

IZABEL CRISTINA IZIDORO DE SOUZA

**O PRINCÍPIO DO CONTEXTO DE GOTTLOB FREGE:  
UMA ANÁLISE SISTEMÁTICA**

Recife, março de 2007

IZABEL CRISTINA IZIDORO DE SOUZA

**O PRINCÍPIO DO CONTEXTO DE GOTTLOB FREGE:  
UMA ANÁLISE SISTEMÁTICA**

Dissertação apresentada, sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto, ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Recife, março de 2007

Souza, Izabel Cristina Izidoro de

O princípio do contexto de Gottlob Frege : uma análise sistemática / Izabel Cristina Izidoro de Souza. - Recife: O Autor, 2007.

80 folhas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Filosofia, 2007

Inclui bibliografia.

1. Filosofia. 2..Frege Gottob – Princípio do contexto. 3, Número. 4. Lógica – Análise sistemática. I. Título

1  
100

CDU (2. Ed.)  
CDD (22. ed.)

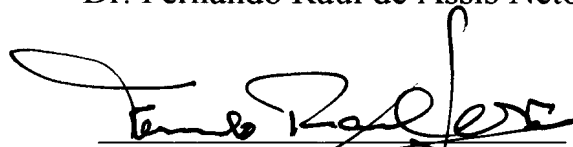
UFPE  
CFCH 2009/02

## TERMO DE APROVAÇÃO

**IZABEL CRISTINA IZIDORO DE SOUZA**

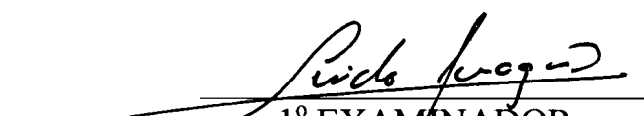
Dissertação de Mestrado em Filosofia **aprovada com distinção**, pela Comissão Examinadora formada pelos professores a seguir relacionados, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia, pela Universidade Federal de Pernambuco.

Dr. Fernando Raul de Assis Neto



ORIENTADOR

Dr. Guido Imaguire



1º EXAMINADOR

Dr. Érico Andrade Marques de Oliveira



2º EXAMINADOR

RECIFE/2007

“Todo o bom matemático é pelo menos metade filósofo e todo o bom filósofo é pelo menos  
metade matemático”

(Gottlob Frege)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus; a minha família – especialmente aos meus pais e a meu irmão – pelo apoio em todos os momentos; a Ronaldo pela compreensão e carinho; a meu amigo Márcio Batista da Silva pela revisão final desse trabalho; ao doutorando Alessandro Bandeira Duarte e ao Prof. Dr. Marco Antônio Ruffino pela disponibilidade em nos ajudar na bibliografia da pesquisa; à CAPES, órgão fomentador da pesquisa; aos Profs. Drs. Guido Imaguire e Érico Andrade pela disposição em participar da banca examinadora; aos Profs. Drs. Jesús Vázquez e Virgínia Leal, que aceitam ser suplentes da banca examinadora; à Profa. Dra. Zélia Dantas – que, juntamente com o Prof. Dr. Érico Andrade, participou do exame de qualificação – por suas valiosas contribuições que resultaram em modificações na versão final dessa dissertação; e, finalmente, sou imensamente grata ao Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto por sua orientação paciente e sempre cuidadosa.

Na ordem do conhecer, dedico este trabalho ao Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto. E, na ordem do ser, dedico-o a minha família, especialmente a meus pais, e a Ronaldo.

## RESUMO

Na introdução de *Os fundamentos da aritmética* (*Die Grundlagen der Arithmetik*), de 1884, obra em que se ocupa com o esboço informal da definição lógica de número, Frege apresenta os três princípios fundamentais de sua investigação. Particularmente, interessa-nos o segundo deles que veio a ser conhecido como *o princípio do contexto*. Ele reaparece no §60 em uma passagem essencial (§§55-61) que considera os números como objetos autônomos e é reiterado no §62, no começo de uma passagem igualmente importante (§§62-69), onde são expostas as razões para definir os números cardinais como extensões de conceitos. E, finalmente, aparece no §106, no curso da recapitulação dos principais resultados do livro. Apresentamos nesta dissertação uma análise sistemática do princípio, tendo em vista que o papel exercido por ele no projeto logicista de Frege tem sido alvo de intensos debates. Há diversas interpretações sobre seu uso em *Os fundamentos da aritmética*. As formulações que aparecem no livro não exercem um papel homogêneo. Outra questão que também divide os comentadores é se o princípio do contexto é ou não reafirmado implícita ou explicitamente em trabalhos posteriores. Entre os comentadores, não há concordância acerca da manutenção ou não do princípio do contexto em outros escritos. Nosso principal objetivo é mapear as questões relativas a este princípio.

**Palavras-chave:** Frege, princípio do contexto, número, lógica, análise sistemática.



## ABSTRACT

In the introduction of *The foundations of arithmetic* (*Die Grundlagen der Arithmetik*), in 1884, work in which he deals with the informal sketch of logical definition of number, Frege shows three basic principles of his investigation. It is particularly interesting to us the second of these three ones, which has been known as the *context principle*. It reappears in §60, in an essential passage (§§55-61) that considers numbers as independent objects, and it is reiterated in §62 in the beginning of an equally important passage where they are exposed the reasons to define cardinal numbers as concept extensions. Finally, it appears in §106 in synthesizing the principle results of the book. We present in this dissertation a systematic analysis of the principle, since the role played by it in Frege's logicist project has been target of intense discussions. There are several interpretations of its use in *The foundations of arithmetic*. The formulations in the book do not play the same role. Another question, which also divides commentators, is whether the context principle is or not, implicitly or explicitly, reaffirmed in the later works. There is any agreement among commentators about the maintenance or not of the context principle in other writings. Our main objective is to chart some relative questions to this principle.

**Keywords:** Frege, context principle, numbers,

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	10
<b>I O PROJETO LOGICISTA DE GOTTLOB FREGE</b>	15
1.1 O Contexto Histórico	16
1.2 O Primeiro Período	18
1.2.1 <i>Begriffsschrift</i>	19
1.3 O Segundo Período	25
1.3.1 <i>Os Fundamentos da Aritmética</i>	26
1.4 O Terceiro Período	31
1.4.1 Os Artigos do terceiro período	32
1.5 O Quarto Período	36
1.5.1 <i>Die Grundgesetze der Arithmetik</i>	37
1.6 O Quinto Período	39
1.6.1 <i>Investigações Lógicas</i>	40
<b>II O PRINCÍPIO DO CONTEXTO EM OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA</b>	44
2.1 O Princípio do Contexto como um dos Princípios Fundamentais	45
2.2 As Formulações do Princípio do Contexto em <i>Os Fundamentos da Aritmética</i>	47
2.3 O Princípio do Contexto Segundo a Literatura Secundária	49
2.3.1 O Princípio Metodológico	50
2.3.2 A Formulação Epistemológica	52
2.3.3 A Prioridade Semântica	54
2.3.4 A Prioridade Ontológica	56
2.3.5 A Prioridade Sintática	58
<b>III O PRINCÍPIO DO CONTEXTO APÓS OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA</b>	61
3.1 O Princípio do Contexto e os Conceitos de ‘Sentido’ e ‘Referência’	62
3.2 O Princípio do Contexto e as Definições Contextuais	64

3.3 Composicionalidade X Contextualismo.....	65
3.4 A Tese do Abandono do Princípio do Contexto.....	67
3.5 A Tese da Manutenção do Princípio do Contexto.....	69
 <b>CONCLUSÃO</b> .....	 73
 <b>REFERÊNCIAS</b> .....	 75

## INTRODUÇÃO

Durante toda sua vida Frege dedicou-se quase exclusivamente a seu projeto logicista, ou seja, seu projeto de reduzir a aritmética à lógica. Ele considerou a aritmética um corpo de verdades analíticas e *a priori*. Em 1879, deu início a seu objetivo com o *Begriffsschrift*<sup>1</sup>, no qual desenvolveu uma linguagem própria para a aritmética. Assentadas as bases da nova lógica, Frege dedicou-se à tarefa de mostrar que as leis aritméticas fundamentam-se nas leis da lógica. Esse trabalho encontra-se em sua teoria do número, exposta em *Os fundamentos da aritmética*<sup>2</sup> (*Die Grundlagen der Arithmetik*),<sup>3</sup> de 1884. Nesta obra, Frege ocupa-se com o esboço informal da definição lógica de número.

*Os fundamentos da aritmética* (de agora em diante simplesmente *Os fundamentos*) é considerada por alguns intérpretes como uma obra-prima (*masterpiece*) filosófica,<sup>4</sup> obra na qual Frege apresenta, no final da introdução, os três princípios fundamentais que conduzirão suas investigações. O objetivo da presente dissertação consiste na análise e discussão do segundo desses princípios, que veio a ser conhecido como o princípio do contexto. Além de ser formulado na introdução como um princípio fundamental, o princípio do contexto também aparece em momentos importantes da argumentação de Frege.

---

<sup>1</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Begriffsschrift*. Darmstadt, Hale: 1879.

<sup>2</sup> Cf. Idem. *Os fundamentos da aritmética*: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. In: *Peirce-Frege*. São Paulo: Abril Cultural, 1983, p. 199-278. (Col. Os Pensadores).

<sup>3</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Stuttgart: Reclam, 1995.

<sup>4</sup> Cf. BEANEY, Michael. *The Frege: Reader*. London: Blackwell, 1997, p. 5; Cf. DUMMETT, Michael. Frege's Philosophy. In: idem. *Truth and other enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University, 1978, p. 87-115, p. 90.

O princípio do contexto não só exerce um papel fundamental em *Os fundamentos* como também é considerado como um dos princípios mais importantes de Frege. Tendo influenciado filósofos subseqüentes, tais como Wittgenstein, Quine e Davidson. O princípio do contexto desempenhou historicamente o papel de contribuir para estabelecer a fronteira entre o conteúdo semântico (público e objetivo) e o conteúdo psicológico (privado e incomunicável) das expressões lingüísticas. Frege foi pioneiro em atribuir um papel privilegiado à proposição em análise semântica – um privilégio que perdeu força nas obras posteriores, devido a sua caracterização das frases como um tipo especial de nomes complexos, mas que perdurou na filosofia da linguagem e mesmo na lingüística posteriores.

Temos, de fato, muitas evidências para considerarmos este princípio como fundamental para o desenvolvimento do projeto logicista de Frege. No entanto, apesar de inúmeras evidências nos conduzirem a essa interpretação, outras tantas nos levam a duvidar disso.

Apesar da notória importância em *Os fundamentos*, não há consenso acerca do uso do princípio do contexto nesta obra. Como formulado em *Os fundamentos*, diz-nos muito pouco e as formulações que surgem no decorrer do livro não parecem exercer o mesmo papel. A polêmica é ainda maior no que diz respeito à manutenção nas outras obras.

Como o título de nosso trabalho promete, faremos uma análise sistemática desse princípio, tendo em vista que o papel exercido por ele no projeto de Frege é muito polêmico. Há diversas interpretações sobre seu uso em *Os fundamentos*. É apenas nesta obra que o princípio aparece explicitamente. A polêmica é ainda maior em torno da questão de seu uso em outras obras, já que ele não aparece explicitamente em nenhuma delas.

Para conduzir nosso objetivo, dividimos nossa dissertação em três capítulos:

No primeiro momento, achamos importante usarmos o próprio princípio do contexto como um método de análise para a condução da investigação. Assim, antes de começarmos a análise sistemática propriamente dita – seguindo o espírito metodológico do princípio – daremos uma visão geral do que veio a ser conhecido como o projeto logicista de Frege, pois não poderíamos analisar o princípio isoladamente, fora do contexto do projeto fregeano.

Para compreendermos melhor o empreendimento de Frege, começaremos, no primeiro capítulo desta dissertação, por analisar o contexto histórico no qual estava inserido e, em seguida, faremos uma análise mais detalhada. Para efeitos didáticos, dividiremos esta análise em quatro períodos distintos. Através de uma leitura das principais obras de Frege, pretendemos caracterizar cada um dos períodos.

No segundo capítulo, aproximar-nos-emos mais da questão central deste trabalho: a utilização do princípio do contexto por Frege segundo a literatura secundária. A análise sistemática que prometemos fazer resulta exatamente da questão de que parece não haver consenso acerca desse uso. O papel desse princípio na filosofia de Gottlob Frege, de fato, tem sido alvo de muita discussão. Apesar de ser consenso que ele exerce um papel importante em *Os fundamentos*, mostraremos que isso não se revela igualmente quanto ao uso que Frege faz do princípio do contexto nessa mesma obra.

A sistematização a que nos propomos aqui é apenas para fins didáticos. É claro que ela não é uma disjunção forte. As interpretações do princípio do contexto não se excluem, elas muitas vezes se entrecruzam. Destacaremos alguns intérpretes em cada abordagem, apenas pela questão da ênfase dada pelo comentador e não porque ele rejeita as demais.

Neste capítulo, faremos uma análise sistemática do uso do princípio do contexto por Frege em *Os fundamentos*, segundo a literatura secundária. O papel do princípio do contexto nesta obra é muito controverso, uma vez que este princípio como formulado nos diz muito pouco e as formulações que aparecem no decorrer do livro não parecem exercer um papel homogêneo.

E, finalmente, analisaremos outra questão também relacionada ao princípio do contexto, que é a de seu uso nas obras posteriores. Este princípio, considerado como um dos mais importantes de Frege – ao contrário dos outros dois princípios, formulados na introdução desta obra –, não é citado explicitamente em outros trabalhos.

Entre os comentadores não há concordância acerca da manutenção ou não do princípio do contexto nos escritos posteriores. Há alguns comentadores que defendem uma reformulação deste princípio nas demais obras de Frege; outros, entretanto, argumentam que Frege, de fato, o abandona. Dessa forma, há três possibilidades de formular a questão: (1) o princípio do contexto não exerce um papel importante em *Os fundamentos*; (2) Frege ainda adere ao princípio do contexto nas obras posteriores; e (3) a estrutura de pensamento sobre a filosofia da aritmética sofreu uma mudança radical de um livro para o outro, não havendo unidade em suas obras.

Poderíamos sintetizar esta discussão dividindo os intérpretes em dois grupos distintos, a saber, os comentadores que defendem a tese do abandono do princípio do contexto nas obras posteriores a *Os fundamentos* e os comentadores que defendem a tese da manutenção deste princípio. Não há referência clara nem negação explícita em qualquer escrito de Frege após *Os fundamentos*.

A importância do princípio do contexto no projeto logicista de Frege é, de fato, uma questão polêmica. Este fato dá margem a uma diversidade de interpretações. Pretendemos, no decorrer da presente dissertação, fazer uma taxionomia das questões referentes ao princípio do contexto e apresentar algumas das posições dos comentadores de Frege, sem pretender, contudo, esgotar esse debate tão frutífero.





## I

### O PROJETO LOGICISTA DE GOTTLOB FREGE

O objetivo deste capítulo é dar uma visão geral do que veio a ser conhecido como o projeto logicista de Frege, a saber, a fundamentação da aritmética em bases puramente lógicas. Os conceitos da aritmética seriam derivados de conceitos lógicos através de definições; os teoremas derivados de axiomas lógicos através de deduções puramente lógicas, isto é, as verdades da aritmética seriam traduzidas em verdades da lógica.

Através de uma leitura das principais obras de Frege, tentaremos traçar o panorama geral de seu projeto. Sabemos que a princípio isso excede os limites de um capítulo de dissertação. Mas nosso objetivo aqui é mais modesto, não se trata de discutir em detalhe cada uma delas, mas, de cada, retirar o que é relevante para entender o projeto logicista. Para efeitos didáticos vamos dividir nossa análise em cinco períodos distintos, cada um deles com uma obra-chave para caracterizar o período.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Cf. KENNY, Anthony. Mill to Wittgenstein. In: idem. *The Oxford History of Western Philosophy*. New York: University Press, 2000. p. 254-292.

O primeiro período é marcado pela obra *Begriffsschrift*,<sup>6</sup> publicada em 1879, obra em que autor apresenta pela primeira vez sua nova lógica e sintetiza as pesquisas sobre operações de negação e implicação e sobre os conceitos de identidade e quantificador universal, além de desenvolver uma teoria lógica das séries. Ao segundo período corresponde *Os fundamentos* (1884), em que Frege ocupa-se com o esboço informal da definição lógica de número e com a demonstração lógica das leis fundamentais da aritmética a partir de leis lógicas. O terceiro período é marcado pela publicação de três artigos – *Função e conceito* (1891), *Sobre o sentido e a referência* (1892) e *Conceito e objeto* (1892) – em que Frege desenvolve alguns conceitos que já estavam presentes em *Os fundamentos*. Estes artigos inauguram a moderna disciplina filosofia da lógica. Ao quarto período, corresponde a publicação dos dois volumes dos *Die Grundgesetze der Arithmetik*<sup>7</sup> (1893-1903). Nessa obra, Frege empreende a construção formal da aritmética em bases puramente lógicas. Seus propósitos não se concretizaram, seu sistema mostrou-se inconsistente como apontara Russell, em 1902, com a contradição que ficou conhecida como o ‘paradoxo de Russell’. Inicia-se então o quinto período em que procurou solucionar o problema, mas acaba desistindo e volta-se para outros assuntos. Entre 1918 e 1923 Frege publicou três artigos: *O pensamento*, *A negação* e *Pensamentos compostos*.

Dessa forma, apresentaremos aqui o contexto histórico no qual estava inserido o projeto fregeano e descreveremos os cinco períodos deste projeto, visando a situar o leitor em nossa análise sistemática do papel exercido pelo princípio do contexto no desenvolvimento do projeto logicista.

---

<sup>6</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Begriffsschrift*. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, 1879; reedit. In: *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Angelelli org.). Hildesheim: Zürich, New York, George Olms Verlag, 1998. p. XI. Não há tradução dessa obra em língua portuguesa. Os termos *Ideografia* (Paulo Alcoforado) e *Conceitografia* (Luís Henrique L. dos Santos) têm sido utilizados como tradução de *Begriffsschrift*. A expressão *Begriffsschrift* traduzida literalmente significa escrita conceitual ou notação conceitual. Jourdain em um artigo de 1912 traduz o título como *Ideography* e Frege ao tomar conhecimento desta tradução a acha pertinente. Austin traduz o título desta obra para o inglês como *Concept Writing*. Por não haver consenso quanto à tradução mais adequada, nesta dissertação, conservaremos o termo alemão *Begriffsschrift*. E manteremos, conforme a recomendação de Beaney, 1997, o termo alemão sem tradução, mas com a convenção de distinguir o texto da notação conceitual pelos artigos “o” e “a” respectivamente, ou outros termos que designem o seu gênero.

<sup>7</sup> Cf. idem. *Die Grundgesetze der Arithmetik*, begriffsschriftlich abgeleitet. Vol. I, II. (1893, 1903). George Olms Verlag, Hildesheim: Zürich, New York, 1998; Cf. idem. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Traduzido e editado por Montgomery Furth. Berkeley e Los Angeles: University of Califórnia Press, 1964. Não temos tradução portuguesa desta obra. Os comentadores de Frege de língua portuguesa geralmente traduzem como *As Leis Fundamentais da Aritmética*, mas por não haver ainda tradução estabelecida do título desta obra manteremos o título no original alemão.

## 1.1 O CONTEXTO HISTÓRICO

Para compreendermos melhor o projeto de Frege, precisamos primeiro analisar o contexto histórico no qual ele estava inserido. Os matemáticos de sua época desejavam fundamentar a matemática através de demonstrações mais rigorosas e definições mais precisas. Entre as diversas tendências na matemática no século XIX, uma das principais foi o movimento fundacionista. Muitos matemáticos exigiam um maior rigor nas definições dos conceitos matemáticos e nas provas dos teoremas. As definições de conceitos aritméticos tinham de ser explicados por meio de outros conceitos mais básicos. O movimento marcou também o rompimento entre a geometria e a aritmética. A geometria até então oferecia uma base relativamente segura para a organização da matemática. A partir de então há uma mudança da concepção dos matemáticos, eles passaram a considerar a aritmética como uma disciplina independente. No início do século XIX, já estava claro que a geometria havia encontrado seus limites enquanto disciplina fundadora da matemática; os números negativos, imaginários e os infinitesimais apresentavam sérias dificuldades de entendimento no quadro substancial da geometria. O que seria uma grandeza negativa, por exemplo? A expressão ‘arimetização’ reflete exatamente o esforço de vários matemáticos no século XIX em trocar a geometria pela aritmética como disciplina fundante, ou seja, eles caminhavam para o consenso de que, a partir dos números naturais, era possível fundamentar toda a matemática.<sup>8</sup>

Mesmo antes de Frege, os matemáticos em investigações da interdependência dos conceitos matemáticos já tinham mostrado – embora freqüentemente incapazes de precisar as definições – que todos os conceitos da aritmética são redutíveis aos números naturais. Por conseguinte, o principal problema considerado pelo logicismo foi a derivação dos números naturais de conceitos lógicos. O logicismo de Frege pretendia reduzir a aritmética à lógica, visto que, com a arimetização da análise, caso conseguisse seu intento, toda a matemática clássica seria reduzida à lógica. Para tornar precisa a tese de que os conceitos da Matemática são deriváveis de conceitos lógicos, devem-se especificar os conceitos lógicos empregados na derivação.<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup> Cf. NETO, Fernando Raul. O Projeto Logicista de Gottlob Frege. In: IV SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática, 2001, Natal. *Anais do IV SNHM* - Seminário Nacional de História da Matemática. Natal: Imprensa Universitária - UFRN, 2001. V. Único. p. 78-94.

