
TESTE DE HIPÓTESES RESTRITAS EM MODELOS DE
REGRESSÃO EXPONENCIAL POTÊNCIA MULTIVARIADO

JEREMIAS DA SILVA LEÃO

Orientador: Prof. Dr. Francisco José de Azevêdo Cysneiros

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau
de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2010.

Leão, Jeremias da Silva

Teste de hipóteses restritas em modelos de
regressão exponencial potência multivariado /
Jeremias da Silva Leão. - Recife: O autor, 2010.

xv, 77 folhas: il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2010.

Inclui bibliografia.

1.Estatística aplicada. 2.Analise de regressão.
3.Modelos lineares (estatística) I.Título.

519.536 CDD (22.ed.) MEI-2010-028

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

23 de fevereiro de 2010
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Jeremias da Silva Leão

intitulada

“Teste de Hipóteses Restritas em Modelos de Regressão Exponencial Potência Multivariado”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

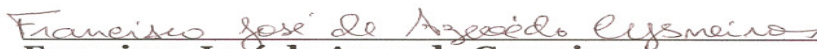


Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

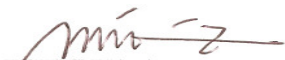


Prof. Francisco Cribari Neto
Coordenador
Pós Graduação em Estatística UFPE

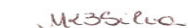


Francisco José de Azevedo Cysneiros

orientador



Victor Leiva Sanchez (Universidad Valparaiso/Chile)



Michelli Karinne Barros da Silva (UFCG)

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Dedicatória

À minha família,
Antonia Leide da Silva,
Pedro Leão Neto,
Paulo Henrique da Silva Leão, e
Míria Kayny da Silva Leão,
fundamentais nesta conquista, pelo apoio, amor e
confiança em todos os momentos da minha vida.

À minha namorada,
Rita de Cássia Lima Idalino
o amor, confiança e compreensão.

Agradecimentos

Ao professor Dr Francisco Cysneiros pela orientação, ensinamentos, confiança, paciência e amizade demonstrada ao longo deste trabalho.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe pela confiança e por todo o incentivo que sempre me deu.

Aos meus colegas e amigos de turma, Helton, Lutemberg, Manoel, Josimar e Priscila pela amizade e parceria nos momentos de ansiedade, estudo e de alegria compartilhados.

Aos amigos Marcelo, Sílvio, Diego, Ivan, Davis, Francisco, Felipe, Hemílio, Tatiane, Tarciana, Fábio, Abraão, Natasha, Marcela, Cícero e Danielle que conviveram comigo durante o período do mestrado.

À minha amiga, Raquel Geane, o carinho e as palavras de incentivo em momentos de dificuldade, por mim enfrentados.

Aos professores João Maurício, Juvêncio Nobre e Marcelo Rocha, que me ajudaram com dicas e incentivos para a conclusão dessa dissertação.

Aos amigos Manelito e Jurailson Brito, que me ajudaram bastante quando comecei a morar em Fortaleza.

Aos ex-companheiros de trabalho Junior Macambira, Rosaliane Macedo, Erle Mesquita e Arlete Cunha, que me ajudaram durante toda essa caminhada com palavras de incentivo e apoio, como também, a todos que fazem parte da DEP (Diretoria de Estudos e Pesquisas).

À Dona Maria José e Dona Severina pela acolhida na pensão, e por estarem sempre dispostas a ajudar nas diversas vezes em que fiquei doente por conta da minha alergia.

Aos companheiros de pensão João Batista, Jadson, Djekson, Josivandro, Agrinaldo (gordinho), Agosso e Dr Paulo, pelos diversos momentos de brincadeiras e discussões filosóficas.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFPE, pelos ensinamentos, motivação e incentivo.

À Valéria Bittencourt, pelo enorme carinho, paciência e amizade com que sempre tratou a mim e aos demais alunos do mestrado.

À todos que me ajudaram de forma direta e indireta para a conclusão de mais uma etapa na minha vida.

À banca examinadora, pelas valiosas críticas e sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*“Man survives earthquakes, epidemics, the horrors of disease, and agonies
of the soul, but all the time his most tormenting tragedy has been, is,
and will always be, the tragedy of the bedroom.”*

Leo Tolstoy

Neste trabalho, apresentamos um estudo com modelos de regressão supondo erros exponencial potência multivariada (MPE), distribuição proposta por Gómez, Gómez-Villegas & Marín (1998). Esta distribuição pertence à classe das distribuições elípticas e vem sendo bastante usada por vários pesquisadores em diversos contextos, como por exemplo, em modelos com medidas repetidas, modelos bayesianos hierárquicos. Mostramos os processos iterativos de estimação por máxima verossimilhança dos parâmetros sob restrições de igualdades e desigualdades lineares. Discutimos o problema de testes de hipóteses da forma $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ contra $H_2 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$, em modelos MPE. Apresentamos a avaliação do poder dos testes de hipóteses razão de verossimilhanças (RV), Wald (W) e escore (SR) para dados agrupados e sob presença de regressores, em amostras pequenas e moderadas via simulação de Monte Carlo. Comparamos as distribuições nula teórica e empírica dos testes unilaterais. Mostramos dois exemplos práticos para verificar o comportamento dos testes sob o modelo MPE. O primeiro conjunto de dados refere-se a um estudo comparativo entre grupos de diabéticos apresentado em Crowder & Hand (1990). O segundo conjunto de dados analisado é descrito por Reicziguel (1999) no estudo sobre o efeito de *cholagogues* nas mudanças de volumes na vesícula biliar em três grupos de cães.

Palavras-chave: Teste de hipóteses com restrição; Estimação restrita; Medidas repetidas; Simulações de Monte Carlo.

Abstract

In this work, we investigate the problem of testing equality and inequality constraints on the regression coefficients in linear models with Multivariate Power Exponential distribution (MPE). This distribution was proposed by Gómez, Gómez-Villegas & Marin (1998) and has received special attention in recent years of various researchers, for example, Lindsey (1999, 2006), Gómez, Gómez-Villegas & Marin (2008) and Kwitt, Meerwald & Uhl (2009). The multivariate power exponential distribution, which is a member of the multivariate elliptical distributions family, provides a useful generalization of the multivariate normal distribution, and covers both light and heavy tailed distributions. We presented the performance of the power of the likelihood ratio, Wald, Score, tests for grouped data and in the presence of regressors, in small and moderate sample sizes, via Monte Carlo simulations. We compared the theoretical and empirical distributions of the statistical one-sided tests. Additionally, we introduced two illustrative examples with real data in order to verify the performance of the tests under the MPE model.

Keywords: Hypothesis tests; Restricted estimation; Repeated measures; Monte Carlo simulation.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Formulação do problema e definição dos objetivos	2
1.3 Estrutura da dissertação	4
1.4 Alguns resultados sobre a distribuição exponencial potência nos casos uni- variado e multivariado	5
1.5 Geração de números aleatórios MPE	7
1.6 Suporte computacional	9
2 Modelo Linear Elíptico	10
2.1 Introdução	10
2.1.1 Conceitos e definições	11
2.2 Inferência em modelos MPE restrito	13
2.3 Função escore e matriz informação de Fisher	13
2.4 Estimação de máxima verossimilhança	15
2.5 g grupos	16
2.6 Restrições em igualdades lineares	17

2.7	Restrições em desigualdades lineares	19
2.8	Testes unilaterais	20
2.9	Ordem simples	21
3	Estudo das simulações	22
3.1	Introdução	22
3.2	Dados agrupados	23
3.2.1	<i>Caso I</i>	23
3.2.2	<i>Caso II</i>	36
3.2.3	<i>Presença de regressores</i>	49
4	Aplicações	62
4.1	Dados sobre diabéticos	62
4.2	Dados sobre volume da vesícula biliar	66
5	Conclusões	70
	Referências	72

Lista de Figuras

1.1	Função de densidade MPE com $k = -0,9$	8
1.2	Função de densidade MPE com $k = 0$ (caso normal multivariado).	8
1.3	Função de densidade MPE com $k = 0,9$	9
3.1	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.	24
3.2	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso I), $k = 0,3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.	25
3.3	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	26
3.4	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	26
3.5	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.	33
3.6	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).	33
3.7	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0,3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	34

3.8	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	34
3.9	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.	35
3.10	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).	35
3.11	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.	37
3.12	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.	38
3.13	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$ e $n = 10$, com estrutura uniforme.	39
3.14	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$ e $n = 10$, com estrutura AR(1).	39
3.15	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	40
3.16	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	40
3.17	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 10$, com estrutura uniforme.	41
3.18	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 10$, com estrutura AR(1).	41
3.19	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	42
3.20	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	42
3.21	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados sob presença de regressores, $k = -0, 3$, em que (a) e (b) tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente. . .	50

3.22	Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados sob presença de regressores, $k = 0, 3$, em que (a) e (b) tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente. . .	51
3.23	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	52
3.24	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	52
3.25	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0, 3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.	53
3.26	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0, 3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).	53
3.27	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.	54
3.28	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).	54
3.29	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.	55
3.30	Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).	55
4.1	AIC para vários valores do parâmetro k da distribuição MPE para o conjunto de pacientes com diabetes.	64
4.2	Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduo padronizados (direita) sob o modelo MPE($k = 0, 5$).	65
4.3	Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduos padronizados (direita) sob o modelo normal.	67
4.4	Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduos padronizados (direita) sob o modelo MPE ($k = 0, 4$).	69

Lista de Tabelas

2.1	Distribuições que pertencem à classe de distribuições elípticas com a função geradora característica e/ou densidade.	12
3.1	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0,3$ e $n = 20$	27
3.2	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0,3$ e $n = 50$	28
3.3	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0,3$ e $n = 100$	29
3.4	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0,3$ e $n = 20$	30
3.5	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0,3$ e $n = 50$	31
3.6	Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0,3$ e $n = 100$	32
3.7	Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 10$	43
3.8	Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 20$	44
3.9	Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 50$	45
3.10	Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = 0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 10$	46
3.11	Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = 0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 20$	47
3.12	Estudo de poder para dados agrupados (Caso II) $k = 0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 50$	48
3.13	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0,3$ e $n = 20$	56

3.14	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0,3$ e $n = 50$	57
3.15	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0,3$ e $n = 100$	58
3.16	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0,3$ e $n = 20$	59
3.17	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0,3$ e $n = 50$	60
3.18	Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0,3$ e $n = 100$	61
4.1	Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo MPE ($k = 0,5$), (p -valor em parêntesis).	65
4.2	Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo normal, (p -valor entre parêntesis).	67
4.3	Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo MPE ($k = 0,4$), (p -valor entre parêntesis).	69

1.1 Contextualização

É notória a utilização de modelos de regressão para a análise de dados nas mais diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, engenharia, computação, medicina, sociologia, entre outros. O objetivo dos modelos de regressão é explicar uma ou mais variáveis de interesse (resposta) em função de outras variáveis (explicativas), ver por exemplo Rao & Toutenberg (1999). Em várias aplicações práticas, no uso de modelos de regressão, é assumido para o termo aleatório do modelo, isto é, os erros, a distribuição normal. Entretanto, é conhecido que as estimativas dos coeficientes obtidas com a suposição de normalidade são sensíveis a observações atípicas, ver Olive (2008), razão pela qual foram desenvolvidas várias metodologias robustas, objetivando fornecer uma maior flexibilidade à modelagem estatística, quando o conjunto de dados possui pontos aberrantes (*outliers*). Neste sentido, o emprego de distribuições com *caudas mais pesadas*,¹ tem sido uma alternativa para tentar reduzir e ou controlar a influência nas estimativas dos coeficientes do modelo.

Entre os trabalhos desenvolvidos que fazem uso de modelos robustos, destacam-se Little (1988) e Yamaguchi (1990) propõem modelos cuja distribuição dos erros é a dis-

¹Este termo refere-se às distribuições que atribuem maior probabilidade aos eventos que ocorrem em suas caudas.

tribuição normal contaminada (vide, por exemplo, Eisenberger (1964)). Já Lange, Litte & Taylor (1989) utilizaram a distribuição t -Student com v graus de liberdade, enquanto que Taylor (1992) apresentou o ajuste de modelos de regressão linear supondo erros seguindo a distribuição exponencial potência com um parâmetro extra de forma. Finalmente, Liu & Bozdogan (2008) introduziram modelos de regressão com distribuição exponencial potência multivariada (MPE) sob dois enfoques: o primeiro assumindo observações independentes e o segundo observações dependentes.

1.2 Formulação do problema e definição dos objetivos

Testes de hipóteses na forma de desigualdades lineares foram inicialmente tratados por Bartholomew (1959a,b).² Chacko (1963) mostrou um teste de homogeneidade contra uma alternativa ordenada para a análise de variância. Kudô (1963) estendeu o trabalho de Bartholomew (1959a,b) para o caso normal multivariado com matriz de variância conhecida. Ele mostrou que a distribuição nula do teste da razão de verossimilhanças em hipóteses de igualdades contra desigualdades lineares, para os coeficientes do modelo normal linear, é dada por uma mistura de distribuições qui-quadrados ponderadas por pesos,³ diferentemente do caso em que não há restrições sobre os parâmetros do modelo.

Contudo, é importante destacar que, em estruturas de regressão, os pesos geralmente dependem dos parâmetros do modelo sob a hipótese nula. Devido a essa dependência, a distribuição nula não é única. Diversos trabalhos que tratam do estudo de testes de hipóteses com restrições em modelos de regressão foram publicados. Por exemplo, Paula & Artes (2000) utilizaram o teste tipo escore proposto por Silvapulle e Silvapulle (1995) para testar correlação positiva multivariada em modelos logísticos para dados agrupados. Cardoso-Neto & Paula (2001) fizeram uso do teste tipo Wald proposto por Kodde & Palm (1986) em modelos lineares generalizados com observações correlacionadas. Silvapulle, Silvapulle & Basawa (2002) mostraram testes com restrição na forma de desigualdades em modelos semi-paramétricos.

²Bartholomew (1959a,b) considera o teste de hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ contra $H_1: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$, em k populações normais e independentes. Esses resultados de k populações foram estendidos para a família exponencial (vide Robertson & Wegman, 1978) e também para outras distribuições, tais como binomial (vide Nagahata, 1979).

³Shapiro (1988) apresentou um resumo sobre a obtenção desses pesos.

Garre, Vermut & Croon (2002) investigaram o teste da razão de verossimilhanças para hipóteses de desigualdades em modelos log-linear. Verbeke & Molenberghs (2003) aplicaram o teste de Silvapulle & Silvapulle (1995) para avaliar a presença de efeitos aleatórios em modelos normais marginais. Cysneiros & Paula (2004) discutem testes de hipóteses com restrições em modelos t -Student multivariados com estrutura longitudinal. Cysneiros & Paula (2005) mostram testes de hipóteses com restrição em modelos simétricos de regressão. Savalli, Paula & Cysneiros (2006) aplicaram o teste tipo escore abordado em Silvapulle & Silvapulle (1995) para componentes de variância em modelos elípticos lineares misto. Pilla & Qu (2006) propuseram o teste escore quadrático (*Quadratic Score Test* - *QST*) usando inferência quadrática ⁴ (*Quadratic Inference Function*) para detectar a ordem no efeito dos tratamentos em modelos longitudinais com dados correlacionados. Tannuri-Pianto, Sousa & Arcoverde (2009) examinaram o teste tipo Wald proposto por Kodde & Palm (1986) em modelos de fronteira estocástica.⁵

Diante disso, vamos abordar o problema de testes de hipóteses $H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{d}$ versus $H_2: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{d}$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 , em modelos de regressão com a distribuição MPE. Esta distribuição foi proposta por Gómez, Gómez-Villegas & Marín (1998) como uma generalização para o caso multidimensional da distribuição exponencial potência unidimensional proposta por Subbotin (1923).

A distribuição MPE tem recebido especial atenção dos pesquisadores, entre os quais destacam-se Lindsey (1999), que mostrou aplicações em modelos com medidas repetidas. Lindsey (2006) apresentou modelos não-lineares robustos para medidas repetidas com a distribuição MPE como uma alternativa aos modelos em que a distribuição t -Student multivariada é usada. Gómez, Gómez-Villegas & Marín (2008) mostraram que a distribuição MPE é dada como uma mistura de escala da distribuição normal quando o parâmetro de curtose $\beta \in (0, 1]$, cujo resultado é usado em modelos bayesianos hierárquicos. Aplicações em modelos de reconhecimento de fala e processamento de imagens podem ser encontradas em Basu, Micchelli & Olsen (2001) e Kwitt, Meerwald & Uhl (2009).

⁴Uma abordagem detalhada sobre a função inferência quadrática é dada em Qu *et al.* (2000).

⁵Detalhes sobre estes modelos podem ser encontrados em Aigner, Lovell & Schmidt (1977).

Em face disso, o objetivo deste estudo é apresentar o desenvolvimento dos processos iterativos de estimação, como também testes de hipóteses em modelos com restrição nos parâmetros e o estudo de poder dos testes de hipóteses razão de verossimilhanças (RV), Wald (W) e escore (SR) em modelos de regressão com a distribuição MPE para a análise de dados com estrutura longitudinal.

1.3 Estrutura da dissertação

A presente dissertação é constituída por cinco capítulos. No primeiro capítulo, definimos o objetivo do trabalho e descrevemos algumas propriedades sobre a distribuição MPE. Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos um processo iterativo de estimação por máxima verossimilhança dos parâmetros em modelos elípticos assumindo erros MPE, como também as expressões das estatísticas dos testes de hipóteses razão de verossimilhanças, Wald e escore para testes com restrições de igualdades e desigualdades lineares nos parâmetros. No terceiro capítulo, apresentamos os resultados e análises do estudo de simulações para modelos MPE, supondo dados agrupados e com presença de regressores. No quarto capítulo, apresentamos duas aplicações a conjuntos de dados reais com o intuito de ilustrar o desenvolvimento teórico de tais modelos. O primeiro conjunto de dados encontra-se em Crowder & Hand (1990) referente a um estudo comparativo entre grupos de diabéticos. O segundo, é descrito por Reicziguel (1999) sobre um experimento de Sterczer *et al.* (1996) em que ultra-sonografias bidimensionais são usadas no estudo do efeito de *cholagogues*.⁶

Por fim, no quinto capítulo, discutimos as principais características observadas no estudo dos modelos de regressão MPE e perspectivas de trabalhos futuros.

⁶Um agente que promove o fluxo de bile para o intestino, principalmente como resultado da contração da vesícula biliar.

1.4 Alguns resultados sobre a distribuição exponencial potência nos casos univariado e multivariado

A distribuição exponencial potência unidimensional (EP) proposta por Subbotin (1923) pode ser considerada como uma distribuição geral para os erros aleatórios. Sua função densidade é dada por

$$f(\epsilon) = \frac{mh}{2\Gamma(\frac{1}{m})} \exp^{-h^m|\epsilon|^m}, -\infty < \epsilon < \infty, h > 0, m \geq 1. \quad (1.1)$$

Alguns autores apresentam parametrizações diferentes para essa distribuição, dentre os quais podemos citar, Lunetta ⁷ (1963) e Box & Tiao (1973). Este último apresentou uma parametrização da distribuição exponencial potência no contexto bayesiano quando existe problema na especificação da distribuição *a priori* adequada. Assim, segundo Box & Tiao (1973), temos que se $Y \sim \text{EP}(\mu, \phi, k)$, a função geradora de densidade é dada por

$$g(u) = c(k) \exp\left(-\frac{1}{2}u^{1/(1+k)}\right), \quad -1 < k \leq 1, u > 0, \quad (1.2)$$

em que $c(k)^{-1} = \Gamma\left(1 + \frac{1+k}{2}\right) 2^{1+\frac{1+k}{2}}$.

Dessa forma, temos que $\mathbb{E}(Y) = \mu$ e $\text{Var}(Y) = 2^{(1+k)} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{3(1+k)}{2})}{\Gamma(\frac{1+k}{2})} \right\} \phi$. O parâmetro k pode ser visto como um parâmetro de curtose (ou não-normalidade), sendo que para $k = 1$ temos a distribuição Laplace (exponencial dupla) e quando $k = 0$ temos a distribuição normal. Se k tende para -1 , a distribuição tende a uma distribuição uniforme no intervalo $(\mu - \sqrt{3\phi}, \mu + \sqrt{3\phi})$.

Definição 1.1: Um vetor aleatório $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$, com $m \geq 1$, tem distribuição MPE, m -dimensional, com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Phi}$ e k , em que $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\Phi}$ é uma matriz $m \times m$, simétrica definida positiva e $-1 < k \leq 1$, se sua função densidade é dada por

$$f(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k) = C(k) |\boldsymbol{\Phi}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Phi}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})]^{\frac{1}{1+k}}\right\}, \quad (1.3)$$

⁷No pacote *normalp* usado no R, a parametrização considerada é a apresentada por Lunetta (1963).

em que $C(k) = \frac{m\Gamma(\frac{m}{2})}{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(1+\frac{m(1+k)}{2}) 2^{1+\frac{m(1+k)}{2}}}$.

Denotaremos a função densidade (1.3) por $\text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k)$. Esta distribuição pertence à classe das distribuições elípticas e inclui a distribuição normal multivariada como um caso especial ($k = 0$). A importância dessa distribuição reside no fato de que ela requer apenas duas modificações simples para que a distribuição normal multivariada possa ser obtida. A primeira é na forma quadrática, visto que na MPE é elevada a uma potência. A segunda modificação é dada na constante de normalização. A distribuição MPE possui várias características interessantes, tais como: (i) pode ser usada em modelos com caudas mais pesada, $0 < k < 1$, para estimação robusta em conjunto de dados com observações aberrantes, como também em modelos com cauda mais leve, $-1 < k < 0$, comparando-se com a distribuição normal, (ii) o parâmetro de locação é a média, de modo que modelos lineares e não lineares podem ser facilmente obtidos, e (iii) a matriz de covariância pode ser estruturada de forma adequada, como por exemplo, estruturas uniforme e/ou dependência serial, mantendo a sua interpretação de correlação, ver Lindsey (1999). De maneira semelhante ao caso unidimensional, temos que se $k = 1$ obteremos a distribuição Laplace multivariada (exponencial dupla multivariada) e, quando k tende para -1 , a distribuição tende a uma distribuição uniforme multivariada. Considere a variável aleatória $\mathbf{Y} \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k)$. Resultados importantes para essa distribuição são:

- (i) $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu}$,
- (ii) $\text{Var}(\mathbf{Y}) = \frac{2^{(k+1)} \Gamma(\frac{(m+2)(1+k)}{2})}{m\Gamma(\frac{m(1+k)}{2})} \boldsymbol{\Phi}$,
- (iii) $\gamma_1(\mathbf{Y}) = 0$,
- (iv) $\gamma_2(\mathbf{Y}) = \frac{m^2 \Gamma(\frac{(m+4)(1+k)}{2}) \Gamma(\frac{m(1+k)}{2})}{\Gamma^2(\frac{(m+2)(1+k)}{2})} - m(m-2)$, onde $\gamma_1(\mathbf{Y})$ e $\gamma_2(\mathbf{Y})$ são os coeficientes multidimensionais de assimetria e curtose (para detalhes ver Mardia, Kent & Bibby, 1982) isto é,

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E} \left[((\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \text{Var}(\mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}))^3 \right], \\ \gamma_2(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E} \left[((\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \text{Var}(\mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}))^2 \right] - m(m+2), \end{aligned}$$

em que $\mathbf{X}$ é um vetor de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de $\mathbf{Y}$. Saliente-se que o termo $m(m+2)$ corresponde ao valor de $\mathbb{E} \left[((\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \text{Var}(\mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}))^2 \right]$, quando $\mathbf{Y} \sim \text{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}_m)$.

