FALTA DE CONSCIÊNCIA EM PROBLEMAS DE BARGANHA DE 2 JOGADORES

ANDRÉA MARIA DOS SANTOS

Orientador: Prof. Dr. LEANDRO CHAVES RÊGO

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2009

Santos, Andréa Maria dos
Falta de consciência em problemas de barganha de 2 jogadores / Andréa Maria dos Santos - Recife : O Autor, 2009.
vii, 92 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Jogos - Teoria. I. Título.

519.3 CDD (22. ed.) MEI2009-037

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

27 de fevereiro de 2009
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Andréa Maria dos santos

intitulada

"Falta de Consciência em Problemas de Barganha de 2 Jogadores"

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Leandro Chaves Rego
Leandro Chaves Rego orientador

Maurício Soares Bugarin (IBMEC/SP)

Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

A Deus, por sua infinita Graça.

A meu pai, por ser meu exemplo de dignidade,

obstinação e perseverança.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a paz e a tranquilidade necessária à construção desse trabalho.
Aos meus pais por terem sempre me incentivado a ler e estudar com dedicação mesmo diante de dificuldades.
A minha família, pelo carinho e apoio em todos os momentos. A minha irmã Adriana, por ter sido amiga presente e ouvinte constante dos meus desabafos. A minha mãe, pela incrível paciência.
A Victor, pelo carinho, paciência e compreensão e pela ajuda generosa com as figuras.
A Manoel Wallace, meu melhor amigo de graduação e mestrado, por ter tornado mais divertidos todos os anos que passamos nesta universidade. A Tales, Juscelino e Elisa, nossos colegas de graduação, pela torcida constante.
A Vanessa por ter me ajudado de forma tão generosa no primeiro ano de mestrado. A Eliabe, por ter sido um ótimo ouvinte nos momentos de estresse.
Ao professor Antônio Carlos Rodrigues Monteiro, pelo incentivo em toda a graduação.
Aos meus colegas de mestrado: Izabel, que tão generosamente compartilhou conosco o seu saber estatístico, a Wilton por nos fazer rir, mesmo quando isso era quase impossível. A Abrãao, Alice, Cícero, Fábio, Hemílio, Juliana, Lídia, Marcelo, Olga, Raphael, Valmir e Wagner pela amizade.
À Valéria Bittencourt, pela eficiência, presteza e disponibilidade em facilitar nossa vida acadêmica.
Ao professor Leandro Chaves Rêgo, pela ilimitada paciência, atenção e disponibilidade e por sempre transmitir tranquilidade e segurança necessárias para o desenvolvimento da dissertação.
À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

A maior parte dos modelos desenvolvidos em teoria dos jogos considera que os jogadores são conscientes de toda a estrutura do jogo. Contudo, alguns trabalhos mais recentes têm modelado situações de jogos não-cooperativos onde é possível que um jogador seja inconsciente de ações disponíveis a ele ou a outros jogadores.

Nesta dissertação, nós damos os primeiros passos para estender modelos de jogos cooperativos para situações onde jogadores possam ter falta de consciência sobre alguns aspectos relevantes do jogo. Mais especificamente, nós propomos um modelo para representar problemas de barganha de dois jogadores, onde consideramos possível que jogadores possam ter falta de consciência a respeito da estrutura do jogo. Além de mostrar como representar problemas desse tipo, nosso modelo, baseando-se na definição de barganha do modelo axiomático de Nash, propõe um novo conceito de solução de barganha e um conjunto de axiomas que caracterizam esta solução. Também mostramos uma forma de obter um problema de barganha com consciência a partir de um jogo normal com consciência.

Em um dos modelos apresentados, além de permitir falta de consciência, mostramos como representar situações onde os jogadores podem receber informações das quais não eram inicialmente conscientes.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Consciência, Barganha, Solução de Barganha de Nash.

Abstract

Most of the models in the field of Game Theory consider that players are aware of the whole game structure. However, some recent works have modeled situations of non-cooperative game where it is possible that a player may be unaware of some action available to him or to other players.

In this Master Thesis, we give the first steps to extend cooperative game models to situations where players may be unaware of some relevant aspects of the game. More specifically, we propose a model to represent bargaining problems for two players, where we consider possible that players may be unaware about the game structure. Besides showing how to represent such problems, our model, that is based on Nash's axiomatic model of bargaining, proposes a new bargaining solution concept for these problems and a set of axioms that characterize this solution. We also show how to get a bargaining problem with unawareness from a game in normal form with unawareness.

In one of the models, besides allowing unawareness, we show how to represent situations where players can receive information that they are initially unaware of.

Keywords: Game Theory, Awareness, Bargaining, Nash's Bargaining Solution.

Índice

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Introdução

Teoria dos Jogos

Teoria dos Jogos é um conjunto de modelos e ferramentas matemáticos desenvolvidos para representar situações onde agentes (ou jogadores) interagem entre si e cada um deles tem um conjunto de decisões passíveis de serem tomadas. Tal tomada de decisão baseia-se nas preferências dos jogadores por consequências que são induzidas pelas estratégias conjuntas tomadas pelo grupo de jogadores envolvidos. Essas preferências são por sua vez representadas por funções utilidades associadas aos perfis de estratégias do jogo, ou seja, as possíveis combinações de estratégias dos jogadores que participam do jogo. Cada possível tomada de decisão de um jogador é uma estratégia disponível a ele. Atualmente, a teoria dos jogos tem modelado situações nas mais diversas áreas, como na biologia para prever o sobrevimento de uma espécie, por exemplo (ver Maynard Smith e Price (1973) e Maynard Smith (1976)). A área de abrangência desta ciência matemática em outras ciências é muito ampla. Desde a economia, com a qual tem uma ligação intrínseca e histórica até a área do Direito (ver Chung e Fortnow (2007)), onde tem sido usada freqüentemente, seus modelos auxiliam na representação e entendimento de situações de conflito de interesses. Em todas essas situações, é esperado dos agentes que ajam em função do objetivo de maximizar as utilidades que esperam ter ao final do jogo o que pode potencialmente resultar em conflitos ou na busca de cooperações entre eles. A análise de tais modelos busca tanto desenvolver soluções que contribuam para o bem comum (aplicação normativa da teoria) como desenvolver soluções que descrevam como agentes reais se comportam em situações estratégicas (aplicação descritiva da teoria).

Jogos com Consciência

Dentre os modelos desenvolvidos até aqui em teoria dos jogos, a maior parte considera que toda a estrutura do jogo é de conhecimento comum [1]entre os jogadores. Neles jogadores são conscientes, por exemplo, de todos os jogadores que participam do jogo e de todas as ações disponíveis a eles e isso é conhecimento comum entre eles. Porém, em situações do mundo real nem sempre essa premissa é verdadeira. Em situações de mercado, por exemplo, investidores podem não ser conscientes de alguma estratégia mais complexa de investimento. Então, alguns modelos têm sido desenvolvidos para capturar essa possibilidade tão real de jogadores serem inconscientes de algo relevante para o jogo, o que chamamos *falta de consciência.*

Existem diversas formas de representar jogos, como a forma normal e a forma extensa. Jogos em forma normal são jogos estáticos, isto é, jogos nos quais os jogadores se movem simultaneamente e uma única vez. Já nos jogos em forma extensa, jogadores podem implementar suas estratégias ao longo do tempo e podem obter informações sobre as estratégias que estão sendo usadas pelos outros jogadores.

Feinberg(2005) analisou o problema da falta de consciência em jogos na forma normal, Ozbay(2006) propôs um modelo para representar jogos com incerteza e onde os jogadores podem ter diferentes níveis de consciência a respeito do movimento do jogador chance [2] e , também em 2006, temos um modelo desenvolvido por Li (Li,2006) para representar inconsciência em jogos na forma extensa.

Os modelos que representam falta de consciência nos quais baseamos os modelos desenvolvidos

[1] Segundo Aumann (1976), diz-se que um fato é de conhecimento comum entre os jogadores se todo jogador sabe este fato, todo jogador sabe que todo jogador sabe este fato, e assim por diante. Assim toda afirmação da forma "(todo jogador sabe que)^k todo jogador sabe este fato" é verdadeira para k = 0, 1, 2...

[2] O jogador chance representa movimentos aletaórios que podem ocorrer durante um jogo. É também chamado de natureza.

nesta dissertação foram criados recentemente com o objetivo de representar dois tipos de jogos: jogos em forma extensa e jogos em forma normal. O modelo desenvolvido por Halpern e Rêgo (2006) busca representar jogos em forma extensa onde jogadores podem não ser conscientes das ações disponíveis aos outros jogadores ou a eles mesmos. Mais recentemente, Barreto e Rêgo (2008) desenvolveram um modelo no qual procuram representar de forma apropriada jogos em forma normal onde também é permitido que os jogadores sejam inconscientes de ações disponíveis nos jogos.

Nesta dissertação nos basearemos nestes dois modelos para representar falta de consciência em problema de barganha de dois jogadores. Daremos detalhes da estrutura destes modelos no Capítulo 2.

Problema de Barganha

Considere como problema de barganha uma situação onde agentes negociam entre si, cooperando uns com os outros, podendo chegar a um acordo ou não, pois há a existência de conflitos de interesse e um acordo não pode ser imposto a nenhum jogador. Há várias situações do mundo real onde existe barganha, desde as mais elementares, como uma negociação entre duas pessoas sobre a compra de um objeto, até as mais complexas, como uma situação de conflito, onde dois países negociam um cessar-fogo. A palavra barganha tem como sinônimo negociação e a ligação entre negociação e economia de mercado é básica. Mesmo que o mercado seja complexo, há espaço para situações de barganha quando dois agentes específicos são colocados para negociar, por exemplo. Determinação de preço de produto através de uma negociação bilateral (por exemplo, governo e empresa de transportes urbanos decidindo o preço da passagem de ônibus) pode ser um exemplo de barganha.

Existem alguns modelos em teoria dos jogos desenvolvidos para representar situações de barganha, como o que usa jogos em forma extensa para modelar propostas feitas pelos jogadores durante as negociações. A estrutura na qual nos baseamos para desenvolver as formas de representação apresentadas nesta dissertação é o modelo axiomático de Nash (Nash, 1953) para barganha de dois jogadores. Basicamente, o modelo axiomático de Nash considera um conjunto de utilidades resultante de todos os possíveis resultados de uma negociação entre os agentes e um pagamento a ser recebido no caso do processo de negociação não terminar em acordo, o valor de discórdia. Baseado numa série de axiomas que representam princípios presentes em uma negociação, Nash desenvolveu uma solução para o que é chamado de *problema de barganha de Nash*. Detalharemos esse modelo no Capítulo 3.

1.2 O objetivo

O modelo axiomático de Nash considera que os jogadores são conscientes das estruturas presentes no problema de barganha e que isso é conhecimento comum entre os jogadores. Porém, nem sempre isso acontece em situações do mundo real.

É possível que em alguma negociação algum jogador não seja consciente de alguma estratégia que seja possível ao outro ou a ele mesmo. Como exemplo, considere uma negociação sobre cessar-fogo onde um país(ou grupo) pode ter uma tecnologia que um inimigo não é consciente (e consequentemente pode realizar ações que o inimigo não têm consciência).

Nosso objetivo nessa dissertação é modelar situações como essa, onde pode haver falta de consciência em um problema de barganha de dois jogadores, isto é, onde um dos dois jogadores, ou ambos, podem ser inconscientes de estratégias disponíveis a ele ou a outros jogadores e, consequentemente, de utilidades que podem ser obtidas por ele ou por algum outro jogador no processo de negociação. Nosso principal interesse é construir um modelo que capture a falta de consciência dos jogadores, axiomas que uma solução de um problema de barganha com falta de consciência, se existir, tenha que satisfazer e verificar a existência de solução.

Além disso, temos interesse em modelar qual o impacto da comunicação em um processo de barganha sobre a estrutura do jogo. O que muda em um jogo se um jogador se torna consciente de algo do qual não era no início do processo de barganha? É bom para o jogador ser consciente de toda a estrutura do jogo ou desconhecer algo pode deixá-lo em situação melhor? Essas questões serão abordadas no Capítulo 5.

1.3 A Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2, chamado de "Jogos com Falta de Consciência", apresentamos dois modelos para representar falta de consciência em jogos não-cooperativos, um para jogos em forma extensa, desenvolvido por Halpern e Rêgo (2006) e o outro para jogos em forma normal, desenvolvido por Barreto e Rêgo (2008). O objetivo desse capítulo é familiarizar o leitor com situações de falta de consciência e apresentar de forma resumida os modelos que nos motivaram a trabalhar com falta de consciência e nos quais se baseiam os modelos desenvolvidos nesta dissertação. Compreender a estrutura dos modelos revisados nesse capítulo deve auxiliar no entendimento dos modelos que desenvolvemos. No Capítulo 3, intitulado "Problema de Barganha de Dois Jogadores", apresentamos a definição de problema de barganha de acordo com o modelo axiomático de Nash, os axiomas de Nash que uma solução de barganha deve obedecer e o resultado desenvolvido por Nash para a solução de problemas de barganha de dois jogadores. No Capítulo 4, intitulado "Falta de Consciência em Barganha de 2 Jogadores" apresentamos o nosso primeiro modelo para problema de barganha de dois jogadores no qual jogadores podem ser inconscientes a respeito de uma parte da estrutura do problema. Naquele capítulo, propomos um novo conceito de solução de barganha e propomos uma lista de axiomas que caracterizam essa solução. No Capítulo 5, chamado de "Barganha, Falta de Consciência e Informação", apresentamos um outro modelo para barganha de dois jogadores com falta de consciência, baseado no modelo do Capítulo 4, que permite aos jogadores acrescentar informações a sua consciência, permitindo que jogadores se tornem conscientes de informações a respeito da barganha das quais eles não eram conscientes no início. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões sobre os modelos desenvolvidos e aspectos da dissertação que podem gerar discussões e trabalhos futuros.

1.4 Plataforma Computacional

O sistema de tipografia utilizado na digitação desta dissertação foi o LaTeX. O sistema LaTeX, desenvolvido por Leslie Lamport em 1985, consiste em uma série de macros ou rotinas do sistema TeX (criado por Donald Knuth na Universidade de Stanford em 1983) que facilitam o desenvolvimento da edição do texto. O LaTeX possui comandos muito cômodos e elegantes para a criação de tabelas, índices, bibliografia, referências cruzadas, etc., permitindo ao usuário concentrar-se no conteúdo do documento em vez de detalhes puramente tipográficos. Para maiores detalhes sobre o sistema de tipografia LaTeX ver De Castro (2003) ou através do site http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex.

CAPÍTULO 2

Jogos com Falta de Consciência

2.1 Introdução

Os mais importantes modelos usuais de Teoria dos Jogos assumem que os aspectos relevantes de um jogo (utilidades, ações disponíveis, etc.) são de conhecimento comum entre os jogadores. Porém, nem sempre esta é uma suposição razoável em situações do mundo real. Como exemplo de que esta situação pode não se aplicar na prática, considere um contexto de guerra. É razoável considerar que um ou alguns dos adversários podem não ser conscientes de alguma tecnologia que um ou algum dos seus adversários possuam e consequentemente podem não ser conscientes de ações que estes podem realizar. Também em mercados financeiros, investidores podem não ter consciência de alguma estratégia de investimento, como estratégias para evitar impostos.

Ultimamente têm sido desenvolvidos importantes modelos em Teoria dos Jogos que consideram a possibilidade dos jogadores não terem plena consciência da estrutura do jogo. Neste trabalho consideramos o modelo desenvolvido por Halpern e Rêgo (2006) baseado em jogos em forma extensa e o desenvolvido por Barreto e Rêgo (2008) para jogos em forma normal. No primeiro modelo é apresentada uma maneira de representar jogos em forma extensa na qual os jogadores podem não ter consciência acerca de alguns aspectos do jogo. Mais especificamente, eles apresentam um modelo no qual os jogadores podem não ter consciência de ações disponíveis aos demais ou a si próprios. É proposto também nesse trabalho o conceito de *equilíbrio de Nash* *generalizado* como um conceito de solução apropriado para tais situações.

O segundo modelo é baseado no modelo de Halpern e Rêgo (2006) e fornece uma representação para jogos em forma normal onde alguns jogadores podem não ter consciência de todas as ações disponíveis. Esse modelo também representa jogos com consciência sobre inconsciência, isto é, jogos onde um jogador pode ser consciente de que existem ações que um outro jogador pode realizar, embora ele não saiba exatamente quais ações são essas.

A maior parte do conteúdo deste capítulo foi extraído de Halpern e Rêgo (2006) e Barreto e Rêgo (2008); nós incluímos este material para tentar tornar esta dissertação auto-contida de forma a que o leitor possa entender nossa abordagem para modelagem do problema de barganha para 2 jogadores com falta de consciência.

Recentemente, têm sido desenvolvidos vários trabalhos na área de jogos com inconsciência. Feinberg(2005) analisou o problema de falta de consciência em jogos na forma normal e deu uma definição de equilíbrios estendidos para tais jogos, Ozbay(2006) analisa inconsciência em jogos com incerteza, onde jogadores podem ter diferentes níveis de consciência e onde ele assume que um jogador que seja totalmente consciente pode contar a outro jogador alguma informação antes que este se mova e Li(2006) desenvolveu um modelo para representar inconsciência em jogos na forma extensa, por exemplo.[1]

2.2 Falta de Consciência em jogos em Forma Extensa

Iniciamos essa seção com uma definição da representação de jogos em forma extensa para facilitar a leitura da seção seguinte, que trata da representação desses jogos com a diferença de permitir falta de consciência a respeito da estrutura do jogo (Osborne e Rubinstein, 1994).

Definição 2.2.1. *Um jogo em forma extensa (ou extensiva) com informação perfeita é um vetor* $\Gamma = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\})$ *onde*

- N *é um conjunto que consiste dos agentes participando do jogo.*

[1] No site http://www.econ.ucdavis.edu/faculty/schipper/unaw.htm o leitor pode encontrar alguns dos relevantes trabalhos publicados na área

- *M é um conjunto cujos elementos são os movimentos ou ações disponíveis aos jogadores ou a chance durante o jogo.*

- *H é um conjunto de sequências de movimentos (elementos de M) que é fechado com relação a prefixos [2], isto é, se $h \in H$ e h' for um prefixo de h, então $h' \in H$. Além disso, se $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in H$ para todo inteiro finito k, então $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in H$. Denotaremos por$X(h)$ o conjunto de prefixos de h.Intuitivamente, cada membro de H é uma possível história do jogo. Podemos identificar nós em uma árvore com histórias em H. Cada nó n é caracterizado por uma sequência de ações necessárias para atingirmos n. Uma trajetória completa em H é uma história terminal, uma que não é prefixo estrito de nenhuma outra história em H. Considere Z o conjunto de trajetórias completas de H. Seja $M_h = \{m \in M : h. \langle m \rangle \in H\}$ (onde utilizamos . para denotar concatenação de sequências); M_h é o conjunto de ações que podem ser tomadas após a história h.*

- *$P : (H - Z) \rightarrow N \cup \{c\}$ é uma função que associa cada história não terminal h a um elemento de $N \cup \{c\}$(c representa movimentos aleatórios que podem ocorrer durante o jogo, usualmente chama-se c de jogador chance ou natureza).*

- *Se $P(h) = i$, então jogador i se move após história h; se $P(h) = c$, então chance se move após h. Considere $H_i = \{h : P(h) = i\}$ o conjunto de todas histórias após as quais o jogador i se move.*

- *f_c é um função que associa a cada história em que $P(h) = c$ uma medida de probabilidade $f_c(./h)$ em M_h. Intuitivamente, $f_c(./h)$ descreve uma distribuição de probabilidade sobre as ações disponíveis para a natureza uma vez que a história h é atingida.*

- *$u_i : Z \rightarrow I\!R$ é uma função que para cada trajetória completa z do jogo associa um número real $u_i(z)$ que representa o valor esperado da função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern ((Campello de Souza 2007)) que o jogador i tem sobre as consequências induzidas*

[2] Um prefixo de uma sequência (x_n) de comprimento K é qualquer subsequência de (x_n) que consiste dos primeiros $l \leq K$ termos de (x_n). Por exemplo se $h = \langle A, B, C \rangle$ os prefixos de h são $\langle\rangle, \langle A \rangle, \langle A, B \rangle$ e $\langle A, B, C \rangle$. Um prefixo estrito de uma história h é um prefixo de h que não é igual a h.

se a história completa z fosse a sequência de ações implementadas pelos jogadores. Como é usual em Teoria dos Jogos, $u_i(z)$ será tratado como um pagamento associado à história completa z.

Um jogo em forma extensa é finito se N; M e H forem finitos.

A seguir, algumas definições importantes para entender as restrições do modelo com consciência e os exemplos desse capítulo.

Jogo com Informação Imperfeita

Ao se mover após uma determinada história do jogo, jogadores podem ter informação parcial sobre as decisões que já foram tomadas no jogo. Quando isso ocorre, diz-se que o jogo tem informação imperfeita. Formalmente, um jogo com informação imperfeita é um vetor $\Gamma = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\}, \{\mathcal{I}_i : i \in N\})$, onde:

- $(N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\})$, é um jogo em forma extensa com informação perfeita.
- $\mathcal{I}_i$ é uma partição de H_i com a propriedade de que se h e h' estão na mesma célula da partição, então $M_h = M_{h'}$, ou seja, o mesmo conjunto de ações está disponível em todas as histórias de uma mesma célula da partição; se $h \in I$, onde I é uma célula da partição, denota-se por M_I o conjunto M_h de ações disponíveis. Intuitivamente, se h e h' estão na mesma célula de $\mathcal{I}_i$, então h e h' são indistinguíveis do ponto de vista do jogador i; i considera a história h' possível se a verdadeira história for h, e vice versa. Define-se como *conjunto de informação para o jogador i* ou $i-$conjunto de informação uma célula $I \in \mathcal{I}_i$. Quando desenhamos um jogo em forma extensa com informação imperfeita em uma árvore circulamos ou interligamos os nós pertencentes a um mesmo conjunto de informação com uma linha tracejada.

Jogo com memória perfeita

Define-se que um jogo em forma extensa é um *jogo com memória perfeita* se seus jogadores se recordam de todas as ações que eles tomaram e de todos os conjuntos de informação pelos quais eles passaram. Formalmente, um jogo em forma extensa com memória perfeita é um jogo em forma extensa com a seguinte restrição:

- se h e h' estão no mesmo conjunto de informação do jogador i e h_1 é um prefixo de h tal que $P(h_1) = i$, então existe um prefixo h'_1 de h' tal que h_1 e h'_1 estão no mesmo conjunto de informação; além disso, se $h_1 . \langle m \rangle$ for um prefixo de h (de forma que m foi a ação realizada quando h_1 foi atingida na história h, então $h'_1 . \langle m \rangle$ é um prefixo de h' (portanto, i lembra que ele realizou ação m).

É apresentado, a seguir, um exemplo de um jogo em forma extensa com informação imperfeita.

Exemplo 2.2.1. *Considere o jogo em forma extensa como descrito na figura a seguir:*

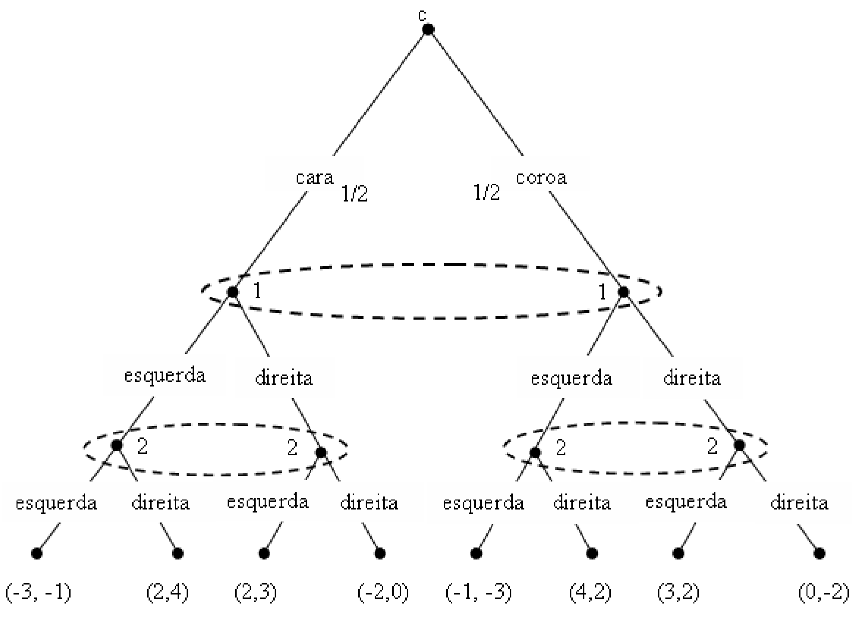


Figura 2.1: Jogo em forma extensa como definido na Seção 2.2

Baseado na Figura 2.1 *e nas definições apresentadas, temos:*

- $N = \{1, 2\}$
- $M = \{cara, coroa, esquerda, direita\}$

- $H = \{\langle\rangle, \langle cara\rangle, \langle coroa\rangle, \langle cara, esquerda\rangle, \langle cara, direita\rangle, \langle coroa, esquerda\rangle, \langle coroa, direita\rangle,$
  $\langle cara, esquerda, esquerda\rangle, \langle cara, esquerda, direita\rangle, \langle cara, direita, esquerda\rangle, \langle cara, direita, direita\rangle,$
  $\langle coroa, esquerda, esquerda\rangle, \langle coroa, esquerda, direita\rangle, \langle coroa, direita, esquerda\rangle,$
  $\langle coroa, direita, direita\rangle\}$

- $P(\langle\rangle) = chance$
  $P(\langle cara\rangle) = P(\langle coroa\rangle) = 1$
  $P(\langle cara, esquerda\rangle) = P(\langle cara, direita\rangle) = P(\langle coroa, esquerda\rangle) = P(\langle coroa, direita\rangle) =$
  2

- $f_0(cara|\,\langle\rangle) = f_0(coroa|\,\langle\rangle) = \frac{1}{2}$

- $u_1(\langle cara, esquerda, esquerda\rangle) = u_2(\langle coroa, esquerda, esquerda\rangle) = -3$
  $u_2(\langle cara, esquerda, esquerda\rangle) = u_1(\langle coroa, esquerda, esquerda\rangle) = -1$
  $u_1(\langle cara, esquerda, direita\rangle) = u_1(\langle cara, direita, esquerda\rangle) = u_2(\langle coroa, esquerda, direita\rangle) =$
  $u_2(\langle coroa, direita, esquerda\rangle) = 2$
  $u_2(\langle cara, esquerda, direita\rangle) = u_1(\langle coroa, esquerda, direita\rangle) = 4$
  $u_2(\langle cara, direita, esquerda\rangle) = u_1(\langle coroa, direita, esquerda\rangle) = 3$
  $u_1(\langle cara, direita, direita\rangle) = u_2(\langle coroa, direita, direita\rangle) = -2$
  $u_2(\langle cara, direita, direita\rangle) = u_1(\langle coroa, direita, direita\rangle) = 0$

- $\mathcal{I}_1 = \{\{cara\}, \{coroa\}\};$
  $\mathcal{I}_2 = \{\{\langle cara, esquerda\rangle, \langle cara, direita\rangle\}, \{\langle coroa, esquerda\rangle, \langle coroa, direita\rangle\}\}$

2.2.1 Modelando Consciência em Jogos Extensivos

Considere um jogo em forma extensiva Γ. Nesta seção, descreve-se o modelo proposto por Halpern e Rêgo (2006) para representar situações onde jogadores podem não ser conscientes de todas as ações disponíveis no jogo Γ. Para isto, o conjunto de ações de que o jogador que se move após cada história do conjunto H tem consciência é descrito explicitamente. O nível de consciência do jogador i após uma história h é basicamente um conjunto de trajetórias completas de Γ de que i tem consciência após a história h. Baseado nesse conceito, define-se *jogo aumentado*.