<sup>9</sup> Cf. CARNAP, Rudolf. Os Fundamentos Lógicos da Matemática. In: BENACERRAF, Paul; PUTNAM, Hilary. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, 1964.

Para entendermos o alcance do projeto logicista e as dificuldades com as quais Frege iria se defrontar, mostraremos as duas alternativas que se apresentavam ao projeto fregeano. A opção do Formalismo entendia a matemática, e em particular a aritmética, simplesmente como um jogo formal com signos e regras (os conceitos primitivos e os axiomas de uma teoria, respectivamente) e signos sem significatividade alguma, isto é, sem representar objeto algum fora da teoria. Desse modo, as verdades de uma teoria seriam apenas formais, no sentido de redutíveis por dedução lógica a seus axiomas, jamais se constituindo como verdades materiais. A aplicação de uma teoria matemática ao mundo, segundo David Hilbert, o maior nome da corrente formalista, não seria da alçada dos matemáticos, eles deveriam se preocupar apenas com a sua consistência interna (ausência de contradições), não importando se elas se aplicam ou não ao mundo.

O intuicionismo, também chamado de construtivismo, se, por um lado, entendia que as proposições da matemática, e da aritmética em particular, eram verdades acerca do mundo, por outro, restringia epistemologicamente os objetos da matemática. Segundo os representantes deste movimento, os conceitos matemáticos são obtidos por construção mental através da intuição humana. Isto, porém, podava substancialmente a matemática. O conceito de infinito atual, por exemplo, fundamental para a matemática de hoje não pode ser obtido por construção na intuição.

Frege entra nessa discussão rejeitando cada uma dessas opções: o formalismo, por sua vacuidade material e o intuicionismo por limitar a matemática. Com seu projeto, Frege, podemos dizer, queria o melhor das duas correntes: a riqueza e a pujança da matemática que se descortinava no século XIX, com os formalistas, e a garantia de que as teorias matemáticas não eram abstratas ou simples jogos de fórmulas, mas verdades acerca do mundo como os intuicionistas.

## 1.2 O PRIMEIRO PERÍODO

No prefácio à segunda edição da *Crítica da razão pura*, Kant diz, referindo-se à lógica aristotélica: “Digno de nota ainda que até agora tampouco tenha podido dar um passo

adiante, parecendo, portanto, ao que tudo indica, completa e acabada”.<sup>10</sup> Para Kant, a lógica era um exemplo de disciplina que, em suas palavras, havia seguido “o caminho seguro da ciência”. No entanto, indo de encontro à opinião de Kant, a partir do século XIX, a lógica deu um passo adiante com os ingleses De Morgan, Hamilton, Boole e com o alemão Gottlob Frege que, com o *Begriffsschrift*, foi o responsável pelas alterações seminais no corpo da lógica clássica<sup>11</sup>.

Frege introduz na lógica clássica o cálculo de predicados, que contém a silogística aristotélica como uma de suas subpartes e torna, assim, operacional a formulação que os lógicos estóicos davam às fórmulas silogísticas, unificando em um único formalismo a lógica dos termos e a lógica das proposições, que haviam ficado separadas também em Boole. Após cerca de dois mil anos de história da lógica, a unificação efetuada por Frege desmente com os fatos a tese sustentada por Kant na *Crítica da razão pura*, de que nada de novo se poderia realizar em lógica formal depois de Aristóteles.

### 1.2.1 BEGRIFFSSCHRIFT

O *Begriffsschrift* é um texto relativamente curto, com cento e vinte quatro páginas, dividido em um prefácio e três partes. No prefácio, Frege expõe os objetivos gerais de seu projeto e de sua obra; na primeira parte explica o simbolismo; na segunda, utiliza o simbolismo explicado na parte anterior na construção de uma axiomatização – para o hoje chamado cálculo de predicados – através de nove axiomas; e, na última, examina o princípio de indução matemática, com o objetivo de definir logicamente a seqüência dos números naturais.<sup>12</sup>

<sup>10</sup> Merkwürdig ist noch na ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt hat tun Können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint. KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura*. In: Coleção *Os Pensadores*. São Paulo: Abril, 1983. p. 10; idem. *Kritik der reinen Vernunft*. Stuttgart: Reclam, 1985, p. VIII.

<sup>11</sup> A lógica clássica compreende, basicamente, o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais. Entre as características próprias da lógica clássica costuma-se colocar a obediência a alguns princípios lógicos fundamentais (as assim chamadas “leis fundamentais do pensamento”); são o princípio de identidade, o princípio de não-contradição, o princípio do terceiro excluído e o princípio da bivalência; a lógica clássica também não leva em consideração o tempo. Dessa forma, a lógica criada por Frege no *Begriffsschrift* também é clássica, pois, obedece a esses princípios.

<sup>12</sup> Cf. NETO, Fernando Raul. O *Begriffsschrift* de Gottlob Frege. *Studium Revista de Filosofia*, v. 3, n. 5, p. 70-85, 2000.

De um modo geral, podemos dizer que, enquanto matemático, Frege possui um único projeto: fundamentar a aritmética em bases puramente lógicas. Sua idéia inicial é que a linguagem natural não serve para isso, nas palavras dele:

Ao procurar atender esta exigência da forma a mais rigorosa possível, encontrei um obstáculo na inadequação da linguagem; quanto mais pesadas eram as expressões surgidas, quanto mais complicadas tornavam-se as relações, menos se conseguia da precisão exigida pelo meu objetivo. Desta necessidade surgiu a idéia da presente ideografia.<sup>13</sup>

Daí seu primeiro livro ser a criação de uma linguagem técnica para a fundamentação da aritmética. O título de seu livro já revela o objetivo: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* – não temos tradução brasileira ou portuguesa desta obra, mas uma possível tradução para o título desta obra seria: *Conceitografia, uma linguagem por fórmulas do pensamento puro modelada sobre a da Aritmética*.

Para executar tal empreendimento, de redução da aritmética à lógica, Frege necessitava de uma linguagem ou de uma notação que fosse suficientemente clara para que nas cadeias de deduções dos teoremas nada de estranho à prova pudesse entrar despercebido. Como vimos, essa linguagem não poderia ser a linguagem ordinária, pois é, segundo Frege, ambígua e inadequada e não serve para estabelecer uma dedução totalmente livre de lacunas. Assim, uma das razões que conduziram ao *Begriffsschrift* foi o desejo de construir uma linguagem precisa. Mais exatamente, uma linguagem em que os enunciados relevantes para a dedução lógica deixassem de admitir significação diversificada, como se dá com as expressões da linguagem cotidiana. No entanto, Frege não defende a superioridade de uma linguagem artificial sobre a linguagem natural, apenas sua superioridade quando usada para propósitos científicos e justamente por ser livre de ambigüidades. A ciência necessita de uma linguagem na qual os termos não variem de significado de acordo com o contexto. Para nosso uso cotidiano, ao contrário, a linguagem artificial é que se mostraria inadequada.

Tentando dar ao leitor uma primeira idéia dessa linguagem conceitual, Frege estabelece no prefácio do *Begriffsschrift* uma analogia entre sua *Begriffsschrift* e o microscópio, por um lado, e a linguagem cotidiana e o olho humano, por outro:

---

<sup>13</sup> Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdrucks doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. (FREGE, 1879, p. x)

O olho possui, pela amplitude de sua aplicação, pela mobilidade com que se adapta às diferentes circunstâncias, uma grande superioridade sobre o microscópio. Considerado como um instrumento óptico, ele mostra evidentemente muitas imperfeições, que normalmente passam despercebidas por conta de sua íntima relação com a vida mental. Mas, na medida em que os objetivos científicos colocam grandes exigências na precisão, o olho revela-se inadequado. O microscópio ao contrário, adapta-se perfeitamente a esses objetivos, mas exatamente porque é inútil para os demais.<sup>14</sup>

A linguagem comum, portanto, seria inadequada para exprimir com exatidão propriedades e relações lógicas. Uma dedução em linguagem comum contém lacunas e premissas implícitas que dificultam conclusões logicamente legítimas.

A matemática sempre foi devedora de uma linguagem técnica e poder-se-ia então argumentar que a lógica aristotélica supriria esta necessidade. No entanto, já na época de Frege, alguns estudiosos haviam notado que a lógica aristotélica não permitia formulações que seriam necessárias para uma adequada teoria da dedução. Eles perceberam que a maior parte das passagens de uma complicada demonstração matemática não podia ser justificada com o auxílio da lógica aristotélica. Afastando-se a probabilidade de que todas as demonstrações da matemática seriam incorretas, a conclusão que se impunha era a de que a lógica não devia estar adequada à matemática. Nasceu, assim, a idéia de erigir um sistema completo de lógica em que todas as deduções legítimas comparecessem sob a forma de regras explícitas.

A silogística aristotélica, por sua vez, também não atendia aos objetivos de Frege. Ela mostrava-se duplamente insuficiente. Primeiro, por ser incompleta, pois as relações e propriedades aritméticas seriam relações de propriedades lógicas muito mais complexas do que as que a silogística aristotélica seria capaz de representar. Em segundo lugar, esta última não é suficientemente formalizada, deixando-se contaminar pela imprecisão da linguagem comum. A lógica aristotélica só considerava predicados-atributo, como ‘homem’ ou ‘mortal’ sem trabalhar com predicados-relação. Mas são justamente esses predicados de relação que têm maior importância para as ciências e, em especial, para a matemática, devendo-se ressaltar que os predicados relacionais não são apenas os diádicos que fixam relações entre dois objetos (tal como se dá, digamos, com o predicado “maior do que”), mas predicados

<sup>14</sup> Faremos traduções livres das citações de obras que ainda não têm tradução em língua portuguesa. Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleich. Das Letztere hat durch den Auge vergleich. Das die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner inniger Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar. (FREGE, 1998, p. XI)

genéricos,  $n$ -ádicos, que fixam relações entre ‘ $n$ ’ objetos (onde  $n$  é um número natural maior que 2). A lógica aristotélica vale-se de premissas e de regras dedutivas em que surge uma das expressões “todos” ou “existe”; não se vale, porém, de premissas e conclusões em que “todos” ou “existe” compareçam mais de uma vez.

Poder-se-ia ainda argumentar – e os contemporâneos de Frege, de fato o fizeram – que seria desnecessária a elaboração de uma nova lógica. Pois, segundo eles, já existia uma linguagem formal, em voga, a de Boole, e a mesma já era suficiente para representar as leis do pensamento (ou da lógica).<sup>15</sup>

George Boole (1815-1864) introduziu em *The mathematical analysis of logic*<sup>16</sup> (1847) e em *The laws of thought*<sup>17</sup> (1854) uma nova notação simbólica em que foi possível representar os silogismos e os argumentos proposicionais. Embora a lógica proposicional e a lógica aristotélica tenham sido consideradas como rivais na história da lógica, no século XIX ambas foram aceitas como uma importante contribuição para o projeto geral de avaliação de inferências. Era uma visão comum que a lógica aristotélica fornecia um método para avaliar inferência cuja validade seria baseada na relação entre conceitos, enquanto a lógica proposicional fornece um método para avaliar inferências baseadas na relação entre proposições. Os dois métodos utilizam modos distintos de ver a representação, a construção das premissas e da conclusão da inferência.

Mas a técnica de Boole ainda envolve uma nítida separação entre os dois tipos de inferência. Sua notação pode representar a estrutura lógica que tem significado ou para lógica proposicional ou para a silogística aristotélica, no entanto, ela não pode representar a ambas simultaneamente. Um símbolo da notação, quando é usado na expressão de um silogismo, tem um significado que é diferente de quando é usado na expressão de um argumento proposicional. Para utilizarmos a técnica de Boole para avaliar um argumento, temos de decidir primeiro que tipo de argumento ele é e representá-lo de modo adequado. Conseqüentemente, para muitas inferências a notação não pode ser usada para representar todo o conteúdo que tem significado para uma inferência. Pois muitos argumentos válidos são uma combinação de um complexo de lógica proposicional e não proposicional e nestes casos a lógica de Boole seria insuficiente. Esta utiliza símbolos da aritmética ora no sentido habitual

<sup>15</sup> É importante mencionarmos que Frege não faz nenhuma referência a Boole no *Begriffsschrift*; isso porque, ele não o conhecia na época da publicação do seu primeiro livro e somente depois das críticas ao *Begriffsschrift*, ele se familiarizou com a lógica booleana.

<sup>16</sup> Cf. BOOLE, George. *The Mathematical Analysis of Logic*, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning. Originally published in Cambridge by Macmillan, Barclay, & Macmillan, 1847. Reprinted in Oxford by Basil Blackwell, 1951.

<sup>17</sup> Cf. idem. *An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Originally published by Macmillan, London, 1854. Reprint by Dover, 1958.



ora em sentido lógico. Dessa forma, se associada à aritmética a lógica de Boole leva a equívocos. Sua lógica só pode ser usada quando totalmente separada da aritmética.

O que os contemporâneos de Frege não entenderam, mas que já estava claro em sua cabeça, é que a linguagem natural assim como a lógica de Aristóteles e a de Boole eram insuficientes para a realização do projeto. Diante da incompreensão de seus contemporâneos, Frege precisou explicar sua *Begriffsschrift* e demonstrar sua superioridade em relação às lógicas anteriores a sua. Ele publica dois artigos: *Aplicações da ideografia*,<sup>18</sup> onde ele oferece aplicações de sua *Begriffsschrift*; e *Sobre a finalidade da ideografia*,<sup>19</sup> neste artigo Frege responde às críticas de Schröder,<sup>20</sup> compara seu trabalho com o de Boole e o reconhece como superior ao do inglês. A notação de Boole, apesar de pretender representar ambos os sistemas de lógica, ainda envolve uma nítida separação entre eles. A contraposição entre estes dois sistemas lógicos se estendeu por mais de dois mil anos, com algumas tentativas de unificação – como a tentativa empreendida por Boole – jamais plenamente bem-sucedidas até a síntese efetuada por Frege, responsável pela grande virada lógica do século XX.

Não vamos acompanhar com o leitor o texto de Frege parágrafo por parágrafo, mas ressaltaremos algumas inovações da lógica que influenciaram toda a tradição lógica posterior. Frege inicia o texto procurando caracterizar o tipo de verdade que é veiculada pelos juízos aritméticos. Ele afirma que há duas formas de se estabelecer a verdade de uma proposição, a saber: perguntando por qual caminho a proposição em questão foi estabelecida, ou seja, o processo epistemológico; ou estabelecendo o processo em que elas podem ser justificadas. A primeira, como ele mesmo coloca, pode ser respondida diferentemente por diferentes pessoas, pois a verdade é estabelecida a partir da gênese do conhecimento da proposição. A segunda é mais definitiva, pois a verdade é estabelecida a partir da natureza interna da proposição. No *Begriffsschrift*, sua preocupação é apenas com a segunda forma de se estabelecer a verdade, ou seja, preocupa-se em apresentar a prova ou justificção do conhecimento da verdade de uma proposição.

A *Begriffsschrift* contém um conjunto bem determinado de regras de dedução e de axiomas lógicos supostamente evidentes. Na segunda parte do livro, intitulada *Representação*

<sup>18</sup> Cf. FREGE, Gottlob. Anwendung der Begriffsschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft für das Jahr 1879, p. 29-33; reedit. In: *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Angelelliorg.); Cf. idem. Aplicações da Ideografia. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978. p. 133-138.

<sup>19</sup> Cf. Idem, Über den Zweck der Begriffsschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft für das Jahr 1882 (1883), 1-10; reedit. In: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*; Cf. Idem, Sobre a Finalidade da Ideografia. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978. p. 141-152.

<sup>20</sup> Cf. SCHRÖDER, Ernest. Review of Frege's Conception Notation. 1980.

e dedução de alguns juízos do pensamento puro, (*Darstellung und Ableitung einiger Urtheile des reinen Denkens.*) Frege faz uma grande dedução com sessenta e oito proposições com nove axiomas. Com os seis primeiros axiomas ele desenvolve o cálculo proposicional; com o sétimo e o oitavo, o cálculo de predicados com identidade; e com o nono axioma desenvolve o cálculo de predicados.<sup>21</sup> Com o *Begriffsschrift*, torna-se gramaticalmente impossível construir deduções ilegítimas e toda legitimidade pode ser facilmente constatada, na medida em que o conjunto de passagens permitidas é pequeno e as regras que as comandam são formais. Portanto, podemos considerar o *Begriffsschrift*, simultaneamente, como uma língua característica e como um cálculo lógico.

De acordo com a maioria dos lógicos anteriores a Frege, não poderia existir uma representação adequada de um juízo sem uma distinção entre sujeito e predicado. Frege substitui essa representação por outra mais adequada a seus propósitos: função e argumento, conceitos retirados da matemática que permitem a formalização de proposições que não poderiam ser formalizadas através da lógica aristotélica. O objetivo de Frege com essa alteração é distinguir a forma lógica e a forma gramatical de uma proposição. Proposições como “Frege escreveu o *Begriffsschrift*” e “O *Begriffsschrift* foi escrito por Frege” diferem gramaticalmente, pois há uma inversão entre seus sujeitos e predicados. Mas, apesar da alteração gramatical, o conteúdo é mantido. Elas obedecem ao princípio de substitutibilidade, isto é, um termo pode substituir o outro em uma premissa sem afetar a validade do raciocínio. O que interessa em uma dedução é o conteúdo conceitual (*begrifflicher Inhalt*).

Segundo Frege, toda proposição admite um processo de decomposição que a reduz a uma expressão incompleta, comportando um ou mais lugares vazios e uma ou mais expressões que podem preencher esses lugares a fim de recompor a proposição. Assim, ‘quatro é um número’ decompõe-se em ‘quatro’ e ‘( ) é um número’. A primeira expressão é completa, tem como significado um objeto; a segunda é incompleta, tem como significado uma função. No caso de a expressão decomposta ser uma proposição, como no exemplo acima, o valor da função é um valor de verdade. Os valores de verdade são o ‘verdadeiro’ e o ‘falso’. Assim, a função ‘( ) é um número’ para o argumento 4 tem como valor de verdade, o ‘verdadeiro’. E para o argumento ‘Recife’, por exemplo, tem como valor de verdade o ‘falso’. Para Frege, uma função que tem para qualquer argumento um valor de verdade como valor, isto é, o ‘verdadeiro’ ou o ‘falso’ como valor, é um ‘conceito’. O resultado dessa distinção lógica é notável para a história da lógica. Frege abandona a centralidade da análise feita em

---

<sup>21</sup> Cf. NETO, 2000, p. 212.

termos de sujeito e predicado, que caracteriza a lógica aristotélica; em seu lugar introduz a distinção entre argumento e função, ou seja, entre objeto e conceito.

Outro avanço em relação às lógicas anteriores é a invenção dos quantificadores.<sup>22</sup> Como vimos, a lógica aristotélica já utilizava expressões para a generalidade, tais como ‘todo’ e ‘algum’, entretanto, não oferecia um tratamento para as chamadas proposições de múltipla generalidade, ou seja, proposições em que ‘todos’ ou ‘algum’ compareçam mais de uma vez.

A lógica aristotélica estava, assim, interessada nas relações entre os termos das premissas e as conclusões de um raciocínio. O raciocínio era tipicamente enquadrado na forma transmitida por Aristóteles como um “silogismo”. Os estóicos, por outro lado, consideravam central para a lógica a relação condicional. Para eles, portanto, as premissas silogísticas deveriam ser lidas não como enunciados complexos, mas na forma condicional “se... então”. A história da lógica ocidental foi marcada pelo antagonismo entre dois estilos e dois sistemas: por um lado, a lógica aristotélica dos termos e, por outro, a lógica estóica dos enunciados (ou as proposições).<sup>23</sup> Frege modifica este panorama com a sua lógica exposta no *Begriffsschrift*

### 1.3 O SEGUNDO PERÍODO

No segundo período, que corresponde a *Os fundamentos*, Frege ocupou-se com uma apresentação informal e em linguagem acessível, de seu projeto logicista; isto iria exigir um esboço informal da definição lógica de número e de como as leis fundamentais da aritmética podem ser geradas de leis lógicas. Na verdade, a publicação de *Os fundamentos* deve-se, em grande parte, à fraca recepção do *Begriffsschrift*. Frege teria sido aconselhado por um amigo a reapresentar suas idéias principais em linguagem menos técnica. Vista de hoje, a tarefa parece ter sido cumprida à perfeição, pois, segundo Beaney, um dos leitores mais argutos de Frege, *Os fundamentos* é uma obra-prima filosófica.