1.5 Geração de números aleatórios MPE

Definição 1.2: Se $\mathbf{Y} \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k)$, então podemos escrever $\mathbf{Y}$ através da seguinte transformação linear

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + RA'\mathbf{U}, \quad (1.4)$$

em que $\mathbf{U}$ é um vetor aleatório uniformemente distribuído na esfera unitária em $\mathbb{R}^m$. R é uma variável aleatória não negativa absolutamente contínua e independente de $\mathbf{U}$, com densidade dada por

$$f_R(r) = \frac{m}{\Gamma(1 + m(1+k)/2)} \frac{1}{2^{m(1+k)/2}} r^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}r^{2/(1+k)}\right\}, \quad 0 < r < \infty, \quad (1.5)$$

e A é uma matriz quadrada de ordem m tal que $A'A = \boldsymbol{\Phi}$.

Os momentos da variável aleatória R apresentada em (1.5) são dados por

$$\mathbb{E}(R^s) = \frac{2^{\frac{s(1+k)}{2}} \Gamma\left(\frac{(m+s)(1+k)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m(1+k)}{2}\right)},$$

para cada inteiro positivo s .

A distribuição da variável aleatória $T = R^{\frac{2}{1+k}} \sim \text{Gamma}\left(\frac{m(1+k)}{2}, \frac{1}{2}\right)$. A forma quadrática $Z = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})$ possui a mesma distribuição de R^2 . Nesse sentido, se $\mathbf{Y} \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k)$, podemos obter números aleatórios de $\mathbf{Y}$ usando a equação mostrada em (1.4). Assim, devemos seguir os seguintes passos: (i) determinar a matriz A tal que $A'A = \boldsymbol{\Phi}$, (ii) simular um vetor $\mathbf{U}$ uniformemente distribuído na esfera unitária, (iii) gerar uma observação da variável aleatória com densidade mostrada em (1.5) e (iv) usar $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + RA'\mathbf{U}$ para gerar números aleatórios de $\mathbf{Y}$.

Apresentamos, abaixo, os gráficos da distribuição MPE para os seguintes valores de $k = -0,9$, $k = 0$ e $k = 0,9$, todos com $m = 2$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_2$.

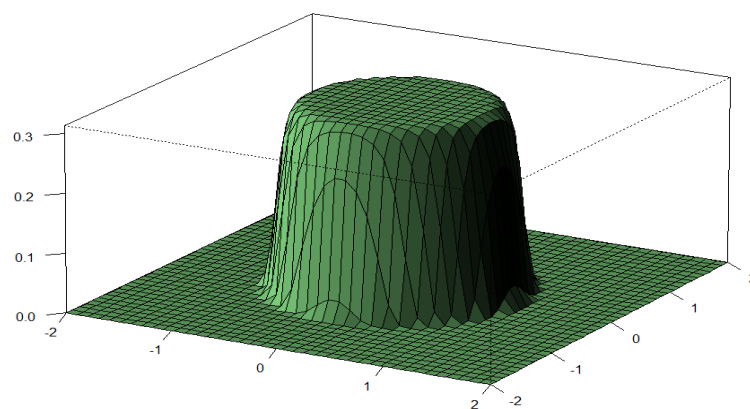


Figura 1.1: Função de densidade MPE com $k = -0,9$.

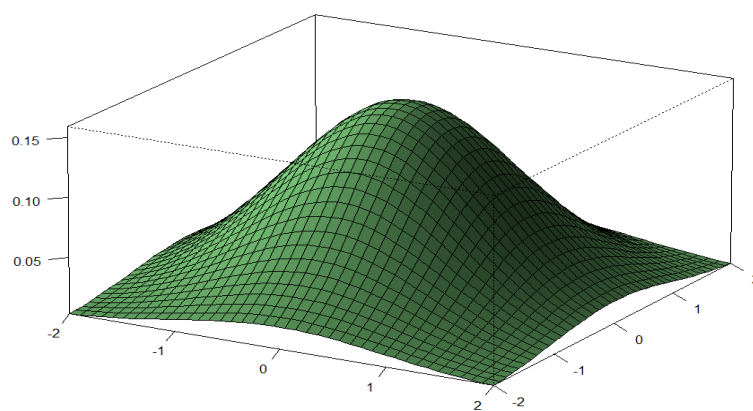
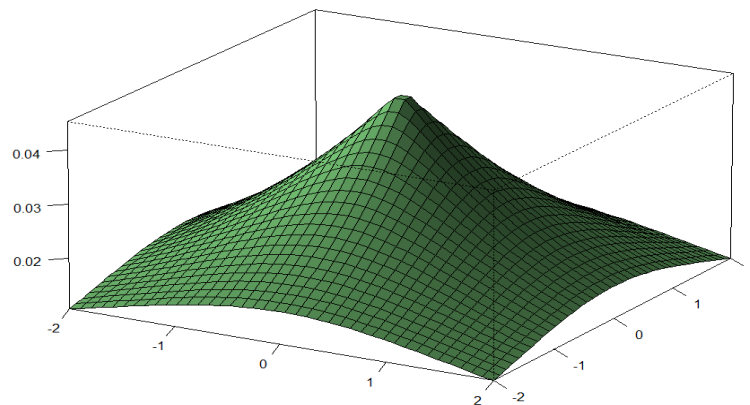


Figura 1.2: Função de densidade MPE com $k = 0$ (caso normal multivariado).

Figura 1.3: Função de densidade MPE com $k = 0,9$.

1.6 Suporte computacional

As simulações apresentadas no decorrer da dissertação foram realizadas utilizando a linguagem matricial de programação chamado `0x`, em sua versão 5.10 para sistema operacional `Windows`. Esta linguagem de programação foi desenvolvida por Doornik (1994), é distribuída gratuitamente para o uso acadêmico, (vide Doornik, 2009).

Os gráficos apresentados nesta dissertação foram produzidos utilizando o software `R`, em sua versão 2.8.0 para o sistema operacional `Windows`. Esta linguagem foi criada por Ihaka e Gentleman (1996) para produzir um ambiente de programação semelhante ao `S`, encontra-se disponível gratuitamente em <http://www.r-project.org>, para detalhes ver Venables & Ripley (2002), Crawley (2007) e Dalgaard (2009).

Para a elaboração do presente texto, foi usado o sistema tipográfico `LATEX`, desenvolvido por L^Amp^ort (1985), que consiste em uma série de macros ou rotinas do sistema `TEX`. O `LATEX` é distribuído de forma gratuita, maiores detalhes podem ser encontrados em Knuth (1986).

CAPÍTULO 2

Modelo Linear Elíptico

2.1 Introdução

Na presente dissertação, iremos trabalhar com a distribuição MPE. Como esta pertence à classe das distribuições elípticas, apresentaremos a seguir, brevemente, definições sobre distribuições elípticas. As distribuições elípticas foram introduzidas por Kelker (1970) como uma generalização da família normal multivariada; para detalhes ver Cambanis (1981) e Fang, Kotz & Ng (1990). Esta classe contém várias distribuições que possuem caudas mais pesadas do que a normal. Devido a essa característica, essas distribuições têm sido bastante aplicada na obtenção dos coeficientes de modelos de regressão, quando o conjunto de dados possuem pontos aberrantes. Podemos citar como exemplo de distribuições elípticas as seguintes: t -Student, exponencial potência, Pearson IV, Logística I, Logística II e Logística Generalizada.

2.1.1 Conceitos e definições

Dizemos que um vetor m -dimensional $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ tem distribuição normal multivariada se

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ},$$

onde $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top$ é um vetor de n variáveis aleatórias normais padrão mutuamente independentes, $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ e $\boldsymbol{\mu}$ é um vetor $m \times 1$. Podemos expressar a função característica de $\mathbf{Y}$ da forma

$$\mathbb{E}(\exp(it^\top \mathbf{Y})) = \exp(it^\top \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Phi} \mathbf{t}\right), \quad (2.1)$$

para algum vetor $\boldsymbol{\mu}$, $m \times 1$, e alguma matriz $\boldsymbol{\Phi}$, $m \times m$, simétrica e definida positiva, ambos fixados, com $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^\top$. Para variáveis aleatórias com distribuição normal multivariada com os parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Phi}$, usamos a notação $\mathbf{Y} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi})$. Temos que $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de médias e $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz de variância-covariância. Note que há uma relação entre $\boldsymbol{\Phi}$ e $\mathbf{A}$ dada por $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{AA}^\top$. A classe de distribuições elípticas multivariada é dada como uma extensão natural da classe de distribuições normal multivariada.

Definição 2.1: Um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ tem distribuição elíptica com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Phi}$ se a função característica pode ser expressa como

$$\mathbb{E}(\exp(it^\top \mathbf{Y})) = \exp(it^\top \boldsymbol{\mu}) \psi(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Phi} \mathbf{t}), \quad (2.2)$$

para alguma função ψ , com $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^\top$ e $\boldsymbol{\Phi}$ dado por

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{AA}^\top, \quad (2.3)$$

para alguma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$.

Se $\mathbf{Y}$ possui distribuição elíptica usaremos a notação $\mathbf{Y} \sim \text{El}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, \psi)$, em que ψ é a função característica geradora de $\mathbf{Y}$ e, conseqüentemente, a função característica geradora da normal multivariada é dada por $\psi(u) = \exp(-u/2)$. Sabemos que a função característica de um vetor aleatório sempre existe e que há uma correspondência de um a um entre

a função distribuição acumulada e a função característica. Entretanto, nem toda função ψ pode se usada para a construção da função característica de uma distribuição elíptica. Temos, obviamente, que a função ψ requer que $\psi(0) = 1$. Uma condição necessária e suficiente para a função característica geradora ψ de um vetor $m \times 1$ de uma distribuição elíptica é dado em Fang & Zhang (1990).

Definição 2.2: Seja $\mathbf{Y}$ um vetor m -dimensional com distribuição elíptica e parâmetros de locação $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ e matriz $\boldsymbol{\Phi}$ definida positiva. Então, a função de densidade de $\mathbf{Y}$ assume a forma

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\boldsymbol{\Phi}|^{-1/2} g(u), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (2.4)$$

em que $u = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Phi}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})$. A função $g(\cdot)$, geralmente conhecida, é denominada de função geradora de densidade obedece a condição $\int_0^\infty u^{m/2-1} g(u) du < \infty$, em que $g(u) > 0$, para $u > 0$, ver por exemplo, Fang & Zhang (1990). Uma descrição sobre distribuições elípticas multivariada pode ser vista em Galea, Paula & Bolfarine (1997) e Osorio, Paula & Galea (2007). Apresentamos na Tabela 2.1 algumas distribuições pertencente à classe de distribuições elípticas com suas respectivas funções geradoras de densidade/ou característica.

Tabela 2.1: Distribuições que pertencem à classe de distribuições elípticas com a função geradora característica e/ou densidade.

Distribuições	Função geradora de densidade, $g(u)$, ou característica $\psi(u)$
Normal	$g(u) = \exp(-u/2); \psi(u) = \exp(-u/2)$
t -Student	$g(u) = (1 + \frac{u}{m})^{(m+n)/2}, n > 0,$
Exponencial potência	$g(u) = \exp(-r(u))^s, r, s > 0$
Logística	$g(u) = \frac{\exp(-u)}{[1+\exp(-u)]^2}$
Laplace	$g(u) = \exp(- u)$

2.2 Inferência em modelos MPE restrito

Consideremos o modelo

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Neste modelo supomos que temos n indivíduos em que cada um é observado em m_i ocasiões. Dessa forma, $\mathbf{Y}_i$ é um vetor m_i -dimensional, ou seja, a resposta do i -ésimo indivíduo é dada pelo vetor $m_i \times 1$, $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$, $\mathbf{x}_i$ é uma matriz $m_i \times p$ (denominada de matriz de planejamento) contendo valores de p variáveis explicativas, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é o vetor de parâmetros e os $\boldsymbol{\epsilon}_i$'s são vetores $m_i \times 1$ de erros independentes. Cada $\boldsymbol{\epsilon}_i$ é assumido seguir uma distribuição MPE, i.e., $\boldsymbol{\epsilon}_i \sim \text{MPE}_{m_i}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_i, k_i)$, cuja função densidade é dada em (1.3). Assim, temos que $\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}$ e $\text{Var}(\mathbf{Y}_i) = \frac{2^{(1+k_i)} \Gamma([(m_i+2)(1+k_i)]/2)}{m_i \Gamma([m_i(1+k_i)]/2)} \boldsymbol{\Phi}_i$. Neste trabalho assumiremos que os k_i 's são fixados.

A matriz $\boldsymbol{\Phi}_i$ pode ser parametrizada assumindo que $\boldsymbol{\Phi}_i = \sigma^2 \mathbf{R}_i$, em que $\sigma^2 > 0$ é um parâmetro de escala e $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(\boldsymbol{\rho})$ é uma matriz de correlação para cada indivíduo reparametrizada por um conjunto de parâmetros $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_q)^\top$ que não dependem de $\boldsymbol{\beta}$. Para uma abordagem mais detalhada sobre $\boldsymbol{\rho}$, ver Jennrich & Schluchter (1986). Podemos assumir várias estruturas de correlação para $\mathbf{R}_i(\boldsymbol{\rho})$, ver detalhes em Milliken & Johnson (2002), Weiss (2005) e Singer, Nobre & Rocha (2009).

2.3 Função escore e matriz informação de Fisher

O logaritmo da função de verossimilhança do modelo (2.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) &= \sum_{i=1}^n \log(C(k_i)) - \frac{n}{2} \bar{m} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(|\mathbf{R}_i|) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}) \right\}^{\frac{1}{1+k_i}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $C(k_i) = m_i \Gamma(m_i/2) / [\pi^{m_i/2} \Gamma(1 + m_i(1 + k_i)/2) 2^{1+m_i(1+k_i)/2}]$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$.

Denotando-se $v_i = \frac{1}{1+k_i} u_i^{(1/(1+k_i))^{-1}}$, em que $u_i = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})$ é a distância de Mahalanobis, a função escore de $\boldsymbol{\beta}$, σ^2 e $\boldsymbol{\rho}$ fica, respectivamente, dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}), \\
\mathbf{U}_{\sigma^2}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{n\bar{m}}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n v_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}) \text{ e} \\
\mathbf{U}_\rho(\boldsymbol{\theta}) &= (U_{\rho_1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_{\rho_q}(\boldsymbol{\theta}))^\top,
\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{U}_{\rho_j}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(\mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_j} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n v_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i^{-1}}{\partial \rho_j} \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}), \quad (2.7)$$

para $j = 1, \dots, q$.

A matriz de informação de Fisher para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}^\top)^\top$ é dada por

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma^2\sigma^2} & \mathbf{K}_{\sigma^2\rho} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\rho\sigma^2} & \mathbf{K}_{\rho\rho} \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\beta\beta} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(1+k_i)^{-2} \Gamma\left(\frac{m_i(1+k_i)-2k_i+2}{2}\right)}{m_i 2^{(k_i-1)} \Gamma\left(\frac{m_i(1+k_i)}{2}\right)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{x}_i, \\
\mathbf{K}_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(1+k_i)^2}, \\
\mathbf{K}_{\sigma^2\rho_j} &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+k_i} \text{tr} \left(\mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_j} \right), \\
\mathbf{K}_{\rho_j\rho_\ell} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_i(1+k_i)+2}{(m_i+2)(1+k_i)} \text{tr} \left(\mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_j} \mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_\ell} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(1+k_i)(m_i+2)} \text{tr} \left(\mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_j} \right) \text{tr} \left(\mathbf{R}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \rho_\ell} \right).
\end{aligned}$$

Note que $\mathbf{K}_{\sigma^2\rho}$ é um vetor $1 \times q$, em que $\mathbf{K}_{\sigma^2\rho_j}$ representa o j -ésimo elemento, de forma semelhante temos que $\mathbf{K}_{\rho\rho}$ é uma matriz $q \times q$, em que o elemento (j, ℓ) -ésimo é representado por $\mathbf{K}_{\rho_j\rho_\ell}$. Pode-se mostrar que $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\rho}$, como também, $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 são ortogonais.

2.4 Estimação de máxima verossimilhança

As estimativas dos parâmetros do modelo (2.5) são obtidas através do processo iterativo conjunto para resolver $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) = 0$, $\mathbf{U}_{\sigma^2}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) = 0$ e $\mathbf{U}_\rho(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) = 0$, dado por

$$\boldsymbol{\beta}^{(r+1)} = \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{y}_i \quad (2.8)$$

e

$$\boldsymbol{\theta}^{(r+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\beta}^{(r+1)}, \boldsymbol{\theta}), \text{ com } \boldsymbol{\theta} = (\sigma^2, \boldsymbol{\rho}^\top)^\top, r = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

Valores iniciais de $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$, $\sigma^{2(0)}$ e $\boldsymbol{\rho}^{(0)}$ devem ser fornecidos para inicialização do processo iterativo (2.8)-(2.9). Como valores iniciais podemos usar os valores obtidos a partir do método dos momentos ou podemos também fazer o ajuste do modelo supondo erros normais multivariados e tomarmos as estimativas obtidas como valores iniciais. Na resolução da equação (2.9), devemos aplicar algum algoritmo de maximização, visto que os parâmetros não possuem forma fechada, dentre os quais temos, quasi-Newton, EM (*Expectation-Maximization*), GA (*Genetic Algorithms*). Neste trabalho usaremos o algoritmo quasi-Newton BFGS implementado no software **0x**. Devido a inferência em modelos elípticos ser dada de forma semelhante a modelos normais, em que este é um caso particular do primeiro, temos que sob condições de regularidade, os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sejam assintoticamente normais, como também suas respectivas matrizes de variâncias-covariâncias; ver Verbeke (1995). Assim, segundo Lange, Litte & Taylor (1989) e Kowalski, Mendoza-Blanco, Tu & Gleser (1999), $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é um estimador consistente de $\boldsymbol{\beta}$ e

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}), \text{ em que } \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}.$$

Um estimador consistente da matriz de variância-covariância assintótica de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é dado por $\hat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}^{-1} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma([m_i(1+k_i)-2k_i+2]/2)}{m_i(1+k_i)^2 \Gamma([m_i(1+k_i)]/2) 2^{(k_i-1)}} \mathbf{x}_i^\top \hat{\mathbf{R}}_i^{-1} \mathbf{x}_i \right)^{-1}$.

2.5 g grupos

Supondo que temos g grupos, em que cada um tenha n_ℓ indivíduos que são observados nas mesmas m ocasiões. A resposta para o i -ésimo indivíduo do ℓ -ésimo grupo é dada por $\mathbf{Y}_{i\ell} = (Y_{i\ell 1}, \dots, Y_{i\ell m})^\top$, para $i = 1, \dots, n_\ell$ e $\ell = 1, \dots, g$. O modelo, neste caso, é representado da forma

$$\mathbf{Y}_{i\ell} = \mu_\ell \mathbf{1}_m + \boldsymbol{\epsilon}_{i\ell},$$

em que $\mathbf{1}_m$ é um vetor $m \times 1$ de uns e $\boldsymbol{\epsilon}_{i\ell} \sim \text{MPE}_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_{i\ell}, k_\ell)$ com $\boldsymbol{\Phi}_{i\ell} = \sigma^2 \mathbf{R}(\boldsymbol{\rho})$ e $\sigma^2 > 0$, onde $\mathbf{R}(\boldsymbol{\rho})$ denota a matriz de correlação para cada indivíduo, para $j = 1, \dots, m$. Assim, temos que $\mathbb{E}(Y_{i\ell j}) = \mu_\ell$ e $\text{Var}(Y_{i\ell j}) = \frac{2^{(1+k_\ell)} \Gamma([m(1+k_\ell)]/2)}{m \Gamma([m(1+k_\ell)]/2)} \sigma^2$. A estimativa de máxima verossimilhança de μ_ℓ é

$$\hat{\mu}_\ell = \left\{ \sum_{i=1}^{n_\ell} \hat{v}_{i\ell} \mathbf{1}_m^\top \mathbf{R}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\rho}}) \mathbf{1}_m \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\ell} \hat{v}_{i\ell} \mathbf{1}_m^\top \mathbf{R}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\rho}}) \mathbf{Y}_{i\ell} \right\}. \quad (2.10)$$

Neste caso, temos que $v_{i\ell} = \frac{1}{1+k_\ell} u_\ell^{(1/(1+k_\ell))^{-1}}$ com $u_\ell = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{Y}_{i\ell} - \mu_\ell \mathbf{1}_m)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y}_{i\ell} - \mu_\ell \mathbf{1}_m)$. Assumindo que $\frac{n_\ell}{n} \rightarrow \gamma_\ell$, $\forall \ell$, quando $n \rightarrow \infty$, segue sob condições de regularidade que

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N_g(\mathbf{0}, \mathbf{J}_\mu^{-1}),$$

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_g)^\top$, $n = n_1 + \dots + n_g$ e $\mathbf{J}_\mu = \text{diag}\{\nu_1^2, \dots, \nu_g^2\}$ com

$$\begin{aligned} \nu_\ell^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{\Gamma([m(1+k_\ell) - 2k_\ell + 2]/2)}{m \sigma^2 2^{(k_\ell-1)} (1+k_\ell)^2 \Gamma([m(1+k_\ell)]/2)} (\mathbf{1}_m^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}_m) \\ &= \frac{\Gamma([m(1+k_\ell) - 2k_\ell + 2]/2) \gamma_\ell}{m \sigma^2 2^{(k_\ell-1)} (1+k_\ell)^2 \Gamma([m(1+k_\ell)]/2)} (\mathbf{1}_m^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}_m). \end{aligned}$$

Dessa forma, um estimador consistente para a variância assintótica de $\hat{\mu}_\ell$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\ell^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{\Gamma([m(1+k_\ell) - 2k_\ell + 2]/2)}{2^{(k_\ell-1)} (1+k_\ell)^2 m \hat{\sigma}^2 \Gamma([m(1+k_\ell)]/2)} (\mathbf{1}_m^\top \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{1}_m) \right\}^{-1} \\ &= \frac{m 2^{(k_\ell-1)} (1+k_\ell)^2 \Gamma([m(1+k_\ell)]/2) \hat{\sigma}^2}{\Gamma([m(1+k_\ell) - 2k_\ell + 2]/2) n_\ell} (\mathbf{1}_m^\top \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{1}_m)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^g \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{j=1}^m \hat{v}_{i\ell} (y_{i\ell j} - \hat{\mu}_\ell)^2$ e $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\rho}})$ é avaliado em algum estimador consistente de $\boldsymbol{\rho}$.