Um jogo aumentado Γ^+ baseado em Γ é definido de forma similar a um jogo em forma extensa padrão. A diferença é que após cada história h não terminal, é necessário determinar não apenas o jogador que se move naquela história, mas também seu nível de consciência. Ou seja, intuitivamente um jogo aumentado é um jogo extensivo aumentado pelo acréscimo do nível de consciência.

Formalmente, $\Gamma^+ = (N^+, M^+, H^+, P^+, f_c^+, \{\mathcal{I}_i^+ : i \in N^+\}, \{u_i^+ : i \in N^+\}, \{A_i^+ : i \in N^+\})$ é um *jogo aumentado baseado no jogo em forma extensiva (padrão)* $\Gamma = (N, M, H, P, f_c, \{\mathcal{I}_i : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

A1. $(N^+, M^+, H^+, P^+, f_c^+, \{\mathcal{I}_i^+ : i \in N^+\}, \{u_i^+ : i \in N^+\})$ é um jogo finito em forma extensiva com memória perfeita.

A2. $A_i^+ : H_i^+ \to 2^H$ descreve o nível de consciência de i em cada história não terminal após a qual o jogador i se move. Para cada $h \in H_i^+$, $A_i^+(h)$ consiste de um conjunto de histórias em H e todos os seus prefixos. Intuitivamente, $A_i^+(h)$ descreve o conjunto de histórias de Γ de que i tem consciência quando se move em $h \in H_i^+$.

A3. $N^+ \subseteq N$.

A4. Se $P^+(h) \in N^+$, então $P^+(h) = P(\overline{h})$, onde $\overline{h}$ é a maior subsequência de h consistindo de todas as ações em h que também estão em M, e $M_h^+ \subseteq M_{\overline{h}}$. Intuitivamente, todas as ações disponíveis para i em h devem também estar disponíveis para na história $\overline{h}$ do jogo básico Γ. Como veremos a seguir, para o caso do jogador chance isso nem sempre é verdade, existem novas ações para o jogador chance que não fazem parte do jogo básico.

A5. Se $P^+(h) = c$, então ou $P(\overline{h}) = c$ e $M_h^+ \subseteq M_{\overline{h}}$, ou $M_h^+ \cap M = \emptyset$. As ações em M_h^+ no caso em que $M_h^+ \cap M = \emptyset$ intuitivamente capturam incerteza com respeito ao nível de consciência de algum jogador. Ou seja, há dois tipos de movimentos aleatórios que podem ser representados pelo jogador chance em um jogo aumentado: movimentos aleatórios quaisquer, que já existiam no jogo básico, ou movimentos que representem a incerteza dos jogadores a respeito do nível de consciência dos demais jogadores. Se for o primeiro tipo, então, $P(\overline{h}) = c$, mas se for do degundo tipo, então $M_h^+ \cap M = \emptyset$, já que movimentos que capturam incerteza sobre consciência não fazem parte do jogo básico. No exemplo 2.2.2 que será descrito mais á frente, por exemplo, $P^2(\langle\rangle) = c$, $M^2_{\langle\rangle} = \{consciente, inconsciente\}$ e sua interseção com M é vazia, isto porque esse jogador chance do jogo Γ^2 captura incerteza sobre a consciência dos jogadores.

$A6$. Se h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em $\mathcal{I}_i^+$, então $A_i^+(h) = A_i^+(h')$. Intuitivamente, o nível de consciência de i depende apenas da informação que i tem.

$A7$. Se h é um prefixo de $h^{'}$ e $P^+(h) = P^+(h')$, então $A_i^+(h) \subseteq A_i^+(h')$. Esta é uma condição de memória perfeita: jogadores não se tornam inconscientes de histórias de que eles tinham consciência no passado.

$A8$. Se h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ^+, então $\overline{h}$ e $\overline{h}^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ.

$A9$. Se h e $h^{'}$ são histórias em ambos Γ^+ e Γ (o que implica que $h = \overline{h}$ e $h' = \overline{h}'$), e $\overline{h}$ e $\overline{h}^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ, então h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ^+.

$A10$. Para todo $i \in N^+$ e $h \in H_i^+$, se $h', h'' \in A_i^+(h)$, h' e h'' estão no mesmo conjunto de informação em Γ, então $h'.\langle m\rangle \in A_i^+(h)$ se, e somente se, $h''.\langle m\rangle \in A_i^+(h)$.

$A11$. $\{\overline{z} : z \in Z^+\} \subseteq Z$; além disso, para todo $i \in N^+$, $h \in H^+$, se z for uma história terminal em $A_i^+(h)$, isto é, se $z \in A_i^+(h)$ e z não for o prefixo de nenhum outro elemento de$A_i^+(h)$, então $z \subseteq Z$. Logo, as trajetórias em Z^+ correspondem a trajetórias em Z, e os jogadores entendem este fato.

$A12$. Para todo $i \in N^+$ e trajetórias z em Z^+, se $\overline{z} \in Z$, então $u_i^+(z) = u_i(\overline{z})$. Logo, a utilidade de um jogador depende apenas das ações tomadas no jogo básico.

As condições $A1 - A12$ compreendem intuições a respeito de conjuntos de informações, consciência e conhecimento comum. Assume-se que existe conhecimento comum sobre quem se move nas histórias do jogo básico Γ, sobre as utilidades de Γ e sobre quais são seus conjuntos de informação. Isso permite focar em problemas mais diretamente relacionados com a falta de consciência, mais especificamente falta de consciência a respeito das ações disponíveis aos jogadores. Para maiores detalhes sobre as intuições por trás de cada uma dessas condições, consultar Halpern e Rêgo (2006).

Um jogo aumentado descreve o ponto de vista do modelador ou a visão subjetiva do jogo de algum dos jogadores. Para modelar o jogo com consciência baseado em Γ, Halpern e Rêgo consideraram uma coleção de jogos aumentados baseados em Γ, e qual jogo aumentado o jogador que se move em uma determinada história acredita ser o verdadeiro jogo. Formalmente, um *jogo com consciência baseado em* $\Gamma = (N, M, H, P, f_c, \{\mathcal{I}_i : i \in N\}, \{u_i : i \in N\})$ é um vetor $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, onde:

- $\mathcal{G}$ é um conjunto enumerável de jogos aumentados baseados em Γ.

- Γ^m é um jogo aumentado que pertence a $\mathcal{G}$ e é chamado jogo do modelador. Intuitivamente, Γ^m é a visão do jogo de um modelador onisciente, isto é, conhecedor de todo o jogo e do nível de consciência real dos jogadores.

- $\mathcal{F}$ é uma função que leva um jogo aumentado $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$ e uma história h em Γ^+ tal que $P^+(h) = i$ para um par (Γ^h, I), onde $\Gamma^h \in \mathcal{G}$ e I é um i-conjunto de informação do jogo Γ^h. Se um jogador i que se move em h no jogo $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h) = (\Gamma^h, I)$, então Γ^h é o jogo que i acredita ser o verdadeiro quando a história é h, e I é o conjunto de histórias em Γ^h que o jogador considera possível nesse momento.

O jogo aumentado Γ^m e a função $\mathcal{F}$ devem satisfazer um número de condições de consistência. Assume-se que o modelador é onisciente a respeito do jogo básico, isto é, ele entende o jogo básico Γ, sabendo de todos os jogadores e possíveis ações. Sabe também as distribuições de probabilidade envolvidas nos movimentos da natureza do jogo básico Γ. É basicamente o que descrevem as condições a seguir.

$M1$. $N^m = N$

$M2$. $M \subseteq M^m$ e $\{\overline{z} : z \in Z^m\} = Z$.

$M3$. Se $P^m(h) \in N$, então $M^m_h = M_{\overline{h}}$. Se $P^m(h) = c$, então ou $M^m_h \cap M = \emptyset$ ou $M^m_h = M_{\overline{h}}$ e $f^m_c(.h) = f_c(.h)$.

Embora o modelador seja conhecedor do jogo básico, de todos os seus jogadores e ações, o jogo Γ^m não é determinado unicamente por Γ. É possível determinar vários jogos de modeladores baseados em Γ, mudando os níveis de consciências dos jogadores.

As condições seguintes dizem respeito a função $\mathcal{F}$ e abrangem propriedades importantes de consciência.

Considere $\Gamma^+ \in \mathcal{G}, h \in H^+, P^+(h) = i, \mathcal{A}^+_i(h) = a$ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, i) = (\Gamma^h, I)$. Então,

$F1$. $\{\overline{h}^{'} : h^{'} \in H^h\} = a$

$F2$. Se $h^{'} \in H^h$ e $P^h(h^{'}) = j$, então $\mathcal{A}^h_j(h^{'}) \subseteq a$ e $M_{\overline{h}^{'}} \cap \{m : \overline{h}^{'}.\langle m\rangle \in a\} = M^h_{h^{'}}$.

$F3$. Se h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ^+ e $\overline{h}^{'} \in a$, então existe $h^{''} \in I$ tal que $\overline{h}^{''} = \overline{h}^{'}$.

$F4$. Se $h^{'} \in I$, então $\mathcal{A}^h_i(h^{'}) = a$ e $\mathcal{F}(\Gamma^h, h^{'}) = (\Gamma^h, I)$.

$F5$. Se $h^{'} \in H^+$, $P^+(h^{'}) = i$, $\mathcal{A}^+_i(h^{'}) = a$, então se h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação em Γ^+, então $\mathcal{F}(\Gamma^+, h^{'}) = (\Gamma^h, I)$, enquanto se h for um prefixo ou um sufixo de $h^{'}$, então $\mathcal{F}(\Gamma^+, h^{'}) = (\Gamma^h, I^{'})$ para algum conjunto i-conjunto de informação $I^{'}$.

$F6$. Se $h^{'} \in I$, então $\overline{h}$ e $\overline{h}^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação Γ;

$F7$. Se $\Gamma^h = \Gamma^+$, então $h^{'} \in I$ se, e somente se, h e $h^{'}$ estão no mesmo i-conjunto de informação em Γ^+.

$F8$. Para todas histórias $h' \in I$, existe um prefixo $h^{'}_1$ de $h^{'}$ tal que $P^h(h^{'}_1) = i$ e $\mathcal{F}(\Gamma^h, h^{'}_1) = (\Gamma^{'}, I^{'})$ se, e somente se, existe um prefixo h_1 de h tal que $P^+(h_1) = i$ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h_1) = (\Gamma^{'}, I^{'})$. Além disso, $h^{'}_1.\langle m\rangle$ é um prefixo de $h^{'}$ se, e somente se, $h_1.\langle m\rangle$ for um prefixo de h.

$F9$. Existe uma história $h^{'} \in I$ tal que para todo prefixo $h^{''}. \langle m \rangle$ de $h^{'}$, se $P^h(h^{''}) = j \in N^h$ e $\mathcal{F}(\Gamma^h, h^{''}) = (\Gamma^{'}, I^{'})$, então para todo $h_1 \in I^{'}$, $h_1. \langle m \rangle \in H^{'}$.

$F10$. Se $h^{'}$ e $h^{''}$ são histórias em ambos, Γ e Γ^+, então h e $h^{'}$ estão no mesmo i-conjunto de informação em Γ^+ se, e somente se, h e $h^{'}$ estão no mesmo i-conjunto de informação em Γ.

Para consultar maiores detalhes e ter uma intuição sobre essas e as outras restrições consultar Halpern e Rêgo(2006).

Estratégia Local e Equilíbrio de Nash Generalizado

Em um jogo extensivo padrão, uma estratégia para o jogador i é uma função que associa uma ação ou uma distribuição sobre ações para cada conjunto de informação, considerando estratégias puras ou comportamentais respectivamente. Intuitivamente, pode ser vista como o que o jogador i fará em cada uma das situações possíveis do jogo. Isto faz sentido, porque em um jogo padrão i conhece todo o jogo desde o início, consequentemente sabe todas as situações que podem vir a ocorrer no decorrer do jogo.

Em um jogo extensivo, onde é considerada a possibilidade de falta de consciência, o jogador i não pode definir uma estratégia no início por não saber o que ocorrerá durante o jogo, já que i pode tornar-se consciente de algo do qual não era consciente no início do jogo. Considere o conjunto $\mathcal{G}_i = \{\Gamma^{'} \in \mathcal{G}$:para algum $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$ e $h \in \Gamma^+, P^+(h) = i$ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h) = (\Gamma^{'}, .)\}$. $\mathcal{G}_i$ é intuitivamente o conjunto de todos os jogos que i acredita ser o verdadeiro ao se mover após uma história h. Ao invés de considerar que o jogador i tem uma única estratégia no início do jogo, pois isso não é apropriado à estrutura do jogo com consciência, define-se que para cada jogo aumentado em $\mathcal{G}_i$, o jogador i deve ter uma estratégia. Portanto, i tem não apenas uma estratégia, mas uma coleção $\{\sigma_{i,\Gamma'} : \Gamma^{'} \in \mathcal{G}_i\}$ delas, que são chamadas *estratégias locais.*

Intuitivamente, uma estratégia local $\sigma_{i,\Gamma'}$ é a estratégia que o jogador i usaria se fosse chamado a jogar em uma situação do jogo onde acredita ser verdadeiro o jogo $\Gamma^{'}$. O domínio de $\sigma_{i,\Gamma'}$ é, então, os pares (Γ^+, h) tais que $\Gamma^+ \in \mathcal{G}$, h é uma história em Γ^+, $P^+(h) = i$, e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h) = (\Gamma^{'}, I)$. Formalmente, dado um jogo com consciência $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$, uma *estratégia local* $\sigma_{i,\Gamma'}$ para o jogador i é uma função que leva pares (Γ^+, h) tais que h é uma história onde i se move em Γ^+ e $\mathcal{F}(\Gamma^+, h) = (\Gamma', I)$ a uma distribuição de probabilidade sobre $M'_{h'}$, ações disponíveis em uma história $h' \in I$, tal que $\sigma_{i,\Gamma'}(\Gamma_1, h_1) = \sigma_{i,\Gamma'}(\Gamma_2, h_2)$ se

$\mathcal{F}(\Gamma_1, h_1) = \mathcal{F}(\Gamma_2, h_2)$. Definido o conceito de estratégia local, pode ser apresentado o conceito de equilíbrio de Nash para jogos extensivos com consciência.

Define-se um *perfil de estratégias generalizado* de um jogo com consciência $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$ como um conjunto de estratégias locais $\vec{\sigma} = \{\sigma_{i,\Gamma'} : i \in N, \Gamma' \in \mathcal{G}_i\}$. Seja $EU_{i,\Gamma'}(\vec{\sigma})$ a utilidade esperada para i no jogo Γ' dado que o perfil de estratégias $\vec{\sigma}$ é utilizado. Um *perfil de estratégias generalizado* de um jogo $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$ com consciência é um *equilíbrio de Nash generalizado* se, para todo jogador i, jogo $\Gamma' \in \mathcal{G}_i$ e estratégia local σ para i em Γ', $EU_{i,\Gamma'}(\vec{\sigma}^*) \geq EU_{i,\Gamma'}((\vec{\sigma}^*_{-(i,\Gamma')}, \sigma))$. Intuitivamente, um *equilíbrio de Nash generalizado* de $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$ é um perfil de estratégias generalizado $\vec{\sigma}$ de Γ^* tal que para todo jogo aumentado $\Gamma' \in \mathcal{G}_i$, a estratégia local $\sigma_{i,\Gamma'}$ é uma melhor resposta para $\vec{\sigma}_{-(i,\Gamma')}$, onde $\vec{\sigma}_{-(i,\Gamma')}$ é o conjunto de todas as estratégias locais em $\vec{\sigma}$ exceto $\sigma_{i,\Gamma'}$.

Um dos resultados mais importantes demonstrado por Halpern e Rêgo (2006) é que todo jogo extensivo com consciência tem um equilíbrio de Nash generalizado.

Li(2006) também propôs uma noção de equilíbrio de Nash generalizado em jogos na forma extensa com inconsciência. Assim, como Halpern e Rêgo(2006), ela também considera que o jogador i deva ter uma melhor resposta no que diz respeito ao que ele acredita em relação às estratégias dos jogadores nos jogos que i acredita ser possível, no entanto ela exige que estas crenças satisfaçam algumas restrições sobre estratégias locais e conjuntos de informação. Estas restrições podem ser encontradas na íntegra em Li(2006).

Considere a seguir um exemplo de um jogo em forma extensa com falta de consciência.

Exemplo 2.2.2. *Considere o seguinte jogo em forma extensa*

Suponha que:

- *O jogador* 2 *é consciente de todas as histórias do jogo;*
- *O jogador* 2 *tem incerteza se o jogador* 1 *é consciente da trajetória* $\langle B, D, F \rangle$ *e acredita*

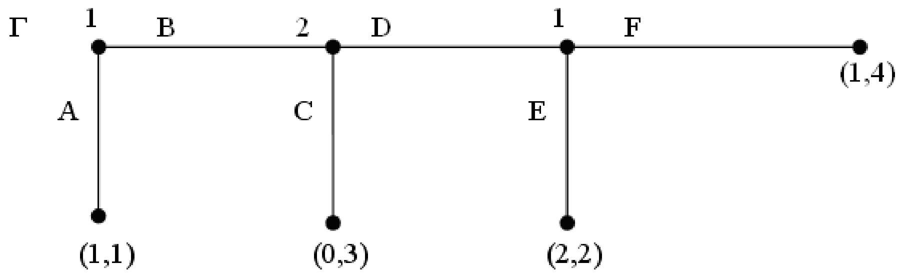


Figura 2.2: Jogo em forma extensa como definido na seção definido na Seção 2.2

que ele(1) *é inconsciente desta trajetória com probabilidade* p*;*

- *O jogador 1 é inconsciente da trajetória* $\langle B, D, F\rangle$*;*
- *O tipo do jogador* 1 *que é inconsciente da trajetória* $\langle B, D, F\rangle$ *acredita que* 2 *é consciente das mesmas trajetórias que ele*(1) *é consciente.*

Quando o jogador 1 *se move nos nós* 1 *do jogo* Γ*, ele é consciente do jogo* Γ^1 *descrito na Figura 2.4. Quando o jogador* 2 *se move no nó* 2.1 *do jogo* Γ^1*, ele também acredita que o jogo verdadeiro é* Γ^1*, mas quando o jogador* 2 *se move no nó* 2 *do jogo do modelador, ele acredita que o verdadeiro jogo é* Γ^2 *como descrito na Figura* 2.3*. No jogo* Γ^2*, a ação inicial do jogador chance captura a incerteza do jogador* 2 *sobre o nível de consciência do jogador* 1*. No conjunto de informação* 2.2 *do jogo* Γ^2*, o jogador* 2 *é consciente de todas as trajetórias do jogo básico* Γ *e acredita que o verdadeiro jogo é* Γ^2*. Quando jogador* 1 *se move no nó* 1.1 *do jogo* Γ^2*, ele acredita que o verdadeiro jogo é o jogo do modelador, já quando se move no nó* 1.2*, o jogador 1 acredita que o verdadeiro jogo é* Γ^1*.*

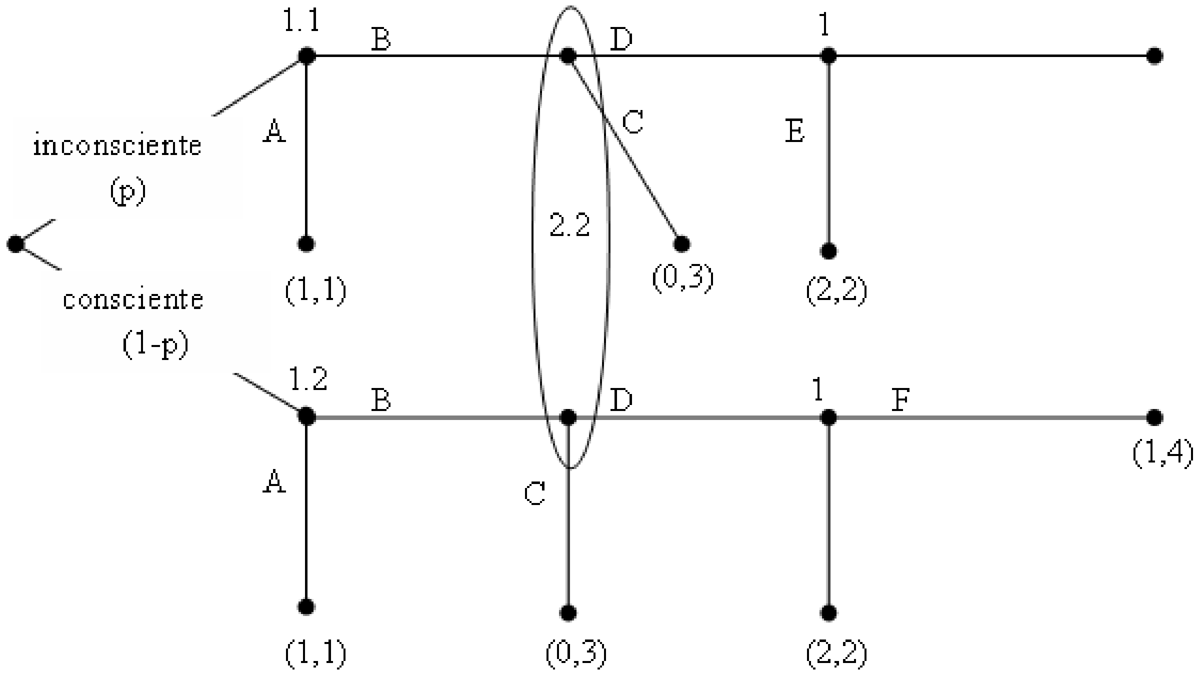


Figura 2.3: Jogo aumentado que representa a visão do Jogador 2 sobre o jogo.

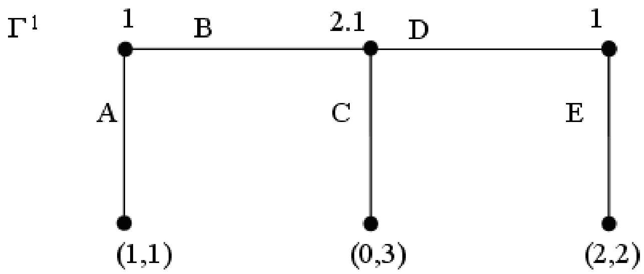


Figura 2.4: Jogo aumentado que representa a visão do Jogador 1 sobre o jogo.

Temos então que o jogo com consciência $\Gamma^* = (\mathcal{G}, \Gamma^m, \mathcal{F})$ baseado em Γ pode ser descrito da seguinte forma:

- $\mathcal{G} = \{\Gamma^m, \Gamma^1, \Gamma^2\}$
- *Alguns exemplos da função $\mathcal{F}$:*

  $\mathcal{F}(\Gamma^m, \langle\rangle) = (\Gamma^2, \{\langle consciente\rangle\}, \langle inconsciente\rangle\}),$

$\mathcal{F}(\Gamma^2, \langle inconsciente \rangle) = (\Gamma^1, \langle\rangle)$, $\mathcal{F}(\Gamma^2, \langle consciente, B \rangle) = (\Gamma^2, \langle inconsciente, B\rangle, \langle consciente, B\rangle)$, $\mathcal{F}(\Gamma^2, \langle inconsciente, B, D \rangle) = (\Gamma^1, \langle B, D\rangle)$, $\mathcal{F}(\Gamma^2, \langle consciente\rangle) = (\Gamma^m, \langle\rangle)$, $\mathcal{F}(\Gamma^2, \langle consciente, B\rangle) = (\Gamma^2, \langle inconsciente, B\rangle, \langle consciente, B\rangle)$, $\mathcal{F}(\Gamma^1, \langle B, D\rangle) = (\Gamma^1, \langle B, D\rangle)$.

Baseado na estrutura desenvolvida por Halpern e Rêgo (2006) para representar jogos extensivos com consciência, Barreto e Rêgo (2008) propuseram uma estrutura para representar jogos com consciência em forma normal. Tal modelo é apresentado na próxima seção.

2.3 Falta de Consciência em Jogos em Forma Normal

Antes de apresentar o modelo que permite falta de consciência em jogos na forma normal, relembraremos a definição de jogos em forma normal.

Definição 2.3.1. *Um jogo em forma normal é uma tripla* $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}), (u_i)_{i\in N})$*, onde*

- N *é o conjunto de jogadores;*
- C_i *é o conjunto de estratégias puras (ou ações) disponíveis para o jogador* $i \in N$*;*
- u_i *é uma função que associa um perfil de estratégias* $c \in \times_{i\in N} C_i$ *a um número real. Como é usual em Teoria dos Jogos,* u_i *será tratado como um pagamento associado ao perfil* c*.*

Um jogo em forma normal Ψ *é dito ser um jogo finito se o conjunto de jogadores* N *e os conjuntos de estratégias* C_i *são todos finitos.*

2.3.1 Representação de Jogos com Consciência em Forma Normal para Dois Jogadores

Trataremos nesse modelo do caso mais básico do modelo para jogos com consciência em forma normal: o caso de dois jogadores. No modelo desenvolvido por Barreto e Rêgo (2008) temos o modelo para n jogadores, mas como o modelo para falta de consciência em problema de barganha discutido neste trabalho aborda apenas o caso para dois jogadores, trataremos apenas deste caso particular do modelo para jogos normais.

Um aspecto importante a ser considerado ao modelar jogos com consciência é a definição de uma estrutura que represente o nível de consciência do jogador. Em um jogo normal com consciência, o nível de consciência é uma distribuição de probabilidades sobre subconjuntos de perfis de estratégias do jogo, onde tais subconjuntos representam as possíveis estratégias do jogo que os jogadores são capazes de descrever ou imaginar. Considera-se o nível de consciência como probabilístico por ser permitido ao jogador i neste modelo ter incerteza a respeito dos perfis de estratégia dos quais o outro jogador é consciente. Define-se então uma estrutura chamada de *jogo aumentado* como um jogo em forma normal "acrescentado" desse nível de consciência, ou seja, intuitivamente um jogo normal aumentado nada mais é que um jogo em forma normal, com a diferença que agora há a presença de uma componente extra na definição do jogo que determina o nível de consciência dos jogadores a respeito dos perfis de estratégias disponíveis aos demais. Dado um conjunto finito A, seja $\Delta(A)$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre A. Formalmente, um jogo normal aumentado baseado no jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ é um vetor $\Psi' = (N', (C'_i)_{i \in N'}, (u'_i)_{i \in N'}, (\mathcal{A}'_i)_{i \in N'})$ onde

A1. $\overline{\Psi}' = (N', (C'_i)_{i \in N'}, (u'_i)_{i \in N'})$ é um jogo em forma normal finito;

A2. $N' = \{i \in N : C'_i \neq \emptyset\}$;

A3. $C'_i \subseteq C_i, i \in N'$;

A4. $u'_i(c) = u_i(c), \forall i \in N'$ e $c \in C'$, onde $C' = \times_{i \in N'} C'_i$;

A5. Para todo $i \in N'$, $\mathcal{A}'_i \in \Delta(2^{C'})$, de forma que se $\mathcal{A}'_i(D) > 0$, então $D = \times_{j \in N'} D_j$, onde $D_j \subseteq C'_j, \forall j \in N'$, ou seja, $\mathcal{A}'_i$ não pode associar probabilidade positiva para qualquer subconjunto de C', mas apenas para aqueles subconjuntos que são produtos cartesianos de subconjuntos ($D'_j s$) das estratégias dos jogadores.