---

<sup>22</sup> O símbolo para o quantificador universal utilizado por Frege no *Begriffsschrift* é diferente do utilizado atualmente. E o quantificador existencial não tem um símbolo próprio, exprimindo-se em função do quantificador universal.

<sup>23</sup> Cf. STEGMÜLLER, Wolfgang. Pesquisas relativas à lógica e aos fundamentos da matemática. In: idem. *A Filosofia Contemporânea*. V. I. EPU. São Paulo: 1977. p. 330-342.

### 1.3.1 OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA

*Os fundamentos da aritmética* (*Die Grundlagen der Arithmetik*)<sup>24</sup> possui cento e nove parágrafos divididos em uma introdução e cinco partes – a última, a conclusão (§§87-109). Nos §§1-4, Frege apresenta os motivos que o conduziu às investigações. Nas três primeiras partes (§§5-54), Frege apresenta e critica a opinião de outros autores acerca do conceito de número natural e da aritmética como um todo. Ele apresenta a sua tese apenas na quarta parte do livro (§§55-86). Para fins didáticos, no entanto, dividiremos *Os fundamentos* em duas partes: a primeira (Introdução até §44) consideramos negativa em seus objetivos; pois, nesses parágrafos, Frege apresenta e refuta uma série de posições referentes à natureza das proposições da aritmética. A segunda (§§45-109) consideramos positiva, uma vez que Frege, a partir de uma análise crítica das posições de outros pensadores acerca da natureza das proposições numéricas, apresentada nos primeiros parágrafos, constrói sua própria concepção de número. Mas, como dissemos anteriormente, esta divisão é puramente didática, pois, podemos perceber que a primeira parte também possui um aspecto positivo: Frege ao refutar uma determinada opinião já estabelece a sua. Por exemplo, nos §§5-17, ele argumenta implicitamente em favor da demonstrabilidade das fórmulas numéricas; também podemos notar seu apreço pela definição dos números naturais de Leibniz, nela cada número é definido a partir do que o precede e, assim, o conjunto infinito dos números é reduzido ao um e ao aumento em um.

Na introdução, Frege apresenta os três princípios fundamentais que, segundo ele próprio, foram seguidos firmemente em suas investigações. No §3, ele expõe os motivos filosóficos que o conduziram em suas pesquisas. Ele questiona qual a natureza das verdades da aritmética. Elas seriam *a priori* ou *a posteriori*, sintéticas ou analíticas? E para fazer esta avaliação, ele diz que não se deve levar em consideração as condições psicológicas, fisiológicas e físicas, mas apenas aquilo sobre o que se assenta mais fundamentalmente a justificação de ser ela tomada como verdadeira. Frege retira, assim, a questão do domínio da psicologia e a remete ao domínio da lógica, buscando demonstrar as proposições da aritmética, antes tidas como auto-evidentes, retornando às verdades primitivas. Se neste

---

<sup>24</sup> Há duas traduções em língua portuguesa, uma tradução portuguesa de Antônio Zilhão e uma tradução brasileira publicada na Coleção *Os Pensadores* de Luís Henrique dos Santos. Doravante utilizaremos a tradução brasileira, para mantermos a homogeneidade nas citações.

retorno só encontramos leis lógicas gerais e definições, teremos uma verdade analítica. Se, porém, nesse percurso tivermos que nos utilizar de verdades que não são de natureza lógica geral, mas que remetem a um domínio científico particular, a proposição é sintética. As verdades *a posteriori* precisam em sua demonstração recorrer a verdades de fato, ou seja, indemonstráveis, e sem generalidades, implicando enunciados acerca de objetos determinados. E as verdades *a priori*, ao contrário, têm sua demonstração conduzida apenas a partir de leis gerais que não admitem nem exigem demonstração. A distinção de analítico e sintético apresentada por Frege representa uma mudança em relação à dicotomia kantiana. Para Kant, uma proposição é analítica se e somente se o predicado está contido no sujeito, de outra forma ele é sintético.

A distinção de Frege baseia-se na demonstração das proposições: se a demonstração inclui apenas leis lógicas gerais e definições, então a proposição é analítica; se a demonstração inclui alguma lei que não possua absoluta generalidade, ela é sintética. Segundo Frege, Kant esteve perto dessa concepção quando tentou relacionar a verdade dos juízos analíticos com o princípio de não-contradição, mas ele usou uma concepção de lógica demasiadamente estreita. Quando considerou a possibilidade do conceito de predicado está ou não contido no conceito do sujeito de um juízo, Kant usou um critério que é apenas aplicável aos juízos universais afirmativos do esquema aristotélico. E isto porque nos juízos singulares e existenciais não há nenhum conceito do sujeito. A distinção kantiana de *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, diz respeito ao conteúdo de um juízo, ou seja, se o conceito do sujeito está ou não contido no conceito do predicado. Mas, para Frege: “Tem-se em geral que distinguir a questão de como chegamos ao conteúdo de um juízo da questão do que justifica a nossa asserção”.<sup>25</sup> Assim, a distinção fregeana de *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, não se refere ao conteúdo de um juízo, mas a sua justificação. Frege está consciente da ampliação em *Os fundamentos* da classe das verdades analíticas, apesar de sua consideração em uma nota de rodapé do §3: “Não pretendo naturalmente introduzir com isto um novo sentido, mas apenas captar o que autores anteriores, especialmente Kant, visaram.”<sup>26</sup>

Como já havíamos dito, dividimos *Os fundamentos* em duas partes. A primeira, que vai da introdução até §44, consideramos negativa em seus objetivos. Nesses parágrafos, Frege apresenta e refuta uma série de posições referentes à natureza das proposições da aritmética. Segundo Frege, no §45:

<sup>25</sup> So hat man allgemein die Frage, wie wir zu dem Inhalte eines Urteils kommen, von der zu trennen, woher wir die Berechtigung für unsere Behauptung nehmen. (FREGE, 1983, p.204; FREGE, 1995, p. 27).

<sup>26</sup> Ich will damit natürlich nicht einen neuen Sinn hineinlegen, sondern nur das treffen, was frühere Schriftsteller, insbesondere Kant, gemeint haben. (FREGE, 1983, p. 204 ; FREGE, 1995, p. 27).

O número não é, da mesma maneira que a cor, o peso e a dureza, abstraído das coisas, não é, no mesmo sentido, uma propriedade das coisas. Resta a questão de saber sobre o que algo é enunciado por meio de uma indicação numérica. O número não surge por anexação de uma coisa a outra. Nem a doação de um nome após cada anexação faz alguma diferença. As expressões “pluralidade”, “conjunto” e “multiplicidade” não são, por seu caráter indeterminado, apropriadas a colaborar na definição de número.<sup>27</sup>

Na primeira parte de *Os fundamentos*, conhecida como a *pars destruens* (a parte destrutiva), Frege critica as posições dos empiristas e dos lógicos psicologistas acerca do conceito de número cardinal.

A primeira perspectiva a ser submetida à análise, nos §§21-25, é o ponto de vista do empirismo, segundo o qual os números seriam propriedades das coisas exteriores. Frege mostra que, em primeiro lugar, o número pode ser aplicado a todas as espécies de coisas e não apenas a corpos físicos e que, em segundo lugar, os mesmos aglomerados de objetos físicos podem ser descritos em termos de diferentes números, não existindo um modo característico de composição desses aglomerados.

A segunda perspectiva analisada, nos §§26-27, é a dos lógicos psicologistas, que consideram não existir o número *realiter* nas coisas mesmas, mas ser este antes uma idéia ou representação mental, a qual se encontraria dependente da forma particular de consideração pela consciência dos objetos que se lhe apresentam. Contra esta tese, opõe Frege o caráter inaceitável das conseqüências a que daria origem. O número teria que ser considerado como algo subjetivo, suscetível de ser conhecido por meios psicológicos.

Finalmente, no §28, ele considera também a perspectiva segundo a qual o número consistiria numa coleção de unidades. A sua argumentação contra esta posição baseia-se no caráter impreciso e indefinido do conceito de unidade. Se, como se verifica em alguns casos, o termo unidade for encarado como designando qualquer coisa exterior suscetível de ser contada, então não haverá qualquer distinção entre os conceitos de coisa e unidade e nos encontraríamos novamente na perspectiva empirista. Por outro lado, o recurso aos conceitos de coleção, conjunto, pluralidade, etc, para caracterizar o número excluiria dos limites desta definição o 0 e o 1. E se os números fossem concebidos como predicados cairíamos no

---

<sup>27</sup> Die Zahl ist nicht in der Weise wie Farbe, Gewicht, Härte von den Dingen abstrahiert, ist nicht in dem Sinne wie diese Eigenschaft der Dinge. Es blieb noch in die Frage, von wem durch eine Zahlangabe etwas ausgesagt werde. Die Zahl ist nichts Physikalisches, aber auch nichts Subjektives, keine Vorstellung. Die Zahl entsteht nicht durch Hinzufügung von Ding zu Ding. Auch die Namengebung nach jeder Hinzufügung ändert darin nichts. Die Ausdrücke “Vielheit”, “Menge”, “Mehrheit” sind wegen ihrer Unbestimmtheit ungeeignet, zur Erklärung der Zahl zu dienen. (FREGE, 1983, p. 238; FREGE, 1995, p. 79-80)

absurdo lingüístico de atribuir a objetos, juntamente com outras propriedades físicas – como a dureza, a cor, a forma – à propriedade de ser ‘um’, por exemplo.

Grosso modo, a idéia de Frege é natural. As críticas dele são bem encaminhadas, pois, se os números são lógicos, eles não podem ser nem empíricos nem subjetivos. Por isso, a rejeição de Frege às duas soluções clássicas, para as quais os objetos matemáticos ou seriam empíricos (Stuart Mill), ou subjetivos (os lógicos psicologistas do século XIX). Essas soluções, segundo ele, não atendem ao que ele vê como característico da Matemática, a objetividade e a atemporalidade das suas verdades.

Depois de apresentar as suas críticas às concepções de outros autores a respeito da natureza das proposições da aritmética, a partir do §45 Frege inicia o que chamamos parte construtiva de sua obra, onde ele apresenta a sua definição dos números naturais. A princípio parece haver uma quebra em sua argumentação, mas na verdade a sua tese emerge implicitamente como resultado da sua crítica minuciosa as demais teses já apresentadas.

Nessa obra Frege leva a cabo o passo fundamental de seu projeto de reduzir a teoria dos números à lógica, ou seja, estabelecer uma definição de número, formalmente correta e frutífera, usando apenas conceitos puramente lógicos. Segundo Matthias Schirn,<sup>28</sup> Frege empreende três tentativas de definição dos números, sendo que as duas primeiras têm uma função heurística, isto é, as duas primeiras são uma espécie de preparação para a terceira definição, de caráter conclusivo definitivo.

Na primeira tentativa ele amplia a definição leibniziana dos números individuais, apresentando a definição do 0 e do 1. Frege argumenta que os termos numéricos podem ocorrer em uma atribuição numérica de dois modos diferentes: ou substantivamente ou adjetivamente. O próprio Frege, reconhece que termos numéricos podem ocorrer adjetivamente no discurso ordinário. No entanto, ele acredita que apenas o primeiro tipo de ocorrência deve ser levado em consideração, enquanto o uso adjetivo de numerais dissimula a natureza real dos números. A primeira proposta, apresentada no §55, consiste em definir os números cardinais adjetivamente, isto é, como parte de conceitos de segunda ordem. Seu principal argumento para proceder dessa maneira tem como ponto de partida a suposição de que os números devem ser objetos e não propriedades de algum tipo. A análise lógica dos enunciados numéricos em *Os fundamentos* leva ao resultado de que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito. Frege rejeita a suposição de que os números são

---

<sup>28</sup> Cf. SCHIRN, Matthias. O Contexto Proposicional e a Questão do Significado de Termos Singulares Abstratos. Campinas: *Manuscrito*. XVI (2): 1- 4, OUTURO, 1993.

conceitos de segunda ordem, pois, recorrendo a critérios sintáticos, ele caracteriza os números como objetos autônomos. Frege apela, especialmente no §57, para o fato de que termos numéricos ocorrem como termos singulares no discurso ordinário da aritmética para argumentar que os números devem ser tratados como objetos. Frege defende que os números são objetos apoiando-se em evidências da linguagem, tais como: os numerais são antecidos por artigo definido e ocorrem em sentenças de identidade, como equações – o artigo definido indica existência e unicidade e a relação de identidade é, segundo Frege, uma relação de primeira ordem, ou seja, uma relação sob a qual caem pares de objetos – a determinação dos números como objetos autônomo deve excluir o uso de um termo numérico como predicado ou atributo, como Frege explica no §60 de *Os Fundamentos*. Só podemos empreender uma caracterização geral da identidade numérica se fixarmos as condições de verdade de uma equação numérica. Dessa forma, estaremos justificados do ponto de vista científico, a associar a um número individual um termo numérico como o seu nome próprio.

O argumento de Frege para a rejeição da primeira tentativa de definição já pressupõe o que ele pretende mostrar, a saber, que os números devem ser definidos como objetos. Na verdade, esta forma de definir os números, estabelece apenas o sentido da forma de expressão “para o conceito G vem o número n”, mas não torna ainda possível por este processo a distinção do 0 e do 1 como objetos reconhecíveis. Esta questão suscita o problema Júlio César, a saber, “... para algum conceito virá o número Júlio César ou se este conhecido conquistador da Gália é ou não um número”,<sup>29</sup> ou seja, se os números fossem definidos como predicados de segunda ordem, nós não teríamos meios para decidir quando ‘a’ é o número que pertence ao conceito ‘F’, e ‘b’ é também o número que pertence a ‘F’, se ‘a’ é idêntico a Júlio César ou não.

A segunda tentativa de definição, que começa no §62, utiliza o “Princípio de Hume” – “Quando dois números são combinados de tal modo que um tenha sempre uma unidade correspondente a cada unidade do outro pronunciemo-los iguais.”<sup>30</sup> – que esclarece a questão epistemológica relativa à maneira como nós apreendemos um determinado número e como o reconhecemos como sendo o mesmo.

Assim, Frege empreende a sua terceira definição, essa definitiva. Na teoria de Frege a única maneira de se indicar um número individual é falar dele como sendo o número que cai sob um conceito. Mas a sua intenção é mostrar que a aritmética é um desenvolvimento da

<sup>29</sup> FREGE. 1983, p. 80.

<sup>30</sup> Wenn zwei Zahlen so Kombiniert werden, daß die eine immer eine Einheit hat, die jeder Einheit der andern entspricht, so geben wir sie als gleich an. (FREGE, 1983, p. 248; FREGE, 1995, p. 94-95)



lógica e, por isso, Frege não pode introduzir os números individuais por referência a conceitos empíricos como, por exemplo, dizendo que 5 é o número que cai sob o conceito ‘continente’ e 12 o número que cai no conceito ‘apóstolo’. Além disso, a referência aos conceitos empíricos não seria uma garantia da existência de uma sucessão infinita de números, como a que precisamos para o desenvolvimento da aritmética. É importante, por isso, que Frege defina os números individuais referindo-se apenas a conceitos provenientes da própria lógica. Assim, tomando o 0 como primeiro ponto da sucessão, Frege apresenta o seguinte esquema:

0 é o número que pertence ao conceito ‘não idêntico a si próprio’;

1 é o número que pertence ao conceito ‘idêntico ao zero’;

2 é o número que pertence ao conceito ‘idêntico ao zero e ao 1’ E assim sucessivamente.<sup>31</sup>

#### 1.4 TERCEIRO PERÍODO

Nos anos seguintes à publicação de *Os fundamentos*, Frege revê alguns dos seus conceitos. À reformulação desses conceitos corresponde o terceiro período do seu projeto. As mudanças empreendidas são discutidas em três artigos: *Função e Conceito*,<sup>32</sup> *Sobre o Sentido e a Referência*<sup>33</sup> e *Conceito e Objeto*.<sup>34</sup>

Sua contribuição, nesses artigos, centra-se essencialmente numa discussão visando a clarificar, as noções de ‘objeto’, ‘conceito’, ‘função’, ‘sentido’ e ‘referência’; além das relações que se dão entre as mesmas. Todas essas investigações tiveram profundas repercussões, embora muitos anos depois, sobre a Lógica e a Filosofia, e deram origem a uma nova filosofia da linguagem.

<sup>31</sup> Cf. KNEALE, William; KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 2.<sup>a</sup> ed.. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1980.

<sup>32</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Função e Conceito*. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978. p. 35-57.

<sup>33</sup> Cf. idem. *Sobre o Sentido e a Referência*. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978. p. 61-86.

<sup>34</sup> Cf. idem. *Sobre o Conceito e o Objeto*. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978. p. 89-103.

### 1.4.1 OS ARTIGOS DO TERCEIRO PERÍODO

A publicação dos artigos *Função e Conceito*, *Conceito e Objeto* e *Sobre o Sentido e a Referência*, tinha como objetivo tornar claras as noções de *Os fundamentos* que haviam ficado obscuras ou que não tinham sido usadas em seu sentido técnico.

A motivação de Frege para escrever o artigo *Função e Conceito* (1891) foi desenvolver as noções de *função* (*Funktion*), *conceito* (*Begriff*), *objeto* (*Gegenstand*), *sentido* (*Sinn*) e *referência* (*Bedeutung*). Este artigo tem como principal objetivo esclarecer a definição obscura de função que figura em seu livro *Begriffsschrift*, e apontar que conceitos são um tipo especial de função. Frege critica a definição de função usada pelos matemáticos, por estar sujeita à confusão quanto ao que significa e ao que é significado, Frege chama à atenção para o fato de que o argumento de uma função não é parte dela, mas combina-se com ela a fim de completá-la, a função é em si insaturada.

Neste artigo, Frege generaliza ainda mais a noção de função, opondo-a radicalmente à noção de objeto. Função e objeto são os dois aspectos fundamentais da realidade. Segundo Frege, tudo quanto existe ou é função ou é objeto. Esses dois aspectos classificatórios são irreduzíveis e excludentes: nada pode ser, simultaneamente, função e objeto. Os objetos são designados lingüisticamente mediante nomes, enquanto que as funções o são por meio de expressões funcionais. As funções se hierarquizam em funções de primeira ordem, aquelas cujos argumentos são objetos e as funções de segunda ordem, aquelas cujos argumentos são funções de primeira ordem, e assim por diante. Do mesmo modo, uma função pode ter um ou mais argumentos. Os conceitos são funções de um único argumento, cujos valores são valores de verdade. Neste mesmo artigo, Frege discute ainda as noções de argumento – entendendo-o como o objeto que completaria a função –, de valor (de uma função) e percurso-de-valor (de uma função).

Finalmente, Frege estabelece a conexão entre as noções de função e conceito. O valor de uma função como ' $x^2=1$ ' é sempre um valor de verdade; para os argumentos '1' e '-1' seu valor será o verdadeiro. Portanto, Frege diz que podemos propor que '1' e '-1' caem sob o conceito 'a raiz quadrada de 1'. Em *Função e Conceito* Frege dá um passo ainda mais importante para uma transição do uso puramente matemático de função para um uso universal. Por exemplo, 'x é uma capital', é uma função que para o argumento 'Recife' tem como valor de verdade o 'verdadeiro' e para 'Caruaru' o 'falso'. Assim a função acima citada é na verdade um conceito, pois tem como um argumento um valor de verdade.

Para explorar melhor estas noções, Frege explica que o sentido de uma sentença – isto é, uma expressão que afirma algo – é o pensamento que é seu conteúdo e que é em si determinado pelos sentidos das partes constituintes da sentença. A referência de uma sentença, por sua vez, é seu valor de verdade; assim a referência de todas as sentenças verdadeiras é o ‘verdadeiro’ e a referência de todas as sentenças falsas é o ‘falso’.