2.6 Restrições em igualdades lineares

Aqui, estamos interessados na estimação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ sob k restrições lineares independentes do tipo $\mathbf{C}_j \boldsymbol{\beta}^\top - d_j = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{C}_j$, para $j = 1, \dots, k$, são vetores $p \times 1$ e d_j , para $j = 1, \dots, k$, são escalares, ambos números conhecidos e fixados. A dificuldade, neste caso, é maximizar o logaritmo da função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho})$ sujeito às restrições lineares $\mathbf{C}^\top \boldsymbol{\beta} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1^\top, \dots, \mathbf{C}_k^\top)^\top$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)^\top$. Alguns autores propuseram processos iterativos para encontrar as estimativas de máxima verossimilhanças em modelos com restrições nos parâmetros como Nyquist (1991) e Cysneiros & Paula (2005) fizeram uso da função penalizada quadrática para encontrar as estimativas de máxima verossimilhanças em modelos lineares generalizados (MLG) e em modelos simétricos de regressão, respectivamente. Esta função é usada em problemas de otimização; ver Fletcher (1987) e Bazaraa, Shelali & Shetty (1993). Assim, a função penalizada quadrática para o modelo em estudo é

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi}) = L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \psi_j (d_j - \mathbf{C}_j^\top \boldsymbol{\beta})^2,$$

cujo procedimento de maximização consiste em obter a solução de $\max_{(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho})} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi})$ para valores positivos e fixados de ψ_j , para $j = 1, \dots, k$. A solução para $\boldsymbol{\beta}$ é denotada por $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\psi})$ e a estimativa restrita por igualdade é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^0 = \lim_{\psi_1, \dots, \psi_k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\psi}).$$

Assim, pode-se mostrar que $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\psi})$ é a solução do processo iterativo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{0(r+1)} &= \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{y}_i + \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \\ &\quad \times \mathbf{C}^\top \left\{ \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \mathbf{C}^\top \right\}^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{d} - \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{y}_i \right\}, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que $\sigma^{2(r)}$ e $\mathbf{R}_i^{(r)}$ são obtidas por (2.9). O processo iterativo (2.12) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{0(r+1)} &= \mathbf{b}^{(r+1)} + \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \\ &\quad \mathbf{C}^\top \left\{ \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^n v_i^{(r)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-(r)} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \mathbf{C}^\top \right\}^{-1} \{ \mathbf{d} - \mathbf{C} \mathbf{b}^{(r+1)} \}, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

em que $\mathbf{b}^{(r+1)}$ denota $\boldsymbol{\beta}^{(r+1)}$ avaliada na estimativa restrita.

Sob condições de regularidade mostra-se que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^0$ é um estimador consistente de $\boldsymbol{\beta}$; ver Gouriéroux *et al.* (1995). Assim,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0 - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N_p(\mathbf{0}, (\mathbf{J}_{\beta\beta}^0)^{-1}),$$

em que

$$\mathbf{J}_{\beta\beta}^0 = \lim_{\psi_1, \dots, \psi_k \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right\} \right]$$

e

$$\mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma([m_i(1+k_i) - 2k_i + 2]/2)}{m_i 2^{(k_i-1)} (1+k_i)^2 \Gamma([m_i(1+k_i)]/2)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C},$$

com $\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$. Isto posto, um estimador consistente da matriz de variância-covariância assintótica de $\hat{\boldsymbol{\beta}}^0$ é dado por

$$\begin{aligned} &\lim_{\psi_1, \dots, \psi_k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma([m_i(1+k_i) - 2k_i + 2]/2)}{m_i 2^{(1+k_i)} (1+k_i)^2 \Gamma([m_i(1+k_i)]/2)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \right\}^{-1} \\ &= \mathbf{K}_{\beta\beta}^{-1} \{ \mathbf{I}_p - \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{-1} \mathbf{C}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{-1} \}, \end{aligned}$$

que pode ser avaliado em algum estimador consistente de $\boldsymbol{\beta}$, tais como $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ou $\hat{\boldsymbol{\beta}}^0$.

Temos como interesse testar as hipóteses $H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{d}$ versus $H_1: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{d}$. Usamos os testes da razão de verossimilhanças, Wald e escore, que são as estatísticas mais usadas para testar este tipo de hipóteses. A forma das estatísticas são

$$\begin{aligned}\xi_{RV}^* &= 2\{L(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0)\}, \\ \xi_W^* &= (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d})^\top \hat{\text{Var}}^{-1}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d})^\top \{\mathbf{C}\hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{-1}\mathbf{C}^\top\}^{-1}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d}) \quad e \\ \xi_{SR}^* &= \{\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0) - \mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\boldsymbol{\rho}})\}^\top \hat{\text{Var}}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0) - \mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2, \hat{\boldsymbol{\rho}})\} \\ &= \mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0)^\top (\hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^0)^{-1} \mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0).\end{aligned}$$

Note que $\hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta}$ e $\hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^0$ são as matrizes de informação de Fisher avaliadas em $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\sigma}^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^\top)^\top$ e $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{0\top}, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^{0\top})^\top$, respectivamente. Sob H_0 e para n grande, temos que ξ_{RV}^* , ξ_W^* e ξ_{SR}^* seguem distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade.

2.7 Restrições em desigualdades lineares

Neste caso, temos que maximizar a função log-verossimilhança dada em (2.6) restrita ao conjunto de desigualdades $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{d} \geq \mathbf{0}$. Este processo é resolvido aplicando-se as condições de Kuhn-Tucker para atingir o máximo restrito. Assim, temos que considerar a função lagrangiana

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) = L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) + \sum_{i=1}^k \lambda_j (\mathbf{C}_j^\top \boldsymbol{\beta} - d_j),$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange. Condições suficientes para garantir que $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ corresponda as estimativas restrita por desigualdades são:

- (i) $\mathbf{C}_j^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}} = d_j$ para $j \in \mathbf{I} \subseteq 1, \dots, k$ e $\mathbf{C}_j^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}} > d_j, \forall j \notin \mathbf{I}$, isto é, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ é um ponto admissível;
- (ii) Existe $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k)^\top \geq \mathbf{0}$ tal que $\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^\top, \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top)^\top} = \mathbf{0}$, isto é, $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^\top, \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top)^\top$ é um ponto estacionário;
- (iii) $\mathbf{s}^\top \ddot{L}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{s}|_{(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^\top, \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top)^\top} < \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{s} \in \{\mathbf{s} | \mathbf{C}^\top \mathbf{s} - d_j = 0, j \in \mathbf{I}, \tilde{\lambda}_j > 0 \text{ e } \mathbf{C}_j^\top \mathbf{s} - d_j > 0, i \notin \mathbf{I}, \tilde{\lambda}_j = 0\}$, em que $\ddot{L}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho})$ representa a matriz de segundas derivadas com respeito a $(\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top)^\top$.

Assim, temos que a estimativa por desigualdade $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ é obtida através de um problema de maximização satisfazendo as três condições apresentadas acima. Dessa forma, o problema restrito por desigualdades reduz-se a um problema restrito de igualdades.

2.8 Testes unilaterais

Aqui, consideramos o problema de testar $H_0: \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\beta} = \mathbf{d}$ versus $H_2: \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{d}$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . As formas das estatísticas dos testes de razão de verossimilhanças, Wald e escore são:

$$\begin{aligned}\xi_{RV} &= 2\{L(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\boldsymbol{\rho}}) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0)\}, \\ \xi_W &= (\mathbf{C}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d})^\top \{\mathbf{C}\tilde{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{-1}\mathbf{C}^\top\}(\mathbf{C}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{d}) \text{ e} \\ \xi_{SR} &= \{\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0) - \mathbf{U}_\beta(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\boldsymbol{\rho}})\}^\top (\hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^0)^{-1} \{\mathbf{U}_\beta(\hat{\boldsymbol{\beta}}^0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{\boldsymbol{\rho}}^0) - \mathbf{U}_\beta(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\boldsymbol{\rho}})\}.\end{aligned}$$

Segue-se sob condições de regularidade (ver Gouriéroux *et al.*, 1995) que as estatísticas ξ_{RV} , ξ_{SR} e ξ_W são assintoticamente equivalentes a uma mistura de distribuições qui-quadrados da forma

$$\Pr\{\xi_{RV} \geq c\} = \sum_{\ell=0}^k \omega(k, \ell, \boldsymbol{\Delta}) \Pr\{\chi_\ell^2 \geq c\}, \quad (2.13)$$

em que $c \geq 0$, $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{C}\mathbf{K}_{\beta\beta}^{-1}\mathbf{C}^\top$, χ_0^2 representa a distribuição degenerada na origem e $\omega(k, \ell, \boldsymbol{\Delta})$ são os pesos denominados de probabilidades de nível, que são expressos como funções dos coeficientes de correlação associados com $\boldsymbol{\Delta}$. É possível mostrar que os coeficientes de correlação associados com $\boldsymbol{\Delta}$ não dependem de $\boldsymbol{\beta}$, porém podem depender dos coeficientes de correlação associados com $(\rho_1, \dots, \rho_q)$. Esta característica é também observada nos modelos normal e t -multivariado, mas em geral isso não ocorre em todos modelos de regressão, por exemplo, em modelos lineares generalizado (vide, Paula & Sen 1995). Assim sendo, deve-se procurar a situação menos favorável no conjunto de $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_q)^\top$ e com isso (2.13) será expresso como

$$\Pr\{\xi_{RV} \geq c\} = \sup_{\boldsymbol{\Delta}} \sum_{\ell=0}^k \omega(k, \ell, \boldsymbol{\Delta}) \Pr\{\chi_\ell^2 \geq c\},$$

ou então deve-se substituir $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\rho})$ em (2.13) por uma estimativa consistente.

2.9 Ordem simples

Considerando-se o caso de g grupos, suponha que estamos interessados em testar ordem simples $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_g$ versus $H_2: \mu_1 \leq \dots \leq \mu_g$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . A estatística de Wald, neste caso, fica dada por

$$\xi_W = (\mathbf{C}\tilde{\boldsymbol{\mu}})^\top (\mathbf{C}^\top \tilde{\mathbf{V}}_\mu \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{C}\tilde{\boldsymbol{\mu}}),$$

em que $\mathbf{C}$ é uma matriz $(g-1) \times g$ cuja j -ésima linha é formada por zeros com um na $(j+1)$ -ésima posição e -1 na j -ésima posição e $\mathbf{V}_\mu = \nu_1^2, \dots, \nu_g^2$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ é a estimativa de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ sob H_2 . As correlações associadas com a matriz $\boldsymbol{\Delta}$ são

$$\begin{aligned} \vartheta_{\ell(\ell+1)} = \vartheta_{(\ell+1)\ell} &= - \left[\frac{\nu_\ell^{-2} \nu_{j+2}^{-2}}{(\nu_{\ell+1}^{-2} + \nu_\ell^{-2})(\nu_{j+1}^{-2} + \nu_{j+2}^{-2})} \right]^{1/2} \\ &= - \left[\frac{\gamma_\ell^{-2} \gamma_{j+2}^{-2}}{(\gamma_{\ell+1}^{-2} + \gamma_\ell^{-2})(\gamma_{j+1}^{-2} + \gamma_{j+2}^{-2})} \right]^{1/2}, \ell = 1, \dots, g-2 \end{aligned}$$

em que $\vartheta_{\ell\ell'} = 0$ para $|\ell - \ell'| > 1$, e não dependem de $\boldsymbol{\mu}$. Assim sendo, a distribuição nula assintótica da parte direita de (2.13) é única para o caso de ordem simples.

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados e análises obtidas através do estudo de simulações de Monte Carlo, com 5000 réplicas, em que avaliamos o poder das estatísticas ξ_{SR} , ξ_{RV} e ξ_W definidas para uma mesma estrutura de correlação $\mathbf{R}(\rho)$. Verificamos, também, se há ganho de poder entre as estatísticas ξ e ξ^* , casos unilateral e bilateral, respectivamente. Supomos dados agrupados e sob presença de regressores. Assumimos dois tipos de estrutura de correlação, $\mathbf{R}(\rho)$, para as respostas de um mesmo indivíduo, sendo estas: uniforme e AR(1). Além disso, foram considerados dois parâmetros restritos. Temos que $|\rho| < 1$, todavia, na presente dissertação, trabalhamos com $\rho \in [0; 0,8]$. Em relação ao poder do teste, este foi estimado como a proporção de p -valores maiores que o nível de significância $\alpha = 5\%$, em todos os casos. Os p -valores dos testes bilaterais, ξ_{SR}^* , ξ_{RV}^* e ξ_W^* , foram definidos como $P = \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, no qual t é o valor da estatística do teste, ao passo que, para as estatísticas unilaterais, ξ_{SR} , ξ_{RV} e ξ_W , o p -valor é definido como

$$P = \sup_{\Delta} \{ \omega(2, 1, \Delta) \Pr(\chi_1^2 \geq t) + \omega(2, 2, \Delta) \Pr(\chi_2^2 \geq t) \}, \quad (3.1)$$

em que $P = 1$ para $t = 0$, temos que os pesos, neste caso, assumem os seguintes valores $\omega(2, 1, \Delta) = \frac{1}{2}$ e $\omega(2, 2, \Delta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos(\vartheta)$. Note que ϑ são os coeficientes de correlação associados com a matriz Δ .

3.2 Dados agrupados

3.2.1 Caso I

Seja $\mathbf{Y}_i$ uma variável aleatória com distribuição MPE isto é, $\mathbf{Y}_i \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, k)$, para $i = 1, \dots, n$ e $m = 3$. Assim, temos que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^\top$ e matriz de variância-covariância $\boldsymbol{\Phi} = \sigma^2 \mathbf{R}(\rho)$, em que $\sigma^2 = 2$. A distribuição MPE pode ser usada em modelos com caudas mais leve ou mais pesadas comparando-se com a distribuição normal multivariada. Dessa forma, assumimos para k , parâmetro de curtose, os valores $k = -0,3$ e $0,3$. Amostras de tamanhos $n = 20, 50$ e 100 foram geradas para cada uma das situações. Nesse contexto, nosso objetivo é testar as hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ versus $H_2: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . Nos dados gerados, usamos $\mu_1 = \mu_2 = 1$ e $\mu_3 = 1 + \delta$, no qual $\delta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. A matriz $\boldsymbol{\Delta}$ é expressa por

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\sigma^2 m(1+k)^2 (2^{(k-1)}) \Gamma([m(1+k)]/2)}{n \Gamma([m(1+k) - 2k + 2]/2)} \begin{pmatrix} 2 - 2\rho_1 & \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - 1 \\ \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - 1 & 2 - 2\rho_3 \end{pmatrix}.$$

Para a estrutura AR(1), temos que $\rho_1 = \rho_3 = \rho$ e $\rho_2 = \rho^2$, logo $\vartheta = \frac{\rho-1}{2}$. Para a estrutura uniforme, temos que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, logo $\vartheta = -\frac{1}{2}$. Assim, temos que a região menos favorável ocorre quando $\rho = 1$ para a estrutura AR(1), portanto $P = \frac{1}{2} \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + \frac{1}{4} \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$ e é determinada de forma única para a estrutura uniforme em que $P = \frac{1}{2} \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + \frac{1}{6} \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, $t > 0$.

Analisando-se os resultados do estudo de simulação (ver Tabelas 3.1-3.6) notamos, em geral, que os tamanhos empíricos dos testes aproximam-se do nível nominal à proporção que o tamanho amostral cresce. Observamos, também, que o poder aumenta à medida que a correlação e o tamanho amostral crescem. Isto se deve ao fato de que quanto maior a correlação entre y_{ij} e $y_{ij'}$, com $j \neq j'$, maior é a probabilidade do teste para captar diferenças entre μ_j e $\mu_{j'}$, se estas são distintas. Note que os testes unilaterais apresentam um melhor desempenho sobre os testes bilaterais. As Figuras 3.1-3.2 mostram as diferenças entre as distribuições nulas teórica e empírica, em valor absoluto, da estatística ξ_{RV} para os percentis 25%, 50%, 75%, 90% e 95% da distribuição nula assintótica. Podemos notar que as diferenças, são em geral, maiores para as distribuições platicúrticas

($k = -0,3$) em comparação com distribuições leptocúrticas ($k = 0,3$). Isto é verificado principalmente quando a estrutura de correlação é AR(1).

Um aspecto que, também, deve ser notado é que, em geral, as diferenças decrescem à medida que a correlação cresce. As distribuições nulas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} são apresentadas nas Figuras 3.3-3.10. Podemos notar que há uma boa concordância entre as distribuições, entretanto, em alguns casos a distribuição empírica parece subestimar a distribuição nula teórica, como por exemplo para $n = 20$ e estrutura AR(1). Destaque-se que tendências semelhantes foram observadas para as estatísticas ξ_{SR} e ξ_{SR} .