Cada jogo normal aumentado Ψ' representa a visão subjetiva de um jogador i a respeito do jogo ou a visão objetiva, quando se trata do jogo do modelador. Neste modelo, também se considera o modelador como onisciente, isto é, assume-se que ele é consciente de todos os perfis de estratégias disponíveis e sabe o nível de consciência dos jogadores. Para definir o jogo com consciência baseado no jogo normal Ψ, considera-se também uma coleção de jogos aumentados baseada em Ψ.

Define-se um jogo com consciência para dois jogadores baseado em um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, onde $\|N\| = 2$ como sendo $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$.

- $\mathcal{G}$ é um conjunto de jogos aumentados baseados em Ψ.
- Ψ^m é o jogo do modelador definido nesse modelo como onisciente. Ψ^m é tal que $\overline{\Psi}^m = \Psi$, isto é, o jogo normal correspondente ao jogo do modelador(o jogo no qual o modelador acredita como sendo o verdadeiro jogo) é igual ao jogo básico, pois assim se garante que o modelador é consciente de todas as estratégias e jogadores do jogo básico Ψ.
- $\mathcal{F}$ é uma função que leva um jogo normal aumentado $\Psi' \in \mathcal{G}$ e um jogador i, com $i \in N'$ a uma distribuição de probabilidade sobre a classe de jogos aumentados baseados em $\overline{\Psi}'$ contida em $\mathcal{G}$, chamada de $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}$. Isto é, $\mathcal{F}(\Psi', i) \in \Delta(P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}})$, onde $\Delta(A)$ é a notação usual para o conjunto de todas as distribuições de probabilidade em A.

Se $\mathcal{F}(\Psi', i) = \mathbf{p}$, onde $\mathbf{p}$ é uma distribuição de probabilidade sobre $P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}$, diz-se então que um jogo Ψ'' pertence ao suporte de $\mathbf{p}$ se Ψ'' recebe probabilidade positiva de acordo com a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}$. Se o jogador j acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' e que $i \neq j$ se move neste jogo e $\mathcal{F}(\Psi', i) = \mathbf{p}$, então j está incerto quanto ao jogo que i acredita ser o verdadeiro quando i se move em Ψ' e os jogos que estão no suporte de $\mathbf{p}$ são os jogos que fazem parte da incerteza de j. Note que $\mathcal{F}$ não poderia ser definida uma distribuição de probabilidade sobre $\mathcal{G}$, pois se um dado jogador j acredita em Ψ', como sendo o verdadeiro jogo, não se pode permitir que $\mathcal{F}(\Psi', i)$ seja um distribuição de probabilidade sobre $\mathcal{G}$, pois ao se permitir isso afirma-se que o jogador j seria capaz de descrever estratégias que não fariam parte de C', o que não é verdade pois C' contém todas as estratégias que o jogador j é capaz de imaginar, se ele acredita que o verdadeiro jogo é Ψ'. Existem propriedades de consciência que a função $\mathcal{F}$ deve satisfazer. Tais propriedades são captadas pelas seguintes restrições:

*R*0. Para todo $\Psi' \in \mathcal{G}$,$i \in N'$, e $D \subseteq C'$,$\sum_{\Psi'' \in P_{\mathcal{G}^{\overline{\Psi}'}}, C''=D} \mathcal{F}(\Psi', i)(\Psi'') = \mathcal{A}'_i(D)$.

*R*1. Se, para algum $\Psi' \in \mathcal{G}$ e $i \in N'$, tem-se que Ψ'' pertence ao suporte de $\mathcal{F}(\Psi', i)$, então

$\mathcal{F}(\Psi'', i) = [\Psi'']$, onde a notação $[\Psi'']$ é usada para indicar que o jogo Ψ'' recebe probabilidade 1 de acordo com a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}$, onde $\mathcal{F}(\Psi'', i) = \mathbf{p}$.

A restrição $R0$ exige que a soma das probabilidades dos jogos normais aumentados que o jogador i considera possível em Ψ' que possuem conjunto de possíveis perfis de estratégias igual a D deve ser igual a probabilidade de D segundo o nível de consciência de i em Ψ'.

Da restrição $R1$ obtém-se que se um jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', então ele deve acreditar que ele acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', de modo que se o verdadeiro jogo fosse Ψ', então i deveria saber deste fato e isso é conhecimento comum entre eles. Esta propriedade pode ser descrita como uma capacidade de introspecção dos jogadores a respeito de sua crença.Como essa capacidade é conhecimento comum entre eles, se o jogador j que acredita que o verdadeiro jogo é Ψ' acredita com probabilidade positiva que o jogador i considera que o verdadeiro jogo é Ψ'', então se o verdadeiro jogo fosse Ψ'', o jogador i deveria acreditar com probabilidade 1 que este era realmente o jogo.

Estratégia Local e Equilíbrio de Nash Generalizado

Um aspecto importante de um jogo com consciência é que seus jogadores têm visão subjetiva sobre o jogo, isto é, cada jogador i pode ter uma percepção limitada a respeito das estratégias sendo utilizadas pelos outros jogadores, pois podem existir ações disponíveis aos demais jogadores das quais i não é consciente. Além disso i pode ter incerteza sobre esses conjuntos de ações disponíveis aos demais e tem uma expectativa diferente para as estratégias utilizadas pelos outros em cada situação que ele considera possível. Torna-se necessário então definir para cada cenário que i considera possível uma estratégia que intuitivamente seria a estratégia que i utilizaria se i fosse chamado a jogar e acreditasse que esse cenário fosse o verdadeiro, ou seja, em um jogo com consciência em forma normal para cada possível jogo Ψ' que algum jogador acredite que i possa considerar ser o verdadeiro em alguma situação, i deve ter uma estratégia local $\delta_{\Psi',i}$ neste jogo.

Formalmente, uma estratégia local para o jogador i em um jogo $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ é uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras de i em Ψ' e assim, $\delta_{i,\Psi'} \in \Delta(C'_i)$. Definido o conceito de estratégia local, pode-se discutir qual o conceito de equilíbrio em um jogo normal com falta de consciência.

Em jogos padrões, sem falta de consciência, tem-se que um perfil de estratégias c é um equilíbrio de Nash, se para cada jogador i sua estratégia em c é sua melhor opção, dentre todas as suas estratégias, contra as estratégias dos outros jogadores em c, isto é, mesmo sabendo as estratégias que estão sendo usadas pelos demais, os jogadores não têm incentivo a mudar de estratégia porque sua estratégia é uma melhor resposta as estratégias dos demais jogadores. Esta definição implicitamente assume que cada jogador é consciente do conjunto de estratégias disponíveis para os demais e que isso é de conhecimento comum entre os jogadores. Essa definição de equilíbrio não pode ser usada ao se tratar de jogos com falta de consciência, pois jogadores podem não ser conscientes de uma estratégia disponível para outro jogador, sendo impossível para o jogador i determinar qual sua melhor resposta a uma estratégia que ele desconhece. Como a visão do jogador pode ser subjetiva e representar a percepção de i sobre o jogo básico sem necessariamente ser igual ao jogo básico, torna-se necessário descrever não somente as estratégias usadas no jogo objetivo, como também as estratégias locais usadas pelos jogadores em cada um dos jogos aumentados que algum jogador considera verdadeiro em alguma situação do jogo. A seguir, é descrita a noção de *equilíbrio generalizado* que é uma generalização do conceito de equilíbrio de Nash para jogos em forma normal com consciência.

Define-se *perfil de estratégia generalizado* como um vetor cujas coordenadas são estratégias locais, isto é, $\vec{\delta} = \{\delta_{i,\Psi'} : \forall i \in N, \forall \Psi' \in \mathcal{G}_i\}$. A utilidade esperada para o jogador i no jogo Ψ' é representado por $u_{i,\Psi'}(\vec{\delta})$. Para calcular $u_{i,\Psi'}(\vec{\delta})$ precisa-se apenas da estratégia $\delta_{i,\Psi'}$ e das estratégias locais do oponente de i nos jogos em que i acredita que seu oponente considera ser o verdadeiro com probabilidade positiva, ou seja, é preciso saber as seguintes estratégias locais $\{\delta_{j,\Psi''} : j \neq i, \mathcal{F}(\Psi', j)(\Psi'') > 0\}$. Essas estratégias locais têm suporte contido em C'_j, pela definição de $\mathcal{F}$ e de jogo aumentado. Logo, se o jogador i acredita que o verdadeiro jogo é Ψ', ele é consciente de todas essas estratégias e portanto pode calcular o valor esperado deste perfil generalizado de estratégias. Dado um perfil generalizado $\vec{\delta}$ a utilidade esperada para um jogador

i em um jogo $\Psi^+ \in \mathcal{G}_i$ é calculada da seguinte forma:

$$u_{i,\Psi^+}(\vec{\delta}) = \sum_{\Psi' \in P_{\mathcal{G}^{\Psi^+}}} \mathcal{F}(\Psi^+, j)(\Psi') u_i^+(\delta_{i,\Psi^+}, \delta_{j,\Psi'}).$$

Define-se então como *equilíbrio de Nash generalizado* de um jogo normal com consciência $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ um perfil de estratégia generalizado $\vec{\delta^*}$ tal que se para todo jogador i, jogo $\Psi' \in \mathcal{G}_i$ e estratégia local δ pertencente ao jogador i em Ψ', o payoff esperado para o jogador i em Ψ' quando os demais jogadores seguem as estratégias locais em $\vec{\delta^*}$ é maior ou igual quando ele usa $\vec{\delta^*_{i,\Psi'}}$ do que quando ele usa δ, ou seja,

$$u_{i,\Psi'}(\vec{\delta^*}) \geq u_{i,\Psi'}((\vec{\delta^*}_{-(i,\Psi')}, \delta)),$$

onde $\vec{\delta^*}_{-(i,\Psi')}$ é o conjunto de todas as estratégia locais em $\vec{\delta^*}$ menos a estratégia $\delta_{i,\Psi'}$. O resultado importante deste modelo é que é provado que todo jogo com consciência em forma normal, com 2 jogadores, localmente finito [3] tem um equilíbrio de Nash generalizado. Este resultado é generalizado para o caso de n jogadores, porém nesta dissertação só nos preocuparemos em abordar o caso para dois jogadores.

Feinberg(2005) também deu uma definição de equlíbrio estendido para jogos com falta de consciência na forma normal. A diferença entre essa noção de equilíbrio estendido e a de equlíbrio generalizado de Barreto e Rêgo, é que para Feinberg, jogadores são caracterizados por uma descrição completa de quais ações e outros jogadores eles têm consciência de que outro jogador tem consciência e assim por diante para todos os níveis iterados de consciência (Barreto e Rêgo, 2008).

É apresentado, a seguir, um exemplo de um jogo com consciência em forma normal.

Exemplo 2.3.1. *Considere o jogo normal com consciência Ψ^κ como descrito na figura 2.5:*

[3] Um jogo com consciência em forma normal Ψ^* baseado em Ψ é localmente finito se Ψ for finito e $\mathcal{F}(\Psi^+, i)$ para todo $\Psi^+ \in \mathcal{G}$ e $i \in N^+$.

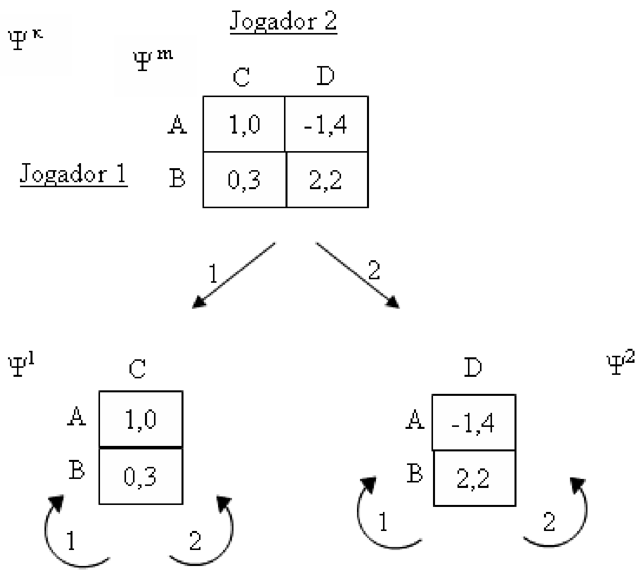


Figura 2.5: Jogo normal com consciência Ψ^κ

Nessa representação de jogo com consciência baseado em um jogo em forma normal, as setas são importantes para facilitar o entendimento. Elas levam um jogador(representado por um número ou nome ao seu lado) para o jogo que ele acredita ser verdadeiro naquela situação. Neste exemplo, partindo do jogo Ψ^m *temos duas setas. A seta com o número 1 ao lado aponta para o jogo* Ψ^1*. Isto significa que no jogo do modelador, o jogador 1 acredita com probabilidade 1 que o verdadeiro jogo é* Ψ^1*, ou ainda, que* Ψ^1 *é o jogo que 1 acredita de acordo com a visão do modelador. Temos então que em* Ψ^κ *:*

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^2\}$

- $P_{\mathcal{G}_{\Psi^m}} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^2\}$;

  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^1}} = \{\Psi^1\}$;

  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^2}} = \{\Psi^2\}$.

- $\mathcal{A}_1^m(C^1) = \mathcal{A}_2^m(C^2) = 1; \mathcal{A}_1^1(C^1) = \mathcal{A}_2^1(C^1) = 1; \mathcal{A}_2^2(C^2) = \mathcal{A}_1^2(C^2) = 1.$

- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^1) = \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^2) = 1; \mathcal{F}(\Psi^1, 1)(\Psi^1) = \mathcal{F}(\Psi^1, 2)(\Psi^1) = 1;$

  $\mathcal{F}(\Psi^2, 2)(\Psi^2) = \mathcal{F}(\Psi^2, 1)(\Psi^2) = 1.$

CAPÍTULO 3

Problema de Barganha de Dois Jogadores

3.1 Introdução

Considere a situação em que duas pessoas estão negociando. O interesse de uma é vender um objeto como um carro, por exemplo, e o da outra, comprar. A pessoa que está interessada em vender faz então uma proposta inicial que a outra pode aceitar, recusar definitivamente ou propor um outro valor de compra. Em várias outras situações práticas do dia-a-dia, como essa, indivíduos têm que negociar como dividir valores entre si. Por exemplo, numa cooperativa os membros precisam decidir como dividir entre si os lucros obtidos; governantes precisam dividir os impostos arrecadados entre diversos programas e ministérios, etc. Em tais contextos, indivíduos podem chegar a um acordo, cooperando entre si, mesmo que sejam racionais e busquem maximizar o lucro esperado, ou não.

Existem alguns modelos em teoria dos jogos que buscam representar processos de barganha como esses, por exemplo, os que usam jogos em forma extensa(Osborne e Rubinstein, 1990). Nesta dissertação baseamos nossos modelos no modelo axiomático de Nash e neste capítulo apresentamos um resumo deste modelo com o objetivo de facilitar a compreensão dos capítulos seguintes. Na Seção 3.2 são apresentados a estrutura do modelo, familiarizando o leitor com termos como *conjunto de utilidades* e *valor de discórdia*. Na seção seguinte, apresentamos os axiomas de Nash e o resultado obtido por Nash sobre a solução de problemas de barganha. Na última seção, apresentamos através de um exemplo algumas formas de determinar o vetor de discórdia para problemas de barganha baseado em um jogo normal.

Neste capítulo assumimos que toda a estrutura do modelo apresentado é de conhecimento comum aos jogadores. Nos capítulos seguintes, modificaremos este modelo permitindo que esta premissa não seja necessária. A maior parte do conteúdo deste capítulo foi extraído do livro do Myerson (Myerson, 1997).

3.2 Problema de Barganha entre dois jogadores

No modelo de barganha apresentado neste capítulo, um problema de barganha para dois jogadores é intuitivamente um processo de negociação onde os dois jogadores negociam sobre utilidades disponíveis a ambos. O objetivo do processo de negociação é selecionar de forma imparcial e de acordo com alguns princípios, como equidade e eficiência, um par de utilidades que satisfaça aos dois jogadores. Esse processo de negociação pode se dar por meio de comunicação entre os jogadores, já que em um problema de barganha é intuitivo conceber que os jogadores cooperem entre si na busca de um equilíbrio que satisfaça a ambos. Também pode ser considerada a figura de um árbitro (também chamada mediador) como um indivíduo que pode determinar esse equilíbrio de acordo com os princípios já mencionados e sugeri-lo publicamente aos jogadores. Esse indivíduo deve ser alguém capaz de se comunicar com todos os jogadores com linguagem clara e objetiva, de forma que todos sejam capazes de entender qual equilíbrio é proposto por ele. Além disso, o árbitro deve ser respeitado por ambos os jogadores e isso deve ser conhecimento comum entre eles para que o equilíbrio sugerido por ele (o árbitro) seja um equilíbrio focal para os jogadores, isto é, os jogadores devem respeitar a autoridade do árbitro a ponto de atender o equilíbrio proposto por ele e cada jogador deve saber que os outros jogadores respeitam o árbitro e saber que os outros sabem que ele sabe e assim por diante.

Os jogadores podem seguir os princípios que um árbitro seguiria na escolha de um equilíbrio, existindo a figura do árbitro ou não. Então, o objetivo desse modelo é determinar qual equilíbrio seria selecionado por um árbitro que seguisse determinados princípios já mencionados, como eficiência e equidade. Baseado nisso, o modelo descrito nesse capítulo não precisa detalhar se a negociação é feita através de comunicação entre os jogadores ou pelo árbitro, já que a finalidade é determinar através de princípios o equilíbrio a ser seguido, independente de quem efetue as negociações. Qualquer que sejam os detalhes do processo de negociação, este deve selecionar o mesmo equilíbrio que um árbitro imparcial e obediente a princípios pré-determinados escolheria. É o que diz a seguinte *hipótese de equidade*:

Os resultados de negociações efetivas as quais os jogadores têm oportunidades iguais de participarem devem ser os mesmos que as recomendações feitas por um árbitro imparcial que sabe a informação que é conhecimento comum entre os jogadores durante o processo de negociação.

Em um processo de barganha de dois jogadores, existem os valores que os jogadores esperam receber, utilidades que esperam conseguir, caso a negociação falhe. Então, o equilíbrio a ser selecionado como resultado do processo de barganha deve depender não só das utilidades resultantes de ações sobre as quais é feita a negociação efetivamente, mas também desse par de valores, chamados de *valores de discórdia*.

Formalmente, um problema de barganha entre dois jogadores é um par (F, υ), onde F é o conjunto de utilidades disponíveis aos dois jogadores (F pode ser chamado conjunto viável) e é um subconjunto compacto e convexo do $I\!R^2$ e $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2) \in I\!R^2$ é o *vetor de discórdia* cujos componentes são os valores de discórdia para os jogadores 1 e 2, respectivamente . É razoável assumir a convexidade de F, pois os jogadores podem concordar em aleatorizar conjuntamente sobre estratégias. Então, se x e y são vetores de utilidades possíveis e $0 \leq \theta \leq 1$, o vetor de utilidades esperadas $\theta x + (1-\theta)y$ é possível. É determinado também que o conjunto $F \cap \{(x_1, x_2) : x_1 \geq \upsilon_1 \text{ e } x_2 \geq \upsilon_2\}$ seja não-vazio e limitado, o que garante a existência em F de um vetor pelo menos tão bom quanto o vetor de discórdia.

Um problema de barganha (F, υ) pode ser obtido a partir de um jogo em forma normal $\Psi = (N, (C_i)_{i \in N}), (u_i)_{i \in N})$. Uma maneira de fazê-lo é definir F da seguinte forma:

$$F = \{(u_1(\mu), u_2(\mu)) : u_i(\mu) = \sum_{c \in C} \mu(c) u_i(c)\},$$

onde C é o conjunto de perfis de estratégias em Ψ e μ é uma distribuição de probabilidades sobre C. O exemplo a seguir, baseado num famoso jogo da literatura de teoria dos jogos, Batalha dos Sexos, ilustra esse processo. Na Seção 3.4 discutiremos alguns métodos de determinarmos o vetor de discórdia.

Exemplo 3.2.1. (Batalha dos Sexos) *Considere o jogo normal Ψ como descrito na Figura 3.1 e que pode ser interpretado como um jogo onde um casal de namorados, por exemplo, têm de escolher entre ir ao shopping ou ir a praia. Ela (jogador 2) prefere ir ao shopping, ele (jogador 1) prefere ir à praia. A tabela descrita na Figura 3.1 descreve as utilidades em cada uma das situações e a Figura 3.2 mostra o conjunto F de utilidades disponíveis aos jogadores que pode ser obtido a partir de Ψ como definimos anteriormente.*

Ψ		Jogador 2	
		Shopping	Praia
Jogador 1	Shopping	1,2	0,0
	Praia	0,0	2,1

Figura 3.1: Jogo em forma normal

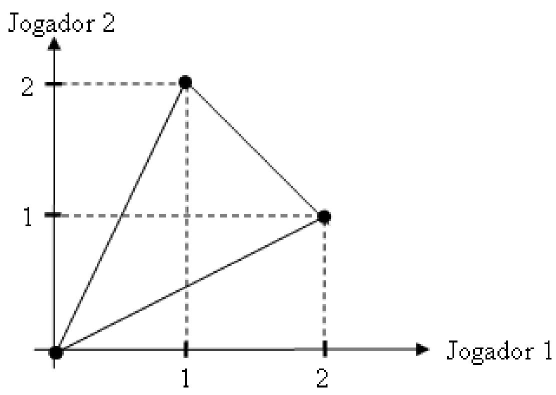


Figura 3.2: Conjunto de utilidades de barganha correspondente a Ψ

3.3 Os Axiomas de Nash e a Solução de Barganha

O objetivo da teoria de barganha é determinar o par que seria selecionado por um árbitro imparcial e indicado aos jogadores como solução. Assumindo a hipótese de equidade, qualquer processo de negociação (mesmo os que não têm a presença do árbitro) deve selecionar um par que seria selecionado por esse árbitro. Esta seleção deve se basear em princípios como eficiência e imparcialidade e para definir uma solução é importante definir quais são esses princípios que o par selecionado deve satisfazer para que seja considerado um equilíbrio a ser aceito pelos jogadores. Apresentaremos a seguir uma lista dos princípios que segundo Nash em (Nash, 1950a) um par deve satisfazer para ser considerada como solução conhecidos como *Axiomas de Nash*. Para um problema de barganha de dois jogadores (F, v), esse par é um vetor do $I\!R^2$ será representado por $\varphi(F, v) = (\varphi_1(F, v), \varphi_2(F, v))$. Usaremos a notação $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ se $x_i \geq y_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Os axiomas de Nash que $\varphi(F, v)$ deve satisfazer são:

Axioma da Eficiência Forte(de Pareto)(EF)

Dado um problema de barganha de dois jogadores (F, v), $\varphi(F, v)$ é um vetor em F, e para todo $x \in F$, se $x \geq \varphi(F, v)$, então x=$\varphi(F, v)$.

Axioma da Racionalidade Individual(RI)

Dado um problema de barganha de dois jogadores (F, v) e um vetor de discórdia pertencente a $I\!R^2$, v, temos que:

$$\varphi(F, v) \geq v$$

Axioma da Invariância a Transformações Afim Positivas(ITAP)

Para quaisquer números $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2$ tais que $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$, se

$$G = \{(\lambda_1 x_1 + \gamma_1, \lambda_2 x_2 + \gamma_2) : (x_1, x_2) \in F\}$$

e

$$\omega = (\lambda_1 v_1 + \gamma_1, \lambda_2 v_2 + \gamma_2),$$

então $\varphi(G, \omega) = (\lambda_1 \varphi_1(F, v) + \gamma_1, \lambda_2 \varphi_2(F, v) + \gamma_2)$.

Axioma da Independência das Alternativas Irrelevantes(IAI)

Para qualquer conjunto compacto e convexo G, se $G \subseteq F$ e $\varphi(F, \upsilon) \in G$, então $\varphi(G, \upsilon) = \varphi(F, \upsilon)$.

Axioma da Simetria(SM)

Se $\upsilon_1 = \upsilon_2$ e $\{(x_2, x_1) : (x_1, x_2) \in F\} = F$, então $\varphi_1(F, \upsilon) = \varphi_2(F, \upsilon)$.

O axioma EF diz que a solução tem de pertencer ao conjunto F, isto é, a solução deve ser viável para os jogadores pertencendo ao conjunto de utilidades disponíveis a ambos. Além disso, EF assegura que não há outro vetor de utilidades disponíveis aos jogadores em F no qual as coordenadas sejam maiores ou iguais para ambos jogadores do que em $\varphi(F, \upsilon)$, isto é, não há nada que os jogadores possam fazer que melhore a situação de ambos ou a de um deles (enquanto a do outro permanece a mesma) em relação ao vetor a ser indicado como equilíbrio pelo árbitro. O axioma RI assume que os indivíduos são racionais e que portanto, não teriam interesse em implementar um equilíbrio que deixaria um deles em situação pior do que no vetor de discórdia. Isto é, sendo um jogador um indivíduo racional, se o que ele tem a receber como valor de discórdia é maior do que o equilíbrio indicado pelo árbitro, racionalmente ele preferirá não entrar num acordo e assim fará falhar o processo de negociação. Portanto, a solução tem que ser melhor para ambos jogadores do que o que receberiam como valor de discórdia. O axioma $ITAP$ diz que se um problema de barganha é submetido a uma transformação afim positiva, a solução será submetida a mesma transformação. Isto é, dado um certo problema de barganha, se todas as utilidades disponíveis aos jogadores sofrem uma transformação afim positiva e o valor de discórdia definido previamente aos jogadores passar pela mesma transformação, obtém-se um novo problema de barganha, onde as coordenadas do par a ser indicado pelo árbitro como equilíbrio são transformações afins positivas (a mesma pela qual passaram o conjunto de utilidades disponíveis e o vetor de discórdia no problema original) das coordenadas do par proposto pelo árbitro aos jogadores no jogo original. O axioma IAI diz que eliminar alternativas não altera o par a ser proposto pelo árbitro, isto é, eliminando do conjunto de utilidades disponíveis vetores que não são o que seria indicado pelo árbitro, obtém-se um novo problema de barganha, cuja solução é igual a do problema original. Por fim, o axioma SM assegura que a solução deve ser imparcial, isto é, se considerarmos os jogadores em posições simétricas, eles terão de receber o par que o outro receberia, isto é, se o conjunto de utilidades disponíveis for simétrico e os jogadores têm o mesmo valor de discórdia, então os componentes do par indicado pelo árbitro aos jogadores como equilíbrio da barganha devem ser iguais.

Um resultado importante obtido por Nash é a existência e unicidade de uma solução que satisfaz os axiomas de Nash como enunciado no teorema a seguir:

Teorema 3.3.1. *Existe uma única solução $\varphi(.,.)$ que satisfaz os axiomas EF, RI, ITAP, IAI e SM. Esta solução é tal que para qualquer problema de barganha de duas pessoas (F, υ)*

$$\varphi(F, \upsilon) \in argmax_{\substack{x \in F \\ x \geq \upsilon}} (x_1 - \upsilon_1)(x_2 - \upsilon_2).$$

Exemplo 3.3.1. *Considere que em um problema de barganha o conjunto de utilidades é $F = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 10, 0 \leq y_2 \leq 10 - y_1\}$ e $\upsilon = (0, 0)$. O problema (F, υ) pode ser interpretado da seguinte forma: os jogadores têm que repartir dez reais entre si de qualquer forma e de comum acordo ou não recebem quantia alguma. Intuitivamente, é esperado que eles repartam igualmente entre si. Observe que o axioma EF implica que $y_2 = 10 - y_1$, então, pela definição de solução de barganha de Nash, como vista no Teorema* 3.3.1*, temos que a solução pode ser encontrada derivando o produto de Nash em relação a y_1 e igualando a zero:*

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_1}(y_1(10 - y_1)) = 10 - 2y_1$$

o que implica $y_1 = 5$ e como a segunda derivada do produto de Nash é negativa, temos que $y_1 = 5$ maximiza o produto de Nash. Portanto, se os jogadores têm utilidade linear para dinheiro, a melhor estratégia é cada um receber cinco reais.