No ano seguinte à publicação do artigo *Função e Conceito*, Frege publica o seu famoso artigo *Sobre o Sentido e a Referência* (1892), onde a noção de conteúdo (*Inhalt*), sistematicamente empregada em obras anteriores, é decomposta em sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*). Neste trabalho ele procura mostrar que esta distinção se aplica aos nomes próprios, às sentenças, bem como a suas orações componentes. Na passagem inicial deste artigo Frege trata do problema da identidade, e no decorrer do artigo trata de questões, tais como: sentido e referência de nomes, de conceitos, de sentenças e de sentenças em discurso indireto. Mas a maior parte do texto é dedicado ao sentido e a referência de orações subordinadas. Frege faz uma taxionomia desse tipo de orações sem ser estritamente gramatical em suas análises.

Vejamos mais de perto as questões trabalhadas por Frege em *Sobre o Sentido e a Referência*. Este artigo surge quando Frege se defronta com o problema da identidade. Em sua passagem inicial, ele indaga se a identidade seria uma relação entre objetos ou entre sinais de objetos.

No *Begriffsschrift* ele assumira a segunda hipótese, ou seja, a de que a identidade é uma relação entre nomes ou entre sinais de objetos. Em tal caso, ‘ $a = b$ ’ afirmaria que o nome ‘ $a$ ’ e o nome ‘ $b$ ’ são nomes da mesma coisa. No entanto, em *Sobre o Sentido e a Referência*, Frege admite que essa análise não pode estar correta, pois o fato de que ‘ $a$ ’ é o nome para  $a$  e ‘ $b$ ’ é também um nome para  $a$  resulta de um acordo puramente arbitrário acerca dessas marcas ou sons, nada tendo a ver com as propriedades das coisas designadas. Também neste caso não se poderia explicar que ‘ $a = b$ ’ tenha valor cognitivo, ou seja, transmita informação sobre a coisa nomeada por ‘ $a$ ’ e ‘ $b$ ’.

Em virtude de tais dificuldades, Frege estabeleceu a distinção entre o sentido e a referência dos sinais. A referência seria o objeto denominado ou denotado pela expressão; já o sentido conteria o modo de apresentação pelo qual o sinal fornece seu significado. Por exemplo: sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as linhas que ligam os vértices de um triângulo com os pontos médios dos respectivos lados opostos; nesse caso, o ponto de intersecção de ‘ $a$ ’ e ‘ $b$ ’ é o mesmo que o de ‘ $b$ ’ e ‘ $c$ ’. Disso resultam diferentes designações para o mesmo ponto e essas designações (“ponto de intersecção de ‘ $a$ ’ e ‘ $b$ ’” e “ponto de intersecção de ‘ $b$ ’ e ‘ $c$ ’”) indicam diferentes

modos de apresentação e, conseqüentemente, a afirmação contém conhecimento efetivo. Desse modo, pode-se dizer que as duas expressões (“ponto de intersecção de ‘a’ e ‘b’” e “ponto de intersecção de ‘b’ e ‘c’”) têm a mesma referência, mas diferem quanto ao sentido. Analogamente, ‘estrela da manhã’ e ‘Vênus’ têm a mesma referência, mas diferem quanto ao sentido. Devido a essa diferença, a afirmação “Vênus é a estrela da manhã” transmite conhecimento verdadeiro, ao passo que “Vênus é Vênus” não o faz, a saber, o conhecimento de que a estrela que aparece pela manhã é a mesma que aparece à tarde. A questão da semântica fregeana fundamenta-se na igualdade de conteúdo, isto é, ‘a’, tendo o mesmo conteúdo conceitual que ‘b’, estes possuem sentidos diferentes, mas o mesmo referente.

A consideração de que o sentido de uma expressão ou de uma sentença não se confunde com o objeto de referência é o que torna possível explicar como os valores cognitivos de ‘a=a’ e de ‘a=b’ diferem. Numa afirmação do tipo ‘a estrela da manhã é a estrela da manhã’, teríamos uma relação do tipo ‘a=a’, em que o verbo ‘ser’ estabelece uma relação de identidades entre dois objetos. Neste caso, não há diferença nem distinção de sentidos. Já na afirmação ‘a estrela da manhã é a estrela da tarde’, temos uma relação do tipo ‘a=b’, pois dois sentidos diferentes são usados para referir um mesmo objeto. As relações do tipo ‘a=a’ são denominadas analíticas e são verdadeiras em qualquer circunstância. É uma verdade óbvia. Já a expressão ‘a=b’ remete a uma relação descritiva. Neste caso, o verbo ‘ser’ liga expressões com sentidos diferentes, estabelecendo uma relação de identidade a partir de elementos diferentes. Na relação ‘a=b’ existem extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas *a priori*. As expressões apresentadas nos exemplos acima têm um mesmo referente - o planeta Vênus - no entanto, existem dois modos de referir a este objeto: ‘estrela da manhã’ e ‘estrela da tarde’ são duas expressões com sentidos diferentes que remetem a um mesmo objeto.

Outra questão discutida por Frege neste artigo é o problema das orações subordinadas. Quando as palavras são usadas de forma costumeira fala-se de referência direta. No entanto, elas também podem ser usadas para referir a si próprias ou sobre o seu sentido. Isto ocorre quando recorremos às palavras de outrem para falarmos de um determinado assunto. As palavras de quem cita têm como referência as palavras citadas, sendo que somente as palavras trazidas de um outro contexto é que apresentam referência usual. Assim temos sinais de sinais. O outro caso que ocorre conforme estas circunstâncias é o da citação indireta, em que usamos o sentido das palavras de outrem, mas não as mobilizamos diretamente para o contexto de uso, ou seja, quando fazemos uma citação indireta, as palavras também não

apresentam uma referência costumeira. Outra noção também implicada no conceito de significado é a de representação, que trata do aspecto subjetivo do significado.<sup>35</sup>

Diante disso, pode-se dizer que a referência do nome próprio é o objeto que ocupa um lugar no mundo, já a representação é resultado do olhar individual sobre o objeto, o que faz com que esta tenha um caráter único e subjetivo. Entre a referência e a representação está o sentido, que não apresenta a mesma subjetividade da representação, mas também não é o objeto. O sentido é o que tem de estável, de compartilhável na língua. O caráter subjetivo da representação fez com que Frege a excluísse dos estudos semânticos, considerando se tratar de uma questão de interesse da psicologia. A discussão sobre este assunto aparece em seu texto com a finalidade de evitar que a representação seja confundida com o sentido ou com a referência.

Ao discutir o caso das sentenças assertivas completas, Frege afirma que o pensamento – sentido das sentenças – não pode ser a referência da sentença porque ele muda. Assim, ao sentido de uma sentença chamou de *pensamento* e à sua referência de *valor de verdade*. Tal condição traz o problema das sentenças que possuem sentido, mas que não têm uma referência. A forma como Frege resolve o problema criado pelos nomes relacionados ao mundo ficcional decorre de sua posição quanto ao problema da pressuposição existencial.

Por aspirar à construção de uma linguagem perfeita, que não apresentasse os mesmos problemas da linguagem natural, Frege deixa de fora de sua teoria aquilo que não pode ter uma referência no mundo, pois, parte do princípio de que a linguagem natural apresenta ambigüidades que poderiam ser eliminadas numa linguagem artificial, objetiva. Para construir essa linguagem perfeita, apela para um mundo em que nomes e sentenças, necessariamente, precisam ter uma referência.

Ao discutir as condições em que o valor de verdade de uma sentença pode ser mantido, Frege afirma que não ocorre alteração quando é possível trocar uma expressão por outra que tenha a mesma referência. Nestes casos, temos duas formas diferentes para falar de um mesmo referente, ou seja, os sentidos dessas expressões podem ser intercambiados sem que o seu valor de verdade seja alterado.

No entanto, essa condição sofre alteração quando tratamos das sentenças complexas em discurso direto e indireto, pois nesses casos não apresentam um pensamento independente. Isso ocorre porque uma sentença em discurso indireto remete a uma outra sentença e em discurso direto a um pensamento. Daí a conclusão de que nas sentenças subordinadas, as

---

<sup>35</sup> Cf. SILVA, Marilúze Ferreira de Andrade e. *Introdução à Semântica de Gottlob Frege*. Londrina: CEFIL, 1999.

substituições não se dão entre expressões com referência costumeira, mas entre as que apresentam um sentido costumeiro.

Frege admite que o referente de um sinal seja um objeto empírico, porém a sua representação não passa de uma imagem sempre subjetiva. Por tal motivo, as representações de um mesmo objeto variam porque nem sempre a mesma representação está associada ao mesmo sentido. A representação é subjetiva por isso ocorre que cada pessoa tenha uma representação individual do mesmo objeto. Essa variação de representação tanto pode ocorrer no mesmo indivíduo como entre indivíduos diferentes e disso resulta uma variedade de diferenças nas representações associadas ao mesmo sentido.

Dessa forma, podemos dizer que a representação, o sentido e a referência se distinguem porque a primeira é subjetiva, a segunda intersubjetiva e a terceira é objetiva. Assim, ao sinal corresponde um sentido determinado e ao sentido corresponde uma referência determinada. Em uma linguagem perfeita uma referência deve ter apenas um sentido. Mas nem sempre a um sentido corresponde uma referência

No mesmo ano da publicação de *Sobre o Sentido e a Referência*, aparece o artigo *Sobre o Conceito e o Objeto*, onde Frege procura desfazer os equívocos de Benno Kerry acerca de sua noção de conceito tal como formulada em *Os fundamentos*. Como nesse livro Frege não havia desenvolvido com a devida exatidão a noção de conceito, Kerry foi levado a identificar o termo ‘conceito’, na acepção de Frege, com sua acepção de orientação psicológica. Entre os temas que aí são discutidos, destacam-se as distinções entre conceito e objeto; propriedades de objetos e notas características de conceitos, subordinação de conceitos; conceitos de primeira e segunda ordem.

## 1.5 O QUARTO PERÍODO

O quarto período estende-se de 1893 até 1903, quando Frege completa a publicação da *Die Grundgesetze der Arithmetik*<sup>36</sup> (*As Leis Fundamentais da Aritmética*). Neste período Frege procura formalizar e completar *Os fundamentos*. Em 1893 ele publica o primeiro

---

<sup>36</sup> Não há tradução em língua portuguesa. Luis Henrique L. dos Santos e Paulo Alcoforado traduzem o título da obra como *As Leis Fundamentais da Aritmética* ou *As leis básicas da Aritmética*. Manteremos o título em alemão.

volume da *Die Grundgesetze der Arithmetik*, neste volume ele empreender a construção formal da aritmética em bases puramente lógicas; explica novamente a sua notação conceitual exposta no *Begriffsschrift*; explica a teoria dos números cardinais; a noção de ordenação numa sequência; e faz uma série de críticas ao psicologismo e ao formalismo. Em 1903 Frege publica o segundo volume de sua obra, esta contém mais demonstrações de algumas das leis básicas que governam os números naturais e começa a investigação dos números reais. Este volume inclui também críticas às visões de outros autores a respeito dos números reais, um esboço técnico da definição dos números reais e finalmente, uma série de demonstrações formais da *Begriffsschrift*.<sup>37</sup> No entanto, quando o segundo volume de *Die Grundgesetze der Arithmetik* (1903) estava no prelo, Frege recebe de Bertrand Russell uma carta, na qual o filósofo inglês lhe comunica um problema que, posteriormente, ficaria famoso como o ‘paradoxo de Russell’. Esse paradoxo coloca em xeque o projeto de Frege. Ele não consegue atingir seus propósitos, seu sistema mostra-se inconsistente.

### 1.5.1 DIE GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK

Em 1893 Frege publica o primeiro volume de sua obra fundamental, *Die Grundgesetze der Arithmetik*, na qual procura, com extremo rigor, levar a cabo seu projeto de redução da aritmética à lógica. Nesse livro Frege explica novamente a sua notação conceitual exposta no *Begriffsschrift* e explica também a teoria dos números cardinais, a noção de ordenação numa sequência e faz uma série de críticas ao psicologismo e ao formalismo.

O primeiro volume do *Die Grundgesetze der Arithmetik* contém a introdução da nova lógica e as suas leis, a definição dos números naturais e das leis básicas que os governam. Dez anos após a publicação do primeiro volume desta obra Frege publica o segundo, que contém mais demonstrações de algumas das leis básicas que governam os números naturais e começa a investigação dos números reais. Este volume inclui também críticas às visões de outros autores a respeito dos números reais, um esboço técnico da definição dos números reais e finalmente, uma série de demonstrações formais da *Begriffsschrift*.<sup>38</sup>

---

<sup>37</sup> Cf. WEINER, Joan. *Frege*. New York: Oxford University, 1999. p. 117.

<sup>38</sup> Cf. WEINER, 1999, p. 117.

Segundo Frege, nós não podemos exigir que tudo seja provado, porque isto é impossível; mas nós podemos exigir que todas as proposições usadas sem uma prova sejam explicitamente declaradas como tais, e podemos reduzir ao mínimo o número dessas proposições primitivas. Ele chama axiomas às proposições que não podem ser provadas ou de ‘leis básicas’, as quais dão o título ao livro.

No segundo volume de *Die Grundgesetze der Arithmetik*, Frege enfatiza que a sua visão sobre o número é a mesma apresentada em 1884 em *Os fundamentos* e que a notação conceitual do *Begriffsschrift* também é mantida com algumas alterações. O símbolo de identidade de conteúdos ‘ $\equiv$ ’ usado no *Begriffsschrift* é substituído pelo símbolo ordinário de igualdade ‘ $=$ ’. Em si própria esta mudança de notação é trivial, no entanto, ela assinala uma modificação nas idéias de Frege, com a distinção entre sentido e referência, tratadas em seu artigo *Sobre o Sentido e a Referência*. Ele introduz um símbolo para percurso-de-valores.

Ele faz também, duas alterações na interpretação do seu simbolismo. Primeiro, o traço horizontal é interpretado de forma diferente, visto que ‘conteúdo’ agora é distinguido em sentido e referência. E a segunda alteração é a identificação da referência com valores de verdade.

Frege diz que todos os matemáticos contemporâneos são formalistas e todos os lógicos contemporâneos são psicologistas. Os lógicos confundem as leis normativas da lógica com as leis descritivas da Psicologia. Frege defende a tese, segundo a qual, as verdades da aritmética são analíticas, pois precisam para a sua demonstração apenas de leis da lógica e definições. Muitos matemáticos em seu tempo poderiam ter concordado com Frege nesse aspecto, e, no entanto, terem defendido uma teoria da aritmética que ele rejeitaria. O ponto de divergência entre ambos é a natureza da definição em Matemática. Quando os matemáticos do século XIX consideravam o progresso da Matemática desde o Renascimento, tiveram algumas vezes a impressão de que as novidades na ciência matemática eram produtos da construção humana e não de descobertas.

Frege, ao contrário dos formalistas, defende que não compete ao matemático criar objetos. Para ele não há definições criativas em Matemática; as expressões matemáticas são apenas nomes de objetos existentes, e as verdades matemáticas constituem-se em verdades acerca do mundo. Os formalistas consideram como justificada a introdução de novos números, se isso não acarretar contradição. Mas, contra essa posição, Frege argumenta que contradições podem ser encontradas posteriormente e que a ausência de contradição, por si só, não garante a existência de objetos matemáticos. Os formalistas também tentaram defender a



tese que em Matemática pura não é necessário ir pra além dos símbolos e das suas regras de combinação.<sup>39</sup>

Em 1902, o segundo volume de *Die Grundgesetze der Arithmetik* já estava no prelo, e Frege sentia-se totalmente realizado no que diz respeito à concretização de seu projeto, uma vez que, nessa obra, ele acreditava ter efetivamente demonstrado que toda a aritmética tem seu fundamento na lógica. Assim, após discutir minuciosamente a lógica psicologista, que crê ser insustentável, afirma que todo o segundo volume de sua obra é, na verdade, uma demonstração de suas concepções lógicas. Nessa obra ele desenvolve as noções de número negativo, racional, irracional e complexo, além das operações usuais da aritmética, encerrando assim a discussão em torno das noções essenciais da aritmética. Frege não consegue atingir seus propósitos, seu sistema mostra-se inconsistente como aponta Russell, em 1902, com a contradição que ficou conhecida como o ‘paradoxo de Russell’. Esse paradoxo poderia ser demonstrado no sistema lógico proposto por Frege. Isso originou o paradoxo de Russell. Mas, apesar de ver seu projeto ruir, Frege reage serenamente, como nos mostra Russell na carta endereçada a Heijenoort:

Quando penso em atos de integridade e graça, percebo não conhecer nada que se compare com a dedicação de Frege à verdade. O trabalho de sua vida inteira estava próximo de ser completado, muito de seu trabalho havia sido ignorado em benefício de homens infinitamente menos capazes, seu segundo volume estava para ser publicado, e descobrindo que a sua hipótese fundamental estava errada, ele respondeu com prazer intelectual, claramente submergindo qualquer sentimento de desapontamento pessoal. Foi quase sobre-humano e uma indicação viva do que homens são capazes quando dedicados ao trabalho criativo e ao conhecimento ao invés de aos esforços de dominar e tornar-se conhecido.<sup>40</sup>

## 1.6 O QUINTO PERÍODO

O paradoxo de Russell põe em risco todo o trabalho de Frege, que, então, passa a buscar uma solução para o problema e, no entanto, não obtém sucesso, o que o obriga a escrever um apêndice ao *Die Grundgesetze der Arithmetik*, propondo uma maneira de corrigir

<sup>39</sup> Cf. KNEALE, 1980.

<sup>40</sup> HEIJENOORT. Carta de Russell a Heijenoort, 23 de novembro de 1962, em resposta à solicitação de Heijenoort para publicar a carta de 1902 de Russell a Frege 2000. p. 27.(não tivemos acesso a essa carta em sua língua original).

seu sistema a fim de evitar a contradição apontada por Russell. Contudo, essa solução não satisfaz a Frege, na medida em que ameaçava o caráter lógico do sistema. Iniciou-se então o quinto período, no qual Frege procurou solucionar o problema, mas acabou desistindo e voltou-se para outros assuntos.

A esse período fazem partes os artigos publicados em um periódico alemão entre 1918 e 1923, são eles: *O Pensamento*, *A Negação* e *Pensamentos Compostos*.<sup>41</sup> Ele pretendia que esses artigos fossem capítulos de um livro a ser intitulado *Investigações Lógicas* (*Logischen Untersuchungen*). Em 1975 eles foram postumamente publicados com o título pensado originalmente. Nesses escritos o simbolismo raramente aparece e a sua escrita conceitual está praticamente ausente. Juntos, esses artigos representam a filosofia da lógica madura de Frege.

### 1.6.1 INVESTIGAÇÕES LÓGICAS

Os artigos, *O Pensamento*, *A Negação* e *Pensamentos Compostos*, foram escritos em um período em que Frege começou a pôr em dúvida, de certo modo, sua tese logicista, eles revelam uma perspectiva bem mais especulativa e exploratória. Esses trabalhos representam um dos momentos mais altos do seu pensamento. Eles, em conjunto, abrem uma dupla vertente nas especulações fregeanas. De um lado, constituem um novo modo de abordar o cálculo sentencial, procurando definir os conceitos lógicos por meios operatórios, ao contrário da definição axiomática, classicamente desenvolvida no *Begriffsschrift* e no *Die Grundgesetze der Arithmetik*. Por outro lado, Frege, em suas *Investigações Lógicas*, abre novos roteiros em lógica filosófica através das discussões em torno das noções de verdade, negação, sentença, pensamento, asserção, etc.

Em *Os Pensamentos*, Frege também renova suas críticas aos lógicos psicologistas. Para ele, a tarefa da lógica é discernir as leis do ser verdadeiro. A palavra “lei” é empregada em dois sentidos: como leis morais ou jurídicas, que se referem às prescrições que devem ser obedecidas, mas com as quais os acontecimentos nem sempre estão em conformidade, e pode

---

<sup>41</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Investigações lógicas*. Organização, tradução e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001; Cf. idem. *Logische Untersuchungen* Editado e introduzido por Günther Patzig; Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen:1976.

ser também entendida como leis da natureza, que constituem as generalizações dos acontecimentos naturais, com as quais estes sempre estão de acordo.

A lógica, segundo Frege, deve ser entendida no segundo sentido, pois a ela não interessa o processo psíquico que o levou a determinado pensamento, mas apenas a sua demonstração como verdadeiro. Frege adverte que, se falarmos em “Leis do pensamento”, correremos o risco de tomarmos essa expressão como uma generalização do processo psíquico de pensar. Dessa forma, as “leis do pensamento” seriam entendidas como leis psicológicas. Aqui fica evidente a crítica de Frege ao psicologismo. A generalização do processo psíquico de pensar não deve substituir a demonstração de algo que foi considerado verdadeiro. A lógica deve prescindir de explicar o processo psíquico de pensar, a ela cabe apenas decidir se o asserir como verdadeiro – momento em que o processo termina – se justifica ou não. Assim ele demarca as fronteiras entre psicologia e lógica. “Atribuo à lógica a tarefa de descobrir as leis do ser verdadeiro (*Wahrsein*), e não as leis do asserir como verdadeiro (*Fürwahrhalten*) ou as leis do pensar”.<sup>42</sup> Ou seja, para a lógica não interessa qual foi o processo psíquico que me levou a pensar determinada coisa, mas se o que foi pensado se justifica logicamente (é válido) ou não.