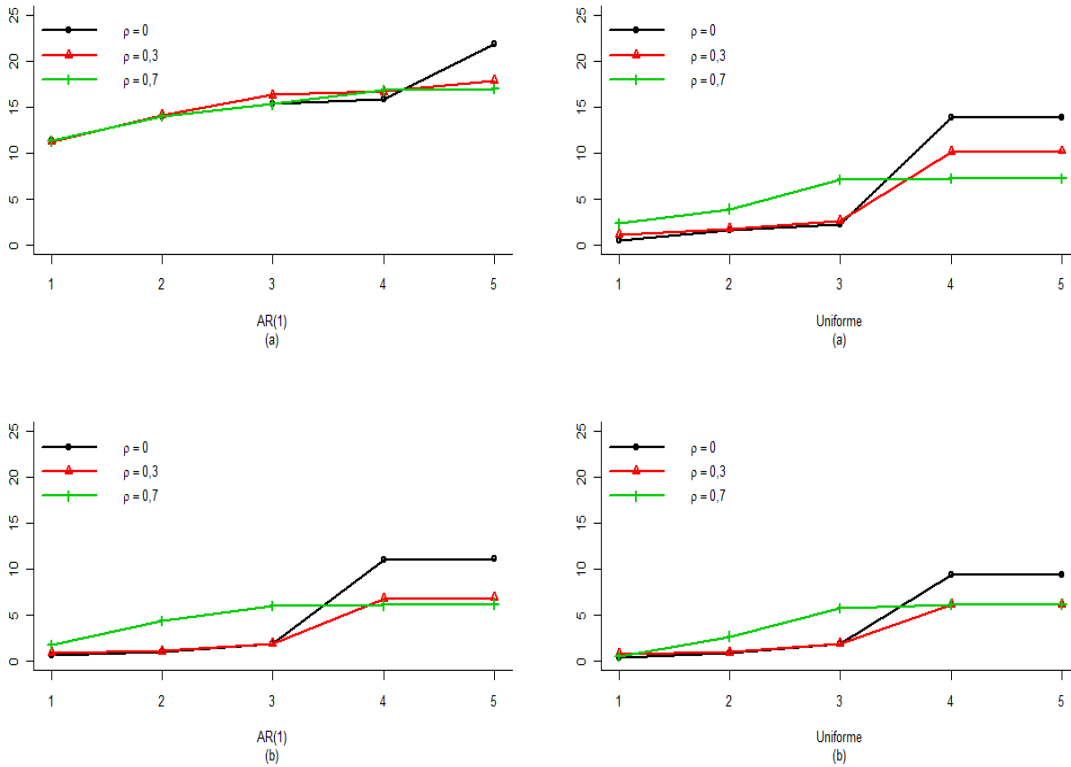


Figura 3.1: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

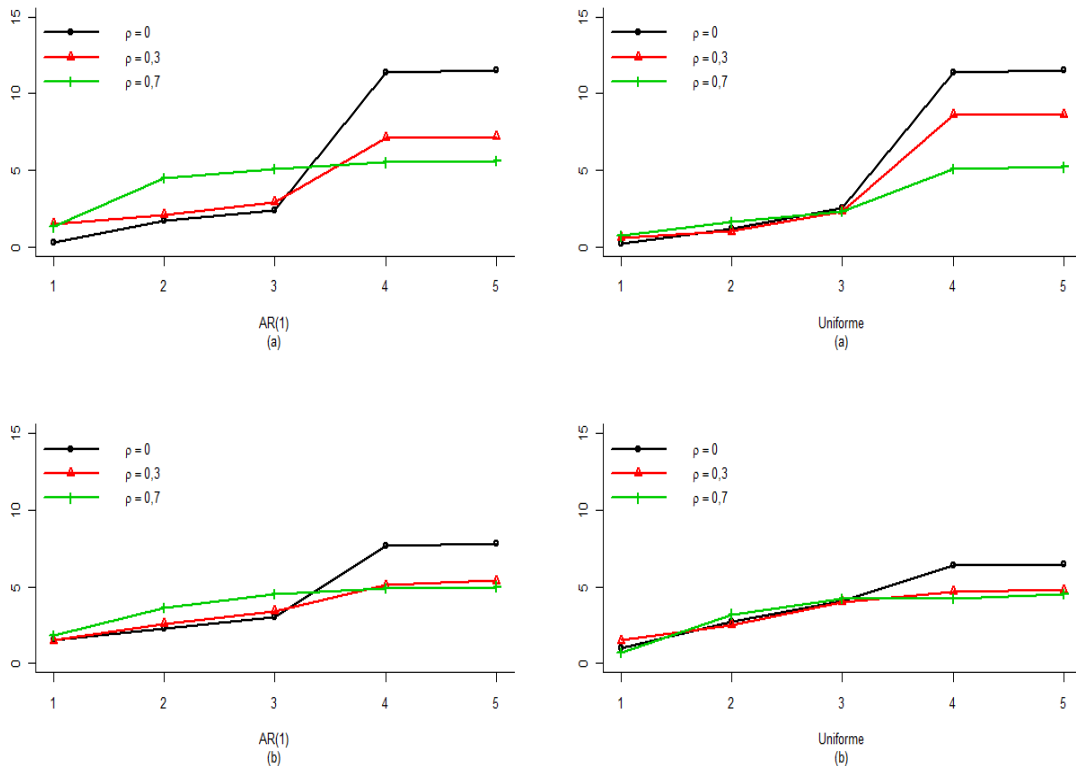


Figura 3.2: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

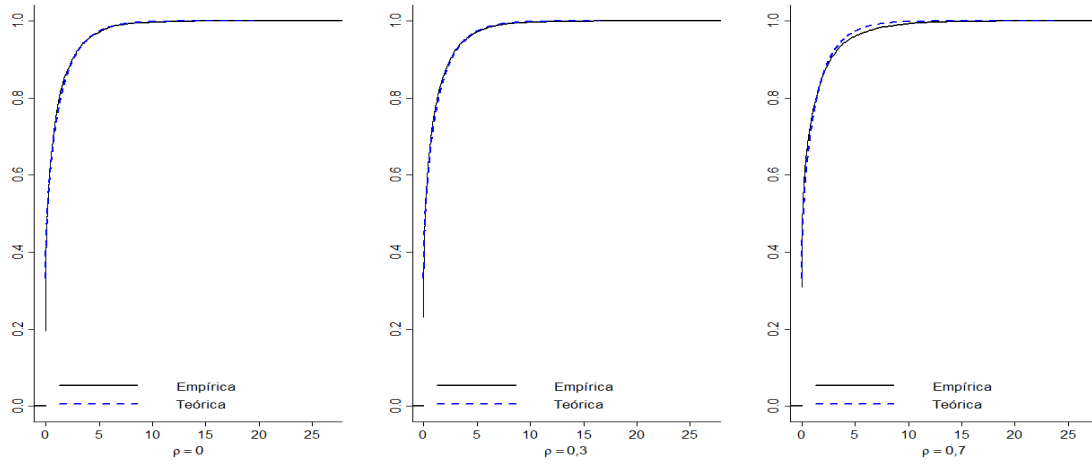


Figura 3.3: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

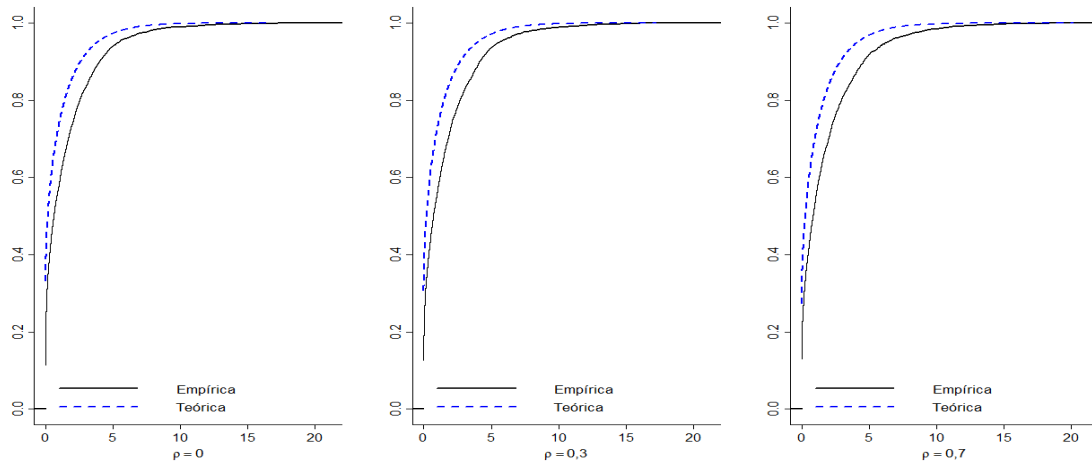


Figura 3.4: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

Tabela 3.1: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0,3$ e $n = 20$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	4,82	4,92	4,98	3,64	4,90	5,48	4,46	4,76	4,92	3,60	4,44	5,22
	0,2	10,20	10,56	10,84	4,82	6,20	7,06	9,30	19,14	10,54	4,74	6,04	6,92
	0,4	20,08	20,40	20,62	10,18	12,22	13,14	18,48	19,58	20,40	9,08	11,16	12,48
	0,6	35,68	36,42	36,46	20,10	23,08	24,46	33,60	35,24	35,72	19,22	21,92	23,98
	0,8	51,78	52,26	52,74	33,36	36,70	38,46	49,38	51,00	51,90	31,08	34,94	37,04
0,1	0,0	4,86	4,92	5,04	4,12	5,36	6,14	4,44	4,92	5,18	3,90	4,88	5,94
	0,2	10,16	10,44	10,50	5,34	6,48	7,44	9,90	10,58	11,06	4,98	6,16	7,42
	0,4	21,18	22,02	22,08	11,78	13,52	14,98	20,84	21,88	22,40	11,14	13,48	15,00
	0,6	35,42	36,14	36,76	20,42	23,08	24,60	35,86	37,46	38,16	19,74	23,16	25,24
	0,8	53,80	54,80	55,08	35,26	39,00	40,74	54,50	56,30	57,04	35,20	39,76	42,26
0,3	0,0	5,12	5,28	5,40	3,74	4,96	5,90	4,90	5,20	5,44	3,24	4,56	5,32
	0,2	10,84	11,40	11,48	5,52	6,80	7,60	11,20	11,94	12,40	5,48	6,84	7,78
	0,4	22,16	23,14	23,68	12,08	14,16	15,66	24,14	25,38	25,74	12,62	14,94	16,96
	0,6	38,66	40,02	40,72	23,06	25,94	27,90	43,10	44,70	45,44	25,14	29,12	31,58
	0,8	57,58	59,20	60,50	39,38	43,64	46,08	62,98	65,12	65,80	43,08	48,22	50,84
0,5	0,0	5,22	5,46	5,66	4,06	5,04	6,10	5,58	5,94	6,10	3,78	5,26	6,32
	0,2	10,36	11,22	11,58	6,02	7,48	8,64	12,18	13,02	13,52	5,76	7,14	8,16
	0,4	22,80	24,08	24,86	12,44	15,14	17,04	25,46	26,90	27,38	13,84	16,16	17,76
	0,6	41,72	43,70	44,92	26,24	30,12	32,98	46,50	47,96	48,90	27,94	32,48	35,34
	0,8	65,16	67,50	68,52	48,38	53,60	56,36	70,18	71,88	72,26	50,48	56,10	59,76
0,7	0,0	5,86	6,16	6,30	4,40	5,30	6,04	6,38	6,74	6,90	4,74	5,90	6,70
	0,2	10,66	11,46	12,02	6,48	7,86	8,92	12,06	13,12	13,96	6,34	7,92	9,28
	0,4	24,36	26,76	28,82	13,32	16,68	19,86	25,34	27,74	29,30	12,80	16,24	19,04
	0,6	46,56	50,74	53,94	29,76	37,10	42,66	44,80	48,28	50,72	25,08	32,10	37,18
	0,8	69,78	74,10	77,28	52,52	61,74	67,48	65,76	69,26	72,40	44,30	53,70	60,46

Tabela 3.2: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0,3$ e $n = 50$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	4,10	3,92	3,74	3,82	3,78	3,84	4,02	3,94	3,98	3,76	3,76	3,80
	0,2	15,60	15,00	14,54	8,22	8,18	8,12	15,32	14,90	14,50	7,90	7,94	7,74
	0,4	37,62	37,14	36,42	23,68	23,60	23,20	37,30	36,88	36,10	23,22	23,40	23,24
	0,6	67,92	67,34	66,68	50,94	51,04	50,42	67,64	67,18	66,64	49,88	50,42	50,24
	0,8	89,24	89,22	88,84	78,66	78,78	78,14	88,82	88,72	88,38	77,32	77,82	77,76
0,1	0,0	4,76	4,68	4,58	3,86	3,96	3,84	4,76	4,64	4,56	3,64	3,78	3,72
	0,2	15,72	15,44	14,76	8,60	8,74	8,64	16,08	15,82	15,50	8,70	8,80	8,72
	0,4	37,98	37,28	36,52	24,68	24,80	24,40	39,80	39,32	36,68	25,22	25,44	25,10
	0,6	68,24	67,68	67,08	52,34	52,04	51,56	70,50	70,08	69,50	54,12	54,56	54,24
	0,8	89,64	89,52	89,18	79,76	79,88	79,54	91,10	91,06	90,86	81,36	81,98	82,08
0,3	0,0	4,24	4,18	4,08	3,86	4,00	3,94	4,66	4,56	4,28	3,42	3,50	3,72
	0,2	16,60	16,18	15,92	9,10	9,18	9,06	19,10	18,88	18,50	10,12	10,26	10,44
	0,4	42,54	41,82	41,22	28,40	28,66	28,52	48,06	47,56	46,94	31,58	31,82	31,78
	0,6	73,50	73,46	73,04	59,00	59,80	59,94	79,36	79,22	78,70	65,02	65,56	65,46
	0,8	92,12	92,22	91,10	85,40	85,92	85,88	94,94	94,98	94,88	88,92	89,28	89,44
0,5	0,0	4,48	4,34	4,16	4,16	4,30	4,16	4,50	4,40	4,18	3,98	4,14	4,34
	0,2	17,46	17,36	17,18	10,60	10,86	11,10	20,62	20,52	20,28	11,36	11,76	11,90
	0,4	48,12	48,52	48,32	33,20	34,22	34,72	53,66	53,74	53,44	36,42	37,48	37,94
	0,6	80,60	80,86	81,08	67,98	69,06	69,72	84,56	84,70	84,44	71,24	72,60	73,28
	0,8	96,54	96,54	96,72	91,98	92,60	92,76	97,50	97,64	97,74	93,60	94,20	94,30
0,7	0,0	5,22	5,00	5,04	5,00	5,06	4,90	6,08	6,18	6,22	4,90	5,20	5,32
	0,2	17,08	17,40	18,08	10,40	11,20	11,92	19,04	19,58	19,74	9,54	10,62	11,70
	0,4	51,70	53,62	55,28	36,56	39,78	42,74	49,20	50,92	52,20	31,48	34,90	38,04
	0,6	87,56	89,02	90,16	78,62	81,92	84,62	82,84	84,72	85,96	70,18	74,30	77,90
	0,8	98,86	99,14	99,42	97,10	97,98	98,52	97,42	97,88	98,30	93,78	95,82	96,96

Tabela 3.3: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = -0, 3$ e $n = 100$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	3,68	3,40	3,06	3,20	3,08	2,94	4,68	4,42	4,18	4,26	4,04	3,86
	0,2	23,70	22,92	22,14	13,48	13,02	12,54	24,26	23,42	22,42	14,32	13,70	13,04
	0,4	64,00	63,08	62,04	47,18	45,98	44,90	62,06	61,00	59,82	45,38	44,64	43,44
	0,6	91,70	91,20	90,60	83,52	82,98	82,32	91,92	91,64	91,26	83,80	83,52	82,80
	0,8	99,50	99,44	99,38	98,08	97,96	97,94	99,26	99,26	99,22	97,74	97,58	97,44
0,1	0,0	4,58	4,28	3,92	4,56	4,32	4,08	4,94	4,56	4,36	4,08	3,90	3,64
	0,2	24,68	24,06	22,96	14,76	14,00	13,10	25,24	24,48	23,44	15,04	14,64	13,92
	0,4	64,10	63,28	62,04	48,74	47,50	46,20	67,56	66,42	65,20	50,40	49,32	48,08
	0,6	92,94	92,62	92,20	84,60	83,90	83,14	94,24	94,00	93,74	87,48	87,06	86,40
	0,8	99,46	99,42	99,34	98,44	98,22	98,10	99,72	99,70	99,66	98,96	98,94	98,80
0,3	0,0	4,38	4,10	3,88	3,88	3,80	3,40	4,52	4,26	4,00	4,24	3,98	3,66
	0,2	26,18	25,46	24,64	15,60	15,00	14,34	29,34	28,28	27,22	17,24	16,60	16,02
	0,4	69,14	68,60	67,54	55,80	54,42	53,44	75,40	74,62	73,58	60,84	60,14	59,28
	0,6	95,32	95,16	94,98	89,88	89,74	89,46	97,72	97,60	97,46	93,82	93,70	93,42
	0,8	99,70	99,72	99,70	99,32	99,32	99,30	100,00	100,00	100,00	99,78	99,76	99,74
0,5	0,0	4,58	4,40	4,06	4,04	3,94	3,68	4,88	4,70	4,40	3,72	3,60	3,50
	0,2	28,98	28,52	27,88	18,02	17,74	17,32	32,74	31,96	31,00	19,44	19,38	19,12
	0,4	76,84	76,52	76,32	64,42	64,46	64,26	81,22	80,66	80,14	68,30	68,34	68,14
	0,6	98,14	98,18	98,16	95,50	95,48	95,50	98,70	98,70	98,68	96,36	96,42	96,36
	0,8	99,98	99,98	99,98	99,88	99,88	99,88	100,00	100,00	100,00	99,98	99,98	99,98
0,7	0,0	4,98	4,52	4,18	3,92	3,68	3,54	5,54	5,48	5,46	4,28	4,22	4,24
	0,2	29,26	30,16	30,94	17,98	18,96	19,90	30,44	31,14	31,14	17,56	18,52	19,74
	0,4	84,04	85,20	86,18	73,74	76,12	77,98	79,92	81,00	82,16	64,26	68,00	71,16
	0,6	99,60	99,68	99,76	98,92	99,10	99,32	98,62	98,72	98,86	97,02	97,60	98,10
	0,8	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,98	99,98	99,98	100,00	100,00	100,00

Tabela 3.4: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0, 3$ e $n = 20$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	5,02	4,48	4,44	4,32	4,20	4,50	4,76	4,20	4,36	4,02	3,84	4,14
	0,2	10,06	9,22	8,90	5,92	5,48	5,92	9,56	8,80	8,42	5,68	5,42	5,90
	0,4	19,62	18,72	17,88	9,90	9,58	9,90	18,50	17,56	17,12	9,48	9,16	9,68
	0,6	32,56	31,28	29,68	19,76	18,92	18,62	31,45	30,16	28,92	18,66	18,14	17,90
	0,8	49,48	48,60	47,00	33,14	33,08	32,54	48,52	47,44	46,10	31,32	31,36	31,48
0,1	0,0	5,12	4,74	4,52	4,92	5,00	5,22	4,64	4,50	4,40	4,70	4,46	4,84
	0,2	9,92	9,14	8,90	5,82	5,42	5,70	9,40	8,80	8,52	5,76	5,56	5,80
	0,4	20,02	18,88	18,04	11,90	11,12	11,24	20,34	19,10	18,48	11,48	11,10	11,26
	0,6	33,80	32,24	30,76	21,00	20,26	20,34	34,76	33,56	32,32	20,76	20,24	20,44
	0,8	50,98	49,70	48,28	34,10	33,58	32,88	52,52	51,64	50,24	34,68	34,64	34,14
0,3	0,0	5,30	4,96	4,82	4,62	4,52	4,72	4,86	4,50	4,46	4,66	4,36	4,72
	0,2	10,20	9,32	9,12	6,10	5,90	6,14	11,02	9,98	9,90	6,18	6,14	6,42
	0,4	20,94	19,58	19,00	12,12	11,40	11,68	22,94	21,48	20,78	12,92	12,22	12,26
	0,6	36,74	35,12	33,86	23,30	22,30	22,04	40,62	39,14	37,84	25,66	24,62	24,54
	0,8	55,20	53,86	52,80	39,50	39,20	38,60	59,70	59,02	57,90	42,30	42,62	42,50
0,5	0,0	5,30	5,00	5,00	4,64	4,48	4,86	5,44	5,08	5,24	4,38	4,40	4,80
	0,2	11,58	10,60	10,26	6,76	6,50	6,60	13,22	12,32	11,84	7,24	6,68	6,96
	0,4	23,14	21,84	21,22	14,68	13,78	14,26	26,38	25,28	24,56	15,62	14,86	15,28
	0,6	41,74	40,34	39,08	28,00	27,32	27,00	46,30	44,76	43,80	30,10	29,64	29,32
	0,8	61,30	60,60	59,40	47,52	47,30	46,88	66,04	65,34	64,46	49,58	49,62	49,82
0,7	0,0	5,14	4,84	4,90	4,96	4,74	5,06	6,20	5,52	5,52	5,22	5,00	5,32
	0,2	12,24	11,32	10,78	7,92	7,34	7,36	14,18	13,24	12,78	7,52	7,32	7,68
	0,4	28,84	27,22	25,50	18,26	17,32	16,90	30,60	29,04	27,74	18,42	17,60	17,62
	0,6	50,26	48,76	46,80	37,08	36,02	35,00	50,32	49,10	47,12	34,98	33,98	32,50
	0,8	73,04	72,22	70,94	60,98	60,54	59,48	70,36	69,98	68,86	56,18	55,12	53,98

Tabela 3.5: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0, 3$ e $n = 50$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	4,94	4,28	3,62	4,56	3,86	3,48	4,90	4,18	3,62	4,50	3,88	3,46
	0,2	15,52	13,62	12,14	8,14	6,58	5,78	15,44	13,58	11,90	8,12	6,70	5,90
	0,4	35,68	32,70	30,40	22,58	20,20	18,04	35,28	32,58	29,82	22,14	19,72	17,70
	0,6	62,52	60,04	56,82	45,64	42,76	39,36	61,74	59,36	56,46	45,16	42,18	39,26
	0,8	83,56	82,54	81,26	71,80	69,52	66,62	83,16	82,02	80,60	70,60	68,62	65,38
0,1	0,0	4,62	3,52	3,14	4,00	3,44	3,08	4,38	3,58	3,18	3,96	3,24	2,90
	0,2	14,88	13,26	11,92	8,60	6,96	6,26	15,38	13,88	12,24	8,68	7,22	6,36
	0,4	36,10	33,20	30,66	23,34	20,76	18,48	37,94	34,94	32,02	23,68	21,38	19,10
	0,6	62,68	60,66	57,90	47,36	44,70	41,18	65,24	63,20	60,22	48,60	46,32	43,22
	0,8	85,10	83,90	82,56	73,30	71,80	69,16	86,70	85,72	84,64	75,30	73,58	71,42
0,3	0,0	5,04	4,14	3,76	4,70	3,80	3,18	5,08	4,16	3,74	4,58	3,84	3,34
	0,2	15,24	13,72	12,04	9,48	7,76	6,66	17,26	15,42	13,88	10,10	8,64	7,60
	0,4	38,72	35,88	32,96	25,94	23,22	20,64	43,66	40,86	37,86	28,42	25,86	23,48
	0,6	68,06	66,20	63,44	53,66	50,66	47,16	73,68	71,74	69,72	58,60	56,02	52,82
	0,8	88,42	87,78	86,74	78,72	77,52	75,38	92,14	91,62	90,66	82,90	81,98	80,40
0,5	0,0	5,10	4,40	3,80	5,00	4,00	3,62	5,38	4,62	4,02	4,60	3,72	3,30
	0,2	17,74	15,96	14,28	10,86	9,12	8,02	20,16	18,04	16,42	11,70	10,12	8,98
	0,4	45,56	42,78	39,34	32,26	29,16	25,74	50,80	47,98	45,12	34,98	32,00	28,80
	0,6	76,94	75,26	72,80	65,60	62,92	59,68	80,58	79,12	77,12	68,74	66,26	63,36
	0,8	94,36	93,86	93,14	89,24	88,28	86,60	95,50	95,20	94,76	90,80	89,98	89,00
0,7	0,0	5,94	5,24	4,68	5,22	4,26	3,90	6,96	6,20	5,60	5,64	4,76	4,50
	0,2	20,68	18,20	15,60	13,46	11,12	9,50	22,58	20,44	18,62	13,44	11,30	9,98
	0,4	56,36	52,86	48,50	43,58	38,78	34,56	55,34	52,14	48,28	40,26	36,24	32,20
	0,6	87,58	85,68	83,40	79,14	76,88	73,06	84,94	83,18	80,76	75,58	72,44	68,06
	0,8	98,28	98,04	97,74	96,46	96,02	95,06	97,32	97,04	96,56	95,02	94,08	92,70

Tabela 3.6: Estudo de poder para dados agrupados (caso I) $k = 0, 3$ e $n = 100$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	4,70	3,94	3,20	4,90	3,86	3,10	4,52	3,74	3,24	4,80	3,78	3,06
	0,2	22,72	19,80	17,10	13,26	11,08	9,02	22,56	19,94	17,14	13,30	10,74	8,82
	0,4	59,16	56,06	52,24	42,90	39,04	34,72	58,74	55,54	51,92	42,58	38,48	34,14
	0,6	87,26	85,58	83,98	76,82	74,22	70,80	87,00	85,72	83,80	76,60	73,86	70,48
	0,8	98,14	98,00	97,64	95,44	95,00	94,10	98,06	97,88	97,60	95,32	94,80	93,94
0,1	0,0	4,82	4,00	3,32	4,38	3,30	3,58	4,78	3,92	3,20	4,44	3,42	2,70
	0,2	22,86	19,68	17,08	13,74	11,26	9,10	23,80	20,78	17,82	14,18	11,46	9,58
	0,4	59,44	56,32	52,34	43,14	39,18	34,84	61,78	58,84	55,04	45,28	40,60	36,50
	0,6	89,48	88,40	86,68	79,38	76,30	73,04	90,88	90,02	88,70	81,58	78,96	75,88
	0,8	98,70	98,58	98,40	96,62	96,20	95,32	99,04	98,90	98,72	97,40	97,02	96,34
0,3	0,0	4,82	3,80	3,94	4,38	3,38	3,98	4,82	3,78	3,14	4,40	3,54	3,02
	0,2	24,40	21,28	18,42	14,68	12,08	10,36	27,28	24,80	22,16	16,10	13,36	11,50
	0,4	64,84	61,44	57,90	50,58	46,32	41,42	70,56	67,64	64,44	55,40	51,28	47,06
	0,6	92,16	91,16	90,06	85,48	83,56	81,28	94,98	94,28	93,44	88,92	87,18	85,52
	0,8	99,30	99,18	99,12	98,34	98,16	97,58	99,68	99,60	99,58	98,96	98,84	98,68
0,5	0,0	4,72	3,82	3,10	4,02	3,06	3,48	5,14	4,36	3,72	4,32	3,30	2,54
	0,2	27,86	24,26	21,40	18,50	15,72	13,06	31,96	28,90	25,68	19,84	17,08	14,06
	0,4	73,00	70,44	66,58	60,66	56,50	52,16	76,82	74,32	71,38	64,02	60,62	56,24
	0,6	97,12	96,52	95,80	93,52	92,32	90,74	97,62	97,32	96,80	94,42	93,74	92,68
	0,8	99,90	99,88	99,84	99,64	99,62	99,46	99,98	99,94	99,94	99,84	99,78	99,74
0,7	0,0	5,38	4,34	3,72	4,74	3,84	3,98	6,16	5,38	4,68	5,38	4,14	3,32
	0,2	33,94	29,72	25,44	22,56	18,56	15,34	35,48	31,96	28,38	21,56	17,54	14,52
	0,4	85,26	82,52	79,44	77,46	72,96	67,22	81,40	78,64	75,96	72,34	67,02	61,22
	0,6	99,44	99,32	99,10	98,78	98,42	97,86	98,84	98,58	98,24	97,88	97,34	96,30
	0,8	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,96	100,00	100,00	99,98	99,98	99,92	99,86

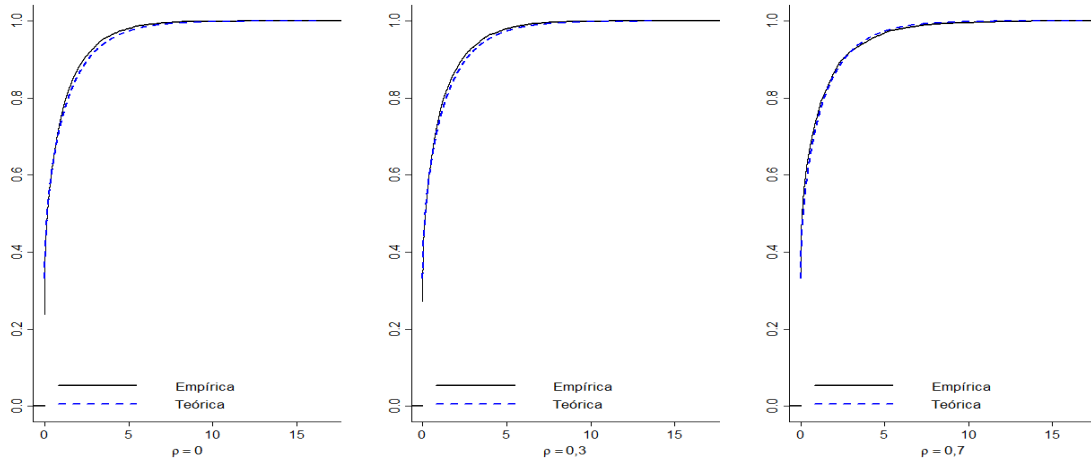


Figura 3.5: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.

