \log[g(z_l^2)]$, $z_l = \frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}}$, $\mu_l = f(x_l; \beta)$, $\phi_l = h(\tau_l)$ e $\tau_l = Q_{(l)}^T \gamma$.

Assumimos que $\ell(\theta)$ é regular com respeito às derivadas dos componentes de β e γ até a quarta ordem.

Para a obtenção de estimadores de máxima verossimilhança, bem como para a obtenção das estatísticas de teste e de suas respectivas correções de Bartlett será necessário obter as derivadas do logaritmo da função de verossimilhança com relação aos parâmetros desconhecidos e também alguns momentos destas derivadas. Assumimos, portanto, no que segue, tais derivadas e momentos existem.

Nós usaremos a notação proposta por Cordeiro e Paula (1989): $(r)_l = \partial\mu_l/\partial\beta_r$, $(rs)_l = \partial^2\mu_l/\partial\beta_r\partial\beta_s$, $(rs,t)_l = \partial^2\mu_l/\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\mu_l/\partial\beta_t$, etc, em relação aos parâmetros β e

$(R)_l = \partial\tau_l/\partial\gamma_R$, $(R,S)_l = \partial\tau_l/\partial\gamma_R\partial\tau_l/\partial\gamma_S$, $(R,S,T)_l = \partial\tau_l/\partial\gamma_R\partial\tau_l/\partial\gamma_S\partial\tau_l/\partial\gamma_T$, etc, para os parâmetros γ.

As primeiras derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dada em (2.5) são:

$U_r = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta_r} = -\sum_{l=1}^n [t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l]$, com r=1,. . . , p, para os $\beta's$

$U_R = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma_R} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n \frac{h'_l}{\phi_l}(R)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n t^{(1)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\phi_l}(R)_l$, com R=1,. . . , q, para os $\gamma's$ em que

$$t^{(m)}_{(z_l)} = \frac{\partial^{(m)} t(z_l)}{\partial z_l^{(m)}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad e \quad l = 1, \ldots, n.$$

Assumimos que esta derivada existe para todo $z_l \in \mathbb{R}$. Podemos escrever $t^{(1)}_{(z_l)}$ como $t^{(1)}_{(z_l)} = -z_l w_l$, em que

$$w_l = -\frac{2d \log g(z_l^2)}{dz_l}.$$

A tabela 2.2 apresenta os pesos w_l para algumas distribuições. A função

Tabela 2.2: Valor de ω para algumas distribuições simétricas.

Distribuição	ω
Normal	1
Cauchy	$2/(1+z^2)$
t-Student	$(\nu+1)/(\nu+z^2)$
t-Student generalizada	$(r+1)/(s+z^2)$
Logística I	$2(1-e^{-z^2})/(1+e^{-z^2})$
Logística II	$(e^{\|z\|}-1)/(\|z\|e^{\|z\|}+1)$

escore total de θ tem a forma $U(\theta) = (U^T_\beta(\theta), U^T_\gamma(\theta))^T$, tal que

$$U^T_\beta(\theta) = (\partial\ell(\theta)/\partial\beta_1, \partial\ell(\theta)/\partial\beta_2, \ldots, \partial\ell(\theta)/\partial\beta_p)^T$$

$$U^T_\gamma(\theta) = (\partial\ell(\theta)/\partial\gamma_1, \partial\ell(\theta)/\partial\gamma_2, \ldots, \partial\ell(\theta)/\partial\gamma_q)^T$$

com

$$U_\beta(\theta) = \widetilde{X}^T \Lambda_1 W (Y - \mu)$$

e

$$U_\gamma(\theta) = -\frac{1}{2}\tilde{\iota}^T \Lambda_3^{1/2} \iota - \frac{1}{2}\tilde{Q}^T \Lambda_4^{1/2} (Y - \mu)_d W (Y - \mu),$$

sendo $W = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ e $\tilde{X}$ como já definidos na Subseção 2.2 e as matrizes diagonais $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(1/\phi_1, \ldots, 1/\phi_n)$, $\Lambda_3 = \mathrm{diag}(h'^2_1/\phi_1^2, \ldots, h'^2_n/\phi_n^2)$, $\Lambda_4 = \mathrm{diag}(h'^2_1/\phi_1^3, \ldots, h'^2_n/\phi_n^3)$ e $\tilde{\iota}$ e ι representam a matriz de nxq de 1's e o vetor nx1 de 1's respectivamente. O estimador de máxima verossimilhança de θ é obtido da solução do sistema de equações dado por

$$\left.\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_R}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad r = 1, \ldots, p \quad \text{e} \quad R = 1, \ldots, q.$$

As equações dadas acima são não-lineares e não podem ser resolvidas explicitamente. Elas devem ser resolvidas iterativamente usando, por exemplo, o algoritmo de Newton-Raphson ou escore de Fisher, que envolvem, respectivamente, as matrizes de informação observada e esperada que definimos a seguir.

As segundas derivadas do logaritmo da função da verossimilhança têm as formas

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} = \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rs)_l,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \gamma_S} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\sqrt[3]{\phi_l^2}}(r,S)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{h'_l}{\sqrt[3]{\phi_l^2}}(r,S)_l,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \gamma_R \partial \beta_s} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\sqrt[3]{\phi_l^2}}(R,s)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{h'_l}{\sqrt[3]{\phi_l^2}}(R,s)_l,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \gamma_R \gamma_S} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h''_l \phi_l - h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l^2 \frac{h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l -$$
$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} z_l \frac{2h''_l \phi_l - 3h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l.$$

Assim, a matriz de informação total de Fisher para θ na classe dos modelos simétricos é dada por

$$K(\theta) = -\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\beta_r \partial\beta_s}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\beta_r \partial\gamma_S}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\gamma_R \partial\beta_s}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\gamma_R \partial\gamma_S}\right] \end{bmatrix},$$

em que

$$E\left[\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta_r\partial\beta_s}\right] = -E\left[\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta_r}\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta_s}\right] = -\delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}^T\Lambda_1\widetilde{X},$$
$$E\left[\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\gamma_R\partial\gamma_S}\right] = -E\left[\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma}\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma}\right] = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}^T\Lambda_3\widetilde{Q},$$
$$E\left[\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\beta_r\partial\gamma_S}\right] = E\left[\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\gamma_R\partial\theta_s}\right] = 0,$$

ou seja,

$$K(\theta) = -\begin{bmatrix} \delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}^T\Lambda_1\widetilde{X} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}^T\Lambda_3\widetilde{Q} \end{bmatrix},$$

em que usamos a notação

$$\delta_{(a,b,c,d,e)} = E\{t_{(z_l)}^{(1)a}t_{(z_l)}^{(2)b}t_{(z_l)}^{(3)c}t_{(z_l)}^{(4)d}z_l^e\}, \tag{2.6}$$

$$\alpha_{p_1,p_2,\ldots,p_k,q} = E\{t_{(z_l)}^{(p_1)}t_{(z_l)}^{(p_2)}\ldots t_{(z_l)}^{(p_k)}z_l^q\}, \tag{2.7}$$

$$\beta_{p_1,p_2,\ldots,p_k} = E\{t_{(z_l)}^{(p_1)}t_{(z_l)}^{(p_2)}\ldots t_{(z_l)}^{(p_k)}\}, \tag{2.8}$$

com $a, b, c, d, e = 0, 1, 2, 3, 4$, $t_{(z_l)}^{(m)} = \frac{\partial^m t(z_l)}{\partial z_l^m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $l = 1, 2, \ldots, n$ (no Apêndice H são dados os δ's necessários aos algoritmos para algumas distribuições).

O fato de que β e γ, são globalmente ortogonais (Cox e Reid, 1987), no sentido de que a matriz de informação K é bloco diagonal, implica que os estimadores de máxima verossimilhança de β e γ são assintoticamente não-correlacionados. Temos que

$$\widehat{\beta} \sim AN_p(\beta, K_{\beta,\beta}^{-1}), \quad \widehat{\gamma} \sim AN_q(\gamma, K_{\gamma,\gamma}^{-1})$$

e $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\gamma}$ são assintoticamente independentes.

É fácil ver, usando o algoritmo escore de Fisher definido na Seção 1.4, que a estimação de θ por máxima verossimilhança pode ser feita através do seguinte esquema iterativo

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = \hat{\beta}^{(m)} + \hat{K}^{\beta\beta(m)}\hat{U}_{\beta}(\theta)^{(m)} \quad e \quad \hat{\gamma}^{(m+1)} = \hat{\gamma}^{(m)} + \hat{K}^{\gamma\gamma(m)}\hat{U}_{\gamma}(\theta)^{(m)},$$

logo substituindo as expressões de $K^{\beta\beta}$, $K^{\gamma\gamma}$, $\hat{U}_{\beta}(\theta)$ e $\hat{U}_{\gamma}(\theta)$ nas equações acima temos que

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = \hat{\beta}^{(m)} + \delta^{-1}_{(0,1,0,0,0)}(\hat{\tilde{X}}^{(m)T}\hat{\Lambda}_1^{(m)}\hat{\tilde{X}}^{(m)})^{-1}\hat{\tilde{X}}^{(m)T}\hat{\Lambda}_1^{(m)}\hat{W}^{(m)}(Y-\hat{\mu}^{(m)}) \quad e$$

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{4}{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}(\hat{\tilde{Q}}^{(m)T}\hat{\Lambda}_3^{(m)}\hat{\tilde{Q}}^{(m)})^{-1}\{-\frac{1}{2}\tilde{\iota}^T\hat{\Lambda}_3^{1/2(m)}\iota$$
$$-\frac{1}{2}\hat{\tilde{Q}}^{(m)T}\hat{\Lambda}_4^{1/2(m)}(Y-\hat{\mu}^{(m)})_d\hat{W}^{(m)}(Y-\hat{\mu}^{(m)})\},$$

em que $W = diag(w_1, \ldots, w_n)$ com $w_l = -z_l^{-1}\frac{d\log g(z_l^2)}{dz_l}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $l = 1, \ldots, n$ e as matrizes diagonais $\Lambda_1 = diag(1/\phi_1, \ldots, 1/\phi_n)$,

$$\Lambda_3 = diag(h'^2_1/\phi_1^2, \ldots, h'^2_n/\phi_n^2), \quad e \quad \Lambda_4 = diag(h'^2_1/\phi_1^3, \ldots, h'^2_n/\phi_n^3).$$

Vale salientar que, quando existem outros parâmetros desconhecidos no modelo, tais como, graus de liberdade, é necessário obter a matriz de informação para todos os parâmetros desconhecidos e estimá-los. Outra alternativa, mais simples, é repetir o processo iterativo para um conjunto de valores para o(s) parâmetro(s) extra(s) e escolher aquele(s) que produz(em) o maior valor para a verossimilhança.

2.4 Teste da Razão de Verossimilhanças em Modelos Não-Lineares Simétricos Heteroscedásticos

2.4.1 Testes de hipóteses de interesse

Testes de hipóteses sobre os parâmetros com β e γ desconhecidos

Sejam as partições $\beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$ e $\gamma = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)^T$, sendo $\beta_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1})^T$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \ldots, \beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \ldots, \gamma_q)^T$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Para o modelo em (2.1 a 2.4), estamos interessados no teste de hipóteses $H_1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \quad \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores especificados de dimensões p_1 e q_1, respectivamente. Em particular podemos também testar a hipótese $H_1' : \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0$, $p_1 = p - 1$ e $q_1 = q - 1$. O caso $p_1 = 0$ torna possível o teste de hipótese $H_2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$. Supondo $p_1 = 0$ e $q_1 = q - 1$, temos em particular, um teste de hipótese $H_2' : \beta_1 = 0$. O caso $q_1 = 0$ torna possível o teste de hipótese $H_3 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$. Supondo $q_1 = 0$ e $p_1 = p - 1$, temos em particular, um teste de hipótese $H_3' : \gamma_1 = 0$. Observemos que as hipóteses H_2, H_3, H_1', H_2' e H_3', devem ser testadas contra a hipótese alternativa H definida anteriormente. O teste H_1' equivale a testar se as variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_n$ são identicamente distribuidos. Já o teste de H_2' equivale a verificar se $Y_1, \ldots, Y_n$ têm a mesma média, isto é, se $\mu_l = f(x_l; \beta)$ é constante para qualquer $l = 1, \ldots, n$. Finalmente, o teste H_3' se reduz ao teste de homoscedasticidade, ou seja, equivale testar se $Y_1, \ldots, Y_n$ têm a mesma variância.

2.4.2 Testes de hipóteses simultâneos sobre a média e o parâmetro de escala com β e γ desconhecidos

Nesta seção obtemos correções de Bartlett para estatística da razão de verossimilhança em testes de hipóteses simultâneos sobre a média e o parâmetro de escala, ou seja, sobre $(\beta^T, \gamma^T)^T$, nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos definidos em (2.1) a (2.4).

Consideremos as funções de ligação $f(x; \mu_l)$ e $h(\tau_l)$ definidas na Seção 2.1 e as partições $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$ para o vetor β e $\gamma^T = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)^T$ para o vetor γ, em que $\beta_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1})^T$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \ldots, \beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \ldots, \gamma_q)^T$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Essas decomposições induzem as correspondentes partições

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), \quad \tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2),$$

$$K_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} K_{\beta_1\beta_1} & K_{\beta_1\beta_2} \\ K_{\beta_2\beta_1} & K_{\beta_2\beta_2} \end{bmatrix} \quad e \quad K_{\gamma\gamma} = \begin{bmatrix} K_{\gamma_1\gamma_1} & K_{\gamma_1\gamma_2} \\ K_{\gamma_2\gamma_1} & K_{\gamma_2\gamma_2} \end{bmatrix},$$

em que $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{Q}_1$ e $\tilde{Q}_2$ são matrizes conhecidas de posto completo e dimensões nxp_1, $nx(p - p_1)$, nxq_1, $nx(q - q_1)$, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
K_{\beta_1\beta_1} &= \delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}_1^T\Lambda_1\widetilde{X}_1,\\
K_{\beta_2\beta_2} &= \delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}_2^T\Lambda_1\widetilde{X}_2,\\
K_{\beta_1\beta_2} &= \delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}_1^T\Lambda_1\widetilde{X}_2,\\
K_{\beta_2\beta_1} &= \delta_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{X}_2^T\Lambda_1\widetilde{X}_1,\\
K_{\gamma_1\gamma_1} &= \frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}_1^T\Lambda_3\widetilde{Q}_1,\\
K_{\gamma_2\gamma_2} &= \frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}_2^T\Lambda_3\widetilde{Q}_2,\\
K_{\gamma_1\gamma_2} &= \frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}_1^T\Lambda_3\widetilde{Q}_2,\\
K_{\gamma_2\gamma_1} &= \frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}\widetilde{Q}_2^T\Lambda_3\widetilde{Q}_1,
\end{aligned}
$$

em que

$$\Lambda_1 = diag(1/\phi_1, \ldots, 1/\phi_n), \quad e \quad \Lambda_3 = diag(h'^2_1/\phi_1^2, \ldots, h'^2_n/\phi_n^2).$$

Estamos interessados em testar a hipótese $H_1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \quad \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores especificados de dimensões p_1 e q_1, respectivamente. A estatística da razão de verossimilhanças para o teste de H_1 é dada por

$$RV_1 = 2\{\ell(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) - \ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)\}$$

que, sob a hipótese nula H_1, tem distribuição assintótica $\chi^2_{p_1+q_1}$. Para obtermos a correção de Bartlett para RV_1, escrevemos

$$E(2\{\ell(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) - \ell(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)\}) = p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} + O(n^{-2}) \quad e$$

$$E(2\{\ell(\beta_1^{(0)}, \widehat{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \widehat{\gamma}_2) - \ell(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)\}) = (p - p_1) + (q - q_1) +$$
$$+\epsilon_{[(p-p_1)+(q-q_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$$

portanto, $E(RV_1) = p_1 + q_1 + \epsilon_{[p+q,\beta\gamma]} - \epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$. Assintoticamente e sob a hipótese nula H_1, já sabemos que

$$RV_1 \xrightarrow{D} \chi^2_{(p_1+q_1)}.$$

Assim rejeitamos a hipótese H_1 se $RV_1 > \chi^2_{(p_1+q_1,1-\alpha)}$, em que $\chi^2_{(p_1+q_1,1-\alpha)}$ representa o quantil $1-\alpha$ da distribuição qui-quadrado com (p_1+q_1) graus de liberdade e α é o nível de significância adotado, com $0<\alpha<1$.

2.4.3 Testes de hipóteses sobre a média com β e γ desconhecidos

Suponhamos agora, que nosso interesse seja testar hipóteses apenas sobre a média em um modelo não-linear simétrico heteroscedástico dado por (2.1 a 2.4), isto é, sobre componentes do vetor β. Consideremos a partiçãos $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$ para o vetor β em que $\beta_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1})^T$ e $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \ldots, \beta_p)^T$, com $p_1 \leq p$. Essa partição induz as correspondentes partições

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2),$$

$$K_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} K_{\beta_1\beta_1} & K_{\beta_1\beta_2} \\ K_{\beta_2\beta_1} & K_{\beta_2\beta_2} \end{bmatrix},$$

em que $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ são matrizes conhecidas de posto completo e dimensões nxp_1, $nx(p-p_1)$.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra H:$\beta_1 \neq \beta_1^{(0)}$ em que $\beta_1^{(0)}$ é um vetor especificado de dimensão p_1 e β_1 e γ são vetores de parâmetros de pertubação. A estatística de verossimilhança para o teste de H_2 é dada por

$$RV_2 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma})\}$$

que, sob H_2, tem distribuição assintótica $\chi^2_{p_1}$. Para obtermos a correção de Bartlett para RV_2, escrevemos

$$E(2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma})\}) = p + \epsilon_{p,\beta\gamma} + O(n^{-2}) \quad e$$

$$E(2\{\ell(\beta_1^{(0)}, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma})\}) = (p-p_1) + \epsilon_{[(p-p_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$$

ou seja, $E(RV_2) = p_1 + \epsilon_{p,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p-p_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$. Assintoticamente e sob a hipótese nula H_2, já sabemos que

$$RV_2 \xrightarrow{D} \chi^2_{p_1}.$$

Assim rejeitamos a hipótese H_2 se $RV_2 > \chi^2_{(p_1,1-\alpha)}$, em que $\chi^2_{(p_1,1-\alpha)}$ representa o quantil $1-\alpha$ da distribuição qui-quadrado com p_1 graus de liberdade e α é o nível de significância adotado, com $0 < \alpha < 1$.

2.4.4 Testes de hipóteses sobre o parâmetro de escala com β e γ desconhecidos

Suponhamos agora, que nosso interesse seja testar hipóteses apenas sobre a média em um modelo normal heteroscedástico dado por (2.1) a (2.4), isto é, sobre componentes do vetor γ. Consideremos a partiçãos $\gamma^T = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)^T$ para o vetor γ em que $\gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{p_1+1}, \ldots, \gamma_p)^T$, com $q_1 \leq q$. Essa partição induz as correspondentes partições

$$\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2),$$

$$K_{\gamma\gamma} = \begin{bmatrix} K_{\gamma_1\gamma_1} & K_{\gamma_1\gamma_2} \\ K_{\gamma_2\gamma_1} & K_{\gamma_2\gamma_2} \end{bmatrix},$$

em que $\tilde{Q}_1$ e $\tilde{Q}_2$ são matrizes conhecidas de posto completo e dimensões nxq_1, $nx(q-q_1)$. Estamos interessados em testar a hipótese $H_3 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H:$\gamma_1 \neq \gamma_1^{(0)}$ em que $\gamma_1^{(0)}$ é um vetor especificado de dimensão q_1 e γ_1 e β são vetores de parâmetros de pertubação. A estatística de verossimilhança para o teste de H_3 é dada por

$$RV_3 = 2\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\tilde{\beta}, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)\}$$

que, sob H_3, tem distribuição assintótica $\chi^2_{q_1}$. Para obtermos a correção de Bartlett para RV_3, escrevemos

$$E(2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)\}) = q + \epsilon_{q,\beta\gamma} + O(n^{-2}) \quad e$$

$$E(2\{\ell(\tilde{\beta}, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)\}) = (q - q_1) + \epsilon_{[(q-q_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$$

portanto, $E(VR_3) = q_1 + \epsilon_{q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(q-q_1),\beta\gamma]} + O(n^{-2})$. Assintoticamente e sob a hipótese 3, já sabemos que

$$RV_3 \xrightarrow{D} \chi^2_{q_1}.$$

Assim rejeitamos a hipótese H_3 se $RV_3 > \chi^2_{(q_1, 1-\alpha)}$, em que $\chi^2_{(q_1, 1-\alpha)}$ representa o quantil $1-\alpha$ da distribuição qui-quadrado com q_1 graus de liberdade e α é o nível de significância adotado, com $0 < \alpha < 1$.

Capítulo 3

Ajuste para o Teste da Razão de Verossimilhança

3.1 Introdução

Em problemas de testes de hipóteses envolvendo grandes amostras, é muito comum o uso do teste da razão de verossimilhanças (RV). Em geral, há grande dificuldade em se determinar as distribuições nulas exatas das estatísticas destes testes, razão pela qual os testes têm sido construídos com base em resultados assintóticos. Em problemas regulares, a estatística da razão de verossimilhanças (RV) tem, sob a hipótese nula, distribuição χ^2_q aproximadamente, em amostras grandes, ou seja, χ^2 com q graus de liberdade, onde q é a diferença entre as dimensões dos espaços paramétricos sob as hipóteses alternativa e nula. Os testes são comumente baseados na comparação das estatísticas com valores críticos obtidos da distribuição χ^2 de referência para níveis de significância nominal fixado. Em pequenas amostras ou mesmo em amostras de tamanho moderado, a aproximação pode não ser satisfatória, podendo conduzir a taxas de rejeição sob a hipótese nula bastante distorcidas. Para melhorar a qualidade da aproximação da distribuição da estatística RV pela distribuição qui-quadrado utiliza-se a correção de Bartlett.

A primeira proposta de melhoria de testes estatísticos foi feita por Bartlett (1937). O autor modificou a estatística da razão de verossimilhanças por um fator de correção, visando a produzir uma estatística modificada com o primeiro momento igual ao da distribuição χ^2 de referência. Sob H_0, o valor esperado desta estatística pode ser expandido, em problemas regulares, como $E(RV) = p_1 + d_{p_1,\beta} + O(n^{-2})$, onde $d_{p_1,\beta}$ é uma constante de ordem n^{-1} que pode ser consistentemente estimada sob H_0 e n é o tamanho da amostra. Assim, o valor esperado da estatística modificada $RV^* = RV/(1 + d_{p_1,\beta})$ ou, equivalentemente, $RV^{**} = RV(1 - d_{p_1,\beta})$, é dada por $p_1 + O(n^{-2})$, estando 'mais próximo' daquele da distribuição χ^2_q do que o valor esperado de RV . Os fatores $1/(1 + d_{p_1,\beta})$ e $(1 - d_{p_1,\beta})$ ficaram conhecidos como correções de Bartlett. Vale ressaltar que tais fatores não dependem do valor da estatística da razão de verossimilhanças, mas podem depender de parâmetros desconhecidos; neste caso, estes devem ser substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança, sob H_0, o que não afeta a ordem da aproximação resultante.