Por pensamento Frege entende o sentido de uma sentença, mas nem todo sentido de uma sentença é um pensamento, pois, chamamos de pensamento, apenas, as sentenças às quais podemos perguntar pela verdade. O pensamento é imperceptível pelos sentidos, mas veste a roupagem perceptível da sentença, e torna-se mais facilmente apreensível. Os pensamentos não são subjetivos como as idéias nem são perceptíveis pelos sentidos. Depois das distinções, feitas nos parágrafos anteriores, Frege chega à conclusão que os pensamentos não são nem coisas do mundo exterior, nem são idéias. Desta forma, é necessário um terceiro domínio. Este domínio, em que estão os pensamentos, coincide com as idéias, por não poder ser percebido pelos sentidos, e também coincide com as coisas do mundo sensível, por não necessitar de um portador a cuja consciência pertença. “Assim, por exemplo, o pensamento que expressamos no teorema de Pitágoras é intemporalmente verdadeiro, verdadeiro independentemente do fato de que alguém o considere verdadeiro ou não. Ele não requer nenhum portador. Ele é verdadeiro não a partir do momento de sua descoberta, mas como um planeta que já se encontrava em interação com outros planetas antes mesmo de ter sido visto

---

<sup>42</sup> Cf. FREGE, Gottlob. O Pensamento. Uma Investigação Lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001.

por alguém”.<sup>43</sup> Os pensamentos são atemporais, são verdadeiros não a partir de sua descoberta, mas são verdadeiros mesmo antes de o conhecermos.

Frege distingue três atos, o pensar, o julgar e o asserir. Na ciência, um progresso geralmente se dá da seguinte maneira: Inicialmente apreende-se um pensamento, depois de investigações este pensamento é reconhecido como verdadeiro. E finalmente expressamos o reconhecimento da verdade sob a forma de uma sentença assertiva. O uso da palavra “verdadeiro” é desnecessária nesse processo, pois, a força assertiva não se encontra nela, mas na forma da sentença. E quando esta perde sua força o uso da palavra “verdadeiro” não poderá restitui sua força assertiva.

No artigo *Negação* de 1919 Frege discute o problema dos pensamentos falsos. Se o ser de um pensamento consiste em ser verdadeiro, então não poderíamos falar de pensamentos falsos. Mas apesar de Frege insistir que não se pode inferir coisa alguma de um pensamento falso, ele reconhece que o ser do pensamento não consiste em seu ser verdadeiro. O ser do pensamento consistiria, na verdade, na sua objetividade, ou melhor na sua intersubjetividade, ou seja, o ser do pensamento consistiria em ser apreendido como o mesmo pensamento por diferentes pessoas.

O artigo *Pensamentos Compostos* de 1923 é o último artigo publicado em vida por Frege. Nesse artigo ele apresenta seis das dezesseis funções de verdade possíveis com duas variáveis proposicionais e discute a relação entre linguagem e pensamento. E explica de que modo, com um repertório finito de expressões dotadas de sentido, é possível construirmos sistematicamente um número infinito de enunciados dotados de sentido.<sup>44</sup>

O artigo *Generalidade Lógica* ficou inacabado devido a sua morte, temos apenas fragmentos desse artigo. Além desses trabalhos, ele redigiu dois outros pequenos textos, em um dos quais reconhecia explicitamente a impossibilidade de reduzir a aritmética à lógica e propunha reduzi-la a geometria. No entanto, esse projeto ficou apenas esboçado. Hoje sabemos, com o teorema de Gödel, que a aritmética formal é incompleta, mas é claro Frege não conheceu esse teorema.

---

<sup>43</sup> FREGE, 2001, p. 24.

<sup>44</sup> NETO, Fernando Raul. O Último texto de Frege. *Perspectiva Filosófica*. V. I, n ° 25. Jan-Jun/2006. p. 153-175.



## II

### O PRINCÍPIO DO CONTEXTO EM *OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA*

Neste capítulo, faremos uma análise sistemática do uso do princípio do contexto por Frege em *Os fundamentos*, segundo a literatura secundária. O papel do princípio do contexto nesta obra é muito controverso, uma vez que este princípio como formulado nos diz muito pouco e as formulações que aparecem no decorrer do livro não parecem exercer um papel homogêneo.

Sistematizaremos nosso estudo neste capítulo sob três perspectivas diferentes. Primeiro analisaremos o princípio do contexto, como aparece na introdução, interligado a outros dois princípios; em seguida, apresentaremos as formulações ao longo desta obra, com algumas observações que nos parecem consensuais ou, pelo menos, pouco controvertidas; e, finalmente, analisaremos o princípio do contexto sob a ótica de seus comentadores.

## 2.1 O PRINCÍPIO DO CONTEXTO COMO UM DOS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DE FREGE

No final da introdução de *Os fundamentos*, Frege enuncia os três princípios metodológicos de sua investigação. É interessante notarmos que, ao enunciar esses princípios, ele os chama de princípios fundamentais (*Grundsätze*).

Esses três princípios, além de princípios fundamentais, são também metodológicos e interdependentes. Que são metodológicos vê-se por suas formulações imperativas:<sup>45</sup>

- (P1) deve-se separar precisamente o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo;<sup>46</sup>
- (P2) deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição e não isoladamente;<sup>47</sup>
- (P3) não se deve perder de vista a distinção entre conceito e objeto.<sup>48</sup>

Que eles são interdependentes é declarado pelo próprio Frege. Segundo o autor, se infringirmos o segundo princípio (P2), seremos quase obrigados a tomar como significado das palavras meras representações e, assim, violaremos também o primeiro princípio (P1). Por exemplo, se tomarmos o significado dos numerais isoladamente, poderia ser o caso de ligarmos a este significado uma determinada idéia e, assim, o primeiro princípio seria violado. Da mesma maneira, se tomarmos o significado de uma expressão no contexto de uma proposição, então certamente saberíamos o *status* “ontológico” de tal expressão. Por exemplo, se a expressão for sujeito em uma proposição que tem um conteúdo singular, tal expressão significará um objeto. Se ela for o predicado de uma tal proposição, então ela significará um conceito.

O primeiro princípio (P1) é de fundamental importância não só para *Os fundamentos*, mas também para as demais obras. Pois, nos escritos de maturidade, Frege renova as críticas aos lógicos psicologistas.

O papel do terceiro princípio (P3) surge claramente quando consideramos a distinção entre conceitos e objetos. Nossa relutância em aceitar que números sejam objetos surge,

<sup>45</sup> A tradução de Luís Henrique Lopes dos Santos de *Os fundamentos* captou bem o espírito metodológico presente na formulação original.

<sup>46</sup> Er ist das Psychologische vom dem Logischen, das Subjektive vom dem Objektiven scharf zu trennen. (FREGE, 1983, p. 202; FREGE, 1995, p. 23).

<sup>47</sup> Nach der Bedeutung der Wörter muß im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden. (FREGE, 1983, p. 202; FREGE, 1995, p. 23).

<sup>48</sup> Der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten. (FREGE, 1983, p. 202; FREGE, 1995, p. 23).

segundo Frege, quando perguntamos pelo significado das palavras isoladamente, o que nos leva a confundir lógica e psicologia.

Mesmo que as demonstrações de Frege sejam para mostrar-nos que as verdades da aritmética são analíticas, sua definição dos números também deve em algum sentido captar o conteúdo associado a nosso uso cotidiano dos termos numéricos. E como nós reconhecemos se este conteúdo é apreendido? A questão não é facilmente respondida. Grande parte de *Os fundamentos* é dedicada à discussão dos requisitos que devem ser satisfeitos para a aceitação de uma definição e das dificuldades envolvidas para satisfazer estes requisitos.

Se se investiga o emprego de termos numéricos no contexto de proposições numéricas de diferentes tipos restringindo-se ao mandamento de perguntar pelo significado de expressões numéricas no contexto sentencial, obtém-se, então, segundo Frege, a melhor proteção contra a criação de uma perspectiva fisicalista ou psicologista sobre a natureza dos números. Paralelamente, o cumprimento do segundo princípio fundamental (P2) contribui positivamente de maneira essencial para abrir caminho para a introdução dos números como objetos lógicos e, assim, obtém-se o fundamento para a almejada demonstração da natureza analítica das leis da aritmética.

Como podemos ver, o princípio do contexto (P2) está estreitamente ligado aos outros dois princípios, (P1) e (P3). Conjuntamente, eles estabelecem as condições para uma correta definição dos números naturais que será desenvolvida na parte construtiva desta obra (§§45-109).

Os princípios fundamentais contribuem para separar a lógica da psicologia e da epistemologia. E o terceiro princípio (P3) é notável para a história da lógica. Nele Frege abandona a centralidade da análise feita em termos de sujeito e predicado, que caracteriza a lógica aristotélica; em seu lugar, introduz a distinção entre argumento e função, ou seja, entre objeto e conceito, permitindo a formalização de proposições que não poderiam ser formalizadas através da lógica aristotélica.<sup>49</sup> Com essa substituição e com os três princípios, a unidade lógica deixa de ser o conceito e passa a ser a proposição.

Esses três princípios, podemos dizer, são formulações minimalistas do essencial da filosofia de Frege. Portanto, é razoável supor que como princípios fundamentais eles perpassem todo seu projeto logicista. No entanto, apesar do primeiro (P1) e do terceiro (P3) princípios de fato reaparecem nas obras posteriores de Frege, o segundo princípio (P2) não

---

<sup>49</sup> A substituição da clássica distinção entre sujeito e predicado pelo par função e argumento já está presente no *Begriffsschrift*.



reaparece explicitamente em nenhuma outra obra, apesar de ter uma importância considerável.<sup>50</sup>

## 2. 2 AS FORMULAÇÕES DO PRINCÍPIO DO CONTEXTO EM *OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA*

Neste subcapítulo, analisaremos as passagens nas quais Frege faz um uso claro do princípio do contexto e comentaremos aspectos deste princípio que nos parecem estar estabelecidos entre seus comentadores. Assim, antes de começarmos propriamente a análise sistemática do princípio do contexto, antes de examinarmos o modo como Frege o utiliza ao longo de *Os fundamentos* apresentaremos as formulações deste princípio exatamente como aparecem no texto. A maioria dos comentadores de Frege afirmam haver quatro formulações diferentes do princípio do contexto em *Os fundamentos*, a saber:

- F1 deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição e não isoladamente;<sup>51</sup>
- F2 É suficiente que a proposição como um todo tenha sentido; isto faz com que também suas partes ganhem conteúdo;<sup>52</sup>
- F3 Apenas no contexto de uma proposição as palavras significam algo;<sup>53</sup>
- F4 Estabelecemos então o princípio de que uma palavra não deve ser definida isoladamente, e sim no contexto de uma proposição.<sup>54</sup>

Apesar da maioria dos comentadores de Frege apontarem quatro formulações do princípio do contexto em *Os fundamentos*, nós acreditamos, a partir das nossas leituras, que há cinco formulações deste princípio. Pois, no §46, Frege afirma: “A fim de iluminar a

---

<sup>50</sup> No decorrer deste capítulo iremos discorrer sobre o uso do princípio do contexto em *Os Fundamentos da Aritmética* e no próximo capítulo trataremos da polêmica em torno da sua manutenção ou não nas obras posteriores a *Os Fundamentos da Aritmética*.

<sup>51</sup> Nach der Bedeutung der Wörter muß im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden (FREGE, 1983, p. 202; FREGE, 1995, p. 23).

<sup>52</sup> Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Theile ihren Inhalt. (FREGE, 1983, p. 247; FREGE, 1995, p. 92).

<sup>53</sup> Nur im Zusammenhange eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. (FREGE, 1983, p. 247; FREGE, 1995, p. 94).

<sup>54</sup> Wir stellten nun den Grundsatz auf, daß die Bedeutung eines Wortes nicht vereinzelt, sondern im Zusammenhange eines Satzes zu erklären sei. (FREGE, 1983, p. 274; FREGE, 1995, p. 136).

questão, será conveniente examinar o número no contexto de um juízo onde se evidencia sua espécie original de aplicação”.<sup>55</sup>

Com exceção das formulações (F1) e (F4) que nos parecem ser equivalentes, o alcance das formulações não é o mesmo. Elas enunciam uma recomendação ou um preceito metodológico de caráter geral sobre a análise e a definição do significado de qualquer palavra. Já as formulações (F2) e (F3) são introduzidas no contexto específico da definição do número ou do significado dos numerais, que é o objetivo específico de *Os fundamentos*. Essas diferentes formulações obedecem a uma estratégia expositiva de Frege: primeiro estabelece-se um princípio geral (F1), que logo depois é aplicado para resolver problemas específicos (F2) e (F3). A formulação (F4), como dissemos, é equivalente a (F1) e aparece na recapitulação dos resultados do livro. Assim, além de aparecer em passagens essenciais da obra, o princípio do contexto também tem um caráter de abertura (F1) e fechamento de seu trabalho (F4), o que demonstra a importância nessa obra.

Como vimos, o princípio do contexto é formulado explicitamente pela primeira vez na introdução de *Os fundamentos* (P2; F1), juntamente com mais outros dois princípios metodológicos, (P1) e (P3), que Frege chama de princípios fundamentais (*Grundsätze*). Além de serem princípios metodológicos, também são interdependentes, como é declarado pelo próprio Frege. Segundo o autor, se não obedecermos ao segundo princípio (P2; F1), seremos quase obrigados a tomar como significado das palavras meras representações e, assim violaríamos também o primeiro princípio (P1).

Além da formulação do princípio do contexto na introdução, ele reaparece no §60 (F2), em uma passagem essencial (§§55-61) do argumento fregeano que considera os números como objetos autônomos e é reiterado no §62 (F3), no começo da passagem igualmente importante (§§62-69) na qual Frege expõe as razões para definir os números cardinais como extensões de conceitos. E, finalmente, aparece no §106 (F4), no curso da recapitulação dos principais resultados do livro. Nesse parágrafo, Frege reafirma o princípio do contexto como um princípio fundamental.

---

<sup>55</sup> Um licht in die Sache zu bringen, wird es gut sein, die Zahl im Zusammenhange eines Urteils zu betrachten, wo ihre ursprüngliche Anwendungsweise hervortritt. (FREGE, 1983, p. 238; FREGE, 1995, p. 80)

## 2.3 O PRINCÍPIO DO CONTEXTO SEGUNDO A LITERATURA SECUNDÁRIA

Mostramos no subcapítulo anterior, as ocorrências do princípio do contexto ao longo de *Os fundamentos* e fizemos, com o risco natural, algumas observações que nos pareceram consensuais ou, pelo menos, pouco controvertidas. Trata-se agora de nos aproximarmos mais da questão central deste trabalho: o uso do princípio do contexto por Frege segundo a literatura secundária. A análise sistemática que prometemos fazer resulta exatamente da questão de que parece não haver consenso acerca desse uso. Começamos então.

Vimos que o princípio do contexto é formulado explicitamente pela primeira vez na introdução de *Os fundamentos* (P2; F1); nesta passagem, ele aparece juntamente com dois outros princípios (P1) e (P2) que são denominados por Frege como princípios fundamentais (*Grundsätze*) e interdependentes. Contudo, há no decorrer do livro, outras formulações do princípio do contexto que, diferentemente da formulação da introdução, não parecem ser apenas metodológicas. No §60, Frege diz que (F2) “É suficiente que a proposição como um todo tenha sentido; isto faz com que também suas partes ganhem conteúdo”.<sup>56</sup> No §62, ele afirma (F3) “Apenas no contexto de uma proposição as palavras significam algo”.<sup>57</sup> E no §106, lemos o seguinte: (F4) “Estabelecemos então o princípio de que uma palavra não deve ser definida isoladamente, e sim no contexto de uma proposição”.<sup>58</sup> A formulação do princípio do contexto no §62<sup>59</sup> (F3) parece ser uma formulação epistemológica, uma vez que Frege pergunta como os números que são objetos não intuitivos (não estão no espaço nem no tempo) podem ser dados a nós. Ele nos diz que é somente no contexto de uma proposição que as palavras têm sentido, bastando para isso definir o sentido de uma proposição na qual um numeral ocorra. A formulação do princípio do contexto no §106 (F4) parece ser uma repetição da formulação da introdução. Por outro lado, poderíamos interpretar a formulação do §62 (F3) como sendo ontológica, uma vez que neste parágrafo Frege fixa o sentido dos numerais em proposições de identidade, portanto os numerais significam objetos, posto que a relação de identidade é uma relação de primeira ordem, segundo Frege. Doravante analisaremos as interpretações de alguns comentadores de Frege acerca das possíveis interpretações das formulações do princípio do contexto em *Os fundamentos*.

---

<sup>56</sup> Cf. nota 52, p. 46.

<sup>57</sup> Cf. nota 53, p. 46.

<sup>58</sup> Cf. nota 54, p. 46.

<sup>59</sup> Dummett afirma que o §62 é o parágrafo mais filosófico já escrito por Frege. É o primeiro exemplo do que pertence à chamada “virada lingüística”.

### 2.3.1 O PRINCÍPIO METODOLÓGICO

Como vimos anteriormente,<sup>60</sup> na primeira parte de *Os fundamentos*, que chamamos de *pars destruens* (a parte destrutiva), Frege critica as posições dos empiristas e dos lógicos psicologistas<sup>61</sup> acerca do conceito de número cardinal. Nesta subseção, analisaremos uma interpretação do princípio do contexto que o aponta como um princípio metodológico, ou seja, como um método para evitar teorias psicológicas e empíricas dos números – as duas teorias da aritmética às quais Frege dedica a maior parte de suas críticas no livro. Essa interpretação do princípio do contexto nos parece a menos controversa entre os seus comentadores. A maioria dos intérpretes – apesar de muitas vezes enfatizarem outra interpretação desse princípio – concordam que o princípio do contexto tem um papel importante no combate às concepções adversárias do número. Frege, em sua crítica às concepções rivais do número, nos diz que:

O número apareceu assim como um objeto que se pode reconhecer novamente, embora não como um objeto físico ou mesmo espacial, nem como um que pudéssemos esboçar uma imagem por meio da imaginação. Estabelecemos então o princípio de que uma palavra não deve ser definida isoladamente, e sim no contexto de uma proposição, cuja obediência basta, creio eu, para evitar a concepção física do número sem recair na psicológica.<sup>62</sup>

Em sua opinião, se se investiga o emprego de termos numéricos no contexto de proposições numéricas, restringindo-se ao mandamento de perguntar pelo significado de expressões numéricas no contexto sentencial, obtém-se a melhor proteção contra a criação de uma concepção empirista ou psicologista da natureza dos números. Da mesma forma, se seguirmos o princípio do contexto, contribuiremos de maneira essencial para abrir caminho para a introdução dos números como objetos lógicos e, assim, obteremos o fundamento para a almejada demonstração do projeto logicista.

---

<sup>60</sup> Vide 1.3.1, p. 25-30.

<sup>61</sup> Erroneamente se atribui a superação do psicologismo a Husserl – *Logische Untersuchungen*, 2 vols, Halle, 1900-1901 – Na verdade, foi Frege quem pela primeira vez criticou severamente a tese psicologista e assim influenciou Husserl, mas este nunca reconheceu publicamente o fato.

<sup>62</sup> Die Zahl erschien so als wiedererkennbarer Gegenstand, wenn auch nicht als physikalischer oder auch nur räumlicher noch als einer, von dem wir uns durch die Einbildungskraft ein Bild entwerfen können. Wir stellten nun den Grundsatz auf, daß die Bedeutung eines Wortes nicht vereinzelt, sondern im Zusammenhange eines Satzes zu erklären sei, durch dessen Befolgung allein, wie ich glaube, die physikalische Auffassung der Zahl vermieden werden kann, ohne in die psychologische zu verfallen. (FREGE. 1983, p. 274-275; FREGE, 1995 p. 136).

Vejamos a posição de alguns dos *scholars* de Frege que defendem o papel metodológico do princípio do contexto.

Matthias Schirn<sup>63</sup> defende que Frege, ao combater em *Os fundamentos*, as concepções empirista e psicologista da aritmética, não chega a expressar textualmente, no contexto dessa crítica, o princípio do contexto, mas este, no entanto, serve-lhe como um guia para combater cada uma das concepções acima mencionadas, assim como um método para o desenvolvimento de sua própria teoria do número. Segundo Frege, uma determinação adequada e sustentável da natureza dos números deve dar conta de dois aspectos: a objetividade das leis da aritmética e sua aplicabilidade extensiva. Tanto o ponto de vista empirista quanto o psicologista da aritmética não satisfazem esta exigência.