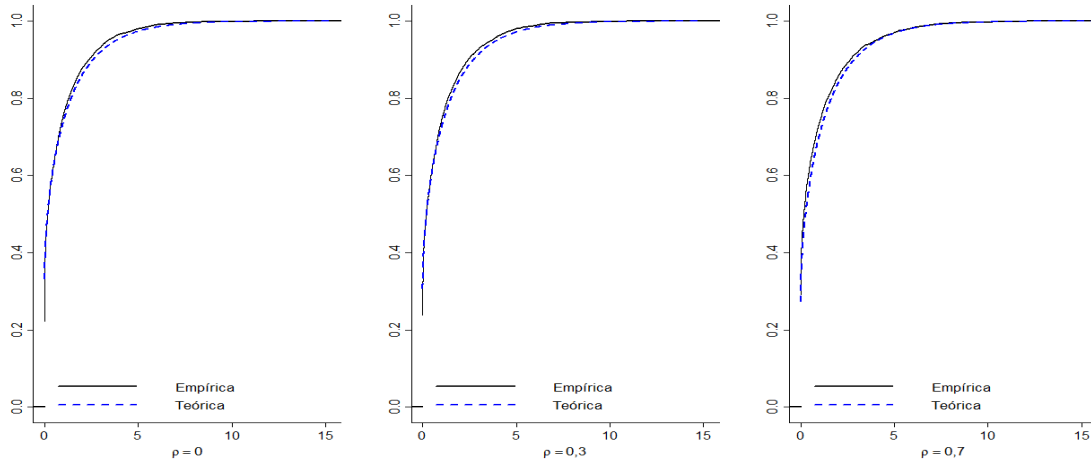


Figura 3.6: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).

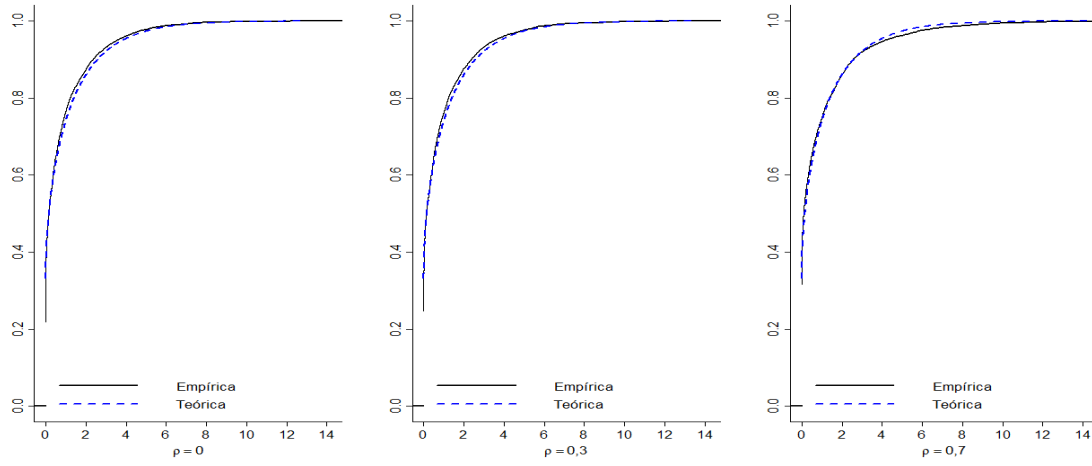


Figura 3.7: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

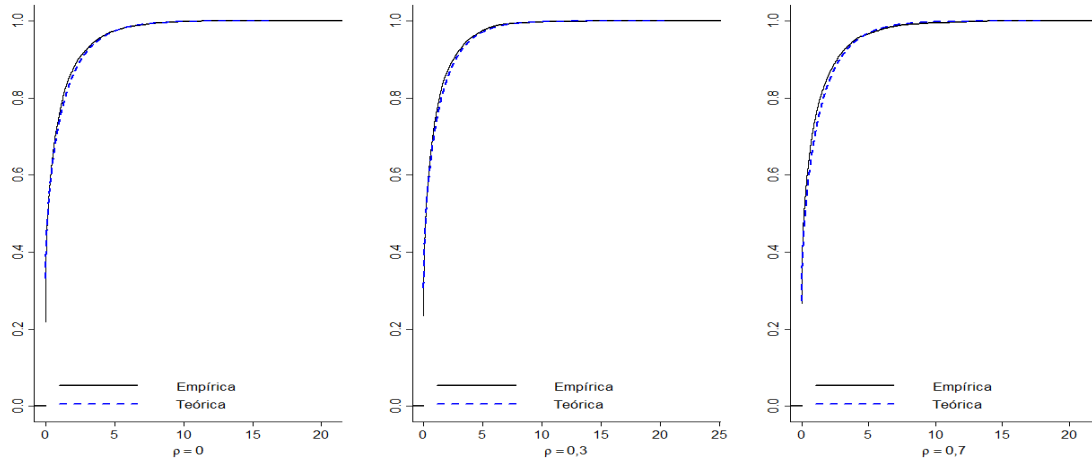


Figura 3.8: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

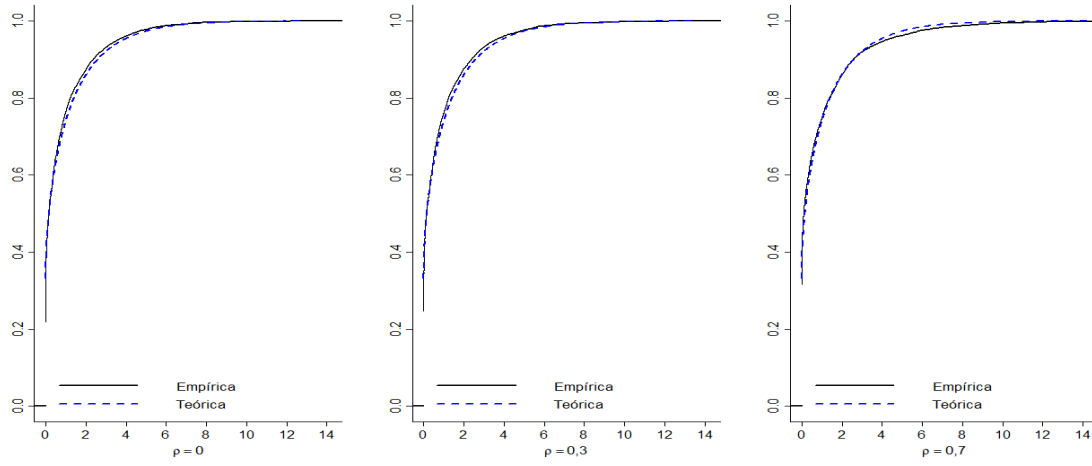


Figura 3.9: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.

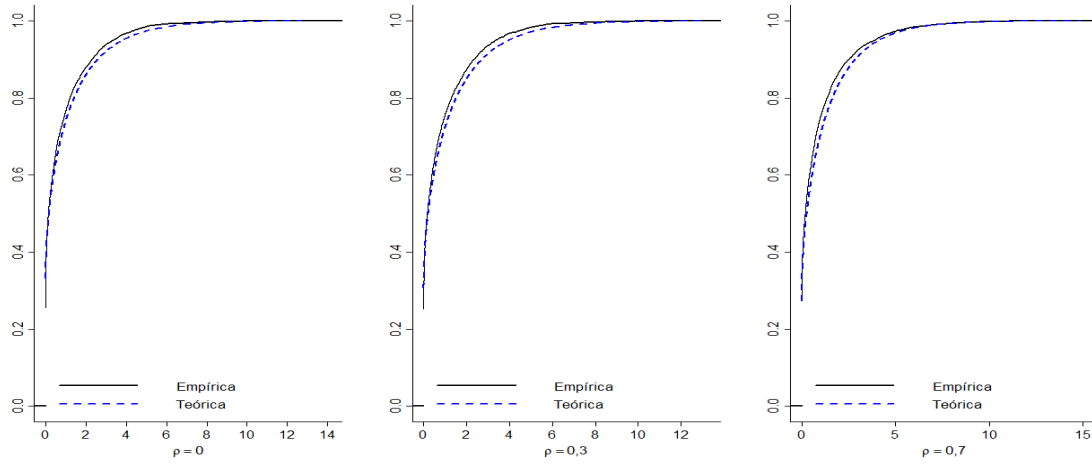


Figura 3.10: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} , para dados agrupados (caso I), $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).

3.2.2 Caso II

Seja $\mathbf{Y}_{i\ell}$ uma variável aleatória com distribuição MPE, isto é, $\mathbf{Y}_{i\ell} \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}_\ell, \boldsymbol{\Phi}, k)$, com $m = 4$, $\boldsymbol{\mu}_\ell = \mu_\ell \mathbf{1}_m$ e $\boldsymbol{\Phi} = \sigma^2 \mathbf{R}(\rho)$, para $i = 1, \dots, n_\ell$ e $\ell = 1, 2, 3$. Os valores k e σ^2 foram fixados, sendo $\sigma^2 = 1$ e k assumindo os mesmos do caso I. Novamente, temos o interesse em testar hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ versus $H_2: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . Os tamanhos dos grupos são os mesmos, isto é $n_1 = n_2 = n_3 = 10, 20$ e 50 . Em relação aos valores μ_1 , μ_2 e μ_3 , foram assumidos os mesmos do caso I. A expressão para a matriz $\boldsymbol{\Delta}$ é

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\sigma^2 m(1+k)^2 2^{(k-1)} \Gamma([m(1+k)]/2)}{n \Gamma([m(1+k) - 2k + 2]/2)} \frac{1}{\mathbf{1}^\top \text{vec}(\mathbf{R}^{-1})} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a situação menos favorável para ambas as estruturas de correlação é única quando $\vartheta = -0,5$. Deste modo, tem-se que $P = \frac{1}{2} \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + \frac{1}{6} \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, para $t > 0$, e para os dois tipos de estruturas de correlação adotados.

Nas Tabelas 3.7-3.12 são apresentados os resultados do estudo da simulação. Podemos notar que o tamanho dos testes tendem ao nível nominal com o aumento do tamanho amostral. Observamos, também, que quando o parâmetro de curtose $k = -0,3$, ou seja, a distribuição é platicúrtica, temos que à medida que a correlação aumenta, os tamanhos empíricos dos testes de razão de verossimilhanças e Wald ficam, em geral, acima do nível nominal 5%, indicando que os testes parecem ser liberais para amostras de tamanho pequeno, ou seja, $n = 10$ e 20 .

Note que, à proporção que n aumenta o poder dos testes cresce, porém contrário ao caso I, o poder diminui, à medida que a correlação cresce. Podemos explicar isso pelo fato de que as observações $y_{i\ell 1}, \dots, y_{i\ell m}$ não fornecem muita informação sobre μ_ℓ se elas são altamente correlacionadas. Aqui, também, observamos a superioridade de ξ_{SR} , ξ_{RV} e ξ_W sobre ξ_{SR}^* , ξ_{RV}^* e ξ_W^* . As Figuras 3.11-3.12 apresentam as diferenças entre as distribuições nulas teóricas e empíricas da estatística ξ_{RV} para alguns percentis da distribuição nula assintótica. Verificamos que as maiores diferenças são observadas quando $k = 0,3$, ou seja, distribuição leptocúrtica com estrutura de correlação é uniforme. Nota-se, em geral, que as diferenças parecem crescer com o aumento da correlação.

As Figuras 3.13-3.20 exibem as distribuições nulas teórica e empírica da estatística de ξ_{RV} . Observamos, novamente, uma boa concordância porém com pequenas oscilações entre as distribuições teórica e empírica, em que na maioria dos casos a distribuição empírica parece subestimar a teórica. Comparando-se com o caso I, notamos que as diferenças entre as distribuições nula teórica e empírica parecem ser menores.

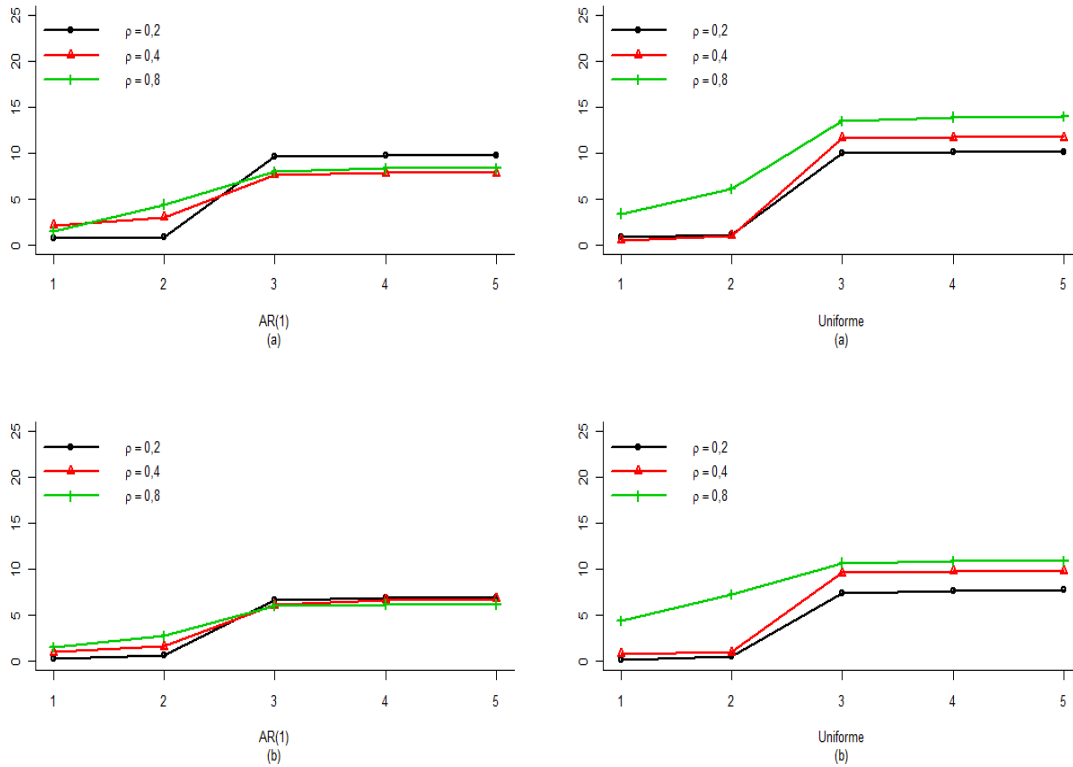


Figura 3.11: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso II), $k = -0, 3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

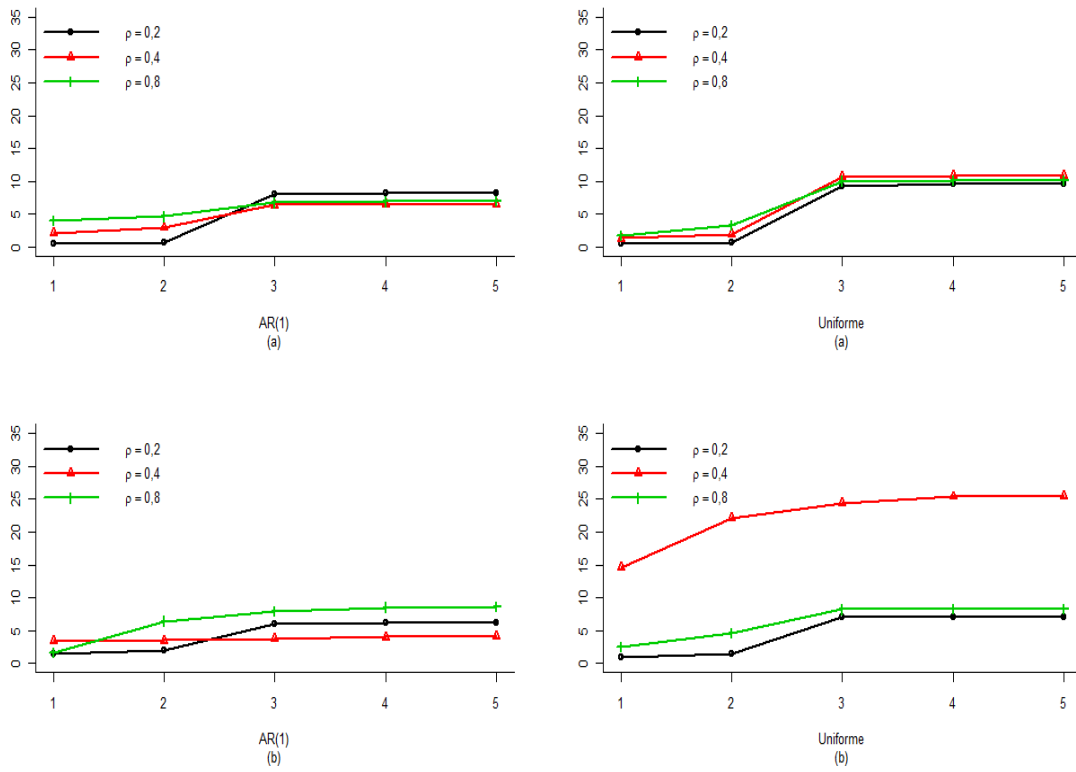


Figura 3.12: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$, em que (a) e (b) indicam os tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

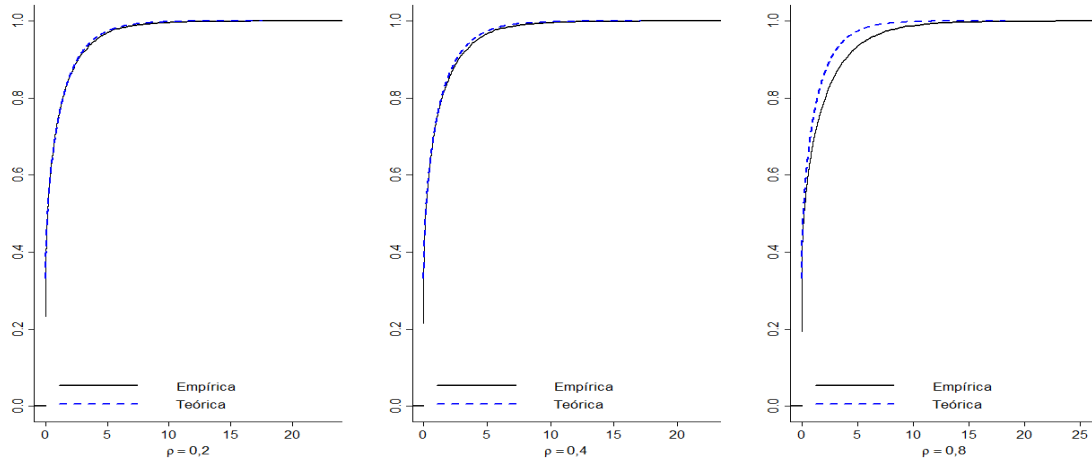


Figura 3.13: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0,3$ e $n = 10$, com estrutura uniforme.

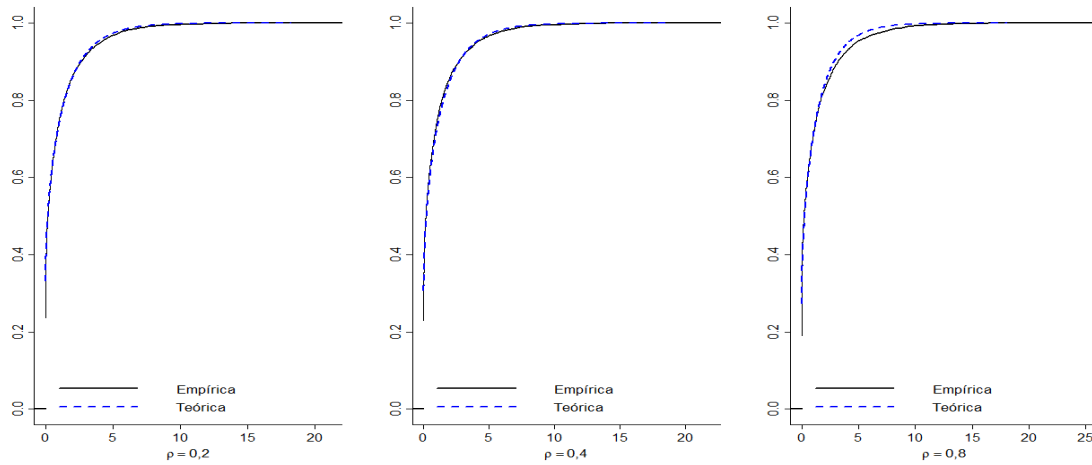


Figura 3.14: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0,3$ e $n = 10$, com estrutura AR(1).