Hayakawa (1977) desenvolveu, sob a hipótese nula, uma expansão assintótica para a distribuição de RV e mostrou que, se a hipótese nula for simples, a estatística de RV^* tem distribuição χ^2_q até ordem n^{-1}. Os resultados de Hayakawa (1977) apresentam um erro que foi, posteriormente, corrigido por Chesher e Smith (1995) (ver também Harris, 1986; Cordeiro, 1987; e Hayakawa, 1987).

Diversos trabalhos foram desenvolvidos nos últimos anos apresentando correções de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças em problemas específicos e em modelos amplos. Em particular, correções de Bartlett para os modelos lineares generalizados quando o termo de escala é conhecido e desconhecido, respectivamente, foram obtidas por Cordeiro (1983, 1987), que mostrou que o uso do fator de correção representa um grande aperfeiçoamento nos testes de adequação dos modelos lineares generalizados. Para os modelos não-lineares da família exponencial com parâmetro de dispersão conhecido correções de Bartlett foram obtidas por Cordeiro e Paula (1989). DiCiccio (1986) estudou um aperfeiçoamento da estatística da razão de verossimilhanças para os modelos de locação baseado em inferência condicional. Correções de Bartlett na família exponencial uniparamétrica foram obtidas por Cordeiro, Cribari-Neto, Aubin e Ferrari (1995) e em modelos de regressão com erros t-Student foram obtidos por Ferrari e Arellano-Valle (1996). Correções similares para modelos lineares normais heteroscedásticos e em alguns modelos de regressão multivariada foram obtidas por Cribari-Neto e Ferrari (1995a) e Cribari-Neto e Zarkos (1995). Ferrari e Uribe-Opazo (2001) obtiveram a correção de Bartlett para os modelos lineares simétricos. Correções de Bartlett para os modelos não-lineares de locação e escala supondo que o parâmetro de escala é conhecido foram obtidos por Montenegro e Cordeiro (2002). Os resultados de Ferrari e Uribe-Opazo (2001) foram generalizados por Cordeiro (2004) que obteve uma correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças nos modelos não-lineares simétricos. Ferrari, Cysneiros e Cribari-Neto (2004) obtiveram correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança perfilada modificada no modelo de regressão normal linear heteroscedástico, generalizando assim o artigo de Ferrari e Cribari-Neto (2002). A correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças perfilada modificada em modelos de regressão não-lineares da família exponencial foi obtida por Cysneiros e Ferrari (2006).

Boas revisões sobre correções de Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhanças, podem ser encontradas em Cribari-Neto e Cordeiro (1997) e em Cordeiro (1999).

Neste capítulo, apresentamos as correções de Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhanças nos modelos de regressões não-lineares simétricos heroscedásticos.

3.2 Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças para modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos

No Capítulo 2, definimos a classe de modelos simétricos heterocedásticos assumindo que os parâmetros de locação, bem como os parâmetros de escala estão relacionados com um vetor de parâmetros desconhecidos e/ou conhecidos (Subseções 2.4.1 a 2.4.6) através da relação dada por (2.2) e (2.3). Veremos a seguir cinco subseções com as correções de Bartlett para estatísticas de razões de verossimilhanças para modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos.

3.2.1 Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças sobre a locação e o parâmetro de escala com β e γ desconhecidos

Nesta seção obtemos correções de bartlett para estatísticas da razão de verossimilhança em testes de hipóteses simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão, ou seja, sobre $(\beta_1^\top, \beta_2^\top, \gamma_1^\top, \gamma_2^\top)^\top$, nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos definidos em (2.1).

Consideremos as funções de ligação $\mu_l = f(x_l;\beta)$ e $\phi_l = h(\tau_l)$, com $\tau_l = Q_{(l)}^T\gamma$, sendo $Q_{(l)} = (Q_{l1},\ldots,Q_{l1})^T$ definidos na seção 2.2 e as partições $\beta = (\beta_1^T,\beta_2^T)^T$ e $\gamma = (\gamma_1^T,\gamma_2^T)^T$, sendo $\beta_1 = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{p_1})^T$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1},\ldots,\beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1},\ldots,\gamma_q)^T$, com $p_1 \le p$ e $q_1 \le q$. Essas partições induzem as correspondentes partições $\tilde{X} = (\tilde{X}_1,\tilde{X}_2)$, $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2)$, $U = (U_{\beta_1}^T(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2), U_{\beta_2}^T(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2), U_{\gamma_1}^T(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2), U_{\gamma_2}^T(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2))$,

$$K_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} K_{\beta_1\beta_1} & K_{\beta_1\beta_2} \\ K_{\beta_2\beta_1} & K_{\beta_2\beta_2} \end{bmatrix}, K_{\gamma\gamma} = \begin{bmatrix} K_{\gamma_1\gamma_1} & K_{\gamma_1\gamma_2} \\ K_{\gamma_2\gamma_1} & K_{\gamma_2\gamma_2} \end{bmatrix},$$

$$K_{\beta\beta}^{-1} = K^{\beta\beta} = \begin{bmatrix} K^{\beta_1\beta_1} & K^{\beta_1\beta_2} \\ K^{\beta_2\beta_1} & K^{\beta_2\beta_2} \end{bmatrix} \quad e \quad K_{\gamma\gamma}^{-1} = K^{\gamma\gamma} = \begin{bmatrix} K^{\gamma_1\gamma_1} & K^{\gamma_1\gamma_2} \\ K^{\gamma_2\gamma_1} & K^{\gamma_2\gamma_2} \end{bmatrix},$$

apresentamos agora os testes da razão de verossimilhanças da hipótese H_1 : $\beta_1 = \beta_1^{(0)}$, $\gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores especificados de dimensões p_1 e q_1, respectivamente.

Lawley (1956) obteve, sob condições de regularidade, uma expansão de $L(\widehat{\beta}_1;\widehat{\beta}_2)$ em série de Taylor sob a hipótese nula até termos de ordem n^{-1} envolvendo derivadas até a quarta ordem do logaritmo da função de verossimilhança. Ele mostrou, após longos cálculos, que

$$2E\{\ell[(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\widehat{\gamma}_1,\widehat{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)]\} = p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

em que o termo $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ é de ordem n^{-1} e é escrito na forma

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{RStu} - \lambda_{RStuVW}). \tag{3.1}$$

Também temos

$$2E\{\ell[(\beta_1^{(0)},\tilde{\beta}_2,\gamma_1^{(0)},\tilde{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)]\} =$$

$$(p+q) - (p_1+q_1) + \epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

sendo

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{RSTU} - \lambda_{RSTUVW}), \tag{3.2}$$

em que $\sum''$ denota o somatório apenas sobre os componentes dos vetores β_2 e γ_2, isto é, sobre $p - p_1$ e $q - q_1$ parâmetros de pertubação, uma vez que β_1 e

γ_1 estão fixados em $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$.

$$E[RV_1] = 2E\{\{\ell[(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\}-$$

$$\{\ell[(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\}\} =$$

$$\begin{aligned}
&= (p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma}) - [(p + q) - (p_1 + q_1) + \epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}] + O(n^{-2})\\
&= (p_1 + q_1) + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} + O(n^{-2})\\
&= (p_1 + q_1)\left(1 + \frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}}{p_1 + q_1}\right) + O(n^{-2})\\
&= (p_1 + q_1)\,(1 + d_{p_1+q_1,\beta\gamma}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Podemos melhorar a aproximação da média da estatística da razão de verossimilhanças pela média da distribuição $\chi^2_{p_1+q_1}$ substituindo RV_1 pela estatística modificada RV_1^* dada por

$$RV_1^* = \frac{RV_1}{1 + d_{p_1+q_1,\beta\gamma}},$$

onde o fator de correção de Bartlett é determinado através de

$$c = 1 + d_{p_1+q_1,\beta\gamma},$$

em que

$$d_{p_1+q_1,\beta\gamma} = \frac{\epsilon_{p+q,\gamma} - \epsilon_{[(p+q(-(p_1+q_1)],\beta\gamma}}{p_1 + q_1}. \tag{3.3}$$

Os fatores de correção de Bartlett dependem da quantidade $\epsilon_{p,\beta}$, que é uma função aparentemente complicada dos cumulantes conjuntos de derivadas do logaritmo da função de verossimilhança (que são valores esperados de produtos de derivadas do logaritmo da função de verossimilhança) e suas derivadas. Nesta Subseção, apresentaremos $\epsilon_{p,\beta}$ em forma simples, para os testes da razão de verossimilhanças em modelos de regressão não-lineares simétricos heteroscedásticos. Uma propriedade fundamental dos modelos simétricos heteroscedásticos é que os cumulantes são invariantes sob a permutação de parâmetros de regressão. Isto facilita os cálculos na obtenção de $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}$ e, consequentemente, na estatística da razão de verossimilhanças corrigida. A obtenção do aperfeiçoamento do teste da razão de verossimilhanças para testar as hipóteses H_1 contra H é baseada no desenvolvimento das fórmulas definidas em (3.1) e (3.2) para o cálculo da constante $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}$, definida em

(3.3). Usamos a notação

$$(r)_l = \partial\mu_l/\partial\beta_r, \quad (rs)_l = \partial^2\mu_l/\partial\beta_r\partial\beta_s, \quad (r,s)_l = \partial\mu_l/\partial\beta_r\partial\mu_l/\partial\beta_s \quad \text{etc}$$

para os β,

$$(R)_l = \partial\mu_l/\partial\gamma_R, \quad (R,S)_l = \partial\mu_l/\partial\gamma_R\partial\mu_l/\partial\gamma_S, \quad \text{etc}$$

para os γ e assumimos que o logaritmo da função de verossimilhança é regular com respeito às derivadas até a quarta ordem sob H_1. Temos os seguintes cumulantes para modelos não-lineares simétricos (ver Apêndice B):

$$\kappa_{rs} = \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l,$$

$$\kappa_{r,s} = \delta_{(2,0,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l,$$

$$\kappa_{rs}^{(t)} = \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,ts)]_l,$$

$$\kappa_{rs}^{(tu)} = \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}[(rtu,s)+(rs,tu)+(tsu,r)+(ts,ru)]_l,$$

$$\kappa_{rst} = \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,st)+(rs,t)]_l,$$

$$\kappa_{rst}^{(u)} = \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}[(rtu,s)+(ru,st)+(rs,tu)+(rt,su)+(r,stu)+(rsu,t)]_l,$$

$$\kappa_{rstu} = \delta_{(0,0,0,1,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l + \delta_{(0,1,0,0,0)} \sum_{n}^{l=1} \frac{1}{\phi_l}[(rtu,s)+(rt,su)+(r,stu)$$
$$+(rs,tu)+(rst,u)+(rsu,t)+(ru,st)]_l,$$

(ver Apêndice C):

$$
\begin{aligned}
K_{RS} &= \frac{\alpha_{2,2}-1}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'^2}{\phi_l^2}(R,S)_l,\\
K_{RS}^{(T)} &= \frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l h''_l\phi_l - h'^3_l}{\phi_l^3}(R,S,T)_l,\\
K_{RS}^{(TU)} &= \frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''^2_l\phi_l^2 - 5h'^2_l h''_l\phi_l + h'_l h'''_l\phi_l^2 + 3h'^4_l}{\phi_l^4}(R,T,U,S)_l,\\
K_{RST} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{3h_l'h_l''\phi_l - 2h'^3_l - h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^3}(R,S,T)_l,\\
&- \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'^3}{\phi_l^3}(R,S,T)_l + \frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{2h_l'h_l''\phi_l - 3h'^3_l}{\phi_l^3}(R,S,T)_l\\
&+ \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{7h_l'h_l''\phi_l - 5h'^3_l - h_l'''\phi_l^2}{\phi_l^3}(R,S,T)_l,\\
K_{RST}^{(U)} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{3h''^2_l\phi_l^2 - 12h'^2_l h_l''\phi_l + 6h'^4_l + 4h'_l h_l'''\phi_l^2 - h_l''''\phi_l^2}{\phi_l^4}(R,S,T,U)_l\\
&- \frac{3}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l h''_l\phi_l - h'^4_l}{\phi_l^4}(R,S,T,U)_l\\
&+ \frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{2h''^2_l\phi_l^2 - 13h'^2_l h_l''\phi_l + 9h'^4_l + 2h'_l h_l'''\phi_l^2}{\phi_l^4}(R,S,T,U)_l
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{7h_l''^2\phi_l^2 - 29h_l'^2h_l''\phi_l + 15h_l'^4 + 7h_l'h_l'''\phi_l^2 - h_l''''\phi_l^2 + 2h_l'h_l'''\phi_l}{\phi_l^4}(R,S,T,U)_l
$$

$$
K_{RSTU} = \sum_{l=1}^{n}\Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l -
$$

$$
-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{11l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{29l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{1,1}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l
$$

(ver Apêndice D):

$$
\begin{aligned}
K_{Rs} &= 0, K_{Rs}^{(T)} = 0, K_{Rs}^{(t)} = 0, K_{Rs}^{(TU)} = 0, K_{Rs}^{(Tu)} = 0, K_{Rs}^{(tu)} = 0,\\
K_{RS}^{(t)} &= 0, K_{RS}^{(tu)} = 0, K_{RS}^{(Tu)} = 0, K_{rs}^{(T)} = -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'}{\phi_l^2}(r,s,T)_l,\\
K_{rs}^{(Tu)} &= -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'}{\phi_l^2}[(ru,s,T)+(r,su,T)]_l,\\
K_{rs}^{(TU)} &= -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''\phi_l - 2h'^2}{\phi_l^3}(r,s,T,U)_l,\\
K_{Rst} &= -\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l,\\
K_{Rst}^{(u)} &= -\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}[(R,su,t)+(R,s,tu)]_l,\\
K_{Rst}^{(U)} &= -\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l''\phi_l - 2h'^2}{\phi_l^3}(R,s,t,U)_l,\\
K_{RSt}^{(u)} &= 0, K_{RSt}^{(U)} = 0, K_{RST}^{(u)} = 0,\\
K_{rst}^{(U)} &= -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}[(rs,t,U)+(r,st,U)+(rt,s,U)]_l,\\
K_{Rstu} &= -\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}[(R,su,t)+(R,st,u)+(R,s,tu)]_l,\\
K_{RStu} &= \frac{\alpha_{4,2}+6\alpha_{3,1}+6\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'^2}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l\\
&\quad -\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l,\\
K_{RSTu} &= 0
\end{aligned}
$$

em que $\delta_{(a,b,c,d,e)}$, $\alpha_{p,q}$ são definidos na seção 2.3. Definimos as matrizes de dimensão $n \times n$ positivas semi-definidas

$$Z_\beta = \tilde{X}(\tilde{X}^T\Lambda_1\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^T, \qquad Z_{2\beta} = \tilde{X}_2(\tilde{X}_2^T\Lambda_1\tilde{X}_2)^{-1}\tilde{X}_2^T \tag{3.4}$$

$$Z_\gamma = \tilde{Q}(\tilde{Q}^T\Lambda_3\tilde{Q})^{-1}\tilde{Q}^T, \qquad Z_{2\gamma} = \tilde{Q}_2(\tilde{Q}_2^T\Lambda_3\tilde{Q}_2)^{-1}\tilde{Q}_2^T \tag{3.5}$$

de postos p e $p - p_1$, respectivamente para as matrizes relacionadas com o vetor de parâmetro β. Se $p = p_1$, define-se $Z_{2\beta} = 0$, e as matrizes relacionadas com o vetor de parâmetros β que denota uma matriz nula $n \times n$. É importante observar que as matrizes $\delta_{(0,1,0,0,0)}Z_\beta$ e $\delta_{(0,1,0,0,0)}Z_{2\beta}$ são estruturas de covariância assintóticas de $\widehat{\mu}$ e $\tilde{\mu}$. Definimos, ainda, $Z_{\beta d} = \mathrm{diag}\{z_{\beta d_{11}}, \ldots, z_{\beta d_{nn}}\}$, $Z_{2\beta d} = \mathrm{diag}\{z_{2\beta d_{11}}, \ldots, z_{2\beta d_{nn}}\}$, $Z_{\gamma d} = \mathrm{diag}\{z_{\gamma d_{11}}, \ldots, z_{\gamma d_{nn}}\}$, $Z_{2\gamma d} = \mathrm{diag}\{z_{2\gamma d_{11}}, \ldots e z_{2\gamma d_{nn}}\}$, representando as matrizes com elementos diagonais de Z_β, $Z_{2\beta}$,Z_γ e $Z_{2\gamma}$, respectivamente, $\tilde{X}_m$ uma matriz $p \times p$ cujo (r,s)-ésimo elemento é $(rs)_m$, para $m = 1, \ldots, n$, as matrizes B, C, A, A^T, G e F de dimensão $n \times n$ com os (l,m)-ésimos elementos dados por

$b_{lm} = tr((\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_m)$,

$c_{lm} = \widetilde{x}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_m (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{x}_l$,

$a_{lm} = \widetilde{x}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{x}_m$,

$a_{ml} = \widetilde{x}_m (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_m (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{x}_l$,

$g_{lm} = \widetilde{x}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_m (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{x}_m$ e

$f_{lm} = \widetilde{x}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_m (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1} \widetilde{x}_m$, respectivamente, $\widetilde{x}_l^T$ sendo a l-ésima linha da matriz $\widetilde{X}$, e D uma matriz diagonal de dimensão $n \times n$, onde o (l,l)-ésimo elemento definido como $d_{ll} = tr(\widetilde{X}_l (\widetilde{X}^T \Lambda_1 \widetilde{X})^{-1})$, em que tr denota traço. Todas as matrizes acima escritas podem ser obtidas da componente sistemática μ_l, definida em (2.2), e requerem somente as duas primeiras derivadas do modelo com respeito às componentes de β.

A obtenção das constantes $d_{p_1,\beta}$, $d_{q_1,\gamma}$, $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}$, $d_{p_1,\beta\gamma}$ e $d_{q_1,\beta\gamma}$, definida em (3.3) são feitas substituindo os valores de κ's na expressão dada em (3.2) e efetuando as somas sobre a amostra depois de avaliar as somas sobre os parâmetros. Desta maneira, aparecerão termos da forma

$\sum{}'(r)_l K^{rs}(s)_l$, $\sum{}'(rs)_l K^{rs}$, $\sum{}'(r)_l K^{rs}(s)_m$, $\sum{}'(R)_l K^{RS}(S)_l$, $\sum{}'(R)_l K^{RS}(S)_m$,

$\sum{}'(rt)_l K^{rs} K^{tu}(su)_m$, $\sum{}'(rt)_l K^{rs} K^{tu}(su)_l$, $\sum{}'(rst)_l K^{rs} K^{tu}(u)_l$,

$\sum{}'(r)_l K^{rs}(su)_m K^{tu}(t)_l$, $\sum{}'(r)_l K^{rs}(su)_l K^{tu}(t)_m$, $\sum{}'(r)_m K^{rs}(su)_m K^{tu}(t)_l$,

$\sum{}'(u)_l K^{tu}(rt)_l K^{rs}(sv)_m K^{vw}(w)_m$, $\sum{}'(r)_l K^{rs}(su)_m K^{tu}(tv)_l K^{vw}(w)_m$, onde $-\kappa^{ij}$ é o (i,j)-ésimo elemento da matriz $K_{\beta\beta}^{-1}$, $i,j = 1, \ldots, p$ ou é o (i,j)-ésimo elemento da matriz $K_{\gamma\gamma}^{-1}$, $i,j = 1, \ldots, q$. É fácil observar que estes somatórios representam os elementos das matrizes

$\delta_{(0,1,0,0,0)}Z_{\beta d}$, $\delta_{(0,1,0,0,0)}D$, $\delta_{(0,1,0,0,0)}Z_\beta$, $\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}Z_{\gamma d}$, $\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}Z_\gamma$,

$\delta^2_{(0,1,0,0,0)}B_\beta$, $\delta^2_{(0,1,0,0,0)}B_{\beta d}$, $\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\Delta_{\beta d}$, $\delta^2_{(0,1,0,0,0)}C_\beta$, $\delta^2_{(0,1,0,0,0)}A_\beta$, $\delta^2_{(0,1,0,0,0)}A_\beta^T$,