3.4 O vetor de Discórdia

Para facilitar a compreensão do leitor acerca do exemplo em que mostraremos algumas formas de determinar o vetor de discórdia, apresentaremos algumas definições presentes na literatura sobre casos particulares de barganha.

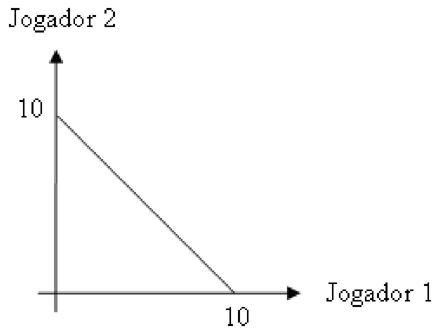


Figura 3.3: Conjunto de utilidades F do Exemplo 3.3.1

Jogo com utilidade transferível

Um jogo com utilidade transferível é um jogo em forma normal no qual além das estratégias disponíveis em $\mathcal{C}_i$, cada jogador i tem a opção de transferir qualquer quantidade de dinheiro a qualquer outro jogador, ou apenas de destruir dinheiro, e cada unidade perdida de dinheiro decresce a utilidade do jogador i em uma unidade. Interessa-nos para o exemplo que apresentaremos a seguir o que acontece se derivarmos um problema de barganha (F, υ) de um jogo utilidade transferível. O conjunto F será definido da seguinte forma:

$$F = \{y \in I\!R^2 : y_1 + y_2 \leq \upsilon_{12}\},$$

onde υ_{12} é um número que representa a máxima utilidade que os jogadores podem atingir conjuntamente e uma das maneiras de escrevê-lo é:

$$\upsilon_{12} = max_{\mu \in \Delta(\mathcal{C})}\{u_1(\mu) + u_2(\mu)\}.$$

e as soluções de barganha para cada jogador podem ser deduzidas como:

$$\varphi_1(F, \upsilon) = \frac{\upsilon_{12} + \upsilon_1 - \upsilon_2}{2}$$

e

$$\varphi_2(F, \upsilon) = \frac{\upsilon_{12} + \upsilon_2 - \upsilon_1}{2}.$$

Uma definição necessária ao entendimento de um dos métodos utilizados para calcular o vetor de discórdia é a definição de *jogo com ameaças racionais.*

Jogo com Ameaças Racionais

Seja $\Psi = (N, (C_i)_{i\in N}), (u_i)_{i\in N})$ um jogo finito em forma normal, e seja F um conjunto viável derivado de Ψ, como já definido na Seção 3.2. Suponha que antes de entrar no processo de negociação com o outro jogador, cada jogador i deva escolher uma ameaça $\tau_i \in C_i$. Suponha também que todos os jogadores concordam que se não chegarem a um acordo, a ameaça que cada um escolheu deve ser realmente implementada e que isso é conhecimento comum para os jogadores. Escolhidas as ameaças τ que cada jogador implementaria em caso de não chegarem a um acordo, o vetor de discórdia é então $(u_1(\tau_1, \tau_2), u_2(\tau_1, \tau_2))$. Considere $\omega_i(\tau_1, \tau_2)$ a utilidade do jogador i na solução de barganha de Nash, descrita na seção 3.3 com este ponto de discórdia, isto é,

$$\omega_i(\tau_1, \tau_2) = \varphi_i(F, (u_1(\tau_1), u_2(\tau_2)))$$

Suponha que os jogadores confiam que chegarão a um acordo ao final do processo de barganha. Como a solução de Nash depende do vetor de discórdia, a importância das ameaças para os jogadores é então o seu impacto no *payoff* de cada jogador, já que eles acreditam que não precisarão implementá-las. Define-se então como *ameaças racionais* o par (τ_1, τ_2) tal que:

$$\omega_1(\tau_1, \tau_2) \geq \omega_1(\sigma_1, \tau_2), \forall \sigma_1 \in \Delta(\mathcal{C}_1),$$

e

$$\omega_2(\tau_1, \tau_2) \geq \omega_2(\tau_1, \sigma_2), \forall \sigma_2 \in \Delta(\mathcal{C}_2).$$

Então, ameaças racionais formam um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo de ameaças $\Psi^* = \{\{1, 2\}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1, \omega_1, \omega_2\}$. Como todo jogo finito possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, então existem ameaças racionais.

Quando Ψ pode ser considerado um jogo de utilidade transferível, então as utilidades ω_1, ω_2 são calculadas da seguinte forma:

$$\omega_1(\tau_1, \tau_2) = \frac{\upsilon_{12} + u_1(\tau_1, \tau_2) - u_2(\tau_1, \tau_2)}{2}$$

e

$$\omega_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{\upsilon_{12} + u_2(\tau_1, \tau_2) - u_1(\tau_1, \tau_2)}{2},$$

onde $\upsilon_{12} = max_{\mu \in \Delta(C)}\{u_1(\mu) + u_2(\mu)\}$. Descreveremos agora no exemplo a seguir três métodos de determinar o valor de discórdia: *equilíbrio de Nash, minimax e ameaças racionais.*

Exemplo 3.4.1. *Considere o jogo em forma normal* Ψ *como descrito na seguinte figura:*

Ψ		Jogador 2	
		A2	B2
Jogador 1	A1	10,0	-5,1
	B1	0,-5	0,10

Figura 3.4: Jogo Normal Ψ entre dois jogadores

Considere Ψ *um jogo de utilidade transferível e* $\upsilon_{12} = 10$ *a utilidade máxima que pode ser atingida conjuntamente pelos jogadores.*

- *Equilíbrio de Nash*

Uma das formas de determinar o vetor de discórdia de um problema de barganha (F, υ) *baseado em um jogo em forma normal* Ψ *como o descrito nesse exemplo, é definindo que os jogadores receberão, no caso de não chegarem a um acordo, as utilidades do equilíbrio de Nash do jogo normal* Ψ. *Neste exemplo, é possível fazê-lo pois o jogo* Ψ *tem apenas um equilíbrio de Nash em* $(B1, B2)$. *Se escolhermos as utilidades neste equilíbrio para ser o ponto de discórdia temos* $\upsilon = (0, 10)$. *Temos que a solução de barganha de Nash, lembrando que* Ψ *é um jogo de utilidade transferível, é dada por :*

$$\varphi_1(F, (0, 10)) = \frac{10 + 0 - 10}{2} = 0, \varphi_2(F, (0, 10)) = \frac{10 + 10 - 0}{2} = 10$$

- *Minimax*

O critério de minimax diz que em um problema de barganha (F, υ) *baseado em um jogo em forma normal* Ψ, *como o descrito nesse exemplo, as utilidades dos jogadores no ponto de discórdia* *são:*

$$\upsilon_1 = min_{\sigma_2 \in \mathcal{C}_2} max_{\sigma_1 \in \mathcal{C}_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\upsilon_2 = min_{\sigma_1 \in \mathcal{C}_1} max_{\sigma_2 \in \mathcal{C}_2} u_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

Assim, nesse exemplo o valor de minimax para o jogador 1 é $\upsilon_1 = 0$ *e para o jogador 2 é* $\upsilon_2 = 1$. *Temos então que a solução de barganha de Nash considerando este vetor de discórdia é:*

$$\varphi_1(F, (0,1)) = \frac{10 + 0 - 1}{2} = 4,5, \varphi_2(F, (0,1)) = \frac{10 + 1 - 0}{2} = 5,5.$$

- *Ameaças Racionais*

O critério de ameaças racionais baseia-se no jogo de ameaças como definido anteriormente. Por este método, o vetor de discórdia é a utilidade que os jogadores receberiam em Ψ *se implementassem suas estratégias de equilíbrio do jogo de ameaças racionais. O jogo de ameaças racionais baseado em* Ψ *é descrito na figura a seguir, onde as utilidades foram calculadas considerando também que* Ψ *é um jogo de utilidade transferível (já foi definido nessa seção como calcular as utilidades de um jogo de ameaças racionais baseado em um jogo de utilidade transferível):*

Ψ		Jogador 2	
		A2	B2
Jogador 1	A1	10,0	2,8
	B1	7,5, 2,5	0,10

Figura 3.5: Tabela do Jogo de ameaças baseado em Ψ no Exemplo 3.4.1

O único equilíbrio de Nash deste jogo de ameaças é (a_1, b_2). *Logo, a estratégia de ameaça racional para o jogador 1 é* a_1 *e para o jogador 2 é* b_2, *o que lhes dá como utilidades* -5 *e* 1, *respectivamente. Logo, os valores de discórdia de acordo com este método são* $\upsilon_1 = -5$ *e* $\upsilon_2 = 1$ *e a solução de Nash é:*

$$\varphi_1(F, (-5,1)) = \frac{10 - 5 - 1}{2} = 2, \varphi_2(F, (-5,1)) = \frac{10 + 1 + 5}{2} = 8.$$

A teoria das ameaças racionais é indicada em situações nas quais é esperada que o processo de barganha atinja um acordo e então os jogadores se comprometem previamente com a estratégia das ameaças racionais, apenas pelo impacto que isso terá na solução de barganha de Nash. Quando os jogadores não podem se comprometer antecipadamente a nenhuma estratégia, o ideal é usar o método de equilíbrio de Nash. Já a teoria de minimax é apropriada quando os jogadores podem, antes do processo de negociação, se comprometerem a duas estratégias pré-planejadas, uma defensiva que ele utilizará se ele foi o último a rejeitar uma oferta de acordo, e outra ofensiva se o outro jogador foi o último a rejeitar uma oferta de acordo.

CAPÍTULO 4

Falta de Consciência em Barganha de 2 Jogadores

4.1 Introdução

Em várias situações práticas do mundo real, jogadores se vêem envolvidos em processo de barganha onde têm de dividir algo entre si, podendo chegar a um acordo ou não. Em algumas dessas situações, jogadores podem desconhecer alguma informação relevante para o processo de negociação que outros jogadores (ou eles mesmos) podem utilizar durante a barganha. É o que pode ser chamado de *falta de consciência*.

Alguns modelos em teoria dos jogos representam jogos nos quais é permitido que os jogadores desconheçam estratégias disponíveis a eles ou a outros jogadores. Neste capítulo, apresentaremos um modelo para representar problemas de barganha de dois jogadores com falta de consciência baseado no modelo desenvolvido por (Halpern e Rêgo, 2006), que modela jogos em forma extensa com falta de consciência, no modelo desenvolvido por (Barreto e Rêgo, 2008) que representa jogos em forma normal com falta de consciência e no modelo axiomático de Nash, que representa um problema de barganha padrão (sem falta de consciência). Este modelo tem seus componentes apresentados na Seção 4.2.

Na Seção 4.3 apresentamos axiomas que uma solução generalizada de um problema de barganha de dois jogadores com falta de consciência deve satisfazer para ser considerada solução e enunciamos um importante teorema relacionando os axiomas e a solução generalizada. Esses axiomas são baseados nos axiomas de Nash para a solução de um problema de barganha padrão e expressam características esperadas de jogadores racionais que buscam maximizar suas utilidades esperadas cooperando entre si.

Um problema de barganha padrão pode ser derivado de um jogo em forma normal, como definido na Seção 3.2. Na Seção 4.4 mostramos uma forma de obter um problema de barganha com consciência a partir de um jogo normal com consciência.

No modelo descrito neste capítulo, considera-se que não há comunicação dos jogadores entre si e nem do árbitro com os jogadores no sentido de ser revelado a um ou a ambos jogadores informações das quais eles não são conscientes. Porém, no Capítulo 5 apresentamos um modelo baseado no que é apresentado no capítulo atual e neste aspecto relevante para teoria de barganha: a comunicação.

4.2 Representando Problemas de Barganha para dois jogadores com consciência

Dado um problema de barganha para dois jogadores padrão (isto é, sem falta de consciência) (F, υ), estamos interessados em modelar situações onde os jogadores têm uma percepção limitada acerca do conjunto de utilidades disponíveis, isto é, cada jogador tem consciência de um conjunto F, que pode não ser igual ao conjunto do problema original (F, υ). Além disso, os jogadores também têm visão limitada sobre qual conjunto o outro jogador acredita ser o verdadeiro e sobre o valor de discórdia disponível a ele nesse conjunto. Chamaremos esta situação de um *Problemas de Barganha para dois jogadores com consciência.*

Para representarmos a percepção de cada um dos jogadores acerca do problema (F, υ), definimos um componente que chamaremos de *conjunto de utilidades subjetivo*. Um *conjunto de utilidades subjetivo* é um subconjunto convexo e compacto de F e representa as utilidades das quais algum jogador é consciente ou as que algum jogador acredita ser o outro consciente. A definição dessa componente ajuda a definir o Problema de Barganha quando consideramos que os jogadores envolvidos podem ter falta de consciência.

4.2.1 Problema de Barganha para dois jogadores com Consciência

Definiremos como Problema de Barganha de dois jogadores com Consciência baseado no problema de barganha para dois jogadores (F, υ), como sendo $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$, onde:

- $\mathcal{C}$ é um conjunto contável de conjuntos subjetivos de utilidades baseados em F;
- $F^m \in \mathcal{C}$ é o conjunto de utilidades objetivo que representa a visão real do problema. Isto é, $F^m = F$.
- $\mathcal{F}^p$ é uma função que leva um conjunto de utilidades subjetivo $F^+ \in \mathcal{C}$ e um jogador $i \in \{1, 2\}$ para um outro conjunto de utilidades possíveis pertencente a $\mathcal{C}$. Isto é, para todo $F^+ \in \mathcal{C}$, tem-se $\mathcal{F}^p(F^+, i) \in \mathcal{C}$ e intuitivamente $\mathcal{F}^p(F^+, i)$ indica o conjunto de utilidades subjetivo no qual o jogador i acredita na visão do jogador que acredita em F^+.
- υ_1, υ_2 são funções definidas para os dois jogadores, de forma que υ_i associa a um conjunto $F^+ \in \mathcal{C}_i$, um número real, onde $\mathcal{C}_i$ é o conjunto de conjuntos F^+ nos quais o jogador i acredita, isto é, $\mathcal{C}_i = \{F^+ \in \mathcal{C} : \exists F' \in \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{F}^p(F', i) = F^+\}$, para $i \in \{1, 2\}$.

As funções υ_1 e υ_2 associam um número real a cada conjunto F^+ nos quais os jogadores 1 e 2, respectivamente, acreditam. O valor assumido pela função υ_i no conjunto subjetivo F^+ representa o valor de discórdia segundo o ponto de vista do jogador i se ele acredita ser F^+ o verdadeiro conjunto de possíveis utilidades. O valor de discórdia representa para os jogadores o valor a ser recebido caso a negociação ou processo de arbitragem falhem e há várias formas de determiná-lo a partir de um jogo em forma normal com consciência, com métodos similares aos métodos minimax e ameaças racionais, que foram vistos no Capítulo 3, para o caso do problema de barganha padrão. Estamos assumindo nesse modelo que se o jogador acredita em algum momento que o conjunto subjetivo F^+ é o verdadeiro conjunto viável, então ele conhece o valor de discórdia disponível a ele em F^+; se os dois jogadores acreditam em F^+ , então o vetor de discórdia associado a esse conjunto é conhecimento comum aos jogadores.

A função $\mathcal{F}^p$ deve satisfazer algumas restrições que capturam a idéia de falta de consciência.

B1. Para todo $i \in \{1, 2\}$ e $F^+ \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F}^p(F^+, i) \subseteq F^+$.

B2. Para todo $F^+ \in \mathcal{C}_i$, temos que $\mathcal{F}^p(F^+, i) = F^+$.

Intuitivamente, B1 captura a idéia de que se o jogador j acredita em F^+ como conjunto verdadeiro e acredita que o jogador i é consciente de um conjunto $F^{+'}$, isto é, se $\mathcal{F}^p(F^+, i) = F^{+'}$, então $F^{+'} \subseteq F^+$. Se $F^{+'}$ não estiver contido em F^+, então existem pares de utilidades em $F^{+'}$ que não fazem parte da consciência de j, o que contraria a nossa intuição a respeito de falta de consciência, já que j não pode acreditar que i é consciente de utilidades das quais ele (j) não consegue descrever. A restrição B2 captura a idéia de que jogadores são capazes de realizar introspecção a respeito do jogo e isso é de conhecimento comum entre os jogadores. Intuitivamente falando, o jogador i é capaz de saber o que ele mesmo (i) é consciente.

4.2.2 Problema Local de Barganha

Já vimos que em um problema de barganha com consciência, jogadores podem não ser conscientes de todas as utilidades disponíveis aos jogadores. Isto é, dado um problema $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ baseado em um problema de barganha (F, υ), jogadores podem ser conscientes(ou acreditar que o outro é consciente)de conjuntos de utilidade que não necessariamente coincidem com o conjunto F. É intuitivo observar que cada conjunto subjetivo pertencente a $\mathcal{C}$, exceto F^m, junto com o valor de discórdia indicado pela função υ representam um problema de barganha diferente do problema (F, υ), isto é, jogadores podem ter percepções diferentes do problema (F, υ). Para representarmos essas diferentes percepções, definiremos cada um desses pares de conjunto subjetivo e valores de discórdia associados como problemas locais de barganha. Dividiremos a definição em dois casos: os problemas locais nos quais os dois jogadores acreditam e os em que apenas um jogador acredita. Note que apesar de poderem existir conjuntos em $\mathcal{F}$ os quais nenhum jogador acredita (nem acredita que algum outro acredita, e assim por diante), estes conjuntos não influenciam nas decisões tomadas pelos jogadores e portanto não farão parte da definição de um problema local.

Definição 4.2.1. *i) Se $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, definiremos como Problema local o par $(F^+, \upsilon(F^+))$, onde $\upsilon(F^+) = (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+))$ é um vetor do $\mathbb{R}^2$ que representa os valores de discórdia que os jogadores acreditam que receberão em caso de falha da negociação.*

ii) *Se* $F^+ \in \mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j$, *com* $i \neq j$, *definiremos como Problema local para o jogador* i, *com* $i \in \{1, 2\}$, *o par* $(F^+, \upsilon_i(F^+))$.

Dado que definimos problemas locais como representações da percepção do jogador a respeito do problema, é interessante do ponto de vista do árbitro que tem consciência dessas percepções, analisar o que o jogador deve fazer como melhor resposta para o problema em cada um destes problemas locais.

4.2.3 Solução Local

A teoria de problemas com barganha considera como um aspecto importante do processo de construção da solução o papel da arbitragem e da cooperação entre os jogadores. O árbitro é um ente que seleciona dentre os pares de utilidade possíveis um equilíbrio que os jogadores devem implementar. Tal figura deve ser alguém capaz de se comunicar com os dois jogadores e informá-los sobre qualquer equilíbrio e os jogadores por sua vez, têm como conhecimento comum, que o árbitro exerce influência ou autoridade sobre os dois jogadores, de modo que estes atendam a sua indicação de equilíbrio a ser implementado. Este equilíbrio deve ser selecionado pelo árbitro de forma imparcial, isto é, tratando os jogadores de forma simétrica e em problemas equivalentes selecionando o mesmo equilíbrio. O objetivo ao construir uma solução de barganha é determinar um par que poderia ser indicado por uma arbitragem imparcial.

Em um problema de barganha com consciência, a presença do árbitro será fundamental. Assumiremos que o árbitro conhece o verdadeiro problema de barganha, (F, υ), chamado nesta dissertação de problema objetivo de barganha e é consciente da visão dos jogadores sobre o problema, isto é, o árbitro conhece os problemas dos quais os jogadores são conscientes e os que eles acreditam serem o outro jogador consciente. Neste capítulo consideramos o caso em que o árbitro comunica aos jogadores apenas o equilíbrio a ser implementado. No capítulo seguinte, ampliamos as possibilidades de comunicação entre árbitro e jogadores.

Vimos que em um problema de barganha com consciência, cada jogador tem percepção limitada sobre o conjuntos de utilidades disponíveis e sobre a visão do outro jogador, isto é, o jogador i pode não ser consciente de algumas utilidades disponíveis a ele ou ao outro jogador.

Daí, vimos na seção anterior a necessidade de definirmos problemas locais de barganha. O *problema local* representa o ponto de vista de um jogador sobre qual seria o conjunto de utilidades realmente disponível aos jogadores e qual valor de discórdia ele receberia em caso de um acordo não ser atingido. Ao tratar da solução, precisaremos definir qual seria a solução para cada jogador em cada uma desses *problemas locais de barganha.* Isto é, precisamos definir as soluções locais selecionadas por um árbitro imparcial.

Considerando que o resultado obtido pelo árbitro deve basear-se em princípios básicos da teoria de barganha, como bem-estar para ambos jogadores, cooperação e equilíbrio, será necessário determinar a solução de cada problema local, para que o árbitro defina para os dois jogadores qual equilíbrio devem implementar nos jogos dos quais são conscientes. Chamaremos então de *solução local* a solução de um *problema local de barganha.* Assim como fizemos com a definição de problema local, dividiremos a definição de solução local em casos: o caso em que os dois jogadores acreditam em F^+ e o caso em que apenas um dos jogadores acredita em F^+. Assim como mencionamos anteriormente, não é relevante para a definição de solução o caso em que nenhum jogador acredita em F^+.

Definição 4.2.2. *i) Se $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ e $\upsilon(F^+) = (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+))$, a solução local será um vetor $\varphi(F^+, \upsilon(F^+)) = (\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) \in I\!R^2$, que representa o par de utilidades obtidos pelos jogadores quando ambos acreditam que o conjunto de possíveis utilidades é F^+ e que o vetor de discórdia é dado por $\upsilon(F^+)$.*

ii) Se $F^+ \in \mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j$, a solução local é um número real $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ que o jogador i acredita que receberá como solução do problema local $(F^+, \upsilon_i(F^+))$.

Como o problema local representa a visão subjetiva de um jogador, a solução local é um valor que seria recomendado pelo árbitro ao jogador, caso o problema local fosse o verdadeiro. Como o árbitro é consciente das percepções dos jogadores a respeito do problema, a solução do problema precisa considerar todas as soluções locais. Definiremos então um conceito de solução que chamaremos de *solução generalizada.*

Definição 4.2.3. *Dado um Problema de Barganha para dois Jogadores com Consciência, $\mathcal{P} =$*

$(\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$, *a solução generalizada será o vetor cujas componentes são as soluções locais dos problemas locais baseados nos conjuntos* $F^+ \in C_i \cup C_j$ *e nos valores de discórdia associados a eles.*

O objetivo de uma teoria de negociação ou arbitragem em problemas de barganha para dois jogadores (padrão) é determinar um vetor do $I\!R^2$ que seria selecionado por um árbitro imparcial. Já vimos que um árbitro em problemas de barganha deve escolher esse resultado baseando-se em princípios como simetria e bem-estar para ambos jogadores. Em um problema de barganha padrão, estes e outros princípios como eficiência e racionalidade estão bem representados através do grupo de axiomas conhecidos como Axiomas de Nash, já descritos nessa dissertação. Na próxima seção, analisaremos quais axiomas caracterizam a solução generalizada de um problema de barganha para dois jogadores com consciência.

4.3 Axiomas da Solução Generalizada

A seguir descreve-se alguns axiomas que julgamos razoáveis para resolução de um problema de barganha de 2 jogadores com consciência.

Axioma Generalizado da Viabilidade

Dado um problema de barganha de dois jogadores com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^P, \upsilon_1, \upsilon_2)$, $\forall F^+ \in \mathcal{C}_i$,

$$\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \in \left\{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+\right\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\},$$

onde $\mathcal{F}^P(F^+, j) = F^{+'}$.[1]

Axioma Generalizado da Eficiência Forte

Dado um problema de barganha de dois jogadores com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}, \upsilon_1, \upsilon_2)$,

[1]Nesta dissertação, por simplicidade, abusaremos um pouco da notação e utilizaremos $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'})))$ no caso em que $i = 2$ e $j = 1$ para representar o vetor $(\varphi_1(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'})), x_2)$. No que se segue manteremos sempre quantidades relacionadas ao jogador 1 como sendo a primeira componente do vetor, mesmo que a notação utilizada esteja invertida.

(a) para todo $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $(x, y) \in F^+$, se $x \geq \varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+))$ e $y \geq \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))$, então $x = \varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+))$ e $y = \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))$.

(b) para todo $F^+ \in (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j)$, $\mathcal{F}(F^+, j) = F^{+'}$, $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$ e $x_i \geq \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$, tem-se que $x_i = \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$.

Axioma da Racionalidade Individual

$\forall F^+ \in \mathcal{C}_i$ e $i \in \{1, 2\}$, tem-se que

$$\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \geq \upsilon_i(F^+)$$

Para os axiomas generalizados a seguir, considere o conjunto F^+, tal que $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, isto é, os dois jogadores acreditam em F^+ em alguma situação do jogo.

Axioma Generalizado ITAP

Para $i \in \{1, 2\}$, sejam λ_i um número real positivo e γ_i um número real qualquer. Considere o conjunto G, onde $G = \{(\lambda_1 x_1 + \gamma_1, \lambda_2 x_2 + \gamma_2) : (x_1, x_2) \in F^+\}$ e dois problemas com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}, \upsilon_1, \upsilon_2)$ e $\mathcal{P}' = (\mathcal{C}', (F^m)', \mathcal{F}', \upsilon_1', \upsilon_2')$ tais que :

(i) $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} - F^+) \cup \{G\}$;

(ii) se $\mathcal{F}(F, i) \neq F^+$, então $\mathcal{F}'(F, i) = \mathcal{F}(F, i)$;

(iii) se $\mathcal{F}(F, i) = F^+$, então $\mathcal{F}'(F, i) = G$;

(iv) $\mathcal{F}'(G, i) = G$;

(v) se $F \neq F^+$ e $F \in \mathcal{C}_i$, então $\upsilon_i(F) = \upsilon_i'(F)$;

(vi) $\upsilon_i'(G) = \lambda_i \upsilon_i(F^+) + \gamma_i$.

Então,

$$\varphi_i'(G, \upsilon_i'(G)) = \lambda_i \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) + \gamma_i.$$

Axioma Generalizado IAI

Considere um conjunto G tal que $G \subseteq F^+$ e dois problemas de barganha de dois jogadores com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}, \upsilon_1, \upsilon_2)$, e $\mathcal{P}' = (\mathcal{C}', (F^m)', \mathcal{F}', \upsilon_1', \upsilon_2')$, tais que:

(i) $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} - F^+) \cup \{G\}$;

(ii) se $\mathcal{F}(F, i) \neq F^+$, então $\mathcal{F}'(F, i) = \mathcal{F}(F, i)$;

(iii) se $\mathcal{F}(F, i) = F^+$, então $\mathcal{F}'(F, i) = G$;

(iv) $\mathcal{F}'(G, i) = G$;

(v) se $F \neq F^+$ e $F \in \mathcal{C}_i$, então $\upsilon_i(F) = \upsilon_i'(F)$;

(vi) $\upsilon_i'(G) = \upsilon_i(F^+)$.