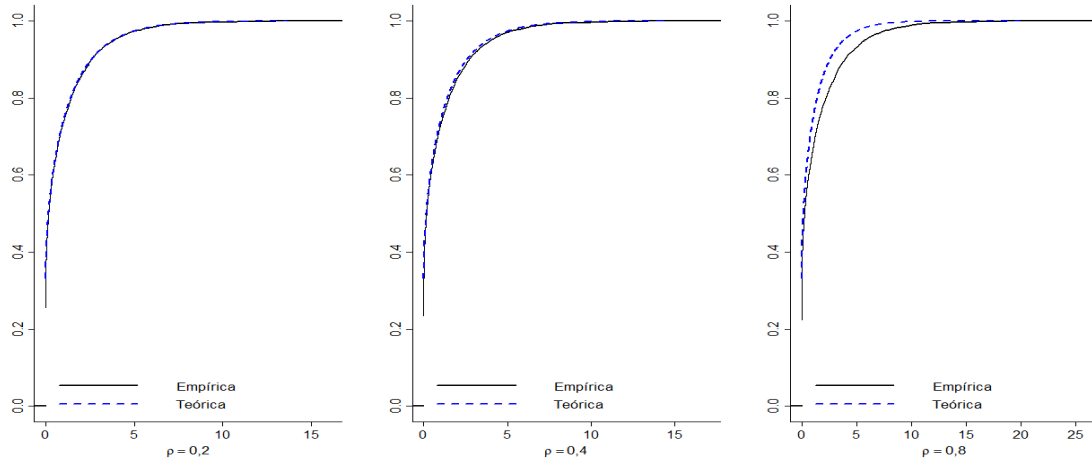


Figura 3.15: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

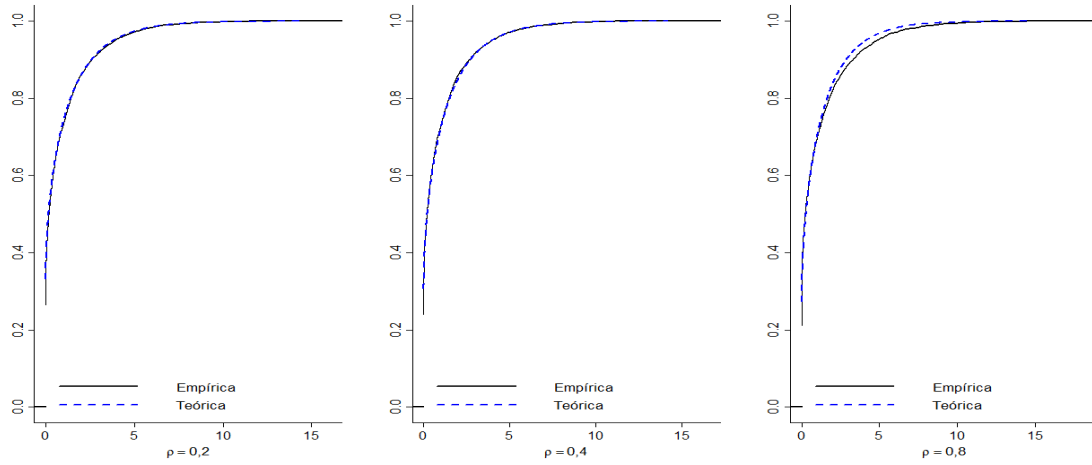


Figura 3.16: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

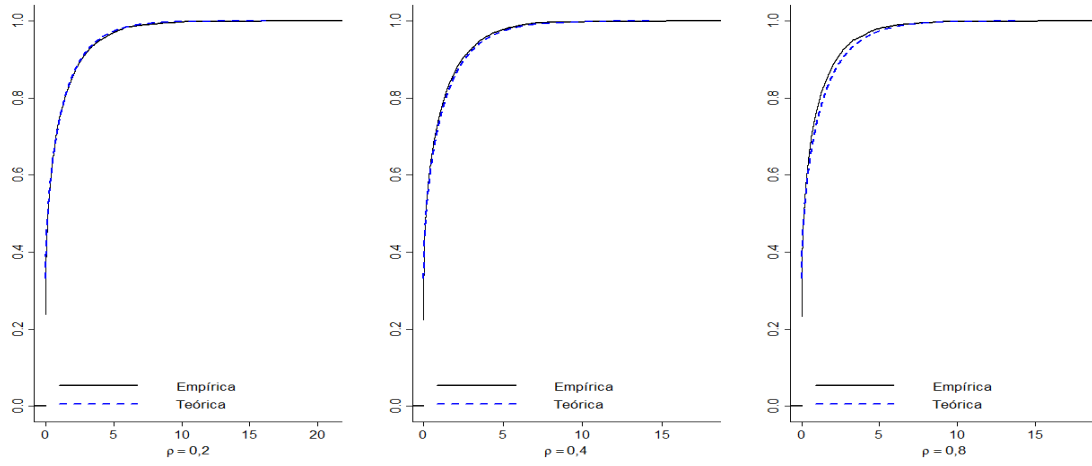


Figura 3.17: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 10$, com estrutura uniforme.

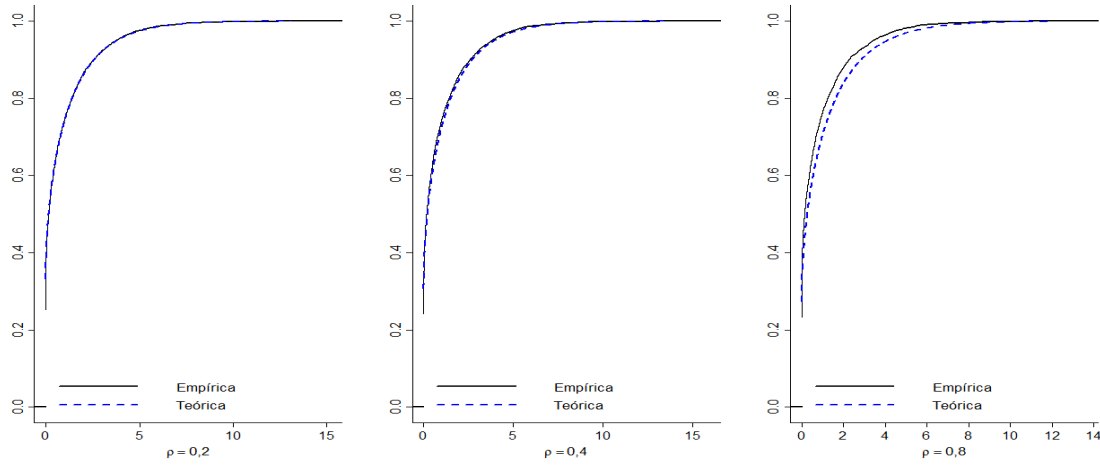


Figura 3.18: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 10$, com estrutura AR(1).

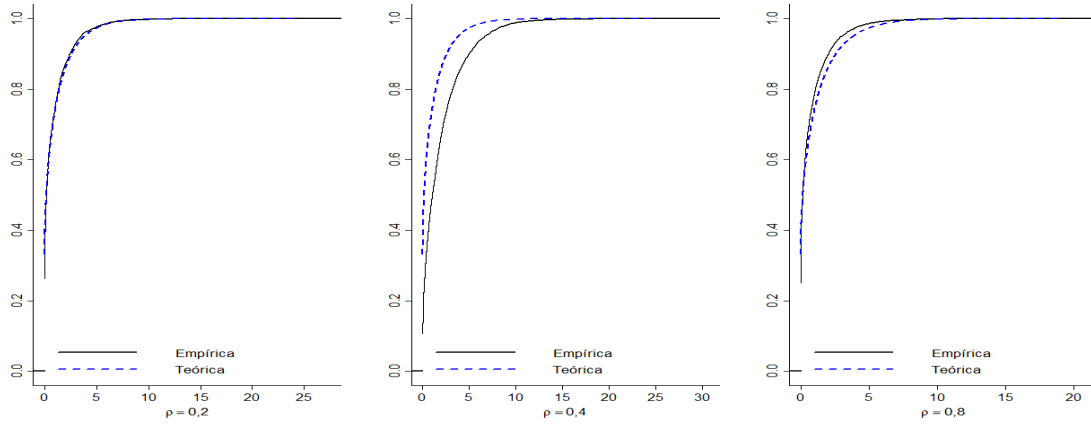


Figura 3.19: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

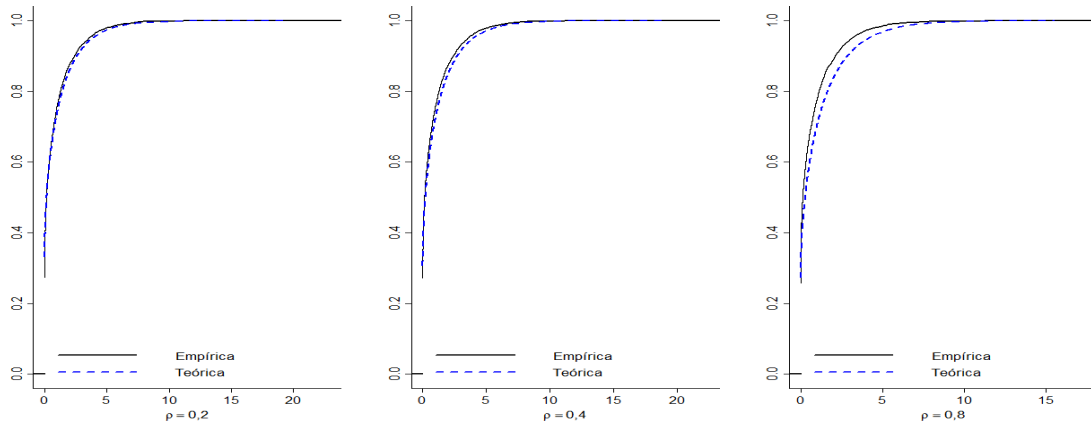


Figura 3.20: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para dados agrupados (caso II), $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

Tabela 3.7: Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 10$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	4,60	5,08	5,60	4,66	5,84	6,94	4,24	5,04	5,50	4,02	5,52	7,18
	0,2	16,92	17,96	18,94	9,14	11,18	12,86	14,14	15,88	17,34	7,42	10,10	12,20
	0,4	38,44	40,02	41,44	22,18	25,70	28,66	34,06	36,36	38,10	19,16	24,54	28,10
	0,6	67,58	69,34	70,44	48,16	53,14	56,24	61,18	64,16	66,20	41,52	48,36	52,74
	0,8	88,72	89,88	90,74	75,62	79,82	81,88	83,70	85,36	86,38	66,28	72,66	76,76
0,4	0,0	4,48	4,96	5,46	4,12	5,60	7,16	5,48	6,20	6,94	4,40	6,94	8,76
	0,2	14,14	15,44	16,50	6,96	8,90	10,94	13,06	14,34	15,64	6,60	9,60	11,48
	0,4	31,32	33,24	34,78	18,22	21,52	24,46	29,08	31,74	33,64	16,12	20,94	24,16
	0,6	56,90	58,96	60,48	37,92	42,88	46,36	51,48	54,50	56,76	32,90	39,44	43,76
	0,8	79,34	81,00	82,16	63,52	68,30	71,50	72,40	75,22	76,80	53,54	60,76	64,58
0,6	0,0	5,34	5,88	6,30	4,64	6,18	8,02	5,72	6,90	8,04	4,98	8,10	10,46
	0,2	11,48	12,68	13,82	6,44	8,42	10,62	13,70	15,88	17,38	7,90	11,44	14,80
	0,4	26,58	29,08	30,62	15,08	18,50	21,18	26,68	30,52	33,10	14,88	20,00	24,20
	0,6	46,64	49,02	51,16	29,88	35,24	39,12	44,74	49,04	52,86	27,78	35,58	41,06
	0,8	69,18	71,76	73,94	49,82	57,02	62,66	63,48	67,36	70,56	44,58	53,38	59,56
0,8	0,0	5,48	6,80	7,82	4,74	7,74	10,24	6,98	9,56	11,52	7,38	12,62	17,28
	0,2	11,34	13,96	15,92	6,48	9,98	12,80	13,94	17,30	20,26	8,68	14,12	19,26
	0,4	20,66	24,42	27,62	10,32	15,26	19,80	25,08	29,78	35,04	14,56	22,42	28,38
	0,6	34,90	39,50	43,72	20,16	27,84	33,56	40,84	46,94	52,12	26,56	36,90	44,40
	0,8	51,00	56,42	60,50	32,14	41,92	48,88	59,04	65,58	69,88	40,42	53,18	61,48

Tabela 3.8: Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 20$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	5,22	5,24	5,22	4,68	5,02	5,36	4,58	4,92	5,04	4,24	4,86	5,62
	0,2	23,18	23,54	23,78	13,20	13,94	14,58	21,80	22,50	22,86	11,76	13,30	14,14
	0,4	63,86	64,38	64,26	46,48	47,74	48,94	58,60	59,58	59,88	40,66	42,96	44,82
	0,6	92,84	92,90	92,92	83,74	84,72	85,42	88,64	89,00	89,12	78,06	79,76	80,86
	0,8	99,28	99,34	99,40	97,82	98,10	98,30	98,40	98,60	98,68	95,62	96,26	96,66
0,4	0,0	4,82	4,88	5,10	4,18	4,64	5,06	5,22	5,52	5,84	5,14	5,76	6,26
	0,2	21,58	22,04	22,44	12,16	12,96	13,52	19,62	20,46	21,06	10,98	12,56	13,90
	0,4	54,36	54,90	55,16	36,94	38,84	40,16	47,60	48,96	49,86	32,04	34,20	36,40
	0,6	85,00	85,34	85,64	72,46	74,40	75,30	79,02	80,08	80,50	64,14	67,12	69,44
	0,8	97,56	97,74	97,82	93,50	94,28	94,64	95,10	95,42	95,78	87,26	88,82	89,96
0,6	0,0	4,78	5,04	5,22	4,38	4,98	5,64	6,50	7,22	7,92	5,72	7,38	8,64
	0,2	17,30	17,90	18,62	9,58	10,80	11,62	18,76	20,30	21,46	11,44	14,08	16,00
	0,4	43,96	45,06	46,00	27,98	30,36	32,34	42,26	44,72	46,90	28,10	32,40	35,52
	0,6	74,76	75,78	76,74	58,62	61,46	63,78	70,30	72,60	74,18	54,52	58,72	62,76
	0,8	92,90	93,34	93,62	84,44	86,26	87,60	89,00	90,38	91,30	78,74	82,16	84,84
0,8	0,0	5,02	5,74	6,76	5,66	7,26	9,14	7,48	9,24	10,98	7,40	10,98	14,12
	0,2	14,04	16,22	18,34	7,90	10,22	12,34	18,16	21,78	24,98	11,90	16,34	20,94
	0,4	32,36	35,60	38,50	19,32	23,92	27,86	39,24	43,74	47,68	26,12	32,98	39,18
	0,6	55,94	59,46	62,74	39,18	45,44	49,88	61,86	66,98	70,84	46,86	54,26	61,04
	0,8	78,44	81,22	83,28	62,40	68,64	73,46	83,72	87,26	89,22	71,74	78,62	83,02

Tabela 3.9: Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = -0,3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 50$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	4,40	4,30	4,30	4,66	4,68	4,62	5,22	5,04	5,02	4,72	4,72	4,72
	0,2	47,70	47,30	46,80	32,18	32,10	31,80	42,08	42,02	41,86	27,22	27,26	27,46
	0,4	95,72	95,54	95,36	89,50	89,52	89,34	91,76	91,72	91,64	83,46	83,58	83,44
	0,6	99,96	99,96	99,96	99,84	99,84	99,86	99,82	99,82	99,80	99,44	99,48	99,52
	0,8	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,4	0,0	4,58	4,48	4,36	4,38	4,36	4,32	5,06	5,12	5,12	4,92	5,14	5,28
	0,2	39,88	39,48	39,00	25,26	25,26	25,04	35,04	35,18	35,36	22,22	22,88	23,16
	0,4	89,16	89,12	88,84	79,38	79,34	79,12	83,02	83,14	83,14	69,86	70,62	70,92
	0,6	99,60	99,62	99,62	98,94	98,92	98,84	99,10	99,14	99,16	97,10	97,20	97,38
	0,8	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,6	0,0	4,76	4,86	4,80	4,48	4,62	4,66	5,48	5,86	6,40	6,48	7,38	8,04
	0,2	32,52	32,64	32,66	20,06	20,50	20,94	32,12	33,48	34,56	21,02	22,66	24,12
	0,4	80,22	80,40	80,56	66,42	67,26	67,92	74,84	76,28	77,16	59,24	62,26	64,40
	0,6	98,46	98,58	98,58	95,40	95,62	95,68	96,72	97,02	97,24	92,34	93,30	94,06
	0,8	100,00	100,00	100,00	99,94	99,94	99,96	99,88	99,92	99,94	99,50	99,60	99,68
0,8	0,0	5,68	6,34	7,10	5,64	6,68	7,80	6,70	7,96	9,16	7,84	10,74	12,98
	0,2	23,48	25,76	27,86	14,44	17,10	19,06	29,80	33,10	36,92	20,60	24,54	28,52
	0,4	60,40	63,18	65,42	45,00	49,04	52,40	66,04	69,82	73,30	53,12	58,84	63,70
	0,6	90,02	91,16	91,96	80,02	82,76	84,84	92,54	94,20	95,18	85,58	88,76	91,24
	0,8	98,70	99,08	99,34	96,70	97,36	97,94	99,38	99,50	99,66	98,24	98,74	99,16

Tabela 3.10: Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = 0, 3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 10$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	5,10	4,86	4,86	4,24	4,48	4,88	5,16	5,24	5,42	4,74	5,40	6,26
	0,2	14,68	14,04	14,06	8,40	8,48	9,18	14,22	14,02	14,28	7,26	7,98	9,20
	0,4	34,40	33,52	32,82	20,22	20,54	21,16	30,66	30,40	30,70	18,42	19,50	20,98
	0,6	57,34	56,72	56,38	40,72	41,60	42,28	52,58	52,48	52,78	35,40	37,12	39,20
	0,8	80,54	80,54	80,18	65,60	66,52	67,10	72,24	72,78	72,98	55,56	57,42	59,60
0,4	0,0	4,70	4,48	4,56	4,36	4,74	5,34	4,68	4,60	4,82	4,24	4,54	5,60
	0,2	12,78	12,50	12,36	6,66	7,04	7,74	12,34	12,10	12,02	6,32	7,04	7,74
	0,4	27,28	26,66	26,30	15,36	15,80	16,50	26,70	26,24	26,56	14,36	15,44	16,60
	0,6	49,58	49,38	49,14	32,96	33,88	34,60	44,96	44,66	45,04	29,76	31,06	33,18
	0,8	69,44	69,44	64,70	53,14	54,20	55,36	64,40	64,60	64,52	46,80	49,02	50,94
0,6	0,0	5,08	4,80	4,72	4,82	5,00	5,60	4,18	3,98	4,02	4,16	4,42	5,10
	0,2	11,94	11,50	11,54	7,04	7,38	8,08	11,22	10,74	10,60	6,10	6,24	7,12
	0,4	24,28	23,72	23,68	14,04	14,32	15,32	25,38	24,22	23,72	14,08	14,16	15,14
	0,6	40,78	40,24	39,80	26,48	27,24	28,06	43,84	43,00	42,56	28,28	28,86	29,80
	0,8	60,92	60,60	60,44	43,48	44,60	45,66	63,60	62,82	61,86	46,02	47,10	47,88
0,8	0,0	4,38	3,90	3,88	3,90	4,04	4,24	4,40	3,94	3,72	3,82	3,56	4,14
	0,2	10,30	9,48	9,18	5,52	5,70	6,10	12,12	10,88	10,20	6,86	6,46	6,50
	0,4	21,04	19,98	19,44	11,46	11,44	11,70	28,28	26,24	24,56	15,76	15,16	14,72
	0,6	36,30	34,98	34,20	21,98	21,76	22,26	48,40	45,76	43,18	30,82	29,52	29,10
	0,8	53,00	51,54	50,38	35,08	34,78	35,30	70,42	68,18	66,36	52,28	50,82	49,82

Tabela 3.11: Estudo de poder para dados agrupados (caso II) $k = 0, 3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 20$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	5,12	4,58	4,24	4,44	3,94	3,78	4,98	4,60	4,36	3,94	3,80	3,80
	0,2	21,44	19,88	18,92	12,00	10,90	10,36	19,24	18,16	17,34	11,42	10,68	10,46
	0,4	54,48	54,42	50,52	37,50	35,74	34,48	47,06	45,62	44,08	32,54	31,48	30,78
	0,6	84,98	84,16	83,48	72,98	72,18	70,68	79,46	78,30	77,30	64,34	63,98	63,42
	0,8	97,10	97,04	96,86	92,66	92,92	92,60	94,94	94,88	94,56	88,32	88,20	88,44
0,4	0,0	5,04	4,64	4,24	4,44	4,26	4,06	4,68	4,12	3,88	4,14	3,90	3,78
	0,2	18,14	16,74	15,78	10,58	9,82	9,40	16,82	15,58	14,60	9,38	8,86	8,68
	0,4	46,62	44,90	43,20	31,14	29,94	28,94	40,86	39,38	37,68	26,22	24,92	24,04
	0,6	75,18	74,32	72,84	60,22	58,82	57,68	70,56	69,30	68,00	53,84	52,72	51,64
	0,8	92,80	92,52	91,94	85,14	84,82	84,24	90,28	89,88	89,34	79,78	79,42	78,72
0,6	0,0	4,64	4,20	3,88	4,54	4,24	4,10	4,52	4,06	3,64	4,44	4,08	3,86
	0,2	15,78	14,60	13,64	8,82	8,24	7,88	16,22	14,68	13,38	9,12	8,04	7,60
	0,4	37,98	36,02	34,38	23,64	22,40	21,22	39,52	37,46	35,38	25,38	23,70	22,10
	0,6	66,84	65,34	63,58	50,06	48,58	47,26	68,72	66,44	64,24	51,50	49,88	47,88
	0,8	87,70	87,00	86,14	75,96	74,98	74,06	88,46	87,58	86,56	77,84	77,00	75,50
0,8	0,0	4,56	3,96	3,44	3,84	3,42	3,82	4,74	3,94	3,24	4,08	3,16	3,58
	0,2	12,14	10,94	9,60	6,40	5,52	5,08	17,26	14,42	12,30	10,16	8,48	7,04
	0,4	34,46	31,74	29,44	20,88	19,00	17,12	44,02	40,10	35,68	28,82	25,10	22,00
	0,6	58,18	55,24	52,08	41,24	38,90	35,78	75,58	72,06	68,02	59,10	55,14	50,70
	0,8	80,50	78,78	76,82	65,70	63,94	61,72	93,38	92,46	91,00	85,68	83,66	80,86

Tabela 3.12: Estudo de poder para dados agrupados (Caso II) $k = 0, 3$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 50$.