$\delta^3_{(0,1,0,0,0)}G_\beta$ e $\delta^3_{(0,1,0,0,0)}F_\beta$, respectivamente. De igual modo aparecerão termos no desenvolvimento dos cálculos dos cumulantes, dos λ's, dos ϵ's e dos d's que sendo necessário definir Λ_{kl} em que $k = 1, 2, \ldots$ e $l = 1, \ldots, n$, sendo eles:

$$\Lambda_{1l} = \frac{1}{\phi_l}, \quad \Lambda_{2l} = \frac{h'}{\phi_l^2}, \quad \Lambda_{3l} = \frac{h'^2}{\phi_l^2}, \quad \Lambda_{4l} = \frac{h'^2}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{5l} = \frac{h'^3}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{6l} = \frac{h'^4}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{7l} = \frac{h'_l h''_l \phi_l - {h'}^3_l}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{8l} = \frac{2h'_1 h''_l \phi_l - 3{h'}^3_l}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{9l} = \frac{{h'}^2_1 h''_l \phi_l - {h'}^4_l}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{10l} = \frac{h''_l \phi_l - 2{h'}^2_l}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{11l} = \frac{10{h'}^2_l h''_l \phi_l - 15{h'}^4_l}{\phi_l^4}, \quad \Lambda_{12l} = \frac{6h'_l h''_l \phi_l - 5{h'}^3_l}{\phi_l^3},$$

$$\Lambda_{13l} = \frac{3h'_l h''_l \phi_l - 2{h'}^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{14l} = \frac{7h'_l h''_l \phi_l - 5{h'}^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3},$$

$$\Lambda_{15l} = \frac{-5{h''}^2_l \phi_l^2 + 22{h'}^2_l h''_l \phi_l - 5h'_l h'''_l \phi_l^2 - 12{h'}^4_l + h''''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{16l} = \frac{4{h''}^2_l \phi_l^2 - 13{h'}^2_l h''_l \phi_l - 12h'_l h''_l \phi_l^2 + 5{h'}^4_l - 15h'_l h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{17l} = \frac{-42{h''}^2_l \phi_l^2 + 167{h'}^2_l h''_l \phi_l + 16h'_l h''_l \phi_l^2 - 85{h'}^4_l - 41h'_l h'''_l \phi_l^2 - 16h'_l h'''_l \phi_l + 6h''''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{18l} = \frac{4h'_l h''_l \phi_l - 3{h'}^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{19l} = \frac{h''_l \phi_l - {h'}^2_l}{\phi_l^2},$$

$$\Lambda_{20l} = \frac{-2h''_l \phi_l + 3{h'}^2_l}{\phi_l^2}, \quad \Lambda_{21l} = \frac{{h''}^2_l \phi_l^2 - 5{h'}^2_l h''_l \phi_l + h'_l h'''_l \phi_l^2 + 3{h'}^4_l}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{22l} = \frac{3{h''}^2_l \phi_l^2 - 12{h'}^2_l h''_l \phi_l + 6{h'}^4_l + 4h'_l h'''_l \phi_l^2 - h''''_l \phi_l^3}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{23l} = \frac{2{h''}^2_l \phi_l^2 - 13{h'}^2_l h''_l \phi_l + 9{h'}^4_l + 2h'_l h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{24l} = \frac{7{h''}^2_l \phi_l^2 - 29{h'}^2_l h''_l \phi_l + 15{h'}^4_l + 8h'_l h'''_l \phi_l^2 - h''''_l \phi_l^3}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{25l} = \frac{4{h''}^2_l \phi_l^2 - 23{h'}^2_l h''_l \phi_l + 15{h'}^4_l + 4h'_l h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{26l} = \frac{2{h''}^2_l \phi_l^2 - 13{h'}^2_l h''_l \phi_l + 9{h'}^4_l + 2h'_l h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{27l} = \frac{4h''^2_l\phi_l^2 - 17h'^2_l h''_l\phi_l + 9h'^4_l + 4h'_l h'''_l\phi_l^2 - h''''_l\phi_l^2 + 5h'_l h'''_l\phi_l}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{28l} = \frac{7h'^2_l h''_l\phi_l - 5h'^4_l - h'_l h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{29l} = \frac{4h''^2_l\phi_l^2 + 4h'_l h''_l\phi_l^2 - 37h'^2_l h''_l\phi_l + h'_l h'''_l\phi_l^2 + 29h'^4_l}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{30l} = \frac{7h'_l h''_l\phi_l - 6h'^3_l - h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^3},$$

$$\Lambda_{31l} = \frac{5h''^2_l\phi_l^2 - 22h'^2_l h''_l\phi_l + 12h'^4 + 6h'_l h'''_l\phi_l^2 - h''''_l\phi_l^3}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{32l} = \frac{4h'^2_l h''_l\phi_l - 9h'^4_l}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{33l} = \frac{-11h'^2_l h''_l\phi_l + 11h'^4_l - 3h'_l h'''_l\phi_l^2 + 4h'_l h''_l\phi_l^2}{\phi_l^4},$$

$$\Lambda_{34l} = \frac{9h'_l h''_l\phi_l - 8h'^3_l - h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^3}, \quad \Lambda_{14l} = \frac{7h'_l h''_l\phi_l - 5h'^3_l - h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^3},$$

$$\Lambda_{35l} = \frac{10h'_l h''_l\phi_l - 9h'^3_l}{\phi_l^3},$$

e a matriz diagonal $\Lambda_k = \mathrm{diag}(\Lambda_{k1}, \ldots, \Lambda_{kn})$, sendo os elementos da forma Λ_{kl}, onde $k = 1, 2, 3, ...$ e $l = 1, 2, ..., n$. Para obter $\epsilon_{p_1,\beta}$, substituímos κ_{rstu}, κ^u_{rst} e κ^u_{rs} na expressão de λ_{rstu} dada em (3.2) e efetuando os cálculos algébricos obtemos a parcela (Ver apêndice E). Substituindo os cumulantes nas expressões

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstu} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa^{(u)}_{rst} + \kappa^{(su)}_{rt}\right),\\
\lambda_{rstuvw} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{vw}\Big\{\kappa_{rtv}\left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa^{(u)}_{sw}\right)\\
&\quad + \kappa_{rtu}\left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa^{(v)}_{sw}\right) + \kappa^{(v)}_{rt}\kappa^{(u)}_{sw} + \kappa^{(u)}_{rt}\kappa^{(v)}_{sw}\Big\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

efetuando os cálculos e, em seguida, aplicando os $\sum'$ e $\sum''$ encontraremos (Ver apêndice F):

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 + \\ + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RSTUvw} = &-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{13}\iota\\ &+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota\\ &-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{8l}\iota\\ &-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RStuVW} = &-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota\\ &+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota\\ &+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota\\ &-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota\end{aligned}$$

$\sum{}'\lambda_{rsTUVW} = 0$

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T) \\ +\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}''\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 + \\ + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RSTUvw} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{13}\iota\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{5\iota}\tilde{1} \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\tilde{1}^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{8\iota}\iota \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14\iota}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$\sum{}''\lambda_{rsTUVW} = 0$

$$\sum{}''\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T) \\ + \frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}'' \lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}' \lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

Aplicando a expressão

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = {} & \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 \\ & + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota \\ & + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 \\ & + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} \\ & + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota \\ & - \frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota \\ & + \frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]\end{aligned}$$

Aplicando de maneira inteiramente análoga para a expressão

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T].$$

Finalmente, substituindo em $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}=\frac{\epsilon_{[p+q,\beta\gamma]}-\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}}{p_1+q_1}$ obtemos:

$$d_{p_1+q_1,\beta\gamma}=\frac{1}{p_1+q_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d}-Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}-Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2(Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T$$
$$-Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)]\}$$

3.2.2 Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças sobre a locação com β e γ desconhecidos

Apresentamos os testes da razão de verossimilhanças da hipótese $H_2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $H : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}$, em que $\beta_1^{(0)}$ é vetor especificado de dimensões p_1.

Considere

$$2E\{\ell[(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} = p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

em que o termo $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ é de ordem n^{-1} e é escrito na forma

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{RStu} - \lambda_{RStuVW}), \tag{3.7}$$

Também temos

$$2E\{\ell[(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1, \tilde{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} =$$
$$(p + q - p_1) + \epsilon_{[p+q-p_1],\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

sendo

$$\epsilon_{[p+q-p_1],\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{RSTU} - \lambda_{RSTUVW}), \tag{3.8}$$

em que $\sum{}''$ denota o somatório apenas sobre os componentes dos vetores β_2 e γ_2, isto é, sobre $p - p_1$ e q parâmetros de pertubação, uma vez que β_1 está fixado em $\beta_1^{(0)}$.

$$E[RV_2] = 2E\{[\ell(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)] -$$
$$[\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} =$$

$$\begin{aligned}
&= (p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma}) - [(p + q - p_1) + \epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma}] + O(n^{-2}) \\
&= p_1 + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma} + O(n^{-2}) \\
&= p_1 \left(1 + \frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma}}{p_1}\right) + O(n^{-2}) \\
&= p_1 (1 + d_{p_1,\beta\gamma}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Podemos melhorar a aproximação da média da estatística da razão de verossimilhanças pela média da distribuição $\chi^2_{p_1}$ substituindo RV_2 pela estatística modificada RV_2^* dada por

$$RV_2^* = \frac{RV_2}{1 + d_{p_1,\beta\gamma}},$$

sendo o fator de correção de Bartlett determinado através de

$$c = 1 + d_{p_1,\beta\gamma},$$

em que

$$d_{p_1,\beta\gamma} = \frac{\epsilon_{p+q,\gamma} - \epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma}}{p_1}. \tag{3.9}$$

Para obter $\epsilon_{p_1,\beta\gamma}$, substituímos κ_{rstu}, κ_{rst}^{u} e κ_{rs}^{u} na expressão de λ_{rstu} dada em (3.2) e efetuando os cálculos algébricos obtemos a parcela (Ver apêndice E). Substituindo os cumulantes nas expressões

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstu} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)}\right), \\
\lambda_{rstuvw} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{vw}\left\{\kappa_{rtv}\left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \kappa_{rtu}\left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)}\right) + \kappa_{rt}^{(v)}\kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)}\kappa_{sw}^{(v)}\right\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

efetuando os cálculos e, em seguida, aplicando os $\sum{}'$ e $\sum{}''$ encontraremos:

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)} - 1)}{4}\iota^T\left(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1} + 2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2\right)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\begin{aligned}
\sum{}'\lambda_{rsTU} = {} & \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T\left(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1} + 2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10}\right)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum{}'\lambda_{RSTUvw} = {} & -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)} - 1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{13}\iota \\
& + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)} - 1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota \\
& - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)} - 1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{8\iota}\widetilde{1} \\
& - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)} - 1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1})}{32}\widetilde{1}^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota
\end{aligned}$$

$$\sum{}'\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUVW} = 0$$

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T)$$
$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}''\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{2\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2+$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RSTUvw} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{13l}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{5l}\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{8l}\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14l}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RStuVW}=-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$\sum{}''\lambda_{rsTUVW}=0$

$$\sum{}''\lambda_{RStuvw}=\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)$$

$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}''\lambda_{rstuVW}=-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw}=-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

Aplicando a expressão

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma}=\sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

Aplicando de maneira inteiramente análoga para a expressão

$$\epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma}=\sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\epsilon_{[(p+q-p_1)],\beta\gamma}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_\gamma Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

Finalmente, substituindo as expressões $\epsilon_{[p+q,\beta\gamma]}$ e $\epsilon_{[(p+q-p_1),\beta\gamma]}$ em $d_{p_1,\beta\gamma}=\frac{\epsilon_{[p+q,\beta\gamma]}-\epsilon_{[(p+q-p_1),\beta\gamma]}}{p_1}$

obtemos:

$$d_{p_1,\beta\gamma} = \frac{1}{p_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - Z_{2\beta d}Z_{\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}Z_{\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2(Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T$$
$$-Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)]\}.$$

3.2.3 Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças sobre o parâmetro de escala com β e γ desconhecidos

Apresentamos os testes da razão de verossimilhanças da hipótese $H_3 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra $H : \gamma_1 \neq \gamma_1^{(0)}$, em que $\gamma_1^{(0)}$ é vetor especificado de dimensão q_1.

Considere

$$2E\{\ell[(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} = p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

em que o termo $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ é de ordem n^{-1} e é escrito na forma

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{RStu} - \lambda_{RStuVW}), \tag{3.11}$$

Também temos

$$2E\{\ell[(\beta_1, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} =$$
$$(p + q - q_1) + \epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma} + O(n^{-2}),$$

sendo

$$\epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{RSTU} - \lambda_{RSTUVW}), \tag{3.12}$$

em que $\sum''$ denota o somatório apenas sobre os componentes dos vetores β_2 e γ_2, isto é, sobre p e $q - q_1$ parâmetros de pertubação, uma vez que β_1 e γ_1 estão fixados em $\gamma_1^{(0)}$.

$$E[RV_3] = 2E\{\{\ell[(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\} -$$

$$\{\ell[(\beta_1, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)] - \ell[(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)]\}\} =$$

$$\begin{aligned}
&= (p + q + \epsilon_{p+q,\beta\gamma}) - [(p + q - q_1) + \epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma}] + O(n^{-2}) \\
&= q_1 + \epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma} + O(n^{-2}) \\
&= q_1 \left(1 + \frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma} - \epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma}}{q_1}\right) + O(n^{-2}) \\
&= q_1\,(1 + d_{q_1,\beta\gamma}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Podemos melhorar a aproximação da média da estatística da razão de verossimilhanças pela média da distribuição $\chi^2_{p_1+q_1}$ substituindo RV_3 pela estatística modificada RV_3^* dada por

$$RV_3^* = \frac{RV_3}{1 + d_{q_1,\beta\gamma}},$$

onde o fator de correção de Bartlett é determinado através de

$$c = 1 + d_{q_1,\beta\gamma},$$

em que

$$d_{q_1,\beta\gamma} = \frac{\epsilon_{p+q,\gamma} - \epsilon_{[p+q-q_1],\beta\gamma}}{q_1}. \tag{3.13}$$

Para obter $\epsilon_{q_1,\beta\gamma}$, substituímos κ_{rstu}, $\kappa_{rst}^{(u)}$, $\kappa_{rs}^{(t)}$ e κ_{rst} nas expressões de λ_{rstu} dada em (3.2) e efetuando os cálculos algébricos obtemos as parcelas (Ver apêndice E). Substituindo os cumulantes nas expressões

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstu} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)}\right), \\
\lambda_{rstuvw} &= \kappa^{rs}\kappa^{tu}\kappa^{vw}\left\{\kappa_{rtv}\left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \kappa_{rtu}\left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)}\right) + \kappa_{rt}^{(v)}\kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)}\kappa_{sw}^{(v)}\right\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

efetuando os cálculos e, em seguida, aplicando os $\sum'$ e $\sum''$ encontraremos (Ver apêndice F):

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 + \\ + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$\sum{}'\lambda_{RSTUvw} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{13}\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{8l}\iota \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$\sum{}'\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota \\ + \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota \\ - \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$\sum{}'\lambda_{rsTUVW} = 0$

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T) \\ + \frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}''\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 + \\ +\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RSTUvw} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{13l}\iota \\ +\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{5l}\iota \\ -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{8l}\iota \\ -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14l}\iota$$

$$\sum{}''\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota \\ +\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota \\ +\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota \\ -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$\sum{}''\lambda_{rsTUVW} = 0$

$$\sum{}''\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)$$

$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d} Z_{2\gamma} Z_{\beta d}\Lambda_2\iota]$$

$$\sum{}''\lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]$$

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]$$

Aplicando a expressão

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}'(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$

$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2 Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]$$

Aplicando de maneira inteiramente análoga para a expressão

$$\epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma} = \sum_{\beta\gamma}{}''(\lambda_{rstu}-\lambda_{rstuvw})$$

e efetuando os cálculos, obtemos:

$$\epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T].$$

Finalmente, substituindo as expressões de $\epsilon_{[p+q,\beta\gamma]}$ e $\epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma}$ em $d_{q_1,\beta\gamma} = \frac{\epsilon_{[p+q,\beta\gamma]}-\epsilon_{[(p+q-q_1)],\beta\gamma}}{q_1}$

obtemos:

$$d_{q_1,\beta\gamma} = \frac{1}{q_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - Z_{\beta d}Z_{2\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2(Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T$$

$$-Z_{2\gamma}(Z_{\beta}^{(2)}\Lambda_2)^{\top})]\}.$$

Capítulo 4

Conclusão

A principal contribuição teórica desta dissertação, consiste na obtenção de uma expressão em notação matricial do fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças de testes sobre a média e/ou parâmetro de precisão em modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos. Vale salientar que consideramos quaisquer funções de ligação para a média e para o parâmetro de precisão.

Como trabalho futuro, podem ser feitas simulações de tamanho e poder do teste com o objetivo de comparar a eficácia da correção em pequenas amostras.

Apêndice A

Cálculos dos cumulantes em relação ao parâmetro β.

Neste apêndice apresentamos a obtenção de alguns cumulantes conjuntos com derivadas do logaritmo da função verossimilhança do modelo não-linear heteroscedásticos necessários aos cálculos do termo que define a correção de Bartlett para a estatística RV os cumulantes em relação ao parâmetro β, e suas derivadas.

A.1 Cálculo de K_r

Como

$U_r = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_r}$, logo temos que: $U_r = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r} = \frac{\partial(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\log(\phi_l)+\sum_{l=1}^{n}\log g(z_l^2))}{\partial \beta_r}$, com r=1,..., p. Portanto,

$U_r = -\sum_{l=1}^{n}[t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l]$.

Como $K_r = \mu_r = E(U_r)$, logo temos que: $K_r = -\sum_{l=1}^{n} E(t_{(z_l)}^{(1)}) \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l$ ou seja $K_r = -\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l$. Como $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que $K_r = 0$.

A.2 Cálculo de K_{rs}

Como

$U_{rs} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_r \partial \beta_s}$, logo temos que: $U_{rs} = \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l - \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rs)_l$.

Como $K_{rs} = \mu_{rs} = E(U_{rs})$, logo temos que: $k_{rs} = -\sum_{l=1}^{n} E(t_{(z_l)}^{(1)}) \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rs)_l$ ou seja $K_{rs} = \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l - \alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r,s)_l$.

Como $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que: $K_{rs} = \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l$.

A.3 Cálculo de $K_{r,s}$

Como

$U_{r,s} = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell}{\partial \beta_s}$

$U_{r,s} = (-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l)(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(s)_l)$.

Portanto $U_{r,s} = \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l$.

Como $K_{r,s} = \mu_{r,s} = E(U_{r,s})$, logo temos que: $K_{r,s} = \beta_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l$.

A.4 Cálculo de $K^{(t)}_{rs}$

Como $K^{(t)}_{rs} = \frac{\partial (K_{rs})}{\partial \beta_t}$, logo temos que: $K^{(t)}_{rs} = \frac{\partial}{\partial \beta_t}(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)$.

Portanto, $K^{(t)}_{rs} = \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,st)]_l$

A.5 Cálculo de $K^{(t)}_{r,s}$

Como $K^{(t)}_{r,s} = \frac{\partial (K_{r,s})}{\partial \beta_t} = \frac{\partial (-K_{rs})}{\partial \beta_t}$, logo temos que: $K^{(t)}_{r,s} = \frac{\partial}{\partial \beta_t}(-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)$. Portanto, $K^{(t)}_{r,s} = -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,st)]_l$.

A.6 Cálculo de $K^{(tu)}_{rs}$

Como $K^{(tu)}_{rs} = \frac{\partial^2 (K_{rs})}{\partial \beta_t \partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u}(\frac{\partial (K_{rs})}{\partial \beta_t}) = \frac{\partial (K^{(t)}_{rs})}{\partial \beta_u}$, logo temos que:

$K^{(tu)}_{rs} = \frac{\partial}{\partial \beta_u}(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,st)]_l)$,

$K^{(tu)}_{rs} = \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rtu,s)+(rt,su)+(ru,st)+(r,stu)]_l$.

A.7 Cálculo de $K^{(tu)}_{r,s}$

Como $K^{(tu)}_{r,s} = \frac{\partial^2 (K_{r,s})}{\partial \beta_t \partial \beta_u} = \frac{\partial (-K^{(t)}_{rs})}{\partial \beta_u}$, logo temos que:

$K^{(tu)}_{r,s} = \frac{\partial}{\partial \beta_u}(-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rt,s)+(r,st)]_l)$,

$K^{(tu)}_{r,s} = -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rtu,s)+(rt,su)+(ru,st)+(r,stu)]_l$.

A.8 Cálculo de K_{rst}

Como

$$U_{rs} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t} = \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rs)_l.$$

Assim

$$U_{rst} = -\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}} (r,s,t)_l + \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} \frac{1}{\phi_l} [(rs,t)+(r,st)+(rt,s)]_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (rst)_l.$$

Como $K_{rst} = \mu_{rst} = E(U_{rst})$, logo temos que:

$$K_{rst} = -\alpha_{3,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{\phi_l^2}} (r,s,t)_l + \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l} [(rs,t)+(r,st)+(rt,s)]_l - \alpha_{1,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (rst)_l.$$

Como $\alpha_{3,0} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$,

logo temos que:

$K_{rst} = \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l} [(rs,t) + (r,st) + (rt,s)]_l$.

A.9 Cálculo de $K_{r,s,t}$

Como

$U_{r,s,t} = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_r} \frac{\partial \ell}{\partial \beta_s} \frac{\partial \ell}{\partial \beta_t} = U_r U_s U_t$

logo temos:

$U_{r,s,t} = (-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (r)_l)(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (s)_l)(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (t)_l)$.

Portanto $U_{r,s,t} = -\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}} (r,s,t)_l$.

Como $K_{r,s,t} = \mu_{r,s,t} = E(U_{r,s,t})$, logo temos que:

$K_{r,s,t} = -\beta_{1,1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}} (r,s,t)_l$.

Como $\beta_{1,1,1} = 0$, logo temos que: $K_{r,s,t} = 0$.

A.10 Cálculo de $K_{rs,t}$

Como

$U_{rs,t} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_r \partial \beta_s} \frac{\partial \ell}{\partial \beta_t} = U_{rs} U_t$ logo temos:

$U_{rs,t} = -\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}} (r,s,t)_l) + \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (rs,t)_l)$.

Como $K_{rs,t} = \mu_{rs,t} = E(U_{rs,t})$, logo temos que:

$K_{rs,t} = -\beta_{2,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}} (r,s,t)_l + \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (rs,t)_l$.

Como $\beta_{2,1} = 0$, logo temos que:$K_{rs,t} = \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} (rs,t)_l$.

A.11 Cálculo de $K_{r,st}$

Como $K_{r,st} + K_{rst} - K_{st}^{(r)} = 0$, logo temos que:

$K_{r,st} = K_{st}^{(r)} - K_{rst}$

$K_{r,st} = \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rt,s) + (rs,t)]_l - \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(r,st) + (rs,t) + (rt,s)]_l$.

Portanto

$K_{r,st} = -\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,st)_l$.

A.12 Cálculo de $K_{rst}^{(u)}$

Como $K_{rst}^{(u)} = \frac{\partial(K_{rst})}{\partial\beta_u}$, logo temos que: $K_{rst}^{(u)} = \frac{\partial}{\partial\beta_u}(\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rs,t)+(r,st)+(rt,s)]_l)$. Portanto, $K_{rst}^{(u)} = \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t)+(rs,tu)+(ru,ts)+(r,stu)+(rtu,s)+(rt,su)]_l$.

A.13 Cálculo de $K_{r,s,t}^{(u)}$

Como $K_{r,s,t}^{(u)} = \frac{\partial(K_{r,s,t})}{\partial\beta_u}$, logo temos que: $K_{r,s,t}^{(u)} = \frac{\partial(0)}{\partial\beta_u}$. Portanto, $K_{r,s,t}^{(u)} = 0$.

A.14 Cálculo de $K_{rs,t}^{(u)}$

Como $K_{rs,t}^{(u)} = \frac{\partial(K_{rs,t})}{\partial\beta_u}$, logo temos que: $K_{rs,t}^{(u)} = \frac{\partial(K_{rs,t})}{\partial\beta_u}(\beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rs,t)_l)$. Portanto, $K_{rs,t}^{(u)} = \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t) + (rs,tu)]_l$.

A.15 Cálculo de $K_{r,st}^{(u)}$

Como $K_{r,st}^{(u)} = \frac{\partial(K_{r,st})}{\partial\beta_u}$, logo temos que: $K_{r,st}^{(u)} = \frac{\partial(K_{r,st})}{\partial\beta_u}(-\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,st)_l)$. Portanto, $K_{r,st}^{(u)} = -\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(ru,st) + (r,stu)]_l$.