Segundo Michael Resnik,<sup>64</sup> Frege utiliza o princípio do contexto para resolver uma bateria de problemas. E um exemplo de aplicação desse princípio estaria em sua crítica ao psicologismo. Frege se opõe ao psicologismo porque este defende que o significado das palavras são imagens mentais ou idéias. Frege indaga o psicologismo com a pergunta pelo significado (*Bedeutung*) de uma palavra no contexto de uma sentença.

Gregory Currie<sup>65</sup> diz-nos que uma interpretação do princípio do contexto deve demonstrar como ele funciona em *Os fundamentos*. Segundo ele, a estratégia argumentativa de Frege é muito interessante. Primeiro, ele refuta as afirmações que outros autores ofereceram do conceito de número para só então desenvolver sua própria teoria dos números. O papel do princípio do contexto seria então provar a superioridade essencial da teoria de Frege em relação às demais por meio da crítica às outras teorias da aritmética. Frege explicitamente anuncia o princípio como um meio para evitar teorias psicológicas e empíricas dos números, ou seja, o princípio do contexto funcionaria como um meio para evitar os defeitos das teorias rivais sobre os fundamentos da aritmética e como defesa de sua própria teoria.

Para Peter Milne,<sup>66</sup> o princípio do contexto é metodologicamente importante no combate a uma visão atomista e idealista do significado que Frege rotula de psicologismo e diz ser essa visão incompatível com a objetividade da matemática. Segundo Milne, isso está claro em três das quatro formulações do princípio do contexto em *Os fundamentos*.

---

<sup>63</sup> Cf. SCHIRN, 1993.

<sup>64</sup> Cf. RESNIK, M. The context principle in Frege's Philosophy. In: *Philosophy and Phenomenological Research* 27. p. 356-365; Cf. idem. Frege's context principle revisited. In: SCHIRN, Matthias (Ed). *Studien zu Frege III*. Stuttgart-Bad Cannstatt: 1976, p. 35-49.

<sup>65</sup> Cf. CURRIE, Gregory. *Frege: An Introduction to his Philosophy*. New Jersey: Barnes & Noble Books, 1982.

<sup>66</sup> Cf. MILNE, Peter. Frege's Principle Context. *Mind*, New Series. Vol. 95 No 380. Out, 1986, p. 491-5.

### 2.3.2 A FORMULAÇÃO EPISTEMOLÓGICA

Marco Ruffino, em *Context principle, fruitfulness of logic and the cognitive value of Arithmetic in Frege*,<sup>67</sup> mostra como Frege concilia o valor cognitivo da aritmética com sua natureza analítica. Ruffino considera o princípio do contexto em sua formulação epistemológica, também conhecida como *priority thesis*, a saber, a tese que afirma a prioridade de juízos completos sobre seus conceitos constituintes. O princípio do contexto fornece um modo de se obter conceitos que são verdadeiramente frutíferos e cujos conteúdos não podem ser apreendidos de outra forma.

A principal tese do logicismo de Frege, segundo Ruffino, é a idéia de que as verdades da aritmética são analíticas, isto é, podem ser derivadas de leis lógicas e definições. Dessa forma, a aritmética seria redutível à lógica. No §88, Frege considera a limitação da noção de analiticidade em Kant. Essa noção surge, de acordo com Frege, de um entendimento inadequado da formação de conceitos. Segundo Frege, Kant entende o conceito como sendo determinado por características justapostas e, para Frege, este é um dos modos menos frutíferos de formar conceitos. Mas que tipo de formação de conceitos Frege tem em mente que seria capaz de novas e inesperadas conseqüências? Para Ruffino, o princípio do contexto em sua versão epistemológica é essencial para o projeto logicista de Frege, embora não seja explicitado em seus escritos mais importantes.

Ainda de acordo com Ruffino, a crítica de Frege a Kant torna-se mais clara se analisarmos o texto *Boole's logical calculus and the concept-script* (1880-1881), em que Frege está tentando tornar claro, por meio de uma comparação sistemática, os pontos em que sua *Begriffsschrift* se distancia da tradição da lógica aristotélica. Frege afirma que sua escrita conceitual é superior aos formalismos anteriores. Ela é um simbolismo claramente definido com uma potência consideravelmente expressiva, obtida pela introdução do signo de generalidade. No entanto, os benefícios formais não são os aspectos mais importantes. A escrita conceitual demarca a distância de Frege da tradição lógica pela introdução de um novo quadro de formação de conceitos para fins científicos.

De acordo com Frege, tanto em Aristóteles como em Boole, a atividade logicamente primitiva é a formação de conceitos por abstração e a formação de juízos e inferências se dá através de comparação imediata ou indireta de conceitos via suas extensões. Frege, ao

---

<sup>67</sup> Cf. RUFFINO, Marco. Context Principle, Fruitfulness of Logic and the Cognitive Value of Arithmetic. in Frege. *History and Philosophy of Logic*, 12 -1991, p. 185-194.

contrário, parte de juízos e seus conteúdos e não de conceitos, ou seja, há aqui a formulação da prioridade teórica de juízos sobre conceitos. Esta é a primeira diferença entre a lógica de Frege e a de Boole. Outra diferença muito importante diz respeito ao que Frege chama de ‘definições frutíferas’, isto é, a criação de novos conceitos para propósitos científicos. Eles não são meramente resultado de operações sobre extensões de conceitos já dados. Frege objeta que na lógica aristotélica e booleana a relação entre conteúdos de conceitos e de juízos é invertida e falta um meio para definir conceitos novos e frutíferos. Na visão de Frege, a lógica de Boole é reduzida a um mero cálculo mecânico.

Marco Ruffino argumenta que a impossibilidade da lógica tradicional de formar conceitos frutíferos se deve à inversão da relação entre conteúdo de conceito e conteúdo de juízos. A prioridade do conteúdo de juízos sobre o conteúdo de conceitos é na verdade o princípio do contexto em sua versão epistemológica. Este ponto é relevante porque Frege não o afirma explicitamente, quando menciona a necessidade de definições frutíferas para superar a trivialidade de proposições analíticas e, portanto, da lógica. Assim, o princípio do contexto, em sua versão epistemológica, possibilita o valor cognitivo da aritmética.

Em uma nota de rodapé, Marco Ruffino afirma que nós já encontramos a *priority thesis* na *Crítica da razão pura*, quando Kant apresenta o método que conduz à descoberta dos conceitos puros do entendimento (B 94-96). Kant afirma a prioridade de juízos completos sobre conceitos. Mas, apesar da *priority thesis* ter tido uma inspiração kantiana, Frege a usa de forma mais radical, a saber, na criação de conceitos científicos.

Não apenas em sua concepção teórica, mas também na criação, os conceitos são precedidos pelas proposições. Assim, para definirmos um conceito frutífero, primeiro um conteúdo de uma proposição completa é apresentado, da análise do conteúdo do juízo surge o conteúdo dos conceitos. Frege acredita que o conteúdo de um juízo pode ser decomposto de diferentes maneiras. Os conceitos obtidos desse modo podem figurar de um modo novo. Frege combina conceitos velhos a uma variedade de signos, por exemplo, a generalidade, a negação e o condicional.

A definição de conceitos frutíferos usa conteúdos judicáveis. E conceitos já definidos podem ser incorporados em um novo conteúdo judicável para criar novos conceitos. A presente interpretação da noção de ‘definições frutíferas’ lança alguma luz nos comentários de Frege no §88, onde ele fala sobre o tipo de definição que considera frutífera.

Nesse parágrafo, Frege mostra que Kant subestimou o valor cognitivo das verdades analíticas. Em Kant, todas as proposições são fundamentalmente da forma sujeito-predicado; já em Frege, as proposições são da forma função-argumento. E a análise função-argumento

permite a um conteúdo conceitual ser representado de diferentes modos. Desde que o mesmo conteúdo seja tomado diferentemente, ele é logicamente legítimo e analítico, e se novos conceitos forem formados, ele será frutífero.

A distinção kantiana de *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, diz respeito ao conteúdo de um juízo, ou seja, se o conceito do sujeito está ou não contido no conceito do predicado. Mas para Frege, temos que separar a pergunta acerca de um juízo, da pergunta de como vamos justificá-lo. Assim, a distinção fregeana de *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, não se referem ao conteúdo de um juízo, mas a sua justificação.

De acordo com Michael Beaney,<sup>68</sup> a doutrina de Kant, segundo a qual a aritmética é um corpo de verdades sintéticas, foi uma tentativa de expressar sua crença anterior de que a aritmética estende nossos conhecimentos da mesma forma que a doutrina de Frege, segundo a qual a aritmética é um corpo de verdades analíticas se assenta na crença anterior da natureza puramente lógica da aritmética.

Assim, usando conceitos obtidos exclusivamente pelo emprego de leis lógicas, podemos obter conclusões inteiramente novas e não-triviais e que, no entanto, preservam seu caráter analítico. Isto é precisamente o que permite Frege afirmar o caráter analítico das sentenças da aritmética enquanto reconhece seu valor cognitivo.

### 2.3.3 A PRIORIDADE SEMÂNTICA

O princípio do contexto formula a condição geral que uma palavra deve satisfazer para ter algum significado. Entendido desta forma, o princípio do contexto dá prioridade ao significado de proposições sobre o significado de palavras, isto é, o significado de uma palavra consiste exclusivamente em sua contribuição para a determinação do significado da proposição onde ela ocorre como uma expressão parcial. As palavras desempenham sua função apenas no contexto de proposições e, no caso de expressões singulares, desempenham uma função identificatória. Pode-se entender a tese contextual também como referente ao sentido de palavras, isto é, o sentido de cada palavra consiste em sua contribuição para o

---

<sup>68</sup> BEANEY, Michael: *Frege: Making Sense*. London: Duckworth, 1996, p. 125-131.



sentido da proposição onde ela ocorre como parte. Aqui também há o reconhecimento da prioridade do sentido da proposição sobre o sentido das palavras.

Michael Dummett, um dos maiores *scholars* de Frege, afirma que o princípio do contexto funciona como um guia para formular uma definição correta de número cardinal.<sup>69</sup> Segundo Dummett, para uma definição de número ser correta, deveríamos derivar dela um critério de identidade para os números. O princípio do contexto deve formular a condição geral que uma palavra deve satisfazer para ter algum significado. A teoria do significado de Frege não pode ser coerente sem o reconhecimento do princípio do contexto tomado como uma tese relacionada ao sentido.

Para Michael Dummett, a principal função do princípio do contexto é relegar a linguagem às questões a respeito da referência de termos numéricos. No §62, segundo Dummett, podemos identificar a virada lingüística em filosofia com o princípio do contexto (F3). De acordo com ele, a genialidade de Frege é revelada nesse parágrafo, onde, pela primeira vez na história da filosofia, um filósofo propõe uma questão ontológica e epistemológica e dá uma resposta lingüística. As questões epistemológicas e ontológicas parecem ser estabelecidas simultaneamente.<sup>70</sup>

O princípio do contexto desempenhou historicamente o papel de contribuir para estabelecer a fronteira entre o conteúdo semântico (público e objetivo) e o conteúdo psicológico (privado e incomunicável) das expressões lingüísticas. Ele foi pioneiro em atribuir um papel privilegiado à proposição em análise semântica – um privilégio que perdeu força nas obras posteriores de Frege devido a sua caracterização das frases como um tipo especial de nomes complexos, mas que perdurou na filosofia da linguagem e mesmo na lingüística posteriores.

---

<sup>69</sup> Cf. DUMMETT, Michael. *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University, 1981.

<sup>70</sup> Cf. DUMMETT, 1981.

### 2.3.4 A PRIORIDADE ONTOLÓGICA

Matthias Schirn<sup>71</sup> resume as quatro formulações do princípio do contexto em duas outras básicas: “Deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição e não isoladamente” (P2; F1)<sup>72</sup> e “Apenas no contexto de uma proposição as palavras significam algo”.<sup>73</sup> A primeira formulação, ele chama o segundo princípio metodológico fundamental e a segunda, tese contextual. Essas formulações, de acordo com Schirn, não são inteiramente equivalentes. O segundo princípio metodológico fundamental está formulado como uma sentença imperativa e seria um postulado para a elucidação do significado de palavras. A tese contextual está formulada como uma sentença declarativa e indica a condição que uma palavra deve satisfazer para ser significativa.

Matthias Schirn defende que o princípio do contexto diz respeito à referência de palavras. Segundo ele, as investigações em *Os fundamentos* mostram que o segundo princípio fundamental é válido para palavras (expressões sub-sentenciais) de todos os tipos. Ao mesmo tempo, há boas razões para se supor que Frege aplica o princípio do contexto aos termos singulares abstratos a partir dos quais as expressões numéricas formam uma classe particular. O princípio do contexto serve como “um critério de reconhecimento” que nos permite decidir, em qualquer caso, se ‘b’ coincide com ‘a’. Frege enfatiza no §60 que a autonomia que ele atribui aos números deve significar que um termo numérico designe algo fora do contexto de uma proposição.

No §61, Frege assume os números como objetos. E visto que os números são objetos ele começa sua pesquisa colocando a questão kantiana: Como os números nos são dados? Para Kant, os objetos nos são dados apenas pela sensibilidade e uma vez que Frege considera os números como objetos, então os números também nos seriam dados pela sensibilidade. E, assim, a aritmética dependeria da intuição e não seria analítica. Mas, para Frege, os números não são objetos dos quais podemos ter intuições. Assim, a sua solução foi invocar o princípio do contexto.

A impossibilidade de representar o conteúdo de uma palavra não é pois razão para negar-lhe todo significado ou excluir seu uso. A aparência do

---

<sup>71</sup> Cf. SCHIRN, Matthias. O Contexto Proposicional e a Questão do Significado de Termos Singulares Abstratos. Campinas: *Manuscrito*. XVI (2): 1- 4, outubro 1993.

<sup>72</sup> Cf. Nota 53, p. 46.

<sup>73</sup> Cf. Nota 54, p. 46.

contrário nasce do fato de considerar-se uma palavra, e indagar-se de seu significado, isoladamente, que leva então a recorrer a uma representação. Uma palavra parece assim não ter conteúdo se lhe falta uma imagem interna correspondente. Deve-se, porém atentar sempre a uma proposição completa. Apenas nela têm as palavras propriamente significado. As imagens internas que por ventura nos venham à mente não precisam corresponder a elementos lógicos do juízo. É suficiente que a proposição como um todo tenha sentido; isto faz com que também suas partes ganhem conteúdo.<sup>74</sup>

A determinação dos números como objetos autônomos deve excluir, de acordo com a explicação de Frege no §60 da obra em questão, o uso de um termo numérico como predicado ou atributo. Se um signo ‘a’ deve designar um objeto, então devemos, de acordo com Frege, ainda no §62, dispor de um critério que decida em todos os casos se ‘a’ é idêntico a ‘b’, “ainda que nem sempre sejamos capazes de aplicá-lo”.

No §63, Frege utiliza o chamado “princípio de Hume”: “Quando dois números são combinados de tal modo que um tenha sempre uma unidade correspondente a cada unidade do outro, pronunciemo-los iguais”<sup>75</sup>. Dessa forma, o princípio de Hume contribui para lançar luz sobre a questão epistemológica relativa à maneira como nós apreendemos um determinado número e como o reconhecemos como sendo o mesmo. Frege chama as sentenças que possuem o papel especial de fixar referência “sentenças de reconhecimento”; no caso dos termos numéricos, essas sentenças envolvem a relação de identidade. Neste caso, sentenças de reconhecimento exigem um “critério de identidade” para os números. Se o princípio do contexto é interpretado como um princípio que governa a referência, ele sugere que a referência a objetos abstratos e, especificamente, a objetos matemáticos, pode ser conseguida se tivermos estabelecido a verdade de certas proposições em que eles ocorrem.

Ao refletir sobre a definição de número, elabora o princípio de abstração como método de introdução de objetos abstratos. Seu exemplo é a introdução do abstrato *direção de uma reta* a partir da relação de equivalência entre retas paralelas. Frege parece reivindicar que nós não poderíamos derivar de um conhecimento da direção de uma linha a condição para duas linhas terem a mesma direção. Ele então, aparentemente, procedeu para derivar esta condição

<sup>74</sup> Es ist also die Unvorstellbarkeit des Inhaltes eines Wortes kein Grund, ihm jede Bedeutung abzusprechen oder es vom Gebrauche auszuschließen. Der Schein des Gegenteils entsteht wohl dadurch, daß wir die Wörter vereinzelt betrachten und nach ihrer Bedeutung fragen, für welche wir dann eine Vorstellung nehmen. So scheint ein Wort keinen Inhalt zu haben, für welches uns ein entsprechendes inneres Bild fehlt. Man muß aber immer einen vollständigen Satz ins Auge fassen. Nur in ihm haben die Wörter eigentlich eine Bedeutung. Die innern Bilder, die uns dabei etwa vorschweben, brauchen nicht den logischen Bestandteilen des Urteils zu entsprechen. Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Teile ihren Inhalt. (FREGE, 1983, p.246-247; FREGE, 1995, p. 92-3).

<sup>75</sup> Wenn zwei Zahlen so kombiniert werden, daß die eine immer eine Einheit hat, die jeder Einheit der andern entspricht, so geben wir sie als gleich an. (FREGE, 1983, p. 248; FREGE, 1995, p. 94-95).

de uma definição explícita de um operador de direção. Mas o que na verdade ele reivindicou foi que não poderíamos de um conhecimento *a priori*, do que são direções, chegar à apreensão do conceito de linhas paralelas. O critério de identidade, em termos desta relação, não foi ela mesma uma definição ou parte de uma definição do operador de direção, mas a condição para a correção de uma definição poderia ser correta apenas se o critério fosse derivável dele.<sup>76</sup>

Para definir números, Frege introduz extensões de conceitos como objetos lógicos por meio do princípio de abstração:  $NxF(x) = NxG(x) \leftrightarrow Ex (F(x), G(x))$  o número de *Fs* é idêntico ao número de *Gs* se e somente se *F* e *G* são equinumericos.

### 2.3 5 A PRIORIDADE SINTÁTICA

Wright, em *Frege's conception of numbers as objects*,<sup>77</sup> interpreta o princípio do contexto como uma tese da prioridade das categorias sintática sobre as categorias ontológicas, e interpreta a expressão '*Bedeutung*' como referência ou denotação. A idéia de que as categorias sintáticas têm prioridade sobre as categorias ontológicas é sustentada por inúmeras passagens de *Os fundamentos*. Por exemplo, um objeto é o sujeito de uma sentença que expressa um juízo que tem um conteúdo singular. Um conceito é um predicado de uma tal sentença. Além desses, Frege apresenta outros critérios sintáticos para defender a tese de que os números são objetos: os numerais não são precedidos nem por plural, nem por artigo indefinido; eles são precedidos apenas pelo artigo definido; eles aparecem em sentenças que expressam uma relação de identidade e como esta relação é de primeira ordem, então os números significam um objeto.

A análise lógica dos enunciados numéricos leva ao resultado de que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito. Frege rejeita a suposição de que os

---

<sup>76</sup> Dummett critica a analogia de Frege no §64 de *Os Fundamentos da Aritmética* entre o operador de cardinalidade e o operador de direção. O operador de cardinalidade toma termos conceituais como argumentos enquanto o operador de direções toma indivíduos (linhas) como argumentos. Eles são, portanto, categoricamente distintos. Além do mais, um operador pertence a aritmética e o outro pertence a geometria. Tendo em vista que Frege enfatiza a diferença epistemológica entre essas disciplinas é duvidoso que esta analogia seja bem sucedida no âmbito epistemológico. Dessa forma, também é duvidoso que o argumento da prioridade conceitual da noção de paralelismo sobre a noção de direção possa ser usada *mutatis mutandis* para argumentar a prioridade da noção de equinumeridade sobre a noção de número.

<sup>77</sup> Cf. WRIGHT, Crispin. The Context Principle. In: *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, 1983.

números são conceitos de segunda ordem, pois, recorrendo a critérios sintáticos, ele caracteriza os números como objetos autônomos. A determinação dos números como objetos autônomos deve excluir o uso de um termo numérico como predicado ou atributo, como ele explica no §60. Só poderemos empreender uma caracterização geral da identidade numérica se fixarmos as condições de verdade de uma equação numérica e é apenas desta maneira que estaremos justificados, do ponto de vista científico, a associar a um número individual um termo numérico como o seu nome próprio. Dessa forma, um número não nos é dado se perguntarmos pelo significado de um termo numérico isoladamente, mas apenas no contexto de uma proposição.