Então, se $(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) \in G$, tem-se que para $i \in \{1, 2\}$,

$$\varphi_i'(G, \upsilon_i'(G)) = \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)).$$

Axioma Generalizado da Simetria

Seja um problema de barganha de dois jogadores com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}, \upsilon_1, \upsilon_2)$, tal que:

(i) $(x_1, x_2) \in F^+$ se, e somente se, $(x_2, x_1) \in F^+$;

(ii) $\upsilon_1(F^+) = \upsilon_2(F^+)$.

Então,

$$\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)) = \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+)).$$

Em qualquer problema de barganha é razoável assumir que a solução seja um valor viável, isto é, a solução deve pertencer ao conjunto de utilidades possíveis aos dois jogadores. Em um problema de barganha com consciência para dois jogadores, definimos que a solução local $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ para o jogador i que acredita em F^+ em algum momento do jogo deve considerar a solução que o seu oponente, o jogador j, receberá no problema $(F^{+'}, \upsilon(F^{+'})$ que i acredita que j considera como verdadeiro nessa situação. Isto é, seja $F^{+'}$ um conjunto tal que $F^{+'} = \mathcal{F}(F^+, j)$, então em F^+, i acredita que j considera $(F^{+'}, \upsilon(F^{+'})$ como sendo o verdadeiro problema de barganha. Assim, definimos que, em F^+, a solução local para i deve ser escolhida do conjunto de valores disponíveis a i neste conjunto (F^+) que formam par com a solução local para j do problema $(F^{+'}, \upsilon(F^{+'}))$ unido ao valor de discórdia disponível a i em (F^+). A união com o valor de discórdia é justificada por sua utilidade para a prova do teorema apresentado nessa seção, o que pode ser compreendido melhor no apêndice.

O Axioma Generalizado da Eficiência Forte garante que dado um certo problema local de barganha $(F^+, \upsilon(F^+))$ não há nenhum outro par que os jogadores possam receber como resultado cujos valores sejam melhores para ambos do que os que receberiam na solução local. Isto é, em problemas locais $(F^+, \upsilon(F^+))$, onde $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, isto é, onde os dois jogadores acreditam em F^+, temos que não deve haver par (x, y) em F^+ tal que x seja maior ou igual que a solução para o jogador i e y maior ou igual que a solução para o jogador j. Nos problemas locais $(F^+, \upsilon_i(F^+))$ nos quais apenas i acredita em F^+, como a solução local para i deve considerar a solução local para o jogador j do problema $(F^{+'}, \upsilon(F^{+'}))$, onde $F^{+'} = \mathcal{F}(F^+, j)$, o Axioma Generalizado da Eficiência Forte garante que dentre os valores x_i tais que $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$, não pode haver um que seja maior que a solução local proposta a i, pois se houvesse seria um incentivo a i a não entrar em acordo, pois ele conseguiria um valor maior como solução, mesmo respeitando a solução local para j, que ele acredita que j iria receber no acordo.

O Axioma da Racionalidade Individual diz que na solução local garante que na solução local, o jogador não pode estar em situação pior do que estaria se recebesse como resultado o valor de discórdia. Isto é, a solução local para o jogador i de um problema local $(F^+, \upsilon_i(F^+))$ no qual i acredita deve ser pelo menos tão boa quanto o valor de discórdia $\upsilon_i(F^+)$ que i acredita que receberia nesse jogo.

Os axiomas Generalizado ITAP, Generalizado IAI, e Generalizado da Simetria referem-se apenas a problemas locais nos quais os dois jogadores acreditam. Intuitivamente aplicar uma mesma transformação positiva nos componentes de um problema de barganha não deve alterar sua solução, já que funções utilidades não alteram preferências dos jogadores se sofrerem transformações afim positivas (Kreps, 1988). Então, se aplicarmos uma transformação afim positiva em um conjunto $F^+ \in C_1 \cap C_2$, teremos um novo problema de barganha com consciência $\mathcal{P}'$, onde "substituímos" o conjunto F^+ pelo conjunto G, que é a transformação afim positiva de F^+, isto é, pela condição ii), o conjunto de jogos subjetivos $\mathcal{C}'$ é o conjunto $\mathcal{C}$ menos o conjunto F^+ unido ao conjunto cujo elemento é o conjunto G e as condições $iii - iv$ do axioma $ITAP$ impõem que o nível de consciência dos jogadores deve permanecer quase inalterado, pois continuam conscientes das mesmas coisas, exceto que onde um jogador era consciente de F^+ passa a ser consciente de G. Além disso, as condições vi) e vii) garantem que os valores de discórdia são mantidos, exceto no caso do conjunto G, onde o valor de discórdia para o jogador i é a transformação afim positiva (a mesma aplicada a F^+) do valor de discórdia disponível a i em F^+. Sendo todas essas condições válidas, o axioma Generalizado ITAP diz que a solução local para o jogador i do problema local $(G, \upsilon_i'(G))$ no novo problema de barganha com consciência $\mathcal{P}'$, é uma transformação afim positiva da solução local para i do problema local $(F^+, \upsilon(F^+))$ no problema de barganha com consciência $\mathcal{P}$.

O Axioma Generalizado IAI diz que eliminar utilidades possíveis que não sejam a solução não alteram a solução. Então, se considerarmos um conjunto G contido em F^+ tal que $F^+ \in C_1 \cap C_2$ e definirmos um novo problema de barganha com consciência $\mathcal{P}'$, onde "substituímos" o conjunto F^+ pelo conjunto G, isto é, pela condição ii), o conjunto de jogos subjetivos $\mathcal{C}'$ é o conjunto $\mathcal{C}$ menos o conjunto F^+ unido ao conjunto cujo elemento é o conjunto G e as condições $iii - iv$ do axioma IAI impõem que o nível de consciência dos jogadores deve permanecer quase inalterado, pois continuam conscientes das mesmas coisas, exceto que onde um jogador era consciente de F^+ passa a ser consciente de G. Além disso, as condições vi) e vii) garantem que os valores de discórdia são mantidos, exceto no caso do conjunto G, onde o valor de discórdia para o jogador i é o valor de discórdia disponível a i em F^+. Sendo todas essas condições válidas e pertencendo $(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+)))$ a G, o axioma Generalizado IAI diz que a solução local para o jogador i do problema local $(G, \upsilon_i'(G))$ é a mesma solução local para i em $(F^+, \upsilon(F^+))$. Isto é, se eliminarmos de F^+ elementos que não são o vetor de soluções locais, obtendo um conjunto

G, a solução local do problema local que envolve G em um problema de consciência com as características descritas pelas condições do axioma Generalizado IAI é a mesma solução local do problema $(F^+, \upsilon(F^+))$.

Um dos aspectos fundamentais num processo de negociação ou arbitragem em problemas de barganha é a imparcialidade. É fundamental assumir que o árbitro trata os jogadores de forma simétrica. Intuitivamente, precisamos garantir que se invertermos a posição dos jogadores, a solução também se inverte, isto é se invertermos a consciência e as crenças dos jogadores i e j, o resultado para o jogador i será o mesmo que o jogador j receberia. Formalmente, se em um problema $(F^+, \upsilon(F^+))$, onde os dois jogadores acreditam em $(F^+$, F^+ é simétrico e os valores de discórdia disponíveis aos jogadores são iguais, então a solução local do problema $(F^+, \upsilon(F^+))$ para o jogador i deve ser igual a solução local para o jogador j do mesmo problema local.

O resultado mostrado através do teorema a seguir é fundamental em nosso modelo, pois prova que existe uma única solução generalizada que satisfaz os axiomas propostos nessa seção e descreve essa solução. Assim, como elementos importantes do modelo descrito até aqui, o teorema é dividido em dois casos: a parte a) trata das soluções locais de problemas locais $(F^+, \upsilon(F^+))$ nos quais F^+ é um conjunto no qual os dois jogadores acreditam, isto é, $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, definindo como solução local para tais problemas a *solução de barganha de Nash* como definida no capítulo 3. Tal escolha parece intuitivamente aceitável se observarmos o problema $(F^+, \upsilon(F^+))$ como um problema de barganha padrão, por seus jogadores acreditarem em toda a estrutura do jogo. A parte b) descreve a solução local para os problemas locais $(F^+, \upsilon_i(F^+))$ nos quais apenas o jogador i acredita em F^+, isto é, $F^+ \in \mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j$. Nestes problemas, a solução é definida como o máximo da união entre conjunto dos $x_i \in F^+$ tais que $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'})) \in F^+$ e o conjunto cujo elemento é o valor de discórdia para o jogador i, o que também parece razoável, pois a solução local para o jogador i deve estar de alguma forma relacionada a solução local que i acredita que j receberá no problema local do qual ele acredita ser j consciente. Na demonstração, a escolha de fazer a união com o conjunto cujo elemento é o vetor de discórdia é justificada pelo objetivo de que a solução generalizada satisfaça todos os axiomas listados nessa seção, o que fica mais claro na demonstração do teorema que se encontra no apêndice.

Teorema 4.3.1. *Dado um problema de barganha para dois jogadores com consciência* $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$*, uma solução generalizada satisfaz os axiomas generalizados da viabilidade, da eficiência forte, ITAP, IAI, da Simetria e da Racionalidade Individual se, e somente se,*

(*a*) *Para todo* $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$*,*

$$(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) = argmax_{\substack{(x_1,x_2)\in F^+ \\ x_i \geq \upsilon_i(F^+) \\ i\in\{1,2\}}} (x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)),$$

ou seja, as soluções locais para os jogadores 1 e 2 no problema de barganha local $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$ *é a solução de barganha de Nash para o problema de barganha de dois jogadores* $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$*; e*

(*b*) *Para todo* $F^+ \in \mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j$*, onde* $i, j \in \{1, 2\}$*, então*

$$\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) = max\{\{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\}\},$$

onde $F^{+'} = \mathcal{F}^p(F^+, j)$ *.*

4.4 Representando um Problema de Barganha a Partir de um Jogo normal com Consciência

Podemos interpretar um problema de barganha com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ baseado no problema de barganha padrão (F, υ) derivando sua estrutura de um jogo normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$ baseado por sua vez em um jogo em forma normal $\psi = (\{1, 2\}, \{C_1, C_2\}, \{u_1, u_2\})$. Nosso principal objetivo nesta seção é determinar como obtermos a partir de Ψ^a o conjunto $\mathcal{C}$, F^m, as funções υ_1 e υ_2 e a função $\mathcal{F}^p$, isto é, queremos obter os conjuntos de utilidades possíveis subjetivos, o conjuntos de utilidades objetivo e os valores de discórdia associados a eles e também determinar $\mathcal{F}^p$. Note que no modelo que definimos, a função $\mathcal{F}^p$ é determinística. Para efeito de simplificação, consideraremos apenas o caso em que no jogo normal com consciência $\Psi^a = (G, \psi^m, \mathcal{F})$, a função $\mathcal{F}$ também é determinística. A análise do caso não-determinístico segue as mesmas idéias deste caso, porém as notações ficam mais complicadas. Além disso, nesta análise, vamos restringir Ψ^a para ser tal que $\mathcal{G}$ seja um conjunto finito e que para todo jogo $\psi^+ \in \mathcal{G}$ exista uma sequência de jogos aumentados $\psi_1^+, \psi_2^+, \ldots, \psi_k^+$, onde $k \geq 1$, tal que

1. $\psi^+ = \psi_1^+$;

2. para todo l tal que $1 \leq l \leq k-1$, $\mathcal{F}(\psi_l^+, i) = \psi_{l+1}^+$ para algum $i \in \{1, 2\}$; e

3. $\mathcal{F}(\psi_k^+, i) = \psi_k^+$ para todo $i \in \{1, 2\}$.

Para cada jogo aumentado pertencente a $\psi^+ \in \mathcal{G}$, existe um correspondente conjunto de utilidades F^+ em $\mathcal{C}$. Vamos agora definir como cada conjunto de utilidades F^+ pode ser obtido a partir de ψ^+. Com as restrições impostas em Ψ^a, podemos definir F^+ de maneira indutiva. Para cada jogo aumentado ψ^+ pertencente a $(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$, onde $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são os conjuntos de jogos aumentados nos quais os jogadores 1 e 2 respectivamente acreditam, definiremos F^+ da seguinte forma:

$$F^+ = \{(u_1(\mu), u_2(\mu)) : u_i(\mu) = \sum_{c \in C^+} \mu(c) u_i(c)\},$$

onde C^+ é o conjunto de perfis de estratégias em ψ^+ e μ é uma distribuição de probabilidades sobre C^+.

Para os jogos aumentados $\psi^+ \in \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j$, $i, j \in \{1, 2\}$ e com $\mathcal{F}(\psi^+, j) = \psi^{+'}$, suponha que o conjunto $F^{+'}$ já foi definido a partir de $\psi^{+'}$. Definiremos agora um método para obter o conjunto de utilidades disponíveis correspondente F^+ baseado na análise das utilidades disponíveis ao jogador j no conjunto $F^{+'}$ e que podem portanto serem indicadas a j como solução local para o problema local $(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))$. Construiremos então o conjunto A_α definido da seguinte forma:

$$A_\alpha = \{(p_1, p_2, \ldots, p_k) : p_1.u_j(c_1) + p_2.u_j(c_2) + \ldots + p_k.u_j(c_k) = \alpha\},$$

onde $p_1+p_2+\ldots+p_k = 1$, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são os perfis de estratégia do jogo $\psi^{+'}$ e $\alpha \in F_j^{+'}$, onde $F_j^{+'}$ é a projeção do conjunto $F^{+'}$ no eixo correspondente ao jogador j, isto é: $F_1^{+'} = \{x : (x, y) \in F^{+'}\}$ e $F_2^{+'} = \{y : (x, y) \in F^{+'}\}$. Ou seja, α é um valor arbitrário que pode ser alcançado pelo jogador j no conjunto de utilidades disponível $F^{+'}$ e $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ é uma estratégia mista correlacionada do jogo aumentado $\psi^{+'}$ que dá uma utilidade esperada igual a α para o jogador j. Logo, A_α

representa todas as estratégias mistas correlacionadaS em $\psi^{+'}$ que resultam em uma utilidade esperada igual a α para j. Intuitivamente, para cada um dos valores α que o jogador i acredita que o jogador j é consciente que pode obter, A_α representam as possíveis estratégias que o jogador i acredita que o jogador j acredita que podem ser implementadas e dão a j utilidade esperada α.

Dado uma estratégia mista correlacionada τ em um jogo aumentado $\psi^{+'}$, sejam τ_1 e τ_2 as estratégias mistas dos jogadores 1 e 2 que são obtidas através das distribuições marginais de τ. Para cada $\tau \in A_\alpha$, sejam ω_τ e θ_τ a menor e maior utilidade, respectivamente, que o jogador i pode receber em ψ^+, dado que o jogador j jogue a estratégia τ_j em $\psi^{+'}$ onde é permitido que i correlacione sua estratégia com τ_j. Intuitivamente, o árbitro pode forçar tal correlação através de um gerador de números aleatórios externo ao problema. Formalmente,

$$\omega_\tau = \sum_{c \in C_j^{+'}} \tau_j(c) \min_{a \in \mathcal{C}_i^+} u_i(a, c)$$

e

$$\theta_\tau = \sum_{c \in C_j^{+'}} \tau_j(c) \max_{a \in \mathcal{C}_i^+} u_i(a, c).$$

Definiremos então o conjunto F^+ correspondente ao jogo aumentado ψ^+ da seguinte forma:

$$F^+ = \bigcup_{\alpha \in F_j^{+'}} \bigcup_{\tau \in A_\alpha} [\omega_\tau, \theta_\tau] \times \{\alpha\}.$$

Ou seja, para cada valor α que j pode receber no conjunto $F^{+'}$ correspondente ao jogo aumentado $\psi^{+'}$ definimos intervalos cujos extremos são o pior e o melhor resultado que i pode receber, no jogo aumentado ψ^+. Para cada estratégia mista τ, temos um intervalo correspondente. A união desses intervalos nos fornece um intervalo cujos extremos são a menor das utilidades ω_τ e a maior dentre as utilidades θ_τ. Fazendo o produto cartesiano deste intervalo com o valor α correspondente temos as utilidades disponíveis ao jogador i no jogo ψ^+ dado que o jogador j recebe como utilidade o valor α. Para cada α teremos um produto cartesiano diferente. A união desses produtos nos dará todas as utilidades possíveis ao jogador i correspondendo a ψ^+. Então diremos que F^+ é o conjunto de utilidades subjetivo correspondendo ao jogo em forma normal ψ^+.

Finalmente, se $\psi^+ \in (\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)^c$, $\mathcal{F}(\psi^+, 1) = \psi'_1$, $\mathcal{F}(\psi^+, 2) = \psi'_2$, e F'_1 e F'_2 são os conjuntos de utilidades (definidos de acordo com um os casos anteriores) que correspondem aos jogos ψ'_1 e ψ'_2, respectivamente, definimos $F^+ = Ch(F'_1 \cup F'_2)$, onde $Ch(A)$ denota o menor conjunto convexo e compacto que contém A.

No Capítulo 3 vimos que existem diversas formas de escolha do vetor de discórdia de um problema de barganha padrão (F, υ) baseado em um jogo normal. Analogamente, definiremos que existem maneiras diferentes de obtermos as funções υ_1 e υ_2 nos problemas locais onde elas estão definida. O importante é que qualquer método proposto deve considerar que os problemas locais não estão isolados e que é preciso levar em conta ao analisar um problema local não apenas o jogo do qual o jogador que acredita nele é consciente, mas também o problema local do qual ele acredita ser o outro jogador consciente. Apresentaremos a seguir o *método minimax generalizado* baseado no método minimax do Capítulo 3.

Assim como na definição de solução local, separaremos a definição em dois casos: os casos em que apenas um jogador acredita em (F^+, υ^+) e o caso em que ambos acreditam:

- Se apenas o jogador i acredita em F^+ :

  $$\upsilon_i(F^+) = min_{\sigma_j \in C_j^{+\prime}} max_{\sigma_i \in C_i^+} u_i(\sigma_i, \sigma_j),$$

  onde $C_j^{+'}$ é o conjunto de estratégias do jogo aumentado $\Psi^{+'}$, que corresponde ao conjunto $F^{+'}$ e $F^{+'}$ é tal que $\mathcal{F}(F^+, j) = F^{+'}$.

- Se ambos os jogadores acreditam em F^+
  O minimax é calculado como um minimax de um problema de barganha de padrão cuja definição pode ser encontrada no Capítulo 3.

Definimos assim como obter o conjunto $\mathcal{C}$. Resta-nos obter $\mathcal{F}^p$. A idéia é obtermos a função $\mathcal{F}^p$ fazendo uma correspondência com a função $\mathcal{F}$. Isto é, se $\mathcal{F}(\Psi^+, i) = \Psi'$, então $\mathcal{F}^p(F^+, i) = F'$.

Contudo, é possível termos exemplos onde há dois jogos normais aumentados, ψ^1 e ψ^2, baseados em um jogo normal Ψ, tais que seus conjuntos correspondentes, F^1 e F^2 sejam iguais. Sendo $\mathcal{F}(\psi^1, i) = \psi^{1'}$ e $\mathcal{F}(\psi^2, i) = \psi^{2'}$, para que a função $\mathcal{F}^p$ esteja bem definida, é necessário requerer que os conjuntos correspondentes a $\psi^{1'}$ e a $\psi^{2'}$ sejam iguais. Porém, nem sempre isso ocorre, então é necessário restringir a classe de jogos normais com consciência que podem ser transformados em problema de barganha com consciência. Esse é o significado da restrição a seguir:

C1. Sejam $\Psi^* = (\mathcal{G}, \Psi^m, \mathcal{F})$ um jogo normal com consciência, $\psi^1, \psi^2 \in \mathcal{G}$, tais que $\mathcal{F}(\psi^1, i) = \psi^{1'}, \mathcal{F}(\psi^2, i) = \psi^{2'}$ e $F^1, F^2, F^{1'}$ e F^2 os conjuntos subjetivos correspondentes a $\psi^1, \psi^2, \psi^{1'}$ e $\psi^{2'}$. Para todos $\psi^1, \psi^2 \in \mathcal{G}$, tais que $F^1 = F^2$, tem-se que $F^{1'} = F^{2'}$.

Os jogos Ψ^* de dois jogadores que obedecem a restrição C1 formam a classe de jogos em forma normal com consciência que podem ser transformados em um problema de barganha com consciência para dois jogadores.

Para provar que $\mathcal{P}$ é realmente um problema de barganha para dois com consciência, resta-nos provar que $\mathcal{P}$ satisfaz as condições B1 e B2, o que é imediato a partir da definição de $\mathcal{F}$ e da restrição R1 de jogos em forma normal aumentados. (Ver Barreto e Rêgo, 2008) Além disso, precisamos demonstrar que os conjuntos $F^+ \in \mathcal{C}$ são convexos. Este resultado é provado no seguinte Lema.

Lema 4.4.1. *Dado um jogo em forma normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$, seja $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ o problema de barganha para dois jogadores com consciência derivado conforme metodologia anterior. Então, para todo $F^+ \in \mathcal{C}$, temos que F^+ é convexo.*

O teorema a seguir dá uma maneira alternativa de obtermos F^+ no caso em que $\psi^+ \in \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j$.

Teorema 4.4.1. *Dado um jogo em forma normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$, seja $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ o problema de barganha para dois jogadores com consciência derivado conforme metodologia anterior. Seja F^+ o conjunto de utilidades correspondente a $\psi^+ \in \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j$ e $\mathcal{F}(\psi^+, j) = \psi^{+'}$ e seja $F^{+'}$ o conjunto de utilidades que corresponde a $\psi^{+'}$. Considere o conjunto $\Omega = Ch(\{\bigcup_{i=1}^{k} [\omega_{c_i}, \theta_{c_i}] \times \{u_j(c_i)\}\})$, onde $c_1, \ldots, c_k$ são os de perfis de estratégia puras do jogo $\psi^{+'}$, então $F^+ = \Omega$.*

O exemplo a seguir descreve como esse teorema pode ser usado para obter mais facilmente o conjunto F^+ que corresponde a $\psi^+ \in \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j$.

Exemplo 4.4.1. *Considere o jogo normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$,como descrito na figura a seguir:*

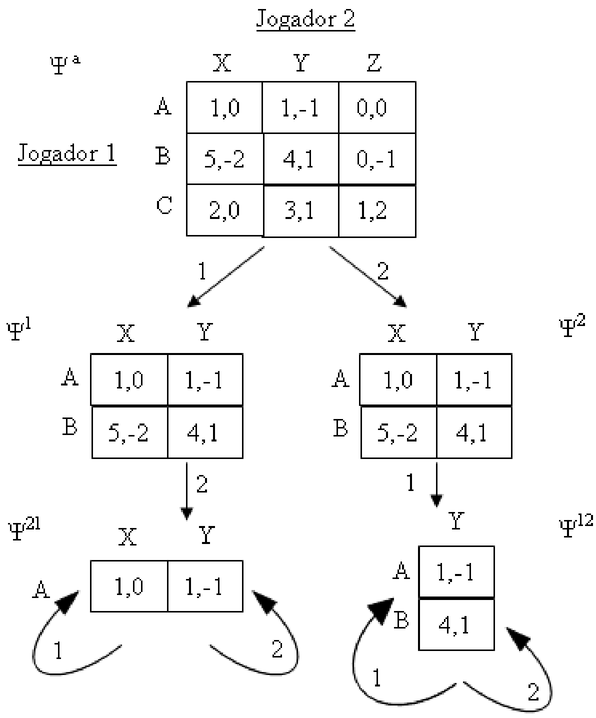


Figura 4.1: Jogo normal com consciência Ψ^a

Em Ψ^a temos que:

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^{21}, \Psi^{12}\}$;
- $P_{\mathcal{G}_{\Psi^m}} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^{21}, \Psi^{12}\}$;
  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^1}} = P_{\mathcal{G}_{\Psi^2}} = \{\Psi^1, \Psi^2, \Psi^{12}, \Psi^{21}\}$;
  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^{12}}} = \{\Psi^{12}\}$; $P_{\mathcal{G}_{\Psi^{21}}} = \{\Psi^{21}\}$.
- $\mathcal{A}_1^m(C^1) = \mathcal{A}_2^m(C^2) = 1; \mathcal{A}_1^1(C^1) = \mathcal{A}_2^1(C^{21}) = 1; \mathcal{A}_2^2(C^2) = \mathcal{A}_1^2(C^{12}) = 1.$
- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^1) = [\Psi^1]; \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^2) = [\Psi^2]; \mathcal{F}(\Psi^1, 1)(\Psi^1) = [\Psi^1]; \mathcal{F}(\Psi^1, 2)(\Psi^{21}) = [\Psi^{21}];$
  $\mathcal{F}(\Psi^2, 2)(\Psi^2) = [\Psi^2]; \mathcal{F}(\Psi^2, 1)(\Psi^{12}) = [\Psi^{12}].$

Então, o problema de barganha com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ *baseado no jogo normal com consciência* $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$ *pode ser descrito como na figura a seguir:*

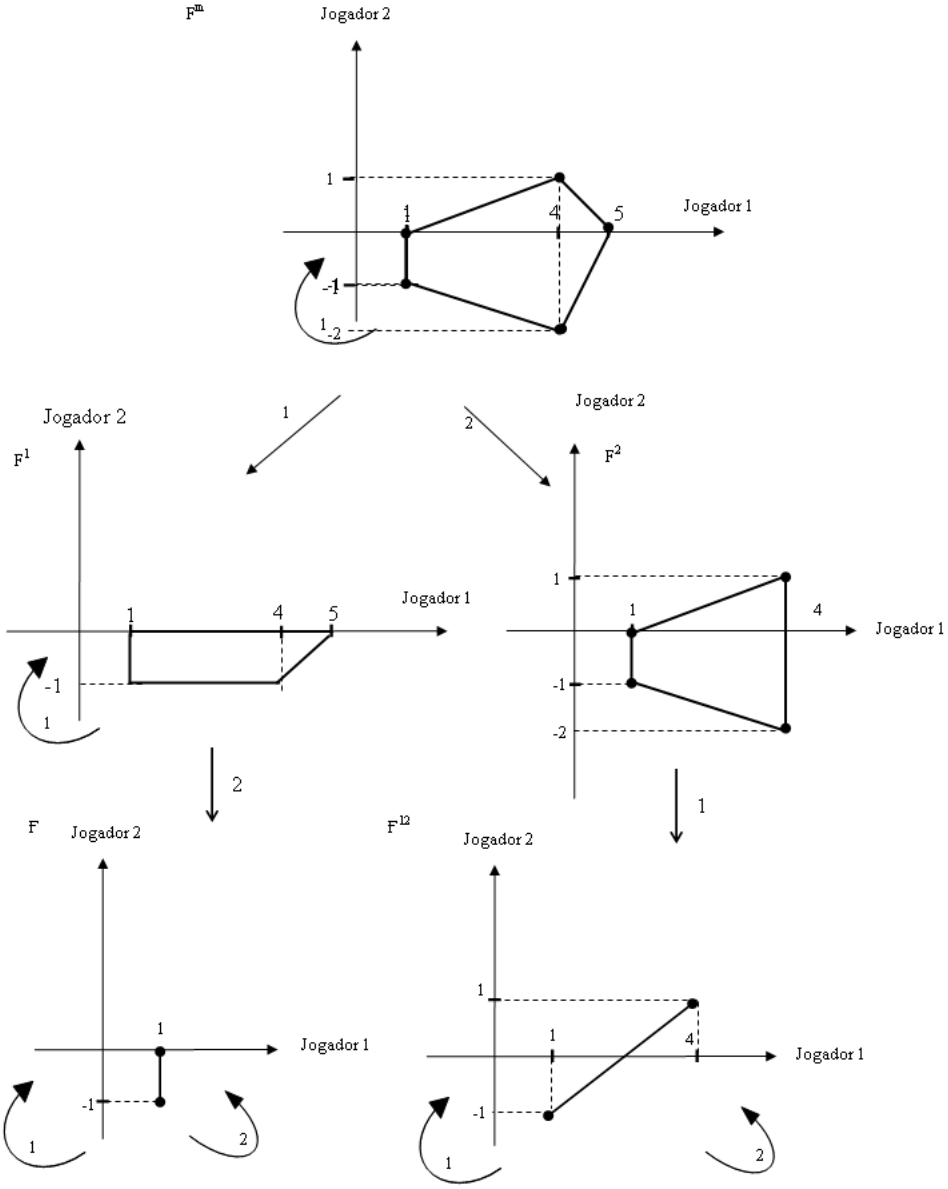


Figura 4.2: Problema de barganha com consciência $\mathcal{P}$ baseado no jogo normal com consciência Ψ^a

Temos então no problema $\mathcal{P}$ que:

- $\mathcal{C} = (F^m, F^1, F^2, F^{12}, F^{21})$
- $\mathcal{F}(F^m, 1) = F^1; \mathcal{F}(F^m, 2) = F^2; \mathcal{F}(F^1, 2) = F^{21} = \mathcal{F}(F^2, 1) = F^{12}$.