A.16 Cálculo de K_{rstu}

Como

$$U_{rstu} = \frac{\partial^4 \ell}{\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\beta_t\partial\beta_u} = \frac{\partial}{\partial\beta_u}(\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(3)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(r,s,t)_l +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{1}{\phi_l}[(rs,t) + (r,st) + (rt,s)]_l - \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rst)_l$$

Portanto

$$U_{rstu} = \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(4)} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(3)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}[(ru,s,t)+(r,su,t)+(r,s,tu)]_l$$

$$- \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(3)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}[(rs,t,u)+(r,st,u)+(rt,s,u)]_l$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t)+(rs,tu)+(ru,st)+(r,stu)+(rtu,s)+(rt,su)]_l +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{1}{\phi_l}(rst,u)_l) - \sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rsut)_l$$

Como $K_{rstu} = \mu_{rstu} = E(U_{rstu})$, logo temos que:

$$K_{rstu} = \alpha_{4,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l +$$

$$+\alpha_{3,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}[(ru,s,t)+(r,su,t)+(r,s,tu)]_l$$

$$-\alpha_{3,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}[(rs,t,u)+(r,st,u)+(rt,s,u)]_l$$

$$+\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t)+(rs,tu)+(ru,st)+(r,stu)+(rtu,s)+(rt,su)]_l +$$

$$+\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rst,u)_l) - \alpha_{1,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(rsut)_l$$

Como $\alpha_{3,0} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que:

$$K_{rstu} = \alpha_{4,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l + \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t)+(rs,tu)+$$

$$(ru,st)+(r,stu)+(rtu,s)+(rt,su)+(rst,u)]_l$$

A.17 Cálculo de $K_{r,s,t,u}$

Como

$U_{r,s,t,u} = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_r}\frac{\partial \ell}{\partial \beta_s}\frac{\partial \ell}{\partial \beta_t}\partial \beta_u = U_r U_s U_t U_u$

logo temos:

$$U_{r,s,t,u} = (-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(r)_l)(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(s)_l)$$
$$(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(t)_l)(-\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}}(u)_l)$$

.

Portanto $U_{r,s,t,u} = -\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l$.

Como $\mu_{r,s,t,u} = E(U_{r,s,t,u})$, logo temos que:

$\mu_{r,s,t,u} = -\beta_{1,1,1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l$.

Como $K_{r,s,t,u} = \mu_{r,s,t,u} - \mu_{r,s}\mu_{t,u} - \mu_{r,t}\mu_{s,u} - \mu_{r,u}\mu_{s,t}$, logo temos que:

$$K_{r,s,t,u} = \beta_{1,1,1,1} \sum \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - 3(-\alpha_{2,0} \sum \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)(-\alpha_{2,0} \sum \frac{1}{\phi_l}(t,u)_l).$$

Portanto temos que: $K_{r,s,t,u} = (\beta_{1,1,1,1} - 3\alpha^2_{2,0}) \sum \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l$

A.18 Cálculo de $K_{rs,tu}$

Como

$U_{rs,tu} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_r \partial \beta_s}\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_t \partial \beta_u} = U_{rs}U_{tu}$ logo temos:

$$U_{rs,tu} = \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} t^{(2)}_{(z_l)} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(2)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(rs,t,u)_l -$$
$$\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(r,s,tu)_l + \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{1}{\phi_l}(rs,tu)_l.$$

Como $\mu_{rs,tu} = E(U_{rs,tu})$, logo temos que:

$$\mu_{rs,tu} = \beta_{2,2} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \beta_{1,2} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(rs,t,u)_l -$$
$$\beta_{2,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(r,s,tu)_l + \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rs,tu)_l.$$

Como $\beta_{1,2} = 0$ e $\beta_{2,1} = 0$, logo temos que:

$$\mu_{rs,tu} = \beta_{2,2} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l + \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rs,tu)_l.$$

Como $K_{rs,tu} = \mu_{rs,tu} - \mu_{rs}\mu_{tu}$ logo temos que:

$$K_{rs,tu} = (\beta_{2,2} - \alpha_{2,0}^2) \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l + \beta_{1,1} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rs,tu)_l.$$

A.19 Cálculo de $K_{rst,u}$

Como $K_{rst,u} = K_{rst}^{(u)} = \frac{\partial(K_{rst})}{\partial\beta_u}$, logo temos que:

$$K_{rst,u} = \frac{\partial}{\partial\beta_u}(\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rs,t) + (r,st) + (rt,s)]_l).$$

Portanto,

$$K_{rst,u} = \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}[(rsu,t) + (rs,tu) + (ru,ts) + (r,stu) + (rtu,s) + (rt,su)]_l.$$

A.20 Cálculo de $K_{r,stu}$

Como $K_{r,stu} + K_{rstu} - K_{stu}^{(r)} = 0$, logo temos que: $K_{r,stu} = K_{stu}^{(r)} - K_{rstu}$.

Portanto temos que:

$$K_{r,stu} = -\alpha_{4,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,stu)_l.$$

A.21 Cálculo de $K_{r,s,tu}$

Como $K_{r,s,tu} = K_{rstu} - K_{rtu}^{(s)} - K_{stu}^{(r)} + K_{tu}^{(rs)}$ logo temos que:

$$K_{r,s,tu} = \alpha_{4,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(rs,tu)_l.$$

A.22 Cálculo de $K_{rs,t,u}$

Como

$$U_{rs,t,u} = U_{rs}U_tU_t = \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(rs,t,u)_l.$$

Como $\mu_{rs,t,u} = E(U_{rs,t,u})$, logo temos que:

$$\mu_{rs,t,u} = \beta_{2,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \beta_{1,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(rs,t,u)_l).$$

Como $\beta_{1,1,1} = 0$, logo temos que:$\mu_{rs,t,u} = \beta_{2,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l$. Como $K_{rs,t,u} = \mu_{rs,t,u} - \mu_{rs}\mu_{t,u}$, logo temos que:

$$K_{rs,t,u} = (\beta_{2,1,1} - \alpha_{2,0}^2)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l.$$

A.23 Cálculo de $K_{r,st,u}$

Como $U_{r,st,u} = U_rU_{st}U_u$ logo temos

$$U_{r,st,u} = \sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(r,st,u)_l.$$

Como $\mu_{r,st,u} = E(U_{r,st,u})$, logo temos que:

$$\mu_{r,st,u} = \beta_{2,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l - \beta_{1,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\phi_l^3}}(r,st,u)_l.$$

Como $\beta_{1,1,1} = 0$, logo temos que:$\mu_{r,st,u} = \beta_{2,1,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l$. Como $K_{r,st,u} = \mu_{r,st,u} + \mu_{r,u}\mu_{st}$, finalmente temos que:

$$K_{r,st,u} = (\beta_{2,1,1} + \alpha_{2,0}^2)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l.$$

Apêndice B

Cálculos dos cumulantes em relação ao parâmetro γ.

Neste apêndice apresentamos a obtenção de alguns cumulantes conjuntos com derivadas do logaritmo da função verossimilhança do modelo não-linear heteroscedásticos necessários aos cálculos do termo que define a correção de Bartlett para a estatística RV os cumulantes em relação ao parâmetro γ, e suas derivadas.

B.1 Cálculo de K_R

Como

$U_R = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_R}$, logo temos que:

$U_R = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_R} = \frac{\partial(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^{n} \log g(z_l^2))}{\partial \gamma_R}$, com R=1,. . . , q,

$U_R = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l}(R)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} z_l \frac{h_l'}{\phi_l}(R)_l$.

Como $K_R = \mu_R = E(U_R)$, logo temos que:

$$K_R = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l}(R)_l - \frac{1}{2}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l}(R)_l.$$

Como $K_R = 0$, logo temos que $\alpha_{1,1} = -1$.

B.2 Cálculo de K_{RS}

Como

$U_{RS} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \gamma_R \partial \gamma_S}$, logo

$$U_{RS} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{19l}(R,S)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} Z_l^2 \Lambda_{3l}(R,S)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} Z_l \Lambda_{20l}(R,S)_l$$

Como $K_{RS} = \mu_{RS} = E(U_{RS})$, logo temos que:

$$K_{RS} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{19l}(R,S)_l + \frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{3l}(R,S)_l + \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{20l}(R,S)_l.$$

Como $\alpha_{1,1} = -1$, logo temos que:

$$K_{RS} = \frac{\alpha_{2,2}-1}{4}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{3l}(R,S)_l,$$

em que $\Lambda_{3l} = \frac{h'^2}{\phi_l^2}$, $\quad \Lambda_{19l} = \frac{h''_l \phi_l - h'^2_l}{\phi_l^2}$, $\quad \Lambda_{20l} = \frac{-2h''_l \phi_l + 3h'^2_l}{\phi_l^2}$.

B.3 Cálculo de $K_{R,S}$

Como

$K_{R,S} = -K_{RS}$, logo temos que

$$K_{R,S} = -\frac{\alpha_{2,2}-1}{4}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{3l}(R,S)_l.$$

B.4 Cálculo de $K^{(T)}_{RS}$

Como $K^{(T)}_{RS} = \frac{\partial (K_{RS})}{\partial \gamma_T}$, logo temos que:

$$K^{(T)}_{RS} = \frac{\partial}{\partial \gamma_t}\left(\frac{\alpha_{2,2}-1}{4}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{3l}(R,S)_l\right).$$

Portanto, $K^{(T)}_{RS} = \frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{7l}(R,S,T)_l$, em que $\Lambda_{7l} = \frac{h'_l h''_l \phi_l - h'^3_l}{\phi_l^3}$

B.5 Cálculo de $K_{R,S}^{(T)}$

Como $K_{R,S}^{(T)} = \frac{\partial(K_{R,S})}{\partial\gamma_t} = \frac{\partial(-K_{RS})}{\partial\gamma_T}$, logo temos que:

$$K_{R,S}^{(T)} = \frac{\partial}{\partial\gamma_t}(-\frac{\alpha_{2,2}-1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{3l}(R,S)_l).$$

Portanto, $K_{R,S}^{(T)} = -\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(R,S)_l$

B.6 Cálculo de $K_{RS}^{(TU)}$

Como $K_{RS}^{(TU)} = \frac{\partial^2(K_{RS})}{\partial\gamma_T\partial\gamma_U} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}(\frac{\partial(K_{RS})}{\partial\gamma_T}) = \frac{\partial(K_{RS}^{(T)})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K_{RS}^{(TU)} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}(\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(R,S)_l),$$

Portanto $K_{RS}^{(TU)} = \frac{\alpha_{2,0}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{21l}(R,T,U,S)_l$, em que $\Lambda_{21l} = \frac{h''^2_l\phi_l^2 - 5h'^2_l h''_l\phi_l + h'_l h'''_l\phi_l^2 + 3h'^4_l}{\phi_l^4}$

B.7 Cálculo de $K_{R,S}^{(TU)}$

Como $K_{R,S}^{(TU)} = \frac{\partial^2(K_{R,S})}{\partial\gamma_T\partial\gamma_U} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}(\frac{\partial(K_{R,S})}{\partial\gamma_T}) = \frac{\partial(-K_{R,S}^{(T)})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K_{R,S}^{(TU)} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}(-\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(R,S)_l),$$

Portanto $K_{R,S}^{(TU)} = -\frac{\alpha_{2,0}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{21l}(R,T,U,S)_l$.

B.8 Cálculo de K_{RST}

Como $U_{RST} = \frac{\partial^3\ell}{\partial\gamma_R\partial\gamma_S\partial\gamma_T}$ então

$$U_{RST} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(R,S,T)_l - \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}z_l^3\Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(2)}z_l^2\Lambda_{8l}(R,S,T)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(1)}z_l\Lambda_{14l}(R,S,T)_l.$$

Como $K_{RST} = \mu_{RST} = E(U_{RST})$, logo temos que:

$$K_{RST} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(R,S,T)_l - \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(R,S,T)_l + \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(R,S,T)_l,$$

em que $\Lambda_{5l} = \frac{h'^3}{\phi_l^3}$, $\Lambda_{8l} = \frac{2h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l}{\phi_l^3}$, $\Lambda_{13l} = \frac{3h'_l h''_l \phi_l - 2h'^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}$, $\Lambda_{14l} = \frac{7h'_l h''_l \phi_l - 5h'^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}$.

B.9 Cálculo de $K_{R,S,T}$

Como

$U_{R,S,T} = \frac{\partial\ell}{\partial\gamma_R}\frac{\partial\ell}{\partial\gamma_S}\frac{\partial\ell}{\partial\gamma_T} = U_R U_S U_T$

logo temos:

$$U_{R,S,T} = -\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{3}{8}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)} z_l \Lambda_{5l}(R,S,T)_l -$$

$$\frac{3}{8}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{3}{8}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)}t^{(1)}_{(z_l)} z_l^3 \Lambda_{5l}(R,S,T)_l.$$

Como $K_{R,S,T} = \mu_{R,S,T} = E(U_{R,S,T})$, logo temos que:

$$K_{R,S,T} = -\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5L}(R,S,T)_l - \frac{3}{8}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l -$$

$$\frac{3}{8}\alpha_{1,1,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{3}{8}\alpha_{1,1,1,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l.$$

Assim temos:

$$K_{R,S,T} = -\frac{1 + 3\alpha_{1,1} + 3\alpha_{1,1,2} + \alpha_{1,1,1,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l$$

B.10 Cálculo de $K_{RS,T}$

Como

$U_{RS,T} = \frac{\partial^2\ell}{\partial\beta_R\partial\gamma_S}\frac{\partial\ell}{\partial\gamma_T} = U_{RS}U_T$ logo temos:

$$U_{RS,T} = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{7L}(R,S,T)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} z_l \Lambda_{7l}(R,S,T)_l -$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} z_l^3 \Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} z_l \Lambda_{8l}(R,S,T)_l + \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} t^{(1)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{8l}(R,S,T)_l.$$

Como $K_{RS,T} = \mu_{RS,T} = E(U_{RS,T})$, logo temos que:

$$K_{RS,T} = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{7L}(R,S,T)_l + \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{7l}(R,S,T)_l -$$

$$-\frac{1}{8}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{1}{8}\alpha_{2,1,3}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$+\frac{1}{8}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{8l}(R,S,T)_l + \frac{1}{8}\alpha_{1,1,2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{8l}(R,S,T)_l.$$

B.11 Cálculo de $K_{R,ST}$

Como $K_{R,ST} + K_{RST} - K^{(R)}_{ST} = 0$, logo temos que:

$K_{R,ST} = K^{(R)}_{ST} - K_{RST}$, assim

$$K_{R,ST} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{18L}(R,S,T)_l + \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{5l}(R,S,T)_l - \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{14l}(R,S,T)_l,$$

em que $\Lambda_{18l} = \frac{4h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}$

B.12 Cálculo de $K^{(U)}_{RST}$

Como $K^{(U)}_{RST} = \frac{\partial(K_{RST})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K^{(U)}_{RST} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}\Big(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{13l}(R,S,T)_l - \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{5l}(R,S,T)_l +$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(R,S,T)_l+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(R,S,T)_l).$$

Assim

$$K_{RST}^{(U)}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l-\frac{3}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l+$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{23l}(R,S,T,U)_l+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l,$$

em que $\Lambda_{9l}=\frac{h'^2_l h''_l\phi_l-h'^4_l}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{22l}=\frac{3h''^2_l\phi_l^2-12h'^2_l h''_l\phi_l+6h'^4_l+4h'_l h'''_l\phi_l^2-h''''_l\phi_l^3}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{23l}=\frac{2h''^2_l\phi_l^2-13h'^2_l h''_l\phi_l+9h'^4_l+2h'_l h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{24l}=\frac{7h''^2_l\phi_l^2-29h'^2_l h''_l\phi_l+15h'^4_l+8h'_l h'''_l\phi_l^2-h''''_l\phi_l^3}{\phi_l^4}$.

B.13 Cálculo de $K_{R,S,T}^{(U)}$

Como $K_{R,S,T}^{(U)}=\frac{\partial(K_{R,S,T})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K_{R,S,T}^{(U)}=\frac{\partial}{\partial\gamma_U}(-\frac{1+3\alpha_{1,1}+3\alpha_{1,1,2}+\alpha_{1,1,1,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l).$$

Assim

$$K_{R,S,T}^{(U)}=-\frac{3+9\alpha_{1,1}+9\alpha_{1,1,2}+3\alpha_{1,1,1,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l$$

B.14 Cálculo de $K_{RS,T}^{(U)}$

Como $K_{RS,T}^{(U)}=\frac{\partial(K_{RS,T})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K_{RS,T}^{(U)}=\frac{\partial}{\partial\gamma_U}(\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7L}(R,S,T)_l+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(R,S,T)_l-$$

$$-\frac{1}{8}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l-\frac{1}{8}\alpha_{2,1,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l+$$

$$+\frac{1}{8}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(R,S,T)_l+\frac{1}{8}\alpha_{1,1,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(R,S,T)_l).$$

Assim

$$K_{RS,T}^{(U)}=\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{21l}(R,S,T,U)_l-\frac{3(\alpha_{2,2}\alpha_{2,1,3})}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l+$$

$$+\frac{1}{8}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{25l}(R,S,T,U)_l+\frac{1}{8}\alpha_{1,1,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{26l}(R,S,T,U)_l,$$

em que $\Lambda_{25l}=\frac{4h''^2_l\phi_l^2-23h'^2_l h''_l\phi_l+15h'^4_l+4h'_l h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^4}$ e
$\Lambda_{26l}=\frac{2h''^2_l\phi_l^2-13h'^2_l h''_l\phi_l+9h'^4_l+2h'_l h'''_l\phi_l^2}{\phi_l^4}$.

B.15 Cálculo de $K_{R,ST}^{(U)}$

Como $K_{R,S,T}^{(U)}=\frac{\partial(K_{RS,T})}{\partial\gamma_U}$, logo temos que:

$$K_{RS,T}^{(U)}=\frac{\partial}{\partial\gamma_U}(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{18l}(R,S,T)_l+\frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l+$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,S,T)_l-\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(R,S,T)_l).$$

Assim

$$K_{R,S,T}^{(U)}=-\frac{3+9\alpha_{1,1}+9\alpha_{1,1,2}+3\alpha_{1,1,1,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l$$

B.16 Cálculo de K_{RSTU}

Como $U_{RSTU}=\frac{\partial^4\ell}{\partial\gamma_R\,\partial\gamma_S\,\partial\gamma_T\,\partial\gamma_U}=\frac{\partial}{\partial\gamma_U}(U_{RST})$
logo temos que:

$$U_{RSTU}=\frac{\partial}{\partial\gamma_U}(\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(R,S,T)_l-\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}z_l^3\Lambda_{5l}(R,S,T)_l+$$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(2)}z_l^2\Lambda_{8l}(R,S,T)_l+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(1)}z_l\Lambda_{14l}(R,S,T)_l)$$

Assim

$$U_{RSTU}=\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l+\frac{1}{16}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(4)}z_l^4\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l+$$

$$+\frac{3}{16}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}z_l^3\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l-\frac{3}{8}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}z_l^3\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l-$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l^3 \Lambda_{8l}(R,S,T,U)_l - \frac{2}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{8l}(R,S,T,U)_l +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{23l}(R,S,T,U)_l - \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l^2 \Lambda_{28l}(R,S,T,U)_l -$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} z_l \Lambda_{28l}(R,S,T,U)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} z_l \Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l$$

Como $K_{RSTU} = \mu_{RSTU} = E(U_{RSTU})$, logo temos que:

$$K_{RSTU} = \sum_{l=1}^{n} \Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l -$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{11l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{29l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{1,1}}{8}\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l,$$

em que $\Lambda_{6l} = \frac{h'^4}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{11l} = \frac{10h'^2_l h''_l \phi_l - 15h'^4_l}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{28l} = \frac{7h'^2_l h''_l \phi_l - 5h'^4_l - h'_l h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{29l} = \frac{4h''^2_l \phi_l^2 + 4h'_l h''_l \phi_l^2 - 37h'^2_l h''_l \phi_l + h'_l h'''_l \phi_l^2 + 29h'^4_l}{\phi_l^4}$.

Apêndice C

Cálculos dos cumulantes em relação aos parâmetros β e γ.

Neste apêndice apresentamos a obtenção de alguns cumulantes conjuntos com derivadas do logaritmo da função verossimilhança do modelo não-linear heteroscedásticos necessários aos cálculos do termo que define a correção de Bartlett para a estatística RV os cumulantes em relação aos parâmetros β e γ, e suas derivadas.

C.1 Cálculo de K_{Rs}

Como $U_{Rs} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \gamma_R \partial \beta_s}$, logo temos

$$U_{Rs} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, s)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, s)_l.$$

Como $K_{Rs} = \mu_{Rs} = E(U_{Rs})$, logo temos que:

$$K_{Rs} = \frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, s)_l + \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, s)_l.$$

Como $\alpha_{2,1} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos $K_{Rs} = 0$

C.2 Cálculo de $K_{Rs}^{(T)}$

Como $U_{Rs}^{(T)} = \frac{\partial(K_{Rs})}{\partial \gamma_T}$, logo temos $K_{Rs}^{(T)} = \frac{\partial(0)}{\partial \gamma_T} = 0$

C.3 Cálculo de $K_{Rs}^{(t)}$

Como $U_{Rs}^{(t)} = \frac{\partial(K_{Rs})}{\partial\beta_t}$, logo temos $K_{Rs}^{(t)} = \frac{\partial(0)}{\partial\beta_t} = 0$

C.4 Cálculo de $K_{Rs}^{(TU)}$

Como $U_{Rs}^{(TU)} = \frac{\partial^2(K_{Rs})}{\partial\gamma_T\partial\gamma_U}$, logo temos $K_{Rs}^{(TU)} = \frac{\partial^2(0)}{\partial\gamma_T\partial\gamma_U} = 0$

C.5 Cálculo de $K_{Rs}^{(Tu)}$

Como $U_{Rs}^{(Tu)} = \frac{\partial^2(K_{Rs})}{\partial\gamma_T\partial\beta_u}$, logo temos $K_{Rs}^{(Tu)} = \frac{\partial^2(0)}{\partial\gamma_T\partial\beta_u} = 0$

C.6 Cálculo de $K_{Rs}^{(tu)}$

Como $U_{Rs}^{(tu)} = \frac{\partial^2(K_{Rs})}{\partial\beta_t\partial\beta_u}$, logo temos $K_{Rs}^{(tu)} = \frac{\partial^2(0)}{\partial\beta_t\partial\beta_u} = 0$

C.7 Cálculo de $K_{RS}^{(t)}$

Como $U_{RS}^{(t)} = \frac{\partial(K_{RS})}{\partial\beta_t}$, logo temos $K_{RS}^{(t)} = 0$

C.8 Cálculo de $K_{RS}^{(tu)}$

Como $U_{RS}^{(tu)} = \frac{\partial^2(K_{RS})}{\partial\beta_t\partial\beta_u}$, logo temos $K_{RS}^{(tu)} = 0$

C.9 Cálculo de $K_{RS}^{(Tu)}$

Como $U_{RS}^{(Tu)} = \frac{\partial^2(K_{RS})}{\partial\gamma_T\partial\beta_u}$, logo temos $K_{RS}^{(Tu)} = 0$

C.10 Cálculo de $K_{rs}^{(T)}$

Como $K_{rs}^{(T)} = \frac{\partial(K_{rs})}{\partial\gamma_T}$, logo temos $K_{rs}^{(T)} = \frac{\partial}{\partial\gamma_T}(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)$.