ρ	δ	AR(1)						Uniforme					
		Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
		ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,2	0,0	4,32	3,74	3,24	4,48	3,64	3,94	4,86	4,24	3,88	4,64	3,80	3,40
	0,2	39,86	37,28	34,88	25,65	23,08	20,76	36,58	34,16	32,00	23,22	20,90	18,94
	0,4	88,10	86,98	85,72	77,80	75,66	73,38	84,54	83,14	81,80	71,94	69,66	67,30
	0,6	99,62	99,62	99,56	98,78	98,64	98,32	99,06	99,02	98,74	97,12	96,92	96,38
	0,8	100,00	100,00	100,00	100,00	99,98	99,98	100,00	100,00	100,00	99,98	99,98	99,98
0,4	0,0	5,20	4,56	4,02	4,74	3,86	3,46	5,08	4,40	3,66	4,50	3,70	3,22
	0,2	32,24	29,76	27,14	19,78	17,68	16,22	30,42	27,96	25,46	18,20	15,98	13,98
	0,4	80,08	78,50	76,66	67,16	64,42	61,30	76,10	74,08	72,10	61,16	58,40	55,66
	0,6	98,52	98,34	98,14	95,98	95,38	94,80	97,44	97,14	96,66	93,04	91,92	90,78
	0,8	99,98	99,98	99,98	99,84	99,84	99,78	99,98	99,96	99,96	99,76	99,74	99,68
0,6	0,0	4,74	4,02	3,54	4,72	4,12	3,44	4,76	4,08	3,44	4,38	3,42	3,46
	0,2	27,70	25,54	23,12	16,38	14,14	12,42	29,12	26,16	23,08	17,00	14,20	12,30
	0,4	71,10	68,66	66,12	56,02	53,22	49,84	73,50	70,66	67,88	57,94	54,60	50,88
	0,6	95,44	94,94	94,12	90,26	89,14	87,92	97,04	96,38	95,72	92,48	91,40	89,64
	0,8	99,80	99,78	99,72	99,30	99,16	98,98	99,84	99,82	99,80	99,46	99,32	99,20
0,8	0,0	3,70	2,94	2,28	3,44	3,62	3,00	3,70	2,80	2,22	3,62	2,44	2,56
	0,2	23,42	20,22	17,28	13,00	10,38	8,02	32,64	27,84	22,96	19,88	15,02	11,36
	0,4	63,68	60,24	56,16	48,06	43,18	38,14	80,26	76,58	72,04	66,78	61,34	54,60
	0,6	92,58	91,20	89,44	84,10	81,24	77,94	98,74	98,26	97,70	96,36	95,10	92,74
	0,8	99,38	99,26	99,10	98,18	97,72	97,20	99,94	99,92	99,90	99,78	99,72	99,66

3.2.3 Presença de regressores

Neste caso, temos que $\mathbf{Y}_i$ possui distribuição MPE, isto é $\mathbf{Y}_i \sim \text{MPE}_m(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Phi}, k)$, em que $m = 4$, $\boldsymbol{\mu}_i = \mu_i \mathbf{1}_m$, com

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

As observações x_{1i} e x_{2i} foram obtidas através da geração de números aleatórios de uma distribuição uniforme em $[0;1]$. Assumimos os parâmetros $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, os tamanhos amostrais usados foram $n = 20, 50$ e 100 . Vamos testar as hipóteses $H_0: \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ versus $H_2: \beta_1 \geq 1, \beta_2 \geq 1$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . Na hipótese alternativa trabalhamos com os parâmetros $\beta_1 = 1 + \delta_1$ e $\beta_2 = 1 + \delta_2$, sendo $0 < \delta_1, \delta_1 \leq 2$. Neste caso, a matriz $\boldsymbol{\Delta}$ toma a forma

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\sigma^2 m(1+k)^2 2^{(k-1)} \Gamma([m(1+k)]/2)}{n \Gamma([m(1+k) - 2k + 2]/2)} \mathbf{C} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_i \right)^{-1} \mathbf{C}^\top.$$

Aqui temos que $\mathbf{x}_i = [\mathbf{1}_m, x_{1i} \mathbf{1}_m, x_{2i} \mathbf{1}_m]$. Para as duas estruturas de correlação, a região menos favorável ocorre quando $\vartheta = -\text{corr}(x_1 x_2)$. Com isso, $P = 0,5 \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + 0,24 \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, $P = 0,5 \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + 0,27 \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, $t > 0$ e $P = 0,5 \Pr\{\chi_1^2 \geq t\} + 0,25 \Pr\{\chi_2^2 \geq t\}$, $t > 0$, para $n = 20, 50$ e 100 , respectivamente.

Através dos resultados do estudo de simulação descritos nas Tabelas 3.13-3.18, observamos que os tamanhos empíricos dos testes, em geral, ficam próximos ao nível nominal, à medida que n cresce. Entretanto, na maioria das situações, o tamanho empírico fica abaixo do nível de 5%. O poder do teste aumenta à proporção que n cresce e de forma semelhante ao caso II temos que o poder diminui quando a correlação aumenta. Esta tendência é explicada devido ao fato de que com o aumento da correlação, temos menos informação a respeito da relação entre μ_i e (x_{1i}, x_{2i}) , conseqüentemente, dos valores de β_1 e β_2 . As Figuras 3.23-3.30 exibem as distribuições nulas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} . Podemos notar, em geral, uma boa concordância, no entanto, em alguns casos a distribuição empírica parece subestimar a distribuição nula. Nas Figuras 3.21-3.22, mostramos as diferenças entre as distribuições nulas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para alguns percentis da distribuição nula assintótica. Em geral, temos que as diferenças parecem crescer quando a correlação cresce. De forma semelhante ao caso I, as maiores

diferenças são observadas, quando o parâmetro de curtose k é igual $-0,3$ e o tamanho amostral $n = 20$, porém, neste caso, a estrutura de correlação é uniforme. Os resultados apresentados estão em conformidade com os obtidos por Fahrmeir & Klinger (1994), que comparam as distribuições nulas empírica e teórica dos testes unilaterais em modelos lineares generalizados e observaram uma boa concordância para os tamanhos de amostras maiores ou iguais a 50. Resultados análogos foram obtidos por Cardoso-Neto & Paula (2001) que fizeram uso desse procedimento em equações de estimação generalizada. Cysneiros & Paula (2004) obtiveram resultados semelhantes na comparação das distribuições nulas teórica e empírica do teste ξ_{RV} em modelos t -Student multivariado.

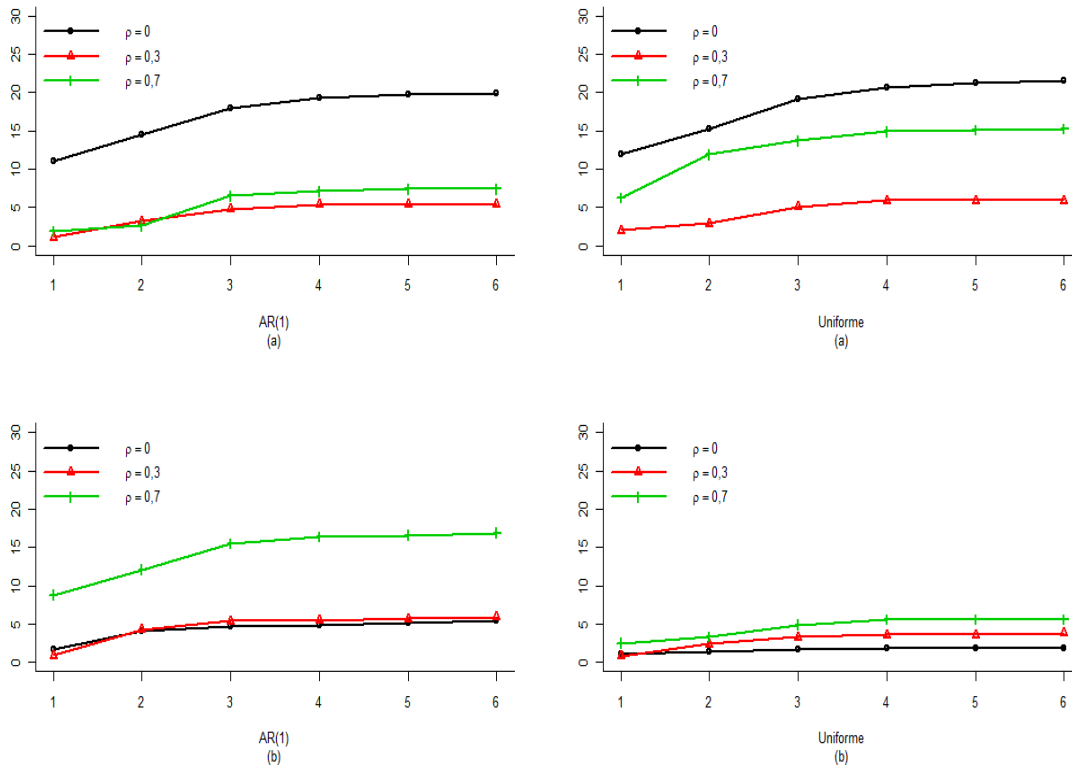


Figura 3.21: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados sob presença de regressores, $k = -0,3$, em que (a) e (b) tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

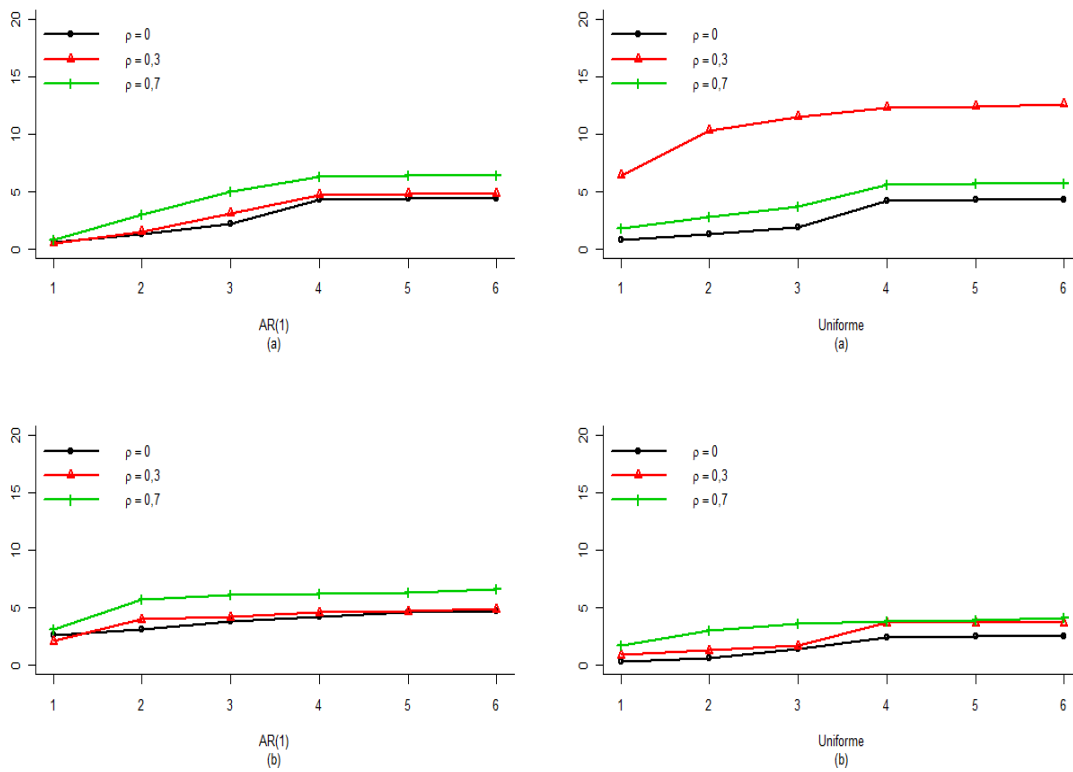


Figura 3.22: Diferenças entre as distribuições acumulada teórica e empírica da estatística ξ_{RV} (em %) para dados agrupados sob presença de regressores, $k = 0, 3$, em que (a) e (b) tamanhos amostrais $n = 20$ e $n = 50$, respectivamente.

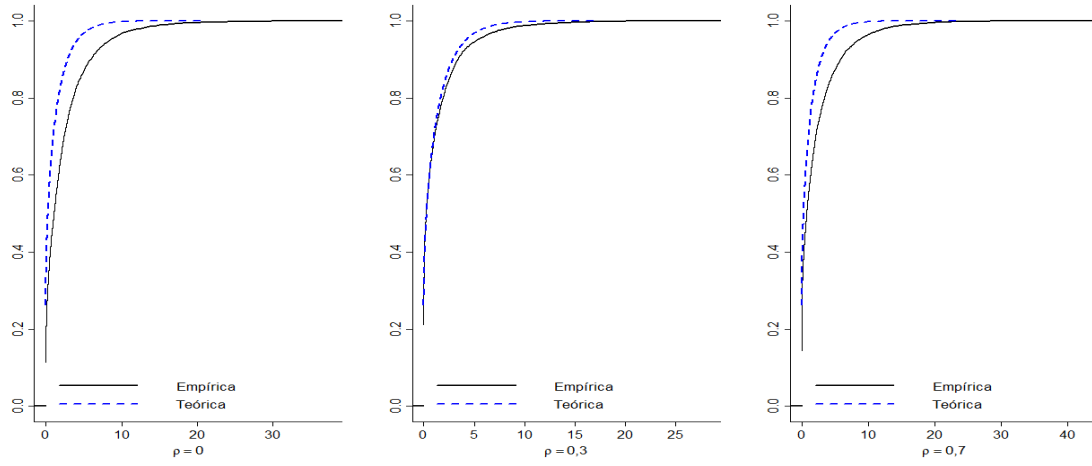


Figura 3.23: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

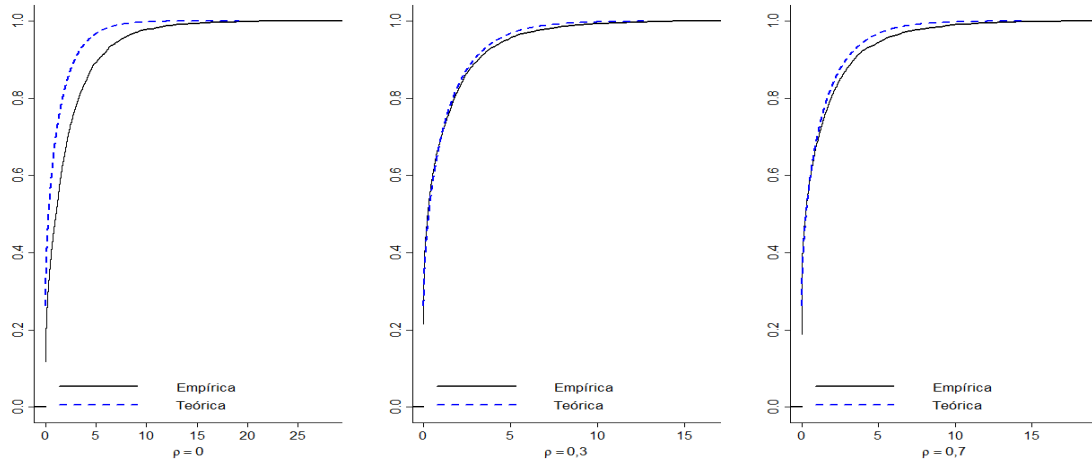


Figura 3.24: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0,3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

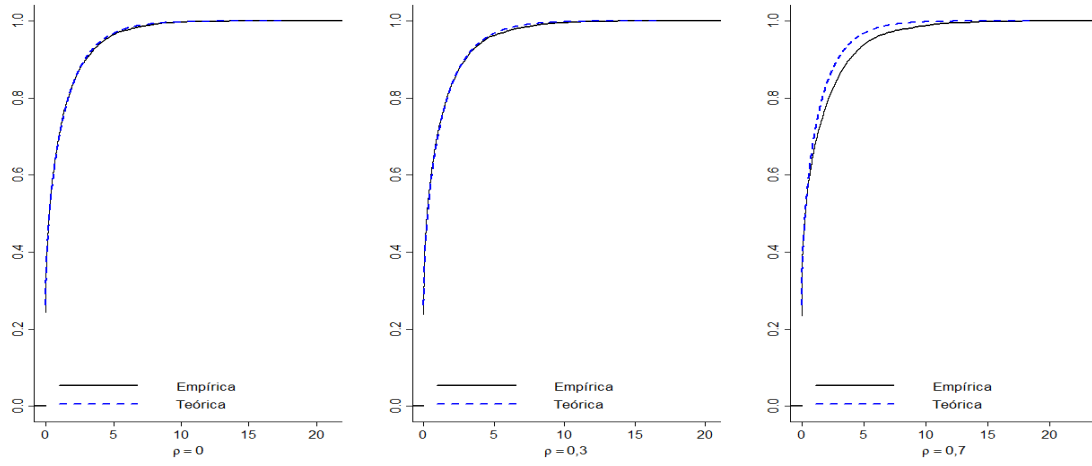


Figura 3.25: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.

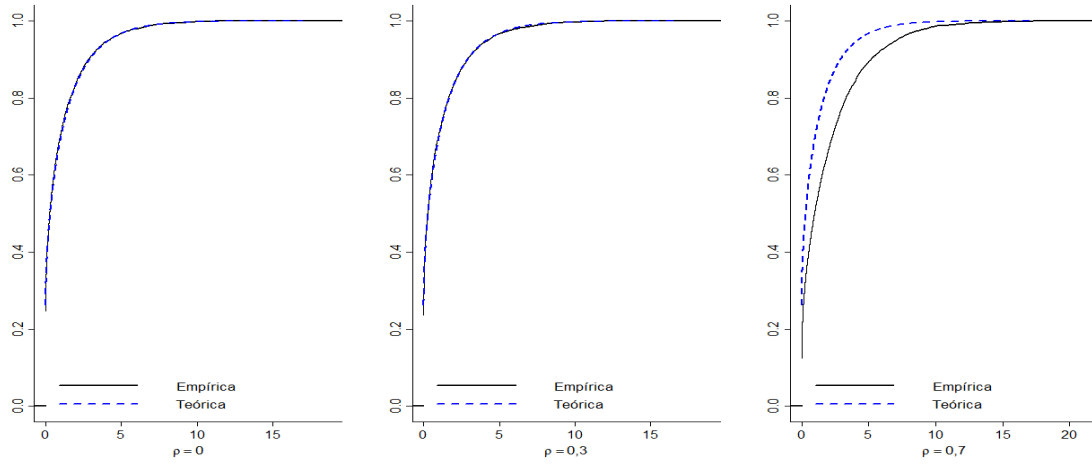


Figura 3.26: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = -0,3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).

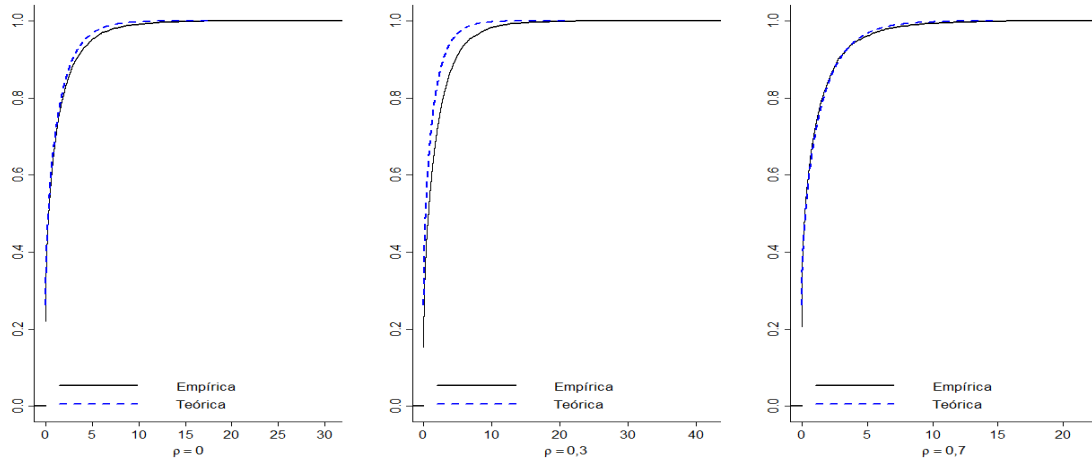


Figura 3.27: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura uniforme.

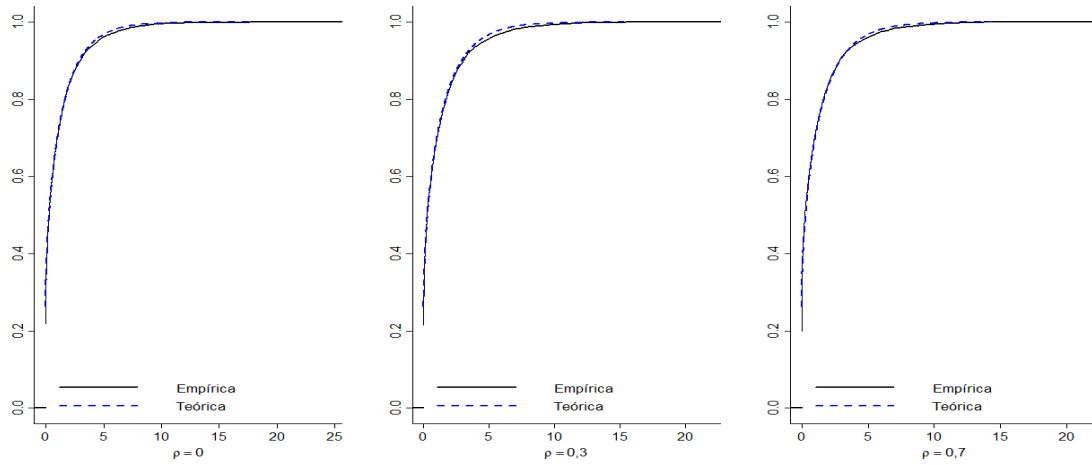


Figura 3.28: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 20$, com estrutura AR(1).

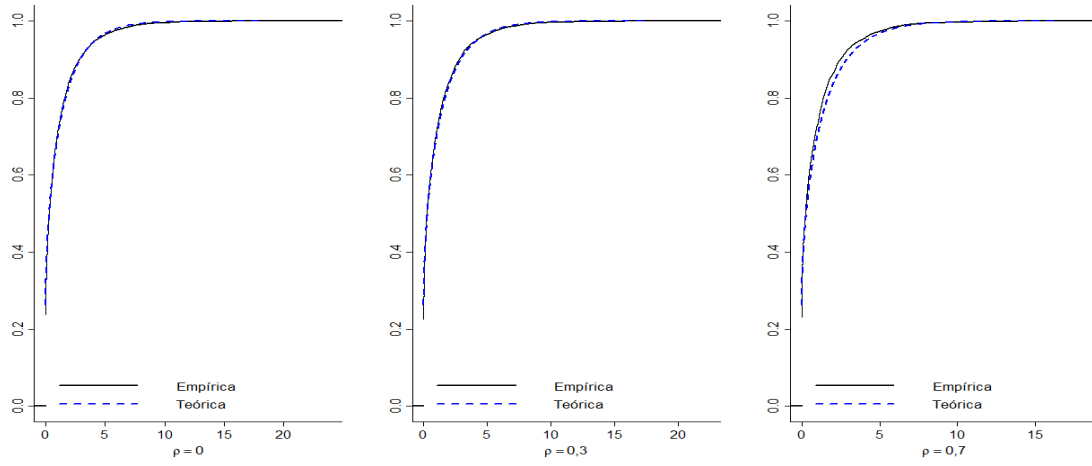


Figura 3.29: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura uniforme.