A tese da prioridade sintática afirma que se uma expressão particular é um candidato a referir um objeto, é uma questão do tipo de papel sintático que ele exerce na sentença. Se um termo se comporta sintaticamente como um termo singular ou como um nome próprio em uma sentença com o sentido assegurado, então, se a sentença é verdadeira, o termo tem como referente um objeto. Mas só reconhecemos o papel sintático exercido por um termo no contexto de uma proposição.



### III

#### O PRINCÍPIO DO CONTEXTO APÓS *OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA*

No capítulo anterior, fizemos uma análise sistemática de algumas das interpretações acerca do uso que Frege faz do princípio do contexto em *Os fundamentos*. Vimos que, apesar da polêmica que há em torno de qual seria a interpretação mais adequada, é consenso que ele exerce um papel fundamental – aliás o próprio Frege estabelece, pois ele é um *Grundsatz* (princípio fundamental) – na obra, no sentido de que ele surge nos momentos essenciais da argumentação fregeana a favor da natureza lógica dos números. Mas a questão que, de fato, divide seus intérpretes é se ele é ou não reafirmado implícita ou explicitamente em seus trabalhos posteriores.

Para conduzirmos nossa análise, dividimos este capítulo em cinco partes. Nas três primeiras partes discutiremos algumas questões de exegese deste princípio – a interpretação do princípio do contexto depois da distinção entre ‘sentido’ e ‘referência’, o princípio do contexto e as definições contextuais e a polêmica em torno da conciliação deste princípio e o princípio de composicionalidade – e, nas duas últimas, discutiremos, respectivamente, as teses do abandono e da manutenção do princípio do contexto.

Poderíamos sintetizar esta discussão dividindo seus intérpretes em dois grupos distintos, a saber, os comentadores que defendem a tese do abandono do princípio do contexto nas obras posteriores a *Os fundamentos* e os comentadores que defendem a tese da manutenção deste princípio.

Entre os que defendem a manutenção, destacamos, por exemplo, Michael Dummett, considerado um dos maiores intérpretes de Frege; ele defende que no §10, do Vol. I do *Die Grundgesetze der Arithmetik*, Frege apresenta o que Dummett chama de princípio do contexto generalizado; outros comentadores de Frege também defendem a manutenção do princípio do contexto nas obras posteriores, tais como: Currie, Beaney e Wright. Por outro lado, Angelelli e Resnik, por exemplo, argumentam que Frege abandonou o princípio do contexto. Eles se apóiam em passagens escolhidas dos textos de Frege nas quais, segundo eles, há uma contradição explícita com o princípio do contexto.

### 3.1 O PRINCÍPIO DO CONTEXTO E OS CONCEITOS DE ‘SENTIDO’ E ‘REFERÊNCIA’

O princípio do contexto aparece quatro vezes em *Os fundamentos* em quatro diferentes formulações que chamamos de F1, F2, F3 e F4. No §60, Frege apresenta a formulação F2: “É suficiente que a proposição como um todo tenha sentido; isto faz com que também suas partes ganhem conteúdo”.<sup>78</sup> Observemos que nessa formulação aparece a palavra ‘conteúdo’, em alemão ‘*Inhalt*’. Essa palavra desempenha um papel-chave no projeto logicista de Frege porque: primeiro, ela já surge no §9 do *Begriffsschrift*, em 1879, portanto, anterior a *Os fundamentos*, em que Frege trata da questão da identidade; segundo, porque, em 1892, em seu famoso artigo *Sobre o sentido e a referência*, Frege faz a crítica ao conceito de ‘*Inhalt*’, como apresentado no *Begriffsschrift*, o *leitmotiv* para a introdução dos conceitos de ‘sentido’ e ‘referência’, conceitos-chave para sua filosofia a partir de então. O que Frege faz, afinal, neste artigo é decompor a noção de ‘conteúdo’ (*Inhalt*) em ‘sentido’ (*Sinn*) e ‘referência’ (*Bedeutung*). Dessa forma, poderíamos interpretar a aplicação do princípio do contexto a partir das noções desenvolvidas no artigo.

Essa possibilidade de interpretação é bem explorada por Michael Beaney, que na introdução de *The Frege: Reader*<sup>79</sup> desenvolve com algum detalhe as conseqüências dessa interpretação. Fazendo uma leitura ‘retrospectiva’ de *Os fundamentos*, revela que nesta obra, não havia ainda uma distinção terminológica rigorosa entre sentido e referência de nomes

<sup>78</sup> Vide nota 54, p. 46.

<sup>79</sup> Cf. BEANEY, Michael. *The Frege: Reader*. London: Blackwell, 1997, p. 17.



próprios, expressões predicativas e sentenças declarativas. Assim, analisando o princípio do contexto, depois da publicação do seu artigo *Sobre o sentido e a referência*, surge a possibilidade de reler o princípio do contexto de Frege, em sua formulação básica, como apresentado em *Os fundamentos*, levando em conta a distinção entre ‘sentido’ e ‘referência’ que Frege, evidentemente, não poderia ter feito em 1884. As questões que agora se colocam relativas ao uso que ele faz desses termos são: (1) O princípio do contexto está relacionado à referência ou ao sentido? (2) Frege queria se referir, com esse princípio, a ambos? (3) Qual das duas interpretações é a mais relevante? (4) São ambas de igual importância?

Se a resposta à questão (2) for afirmativa, então Frege deveria ter formulado dois princípios do contexto, um para o sentido e outro para a referência:

(PCS) Deve-se perguntar pelo sentido de uma palavra no contexto de uma proposição e não considerando-a isoladamente;

(PCR) Deve-se perguntar pela referência de uma palavra no contexto de uma proposição e não considerando-a isoladamente.

Segundo Currie,<sup>80</sup> em *Os fundamentos*, Frege usa a palavra ‘*Bedeutung*’, em seu sentido cotidiano, seu correlato na língua inglesa seria ‘*meaning*’, a qual poderíamos traduzir para o português como ‘significado’. Posteriormente, Frege distingue a noção intuitiva de ‘significado’ por duas noções separadas: ‘sentido’ e ‘referência’. Dessa forma, teríamos dois princípios distintos: um sobre o sentido e outro sobre a referência. Dummett<sup>81</sup>, Beaney<sup>82</sup> e Wright<sup>83</sup> também distinguem dois princípios do contexto.

Matthias Schirn<sup>84</sup> defende que o princípio do contexto se refere ao significado<sup>85</sup> de palavras. As investigações mostram que o segundo princípio fundamental é válido para palavras (expressões sub-sentenciais) de todos os tipos. Ao mesmo tempo, há boas razões para se supor que Frege aplica o princípio fundamental aos termos singulares abstratos, dos quais as expressões numéricas formam uma classe particular.

<sup>80</sup> Cf. CURRIE, 1982, p. 148-160.

<sup>81</sup> Cf. DUMMETT, Michael. *Frege and other philosophers*. Oxford: Clarendon, 1991; Cf. idem. *Frege: philosophy of language*. London: Duckworth, 1973.; idem *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.; Cf. Idem. *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge, MA: Harvard University, 1981.

<sup>82</sup> Cf. BEANEY, 1997, p. 17.

<sup>83</sup> Cf. WRIGHT, Crispin. The Context Principle. In: *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, 1983, p. 1-52.

<sup>84</sup> Cf. SCHIRN, 1993.

<sup>85</sup> Para expressar a distinção terminológica de Frege Matthias Schirn utiliza os termos ‘significado’ e ‘sentido’.

Resnik<sup>86</sup> concorda que a palavra ‘*Bedeutung*’ não é usada de forma precisa e que, por isso, podemos considerar duas leituras do princípio do contexto, uma relacionada ao sentido e outra a referência. Resnik especula se podemos analisar este princípio em *Os fundamentos* à luz dos conceitos de ‘sentido’ e ‘referência’, mas com isso ele não pretende afirmar que Frege mantém as duas versões deste princípio nos escritos posteriores; ao contrário, ele defende a tese do abandono deste princípio.

Dessa forma, pode-se dizer, de acordo com os intérpretes dos textos de Frege, que ele, de fato, utiliza a palavra ‘*Bedeutung*’ em *Os fundamentos* de forma ambígua. No entanto, devido ao grande número de interpretações não chegamos a um denominador comum a respeito da melhor interpretação para o possível uso do princípio do contexto depois da distinção entre ‘sentido’ e ‘referência’ feita em seu artigo.

### 3.2 O PRINCÍPIO DO CONTEXTO E AS DEFINIÇÕES CONTEXTUAIS

O papel do princípio do contexto na formulação da segunda tentativa de definição<sup>87</sup> (§§62-65) tem sido muito debatida na literatura secundária. O problema desta interpretação é que Frege não apenas rejeita a definição contextual proposta nessa passagem, como propõe uma definição direta.<sup>88</sup> O princípio de Hume, a definição contextual de número ou, mais exatamente, a definição contextual do operador de cardinalidade, especifica um conceito de segunda ordem que estabelece uma correspondência um-a-um entre conceitos de primeira ordem e certos objetos, a saber, os números cardinais. Segue-se que se a definição contextual se restringe à referência do operador de cardinalidade para um mapeamento particular do conceito de primeira ordem para objetos, então assume que a referência de uma expressão conceitual relevante foi fixada, a referência de uma classe inteira de termos numéricos singulares também teria sido estabelecida.

Para Frege, as proposições que estão de acordo com uma regra especial estabelecem questões de referência, que são chamadas ‘sentenças de reconhecimento’: no caso de

---

<sup>86</sup> Cf. RESNIK, M. The context principle in Frege’s Philosophy. In: *Philosophy and Phenomenological Research* 27. 1967 .p. 356-365.; Cf. idem. Frege’s Context Principle Revisited. In: SCHIRN, Matthias (ed). *Studien zu Frege*. Oxford: Stuttgart-Bad Cannstatt, 1976, p. 123-137.

<sup>87</sup> A segunda tentativa de definição já foi discutida, vide seção 1.3.1, p. 25-30.

<sup>88</sup> Cf. RUFFINO, Marco. Logicism: Fregean and Neo-Fregean. *Manuscrito*. 21:1,1998. p. 149-188.

expressões numéricas envolvem a relação de identidade entre números. O século XIX acrescentou a idéia de um critério de identidade dado por meio de uma relação de equivalência, à prática de passar de uma estrutura quociente de classes de equivalência determinadas pela relação – o que veio a ser conhecido como definição por abstração (lógica). Frege combina seu uso do princípio do contexto em *Os fundamentos* com a definição por abstração. Tendo determinado quais são as afirmações de reconhecimento apropriadas para uma classe de expressões numéricas, ele procede à inferência da verdade de tais afirmações para o caráter referencial das expressões desta classe. Esta inferência é então suplementada pelo apelo à teoria das definições por abstração, com a classe de equivalências provando a referência de termos numéricos singulares.

Dummett menciona a controvérsia acerca da ocorrência do princípio do contexto no §62. Segundo ele, a afirmação do princípio do contexto nesse parágrafo tem a função de endossar a definição contextual. Mas se esse é o caso, por que Frege adota no §68 uma definição direta ao invés de uma definição contextual? A rejeição da definição contextual, na segunda tentativa de definição, entraria em conflito com a descrição do princípio do contexto como um princípio fundamental (*Grundsatz*) dada na introdução (F1)? Mas por que Frege reafirma o princípio do contexto na recapitulação dos resultados do seu livro (F4)?

### 3.3 COMPOSICIONALIDADE X CONTEXTUALISMO

Podemos dizer que Frege é o fundador da filosofia da linguagem moderna. E como tal ele formula dois princípios semânticos diferentes: o princípio do contexto, que estabelece que o significado das partes de uma sentença está em função da sentença como um todo, e o princípio de composicionalidade, que diz que o significado de um enunciado está em função do significado de suas partes e das regras de composição. Os estudiosos de Frege assinalam, com frequência, se não uma contradição, pelo menos, uma tensão entre esses princípios.

Frege, em *Pensamentos compostos*, explica de que modo, com um repertório finito de expressões dotadas de sentido, é possível construirmos sistematicamente um número infinito de enunciados dotados de sentido.

É surpreendente o que a linguagem consegue fazer. Com poucas sílabas ela consegue expressar um incalculável número de pensamentos, a tal ponto que até para um pensamento pela primeira vez apreendido por um ser humano, ela encontra uma roupagem através da qual um outro ser humano é capaz de apreendê-lo, ainda que esse pensamento lhe seja inteiramente novo. Isto não seria possível se não pudéssemos distinguir no pensamento partes que corresponde a partes de uma sentença, de modo que a estrutura das sentenças sirva como imagem da estrutura do pensamento. É verdade que falamos figuradamente quando aplicamos ao pensamento a relação de todo e da parte. Esta analogia porém é tão clara e, de modo geral, tão pertinente, que dificilmente nos deixaremos perturbar por suas eventuais imperfeições. Se encarmos os pensamentos como compostos de partes simples, e se a estas correspondem, por sua vez, partes simples da sentença, então podemos compreender como é possível formar, a partir de poucas partes da sentença uma grande variedade de sentenças as quais, por sua vez correspondem uma grande variedade de pensamentos. Cabe, aqui, perguntar como o pensamento se constrói e como suas partes são combinadas de modo que o todo se torne algo mais do que as partes isoladamente.<sup>89</sup>

Juntamente com o princípio de composicionalidade, Frege utiliza a lei da substitutividade: duas expressões co-referenciais podem ser substituídas uma pela outra em um enunciado, deixando inalterado o valor de verdade. A lei de substitutividade lembra o princípio de Leibniz citado por Frege. Eis um exemplo de aplicação da lei de substitutividade: se, no enunciado “A estrela da manhã é um planeta”, substituo um termo pela mesma referência, por exemplo, “A estrela da tarde”, a referência do todo (isto é, o valor de verdade do enunciado) não muda. O princípio de composicionalidade e a lei da substitutividade vale também para os enunciados compostos: a referência ou o valor de um enunciado depende do valor de verdade dos enunciados componentes e, substituindo um enunciado por outro co-referencial (com o mesmo valor de verdade), a verdade do todo não muda.

Frege discute dois contra-exemplos de sua teoria: o discurso entre aspas e o discurso indireto não respeitam nem a composicionalidade nem a substitutividade. O princípio de composicionalidade não funciona mais e não posso aplicar a lei de substitutividade. Frege

---

<sup>89</sup> Erstaunlich ist es, was die Sprache leistet, indem sie mit wenigen Silben unübersehbar viele Gedanken ausdrückt, daß sie sogar für eine Gedanken, den nun zum ersten Male ein Erdbürger gefaßt hat, eine Einkleidung findet, in der ihn ein anderer erkennen kann, dem er ganz neu ist. Dies wäre nicht möglich, wenn wir in dem Gedanken nicht Teile unterscheiden könnten, denen Satzteile entsprächen, so daß der Aufbau des Satzes als Bild gelten könnte des Aufbaues des Gedankens. Freilich sprechen wir eigentlich in einem Gleichnisse, wenn wir das Verhältnis von Ganzem und Teil auf den Gedanken übertragen. Doch liegt das Gleichnis so nahe und trifft im Ganzen so zu, daß wir das hie und da vorkommende Hinken kaum als störend empfinden. Sieht man so die Gedanken an als zusammengesetzt aus einfachen Teilen und läßt man diesen wieder einfache Satzteile entsprechen, so wird es begreiflich, daß aus wenigen Satzteile eine große Mannigfaltigkeit von Gedanken entspricht. Hier liegt es nun nahe zu fragen, wie der Aufbau des Gedankens geschieht und wodurch dabei die Teile zusammengefügt werden, so daß das Ganze etwas mehr wird als die vereinzelt Teile. (Cf. FREGE, Gottlob. *Pensamentos compostos. Uma investigação lógica*. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001. p. 61-86; Cf. FREGE, Gottlob. *Logische Untersuchungen*, Günther Patzig org.; Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1976. p. 72).

resolve o problema com um lance original, utilizando implicitamente o princípio do contexto. “Uma palavra só tem significado no contexto de um enunciado”. Ele afirma, de fato, que o sentido e a referência não são propriedades absolutas das expressões lingüísticas, mas dependem do contexto do enunciado. Se uma expressão é usada no contexto de um discurso indireto – como aquele regido por “...acredita que...” –, então não tem mais seu sentido e referência normais.

Apesar dos princípios do contexto e de composicionalidade, à primeira vista contraditórios, podemos considerá-los complementares. Como vimos, as expressões completas da linguagem, em particular as proposições, se articulam em partes simples, as palavras. O princípio do contexto estabelece que o significado das partes estão em função do significado do complexo – a proposição – princípio de composicionalidade, por outro lado, põe o significado do complexo em função das partes. Assim, consideramos as palavras por si mesmas como portadoras de certo significado (embora este só se manifeste no contexto de uma proposição na qual ela está inserida). Dessa forma, podemos entender o significado da proposição através do significado das palavras e o significado das palavras é recuperado a partir do significado da proposição.

### 3.4 A TESE DO ABANDONO DO PRINCÍPIO DO CONTEXTO

O princípio do contexto tem confundido seus intérpretes e encantado seus sucessores. O uso deste princípio nas obras posteriores a *Os fundamentos* é uma questão polêmica. De fato, não há nenhuma afirmação explícita deste princípio em qualquer outro escrito, mas também nenhuma negação.

Angelelli concorda que o princípio do contexto é afirmado em *Os fundamentos*, mas insiste que, em controvérsia com Hilbert, Frege manteve apenas o oposto do princípio do contexto, ou seja, que as palavras devem ter um significado independente de seus contextos. Angelelli afirma: “Este princípio aparece pelo menos quatro vezes em *Os fundamentos*, e tanto quanto eu sei, ele não ocorre em outro lugar”.<sup>90</sup> E segundo ele: “A última atitude de

---

<sup>90</sup> Frege’s later anti-Hilbert attitude suggests just the opposite of the principle, namely, that words must have a meaning independent of their contexts. (Cf. Angelelli, Ignacio. *Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht: Reidel, 1967, p. 73-74).

Frege anti-Hilbert sugere apenas o oposto do princípio, a saber, que as palavras devem ter um significado independente de seus contextos”.<sup>91</sup>

Segundo Resnik, Frege usa o princípio do contexto para resolver uma bateria de problemas em *Os fundamentos*. No entanto, posteriormente, Frege o abandona e oferece soluções alternativas para os problemas anteriormente solucionados por ele. Resnik adota um princípio metodológico em suas análises dos textos de Frege, a saber:

se algum princípio principal é mais tarde contrariado por Frege, então devemos concluir que ele reviu a sua posição. Eu acredito que pela aplicação desta regra, interpretações mais simples de Frege serão alcançados. A diferença entre o *Grundlagen* e o seus trabalhos parecem ser justificados por esta regra.<sup>92</sup>

Um exemplo da aplicação deste princípio é a mudança de perspectiva das análises de Frege da natureza do significado, da existência dos números e da sua crítica ao psicologismo. Após *Os fundamentos*, Frege continua refutando o psicologismo, no entanto, ele não apela ao princípio do contexto nem acusa o psicologismo de perguntar pelo significado de uma palavra isoladamente. Assim, para Resnik, Frege, explicitamente, contraria sua posição.

Michael Resnik também cita como uma ‘contradição explícita do princípio do contexto’ a passagem da última carta publicada de Frege a Peano 1896,<sup>93</sup> na qual Frege afirma que toda palavra deve possuir uma referência, a mesma em todas as ocorrências, independente do resto da sentença, isto é, do contexto. Nessa passagem, Frege discute os defeitos da linguagem natural que não é adequada para conduzir demonstrações. Esta não é adequada, porque as palavras têm muitos significados e, segundo Frege, para que uma demonstração não tenha lacunas, cada palavra deve ter apenas um significado independente do contexto em que ela está inserida.

Outra possível evidência do abandono do princípio do contexto é a afirmação de Frege – em *Pensamentos compostos* – de que nós entendemos o sentido de uma sentença por primeiro entendermos o sentido das palavras que a compõem, as palavras deveriam ter sentido

<sup>91</sup> This principle appears at least four times in *Grundlagen*, and as far as I know, it does not occur elsewhere. (Cf. Angelelli, 1967, p. 73).

<sup>92</sup> if some major principle therein is later contradicted by Frege, then we should conclude that he revised his position. I believe that by applying this rule, much simpler interpretations of Frege will be reached. The difference between the *Grundlagen* and his works would seem to justify this rule. (Cf. RESNIK, 1967, 356-357; Cf. Resnik, 1976, p. 35-49).