Assim $K_{rs}^{(T)} = -\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'}{\phi_l^2}(r,s,T)_l$.

C.11 Cálculo de $K_{rs}^{(Tu)}$

Como $K_{rs}^{(Tu)} = \frac{\partial^2 (K_{rs})}{\partial\gamma_T \partial\beta_u}$, logo temos $K_{rs}^{(Tu)} = \frac{\partial^2}{\partial\gamma_T \partial\beta_u}(\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)$.

Assim $K_{rs}^{(Tu)} = -\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{h'}{\phi_l^2}[(ru,s,T) + (r,su,T)]_l$.

C.12 Cálculo de $K_{rs}^{(TU)}$

Como $K_{rs}^{(TU)} = \frac{\partial^2 (K_{rs})}{\partial\gamma_T \partial\gamma_U}$, logo temos $K_{rs}^{(TU)} = \frac{\partial^2}{\partial\gamma_T \partial\gamma_U}(\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\phi_l}(r,s)_l)$.

Assim $K_{rs}^{(TU)} = -\alpha_{2,0} \sum_{l=1}^{n} \frac{h''\phi_l - 2h'^2}{\phi_l^3}(r,s,T,U)_l$.

C.13 Cálculo de K_{Rst}

Como $U_{Rst} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial\gamma_R \partial\beta_s \partial\beta_t}$, logo temos

$$U_{Rst} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(3)} z_l \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(2)} z_l \frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,s,t)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} \frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,s,t)_l.$$

Como $K_{Rst} = \mu_{Rst} = E(U_{Rst})$, logo temos que:

$$K_{Rst} = -\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l - \frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,s,t)_l - \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l + \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,s,t)_l.$$

Como $\alpha_{2,1} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que

$$K_{Rst} = -\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l - \frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l.$$

Assim

$$K_{Rst} = -\frac{\alpha_{3,1} + \alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h_l'}{\phi_l^2}(R,s,t)_l.$$

C.14 Cálculo de $K^{(u)}_{Rst}$

Como $K^{(u)}_{Rst} = \frac{\partial\ K_{Rst}}{\partial\beta_u}$, logo temos $K^{(u)}_{Rst} = \frac{\partial}{\partial\beta_u}(-\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,s,t)_l)$, logo temos que: $K^{(u)}_{Rst} = -\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R,su,t)+(R,s,tu)]_l$

C.15 Cálculo de $K^{(U)}_{Rst}$

Como $K^{(U)}_{Rst} = \frac{\partial\ K_{Rst}}{\partial\gamma_U}$, logo temos $K^{(U)}_{Rst} = \frac{\partial}{\partial\gamma_U}(-\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,s,t)_l)$, logo temos que: $K^{(U)}_{Rst} = -\frac{\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''_l\phi_l-2h'^2}{\phi_l^3}(R,s,t,U)_l$

C.16 Cálculo de K_{RSt}

Como $U_{RSt} = \frac{\partial^3\ell}{\partial\gamma_R\partial\gamma_S\partial\beta_t} = \frac{\partial}{\partial\beta_t}(U_{RS})$, logo temos que

$$U_{RSt} = \frac{\partial}{\partial\beta_t}(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''_l}{\phi_l}(R,S)_l + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l^2\frac{h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}z_l\frac{h'^2_l}{\phi_l^2}(R,S)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}z_l\frac{h''_l}{\phi_l}(R,S)_l)$$

Assim

$$U_{RSt} = -\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t^{(3)}_{(z_l)}z_l^2\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l\frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,S,t)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(1)}_{(z_l)}\frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,S,t)_l$$

Como $K_{RSt} = \mu_{RSt} = E(U_{RSt})$, logo temos que:

$$K_{RSt} = -\frac{1}{4}\alpha_{3,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l - \frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l - \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,S,t)_l$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,S,t)_l+\frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,S,t)_l$$

Como $\alpha_{3,2}=0,\ \alpha_{2,1}=0$ e $\alpha_{1,0}=0$, logo temos $K_{RSt}=0$

C.17 Cálculo de $K_{RSt}^{(u)}$

Como $U_{RSt}^{(u)}=\frac{\partial(K_{RSt})}{\partial\beta_u}$, logo temos $K_{RSt}^{(u)}=\frac{\partial(0)}{\partial\beta_u}=0$

C.18 Cálculo de $K_{RSt}^{(U)}$

Como $U_{RSt}^{(U)}=\frac{\partial(K_{RSt})}{\partial\gamma_U}$, logo temos $K_{RSt}^{(U)}=\frac{\partial(0)}{\partial\gamma_U}=0$

C.19 Cálculo de $K_{RST}^{(u)}$

Como $U_{RST}^{(u)}=\frac{\partial(K_{RST})}{\partial\beta_u}$, logo temos $K_{RST}^{(u)}=0$

C.20 Cálculo de $K_{rst}^{(U)}$

Como $K_{rst}^{(U)}=\frac{\partial(K_{RST})}{\partial\beta_u}$, logo temos

$$K_{rst}^{(U)}=\frac{\partial}{\partial\beta_u}(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rs,t)+(r,st)+(rt,s)]_l)$$

Assim

$$K_{rst}^{(U)}=-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h_l'}{\phi_l^2}[(rs,t,U)+(r,st,U)+(rt,s,U)]_l$$

C.21 Cálculo de K_{Rstu}

Como $U_{Rstu}=\frac{\partial^4\ell}{\partial\gamma_R\partial\beta_s\partial\beta_t\partial\beta_u}$, logo temos

$$U_{Rstu}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(4)}z_l\frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,s,t,u)_l+\frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}\frac{h_l'}{\sqrt{\phi_l^5}}(R,s,t,u)_l-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t_{(z_l)}^{(3)}z_l\frac{h_l'}{\phi_l^2}[(R,su,t)+(R,st,u)+(R,s,tu)]_l-$$

$$-\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, stu)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, stu)_l.$$

Como $K_{Rstu} = \mu_{Rstu} = E(U_{Rstu})$, logo temos que:

$$K_{Rstu} = \frac{1}{2}\alpha_{4,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R, s, t, u)_l + \frac{3}{2}\alpha_{3,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^5}}(R, s, t, u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l -$$

$$-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, stu)_l - \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R, stu)_l.$$

Como $\alpha_{4,1} = 0$, $\alpha_{3,0} = 0$, $\alpha_{2,1} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que

$$K_{Rstu} = -\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l -$$

$$-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l.$$

Assim

$$K_{Rstu} = -\frac{\alpha_{3,1} + 2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'_l}{\phi_l^2}[(R, su, t) + (R, st, u) + (R, s, tu)]_l.$$

C.22 Cálculo de K_{RStu}

Como $U_{RStu} = \frac{\partial^4 \ell}{\partial\gamma_R\,\partial\gamma_S\,\partial\beta_t\,\partial\beta_u}$, logo temos

$$U_{RStu} = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(4)}_{(z_l)} z_l^2 \frac{{h'}_l^2}{\phi_l^3}(R, S, t, u)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l \frac{{h'}_l^2}{\phi_l^3}(R, S, t, u)_l -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l^2 \frac{{h'}_l^2}{\sqrt{\phi_l^5}}(R, S, tu)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l \frac{{h'}_l^2}{\phi_l^3}(R, S, t, u)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l \frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(3)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\phi^2_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{h'_l}{\phi^2_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)} z_l \frac{h'_l}{\sqrt{\phi^3_l}}(R,S,tu)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(2)}_{(z_l)}\frac{h'_l}{\phi^2_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} t^{(1)}_{(z_l)}\frac{h'_l}{\sqrt{\phi^3_l}}(R,S,tu)_l.$$

Como $K_{RStu} = \mu_{RStu} = E(U_{RStu})$, logo temos que:

$$K_{RStu} = \frac{1}{4}\alpha_{4,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{4}\alpha_{3,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l + \frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l - \frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l + \frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi^3_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\sqrt{\phi^5_l}}(R,S,tu)_l - \frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi^2_l}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi^2_l}(R,S,t,u)_l + \frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\sqrt{\phi^3_l}}(R,S,tu)_l -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l+\frac{1}{2}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\sqrt{\phi_l^3}}(R,S,tu)_l.$$

Como $\alpha_{3,2}=0,\ \alpha_{2,1}=0$ e $\alpha_{1,0}=0$, logo temos que

$$K_{RStu}=\frac{1}{4}\alpha_{4,2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l-\frac{1}{2}\alpha_{3,1}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l-\frac{1}{2}\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l.$$

Assim

$$K_{RStu}=\frac{\alpha_{4,2}+6\alpha_{3,1}+6\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(R,S,t,u)_l.$$

C.23 Cálculo de K_{RSTu}

Como $U_{RSTu}=\frac{\partial^4\ell}{\partial\gamma_R\partial\gamma_S\partial\gamma_T\partial\beta_u}$, logo temos

$$U_{RSTu}=\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}t^{(4)}_{(z_l)}z_l^3\frac{h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l+\frac{3}{8}\sum_{l=1}^{n}t^{(3)}_{(z_l)}z_l^2\frac{h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t^{(3)}_{(z_l)}z_l^2\frac{2h'_lh''_l\phi_l-3h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l\frac{2h'_lh''_l\phi_l-3h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}t^{(2)}_{(z_l)}z_l\frac{5h'_lh''_l\phi_l-3h'^3_l-2h'''_l\phi_l^2}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} t_{(z_l)}^{(1)} \frac{5h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l - 2h'''_l \phi_l^2}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l.$$

Como $K_{RSTu} = \mu_{RSTu} = E(U_{RSTu})$, logo temos que:

$$U_{RSTu} = \frac{1}{8}\alpha_{4,3}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l + \frac{3}{8}\alpha_{3,2}\sum_{l=1}^{n} \frac{h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l -$$

$$-\frac{1}{4}\alpha_{3,2}\sum_{l=1}^{n} \frac{2h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{2h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l -$$

$$-\frac{1}{4}\alpha_{2,1}\sum_{l=1}^{n} \frac{5h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l - 2h'''_l \phi_l^2}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l$$

$$-\frac{1}{4}\alpha_{1,0}\sum_{l=1}^{n} \frac{5h'_l h''_l \phi_l - 3h'^3_l - 2h'''_l \phi_l^2}{\sqrt{\phi_l^7}}(R,S,T,u)_l.$$

Como $\alpha_{4,3} = 0$, $\alpha_{3,2} = 0, \alpha_{2,1} = 0$ e $\alpha_{1,0} = 0$, logo temos que $K_{RSTu} = 0$.

Apêndice D

Cálculos de ϵ em relação ao parâmetro β.

Neste apêndice apresentaremos os cálculos de obtenção de λ's com 4 índices e 6 índices,mostraremos também para os ϵ's e $d_{p_1,\beta}$.

D.1 Cálculo de λ_{rstu}

Como $\lambda_{rstu} = K^{rs}K^{tu}(\frac{K_{rstu}}{4} - K_{rst}^{(u)} + K_{rt}^{(su)})$, logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{rstu} = K^{rs}K^{tu}\{\frac{1}{4}(\alpha_{4,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r,s,t,u)_l +$$

$$+\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rsu,t) + (rs,tu) + (ru,st)$$

$$+(r,stu) + (rtu,s) + (rt,su) + (rst,u)]_l)$$

$$-\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rsu,t) + (rs,tu) + (ru,ts) + (r,stu) + (rtu,s) + (rt,su)]_l$$

$$+\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rsu,t) + (rs,tu) + (ru,st) + (r,stu)]_l\}$$

assim

$$\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r)_lK^{rs}(s)_l(t)_lK^{tu}(u)_l +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rsu)_l K^{rs}K^{tu}(t)_l + (rs)_l K^{rs}(tu)_l K^{tu} + (ru)_l K^{rs}K^{tu}(st)_l$$

$$+(r)_l K^{rs}K^{tu}(stu)_l - (rtu)_l K^{rs}K^{tu}(s)_l - 3(rt)_l K^{rs}K^{tu}(su)_l + (rst)_l K^{rs}K^{tu}(u)_l].$$

D.2 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rstu}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{rstu}$, logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \sum{}'\{\frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(r)_l K^{rs}(s)_l(t)_l K^{tu}(u)_l +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rsu)_l K^{rs}K^{tu}(t)_l + (rs)_l K^{rs}(tu)_l K^{tu} + (ru)_l K^{rs}K^{tu}(st)_l$$

$$+(r)_l K^{rs}K^{tu}(stu)_l - 3(rtu)_l K^{rs}K^{tu}(s)_l - 3(rt)_l K^{rs}K^{tu}(su)_l + (rst)_l K^{rs}K^{tu}(u)_l]\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l^2}(\sum{}'(r)_l K^{rs}(s)_l)(\sum{}'(t)_l K^{tu}(u)_l) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}(\sum{}'(rsu)_l K^{rs}K^{tu}(t)_l) + (\sum{}'(rs)_l K^{rs})(\sum{}'(tu)_l K^{tu})$$

$$+(\sum{}'(ru)_l K^{rs}K^{tu}(st)_l) + (\sum{}'(r)_l K^{rs}K^{tu}(stu)_l)$$

$$-3(\sum{}'(rtu)_l K^{rs}K^{tu}(s)_l) - 3(\sum{}'(rt)_l K^{rs}K^{tu}(su)_l)$$

$$+(\sum{}'(rst)_l K^{rs}K^{tu}(u)_l)$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{1l}^2(z_{\beta d_{ll}})(z_{\beta d_{ll}}) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{1l}[\Delta_{ll} + (d_{ll})(d_{ll}) + b_{ll} + \Delta_{ll} - 3\Delta_{ll} - 3b_{ll} + \Delta_{ll}]$$

Portanto temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\sum_{l=1}^{n}\Lambda^2_{1l}z^2_{\beta d_{ll}} + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{1l}[d^2_{ll} - 2b_{ll}]$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}tr(\Lambda^2_1 Z^2_{\beta d}) + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}tr(\Lambda_1 D^2 - 2\Lambda_1 B_{\beta d})$$

Como as matrizes são diagonais, logo podemos escrever da seguinte forma

$$\sum{}'\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda^2_1 Z^2_{\beta d}\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D^2 - 2B_{\beta d})\iota,$$

em que $\Lambda_{1l} = \frac{1}{\phi_l}$

D.3 Cálculo de λ_{rstuvw}

Como $\lambda_{rstuvw} = K^{rs}K^{tu}K^{vw}\{K_{rtv}(\frac{K_{suw}}{6} - K^{(u)}_{sw}) + K_{rtu}(\frac{K_{svw}}{4} - K^{(v)}_{sw}) + K^{(v)}_{rt}K^{(u)}_{sw} + K^{(u)}_{rt}K^{(v)}_{sw}\}$, logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{rstuvw} = K^{rs}K^{tu}K^{tu}\{(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_i}[(rt,v) + (r,tv) + (rv,t)]_i)$$

$$(\frac{\alpha_{2,0}}{6}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(su,w) + (s,uw) + (sw,u)]_l - \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(s,uw) + (s,uw)]_l)$$

$$+(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(rt,u) + (r,tu) + (ru,t)]_i)$$

$$(\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(sv,w) + (s,vw) + (sw,v)]_l - \alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(s,vw) + (s,vw)]_l)$$

$$+(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_i}[(rv,t) + (r,tv)]_i)(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(s,uw) + (su,w)]_l)$$

$$+(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_i}[(ru,t) + (r,tu)]_i)(\alpha_{2,0}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\phi_l}[(s,vw) + (sv,w)]_l)\}$$

Assim

$$\lambda_{rstuvw} = -\frac{\alpha^2_{2,0}}{6}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[5\frac{1}{\phi_i}((rt)_i K^{rs}K^{tu}(su)_l)((v)_i K^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}((v)_i K^{vw}(uw)_l K^{tu}(rt)_i K^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l} - \frac{1}{\phi_i}((v)_i K^{vw}(sw)_l K^{rs}(rt)_i K^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}+5\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$-\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(tv)_iK^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}+5\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+5\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(u)_l)((rv)_iK^{rs}K^{vw}(sw)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[3\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+3\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+3\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}+3\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)(K^{tu}(tu)_i)(K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$-\frac{1}{\phi_i}(K^{tu}(tu)_i)((r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}+3\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+3\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$
$$+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)(K^{tu}(tu)_i)(K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}]$$

D.4 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rstuvw}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{rstuvw}$, logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=\sum{}'\{-\frac{\alpha_{2,0}^2}{6}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[5\frac{1}{\phi_i}((rt)_iK^{rs}K^{tu}(su)_l)((v)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}((v)_iK^{vw}(uw)_lK^{tu}(rt)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((v)_iK^{vw}(sw)_lK^{rs}(rt)_iK^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}+5\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(tv)_iK^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}+5\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(u)_l)((rv)_iK^{rs}K^{vw}(sw)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[3\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}+3\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)(K^{tu}(tu)_i)(K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(K^{tu}(tu)_i)((r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}+3\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}-\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}((t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(s)_l)(K^{tu}(tu)_i)(K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}]\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=-\frac{\alpha_{2,0}^2}{6}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(rt)_iK^{rs}K^{tu}(su)_l)(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(uw)_lK^{tu}(rt)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(sw)_lK^{rs}(rt)_iK^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(tv)_iK^{tu}(u)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+5\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_l)(\sum{}'(rv)_iK^{rs}K^{vw}(sw)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(u)_iK^{tu}(rt)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(\sum{}'K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'K^{tu}(tu)_i)(\sum{}'K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(K^{tu}(tu)_i)((r)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+3\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$-\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sw)_lK^{vw}(v)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(uw)_lK^{vw}(rv)_iK^{rs}(s)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(su)_lK^{rs}(rv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)((tv)_iK^{tu}K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}((r)_iK^{rs}(su)_lK^{tu}(tv)_iK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'K^{vw}(vw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(ru)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'K^{tu}(tu)_i)(\sum{}'K^{vw}(uw)_l)\frac{1}{\phi_l}$$

$$+\frac{1}{\phi_i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(sv)_lK^{vw}(w)_l)(\sum{}'K^{tu}(tu)_i)\frac{1}{\phi_l}]$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=-\frac{\alpha_{2,0}^{2}\delta_{(0,1,0,0,0)}^{3}}{6}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[5\Lambda_{1i}(b_{\beta_{il}})(z_{\beta_{il}})\Lambda_{1l}+5\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}$$

$$-\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}+5\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}+5\Lambda_{1i}(z_{\beta_{il}})(b_{il})\Lambda_{1l}-\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}$$

$$+5\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}+5\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}-\Lambda_{1i}(z_{\beta_{il}})(b_{il})\Lambda_{1l}]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^{2}\delta_{(0,1,0,0,0)}^{3}}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[3\Lambda_{1i}(g_{il})\Lambda_{1l}+3\Lambda_{1i}(a_{il})(d_{ll})\Lambda_{1l}-\Lambda_{1i}(g_{il})\Lambda_{1l}$$

$$+3\Lambda_{1i}(a_{li})(d_{ii})\Lambda_{1l}+3\Lambda_{1i}(z_{\beta_{il}})(d_{ii})(d_{ll})\Lambda_{1l}-\Lambda_{1i}(d_{ii})(a_{li})\Lambda_{1l}$$

$$+3\Lambda_{1i}(g_{il})\Lambda_{1l}+3\Lambda_{1i}(a_{il})(d_{ll})\Lambda_{1l}-\Lambda_{1i}(g_{il})\Lambda_{1l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^{2}\delta_{(0,1,0,0,0)}^{3}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}+\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}+\Lambda_{1i}(z_{\beta_{il}})(b_{il})\Lambda_{1l}+\Lambda_{1i}(f_{il})\Lambda_{1l}]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\delta^3_{(0,1,0,0,0)}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\Lambda_{1i}(a_{il})(d_{ll})\Lambda_{1l}+\Lambda_{1i}(g_{il})\Lambda_{1l}+\Lambda_{1i}(z_{\beta_{il}})(d_{ii})(d_{ll})\Lambda_{1l}$$

$$+\Lambda_{1i}(a_{li})(d_{ii})\Lambda_{1l}]$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=-\frac{\alpha_{2,0}^2}{6}\delta^3_{(0,1,0,0,0)}[5tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)+5\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota$$

$$-\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota+5\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota+5tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)-\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota$$

$$+5\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota+5\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota-tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^2}{4}\delta^3_{(0,1,0,0,0)}[3\iota^T\Lambda_1G_\beta\Lambda_1\iota+3\iota^T\Lambda_1A_\beta D\Lambda_1\iota-\iota^T\Lambda_1G_\beta\Lambda_1\iota$$

$$+3\iota^T\Lambda_1DA_\beta\Lambda_1\iota+3\iota^T\Lambda_1DZ_\beta D\Lambda_1\iota-\iota^T\Lambda_1DA_\beta\Lambda_1\iota$$

$$+3\iota^T\Lambda_1G_\beta\Lambda_1\iota+3\iota^T\Lambda_1A_\beta D\Lambda_1\iota-\iota^T\Lambda_iG_\beta\Lambda_1\iota]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\delta^3_{(0,1,0,0,0)}[\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota+\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota+tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)+\iota^T\Lambda_1F_\beta\Lambda_1\iota]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\delta^3_{(0,1,0,0,0)}[\iota^T\Lambda_1A_\beta D\Lambda_1\iota+\iota^T\Lambda_1G_\beta\Lambda_1\iota+\iota^T\Lambda_1DZ_\beta D\Lambda_1\iota+\iota^T\Lambda_1DA_\beta\Lambda_1\iota]$$

Portanto temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)-6\iota^T\Lambda_1A_\beta D\Lambda_1\iota$$

$$+6\iota^T\Lambda_1DA_\beta\Lambda_1\iota+3\iota^T\Lambda_1DZ_\beta D\Lambda_1\iota]$$

ou ainda

$$\sum{}'\lambda_{rstuvw}=\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T)+3\iota^T\Lambda_1(+2DA_\beta+DZ_\beta D-2A_\beta D)\Lambda_1\iota]$$

D.5 Cálculo de $\epsilon_{p,\beta}$

Como $\epsilon_{p,\beta} = \sum{}'(\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum{}'\lambda_{rstu} - \sum{}'\lambda_{rstuvw}$

Logo substituindo temos que

$$\epsilon_{p,\beta} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1^2 Z^2_{\beta d}\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D^2 - 2B_{\beta d})\iota$$
$$-\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T) + 3\iota^T\Lambda_1(+2DA_\beta + DZ_\beta D - 2A_\beta D)\Lambda_1\iota]$$

D.6 Cálculo de $\sum{}''\lambda_{rstu}$

Para o cálculo de $\sum{}''\lambda_{rstu}$ o resultado, será a mesma expressão do $\sum{}'\lambda_{rstu}$ só que com o posto da matriz reduzido, ou seja, será feito uma partição da matriz da forma a seguir

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 \end{pmatrix}_{nxp}$$

de modo que $\widetilde{X}_{1_{nxp_1}}$ e $\widetilde{X}_{2_{nx(p-p_1)}}$, onde todos os cálculos serão feitos substituindo o $\widetilde{X}$ pelo $\widetilde{X}_2$.