As funções υ_1 e υ_2 podem ser obtidas de diversas formas. Neste exemplo, usaremos o método minimax generalizado como definimos e então:

- $\upsilon_1(F^1) = 4; \upsilon_1(F^{21}) = 1; \upsilon_1(F^{12}) = 4; \upsilon_2(F^2) = \upsilon_2(F^{21}) = 0; \upsilon_2(F^{12}) = -1$.
- $\varphi_1(F^{21}, \upsilon_1(F^{21})) = 1, \varphi_2(F^{21}, \upsilon_2(F^{21})) = 0$, $\varphi_1(F^{12}, \upsilon_1(F^{12})) = 4, \varphi_2(F^{12}, \upsilon_2(F^{12})) = 1$, $\varphi_1(F^1, \upsilon_1(F^1)) = 5$, $\varphi_2(F^2, \upsilon_2(F^2)) = 1$.

Desenvolvemos assim neste capítulo um modelo que representa problemas de barganha de dois jogadores com falta de consciência e uma forma de obtê-lo a partir de um jogo normal com consciência. Foi proposta uma solução generalizada para este problema que foi caracterizada axiomaticamente. A solução caracterizada axiomaticamente sugere que jogadores perfeitamente racionais também chegariam a esta mesma solução determinada por um árbitro imparcial, assim como no caso de um problema de barganha padrão.

No modelo apresentado neste capítulo não foi considerado que jogadores podem trocar informação ou que o árbitro possa dar informação aos jogadores das quais eles não são conscientes. Também não é exigida a presença do árbitro. Nossa motivação para o próximo capítulo é apresentar um modelo que permite que durante o processo de barganha haja a possibilidade de os jogadores se tornarem conscientes de informações que não tinham no início da negociação.

CAPÍTULO 5

Barganha, Falta de Consciência e Informação

5.1 Introdução

No modelo descrito no Capítulo 4, apresentamos uma forma de representar problemas de barganha de dois jogadores onde estes podem ter falta de consciência, isto é, o jogador i pode ser inconsciente a respeito de utilidades disponíveis ao outro jogador ou a ele próprio.

É natural supor que em um processo de cooperação, jogadores possam negociar através de algum tipo de comunicação. Considerando então um problema de barganha com consciência, é razoável considerar que jogadores podem ter interesse em contar um subconjunto de utilidades disponíveis a ambos do qual ele acredite ser o outro jogador inconsciente e que ao ser contado possa melhorar a situação de ambos. Neste capítulo permitiremos então que haja a possibilidade do jogador ser informado de algum subconjunto de utilidades do qual ele não é consciente no início do jogo.

Para simplificação do modelo, definiremos que a transmissão de informação aos jogadores é de responsabilidade exclusiva do árbitro, figura imparcial que segue os mesmos princípios descritos na Seção 4.3, isto é, jogadores não conversam entre si para contar informações sobre a estrutura do jogo.

Se permitirmos a troca de informação entre o jogadores, tornaremos o modelo muito mais complexo, pois ao analisar se contar ou não uma determinada informação é uma boa estratégia, o jogador i precisa saber quais são as estratégias ou utilidades das quais os outros jogadores são conscientes e isso pode não ser possível para determinado nível de consciência de i, isto é, para cálculo de equilíbrio em qualquer jogo, é necessário que o jogador compare dentre suas estratégias qual é a melhor resposta para cada uma das possíveis estratégias dos outros jogadores. Em um problema de barganha com consciência, os jogadores são então incapazes de calcular uma solução de equilíbrio, já que não são capazes de descrever se o outro jogador tem algo a contar e o que ele contará.

Na Seção 5.2, apresentamos dois modelos nos quais o árbitro pode transmitir informações aos jogadores: na Subseção 5.2.1, modelamos o que acontece quando o árbitro tem a possibilidade de contar aos jogadores estratégias de um jogo objetivo no qual um jogo normal com consciência é baseado e a partir do qual (do jogo normal com consciência) deriva-se um problema de barganha de dois jogadores com falta de consciência. Já na Subseção 5.2.2, apresentamos um modelo análogo ao da Subseção 5.2.1, porém mais abrangente já que permite representar qualquer problema de barganha de dois jogadores com falta de consciência baseado em um problema de barganha (padrão), (F, υ).

5.2 Representando um Problema de Barganha com Consciência e Acréscimo de Informação para Dois Jogadores

5.2.1 Baseando-se em um Jogo Normal com Consciência

Dado um problema de barganha com consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ baseado em um jogo normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$ obtido a partir de um jogo em forma normal com dois jogadores $\psi = (\{1,2\}, \{C_1, C_2\}, \{u_1, u_2\})$, chamaremos de A_i o conjunto de estratégias disponíveis ao jogador i no jogo do modelador ψ^m que serão reveladas pelo árbitro aos dois jogadores simultaneamente. Isto é, $A_i \subseteq C_i^m$, onde C_i^m é o conjunto de estratégias disponíveis ao jogador i no jogo ψ^m.

Assumimos que o árbitro sempre fala a verdade, isto é, as estratégias que o árbitro afirma estarem disponíveis para o jogador i realmente estão disponíveis para i. Além disso, assumimos que este fato é de conhecimento comum entre os jogadores. Também assumimos ser conhecimento comum entre os jogadores que o árbitro tem autoridade sobre os jogadores, de forma que estes o entendem e atendem suas indicações. Então, após o anúncio do árbitro sobre as estratégias disponíveis, isto é, após o árbitro contar A_i a ambos jogadores, os mesmos incorporam a informação passada pelo árbitro e agora a situação passa a ser descrita por um novo jogo em forma normal com consciência $\Psi^u = (\mathcal{G}^u, \Psi^m, \mathcal{F}^u)$ baseado em Ψ^a, onde, intuitivamente, ao conjunto de estratégias de cada um dos jogadores de cada jogo aumentado $\psi^+ \in \mathcal{G}$ adicionamos as novas estratégias informadas pelo árbitro. Formalmente, $\psi^u \in \mathcal{G}^u$ se, e somente se, existe $\psi^+ \in \mathcal{G}$ tal que

(a) $N^u = N^+$;

(b) $C_i^u = C_i^+ \cup A_i$, para $i \in \{1, 2\}$; e

(c) $\mathcal{A}_i^u(E_1 \times E_2) = \sum_{\substack{\{D_1 : D_1 \cup A_1 = E_1\} \\ \{D_2 : D_2 \cup A_2 = E_2\}}} \mathcal{A}_i^+(D_1 \times D_2)$, para todo $E_i \subseteq C_i^u$ e $i \in \{1, 2\}$.

Dizemos neste caso que a informação do árbitro transformou o jogo ψ^+ no jogo ψ^u e utilizaremos a notação $\psi^u = T(\psi^+, A)$, onde $A = A_1 \times A_2$. Para que essas restrições estejam bem definidas, temos de considerar que o árbitro anuncia A a ambos os jogadores, quando estes estão juntos, tornando-as conhecimento comum. Finalmente, requeremos que $\mathcal{F}^u(T(\psi^+, A), i) = T(\mathcal{F}(\psi^+, i))$. Porém, em alguns casos $\mathcal{F}^u$ não estará bem definida dessa forma. O que a função $\mathcal{F}^u$ tenta capturar e explicitar é como se comporta a crença do jogador i a respeito da consciência do outro no novo jogo Ψ^u. Dado um determinado jogo aumentado $\psi^u \in \mathcal{G}^u$, de acordo com nossas restrições e definições, ele é a transformação de um jogo aumentado $\psi^+ \in \mathcal{G}$. Pela definição de $\mathcal{F}^u$ tem-se que se em $\psi^+ \in \mathcal{G}$, o jogador j que acredita em ψ^+ acredita ser o jogador i consciente do jogo $\Psi^{+'} = \mathcal{F}(\psi^+, i)$, então no jogo $T(\Psi^+, A)$ de Ψ^u, ele passa a acreditar que o jogador i é consciente do jogo aumentado que é a transformação de $\Psi^{+'}$.

Um ponto a ser tratado com atenção ao analisarmos essas funções é a possibilidade de termos dois ou mais jogos subjetivos $\psi^+ \in \mathcal{G}$ que tenham a mesma imagem ψ^u após a transformação causada nos jogos $\psi^+ \in \mathcal{G}$ pelo anúncio do árbitro. Isto é, considere dois jogos, ψ_1 e ψ_2 pertencentes a $\mathcal{G}$, tais que $\psi^u = T(\psi_1, A) = T(\psi_2, A)$. Note que pela definição de $\mathcal{F}^u$ temos $\mathcal{F}^u(T(\psi_1, A), i) = T(\mathcal{F}^P(\psi_1, i), A)$ e $\mathcal{F}^u(T(\psi_2, A), i) = T(\mathcal{F}^P(\psi_2, i), A)$. Como $T(\psi_1, A) = T(\psi_2, A)$, temos que $\mathcal{F}^u(T(\psi_1, A), i) = \mathcal{F}^u(T(\psi_2, A), i)$. Note que para que a função $\mathcal{F}^u$ esteja bem definida, temos que considerar que $T(\mathcal{F}^P(\psi_1, i), A) = T(\mathcal{F}^P(\psi_2, i), A)$.

O exemplo a seguir mostra um caso onde temos um problema na definição da função $\mathcal{F}^u$.

Exemplo 5.2.1. *Considere o seguinte jogo normal com consciência Ψ^a como descrito na figura 5.1:*

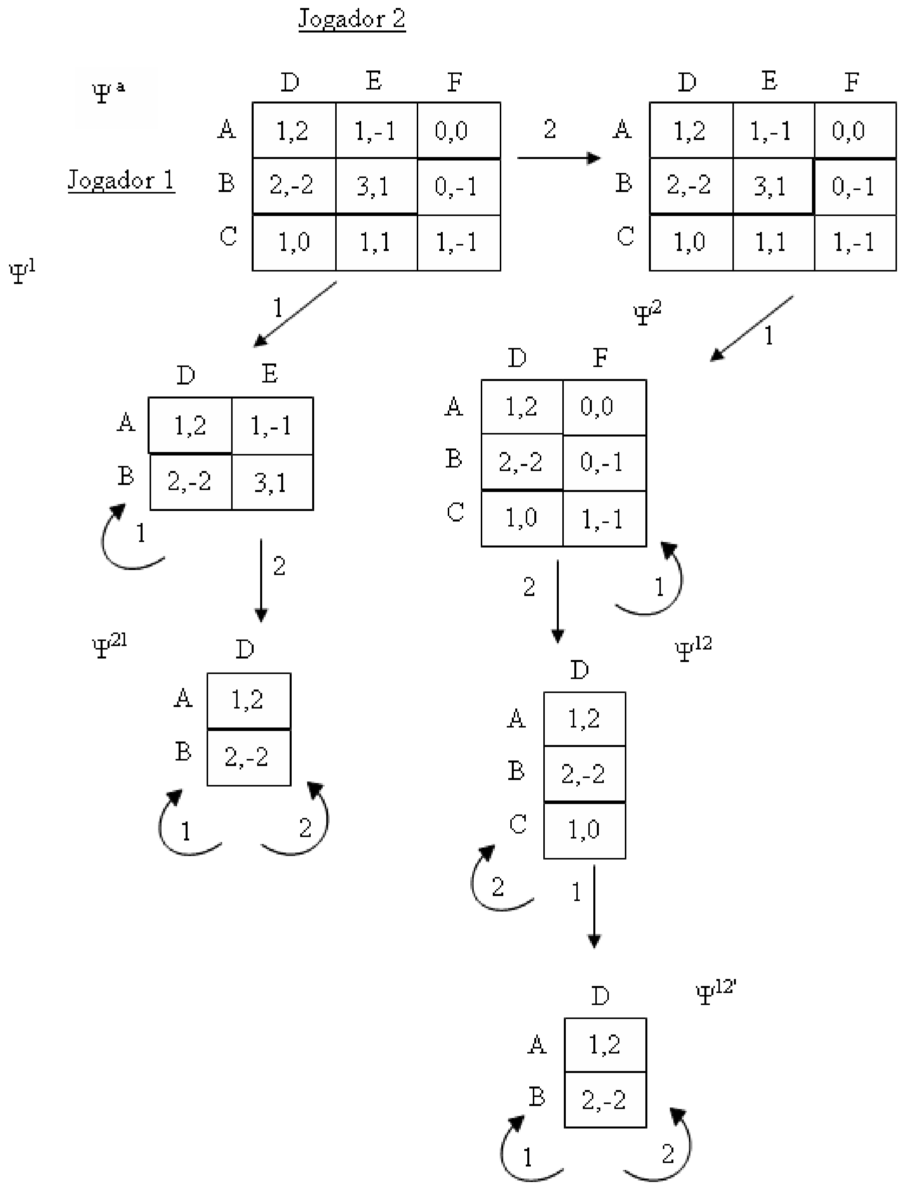


Figura 5.1: Jogo normal com consciência Ψ^a

Suponha que o árbitro conta aos jogadores os conjuntos de estratégias $A_1 = \{C\}$ *e* $A_2 = \emptyset$. *Nessa situação, a transformação no jogo* Ψ^1 *é igual a transformação no jogo* Ψ^2, *o que pode ser deduzido da definição de* $T(\psi^+, A)$. *Na Figura 5.2 , mostramos as transformadas T de cada jogo normal aumentado de* Ψ^a, *onde indicamos com linha tracejada as informações adicionadas pelo anúncio do árbitro. Pela definição de* $\mathcal{F}^u$, *temos que* $\mathcal{F}^u(T(\Psi^1, A), 2) = \mathcal{F}(T(\Psi^2, A), 1)$, *porém,* $\mathcal{F}(T(\Psi^1, A), 2) = T(\Psi^{21}, A)$ *e* $\mathcal{F}(T(\Psi^2, A), 1) = T(\Psi^{12}, A)$ *e* $T(\Psi^{21}, A) \neq T(\Psi^{12}, A)$. *Logo, nesse caso,a função não está bem definida.*

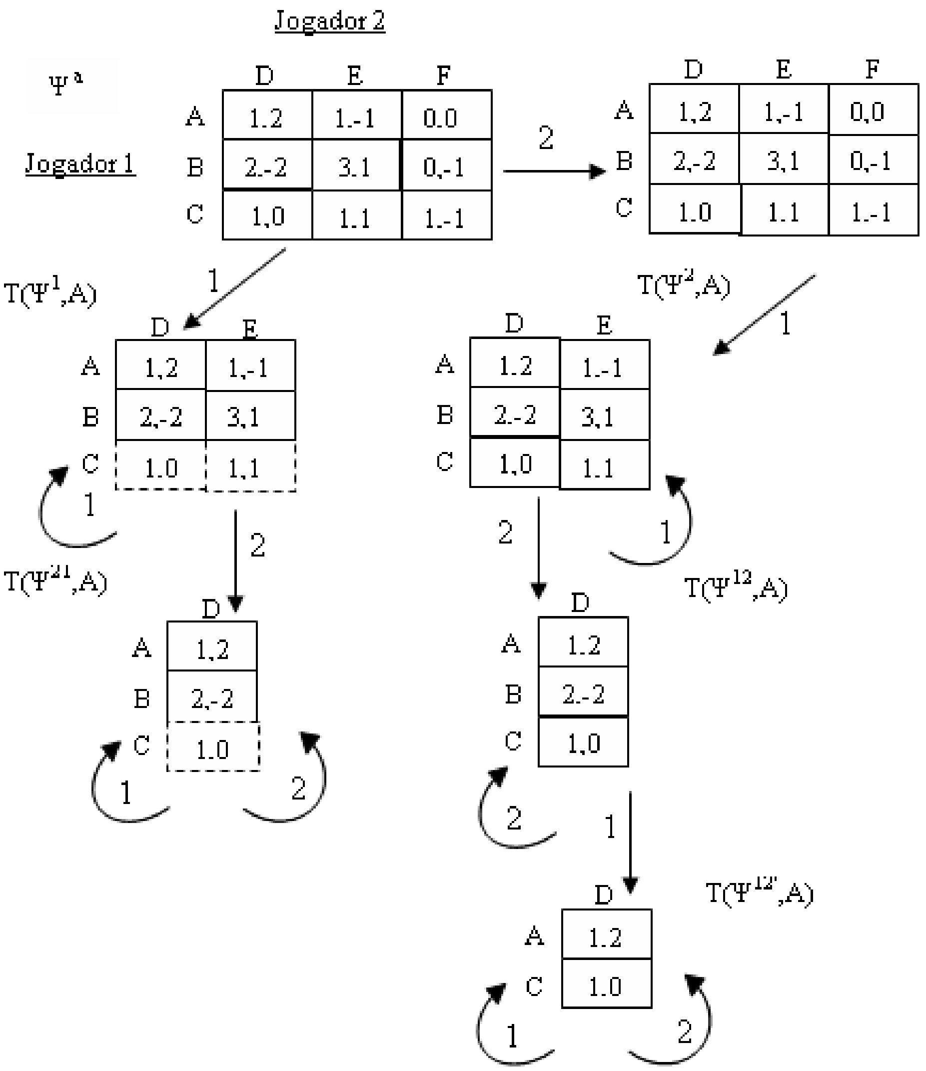


Figura 5.2: Transformações nos jogos aumentados de Ψ^a após o anúncio do árbitro

Uma alternativa para evitarmos esse tipo de situação é acrescentarmos a seguinte restrição ao modelo:

Seja $\mathcal{B} = \{A = A_1 \times A_2 : A_i \subseteq C_i^m$ *e* $\forall \psi_1, \psi_2 \in G$, *se* $T(\psi_1, A) = T(\psi_2, A)$, *então* $T(\mathcal{F}^P(\psi_1, i), A) = T(\mathcal{F}^P(\psi_2, i), A)\}$.

O conjunto $\mathcal{B}$ representa então o conjunto dos conjuntos de estratégias que podem ser contados pelo árbitro aos jogadores de modo que a função $\mathcal{F}^u$ possa estar bem definida.[1]

Sendo $\|C_1^m\|$ e $\|C_2^m\|$ o número de estratégias disponíveis aos jogadores 1 e 2 no jogo do modelador, o árbitro tem $2^{\|C_1^m\|+\|C_2^m\|}$ possibilidades de escolha para o conjunto A, pois há $2^{\|C_1^m\|}$ e $2^{\|C_2^m\|}$ formas de escolher A_1 e A_2, respectivamente. Cada uma dessas possibilidades pode potencialmente resultar em diferentes jogos normais com consciência Ψ^u.

No capítulo anterior, discutimos como modelar um Problema de Barganha com consciência a partir de um jogo normal com consciência. Então, para cada novo jogo normal com consciência $\Psi^u = (G^u, \Psi^m, \mathcal{F}^u)$ que pode ser obtido após o anúncio do conjunto A, temos um Problema de Barganha com Consciência $\mathcal{P}^u = (\mathcal{C}^u, F^{mu}, \mathcal{F}^u, v_1^u, v_2^u)$ correspondente. Também definimos o árbitro como figura capaz de analisar os problemas locais de um Problema de Barganha com Consciência e definir soluções locais que comporão o vetor de soluções, que chamamos solução generalizada. Cada componente da solução generalizada representa portanto uma solução local para algum problema de barganha local $(F^+, v(F^+))$, onde F^+ é um conjunto do qual o jogador é consciente em alguma situação do jogo. Consideraremos aqui que em um Problema de Barganha com Consciência para dois jogadores $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, v_1, v_2)$, os pares que os jogadores acreditam que receberão efetivamente são as soluções locais nos problemas locais correspondentes aos conjuntos $F_1 = \mathcal{F}^p(F^m, 1)$ e $F_2 = \mathcal{F}^p(F^m, 2)$, pois F^m é o conjunto que representa a visão objetiva do problema, logo tais conjuntos representam a crença objetiva dos jogadores. Então, para cada $\mathcal{P}^u$ que pode ser obtido com o anúncio do árbitro de determinados A_1 e A_2, tem-se

[1] Uma maneira alternativa de contornar este problema seria alterarmos a definição de conjuntos subjetivos para incluir não apenas o nível de consciência de cada jogador, mas também todo nível iterado de consciência, isto é, o que o jogador i é consciente que o jogador j é consciente que o jogador i é consciente, e assim por diante. Contudo esta alteração amplia consideravelmente a complexidade dos modelos e, além disso, nos determos neste tipo de detalhe nesta dissertação iria desviar o leitor dos conceitos principais que estamos desenvolvendo. Por isso, resolvemos limitar o conjunto de ações que podem ser contadas pelo árbitro.

um vetor $\vec{\varphi} \in I\!R^2$ tal que $\varphi(\vec{\mathcal{P}}^u) = (\varphi_1^u(F_1^u, \upsilon_1^u(F_1^u)), \varphi_2^u(F_2^u, \upsilon_2^u(F_2^u)))$ que os jogadores acreditam que receberão como solução. Para definir a solução de um Problema de Barganha com Troca de Informação, consideraremos o menor conjunto convexo formado por tais pares, isto é, seu envoltório convexo. Chamaremos esse conjunto de F^{Δ}, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$F^{\Delta} = \{\alpha_1\vec{\varphi_1} + \alpha_2\vec{\varphi_2} + \ldots + \alpha_k\vec{\varphi_k}\},$$

com $\alpha_i \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$ e $k \leq 2^{\|C_1^m\| + \|C_2^m\|}$.

Em um problema de barganha para dois jogadores sem falta de consciência (F, υ), o componente $F \in I\!R^2$ é um conjunto convexo cujos elementos são as utilidades disponíveis aos dois jogadores no problema e υ é um vetor pertencente a $I\!R^2$ e indica os valores que os jogadores acreditam que receberão se o processo de negociação ou arbitragem falharem. Ao analisarmos o Problema de Barganha com Troca de Informação, definimos o conjunto convexo F^{Δ}. O conjunto convexo F^{Δ} contém os possíveis pares de utilidades que poderão ser obtidos pelos jogadores dependendo de qual informação o árbitro irá revelar aos jogadores. Em geral, apenas o árbitro tem conhecimento deste conjunto. De modo similar ao problema de barganha sem consciência o árbitro tem que decidir de maneira imparcial qual melhor solução para ambos os jogadores dentre as disponíveis em F^{Δ}. Em um problema de barganha padrão ainda existe o vetor de discórdia que representa as utilidades obtidas pelos jogadores em caso de um acordo não ser atingido. Vamos agora definir o que seria o análogo ao vetor de discórdia para nosso Problema de Barganha com Troca de Informação.

Um dos pressupostos sobre a figura do árbitro é que a solução indicada por ele deve ser o melhor para ambos os jogadores. Isso está representado nos Axiomas de Nash pelo Axioma da Eficiência Forte. Supõe-se também que os jogadores sejam racionais, tendo portanto a solução de ser maior do que os valores a serem recebidos no caso de falha do processo de negociação ou arbitragem. No Problema de Barganha com Troca de Informação, é razoável considerarmos que o árbitro analisa o conjunto F^{Δ} para decidir quais conjuntos de estratégia A_1 e A_2 devem ser contados aos jogadores de acordo com esses mesmos princípios. Podemos então afirmar que o árbitro não escolherá como solução, por exemplo, um par que seja pior para os jogadores que o par que acreditam que receberão como solução no Problema de Barganha $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ baseado em Ψ^a, pois não é coerente com os princípios do árbitro contar aos jogadores algo que os deixem em situação pior. Então, um candidato natural ao vetor de discórdia é esse par que os jogadores acreditam que receberão como solução no Problema $\mathcal{P}$, pois esse é o valor a ser recebido caso o árbitro decida não contar nenhum conjunto de estratégias aos jogadores e a solução do problema onde permitimos troca de informação deve depender desse valor. Definimos então $\upsilon^\Delta = \vec{\varphi}(\mathcal{P})$ como o análogo ao vetor de discórdia que junto com F^Δ formam um problema similar ao problema de barganha padrão $(F^\Delta, \upsilon^\Delta)$. Na realidade podemos interpretar que do ponto de vista do árbitro o problema de encontrar a solução de um problema de barganha com troca de informação é idêntico ao problema de encontrar uma solução de um problema de barganha padrão. Além disso, os mesmos axiomas que caracterizam a solução de barganha de Nash continuam a expressar propriedades desejáveis de uma solução para o problema de barganha com troca de informação. Portanto, definimos como solução do problema de barganha com troca de informação como sendo a solução de barganha de Nash para o problema de barganha padrão $(F^\Delta, \upsilon^\Delta)$.