<sup>93</sup> Cf. FREGE, Gottlob. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. Resumido da edição alemã por Brian McGuinness e traduzido por Hans Kaal. Chicago: Brasil Blackwell, 1980; Cf. Idem. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. (Hamburgo: Felix Meiner Verlag). 1976.

por elas mesmas e quando isso não acontece devemos considerar uma falha da linguagem natural. Neste artigo, Frege apela ao problema de como explicar nossa capacidade de entender sentenças que nós nunca tínhamos ouvido antes. Ele adota palavras com sentido independente e postula um isomorfismo entre a sentença e o pensamento em construção. O significado da sentença, ao invés de conferir significado às palavras, torna-se uma função do significado destas. Frege, na passagem inicial de *Pensamentos compostos*, explica que nós entendemos o sentido da sentença por primeiro entendermos o sentido de suas palavras componentes. Para ele, as palavras deveriam ter um significado isoladamente e não o ter seria um erro da linguagem natural.

Como vimos, a posterior hostilidade de Frege à definição contextual também pode ser ela mesma utilizada como uma prova do abandono do princípio do contexto no período de maturidade. No entanto, Frege o retoma no §106 (4) na recapitulação dos principais resultados deste livro. Frege ainda levanta três objeções para sua sugestão de definição contextual, às duas primeiras ele responde (§§63-65), mas a terceira a qual sustenta (§§66-67). De acordo com esta terceira objeção, tal definição, enquanto capacita-nos a determinar quando dois números são iguais, quando nos dá como números (como números que pertencem a um certo conceito), não nos diz exatamente o que os números são, isto é, o que os distingue de outros objetos, tal como Júlio César ou Inglaterra. Isto é o resultado de sua objeção que veio a ser conhecida como ‘o problema Júlio César’. Por que Frege oferece definições explícitas ao invés de termos de extensões de conceitos, significa que Frege rejeita o princípio do contexto durante o curso de *Os fundamentos*? Isto seria claramente um conflito com a descrição do princípio na introdução como ‘um princípio fundamental’ – e o princípio é reafirmado na conclusão.

### 3.5 A TESE DA MANUTENÇÃO DO PRINCÍPIO DO CONTEXTO

Frege nunca afirmou explicitamente o princípio do contexto depois de 1884. Mas, apesar de haver consenso de que Frege não o afirma explicitamente em outras obras, alguns intérpretes defendem a tese de que este princípio reaparece de forma implícita.

Segundo Currie, o princípio do contexto é entendido por Frege como uma tese semântica. Em *Os fundamentos*, ele usava a palavra ‘*Bedeutung*’ de uma forma não técnica,

podendo ser traduzida como ‘significado’. Posteriormente, Frege distingue a noção intuitiva de ‘significado’ por duas noções separadas: ‘sentido’ e ‘referência’. Dessa forma, teríamos dois princípios distintos: um sobre o ‘sentido’ e outro sobre a ‘referência’.

Michael Beaney afirma que no §56 Frege oferece definições explícitas ao invés de definições em termos de extensões de conceitos. Isso significa que as definições contextuais e conseqüentemente o próprio princípio do contexto são rejeitados por Frege no curso de *Os fundamentos*? Isto estaria claramente em conflito com a descrição do princípio do contexto na introdução como um princípio fundamental e com a reafirmação deste na conclusão também como princípio fundamental. A resposta de Beaney é que a definição contextual é apenas criticada como insuficiente, não como incorreta.

É inteiramente presumível que o princípio do contexto é entendido por Frege como uma tese semântica. No início ele usava a palavra *Bedeutung*, a tradução natural deste termo é *meaning*. Posteriormente Frege distingue a noção intuitiva de significado por duas noções separadas: sentido e referência. Dessa forma teríamos dois princípios distintos: um sobre o sentido e outro sobre a referência. Algumas questões então surgem: Qual das duas interpretações é anterior? São ambas de igual importância? Tomado como uma tese dual sobre o sentido e a referência, o conflito do princípio do contexto com o último modo de atribuição de sentido e referência a expressões como se estes sentidos e estas referências fossem independentes da existência de entidades? Alguns têm argumentado que o princípio é conflitante com a última semântica de Frege e que portanto ele abandona o princípio nos seus trabalhos posteriores (Ver Dummett 1973, p. 495-500; Resnik 1976) Outros têm argumentado que ele não o abandona e que o próprio princípio do contexto é chave para entendermos o fato de que Frege não, a despeito das aparências, considera uma expressão sub-sentencial como tendo existência independentemente do sentido (Ver Sluga 1971 e 1977, Tugendhat 1970 e Hacker 1979)<sup>94</sup>

Quando formulou o princípio do contexto, Frege não tinha ainda feito sua famosa distinção entre sentido e referência (*Sinn* e *Bedeutung*, em alemão) e, portanto, o fato de ele

---

<sup>94</sup> It is widely assumed that the Context Principle was understood by Frege as a semantical thesis. In stating the principle he used the word *Bedeutung*, a natural translation of which is ‘meaning’. Later, so the story goes, Frege distinguished within the intuitive notion of meaning two separate components; sense and reference. The assumption has been, then, that the principle contains two distinct but not distinguished principles, one a principle about sense and the other about reference. A number of questions then arise: Which of the two interpretations of the principle is primary? Are both of equal importance? Taken as a dual thesis about sense and reference, does the Context Principle conflict with Frege’s later way of assigning senses and references to expressions as if these senses and references were independently existing entities? Some have argued that the principle does conflict with Frege’s later semantics and that he therefore abandoned the principle in his later work. (See Dummett [1973], pp.495-500 and Resnik [1976]). Others have argued that he did not abandon it and that the Context Principle is itself one clue to the fact that Frege did not, despite appearances, regard sub-sentential expressions as having independently existing senses (see Sluga [1971] and [1977], Tugendhat [1970] and Hacker [1979]). (CURRIE, 1982. p.156).



ter usado o termo ‘*Bedeutung*’ ao formulá-lo pode não significar que tivesse em mente que o princípio fosse válido apenas para a referência das palavras – caso em que quer dizer que a referência de uma palavra nada mais é do que sua contribuição para a referência da frase (segundo Frege, seu valor-de-verdade). De fato, uma outra interpretação razoável é a de que o princípio do contexto está relacionado ao sentido: o sentido de uma expressão nada mais é do que sua contribuição para o sentido da proposição (isto é, segundo Frege, a proposição que ela exprime).

Para Dummett, Frege, em seu período de maturidade, nem reafirma nem repudia explicitamente o princípio do contexto. No entanto, uma das teses centrais de Frege já nesse período, é a tese que afirma que as sentenças são logicamente um tipo particular de nome próprio complexo. Esta tese se não é formalmente inconsistente, há ao menos uma grande tensão com um princípio segundo o qual o único papel lógico é o da sentença. Segundo Dummett, no entanto, a teoria do significado de Frege não pode ser coerente sem o reconhecimento do princípio do contexto, tomado como uma tese relacionada ao sentido. Daí, na ausência de alguma afirmação explícita por Frege depois de *Os fundamentos* a favor ou contra o princípio do contexto como uma tese relacionada ao sentido, é mais razoável dizermos que ele não pode incorporá-la em sua doutrina oficial, mas que ele continua guiando seus pensamentos, uma influência que ele não poderia explicitamente reconhecer sem corrigir sua doutrina.

O princípio do contexto como formulado por Frege em *Os fundamentos* à primeira vista trata-se de uma óbvia falsidade, na medida em que o conteúdo semântico de uma palavra é apreensível, independentemente de qualquer frase específica em que ocorra; é razoável dizer, até, que é essa circunstância que faz com o significado das frases em que ocorre seja ele mesmo compreensível. Mas uma pista para compreender o alcance do princípio do contexto está no fato de Frege tê-lo usado para argumentar contra o psicologismo. Se considerarmos cada palavra *per se*, argumenta Frege, temos a tendência de identificar seu significado com imagens mentais que lhe associamos e, assim, confundimos seu conteúdo semântico e objetivo apenas com o contributo da palavra para as condições de verdade das frases em que ocorre.

Segundo Dummett, as passagens citadas por Angelelli e Resnik são tendenciosas. A afirmação feita por Frege em sua última carta a Peano, por exemplo, não é justificada. Nessa carta Frege está justificando a necessidade de uma notação conceitual para propósitos científicos. A linguagem natural não serviria para conduzir demonstrações, pois ela dá margem a ambigüidades. No entanto, a finalidade da nossa linguagem cotidiana não é

conduzir demonstrações, mas proporcionar a comunicação. Por isso, a necessidade de uma notação conceitual, nela cada termo teria apenas um significado. Dessa forma, seria razoável afirmar que, se somos capazes de estabelecer regras de inferência que proibam sofismas, toda palavra deve, em todos os contextos, ter um único e mesmo sentido.

Dummett analisa o significado de *Os fundamentos* e o considera a arquitetura do *Die Grundgesetze der Arithmetik* e argumenta que o sistema filosófico desta obra já havia sido afirmado completamente em *Os fundamentos*. Assim, este último livro não representa meramente uma fase isolada da filosofia de Frege, mas dá forma a seu pensamento como um todo. Dummett afirma sua tese de que Frege elimina em sua filosofia madura, a diferença entre termos singulares e sentenças, visto que sentenças são consideradas simplesmente um caso simples de nomes, isto é, nomes de valores de verdades. Esta tese é controversa e muito discutida pelos *scholars* de Frege.

A tese central de Dummett é que Frege conservou o princípio do contexto em *Die Grundgesetze der Arithmetik*, mas de uma forma inteiramente diferente de sua formulação anterior. De acordo com ele, a principal função do princípio do contexto em *Os fundamentos* é relegar à linguagem uma questão sobre a referencialidade de um certo termo. No entanto, em *Os fundamentos*, Frege ainda não havia traçado nenhuma distinção entre um termo ser significativo ou não.

Assim, no *Die Grundgesetze Arithmetik*, segundo Dummett, há uma nova formulação do princípio do contexto, que ele chama de princípio do contexto generalizado. De acordo com essa interpretação, o princípio do contexto teria um sentido mais forte. Ele garantiria a referência a todos os nomes envolvidos no sistema formal de Frege. A função do princípio do contexto generalizado se torna mais evidente, segundo Dummett, quando Frege propõe uma solução para a indeterminação de termos no §10 do *Die Grundgesetze Arithmetik*, ou seja, o problema Júlio César.<sup>95</sup>

---

<sup>95</sup> Cf. DUMMETT, 1991; Cf. RUFFINO, Marco. Review of Frege: Philosophy of Mathematics. *Manuscrito*. V. XVI – Nº 2, 1993. p. 151-167.

## CONCLUSÃO

No início desse estudo, prometemos fazer uma análise sistemática do que veio a ser conhecido como o princípio do contexto. Tentamos, na medida do possível, dar conta de algumas das inúmeras questões que estão relacionadas a ele.

Não encontramos na literatura secundária uma interpretação clara de qual seria o papel do princípio do contexto no projeto logicista de Frege. Na verdade, o que encontramos foi uma série de questões que a princípio nos parecia totalmente conflitante.

Mas, no espírito de nossa proposta inicial, tentamos sistematizar (ordenar) essas questões. E alguns resultados dessa sistematização já podem ser colhidos.

Seguindo o método cartesiano, partimos das questões mais simples para só então adentrarmos nas mais complexas. Dividimos, assim, nossa análise em três níveis de complexidade crescente.

Começamos analisando as passagens nas quais Frege faz um uso claro do princípio do contexto e fizemos comentários de alguns aspectos desse princípio que nos parecem consensuais ou, pelo menos, pouco controvertidos.

Em um segundo momento, analisamos o uso do princípio do contexto na única obra em que ele aparece explicitamente, segundo a literatura secundária. É consenso entre os comentadores que o princípio do contexto exerce um papel importante em *Os fundamentos*, mas mostramos – a partir da análise de algumas interpretações dos comentadores – que esse consenso não se revela em um acordo acerca do uso que Frege faz nessa obra. Dividimos essas interpretações em cinco abordagens diferentes e em cada uma delas privilegiamos

alguns intérpretes. Nossa intenção, com essa sistematização, não foi reduzir uma interpretação a determinado comentador, nem tampouco delimitar o número de interpretações existentes.

Sabemos que muitos comentadores adotam mais de uma interpretação, já que em *Os fundamentos* há formulações diferentes que nem sempre se equivalem. Essas interpretações geralmente não são excludentes, chegam mesmo a se entrecruzarem a tal ponto que, às vezes, fica difícil delimitá-las. Outros comentadores na disputa sobre qual seria a melhor interpretação colocam em evidência uma delas e negligenciam as demais.

No terceiro e último momento da sistematização, tocamos na questão do possível uso do princípio do contexto em obras posteriores. A questão é a mais polêmica, pois Frege não cita explicitamente o princípio do contexto em nenhuma outra obra. Entre seus comentadores também não há concordância acerca dessa questão.

É claro que há muito ainda por fazer, o que pretendemos desenvolver na continuação desses estudos. A pesquisa em Ciências Humanas, particularmente em Filosofia, possui um caráter bibliográfico. Propomos fazer uma análise sistemática do princípio do contexto e, para tanto, nossa pesquisa, além de ter um caráter bibliográfico, também teve um caráter exegetico. Analisamos alguns conceitos de Frege, como por exemplo, *referência* (*Bedeutung*), *sentido* (*Sinn*) e *conteúdo* (*Inhalt*). Por isso, achamos necessária a confrontação das traduções com o original alemão. No desenvolvimento da pesquisa, sentimos a dificuldade natural de estudar um tema cuja grande parte da bibliografia está em língua estrangeira – inglês e alemão.

O tema da nossa dissertação é muito instigante e ao mesmo tempo desafiador. Durante a pesquisa, deparamo-nos com um universo de questões a serem exploradas e tentamos dar conta delas em uma análise sistemática, tal como prometida no título. Entre os frutos de nosso trabalho, podemos destacar: o mapeamos das questões acerca do princípio do contexto e um levantamento bibliográfico sobre o tema. A bibliografia adquirida durante os nossos estudos é de domínio público dos pesquisadores que desejem trabalhar questões relacionadas a este tema.

## REFERÊNCIAS

ANGELELLI, Ignacio. *Gottlob Frege and Traditional Philosophy*. Dordrecht: Reidel, 1967.

\_\_\_\_\_. Frege's Notion of 'Bedeutung' In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Amsterdam: North-Holland, 1982. p. 735-753.

BEANEY, Michael. *The Frege: Reader*. London: Blackwell, 1997.

BEANEY, Michael. *Frege: Making Sense*. London: Duckworth, 1996.

BENACERRAF, Paul; PUTNAM, Hilary. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, 1964.

BOOLE, George. *An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Originally published by Macmillan, London, 1854. Reprint by Dover, 1958.

\_\_\_\_\_. *The Mathematical Analysis of Logic*, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning. Originally published in Cambridge by Macmillan, Barclay, & Macmillan, 1847. Reprinted in Oxford by Basil Blackwell, 1951.

DEMOPOULOS, William (Ed.). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard, 1995.

DUMMETT, Michael. *Frege and other Philosophers*. Clarendon Press: Oxford, 1991.

\_\_\_\_\_. *Frege: Philosophy of Language*. London: Duckworth, 1973.

\_\_\_\_\_. *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA: Harvard University, 1991.

\_\_\_\_\_. *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge, MA: Harvard University, 1981.

\_\_\_\_\_. *Truth and Other Enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University, 1978. p.87-115.

FREGE, Gottlob. *Begriffsschrift*. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, 1879; reedit. In: *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Angelelli org.). Hildesheim: Zürich, New York, George Olms Verlag, 1998.

\_\_\_\_\_. Über den Zweck der Begriffsschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft für das Jahr 1882 (1883), 1-10; reedit. in *Begriffsschrift und andere Aufsätze*.

\_\_\_\_\_. Über die Wissenschaftliche Berechtigung in der *Begriffsschrift*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 81, 48-56; reedit. in *Begriffsschrift und andere Aufsätze*.

\_\_\_\_\_. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, 1884. Universal-Bibliothek, 1995.

\_\_\_\_\_. *Die Grundgesetze der Arithmetik*, begriffsschriftlich abgeleitet. Vol. I, II. (1893, 1903). George Olms Verlag, Hildesheim: Zürich, New York, 1998.

\_\_\_\_\_. *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Fünf logische Studien. Editado e introduzido por. Günther Patzig, Vandenhoeck und Ruprecht: Göttingen, 1986.

\_\_\_\_\_. *Logische Untersuchungen* Editado e introduzido por Günther Patzig; Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen:1976.

\_\_\_\_\_. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Traduzido e editado por Montgomery Furth. Los Angeles: University of California, 1964.

\_\_\_\_\_. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. Resumido da edição alemã por Brian McGuinness e traduzido por Hans Kaal. Chicago: Brasil Blackwell, 1980.

\_\_\_\_\_. *Nachgelassene Schriften*. Editado por Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach, sob supervisão de Gottfried Gabriel e Walburga Rödding. Hamburg: Verlag, 1983.

\_\_\_\_\_. Os fundamentos da aritmética: Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. In: *Peirce-Frege*. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Col. Os Pensadores).

\_\_\_\_\_. Sobre a justificação Científica de uma Conceitografia. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. In: *Peirce-Frege*. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Col. Os Pensadores).

\_\_\_\_\_. Função e Conceito. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Sobre o Sentido e a Referência. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Sobre o Conceito e o Objeto. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Digressões sobre o Sentido e a Referência. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Que é uma Função? In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Aplicações da Ideografia. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. Sobre a Finalidade da Ideografia. In: ALCOFORADO, Paulo. (Org). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1978.

\_\_\_\_\_. O pensamento. Uma investigação lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001.

\_\_\_\_\_. A Negação. Uma investigação lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001.

\_\_\_\_\_. Pensamentos compostos. Uma investigação lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001.

\_\_\_\_\_. A generalidade lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Cadernos de Tradução: Investigações lógicas e outros ensaios*. Trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: EDIPE Artes Gráficas, 2001.

\_\_\_\_\_. Wissenschaftlicher Briefwechsel. Editado por Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. (Hamburgo: Felix Meiner Verlag). 1976.

HEIJENOORT, Jean van (Ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. To Excel, 1967. Reimpressão 2000.

KANT, Immanuel. *Kritik der reinen Vernunft*. Stuttgart: Reclam, 1985.

\_\_\_\_\_. *Crítica da razão pura*. São Paulo: Abril, 1983. (Coleção Os Pensadores)



KENNY, Anthony. *Frege. An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*. Blackwell Publishers, 2000. Penguin Books, 1995.

\_\_\_\_\_. *The Oxford History of Western Philosophy*. New York: University Press, 2000.

KNEALE, William; KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento da Lógica*. 2.<sup>a</sup> ed.. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1980.

MILNE, Peter. Frege's Principle Context. *Mind*, New Series. Vol. 95 N° 380. Out, 1986.

NETO, Fernando Raul. O 'Begriffsschrift' de Frege. *Revista de Filosofia*, N, dezembro 2000.

\_\_\_\_\_. O Projeto logicista de Gottlob Frege. *Anais do VIII SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática*. p. Abril 2001.

\_\_\_\_\_. O Último texto de Frege. *Perspectiva Filosófica*. V. I, n° 25. Jan-Jun/2006.

NOONAN, Harold W. *Frege: A Critical Introduction*. Cambridge: Polity, 2001.

RESNIK, M. *The context principle in Frege's Philosophy*. In: *Philosophy and Phenomenological Research* 27.

\_\_\_\_\_. Frege's Context Principle Revisited. In: SCHIRN, Matthias (ed). *Studien zu Frege*, Oxford: Stuttgart-Bad Cannstait, 1976.

RUFFINO, Marco. Context Principle, Fruitfulness of Logic and the Cognitive Value of Arithmetic in Frege. *History and Philosophy of Logic*, 12 -1991.

\_\_\_\_\_. Logicism: Fregean and Neo-Fregean. *Manuscrito*. 21:1, 1998.

\_\_\_\_\_. The Primacy of Concepts and the Priority of Judgments in Frege's Logic. *Grazer Philosophisch Studien* V. 56 – 1998-1999.

\_\_\_\_\_. Review of Frege: Philosophy of Mathematics. *Manuscrito*. V. XVI – No 2, 1993.

SCHIRN, Matthias. O Contexto Proposicional e a Questão do Significado de Termos Singulares Abstratos. Campinas: *Manuscrito*. XVI (2): 1- 4, outubro 1993.

\_\_\_\_\_. (ed). *Studien zu Frege*. Oxford: Stuttgart-Bad Cannstait, 1976

SILVA, Marilúze Ferreira de Andrade e. *Introdução à Semântica de Gottlob Frege*. Londrina: CEFIL, 1999.

SCHRÖDER, Ernest. Review of Frege's Conception Notation. 1980.

STEGMÜLLER, Wolfgang. *A Filosofia Contemporânea*. V. I. EPU. São Paulo: 1977.

WEINER, Joan. *Frege*. New York: Oxford University, 1999.

WRIGHT, Crispin. The Context Principle. In: *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, 1983.