Logo, identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda^2_{1l}(z_{2\beta d_{ll}})(z_{2\beta d_{ll}}) +$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{1l}[\Delta_{2ll} + (d_{2ll})(d_{2ll}) + b_{2ll} + \Delta_{2ll} - 3\Delta_{2ll} - 3b_{2ll} + \Delta_{2ll}]$$

Portanto temos que

$$\sum{}''\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda^2_{1l}z^2_{2\beta d_{ll}} + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{1l}[d^2_{2ll} - 2b_{2ll}]$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}''\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}tr(\Lambda_1^2 Z^2_{2\beta d}) + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}tr(\Lambda_1 D_2^2 - 2\Lambda_1 B_{2\beta d})$$

Como as matrizes são diagonais, logo podemos escrever da seguinte forma

$$\sum{}''\lambda_{rstu} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1^2 Z^2_{2\beta d}\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D_2^2 - 2B_{2\beta d})\iota$$

D.7 Cálculo de $\sum{}''\lambda_{rstuvw}$

Para o cálculo de $\sum{}''\lambda_{rstuvw}$ o resultado, será a mesma expressão do $\sum{}'\lambda_{rstuvw}$ só que com o posto da matriz reduzido, ou seja, será feito uma partição da matriz da forma a seguir

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 \end{pmatrix}_{nxp}$$

de modo que $\widetilde{X}_{1_{nxp_1}}$ e $\widetilde{X}_{2_{nx(p-p_1)}}$, onde todos os cálculos serão feitos substituindo o $\widetilde{X}$ pelo $\widetilde{X}_2$.

Logo temos

$$\sum{}''\lambda_{rstuvw} = -\frac{\alpha^2_{2,0}}{6}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[5\Lambda_{1i}(b_{2\beta_{il}})(z_{2\beta_{il}})\Lambda_{1l} + 5\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l}$$

$$-\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} + 5\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} + 5\Lambda_{1i}(z_{2\beta_{il}})(b_{2il})\Lambda_{1l} - \Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l}$$

$$+5\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} + 5\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} - \Lambda_{1i}(z_{2\beta_{il}})(b_{2il})\Lambda_{1l}]$$

$$-\frac{\alpha^2_{2,0}}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[3\Lambda_{1i}(g_{2il})\Lambda_{1l} + 3\Lambda_{1i}(a_{2il})(d_{2ll})\Lambda_{1l} - \Lambda_{1i}(g_{2il})\Lambda_{1l}$$

$$+3\Lambda_{1i}(a_{2li})(d_{2ii})\Lambda_{1l} + 3\Lambda_{1i}(z_{2\beta_{il}})(d_{2ii})(d_{2ll})\Lambda_{1l} - \Lambda_{1i}(d_{2ii})(a_{2li})\Lambda_{1l}$$

$$+3\Lambda_{1i}(g_{2il})\Lambda_{1l} + 3\Lambda_{1i}(a_{2il})(d_{2ll})\Lambda_{1l} - \Lambda_{1i}(g_{2il})\Lambda_{1l}]$$

$$+\alpha^2_{2,0}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} + \Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l} + \Lambda_{1i}(z_{2\beta_{il}})(b_{2il})\Lambda_{1l} + \Lambda_{1i}(f_{2il})\Lambda_{1l}]$$

$$+\alpha^2_{2,0}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}[\Lambda_{1i}(a_{2il})(d_{2ll})\Lambda_{1l} + \Lambda_{1i}(g_{2il})\Lambda_{1l} + \Lambda_{1i}(z_{2\beta_{il}})(d_{2ii})(d_{2ll})\Lambda_{1l} +$$

$$\Lambda_{1i}(a_{2li})(d_{2ii})\Lambda_{1l}]$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum {}''\lambda_{rstuvw} = -\frac{\alpha_{2,0}^2}{6}\delta_{(0,1,0,0,0)}^3[5tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) + 5\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota$$
$$-\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota + 5\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota + 5tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) - \iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota$$
$$+5\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota + 5\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota - tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T)]$$

$$-\frac{\alpha_{2,0}^2}{4}\delta_{(0,1,0,0,0)}^3[3\iota^T\Lambda_1 G_{2\beta}\Lambda_1\iota + 3\iota^T\Lambda_1 A_{2\beta}D_2\Lambda_1\iota - \iota^T\Lambda_1 G_{2\beta}\Lambda_1\iota$$
$$+3\iota^T\Lambda_1 D_2 A_{2\beta}\Lambda_1\iota + 3\iota^T\Lambda_1 D_2 Z_{2\beta} D_2\Lambda_1\iota - \iota^T\Lambda_1 D_2 A_{2\beta}\Lambda_1\iota$$
$$+3\iota^T\Lambda_1 G_{2\beta}\Lambda_1\iota + 3\iota^T\Lambda_1 A_{2\beta}D_2\Lambda_1\iota - \iota^T\Lambda_i G_{2\beta}\Lambda_1\iota]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\delta_{(0,1,0,0,0)}^3[\iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota + \iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota + tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) + \iota^T\Lambda_1 F_{2\beta}\Lambda_1\iota]$$

$$+\alpha_{2,0}^2\delta_{(0,1,0,0,0)}^3[\iota^T\Lambda_1 A_{2\beta}D_2\Lambda_1\iota + \iota^T\Lambda_1 G_{2\beta}\Lambda_1\iota + \iota^T\Lambda_1 D_2 Z_{2\beta} D\Lambda_1\iota + \iota^T\Lambda_1 D_2 A_{2\beta}\Lambda_1\iota]$$

Portanto temos que

$$\sum {}''\lambda_{rstuvw} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}^5}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) - 6\iota^T\Lambda_1 A_{2\beta}D_2\Lambda_1\iota$$
$$+6\iota^T\Lambda_1 D_2 A_{2\beta}\Lambda_1\iota + 3\iota^T\Lambda_1 D_2 Z_{2\beta} D_2\Lambda_1\iota]$$

ou ainda

$$\sum {}''\lambda_{rstuvw} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}^5}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T)$$
$$+3\iota^T\Lambda_1(+2D_2 A_{2\beta} + D_2 Z_\beta D_2 - 2A_{2\beta}D_2)\Lambda_1\iota]$$

D.8 Cálculo de $\epsilon_{p-p_1,\beta}$

Como $\epsilon_{p-p_1,\beta} = \sum {}''(\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum {}''\lambda_{rstu} - \sum {}''\lambda_{rstuvw}$

Logo substituindo e efetuando alguns cálculos algébricos temos que

$$\epsilon_{p-p_1,\beta} = \frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta_{(0,1,0,0,0)}^2\iota^T\Lambda_1^2 Z_{2\beta d}^2\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta_{(0,1,0,0,0)}^2\iota^T\Lambda_1(D_2^2 - 2B_{2\beta d})\iota$$

$$-\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) + 3\iota^T\Lambda_1(+2D_2A_{2\beta} + D_2Z_{2\beta}D_2 - 2A_{2\beta}D_2)\Lambda_1\iota]$$

D.9 Cálculo de $d_{p_1,\beta}$

Como $d_{p_1,\beta} = \frac{\epsilon_{p,\beta} - \epsilon_{p-p_1,\beta}}{p_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{p,\beta}$ e $\epsilon_{p-p_1,\beta}$, logo temos que

$$d_{p_1,\beta} = \frac{1}{p_1}\{\frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1^2 Z^2_{\beta d}\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D^2 - 2B_{\beta d})\iota$$

$$-\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T) + 3\iota^T\Lambda_1(+2DA_\beta + DZ_\beta D - 2A_\beta D)\Lambda_1\iota]$$

$$-(\frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\widetilde{1}^T\Lambda_1^2 Z^2_{2\beta d}\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D_2^2 - 2B_{2\beta d})\iota$$

$$-\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}[-6tr(\Lambda_1 B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T) + 3\iota^T\Lambda_1(+2D_2A_{2\beta} + D_2Z_{2\beta}D_2 - 2A_{2\beta}D_2)\Lambda_1\iota])\}$$

Portanto

$$d_{p_1,\beta} = \frac{1}{p_1}\{\frac{\alpha_{4,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1^2(Z^2_{\beta d} - Z^2_{2\beta d})\iota + \frac{\alpha_{2,0}}{4}\delta^2_{(0,1,0,0,0)}\iota^T\Lambda_1(D^2 - 2B_{\beta d} - D_2^2 + 2B_{2\beta d})\iota$$

$$-\frac{\delta^5_{(0,1,0,0,0)}}{12}\{-6tr\{\Lambda_1[B_\beta(Z_\beta\Lambda_1)^T - B_{2\beta}(Z_{2\beta}\Lambda_1)^T]\}$$

$$+3\iota^T\Lambda_1(2DA_\beta + DZ_\beta D - 2A_\beta D - 2D_2A_{2\beta} - D_2Z_{2\beta}D_2 + 2A_{2\beta}D_2)\Lambda_1\iota\}$$

Apêndice E

Cálculos de ϵ em relação aos parâmetros γ.

Neste apêndice apresentaremos os cálculos de obtenção de λ's com 4 índices e 6 índices, mostraremos também para os ϵ's e $d_{q_1,\gamma}$.

E.1 Cálculo de λ_{RSTU}

Como $\lambda_{RSTU} = K^{RS}K^{TU}(\frac{K_{RSTU}}{4} - K_{RST}^{(U)} + K_{RT}^{(SU)})$, logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{RSTU} = K^{RS}K^{TU}[\frac{1}{4}(\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l -$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{11l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{29l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{1,1}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l)$$

$$-(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{22l}(R,S,T,U)_l - \frac{3}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{9l}(R,S,T,U)_l + \frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{23l}(R,S,T,U)_l$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l) + \frac{\alpha_{2,0}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{21l}(R,T,U,S)_l]$$

assim

$$\lambda_{RSTU} = K^{RS}K^{TU}[\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{31l}(R,S,T,U)_l + \frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{32l}(R,S,T,U)_l+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{33l}(R,S,T,U)_l-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l],$$

em que $\Lambda_{31l}=\frac{5h''^2_l\phi_l^2-22h'^2_l h''_l\phi_l+12h'^4+6h'_l h'''_l\phi_l^2-h''''_l\phi_l^3}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{32l}=\frac{4h'^2_l h''_l\phi_l-9h'^4_l}{\phi_l^4}$, $\Lambda_{33l}=\frac{-11h'^2_l h''_l\phi_l+11h'^4_l-3h'_l h'''_l\phi_l^2+4h'_l h''_l\phi_l^2}{\phi_l^4}$

E.2 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{RSTU}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{RSTU}$, logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{RSTU}=\sum{}'\{K^{RS}K^{TU}[\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{31l}(R,S,T,U)_l+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(R,S,T,U)_l$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{32l}(R,S,T,U)_l+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{33l}(R,S,T,U)_l-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(R,S,T,U)_l]\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos que

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RSTU}=&\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{31l}(\sum{}'(R)_lK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\\&+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(\sum{}'(R)_lK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\\&-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{32l}(\sum{}'(R)_lK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\\&+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{33l}(\sum{}'(R)_lK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\\&-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(\sum{}'(R)_lK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RSTU}=&\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{31l}(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})\\&+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})\end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{32l}(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{33l}(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})$$

$$-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})(\frac{\delta_{(0,1,0,0,2)}-1}{4}z_{\gamma d_{ll}})$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RSTU} &= \frac{1}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{31l}(z_{\gamma d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})\\
&+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{6l}(z_{\gamma d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})\\
&-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{32l}(z_{\gamma d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})\\
&+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{33l}(z_{\gamma d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})\\
&-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{24l}(z_{\gamma d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})\end{aligned}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\begin{aligned}\sum{}'\lambda_{RSTU} &= \frac{1}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}tr(\Lambda_{31}Z_{\gamma d}^2)\\
&+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}tr(\Lambda_{6}Z_{\gamma d}^2)\\
&-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}tr(\Lambda_{32}Z_{\gamma d}^2)\\
&+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}tr(\Lambda_{33}Z_{\gamma d}^2)\\
&-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}tr(\Lambda_{24}Z_{\gamma d}^2)\end{aligned}$$

Como as matrizes são diagonais, logo podemos escrever da seguinte forma

$$\sum{}'\lambda_{RSTU} = \frac{1}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T\Lambda_{31}Z_{\gamma d}^2\iota$$

$$+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T\Lambda_6 Z^2_{\gamma d}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T\Lambda_{32} Z^2_{\gamma d}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T\Lambda_{33} Z^2_{\gamma d}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T\Lambda_{24} Z^2_{\gamma d}\iota$$

então

$$\sum{}'\lambda_{RSTU} = \frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T[\frac{1}{4}\Lambda_{31}Z^2_{\gamma d}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6 Z^2_{\gamma d}$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}Z^2_{\gamma d}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}Z^2_{\gamma d}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24}Z^2_{\gamma d}]\iota$$

E.3 Cálculo de λ_{RSTUVW}

Como $\lambda_{RSTUVW} = K^{RS}K^{TU}K^{VW}\{K_{RTV}(\frac{K_{SUW}}{6} - K^{(U)}_{SW}) + K_{RTU}(\frac{K_{SVW}}{4} - K^{(V)}_{SW}) + K^{(V)}_{RT}K^{(U)}_{SW} + K^{(U)}_{RT}K^{(V)}_{SW}\}$,

logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{RSTUVW} = K^{RS}K^{TU}K^{VW}\{(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13i}(R,T,V)_i - \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5i}(R,T,V)_i +$$
$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8i}(R,T,V)_i + \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14i}(R,T,V)_i)$$
$$[\frac{1}{6}(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(S,U,W)_l - \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,U,W)_l +$$
$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(S,U,W)_l + \frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,U,W)_l) -$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,U,W)_l] +$$
$$(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13i}(R,T,U)_i - \frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5i}(R,T,U)_i +$$

$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8i}(R,T,U)_i+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14i}(R,T,U)_i)$$

$$[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(S,V,W)_l-\frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,V,W)_l+$$

$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(S,V,W)_l+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,V,W)_l)-$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,V,W)_l]$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7i}(R,T,V)_i\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,U,W))_l$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7i}(R,T,U)_i\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,V,W))_l$$

Assim

$$\lambda_{RSTUVW}=K^{RS}K^{TU}K^{VW}\{(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13i}(R,T,V)_i-\frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5i}(R,T,V)_i+$$

$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8i}(R,T,V)_i+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14i}(R,T,V)_i)$$

$$(\frac{1}{12}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{34l}(S,U,W)_l-\frac{\alpha_{3,3}}{48}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,U,W)_l$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{24}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{35l}(S,U,W)_l+\frac{\alpha_{1,1}}{24}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,U,W)_l)+$$

$$(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13i}(R,T,U)_i-\frac{1}{8}\alpha_{3,3}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5i}(R,T,U)_i+$$

$$\frac{1}{4}\alpha_{2,2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8i}(R,T,U)_i+\frac{1}{4}\alpha_{1,1}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14i}(R,T,U)_i)$$

$$(\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{30l}(S,V,W)_l-\frac{\alpha_{3,3}}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,V,W)_l$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{12l}(S,V,W)_l+\frac{\alpha_{1,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,V,W)_l)$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7i}(R,T,V)_i\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,U,W))_l$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7i}(R,T,U)_i\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,V,W))_l$$

Então

$$\lambda_{RSTUVW}=\frac{1}{24}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l},$$

em que $\Lambda_{12l} = \frac{6h'_l h''_l \phi_l - 5h'^3_l}{\phi_l^3}$, $\Lambda_{30l} = \frac{7h'_l h''_l \phi_l - 6h'^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}$,

$\Lambda_{34l} = \frac{9h'_l h''_l \phi_l - 8h'^3_l - h'''_l \phi_l^2}{\phi_l^3}$, $\Lambda_{35l} = \frac{10h'_l h''_l \phi_l - 9h'^3_l}{\phi_l^3}$.

E.4 Cálculo de $\sum' \lambda_{RSTUVW}$

Calculando $\sum' \lambda_{RSTUVW}$, logo temos que

$$\sum{}' \lambda_{RSTUVW} = \sum{}' \{ \frac{1}{24} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{1}{16} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{7i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{7i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{5i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{5i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{48} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{8i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{13i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{32} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{8i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_i)((V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2} \sum_{i=1,l=1}^{n,n} \Lambda_{7i}((R)_i K^{RS}(S)_l)((T)_i K^{TU}(U)_l)((V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_l)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((T)_iK^{TU}(U)_i)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos que

$\sum{}'\lambda_{RSTUVW} =$

$$=\frac{1}{24}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{35l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_l)(\sum{}'(V)_i K^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(\sum{}'(R)_i K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(T)_i K^{TU}(U)_i)(\sum{}'(V)_l K^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}\}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{RSTUVW}=\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{33l}$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{30l}+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{7l}-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{34l}-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{35l}+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{34l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{12l}+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{30l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{7l}-\frac{\alpha_{2,2}}{2}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{14l}+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{34l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{13i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{35l}-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{12l}-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{14l}-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{14l}-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{35l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{5l}+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{5i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{35l}-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{8i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{12l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{7l}+\frac{\alpha_{2,2}^2}{4}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{7i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{7l}$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{14l}+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\sum_{i=1,l=1}^{n,n}\Lambda_{14i}(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}\}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{RSTUVW}=\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota+\frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\iota\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7Z_\gamma^{(3)}\Lambda_7\iota+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_7\iota\}$$

E.5 Cálculo de $\epsilon_{q,\gamma}$

Como $\epsilon_{q,\gamma}=\sum{}'(\lambda_{RSTU}-\lambda_{RSTUVW})=\sum{}'\lambda_{RSTU}-\sum{}'\lambda_{RSTUVW}$

Logo substituindo e efetuando os cálculos algébricos temos que

$$\epsilon_{q,\gamma}=\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T[\frac{1}{4}\Lambda_{31}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24}]Z_{\gamma d}^2\iota$$

$$-\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota+\frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}iota^T\Lambda_8Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_7\iota+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_7\iota\}$$

Assim

$$\epsilon_{q,\gamma}=\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T[\frac{1}{4}\Lambda_{31}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24}]Z_{\gamma d}^2\iota$$

$$-\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota+\frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{192}\iota^T\Lambda_{13}(2Z_\gamma^{(3)}+3Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d})\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\iota^T\Lambda_8 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14} Z_\gamma^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14} Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_\gamma^{(3)}\Lambda_7\iota+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_7\iota\}$$

E.6 Cálculo de $\sum {}''\lambda_{RSTU}$

Para o cálculo de $\sum {}''\lambda_{RSTU}$ o resultado, será a mesma expressão do $\sum {}'\lambda_{RSTU}$ só que com o posto da matriz reduzido, ou seja, será feito uma partição da matriz da forma a seguir

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_2\end{pmatrix}_{nxq}$$

de modo que $\widetilde{Q}_{1_{nxq_1}}$ e $\widetilde{Q}_{2_{nx(q-q_1)}}$, onde todos os cálculos serão feitos substituindo o $\widetilde{Q}$ pelo $\widetilde{Q}_2$.

Logo, identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum {}''\lambda_{RSTU}=\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T[\frac{1}{4}\Lambda_{31}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24}]Z_{2\gamma d}^2\iota$$

E.7 Cálculo de $\sum {}''\lambda_{RSTUVW}$

Para o cálculo de $\sum {}''\lambda_{RSTUVW}$ o resultado, será a mesma expressão do $\sum {}'\lambda_{RSTUVW}$ só que com o posto da matriz reduzido, ou seja, será feito uma partição da matriz da forma a seguir

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_2\end{pmatrix}_{nxq}$$

de modo que $\widetilde{Q}_{1_{nxq_1}}$ e $\widetilde{Q}_{2_{nx(q-q_1)}}$, onde todos os cálculos serão feitos substituindo o $\widetilde{Q}$ pelo $\widetilde{Q}_2$.