Exemplo 5.2.2. *Considere o jogo normal com consciência Ψ^κ descrito na Figura 2.5 no Capítulo 2. Existem pelo menos 16 possibilidades de $A = A_1 \times A_2$ que podem ser contados pelo árbitro, incluindo a opção de não contar nenhuma estratégia disponível. Iremos então obter novos jogos com consciência em forma normal a partir considerando essas possibilidades, como foi definido. Analisando todos os conjuntos A, concluímos que três jogos com consciência em forma normal distintos podem ser obtidos. São eles:*

- Ψ^* *, se* $C \in A_2$ *e* $D \notin A_2$;
- Ψ^Δ *, se* $C \notin A_2$ *e* $D \in A_2$;
- $\Psi^{'}$ *, se* $C \in A_2$ *e* $D \in A_2$;

A seguir descrevemos Ψ^*, Ψ^Δ e $\Psi^{'}$:

Em Ψ^*, temos:

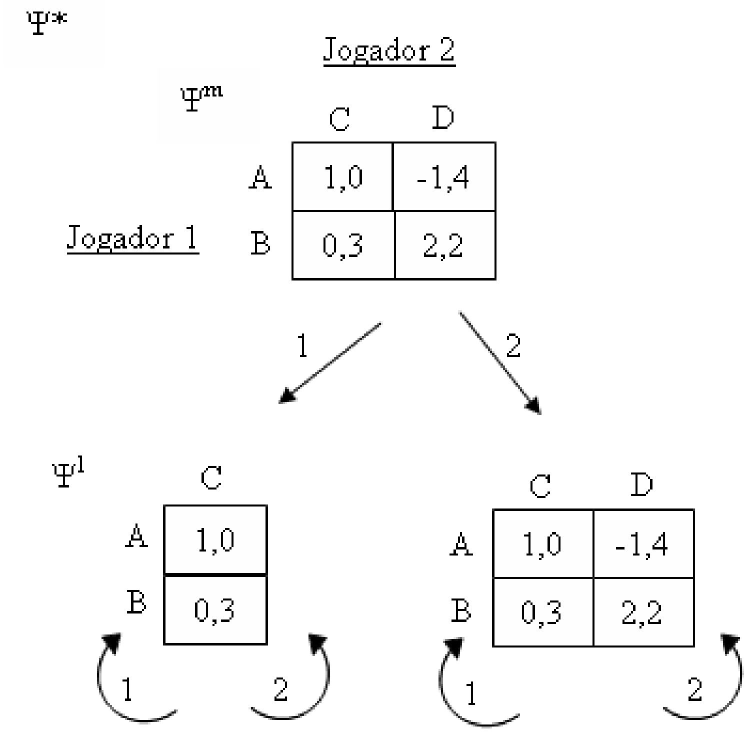


Figura 5.3: Jogo normal com consciência Ψ^*

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^2\}$
- $P_{\mathcal{G}_{\Psi^m}} = \{\Psi^m, \Psi^1\}$;

  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^1}} = \{\Psi^1\}$;
- $\mathcal{A}_1^m(C^1) = \mathcal{A}_2^m(C^m) = 1; \mathcal{A}_1^1(C^1) = \mathcal{A}_2^1(C^1) = 1; \mathcal{A}_2^2(C^m) = \mathcal{A}_1^2(C^m) = 1.$
- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^1) = \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^m) = 1; \mathcal{F}(\Psi^1, 1)(\Psi^1) = \mathcal{F}(\Psi^1, 2)(\Psi^1) = 1;$

  $\mathcal{F}(\Psi^2, 2)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^2, 1)(\Psi^m) = 1.$

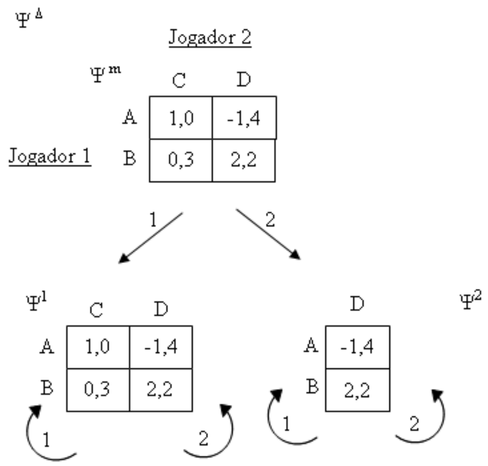


Figura 5.4: Jogo normal com consciência Ψ^{Δ}

Em Ψ^{Δ}*, temos:*

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m, \Psi^1, \Psi^2\}$

- $P_{\mathcal{G}_{\Psi^m}} = \{\Psi^m, \Psi^2\}$;

  $P_{\mathcal{G}_{\Psi^2}} = \{\Psi^2\}$;

- $\mathcal{A}_1^m(C^m) = \mathcal{A}_2^m(C^2) = 1; \mathcal{A}_1^1(C^1) = \mathcal{A}_2^1(C^m) = 1; \mathcal{A}_2^2(C^2) = \mathcal{A}_1^2(C^2) = 1.$

- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^2) = 1; \mathcal{F}(\Psi^1, 1)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^1, 2)(\Psi^m) = 1;$

  $\mathcal{F}(\Psi^2, 2)(\Psi^2) = \mathcal{F}(\Psi^2, 1)(\Psi^2) = 1.$

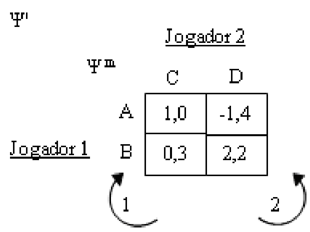


Figura 5.5: Jogo normal com consciência $\Psi^{'}$

Em $\Psi^{'}$*, temos:*

- $\mathcal{G} = \{\Psi^m\}$

- $P_{\mathcal{G}_{\Psi^m}} = \{\Psi^m\}$;
- $\mathcal{A}_1^m(C^m) = \mathcal{A}_2^m(C^m) = 1; \mathcal{A}_1^1(C^m) = \mathcal{A}_2^1(C^m) = 1; \mathcal{A}_2^2(C^m) = \mathcal{A}_1^2(C^m) = 1.$
- $\mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^m) = 1; \mathcal{F}(\Psi^1, 1)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^m) = 1;$
  $\mathcal{F}(\Psi^m, 2)(\Psi^m) = \mathcal{F}(\Psi^m, 1)(\Psi^m) = 1.$

Como definimos, de cada um desses jogos normais com consciência podemos obter um problema de barganha com consciência da forma definida no Capítulo 4. Chamaremos de $\mathcal{P}^*, \mathcal{P}^\Delta$ os problemas obtidos de Ψ^*, Ψ^Δ, respectivamente. O problema obtido a partir de Ψ' equivale ao problema de barganha padrão que pode ser obtido a partir de Ψ, pois os jogadores são conscientes de todas as estratégias. A seguir descreveremos o problema $\mathcal{P}^\kappa$, assim como $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{P}^\Delta$:

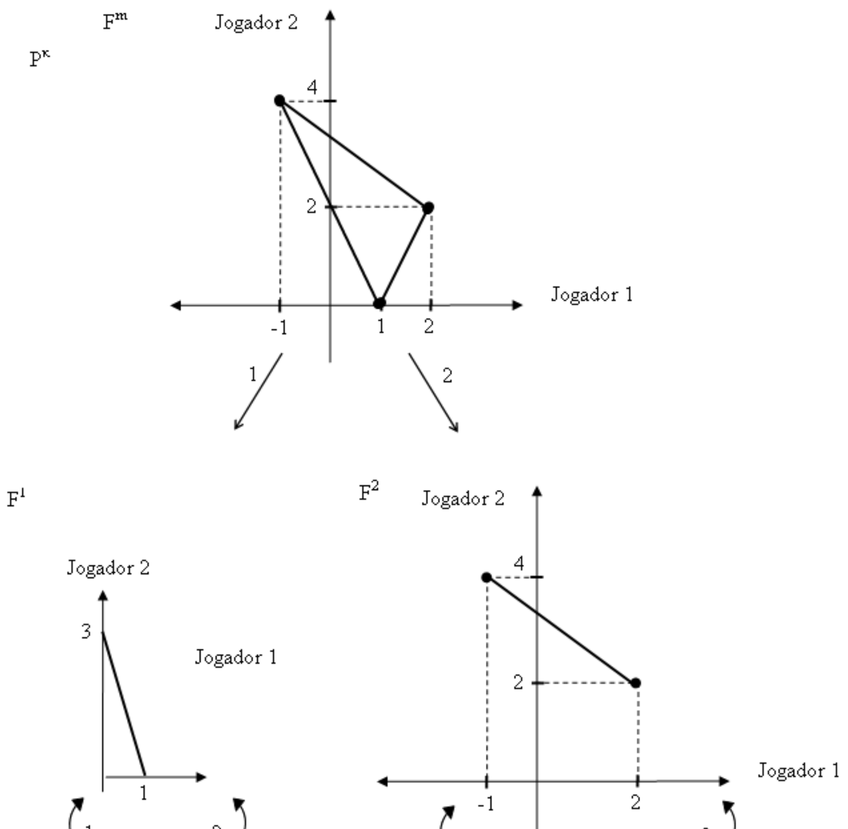


Figura 5.6: Problema de barganha com consciência baseado no Jogo normal com consciência Ψ^κ

Temos então em $\mathcal{P}^{\kappa}$:

- $\mathcal{C} = (F^m, F^1, F^2)$
- $\mathcal{F}(F^m, 1) = F^1; \mathcal{F}(F^m, 2) = F^2; \mathcal{F}(F^1, 2) = F^1 = \mathcal{F}(F^2, 1) = F^2.$

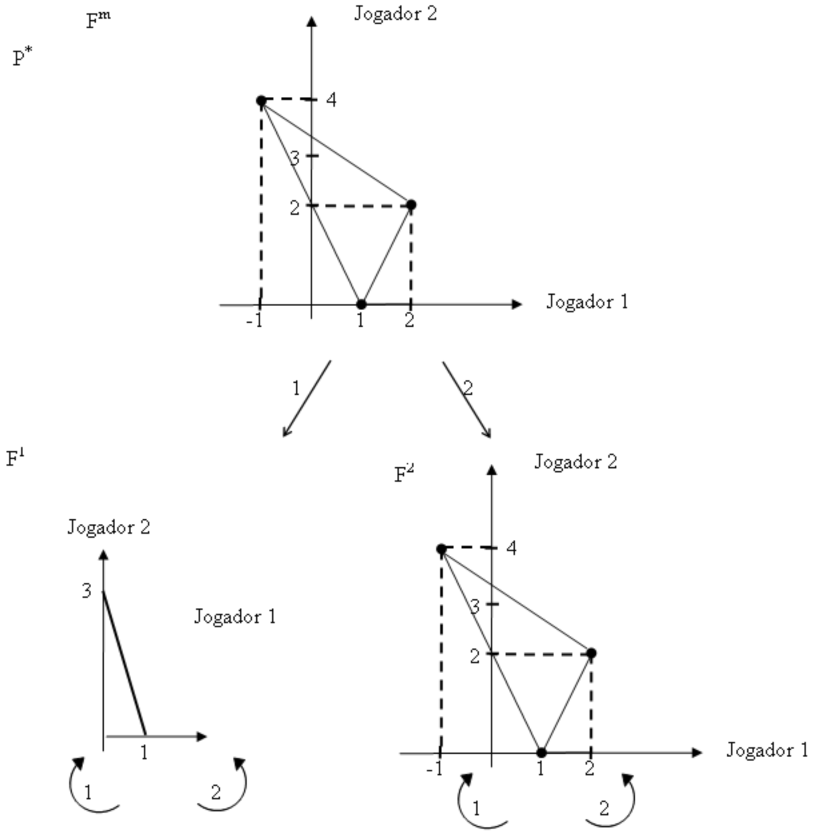


Figura 5.7: Problema de barganha com consciência baseado no Jogo normal com consciência Ψ^*

Em $\mathcal{P}^*$:

- $\mathcal{C} = (F^m, F^1)$
- $\mathcal{F}(F^m, 1) = F^1; \mathcal{F}(F^m, 2) = F^m; \mathcal{F}(F^1, 2) = F^1 = \mathcal{F}(F^m, 2) = F^m.$

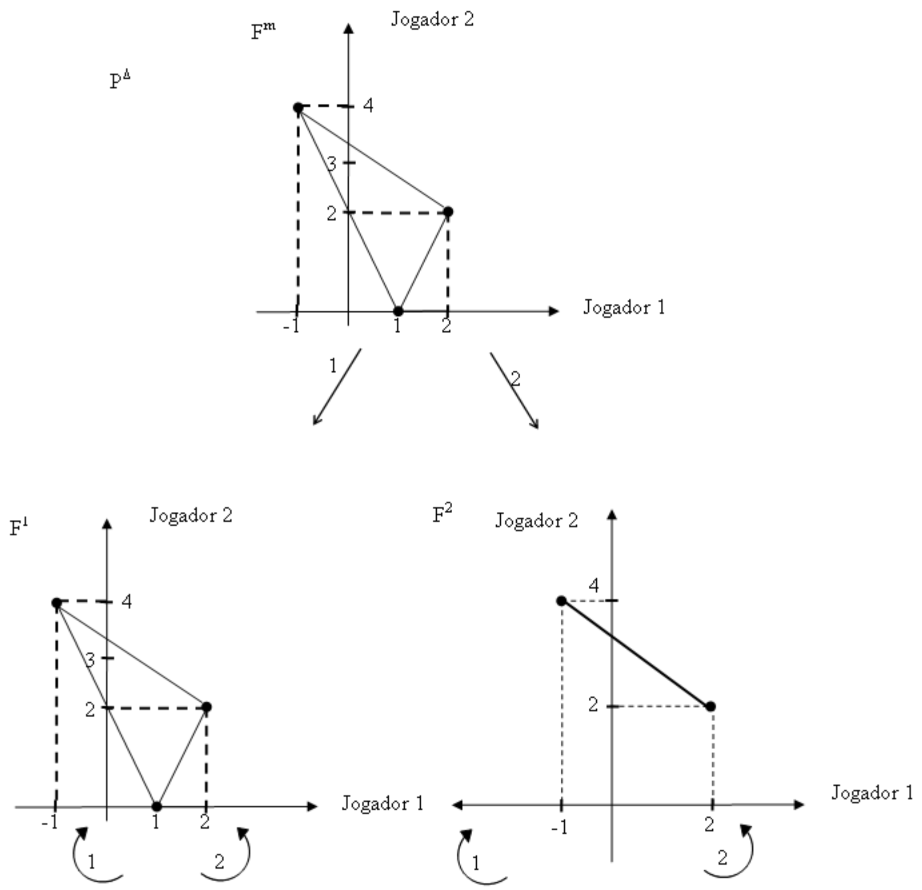


Figura 5.8: Problema de barganha com consciência baseado no Jogo normal com consciência Ψ^{Δ}

e em $\mathcal{P}^{\Delta}$*:*

- $\mathcal{C} = (F^m, F^2)$
- $\mathcal{F}(F^m, 2) = F^2; \mathcal{F}(F^m, 1) = F^m; \mathcal{F}(F^2, 1) = F^2 = \mathcal{F}(F^m, 2) = F^m.$

Note que em $\mathcal{P}^{\Delta}$*, temos o problema que* $F^m = F^1$*. Porém, nesse conjunto o jogador* 2 *tem níveis de consciência diferentes. O mesmo problema pode ocorrer quando o árbitro conta um conjunto* A*, onde* $C \in A_2$ *e* $D \notin A_2$*, resultando em* $\mathcal{P}^*$*. Consideraremos então no nosso modelo que deve haver mais restrições sobre os casos a serem contados pelo árbitro, não podendo ele contar conjuntos que resultem em casos como esse. Uma outra alternativa é adicionar à definição de conjunto subjetivo, uma componente que represente o nível de consciência dos jogadores. Como definimos, o árbitro analisa os problemas* $\mathcal{P}^{\kappa}$*,* $\mathcal{P}^*$*,* $\mathcal{P}^{\Delta}$ *e* $\mathcal{P}'$*, calcula a solução local nos problemas* *locais* (F^1, υ_1) *e* (F^2, υ_2) *de cada de cada um desses 4 problemas de barganha com consciência e depois randomiza entre esses pontos, obtendo um conjunto de utilidades que chamaremos de* F^{Δ}.

Já que os problemas $\mathcal{P}^*$ *e* $\mathcal{P}^{\Delta}$ *apresentam esse problema quanto a função* $\mathcal{F}^P$, *então o árbitro não pode contar os conjuntos que resultam nele. Sendo assim, o árbitro só pode contar os conjuntos A que resultam em* Ψ^{κ} *ou* $\Psi^{'}$ *e só consideraremos para construção de* F^{Δ} *as soluções para os problemas locais associados aos conjuntos* F^1 *e* F^2 *em* $\mathcal{P}^{\kappa}$ *e em* $\mathcal{P}'$. *São elas:*

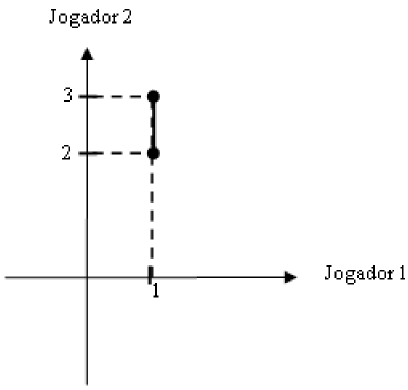
- $\varphi_1(F^1_{\kappa}, \upsilon_1(F^1_{\kappa})) = 1$;
- $\varphi_2(F^2_{\kappa}, \upsilon_2(F^2_{\kappa})) = 2$.

Assim, $\varphi(\vec{\mathcal{P}}^{\kappa}) = (1, 2)$

- $\varphi_1(F'^1, \upsilon_1(F'^1)) = 1$;
- $\varphi_2(F'^2, \upsilon_2(F'^2)) = 3$.

Assim, $\varphi(\vec{\mathcal{P}}') = (1, 3)$.

O conjunto F_{Δ} *é dado então por:*

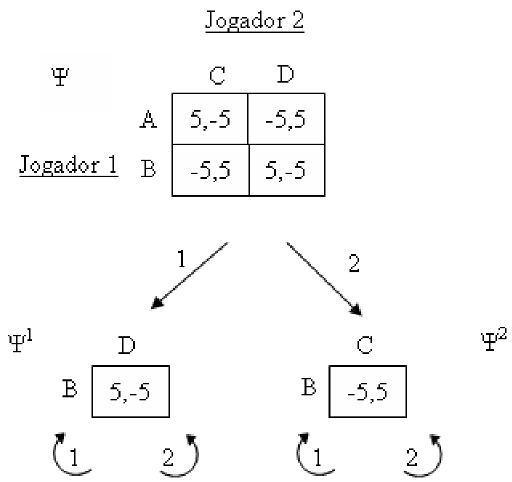


O vetor de discórdia, que chamaremos de υ^{Δ} *é a solução local de barganha do problema* (F^1, υ_1) *e* (F^2, υ_2) *no problema de barganha* $\mathcal{P}^{\kappa}$, *isto é,* $\upsilon^{\Delta} = \varphi(\vec{\mathcal{P}}^{\kappa}) = (1, 2)$. *Obtemos dessa forma o problema de barganha padrão* $(F^{\Delta}, \upsilon^{\Delta})$ *e a solução de barganha de Nash desse problema é a solução do problema de barganha com falta de consciência e acréscimo de informação baseado no jogo normal com consciência* Ψ^{κ} *e é perceptível pelo conjunto, por implicação do axioma da Eficiência Forte, que esta solução é o par (1,3).*

Uma pergunta que pode surgir é: por que o árbitro não conta tudo, já que assim os indivíduos se tornarão conscientes do problema básico (F, v) e o Axioma da Eficiência Forte garante que a solução de barganha de Nash seria a melhor solução para os jogadores? Com o exemplo a seguir, prentendemos mostar que, do ponto de vista dos jogadores, esse nem sempre é o caminho que levará a melhor resposta.

Considere o exemplo como descrito na figura a seguir:

Exemplo 5.2.3. *Considere o jogo normal com consciência Ψ como descrito na figura a seguir:*



Existem, assim como no exemplo anterior, ao menos 16 possibilidades de $A = A_1 \times A_2$ que podem ser contados pelo árbitro, incluindo a opção de não contar nenhuma estratégia disponível. A seguir descrevemos algumas delas:

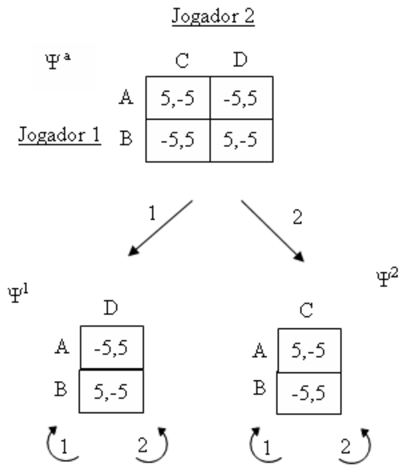


Figura 5.9: Jogo resultante quando o árbitro conta $A_1 = \{A\}$ e $A_2 = \emptyset$

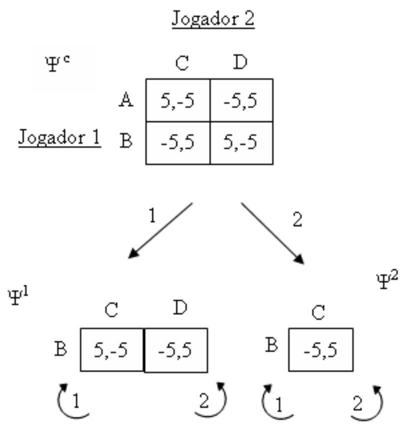


Figura 5.10: Jogo resultante quando o árbitro conta $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \{C\}$

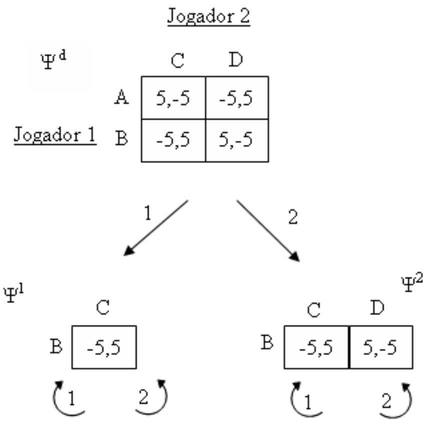


Figura 5.11: Jogo resultante quando o árbitro conta $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \{D\}$

Se analisarmos os problemas de barganha correspondentes a cada um desses problemas, veremos que a solução local para os jogadores nos problemas locais F^1 *e* F^2 *correpondente aos jogos são sempre* 5 *ou* 0. *Analisando todos os problemas que podem ser obtidos a partir de algum anúncio do árbitro, veremos que isso acontece em todos. Fazendo então as combinações, teremos que os pares que podem resultar como soluções locais de* F^1 *e* F^2 *nesses problemas são:* $(0,0), (0,5), (5,0)$ *e (5,5). Logo, o conjunto* F^{Δ} *será construindo considerando esses pontos e o* v^{Δ} *será o par* $(5,5)$ *que é o par de soluções locais* F^1 *e* F^2 *no caso em que o árbitro não conta nada.*

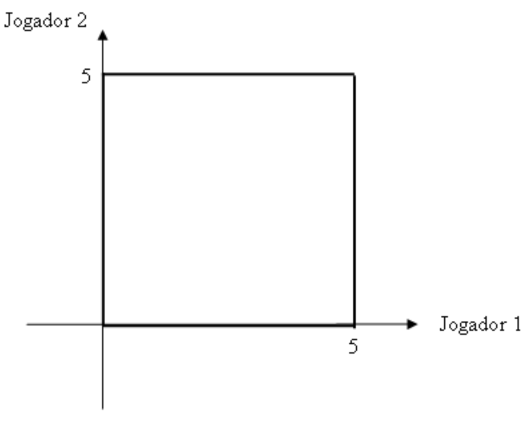


Figura 5.12: Conjunto F^{Δ} resultante

Analisando F^{Δ} *vemos que a solução para o problema* (F^{Δ}, v^{Δ}) *é o par* $(5,5)$ *que corresponde* *a situação onde o árbitro não conta nada. Esse exemplo é importante porque mostra que, considerando o que cada jogador acredita que vai receber, nem sempre é melhor o árbitro contar tudo. Nele, os jogadores acreditam estar na melhor situação possível no caso em que o árbitro não conta nada. Note que o resultado que eles acreditam que vão receber nesse caso, o par* $(5, 5)$*, não pode ser alcançado efetivamente. Porém, nos modelos apresentados nessa dissertação, estamos interessados em mais do que isso. Interessa-nos a solução que os jogadores acreditam que receberão, mesmo que isso não seja possível na prática, pois estamos analisando suas consciências e então a visão subjetiva de cada um passa a ser relevante.*

Nesta seção conseguimos estabelecer uma solução para o problema de barganha com troca de informação quando o mesmo é derivado de um jogo em forma normal com consciência. Na próxima seção trataremos do caso em que o problema de barganha com troca de informação não é necessariamente baseado em um jogo normal com consciência Ψ^a.

5.2.2 Baseando-se em um Problema de Barganha com Consciência

A abordagem para problemas de barganha que não se baseiam num jogo normal com consciência é análoga. Dado um Problema de Barganha com Consciência para dois jogadores $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ definiremos como F^c o subconjunto de F^m escolhido pelo árbitro para ser contado de forma simultânea aos dois jogadores. Dado o anúncio do árbitro, os jogadores se apropriam das informações contidas nesse conjunto aos conjuntos nos quais acreditam em alguma situação do jogo. Isto é, cada F^c que pode ser contado pelo árbitro transforma os conjuntos subjetivos $F^+ \in \mathcal{C}$ em conjuntos convexos que chamaremos de F^t, determinando assim um novo Problema de Barganha com Consciência $\mathcal{P}^t = (\mathcal{C}^t, F^m, \mathcal{F}^t, \upsilon_1^t, \upsilon_2^t)$ através da união de cada conjunto subjetivo pertencente a $\mathcal{C}$ com o conjunto F^c. Formalmente, temos que se $F^t \in \mathcal{C}^t$ se e somente se existir $F^+ \in \mathcal{C}$ tal que:

$$F^t = Ch(F^+ \cup F^c).$$

Analogamente ao que foi proposto no problema baseado num jogo normal com consciência, dizemos que a informação contada pelo árbitro de forma simultânea aos dois jogadores transforma o conjunto $F^+ \in \mathcal{C}$ no conjunto F^t e usaremos a seguinte notação

$$F^t = M(F^+, F^c)$$

e definiremos a função $\mathcal{F}^t$ tal que

$$\mathcal{F}^t(M(F^+, F^c), i) = M(\mathcal{F}^P(F^+, i), F^c).$$

Consideramos neste modelo que para todo $F^+ \in \mathcal{C}_i$, temos $\upsilon_i^t(M(F^+, F^c)) = \upsilon_i(F^=)$ e $\upsilon_2^t = \upsilon_2$. Isto é, consideraremos que a informação contada pelo árbitro não altera o valor de discórdia.

Note que a função $\mathcal{F}^t$ é análoga à função $\mathcal{F}^u$ definida na Subseção 5.2.1. O mesmo problema que pode haver na definição de $\mathcal{F}^u$, pode ocorrer com a definição de $\mathcal{F}^t$. Então, analogamente ao que fizemos para $\mathcal{F}^u$, acrescentaremos uma restrição ao modelo como alternativa para evitar esse problema. A restrição é:

Seja $\mathcal{B}^t = \{F^c : F^c \subseteq F^m \text{ e } \forall F_1, F_2 \in \mathcal{C}, \text{ se } M(F_1, F^c) = M(F_2, F^c), \text{ então } M(\mathcal{F}^P(F_1, i), F^c) = M(\mathcal{F}^P(F_2, i), F^c)\}$.

O conjunto $\mathcal{B}^t$ representa então o conjunto de subconjuntos de F^m que podem ser contados pelo árbitro aos jogadores.

Na seção anterior, baseando-se em Ψ^a, definimos o Problema de barganha com Informação $\mathcal{P}^u$ e a partir dele definimos o conjunto convexo F^Δ. Neste modelo não necessariamente baseado em algum jogo normal daremos ao problema $\mathcal{P}^t$ o mesmo tratamento dado ao problema $\mathcal{P}^u$. Consideraremos também para cada problema $\mathcal{P}^t$ o par que os jogadores acreditam que receberão como solução, isto é, o vetor do $I\!R^2$, tal que $\varphi(\vec{\mathcal{P}}^t) = (\varphi_1^t(F_1^t, \upsilon_1^t(F_1^t)), \varphi_2^t(F_2^t, \upsilon_2^t(F_2^t)))$, onde F_1^t e F_2^t são respectivamente os conjuntos dos quais os jogadores 1 e 2 acreditam após o anúncio do árbitro no conjunto objetivo F^m. Como observamos anteriormente, cada subconjunto de F^m que pode ser contado pelo árbitro determina um problema $\mathcal{P}^t$. Note que existem infinitos subconjuntos F^c de F^m, logo existem infinitos problemas $\mathcal{P}^t = (\mathcal{C}^t, F^m, (\mathcal{F}^p)^t, \upsilon_1^t, \upsilon_2^t)$ associados a $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$. Portanto, teremos infinitos pares $\varphi(\vec{\mathcal{P}}^t)$, um para cada $\mathcal{P}^t$. Finalmente, seja F^{τ} o menor (no sentido de inclusão) conjunto compacto e convexo que contém esses pontos.