Logo temos:

$$\sum{}''\lambda_{RSTUVW} = \frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota + \frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota - \frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota - \frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota + \frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota + \frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8Z_2\gamma dZ_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota + \frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota + \frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota - \frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota - \frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota - \frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota - \frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota - \frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota - \frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota + \frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota - \frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\iota^T\Lambda_8Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota + \frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_7\iota+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_7\iota\}$$

E.8 Cálculo de $\epsilon_{q-q_1,\gamma}$

Como $\epsilon_{q-q_1,\beta}=\sum''(\lambda_{RSTU}-\lambda_{RSTUVW})=\sum''\lambda_{RSTU}-\sum''\lambda_{RSTUVW}$

Logo substituindo temos que

$$\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T[\frac{1}{4}\Lambda_{31}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24}]Z_{2\gamma d}^2\iota$$
$$-\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota+\frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\tilde{1}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8 Z_2\gamma d Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{34}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\iota^T\Lambda_8 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14} Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14} Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{2\gamma}^{(3)}\Lambda_7\iota+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_7\iota\}$$

E.9 Cálculo de $d_{q_1,\gamma}$

Como $d_{q_1,\gamma}=\frac{\epsilon_{q,\gamma}-\epsilon_{q-q_1,\gamma}}{q_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{q,\gamma}$ e $\epsilon_{q-q_1,\gamma}$, e efetuando alguns cálculos algébricos temos que

$$d_{q_1,\gamma}=\frac{1}{q_1}\{\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{1}{4}\Lambda_{31}+\frac{\alpha_{4,4}}{16}\Lambda_6-\frac{\alpha_{3,3}}{16}\Lambda_{32}+\frac{\alpha_{2,2}}{8}\Lambda_{33}-\frac{\alpha_{1,1}}{4}\Lambda_{24})$$

$$(Z_{\gamma d}^2-Z_{2\gamma d}^2)\iota$$

$$-\frac{(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^3}{64}\{\frac{1}{24}\iota^T\Lambda_{13}(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{34}\iota+\frac{1}{16}\iota^T\Lambda_{13}(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}$$

$$-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_{13}(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_5\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_{13}(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}}{96}\iota^T\Lambda_5(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{34}\iota-\frac{\alpha_{3,3}}{64}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{30}\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_{13}(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{35}\iota+\frac{\alpha_{2,2}}{48}\iota^T\Lambda_8(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{34}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_{13}(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{12}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}}{32}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{13}(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}}{48}\iota^T\Lambda_{14}(Z_\gamma^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{34}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{13}(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{14}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{1,1}}{32}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{30}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{35}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{192}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{12}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{2,2}}{128}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{192}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{14}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{3,3}\alpha_{1,1}}{128}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_5\iota$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{14}\iota-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{96}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{35}\iota$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{14}\iota$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}\alpha_{1,1}}{64}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}^2}{384}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_5\iota+\frac{\alpha_{3,3}^2}{256}\iota^T\Lambda_5(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}^2}{96}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{35}\iota-\frac{\alpha_{2,2}^2}{64}\iota^T\Lambda_8(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{12}\iota$$

$$+\frac{\alpha_{1,1}^2}{96}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_{14}\iota+\frac{\alpha_{1,1}^2}{64}\iota^T\Lambda_{14}(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_{14}\iota$$

$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7(Z_{\gamma}^{(3)}-Z_{2\gamma}^{(3)})\Lambda_7\iota$$
$$+\frac{(\alpha_{2,2}-1)^2}{4}\iota^T\Lambda_7(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Lambda_7\iota\}$$

Apêndice F

Cálculos de ϵ em relação aos parâmetros β e γ.

Neste apêndice apresentaremos os cálculos de obtenção de λ's com 4 índices e 6 índices e, também os ϵ's e assim como os cálculos de obtenção de $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}$, $d_{p_1,\beta\gamma}$ e $d_{q_1,\beta\gamma}$.

F.1 Cálculo de λ_{RStu}

Como $\lambda_{RStu} = K^{RS}K^{tu}(\frac{K_{RStu}}{4} - K^{(u)}_{RSt} + K^{(Su)}_{Rt})$, logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{RStu} = K^{RS}K^{tu}[\frac{1}{4}(\frac{\alpha_{4,2}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l -$$

$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l) - 0 + 0]$$

assim

$$\lambda_{RStu} = K^{RS}K^{tu}[\frac{1}{4}(\frac{\alpha_{4,2}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^3}(R,S,t,u)_l)]$$

Portanto

$$\lambda_{RStu} = \sum_{l=1}^{n}[\frac{\alpha_{4,2}}{16}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}((R)_l K^{RS}(S)_l)((t)_l K^{tu}(u)_l)$$

$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\frac{h'_l}{\phi_l^3}((R)_l K^{RS}(S)_l)((t)_l K^{tu}(u)_l)]$$

F.2 Cálculo de $\sum' \lambda_{RStu}$

Calculando $\sum' \lambda_{RStu}$, logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \sum{}'\{\sum_{l=1}^{n}[\frac{\alpha_{4,2}}{16}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}((R)_l K^{RS}(S)_l)((t)_l K^{tu}(u)_l)$$
$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\frac{h'_l}{\phi_l^3}((R)_l K^{RS}(S)_l)((t)_l K^{tu}(u)_l)]\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos que

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \sum_{l=1}^{n}[\frac{\alpha_{4,2}}{16}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(\sum{}'(R)_l K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(t)_l K^{tu}(u)_l)$$
$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\frac{h'_l}{\phi_l^3}(\sum{}'(R)_l K^{RS}(S)_l)(\sum{}'(t)_l K^{tu}(u)_l)]$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\sum_{l=1}^{n}[\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_{4l}(z_{\beta d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})-$$
$$\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_{2l}(z_{\beta d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})]$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma d})$$

portanto

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}$$

Como todas as matrizes são diagonais, então podemos ainda escrever da seguinte forma

$$\sum{}'\lambda_{RStu} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota,$$

em que $\Lambda_{2l} = \frac{h'}{\phi_l^2}$, $\Lambda_{4l} = \frac{h'^2}{\phi_l^3}$

F.3 Cálculo de λ_{rsTU}

Como $\lambda_{rsTU} = K^{rs}K^{TU}(\frac{K_{rsTU}}{4} - K_{rsT}^{(U)} + K_{rT}^{(sU)})$, logo substituindo os cumulantes temos que:

$$\lambda_{rsTU} = K^{rs}K^{TU}[\frac{1}{4}(\frac{\alpha_{4,2}}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(r,s,T,U)_l - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(r,s,T,U)_l) -$$

$$(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''_l\phi_l - 2h'^2_l}{\phi_l^3}) + 0]$$

assim

$$\lambda_{rsTU} = \frac{\alpha_{4,2}}{16}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}((r)_lK^{rs}(s)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l) -$$

$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}((r)_lK^{rs}(s)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''_l\phi_l - 2h'^2_l}{\phi_l^3}((r)_lK^{rs}(s)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l$$

F.4 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rsTU}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{rsTU}$, invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\alpha_{4,2}}{16}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'^2_l}{\phi_l^3}(\sum{}'(r)_lK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l) -$$

$$-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\sum_{l=1}^{n}\frac{h'_l}{\phi_l^2}(\sum{}'(r)_lK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{h''_l\phi_l - 2h'^2_l}{\phi_l^3}(\sum{}'(r)_lK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\alpha_{4,2}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{4l}(z_{\beta d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}}) - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2l}(z_{\beta d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}}) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{10l}(z_{\beta d_{ll}})(z_{\gamma d_{ll}})$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}tr(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{\gamma d} +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10}Z_{\beta d}Z_{\gamma d}))$$

assim

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}tr[(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}]$$

Como todas as matrizes são diagonais, então podemos ainda escrever da seguinte forma

$$\sum{}'\lambda_{rsTU} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2 +$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota,$$

em que $\Lambda_{10l} = \frac{h''_l\phi_l - 2h'^2_l}{\phi_l^3}$

F.5 Cálculo de λ_{RSTUvw}

Como $\lambda_{RSTUvw} = K^{RS}K^{TU}K^{vw}\{K_{RTv}(\frac{K_{SUw}}{4} - K_{Sw}^{(U)}) + K_{RTU}(\frac{K_{Svw}}{4} - K_{Sw}^{(v)}) + K_{RT}^{(v)}K_{Sw}^{(U)} + K_{RT}^{(U)}K_{Sw}^{(v)}\}$, $K_{RSTU} = 0$, $K_{SUw} = 0$, $K_{Sw}^{(U)} = 0$, $K_{Sw}^{(V)} = 0$ e $K_{RT}^{(v)} = 0$ logo temos que:

$\lambda_{RSTUvw} = \frac{1}{4}K^{RS}K^{TU}K^{vw}K_{RTU}K_{Svw}$, então temos que

$$\lambda_{RSTUvw} = \frac{1}{4}K^{RS}K^{TU}K^{vw}(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(R,T,U)_l - \frac{\alpha_{3,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(R,T,U)_l$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(R,T,U)_l+\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(R,T,U)_l)(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(S,V,W)_i)$$

assim

$$\lambda_{RSTUvw}=-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((v)_iK^{vw}(w)_i)((S)_iK^{RS}(R)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{13l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((v)_iK^{vw}(w)_i)((S)_iK^{RS}(R)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((v)_iK^{vw}(w)_i)((S)_iK^{RS}(R)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{8l}$$

$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((v)_iK^{vw}(w)_i)((S)_iK^{RS}(R)_l)((T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{14l}$$

F.6 Cálculo de $\sum'\lambda_{RSTUvw}$

Calculando $\sum'\lambda_{RSTUvw}$, invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{RSTUvw}=-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_i)(\sum{}'(S)_iK^{RS}(R)_l)$$
$$(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{13l}$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_i)(\sum{}'(S)_iK^{RS}(R)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{5l}$$
$$-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_i)(\sum{}'(S)_iK^{RS}(R)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{8l}$$
$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_i)(\sum{}'(S)_iK^{RS}(R)_l)(\sum{}'(T)_lK^{TU}(U)_l)\Lambda_{14l}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{RSTUvw}=-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma il})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{13l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{8l}$$

$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\gamma d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{RSTUvw}=-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{13}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{8l}\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

F.7 Cálculo de λ_{RStuVW}

Como $\lambda_{RStuVW} = K^{RS}K^{tu}K^{VW}\{K_{RtV}(\frac{K_{SuW}}{4} - K_{SW}^{(u)}) + K_{Rtu}(\frac{K_{SVW}}{4} - K_{SW}^{(V)}) + K_{Rt}^{(V)}K_{SW}^{(u)} + K_{Rt}^{(u)}K_{SW}^{(V)}\}$, $K_{RTV}=0$, $K_{SuW}=0$, $K_{SW}^{(u)}=0$, $K_{Rt}^{(u)}=0$ e $K_{Rt}^{(V)}=0$

logo temos que:

$\lambda_{RStuVW} = K^{RS}K^{tu}K^{VW}K_{Rtu}(\frac{K_{SVW}}{4} - K_{SW}^{(V)})$, então temos que

$$\lambda_{RStuVW}=K^{RS}K^{tu}K^{VW}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(R,t,u)_i)$$

$$[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{13l}(S,V,W)_l-\frac{\alpha_{3,3}}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,V,W)_l$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{8l}(S,V,W)_l+\frac{\alpha_{1,1}}{4}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,V,W)_l)-\frac{\alpha_{2,2}-1}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{7l}(S,V,W)_l]$$

assim

$$\lambda_{RStuVW}=K^{RS}K^{tu}K^{VW}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(R,t,u)_i)$$

$$(\frac{1}{8}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{30l}(S,V,W)_l - \frac{\alpha_{3,3}}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{5l}(S,V,W)_l$$

$$-\frac{\alpha_{2,2}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{12l}(S,V,W)_l + \frac{\alpha_{1,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{14l}(S,V,W)_l)$$

Portanto

$$\lambda_{RStuVW} = -\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

F.8 Cálculo de $\sum'\lambda_{RStuVW}$

Calculando $\sum'\lambda_{RStuVW}$, invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuVW} = -\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_i)(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)$$

$$(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{30l}$$

$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_i)(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{5l}$$

$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_i)(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{12l}$$

$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_i)(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(V)_lK^{VW}(W)_l)\Lambda_{14l}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuVW} = -\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{30l}$$
$$+\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{5l}$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{12l}$$
$$-\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta d_{ii}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\gamma d_{ll}})\Lambda_{14l}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

F.9 Cálculo de λ_{rsTUVW}

Como $\lambda_{rsTUVW} = K^{rs}K^{TU}K^{VW}\{K_{rTV}(\frac{K_{sUW}}{4}-K_{sW}^{(U)})+K_{rTU}(\frac{K_{sVW}}{4}-K_{sW}^{(V)})+K_{rT}^{(V)}K_{sW}^{(U)}+K_{rT}^{(U)}K_{sW}^{(V)}\}$, $K_{rTV}=0,\ K_{rTU}=0,\ K_{sUW}=0,\ K_{sVW}=0,\ K_{sW}^{(U)}=0,\ K_{rT}^{(U)}=0,\ K_{sW}^{(V)}=0$, e $K_{Rt}^{(V)}=0$

logo temos que:

$\lambda_{rsTUVW}=0$

F.10 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rsTUVW}$

Como $\lambda_{rsTUVW}=0$, logo temos que $\sum{}'\lambda_{rsTUVW}=0$

F.11 Cálculo de λ_{RStuvw}

Como $\lambda_{RStuvw} = K^{RS}K^{tu}K^{vw}\{K_{Rtv}(\frac{K_{Suw}}{6}-K_{Sw}^{(u)})+K_{Rtu}(\frac{K_{Svw}}{4}-K_{Sw}^{(v)})+K_{Rt}^{(v)}K_{Sw}^{(u)}+K_{Rt}^{(u)}K_{Sw}^{(v)}\}$, $K_{Sw}^{(u)}=0,\ K_{Rt}^{(u)}=0,\ K_{Sw}^{(v)}=0$ e $K_{Rt}^{(v)}=0$

logo temos que: $\lambda_{RStuvw} = \frac{1}{12}K^{RS}K^{tu}K^{vw}(2K_{Rtv}K_{Suw} + 3K_{Rtu}K_{Svw})$
logo substituindo as expressões dos cumulantes temos que

$$\lambda_{RStuvw} = \frac{1}{12}K^{RS}K^{tu}K^{vw}[2(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(R,t,v)_i)$$

$$(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(S,u,w)_l)$$

$$+3(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(R,t,u)_i)(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(S,v,w)_l)]$$

Assim

$$\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((t)_iK^{tu}(u)_l)((v)_iK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

$$+\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((v)_lK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

F.12 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{RStuvw}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{RStuvw}$ logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \sum{}'\{\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((R)_iK^{RS}(S)_l)((t)_iK^{tu}(u)_l)$$

$$((v)_iK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

$$+\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((t)_iK^{tu}(u)_i)((R)_iK^{RS}(S)_l)((v)_lK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_l)$$

$$(\sum{}'(v)_iK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

$$+\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(t)_iK^{tu}(u)_i)(\sum{}'(R)_iK^{RS}(S)_l)$$

$$(\sum{}'(v)_lK^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}z_{\gamma_{il}}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}\Lambda_{2l}$$

$$+\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}z_{\beta d_{ii}}z_{\gamma_{il}}z_{\beta d_{ll}}\Lambda_{2l}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_\gamma(Z_\beta^{(2)}\Lambda_2)^T)$$

$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota]$$

F.13 Cálculo de λ_{rstuVW}

Como $\lambda_{rstuVW} = K^{rs}K^{tu}K^{VW}\{K_{rtV}(\frac{K_{suW}}{6} - K_{sW}^{(u)}) + K_{rtu}(\frac{K_{sVW}}{4} - K_{sW}^{(V)}) + K_{rt}^{(V)}K_{sW}^{(u)} + K_{rt}^{(u)}K_{sW}^{(V)}\}$, $K_{sW}^{(u)} = 0$, $K_{sVW} = 0$, $K_{sW}^{(V)} = 0$ e $K_{sW}^{(u)} = 0$

logo temos que: $\lambda_{rstuVW} = \frac{1}{6}K^{rs}K^{tu}K^{VW}K_{rtV}K_{suW}$

logo substituindo as expressões dos cumulantes temos que

$$\lambda_{rstuVW} = \frac{1}{6}K^{rs}K^{tu}K^{VW}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(r,t,V)_i)(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(s,u,W)_l)$$

Assim

$$\lambda_{rstuVW} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((t)_iK^{tu}(V)_i)((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{2l}$$

F.14 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rstuVW}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{rstuVW}$ logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW} = \sum{}'\{-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}((r)_iK^{rs}(s)_l)((t)_iK^{tu}(V)_i)$$

$$((V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{2l}\}$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW}=\{-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(t)_iK^{tu}(V)_i)$$

$$(\sum{}'(V)_iK^{VW}(W)_l)\Lambda_{2l}\}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW}=-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta_{il}})(z_{\beta_{il}})(z_{\gamma_{il}})\Lambda_{2l}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{rstuVW}=-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

F.15 Cálculo de λ_{rsTUvw}

Como $\lambda_{rsTUvw}=K^{rs}K^{TU}K^{vw}\{K_{rTv}(\frac{K_{sUw}}{6}-K^{(U)}_{sw})+K_{rTU}(\frac{K_{svw}}{4}-K^{(v)}_{sw})+K^{(v)}_{rT}K^{(U)}_{sw}+K^{(U)}_{rT}K^{(v)}_{sw}\}$, $K_{rTU}=0$, $K^{v}_{rT}=0$ e $K^{(U)}_{rT}=0$

logo temos que: $\lambda_{rsTUvw}=K^{rs}K^{TU}K^{vw}(\frac{K_{rTv}}{6}-K^{(U)}_{sw})$

logo substituindo as expressões dos cumulantes temos que

$$\lambda_{rsTUvw}=K^{rs}K^{TU}K^{vw}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(r,T,v)_i)$$

$$(\frac{1}{6}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(s,U,w)_l)+\alpha_{2,0}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(s,U,w)_l)$$

Assim

$$\lambda_{rsTUvw}=K^{rs}K^{TU}K^{vw}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(r,T,v)_i)(\frac{11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1}}{12}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(s,U,w)_l)$$

F.16 Cálculo de $\sum{}'\lambda_{rsTUvw}$

Calculando $\sum{}'\lambda_{rsTUvw}$ logo temos que

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw}=\sum{}'K^{rs}K^{TU}K^{vw}(-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(r,T,v)_i)$$

$$(\frac{11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1}}{12}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2l}(s,U,w)_l)$$

Invertendo os somatórios e rearrumando os termos temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw}=-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\frac{11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1}}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(\sum{}'(r)_iK^{rs}(s)_l)(\sum{}'(T)_iK^{TU}(U)_l)(\sum{}'(v)_i)K^{vw}(w)_l)\Lambda_{2l}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw}=-\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\frac{11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1}}{12}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{2i}(z_{\beta_{il}})(z_{\gamma_{il}})(z_{\beta_{il}})\Lambda_{2l}$$

logo escrevendo na forma matricial temos

$$\sum{}'\lambda_{rsTUvw}=-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2Z_\gamma(Z_\beta^{(2)}\Lambda_2)^T]$$

F.17 Cálculo de $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$

Como $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}=\sum{}'\lambda_{RStu}+\sum{}'\lambda_{rsTU}-\sum{}'\lambda_{RSTUvw}-\sum{}'\lambda_{RStuVW}-\sum{}'\lambda_{RSTUvw}-\sum{}'\lambda_{RStuvw}-\sum{}'\lambda_{rsTUvw}-\sum{}'\lambda_{rstuVW}$

Logo substituindo temos que

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma}=(\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota)$$

$$+(\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)-1})}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2+$$

$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota)$$

$$-(-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{13l}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{5l}\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{8l}\iota$$

$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_{2i}Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14l}\iota)$$

$$-(-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Lambda_{14}\iota)$$

$$-0$$

$$-(\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T)$$
$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota])$$

$$-(-\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T])$$

$$-(-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T])$$

Assim

$$\epsilon_{p+q,\beta\gamma}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_\beta\Lambda_2)^T]$$

F.18 Cálculo de $\sum{}''\lambda's$

Para o cálculo de $\sum{}''$ dos $\lambda's$ o resultado, será a mesma expressão do $\sum{}'$ dos respectivos $\lambda's$, para os parâmetros β e γ, só que, com o posto da matriz reduzido, ou seja, será feito uma partição da matriz da forma a seguir

$$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}\widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2\end{pmatrix}_{nxp},\quad Q=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}_{nxq}$$

de modo que $\widetilde{X}_{1_{nxp_1}}$, $\widetilde{X}_{2_{nx(p-p_1)}}$, $Q_{1_{nxq_1}}$ e $Q_{2_{nx(q-q_1)}}$, onde todos os cálculos serão feitos substituindo o $\widetilde{X}$ pelo $\widetilde{X}_2$ e Q pelo Q_2.

F.19 Cálculo de $\sum{}''\lambda_{RStu}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{RStu}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2)Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

F.20 Cálculo de $\sum{}''\lambda_{rsTU}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{rsTU}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{16}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{8}\Lambda_2+$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

F.21 Cálculo de $\sum{}''\lambda_{RSTUvw}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{RSTUvw} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{13}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_8\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{4}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

F.22 Cálculo de $\sum''\lambda_{RStuVW}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{RStuVW} = -\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{30}\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_5\iota$$
$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{12}\iota$$
$$-\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,0)}-1)^2}{16}\frac{\alpha_{1,1}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}\Lambda_{14}\iota$$

F.23 Cálculo de $\sum''\lambda_{rsTUVW}$

Como $\lambda_{rsTUVW}=0$, logo temos que $\sum''\lambda_{rsTUVW}=0$

F.24 Cálculo de $\sum''\lambda_{RStuvw}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum{}''\lambda_{RStuvw} = \frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}[tr(\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)$$
$$+\frac{3}{2}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota]$$

F.25 Cálculo de $\sum {}''\lambda_{rstuVW}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum {}''\lambda_{rstuVW} = -\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{24}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

F.26 Cálculo de $\sum {}''\lambda_{rsTUvw}$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\sum {}'\lambda_{rsTUvw} = -\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(11\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{24}\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

F.27 Cálculo de $\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}$

Como

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)]\beta\gamma} = \sum {}''\lambda_{RStu} + \sum {}''\lambda_{rsTU} - \sum {}''\lambda_{RSTUvw}$$
$$-\sum {}''\lambda_{RStuVW} - \sum {}''\lambda_{RSTUvw} - \sum {}''\lambda_{RStuvw} - \sum {}''\lambda_{rsTUvw} - \sum {}''\lambda_{rstuVW}$$

Assim

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

F.28 Cálculo de $d_{p_1+q_1,\beta\gamma}$

Como $d_{p_1+q_1,\beta\gamma} = \frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma}-\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}}{p_1+q_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ e $\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)],\beta\gamma}$, logo temos que

$$d_{p_1+q_1,\beta\gamma} = \frac{1}{p_1+q_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - Z_{2\beta d}Z_{2\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}Z_{2\gamma}Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2(Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T - Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)]\}$$

F.29 Cálculo de $\epsilon_{[(p+q)-(p_1)],\beta\gamma}$

$$\epsilon_{[(p+q)-(p_1)],\beta\gamma} = \frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4 - \frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2 + \frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{2\beta d}Z_{\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13} - \frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5 + \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8 - \frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12} + \frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{2\beta d}Z_\gamma Z_{2\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2 Z_\gamma(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T]$$

F.30 Cálculo de $d_{p_1,\beta\gamma}$

Como $d_{p_1,\beta\gamma}=\frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma}-\epsilon_{[(p+q)-(p_1)],\beta\gamma}}{p_1}$,

então substituindo as expressões de $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ e $\epsilon_{[(p+q)-(p_1)],\beta\gamma}$, logo temos que

$$d_{p_1,\beta\gamma}=\frac{1}{p_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d}-Z_{2\beta d}Z_{\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\beta d}-Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_\gamma Z_{\beta d}-Z_{2\beta d}Z_\gamma Z_{2\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}tr[\Lambda_2(Z_\gamma(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T$$
$$-(Z_\gamma(Z^{(2)}_{2\beta}\Lambda_2)^T)]\}$$

F.31 Cálculo de $\epsilon_{[(p+q)-(q_1)],\beta\gamma}$

$$\epsilon_{[(p+q)-(q_1)],\beta\gamma}=\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})Z_{\beta d}Z_{2\gamma d}\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2 Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d}\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2 Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T]$$

F.32 Cálculo de $\mathrm{d}_{q_1,\beta\gamma}$

Como $\mathrm{d}_{q_1,\beta\gamma}=\frac{\epsilon_{p+q,\beta\gamma}-\epsilon_{[(p+q)-(q_1)],\beta\gamma}}{q_1}$,

então substituindo as expressões de $\epsilon_{p+q,\beta\gamma}$ e $\epsilon_{[(p+q)-(q_1)],\beta\gamma}$, logo temos que

$$\mathrm{d}_{q_1,\beta\gamma}=\frac{1}{q_1}\{\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\iota^T(\frac{\alpha_{4,2}}{8}\Lambda_4-\frac{\alpha_{3,1}+2\alpha_{2,0}}{4}\Lambda_2$$
$$+\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{2}\Lambda_{10})(Z_{\beta d}Z_{\gamma d}-Z_{\beta d}Z_{2\gamma d})\iota$$

$$+\frac{\delta_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)^2}{16}\iota^T(\frac{\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1}}{16}\Lambda_{13}-\frac{\alpha_{3,3}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_5$$
$$+\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{32}\Lambda_8-\frac{\alpha_{2,2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{12}$$
$$+\frac{(3\alpha_{1,1}+4)(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})}{64}\Lambda_{14})(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}-Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$-\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})^2}{16}\iota^T\Lambda_2(Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}-Z_{\beta d}Z_{2\gamma}Z_{\beta d})\Lambda_2\iota$$

$$+\frac{\delta^2_{(0,1,0,0,0)}(\delta_{(0,1,0,0,2)}-1)}{4}\frac{(\alpha_{2,0}+\alpha_{3,1})(3\alpha_{2,0}-\alpha_{3,1})}{8}\mathrm{tr}[\Lambda_2(Z_{\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T$$
$$-Z_{2\gamma}(Z^{(2)}_{\beta}\Lambda_2)^T)]\}$$

Apêndice G

Cálculos dos $\delta's$.

Neste apêndice apresentaremos os valores dos $\delta's$ associados à correção de Bartlett para cada distribuição na classes dos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos. A notação $t_{z_l}^{(m)}$ e $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ estão definidas em 2.3. Vale salientar que para as distribuições simétricas temos que para $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ se, $(1a + 2b + 3c + 4d + e)$ for ímpar, então $\delta_{(a,b,c,d,e)} = 0$.

G.1 Distribuição Normal

Seja $y_l \sim N(\mu_l; \phi_l)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{c(0)\sqrt{\phi_l}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\right\} \quad e \quad c(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Como a função é normal, logo $g(z_l) = -\frac{z_l^2}{2}$ então temos $t_{z_l}^{(1)} = -z_l$, $t_{z_l}^{(2)} = -1$ e $t_{z_l}^{(3)} = t_{z_l}^{(4)} = 0$. Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} = 1$, $\delta_{(2,1,0,0,0)} = -1$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} = 0$, $\delta_{(0,0,1,0,3)} = 0$, $\delta_{(4,0,0,0,2)} = 15$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} = 0$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} = -3$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} = 0$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} = 0$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} = -1$, $\delta_{(1,2,0,0,1)} = 1$, $\delta_{(2,0,0,0,2)} = 3$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} = -1$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} = -3$.

G.2 Distribuição de Cauchy

Seja $y_l \sim C(\mu_l, \phi_l)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, 1) = \frac{1}{C(0,1,1)\sqrt{\phi_l}}[1 + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-1}, \quad onde \quad C(0,1,1) = \pi.$$

Como a função é de Cauchy, logo $t(z_l) = \log(\frac{1}{\pi}[1+z_l^2]^{-1})$. Ainda temos $t_{z_l}^{(1)} = 2z_l w_l$, onde $w_l = \frac{1}{\pi}[1+z_l^2]^{-1}$, $t_{z_l}^{(2)} = 2w_l + 4z_l^2 w_l^2$ e $t_{z_l}^{(3)} = 12 z_l w_l^2 + 16 z_l^3 w_l^3$ e, $t_{z_l}^{(4)} = 12w_l^2 + 96 z_l^2 w_l^2 + 96 z_l^4 w_l^4$. Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} = 1/2$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} = 1/8$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} = -3/4$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} = 1/2$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} = 1/2$, $\delta_{(1,1,0,0,1)} = 0$, $\delta_{(4,0,0,0,2)} = 5/8$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} = 2/4$, $\delta_{(2,1,0,0,0)} = -1/8$, $\delta_{(2,0,0,0,2)} = 3/2$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} = -1/2$, $\delta_{(0,0,1,0,3)} = -1/2$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} = -1/2$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} = -3/4$.

G.3 Distribuição *t*-Student

Seja $y_l \sim t(\mu_l, \phi_l, \nu)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, \nu) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)\sqrt{\phi_l}}[\nu + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 0,$$

Como a função é t-Student, logo $t(z_l) = \log(\frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2,\nu/2)}[\nu + z_l^2]^{-(\nu+1)/2})$ então temos $t_{z_l}^{(1)} = 2z_l w_l$, em que $w_l = -\frac{\nu+1}{2(\nu+z_l^2)}$, $t_{z_l}^{(2)} = 2w_l + \frac{8z_l^2 w_l^2}{\nu+1}$, $t_{z_l}^{(3)} = \frac{24 z_l w_l^2}{\nu+1} + \frac{64 z_l^3 w_l^3}{(\nu+1)^2}$, $t_{z_l}^{(4)} = \frac{24 w_l^2}{\nu+1} + \frac{384 z_l^2 w_l^3}{(\nu+1)^3} + \frac{768 z_l^4 w_l^4}{(\nu+1)^3}$. Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} = \frac{\nu+1}{\nu+3}$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} = -\frac{6(\nu+1)(\nu+2)}{\nu(\nu+5)(\nu+7)}$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} = \frac{6}{(\nu+3)}(\frac{\nu-19}{\nu+5} + \frac{120}{(\nu+5)(\nu+7)})$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} = \frac{6(\nu+1)}{(\nu+3)(\nu+5)}$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} = \frac{3-\nu}{(\nu+3)}$, $\delta_{(1,1,0,0,1)} = \frac{(\nu+1)(\nu-1)}{(\nu+3)(\nu+5)}$, $\delta_{(4,0,0,0,2)} = \frac{15(\nu+1)^3}{(\nu+3)(\nu+5)(\nu+7)}$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} = \frac{6(\nu+1)(\nu+2)}{(\nu(\nu+5)(\nu+7)}$, $\delta_{(2,1,0,0,0)} = -\frac{(\nu+1)^3(\nu+2)}{\nu(\nu+3)(\nu+5)(\nu+7)}$, $\delta_{(2,0,0,0,2)} = \frac{3(\nu+1)}{(\nu+3)}$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} = -\frac{(\nu+1)}{(\nu+3)}$, $\delta_{(0,0,1,0,3)} = \frac{6(3\nu-5)}{(\nu+3)(\nu+5)}$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} = -\frac{3(\nu+1)^2}{(\nu+3)(\nu+5)}$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} = \frac{3(\nu+1)^2(3-\nu)}{(\nu+3)(\nu+5)(\nu+7)}$.

G.4 Distribuição *t*-Student generalizada

Seja $y_l \sim tG(\mu_l, \phi_l, r, s)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l, r, s) = \frac{s^{r/2}}{B(1/2, r/2)\sqrt{\phi_l}}[s + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-(r+1)/2}, \quad r > 0 \quad e \quad s > 0.$$

Como a função é t-Student generalizada, logo

$$t(z_l) = \log(\frac{s^{r/2}}{B(1/2, r/2)}[s + (\frac{y_l - \mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2]^{-(r+1)/2})$$

então temos $t_{z_l}^{(1)} = 2z_l w_l$, onde $w_l = -\frac{r+1}{2(s+z_l^2)}$, $t_{z_l}^{(2)} = 2w_l + \frac{8z_l^2 w_l^2}{\nu+1}$, $t_{z_l}^{(3)} = \frac{24 z_l w_l^2}{\nu+1} + \frac{64 z_l^3 w_l^3}{(\nu+1)^2}$,

$t_{z_l}^{(4)} = \frac{24w_l^2}{\nu+1} + \frac{384z_l^2 w_l^3}{(\nu+1)^3} + \frac{768z_l^4 w_l^4}{(\nu+1)^3}$. Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} = \frac{r(r+1)}{s(r+3)}$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} = -\frac{6r(r+1)}{s(r+3)(r+5)}$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} = \frac{6(\nu+1)}{(\nu+3)(\nu+5)}$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} = \frac{6r(r-19)(r+7)+120}{s(r+3)(r+5)(r+7)}$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} = \frac{3-r}{(r+3)}$, $\delta_{(1,1,0,0,1)} = \frac{r(r^2-1)}{s(r+3)(r+5)}$, $\delta_{(4,0,0,0,2)} = \frac{15r(r+1)^3}{s(r+3)(r+5)(r+7)}$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} = \frac{-3r(r+1)^2(r-3)}{s(r+3)(r+5)(r+7)}$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} = \frac{6r(r+1)(r+2)}{s^2(r+5)(r+7)}$,

$\delta_{(2,1,0,0,0)} = -\frac{r(r+1)^3(r+2)}{3r(r+3)(r+5)(r+7)}$, $\delta_{(2,0,0,0,2)} = \frac{3(r+1)}{s(r+3)}$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} = -\frac{r(r+1)}{s(r+3)}$,

$\delta_{(0,0,1,0,3)} = \frac{6(3r-5)}{(r+3)(r+5)}$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} = -\frac{3r(r+1)^2}{s(r+3)(r+5)}$.

G.5 Distribuição Logística I

Seja $y_l \sim LI(\mu; \phi_l)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{c(0)\sqrt{\phi_l}} \frac{\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\right\}}{(1+\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\right\})^2} \quad e \quad c(0) \approx 0,673718238.$$

Como a função é logística I, logo $g(z_l) = \log(\frac{1}{c(0)} \frac{\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\right\}}{(1+\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})^2\right\})^2})$, então derivando $t(z_l)$ em relação a z_l, temos $t_{z_l}^{(1)} = -2z_l w_l$, onde $w_l = (e^{-z_l^2-1})/(1+e^{-z_l^2})$, $t_{z_l}^{(2)} = 2w_l + 2z_l^2(w_l^2-1)$, $t_{z_l}^{(3)} = 6z_l(w_l^2-1) + 4z_l^3 w_l(w_l^2-1)$ e $t_{z_l}^{(4)} = 6(w_l^2-1) + 24z_l^2 w_l(w_l^2-1) + 4z_l^4(w_l^2-1)(3w_l^2-1)$.

Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} \approx 1,477240176$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} \approx -4,259052264$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} \approx -1,27916363$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} \approx 2,65931983$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} \approx -2,013783934$, $\delta_{(1,1,0,0,1)} \approx 2,756409976$,

$\delta_{(4,0,0,0,2)} \approx 46,76577386$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} \approx -10,92854975$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} \approx 4,2599052264$, $\delta_{(2,1,0,0,0)} \approx 4,153806544$ $\delta_{(2,0,0,0,2)} \approx 4,013783934$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} \approx -1,477240176$,

$\delta_{(0,0,1,0,3)} \approx -0,508877866$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} \approx 46,76577386$.

G.6 Distribuição Logística II

Seja $y_l \sim LII(\mu; \phi_l)$ com função densidade, é dada por

$$\pi(y_l; \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{c(0)\sqrt{\phi_l}} \frac{\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})\right\}}{(1+\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})\right\})^2}.$$

Como a função é logística II, logo $g(z_l) = \log(\frac{1}{c(0)} \frac{\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})\right\}}{(1+\exp\left\{-(\frac{y_l-\mu_l}{\sqrt{\phi_l}})\right\})^2})$, então derivando $t(z_l)$ em relação a z_l, temos $t^{(1)}_{z_l} = (1-e^{-z_l})/(1+e^{-z_l})$, $t^{(2)}_{z_l} = -2e^{-z_l}/(1+e^{-z_l})^2$, $t^{(3)}_{z_l} = 2(e^{-2z_l} - e^{-z_l})/(1+e^{-z_l})^3$ e $t^{(4)}_{z_l} = -2(e^{-3z_l} - 4e^{-2z_l} - e^{-z_l})/(1+e^{-z_l})^4$.

Usando a notação $\delta_{(a,b,c,d,e)}$ e efetuando os cálculos, temos que:

$\delta_{(2,0,0,0,0)} = 1/3$, $\delta_{(1,0,1,0,0)} = -1/15$, $\delta_{(0,0,0,1,2)} \approx -0,11401$, $\delta_{(0,0,1,0,1)} = 1/6$, $\delta_{(0,1,0,0,2)} \approx -0,42996$, $\delta_{(1,1,0,0,1)} = 1/6$, $\delta_{(4,0,0,0,2)} \approx 1,99131$, $\delta_{(0,0,0,1,0)} = 1/15$, $\delta_{(2,1,0,0,0)} = -1/15$, $\delta_{(0,1,0,0,0)} = -1/3$, $\delta_{(0,0,1,0,3)} \approx 0,64493$, $\delta_{(3,0,0,0,1)} = -2/3$, $\delta_{(2,1,0,0,2)} \approx -0,21932$.

Referências

[1] Anderson, T. W., Fang, K. T., (1987). *Cochran's theorem for elliptically contourned distribuitions*. Sankhya A, **49**, 305-315.

[2] Arellano-Valle, R. b., (1994). *Distribuições Elípticas: Propriedades, Inferência e Aplicações a Modelos de Regressão*. Tese de Doutorado, Programa de pós-graduação em Estatística, Universidade de São Paulo.

[3] Bartlett, M.S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **160**, 268 - 282.

[4] Berkane, M., Bentler, P. M. (1986). Moments of elliptically distributed random variates. *Statistcs and Probability Letter*, **4**, 333 - 335.

[5] Cambanis, S., Huang, S., Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 368 - 385.

[6] Chesher, A., Smith, R., (1995) Bartlett corretions to likelihood ratio tests. *Biometrika*, **82**, 433 - 436.

[7] Chmielewski, M.A. (1981). Elliptically symmetric distributions: a review and bibliography. *International Statistical Review*. **49**, 67-74.

[8] Cordeiro, G.M. (1983). Improved likelihood ratio statistics for generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **45**, 404 - 413.

[9] Cordeiro, G.M. (1987). On the corrections to the likelihood ratio statistics. *Biometrika*, **74**, 265 - 274.

[10] Cordeiro, G.M. (1999). *Introdução à Teoria Assintótica*. IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[11] Cordeiro, G.M. (2004). Corrected likelihood ratio tests in symmetric nonlinear regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **74**, 600 - 620.

[12] Cordeiro, G.M., Cribari-Neto, F. Aubin, E.C.Q., Ferrari, S.L.P. (1995). Bartlett correction for one-parameter exponencial family models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **53**, 211 - 231.

[13] Cordeiro, G.M., Ferrari, S.L.P., Uribe-Opazo, M., Vasconcellos, K. (2000). Corrected maximum likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistic and Probability Letters*.

[14] Cordeiro, G.M., Paula, G.A. (1989). Improved likelihood ratio statistic for exponencial family nonlinear models. *Biometika*, **76**, 93 - 100.

[15] Cordeiro, G.M, Cysneiros, A.H.M.A. e Cysneiros, F.J.A. (2009).Bias-Corrected Maximum Likelihood Estimators in Nonlinear Heteroscedastic Models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. A aparecer.

[16] Cox, D.R. Hinkley, D.V. (1974) *Theoretical Satatistics*. New York: Wiley.

[17] Cox, D.R., Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **49**, 1 - 39.

[18] Cribari-Neto, F., Cordeiro, G.M. (1997). On Bartlett and Bartlett-type corrections. *Econometric Reviews*, **15**, 339 - 367.

[19] Cribari-Neto, F., Ferrari, S.L.P. (1995a). Bartlett corrected tests for heteroskedastic linear models. *Economics Letters*, **48**, 113 - 118.

[20] Cribari-Neto, F., Zarkos, S.G. (1995). Improved test statistics for multivariate regression. *Economics Letters*, **49**, 113 - 120.

[21] Cribari-Neto, F., Zarkos, S.G. (1999). Bootstrap methods for heteroskedastic regression models: evidence on estimation and testing. *Econometric Reviews*, **1989**, 211 - 228.

[22] Cysneiros, A.H.M.A., Cordeiro, G. (2002). On improving the χ^2 approximation of score tests in location-scale nonlinear models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **31**, 1709 - 1732.

[23] Cysneiros, A.H.M.A., Ferrari, S.L.P. (2006). An improved likelihood ratio tet for varying dispersion in exponential family nonlinear models. *Statistics and Probability Letters*, **76**, 255 - 265.

[24] Cysneiros, F.J.A., Cordeiro, G.M. e Cysneiros, A.H.M.A. (2009). Corrected Maximum Likelihood Estimators im Heteroscedastic Symmetric Nonlinear Models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. A aparecer.

[25] Devlin, S.J., Gnanadesikan, R., Kettenring, J.R. (1976). Some multivariate applications of elliptical distributions. *Essays in Probability and Statistics*, **24**, 365 - 393. Tokio: Shinko Tsusho Co.

[26] DiCicio, T.J. (1986). Approximate conditional inference for location families. *The Canadian Journal of Statistics*, **14**, 5 - 18.

[27] Efron, B. (1979). Bootstratp methods: another look at the jacknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.

[28] Efron, B. (1981). Nonparametric standart erros and confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, **9**, 139 - 172.

[29] Efron, B., Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New Yourk: Chapman and Hall.

[30] Frang, K.T., Anderson, T.W. (1990). *Statistical Inference in elliptical Contoured and Related Distribuitions*. New York: Allerton Press.

[31] Frang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. London: Chapman and Hall.

[32] Frang, K.T., Zhang, Y. T. (1990). *Generealized Multivariate Analysis*. London: Springer-Verlag.

[33] Ferrari, S.L.P., Arellano-Vale, R.B. (1996). Bartlett correted tests for regression models with Student-t independent erros. *Brazilian Journal of Probabilitu and Statistics*, **10**, 15-33.

[34] Ferrari, S.L.P., Cysneiros, A.H.A.M., Cribari-Neto, F. (2004). An Improved Test for Heteroskedasticity Using Adjusted Modified Profile Likelihood Inference. *Journal of Statistical Planning and Inferences*, **57**, 353 - 361.

[35] Ferrari, S.L.P., Cribari-Neto, F. (2002). Corrected modified profile likelihood heteroskedasticity tests. *Statistics and Probbility letters* **57**, 353 - 361.

[36] Ferrari, S.L.P., Uribe-Opazo, M.A. (2001). Corrected likelihood ratio test in class of symmetric linear regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **15**, 49 - 67.

[37] Fisher, R.A. (1925). Theory of statistical estimation. *Proceeding of Cambridge Philosophical Society*, **22**, 700 - 725.

[38] Fisk, P.R. (1961). The graduation of income distributions. *Econometrica*, **29**, 171 - 185.

[39] Gupta, A.K., Varga, T. (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers.

[40] Hayakawa, T. (1977). The likelihood ratio criterion and the assymtoptic expansion of its distribution. *Annals of the institute of Statistical Mathematics A*, **29**, 359 - 378.

[41] Hayakawa, T. (1987). Correction to 'The likelihood ratio criterion and the assymtoptic expansion of the its distribution.' *Annals of the institute of Statistical Mathematics A*, **39**, 681.

[42] Harris P. (1986). A note on Bartlett adjustments to likelihood ratio tests. *biometrika*, **73**, 735 - 737.

[43] Hastings N.A.J., Peacock, J.B. (1975). *Statistical Distributions*. New York: Wiley.

[44] Ihaka, R., Gentleman, R. (1996). R: a language for data analysis and graphics. *Journal of Computational Graphics and Statistics*, **5**, 299 - 314.

[45] Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhya A*, **32**, 419 - 430.

[46] Knut, D., (1986). *the Texbook*. New York; Adisson-Wesley.

[47] Lange, K.L., Little, R.J., Taylor, J. (1989). Robust statistical modeling using the t-distribution. *Journal fo the American Statistical Association*, **84**, 881 - 896.

[48] Lawley, D.N. (1956). A general method for approximating to the distribution of the likelihood ratio criteria. *Biometrika*, **71**, 233 - 244.

[49] Lehmann, E.L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory*. New York: Springer-Verlag.

[50] Lehmann, E.L., Casella, E. (1998). *Theory of Point Estimation*, 2nd ed. New York Springer-Verlag.

[51] Lemonte, A.J. (2006). *Inferência Sobre os Parâmetros da Distribuição Birnbaum-Saunders Bi-Paramétrica*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco.

[52] Litlle, R.J. (1988). Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values. *Applied Statistcs*, **37**, 23 - 39.

[53] Montenegro, L.C.C., Cordeiro, G.M. (2002). Bartlett corrected likelihood ratio tests in location-scale nonlinear models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **30**, 1353 - 1372

[54] Muirhead,M. (1980). The effects of elliptical ditributions on some standart procedures involving correlation coefficients. *Multivariate Statistical Analysis*, North-Holland, 143 - 159.

[55] Muirhead,M. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York: John Wiley.

[56] Pearl,R., Reed, L.J. (1920). On the rate of growth of the population of the United States since 1970 and this mathematical representation. *Procceedings of the National Academy of Sciences*, **6** 275 - 288.

[57] Pearl,R., Reed, L.J. (1924). *Studies in Human Biology*. Baltimore; Williams and Wilkins.

[58] Pearl,R., Reed, L.J., Kish, J.F. (1940). The logistic curve and the census count of 1940. *Science*, **92**, 486 - 488.

[59] Plackett,R.L. (1959). the analysis of life-test data. *Technometrics*, **1**, 9-19.

[60] Rao, B.L.S.P. (1990). Remarks on univariate elliptical distributions. *Statistics and Probability Letters*, **10**, 307 - 315.

[61] Schultz,H. (1930). The standard error of a forecast from a curve. *Journal of the Americam Statistical Association*, **25**, 139 - 185.

[62] Taylor,J. (1992). Properties of modeling the erros distribution with an extra shape parameter. *Computational Satatisical and Data Analysis*, **13**, 33 - 46.

[63] Verhulst,P.J. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans sons accroissement. *Corr. Math. et Physique*, **10**, 113 - 121.

[64] Verhulst,P.J. (1845). Recherches mathématique sur la loi d'accroissement de la population. *Académic de Bruxelles*, **18**, 1 - 38.

[65] Yamaguchi, K. (1990). Generalized EM algorithm for model with contaminated error term. *Proceedings of the Seven Japan and Korea Joit Conference of Statistics*. 107 - 114.