Sendo F^{τ} um conjunto convexo, semelhantemente ao definido na seção anterior em relação a F^{Δ}, definiremos um problema de barganha considerando F^{τ} como conjunto de utilidades possíveis aos jogadores. Para isso, precisaremos definir os valores de discórdia para os jogadores, isto é, o que eles acreditam que receberão em caso de falha do processo de negociação ou arbitragem. Também de forma análoga à seção anterior, definiremos como vetor de discórdia e chamaremos de υ^{τ} o par de valores que os jogadores acreditam que receberão no problema $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$, ressaltando que essa é uma escolha razoável por serem esses os valores que os jogadores acreditam que receberão quando o árbitro não conta nehuma informação sobre as utilidades disponíveis, sendo então natural supor que as utilidades recebidas pelos jogadores como resultado final do processo de barganha dependa desses valores.

Do Problema de Barganha para dois jogadores com Consciência $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ e da possibilidade de acréscimo de informação ao conhecimento dos jogadores a respeito do problema, obtemos um problema cuja solução é idêntica a solução do problema de barganha (padrão) $(F^{\tau}, \upsilon^{\tau})$. A solução para este problema será a de um problema de barganha para dois jogadores, isto é, a solução de barganha de Nash como definida no Capítulo 3.

CAPÍTULO 6

Conclusões e Direções para Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Nesta dissertação propusemos modelos para representar problemas de barganha de dois jogadores onde estes podem ser inconscientes a respeito da estrutura do problema.

Os modelos desenvolvidos neste trabalho basearam-se no modelo axiomático de Nash que representa problemas de barganha de dois jogadores e nos modelos desenvolvidos por Halpern e Rêgo (2006) e por Barreto e Rêgo (2008) para representar falta de consciência em jogos de forma extensa e em jogos na forma normal, respectivamente.

Em um dos modelos apresentamos a estrutura para representar como funciona um problema de barganha de dois jogadores onde pode haver falta de consciência. Mostramos também como obter essa estrutura a partir de um jogo normal com consciência. Além de representarmos a barganha com falta de consciência em si, definimos também um novo conceito de solução, chamado de solução generalizada e conseguimos determinar um conjunto de axiomas que caracterizam esta solução. Estes axiomas capturam princípios esperados dos jogadores na maioria dos modelos em teoria dos jogos, como racionalidade e eficiência. Além disso, eles consideram as particularidades do nosso contexto de falta de consciência em uma barganha de dois jogadores.

Um outro ponto discutido é a situação onde jogadores podem se tornar conscientes de informação das quais não tinham consciência no início da barganha através de conversas entre os jogadores. Apresentamos um modelo para representar essas situações com a restrição de que existe a figura de um árbitro onisciente e que é ele quem decide o que deve ser comunicado aos jogadores. Propusemos uma estrutura que permite representar as possibilidades que o árbitro deve considerar ao analisar o que deve contar e uma forma de solução que pode ser proposta aos jogadores e que consideramos apropriada a situações com essas restrições.

6.2 Direções para Trabalhos Futuros

Ao final desta dissertação algumas questões estão em aberto e são potencialmente instigantes para levantar discussões e direcionar futuros trabalhos, o que consideramos altamente positivo. A seguir mencionamos algumas:

- A construção de um modelo que permita aos jogadores em uma barganha terem incerteza sobre a consciência do outro jogador;
- Extender outros modelos de jogos não-cooperativos para permitir que jogadores possam ser inconscientes de parte da estrutura do jogo;
- Encontrar maneiras computacionalmente eficientes de determinar os conjuntos F^{Δ} e F^{τ} para determinação de uma solução para o problema de barganha de dois jogadores com falta de consciência e troca de informação desenvolvido no Capítulo 5;
- Modelar situações de barganha onde os próprios jogadores (e não necessariamente a figura do árbitro) trocam informações entre si, podendo comunicar ao outro uma informação da qual ele o julgue inconsciente.

APÊNDICE A

Demonstrações

Teorema 4.1.1. *Dado um problema de barganha para dois jogadores com consciência* $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$, *uma solução generalizada satisfaz os axiomas generalizados da viabilidade, da eficiência forte, ITAP, IAI, da Simetria e da Racionalidade Individual se, e somente se,*

(a) *Para todo* $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$,

$$(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) = argmax_{\substack{(x_1,x_2)\in F^+ \\ x_i \geq \upsilon_i(F^+) \\ i\in\{1,2\}}} (x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)),$$

ou seja, as soluções locais para os jogadores 1 e 2 no problema de barganha local $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$ *é a solução de barganha de Nash para o problema de barganha de dois jogadores* $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$*; e*

(b) *Para todo* $F^+ \in \mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j$, *onde* $i, j \in \{1, 2\}$, *então*

$$\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) = max\{\{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\}\},$$

onde $F^{+'} = \mathcal{F}^p(F^+, j)$.

Demonstração: Vamos primeiro provar que se uma solução generalizada satisfaz os axiomas generalizados da viabilidade, da eficiência forte, ITAP, IAI, da Simetria e da Racionalidade Individual, então ela deve satisfazer as propriedades (a) e (b). Vamos primeiro provar a parte

(a). Considere um jogo $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Vamos primeiro assumir que o problema de barganha local é essencial, ou seja, que existe $(x_1, x_2) \in F^+$ tal que $x_i > \upsilon_i(F^+)$ para $i \in \{1, 2\}$. Seja x o único ponto em F^+ que atinge o máximo da função $(x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+))$. Seja $\lambda_i = \frac{1}{x_i - \upsilon_i(F^+)}$ e $\gamma_i = \frac{-\upsilon_i(F^+)}{x_i - \upsilon_i(F^+)} = -\upsilon_i(F^+)\lambda_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$. Definiremos uma função $L : I\!R^2 \to I\!R^2$ tal que

$$L(y) = (\lambda_1 y_1 + \gamma_1, \lambda_2 y_2 + \gamma_2) = (\lambda_1(y_1 - \upsilon 1), \lambda_2(y_2 - \upsilon 2)),$$

e seja $G = \{L(y) : y \in F^+\}$. Para qualquer $y \in I\!R^2$, se $z = L(y)$, então $z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 (y_1 - \upsilon_1)(y_2 - \upsilon_2)$, e $\lambda_1 \lambda_2$ é uma constante positiva. Como definimos, x é o vetor que maximiza o produto de Nash com respeito a F^+, então $L(x)$ maximiza o produto $z_1 z_2$ em relação a G. Note que $L(x) = (1, 1)$ e que se considerarmos a hipérbole $\{z \in I\!R^2 : z_1 z_2 = 1\}$, podemos observar que ela tem inclinação -1 no ponto$(1, 1)$. Logo, a reta $\{z \in I\!R^2 : z_1 + z_2 = 2\}$ que tem inclinação -1 e passa pelo ponto $(1, 1)$ tem que estar acima e ser tangente ao conjunto convexo G em $(1, 1)$. Definiremos o conjunto $E = \{z \in I\!R^2 : z_1 + z_2 \leq 2\}$ e teremos então que $G \subseteq E$. Consideremos agora um novo problema de barganha com consciência de dois jogadores $\mathcal{P}^g = (\mathcal{C}^g, (F^m)^g, \mathcal{F}^g, \upsilon_1^g, \upsilon_2^g)$, onde:

i) $\mathcal{C}^g = (\mathcal{C} - F^+) \cup \{G\}$;

ii) se $\mathcal{F}(F, i) \neq F^+$, então $\mathcal{F}^g(F, i) = \mathcal{F}(F, i)$;

iii) se $\mathcal{F}(F, i) = F^+$, então $\mathcal{F}^g(F, i) = G$,

iv) $\mathcal{F}^g(G, i) = G$;

v) para todo $F \neq F^+$ tal que $F \in \mathcal{C}_i$, $\upsilon_i^g(F) = \upsilon_i(F)$; e

vi) $\upsilon_i^g(G) = \lambda_i \upsilon_i(F^+) + \gamma_i = 0$.

Intuitivamente, a única diferença entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^g$ é que o problema local $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$ é substituído por um novo problema local $(G, (0, 0))$ que é uma transformação linear do primeiro.

Considere ainda um outro problema de barganha com consciência de dois jogadores $\mathcal{P}^e = (\mathcal{C}^e, (F^m)^e, \mathcal{F}^e, \upsilon_1^e, \upsilon_2^e)$, onde:

i) $\mathcal{C}^e = (\mathcal{C}^g - G) \cup \{E\}$;

ii) se $\mathcal{F}^g(F,i) \neq G$, então $\mathcal{F}^e(F,i) = \mathcal{F}^g(F,i)$;

iii) se $\mathcal{F}^g(F,i) = G$, então $\mathcal{F}^e(F,i) = E$,

iv) $\mathcal{F}^e(E,i) = E$;

v) para todo $F \neq G$ tal que $F \in \mathcal{C}_i$, $\upsilon_i^e(F) = \upsilon_i^g(F)$; e

vi) $\upsilon_i^e(E) = \upsilon_i^g(G) = 0$.

Intuitivamente, a única diferença entre $\mathcal{P}^g$ e $\mathcal{P}^e$ é que o problema local $(G,(0,0))$ é substituído por um novo problema local $(E,(0,0))$, onde $G \subseteq E$.

Como o conjunto E é simétrico e $E \in (\mathcal{C}_1^e \cap \mathcal{C}_2^e)$, o axioma generalizado da simetria implica que $\varphi_1^e(E,0) = \varphi_2^e(E,0)$. Portanto, o axioma da eficiência forte implica que $\varphi_i^e(E,0) = 1$, para $i \in \{1,2\}$. Como $(1,1) \in G$, o axioma da generalizado da independência das alternativas irrelevantes implica que $\varphi_i^g(G,0) = 1$.

Finalmente, como $L(\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)) = (0,0)$ e $G = \{L(y) : y \in F^+\}$, o axioma generalizado ITAP implica que, $1 = \varphi_i^g(G,0) = \lambda_i \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) + \gamma_i$. Logo, $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) = \frac{1-\gamma_i}{\lambda_i} = x_i$. Resta-nos provar o caso em que o problema local $(F^+, (\upsilon_1(F^+), \upsilon_2(F^+)))$ não é essencial. Neste caso, não existe nenhum ponto $(y_1, y_2) \in F^+$ tal que $y_i > \upsilon_i(F^+)$ para todo $i \in \{1,2\}$. Como F^+ é convexo, deve existir pelo menos um jogador i tal que, para todo $(y_1,y_2) \in F^+$ tal que $y_j \geq \upsilon_j(F^+)$ para todo $j \in \{1,2\}$, então $y_i = \upsilon_i(F^+)$. Seja x o vetor que dá a maior solução para o jogador diferente de i em F^+ sujeito a restrição que $x_i = \upsilon_i(F^+)$. Então x é o único valor que satisfaz os axiomas generalizado da eficiência forte e da racionalidade individual racional. Portanto, $\varphi_i(F^+, (\upsilon_i(F^+)) = x_i$ para $i \in \{1,2\}$. Obviamente, x também maximiza o produto $(x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+))$ para todo vetor $x \in F^+$, que é individualmente racional.

Vamos agora provar que os axiomas implicam que a solução generalizada satisfaz a parte (b) do Teorema. Pelo axioma generalizado da viabilidade, $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \in \{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\}$. Vamos considerar primeiro o caso em que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) = \upsilon_i(F^+)$. Se

$\upsilon_i(F^+) \geq x_i$ para todo x_i tal que $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$, temos que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ satisfaz a parte (b) do Teorema. Suponha, por contradição, que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) = \upsilon_i(F^+)$ e que existe x_i tal que $\upsilon_i(F^+) < x_i$ e $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$. Neste caso, o axioma generalizado da eficiência forte, implica que $x_i = \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$, uma contradição. Finalmente, considere o caso em que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \neq \upsilon_i(F^+)$. Então, pelo axioma generalizado da viabilidade $(\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))), \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'})))) \in F^+$. Logo, se existir x_i tal que $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$ e $x_i \geq \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)))$, o axioma generalizado da eficiência forte implica que $x_i = \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)))$. Portanto, $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)))$ satisfaz a parte (b) do Teorema.

Vamos agora demonstrar que a solução generalizada caracterizada pelas partes (a) e (b) do Teorema satisfaz os axiomas generalizados da viabilidade, da eficiência forte, ITAP, IAI, da Simetria e da Racionalidade Individual.

Axioma Generalizado da Viabilidade

Se $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, então pela parte (a) do Teorema, temos que $(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) \in F^+$. Logo, o axioma da viabilidade é satisfeito.

Se $F^+ \in (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j)$, então pela parte (b) do Teorema, temos que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$=max$\{\{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\}\}$, onde $F^{+'} = \mathcal{F}^c(F^+, j)$. Portanto, o axioma da viabilidade também é satisfeito.

Axioma Generalizado da Eficiência Forte

Considere primeiro o caso em que $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Suponha, por contradição, que existe $(x_1, x_2) \in F^+$, tal que $x_i \geq \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$, para todo $i \in \{1, 2\}$, e $x_i > \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ para algum $i \in \{1, 2\}$. Como $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \geq \upsilon_i(F^+)$, para todo $i \in \{1, 2\}$, temos que $(x_1, x_2) \in F^+$ e $x_i \geq \upsilon_i(F^+)$, para todo $i \in \{1, 2\}$. Além disso, $(x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)) > (\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)) - \upsilon_1(F^+))(\varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+)) - \upsilon_2(F^+))$, uma contradição a definição de $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$.

Considere agora o caso que $F^+ \in (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j)$. É fácil verificar que por definição de $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ não existe x_i tal que $(x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))) \in F^+$ e $x_i > \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$.

Axioma da Racionalidade Individual

Se $F^+ \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, então pela parte (a) do Teorema, temos que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+)) \geq \upsilon_i(F^+)$. Logo, o axioma da racionalidade individual é satisfeito.

Se $F^+ \in (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j)$, então pela parte (b) do Teorema, temos que $\varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$=max$\{\{x_i : (x_i, \varphi_j(F^{+'}, \upsilon_j(F^{+'}))\} \cup \{\upsilon_i(F^+)\}\}$, onde $F^{+'} = \mathcal{F}^c(F^+, j)$. Portanto, o axioma da racionalizado individual também é satisfeito.

Axioma Generalizado IAI

Dadas as condições do axioma Generalizado IAI, tem-se que

$$(x_1^*, x_2^*) = argmax_{(x_1,x_2)\in F^+, x_i \geq \upsilon_i(F^+), i\in\{1,2\}}(x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)) \in G \subseteq F^+.$$

Logo,

$$argmax_{(x_1,x_2)\in G, x_i \geq \upsilon_i'(G), i\in\{1,2\}}(x_1 - \upsilon_1'(G))(x_2 - \upsilon_2'(G)) = (x_1^*, x_2^*).$$

Portanto, como $F^+ \in (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ e $G \in (\mathcal{C}_1' \cap \mathcal{C}_2')$, segue que $\varphi_i'(G, \upsilon_i'(G)) = \varphi_i(F^+, \upsilon_i(F^+))$ para $i \in \{1, 2\}$.

Axioma Generalizado da Simetria

Dadas as condições do axioma Generalizado da simetria, tem-se que

$$(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))) = argmax_{(x_1,x_2)\in F^+, x_i \geq \upsilon_i(F^+), i\in\{1,2\}}(x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)),$$

onde $\upsilon_1(F^+) = \upsilon_2(F^+)$. Como F^+ é simétrico e convexo, é fácil verificar que $\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)) = \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))$

Axioma Generalizado ITAP

Considerando as suposições do axioma Generalizado ITAP, temos que

$$(\varphi_1'(G, \upsilon_1'(G)), \varphi_2'(G, \upsilon_2'(G))) = argmax_{(x_1,x_2)\in G, x_i \geq \upsilon_i'(G), i\in\{1,2\}}(x_1 - \upsilon_1'(G))(x_2 - \upsilon_2'(G)).$$

Como $G = \{(\lambda_1 x_1 + \gamma_1, \lambda_2 x_2 + \gamma_2) : (x_1, x_2) \in F^+\}$ e $\upsilon'_i(G) = \lambda_i \upsilon_i(F^+) + \gamma_i$, temos que:

$$(\varphi'_1(G, \upsilon'_1(G)), \varphi'_2(G, \upsilon'_2(G))) =$$
$$= L(argmax_{(x_1,x_2)\in F^+, x_i \geq \upsilon_i(F^+), i\in\{1,2\}}(\lambda_1 x_1 + \gamma_1 - (\lambda_1 \upsilon_1(F^+) + \gamma_1))(\lambda_2 x_2 + \gamma_2 - (\lambda_2 \upsilon_2(F^+) + \gamma_2)))$$
$$= L(argmax_{(x_1,x_2)\in G, x_i \geq \upsilon'_i(G), i\in\{1,2\}} \lambda_1 \lambda_2 (x_1 - \upsilon_1(F^+))(x_2 - \upsilon_2(F^+)))$$
$$= L(\varphi_1(F^+, \upsilon_1(F^+)), \varphi_2(F^+, \upsilon_2(F^+))).$$

Lema 4.4.1 *Dado um jogo em forma normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$, seja $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ o problema de barganha para dois jogadores com consciência derivado conforme metodologia anterior. Então, para todo $F^+ \in \mathcal{C}$, temos que F^+ é convexo.*

Demonstração: Considere primeiro F^+ corresponde a um jogo aumentado $\psi^+ \in (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) \cup (\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)^c$. Sejam (y_1, y_2) e (z_1, z_2) dois pontos pertencentes a F^+ e $\lambda \in (0, 1)$. Temos que provar que $(\lambda y_1 + (1-\lambda) z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda) z_2)$ pertence a F^+. Como $(y_1, y_2) \in F^+$ e $(z_1, z_2) \in F^+$, então existem duas distribuições de probabilidades sobre os perfis de estratégias de ψ^+, $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k) = \tau'$ e $(p''_1, p''_2, \ldots, p''_k) = \tau''$ tais que

$$p'_1 u_j(c_1) + p'_2 u_j(c_2) + \ldots p'_k u_j(c_k) = y_j, \forall j \in \{1, 2\} \tag{A.1}$$

e

$$p''_1 u_j(c_1) + p''_2 u_j(c_2) + \ldots p''_k u_j(c_k) = z_j, \forall j \in \{1, 2\}. \tag{A.2}$$

Multiplicando a equação $(A.1)$ por λ, a equação $(A.2)$ por $1 - \lambda$ e somando as duas equações temos que:

$$(\lambda p'_1 + (1-\lambda) p''_1) u_j(c_1) + (\lambda p'_2 + (1-\lambda) p''_2) u_j(c_2) + \ldots + (\lambda p'_k + (1-\lambda) p''_k) u_j(c_k) = \lambda y_j + (1-\lambda) z_j.$$

Como $(\lambda p'_1 + (1-\lambda) p''_1, \ldots, \lambda p'_k + (1-\lambda) p''_k)$ também é uma distribuição de probabilidades sobre os perfis de estratégia de ψ^+. Logo, por definição, temos que $(\lambda y_1 + (1-\lambda) z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda) z_2) \in F^+$.

Suponha agora que F^+ corresponde a um jogo aumentado $\psi^+ \in (\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j)$ tal que $\mathcal{F}(\psi^+, j) = \psi^{+'}$ e que, como hipótese indutiva, que $F^{+'}$, o conjunto que corresponde a $\psi^{+'}$, seja convexo. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $i = 1$ e $j = 2$. Sejam (y_1, y_2) e (z_1, z_2) dois pontos pertencentes a F^+ e $\lambda \in (0, 1)$. Temos que provar que $(\lambda y_1 + (1-\lambda) z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda) z_2)$

pertence a F^+. Como $(y_1, y_2) \in F^+$ e $(z_1, z_2) \in F^+$, então $y_2 \in F_2^{+'}$, $z_2 \in F_2^{+'}$, e existem $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_k) = \tau'$ e $(p''_1, p''_2, \ldots, p''_k) = \tau''$ tais que

$$p'_1 u_2(c_1) + p'_2 u_2(c_2) + \ldots p'_k u_2(c_k) = y_2 \tag{A.3}$$

e

$$p''_1 u_2(c_1) + p''_2 u_2(c_2) + \ldots p''_k u_2(c_k) = z_2 \tag{A.4}$$

Multiplicando a equação $(A.3)$ por λ, a equação $(A.4)$ por $1 - \lambda$ e somando as duas equações temos que:

$$(\lambda p'_1 + (1-\lambda)p''_1)u_2(c_1) + (\lambda p'_2 + (1-\lambda)p''_2)u_2(c_2) + \ldots + (\lambda p'_k + (1-\lambda)p''_k)u_2(c_k) = \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2$$

Então temos uma distribuição de probabilidade sobre os perfis de estratégia que resulta em $\lambda y_2 + (1 - \lambda)z_2$. Chamaremos essa distribuição de $\lambda\tau' + (1 - \lambda)\tau''$ e temos então que $\lambda\tau' + (1 - \lambda)\tau'' \in A_{\lambda y_2 + (1-\lambda)z_2}$.

Pela definição de ω_τ e θ_τ, temos que:

$$\begin{aligned}
\omega_{\lambda\tau'+(1-\lambda)\tau''} &= \sum_{c \in C_2^{+'}} (\lambda\tau'_2(c) + (1-\lambda)\tau''_2(c)) \min_{a \in C_1^+} u_1(a,c) \\
&= \lambda \sum_{c \in C_2^{+'}} \tau'_2(c) \min_{a \in C_1^+} u_1(a,c) + (1-\lambda) \sum_{c \in C_2^{+'}} \tau''_2(c) \min_{a \in C_1^+} u_1(a,c) \\
&= \lambda\omega_{\tau'} + (1-\lambda)\omega_{\tau''},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{\lambda\tau'+(1-\lambda)\tau''} &= \sum_{c \in C_2^{+'}} (\lambda\tau'_2(c) + (1-\lambda)\tau''_2(c)) \max_{a \in C_1^+} u_1(a,c) \\
&= \lambda \sum_{c \in C_2^{+'}} \tau'_2(c) \max_{a \in C_1^+} u_1(a,c) + (1-\lambda) \sum_{c \in C_2^{+'}} \tau''_2(c) \max_{a \in C_1^+} u_1(a,c) \\
&= \lambda\theta_{\tau'} + (1-\lambda)\theta_{\tau''},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Note que

$$\omega_{\tau'} \leq y_1 \leq \theta_{\tau'}$$

e

$$\omega_{\tau''} \leq z_1 \leq \theta_{\tau''}$$

E daí temos que

$$\lambda\omega_{\tau'} + (1-\lambda)\omega_{\tau''} \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)z_1 \leq \lambda\theta_{\tau'} + (1-\lambda)\theta_{\tau''}$$

Pela igualdade demonstrada nas equações $(A.5)$ e $(A.6)$, temos que:

$$\omega_{\lambda\tau'+(1-\lambda)\tau''} \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)z_1 \leq \theta_{\lambda\tau'+(1-\lambda)\tau''}.$$

Como $\lambda\tau' + (1-\lambda)\tau'' \in A_{\lambda y_2+(1-\lambda)z_2}$ e como $F^{+'}$ é convexo, então $(\lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) \in F_j^{+'}$ e, consequentemente, pela definição de F^+, temos que $(\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) \in F^+$, como queríamos provar.

Teorema 4.4.1. *Dado um jogo em forma normal com consciência $\Psi^a = (\mathcal{G}, \psi^m, \mathcal{F})$, seja $\mathcal{P} = (\mathcal{C}, F^m, \mathcal{F}^p, \upsilon_1, \upsilon_2)$ o problema de barganha para dois jogadores com consciência derivado conforme metodologia anterior. Seja F^+ o conjunto de utilidades correspondente a $\psi^+ \in \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_j$ e $\mathcal{F}(\psi^+, j) = \psi^{+'}$ e seja $F^{+'}$ o conjunto de utilidades que corresponde a $\psi^{+'}$. Considere o conjunto $\Omega = Ch(\{\bigcup_{i=1}^k [\omega_{c_i}, \theta_{c_i}] \times \{u_j(c_i))\})$, onde $c_1, \ldots, c_k$ são os de perfis de estratégia puras do jogo $\psi^{+'}$, então $F^+ = \Omega$.*

Demonstração:

Por definição, F^+ contém $\{\bigcup_{i=1}^k [\omega_{c_i}, \theta_{c_i}] \times \{u_j(c_i))\}$. Como Ω é o menor (no sentido de inclusão) conjunto convexo que contém os mesmos pontos e como pelo lema 4.4.1, F^+ é convexo, então $\omega \subseteq F^+$. Suponha agora que $(x, y) \in F^+$. Então, existe $\tau \in A_y$ e $\lambda \in (0, 1)$ tal que :

$$x = \lambda\omega_\tau + (1-\lambda)\theta_\tau = \lambda(\sum_{c\in C} \tau(c)\omega_\tau) + (1-\lambda)(\sum_{c\in C} \tau(c)\theta_\tau)$$

e

$$y = \sum_{c\in C} \tau(c)u_j(c).$$

Podemos então escrever (x, y) como:

$$(x, y) = \sum_{c\in C} \tau(c)(\lambda\omega_\tau + (1-\lambda)\theta_\tau, u_j(c))$$

Note que $(\omega_\tau, u_j(c)) \in \Omega$, assim como $(\theta_\tau, u_j(c))$. Como Ω é convexo, então $(x, y) \in \Omega$. Logo $F^+ = \Omega$.

Referências Bibliográficas

[1] Aumann, R. J. (1976), Agreeing to desagree, *Annals of Statistics* **4**, 1236-1239.

[2] Barreto, L. S. ; Rêgo, L. C. . Falta de Consciência em Jogos na Forma Normal. In: XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2008, João Pessoa, PB. *Anais do XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2008.

[3] Campello de Souza, F. M. (2002), *Decisões Racionais em Situações de Incerteza*, Editora Universitária, Recife.

[4] Chung, K. e Fortnow, L. (2007), *Loopholes*, Manuscrito não publicado.

[5] De Castro, R. (2003), *El universo Latex*, Universidade Nacional da Colombia, Colombia.

[6] Feinberg) Feinberg, Y. (2005), *Games with incomplete awareness*, Technical Report Resarch Paper Series, Stanford Graduate School of Business.

[7] Halpern, J. ; Rêgo, L. C. (2006), Extensive games with possibly unaware players, *publicado nos anais da AAMAS'06 - 5th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* pp. 744-751.

[8] Kreps, D. (1988), *Notes on the Theory of Choice*, Underground Classics in Economics.

[9] Li, J. (2006), Dynamic games with unawareness, Manuscrito não publicado.

[10] Maynard Smith, J. (1976), *Evolution and the theory of games*, American Scientist 64, 41-45.

[11] Maynard Smith, J. e Price, G. (1973), *The logic of animal conflict*, Nature 146, 15-18.

[12] Myerson, R. B. (1997), *Game Theory: Analysis of Conflit*, Havard University Press, Cambridge.

[13] Nash Jr., J. F. (1950a), The bargaining problem, *Econometrica* pp. 155-162.

[14] Nash Jr., J. F. (1950b), Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* pp. 48-49.

[15] Nash Jr., J. F. (1951), Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* pp. 286-295.

[16] Nash Jr., J. F. (1953), Two-person cooperative games, *Econometrica* pp. 128-140.

[17] Neumann, J. V. ; Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton.

[18] Osborne, M. J. ; Rubinstein, A. (1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge.

[19] Osborne, M.J ; Rubinstein, A. (1990), *Bargaining and Markets*, Academic Press.

[20] Ozbay, E. (2006), Unawareness and strategic announcements in games with uncertainty, *Manuscrito não publicado.*

[21] Rêgo, L. C. ; Halpern, J. (2007), Generalized solution concepts in games with possibly unaware players, *Publicado no 11th Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK07), Belgium.*