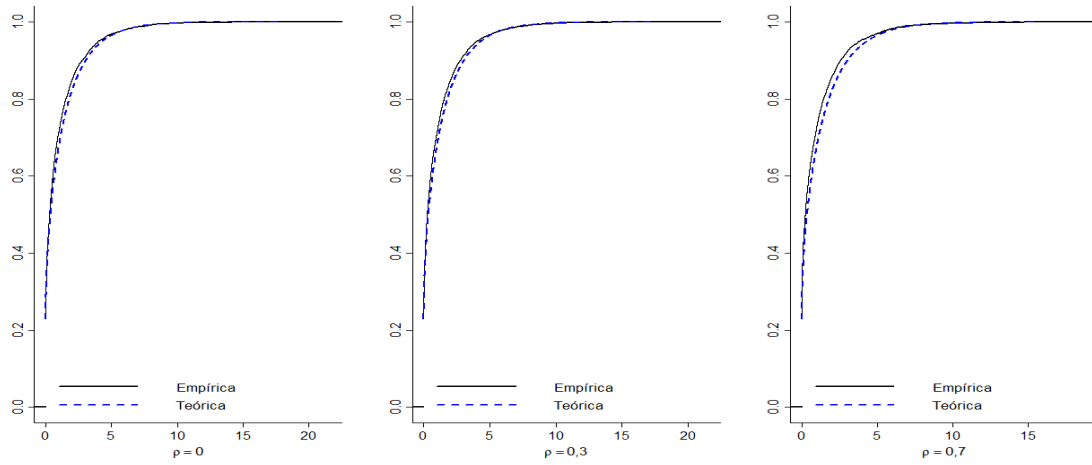


Figura 3.30: Distribuições acumuladas teórica e empírica da estatística ξ_{RV} para regressores, $k = 0, 3$ e $n = 50$, com estrutura AR(1).

Tabela 3.13: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0,3$ e $n = 20$.

			AR(1)						Uniforme					
ρ	δ_1	δ_2	Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	4,04	4,86	5,72	3,84	5,30	7,14	4,60	5,84	7,06	3,72	7,06	10,22
	0,0	0,5	11,14	12,60	14,48	6,82	9,30	11,58	12,36	14,76	17,26	6,98	11,32	10,50
	0,5	0,0	12,60	14,44	16,42	7,80	10,38	13,26	13,30	16,42	18,62	7,40	12,56	16,72
	0,5	0,5	20,98	23,32	25,48	11,18	14,44	17,16	21,52	24,98	28,20	10,86	16,22	20,90
0,1	0,0	0,0	4,12	5,08	6,04	4,32	5,84	7,46	4,40	5,88	7,62	3,94	7,06	9,90
	0,0	0,5	10,58	12,02	14,10	6,90	9,48	11,74	11,12	13,56	16,02	6,98	10,74	14,68
	0,5	0,0	11,12	12,82	14,86	7,42	9,76	12,28	11,46	13,68	15,94	6,74	11,28	15,10
	0,5	0,5	20,14	22,32	25,08	10,60	13,72	16,92	19,34	23,34	26,40	9,16	14,42	19,06
0,3	0,0	0,0	4,84	5,74	6,84	4,12	5,90	8,06	5,08	6,52	8,12	4,30	7,34	10,20
	0,0	0,5	9,58	11,44	13,10	6,24	8,72	10,88	9,72	12,12	14,14	5,82	9,86	13,46
	0,5	0,0	10,30	12,10	14,22	5,80	8,88	12,04	9,74	12,54	15,04	5,58	10,26	13,98
	0,5	0,5	15,44	18,06	20,00	8,06	11,02	13,82	14,68	18,08	20,56	7,60	11,64	15,76
0,5	0,0	0,0	4,48	5,36	6,60	4,04	6,34	9,08	5,14	6,68	8,40	4,70	8,32	11,94
	0,0	0,5	8,70	10,76	12,56	5,28	8,10	11,20	9,04	11,64	13,88	6,08	9,50	13,38
	0,5	0,0	9,32	11,28	13,10	5,62	8,80	11,90	9,86	12,78	15,12	6,32	10,56	14,96
	0,5	0,5	13,38	16,32	18,70	6,52	9,50	12,98	13,48	17,10	20,04	7,46	12,04	15,80
0,7	0,0	0,0	4,86	6,20	7,66	4,70	7,58	10,18	6,04	8,12	10,64	6,36	10,78	15,24
	0,0	0,5	8,12	10,36	12,48	5,66	8,80	12,42	9,90	12,72	15,60	7,72	12,70	17,48
	0,5	0,0	7,86	10,10	12,36	5,00	8,44	11,86	9,34	12,66	15,34	6,74	12,44	17,42
	0,5	0,5	12,70	16,32	19,14	6,68	10,44	14,08	15,12	19,78	23,88	8,84	14,64	20,30

Tabela 3.14: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0,3$ e $n = 50$.

			AR(1)						Uniforme					
ρ	δ_1	δ_2	Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	4,78	4,94	5,06	4,14	4,52	5,06	4,78	5,26	5,36	4,16	4,98	6,00
	0,0	0,5	20,88	21,20	21,40	13,92	14,82	15,36	21,02	22,08	23,30	13,64	15,50	16,82
	0,5	0,0	24,94	25,60	25,70	17,12	18,30	19,18	25,20	26,38	26,92	16,62	18,52	20,26
	0,5	0,5	45,36	46,00	46,66	28,74	30,16	31,72	45,28	47,04	47,98	28,44	31,00	33,10
0,1	0,0	0,0	4,24	4,42	4,78	4,62	5,26	5,64	4,66	4,94	5,12	4,96	5,74	6,42
	0,0	0,5	17,24	17,88	18,36	10,98	11,74	12,76	16,30	17,40	18,00	10,78	11,74	12,96
	0,5	0,0	23,18	23,72	24,30	15,22	15,94	16,68	21,34	22,68	23,56	13,28	15,04	16,58
	0,5	0,5	40,80	41,14	41,74	26,08	27,40	28,42	37,90	39,12	40,06	23,18	25,78	27,74
0,3	0,0	0,0	4,66	4,90	5,12	4,40	5,06	5,64	4,74	5,08	5,62	4,34	5,30	6,22
	0,0	0,5	15,68	16,28	16,80	10,24	11,18	12,28	14,34	15,36	16,26	9,28	10,74	11,90
	0,5	0,0	18,72	19,50	19,80	12,58	13,54	14,70	16,66	17,66	18,48	11,28	13,14	14,34
	0,5	0,5	34,20	35,20	35,84	20,14	21,50	22,80	30,60	32,14	33,46	16,64	19,04	20,82
0,5	0,0	0,0	4,30	4,56	4,76	4,34	5,14	5,74	4,92	5,46	6,14	5,14	6,46	7,64
	0,0	0,5	14,12	14,80	15,28	9,38	10,28	11,28	13,64	14,80	15,72	9,50	11,30	12,76
	0,5	0,0	16,56	17,28	18,02	10,46	11,88	13,22	15,60	17,38	18,44	11,06	13,14	14,88
	0,5	0,5	28,26	29,48	30,40	15,98	17,52	18,62	26,90	28,94	30,30	15,38	18,18	20,28
0,7	0,0	0,0	4,78	5,44	5,80	4,62	5,80	6,74	6,00	7,26	8,74	6,54	8,94	11,04
	0,0	0,5	12,38	13,32	14,36	8,06	10,14	11,74	13,74	15,92	17,96	10,98	14,08	17,04
	0,5	0,0	13,30	14,80	15,90	8,54	10,60	12,46	15,48	18,08	20,36	10,94	14,66	17,86
	0,5	0,5	23,10	25,66	27,56	12,88	14,92	17,12	25,58	29,80	32,88	15,42	19,64	24,08

Tabela 3.15: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = -0, 3$ e $n = 100$.

			AR(1)						Uniforme					
ρ	δ_1	δ_2	Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	4,82	4,72	4,60	4,46	4,56	4,60	5,06	4,96	4,92	4,26	4,56	4,76
	0,0	0,5	42,60	42,20	41,96	31,68	31,62	31,76	42,32	42,62	42,66	31,38	32,18	32,56
	0,5	0,0	45,88	45,72	45,12	34,64	34,70	34,68	45,46	45,34	45,30	33,88	34,54	34,98
	0,5	0,5	74,20	74,34	73,90	58,92	59,26	59,12	74,24	74,38	74,44	58,38	59,20	59,78
0,1	0,0	0,0	4,30	4,38	4,42	4,60	4,60	4,74	4,52	4,46	4,48	4,78	4,98	5,28
	0,0	0,5	37,12	36,96	36,96	27,56	27,64	27,90	33,92	34,14	34,34	24,48	25,28	25,82
	0,5	0,0	40,34	40,14	39,58	28,96	29,52	29,48	36,68	37,20	37,20	26,26	26,96	27,54
	0,5	0,5	68,86	68,98	68,64	53,30	53,62	53,58	64,50	64,82	64,74	48,20	49,20	49,76
0,3	0,0	0,0	4,66	4,76	4,90	4,30	4,26	4,30	4,84	4,94	5,02	4,34	4,62	4,78
	0,0	0,5	30,92	30,76	30,72	21,52	21,94	22,02	26,96	27,66	27,80	18,46	19,22	19,98
	0,5	0,0	32,06	32,12	32,06	23,62	23,74	23,88	28,20	28,52	28,56	19,52	20,46	20,98
	0,5	0,5	56,02	56,00	55,82	39,50	40,14	40,40	49,32	49,62	49,84	33,08	34,08	34,94
0,5	0,0	0,0	4,28	4,46	4,52	4,74	5,08	5,46	4,92	5,22	5,70	5,84	6,48	7,00
	0,0	0,5	24,30	24,64	24,80	16,84	17,24	17,64	22,46	23,56	24,08	16,56	18,06	18,78
	0,5	0,0	27,30	27,42	27,20	19,04	19,56	20,04	25,36	26,08	26,76	18,12	19,64	20,98
	0,5	0,5	46,88	46,92	46,96	30,64	31,48	31,90	42,14	43,44	44,38	27,34	28,76	30,42
0,7	0,0	0,0	4,72	4,96	5,34	5,34	5,92	6,72	6,26	7,50	8,44	7,34	9,22	11,10
	0,0	0,5	19,80	20,72	21,74	14,08	15,26	16,64	21,80	24,38	26,98	16,54	19,56	22,22
	0,5	0,0	21,88	23,04	23,84	14,60	16,10	17,26	23,36	25,86	28,60	17,32	20,72	23,64
	0,5	0,5	37,96	39,32	40,28	23,76	25,38	27,32	39,32	42,74	45,66	26,88	30,18	34,00

Tabela 3.16: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0, 3$ e $n = 20$.

ρ	δ_1	δ_2	AR(1)						Uniforme					
			Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	5,16	5,34	5,78	4,46	5,50	6,70	5,10	5,96	6,80	4,48	6,60	9,06
	0,0	0,5	10,90	11,40	11,90	6,44	7,86	9,14	12,52	13,46	14,82	7,06	9,56	12,84
	0,5	0,0	11,62	11,80	12,34	7,02	8,22	9,76	12,26	13,40	14,96	7,36	9,68	12,62
	0,5	0,5	20,24	20,96	20,94	10,60	11,64	13,22	20,56	22,44	23,90	10,68	13,60	16,60
0,1	0,0	0,0	4,90	5,12	5,64	3,62	4,72	6,12	4,96	5,78	6,64	4,38	6,20	8,52
	0,0	0,5	9,48	9,66	10,34	5,72	6,70	8,12	9,60	10,44	11,66	5,96	7,90	10,42
	0,5	0,0	11,02	11,10	11,60	6,56	8,10	9,24	11,04	11,98	13,20	6,60	8,76	11,48
	0,5	0,5	17,70	17,90	18,68	9,74	11,10	12,54	17,42	18,66	20,24	9,34	11,68	15,10
0,3	0,0	0,0	4,96	5,26	5,96	4,64	5,72	7,18	5,10	5,94	6,98	5,00	6,84	8,90
	0,0	0,5	9,60	10,28	10,96	6,06	7,34	9,22	9,56	10,46	11,74	6,02	8,08	10,70
	0,5	0,0	9,94	10,22	11,28	6,32	7,68	9,20	9,52	10,32	11,98	6,26	8,36	10,82
	0,5	0,5	15,58	16,26	17,16	8,42	9,88	11,74	14,66	16,02	17,56	8,00	10,72	13,30
0,5	0,0	0,0	5,30	5,64	6,52	4,26	5,62	7,40	4,92	5,58	6,56	4,28	5,90	8,04
	0,0	0,5	8,84	9,40	10,36	5,58	7,30	8,90	8,82	9,66	10,34	5,44	7,94	9,96
	0,5	0,0	8,96	9,36	10,16	6,06	7,34	9,16	9,34	10,02	10,96	5,62	7,70	10,32
	0,5	0,5	13,08	13,94	15,06	7,02	8,74	10,78	13,38	14,64	15,58	6,96	9,00	11,70
0,7	0,0	0,0	4,34	4,68	5,02	4,08	5,40	7,22	4,60	5,00	5,62	4,34	5,98	7,66
	0,0	0,5	7,58	8,04	8,74	4,74	6,22	7,70	8,16	8,34	9,12	4,84	6,48	8,78
	0,5	0,0	8,04	8,56	9,24	5,48	6,82	8,64	9,04	9,06	9,74	5,44	6,88	9,22
	0,5	0,5	11,86	12,14	13,10	6,02	7,14	9,08	13,22	13,34	14,22	6,36	7,70	9,88

Tabela 3.17: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0, 3$ e $n = 50$.

			AR(1)						Uniforme					
ρ	δ_1	δ_2	Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	4,80	4,44	4,38	4,76	4,36	4,42	5,04	4,72	4,88	4,84	4,80	5,18
	0,0	0,5	18,26	17,18	16,08	12,24	11,34	10,80	18,22	17,48	16,90	11,92	11,88	11,96
	0,5	0,0	21,64	20,10	19,12	14,70	14,18	13,80	22,64	21,50	20,84	15,08	15,04	15,24
	0,5	0,5	37,94	36,48	34,80	23,34	22,16	21,38	37,42	36,50	35,96	23,44	23,02	22,86
0,1	0,0	0,0	4,66	4,18	4,04	4,92	4,84	4,70	4,94	4,60	4,48	4,92	4,90	5,14
	0,0	0,5	16,00	15,10	14,54	10,52	9,80	9,40	15,18	14,82	14,48	9,74	9,64	9,88
	0,5	0,0	20,66	19,52	18,48	14,02	13,30	12,50	19,72	19,00	18,52	13,32	13,18	13,36
	0,5	0,5	34,82	33,88	32,16	20,70	20,80	19,20	32,92	31,94	30,94	19,04	18,40	18,64
0,3	0,0	0,0	4,76	4,56	4,34	4,66	4,52	4,70	4,94	4,62	4,62	4,82	4,84	5,24
	0,0	0,5	15,10	14,14	13,58	9,40	9,14	8,86	14,16	13,24	12,66	8,94	8,86	9,00
	0,5	0,0	17,06	15,96	15,08	11,08	10,60	10,42	15,60	14,64	14,06	9,92	9,76	9,88
	0,5	0,5	28,40	27,14	26,16	16,04	15,54	15,08	25,86	24,68	23,84	14,32	13,88	14,36
0,5	0,0	0,0	4,40	4,04	3,94	4,30	4,00	4,14	4,08	3,78	3,82	3,98	3,94	4,06
	0,0	0,5	12,42	11,84	11,36	8,14	7,64	7,82	11,92	10,92	10,40	8,06	7,66	7,72
	0,5	0,0	14,44	13,64	13,10	10,10	9,78	9,68	14,38	13,50	12,94	9,74	9,24	9,38
	0,5	0,5	24,40	23,30	22,32	14,12	13,20	12,82	23,32	22,16	21,28	13,72	13,00	12,90
0,7	0,0	0,0	4,46	4,10	3,92	4,08	4,06	4,28	4,36	3,70	3,54	4,28	3,84	3,78
	0,0	0,5	10,14	9,48	8,98	7,00	6,52	6,30	11,28	10,10	9,28	7,32	6,52	6,32
	0,5	0,0	12,24	11,24	10,42	8,06	7,40	7,34	13,76	12,10	11,24	9,02	7,92	7,66
	0,5	0,5	20,38	19,22	18,46	11,26	10,52	10,24	23,42	21,44	19,90	12,70	11,58	10,94

Tabela 3.18: Estudo de poder sob a presença de regressores $k = 0, 3$ e $n = 100$.

			AR(1)						Uniforme					
ρ	δ_1	δ_2	Unilateral			Bilateral			Unilateral			Bilateral		
			ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*	ξ_{SR}	ξ_{RV}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{RV}^*	ξ_W^*
0,0	0,0	0,0	4,58	3,86	3,38	4,68	3,98	3,52	4,80	4,20	3,70	4,80	4,10	3,78
	0,0	0,5	34,16	32,02	30,04	25,06	22,80	21,18	34,10	32,46	30,74	24,76	23,04	21,32
	0,5	0,0	37,16	34,36	32,04	26,28	24,50	22,08	37,10	34,78	32,54	26,08	24,56	22,82
	0,5	0,5	63,26	61,24	58,80	46,98	44,50	41,90	63,48	61,72	59,66	47,16	45,12	42,92
0,1	0,0	0,0	5,42	4,54	3,88	4,68	4,00	3,66	5,06	4,52	4,08	4,70	4,16	3,86
	0,0	0,5	30,50	28,30	26,34	21,98	19,92	18,30	28,24	26,50	24,52	20,48	18,68	17,26
	0,5	0,0	32,54	30,42	28,36	23,84	21,92	19,82	30,38	28,44	26,60	21,58	19,88	18,66
	0,5	0,5	57,44	55,30	52,70	41,28	38,76	36,52	53,40	51,32	49,14	37,42	35,50	33,70
0,3	0,0	0,0	4,76	4,18	3,74	4,30	3,92	3,68	4,78	4,16	3,88	4,30	3,78	3,42
	0,0	0,5	25,74	23,80	21,84	17,66	15,76	14,48	22,56	20,82	19,14	15,34	13,82	12,78
	0,5	0,0	26,20	24,34	22,54	17,86	16,18	15,00	23,36	21,40	20,12	15,52	14,34	13,06
	0,5	0,5	48,04	45,46	43,30	32,86	29,92	27,52	42,52	40,04	37,98	27,56	25,48	23,88
0,5	0,0	0,0	4,18	3,62	3,26	4,06	3,80	3,40	4,18	3,40	4,02	3,96	3,52	4,30
	0,0	0,5	21,58	19,48	17,58	14,52	12,88	11,64	19,78	18,00	15,94	13,56	12,12	10,96
	0,5	0,0	23,10	21,30	19,56	15,38	13,86	12,52	21,54	19,54	17,74	14,60	12,36	11,10
	0,5	0,5	39,36	37,02	35,02	25,30	23,28	21,40	38,14	35,56	33,36	24,22	22,24	20,44
0,7	0,0	0,0	4,06	3,40	3,82	4,36	3,82	3,12	3,94	3,10	3,74	4,30	3,52	3,96
	0,0	0,5	17,70	15,82	14,04	11,34	9,98	8,96	20,68	17,52	14,78	13,60	11,40	9,82
	0,5	0,0	17,84	16,34	14,66	12,12	10,68	9,64	21,14	18,30	15,80	13,92	11,72	9,86
	0,5	0,5	34,32	31,66	29,16	20,72	18,86	16,88	39,42	37,72	32,24	24,98	21,82	18,86

4.1 Dados sobre diabéticos

Analisaremos, a seguir, o exemplo 2.1 do livro de Crowder & Hand (1990), já bem trabalhado na literatura, referente a um estudo comparativo entre grupos de diabéticos, em que originalmente são considerados quatro grupos de pacientes. Entretanto, consideraremos apenas três grupos, por que estes foram formulados de acordo com a severidade da doença; ver Shin, Park & Park (1996). Os grupos são: controle ($n_1 = 8$), diabéticos sem complicações ($n_2 = 6$) e diabéticos com hipertensão ($n_3 = 7$). A variável resposta é obtida como a resposta a um teste físico observada nos tempos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 10 minutos. Assim, Y_{ilj} representa a resposta do teste físico do i -ésimo indivíduo do ℓ -ésimo grupo no j -ésimo minuto. Dessa forma, assumiremos o modelo

$$\mathbf{Y}_{il} = \boldsymbol{\mu}_\ell + \boldsymbol{\epsilon}_{il}, \quad (4.1)$$

em que $\boldsymbol{\mu}_\ell = \mu_\ell \mathbf{1}_m$ e $\mathbf{Y}_{il} = (Y_{il1}, \dots, Y_{ilm})^\top$ e $\boldsymbol{\epsilon}_{il} \sim \text{MPE}_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_{il}, k)$ com $\boldsymbol{\Phi}_{il} = \sigma^2 \mathbf{R}(\rho)$ e $m = 8$. A estrutura de correlação AR(1) é usada para $\mathbf{R}(\rho)$, como sugerido em Shin, Park & Park (1996). Também, é aceitável assumir as restrições $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ para os valores esperados do teste físico.

Cysneiros & Paula (2004) apresentaram a análise deste mesmo conjunto de dados sob os modelos normal e t -Student multivariado (com 15 graus de liberdade). Os autores mostraram: (i) a distribuição t -multivariada parece ser mais adequada para ajustar os dados do que o modelo normal, (ii) sob o modelo t -Student há indicação de que pelo menos o grupo de diabéticos com hipertensão apresentou um valor esperado para o teste físico menor do que o valor esperado para o grupo controle e (iii) os testes unilaterais são mais robustos sob o modelo t -Student contra observações extremas.

Diante disso, temos como objetivo testar as hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra $H_2: \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 , sob o modelo MPE. Como discutido na Seção 2.8, temos que as distribuições nula assintótica das estatísticas dos testes é dada por uma mistura de distribuições qui-quadrados ponderada por pesos que neste caso assumem os valores $\omega(0, 2, \Delta) = 1/3$, $\omega(1, 2, \Delta) = 1/2$ e $\omega(2, 2, \Delta) = 1/6$.

Apresentamos na Tabela 4.1 as estimativas por máxima verossimilhança sob H_0 e H_2 , como também os valores das estatísticas dos testes razão de verossimilhanças, score e Wald (p -valores entre parêntesis) para o modelo MPE e $k = 0, 5$. Na Figura 4.1 apresentamos uma análise do critério de informação de akaike (AIC) para vários valores de k . Note que o menor valor do AIC é observado para $k = 0, 8$. Contudo, fazendo-se a análise dos erros-padrão (EP) das estimativas, como também, dos gráficos de envelope e índices dos resíduos padronizados, observamos que para $k > 0, 5$ os EP das estimativas aumentavam e que o melhor ajuste é observado quando $k = 0, 5$. Na Tabela 4.1 são mostrados os resultados dos testes estatísticos para as hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ versus H_1 : pelo menos duas médias diferentes. Podemos notar, através dos p -valores, que a hipótese nula não é rejeitada ao nível de 10%. Através da Figura 4.2, nota-se que a distribuição parece ser adequada na modelagem dos dados, todavia, os testes unilaterais parecem não ser sensíveis para o modelo MPE ($k = 0, 5$). Uma característica que devemos destacar no modelo MPE é que tanto estimativa de σ^2 como o erro padrão obtido são relativamente pequenos, comparando-se às estimativas sob o modelo normal e t -Student multivariado apresentados em Cysneiros & Paula (2004).

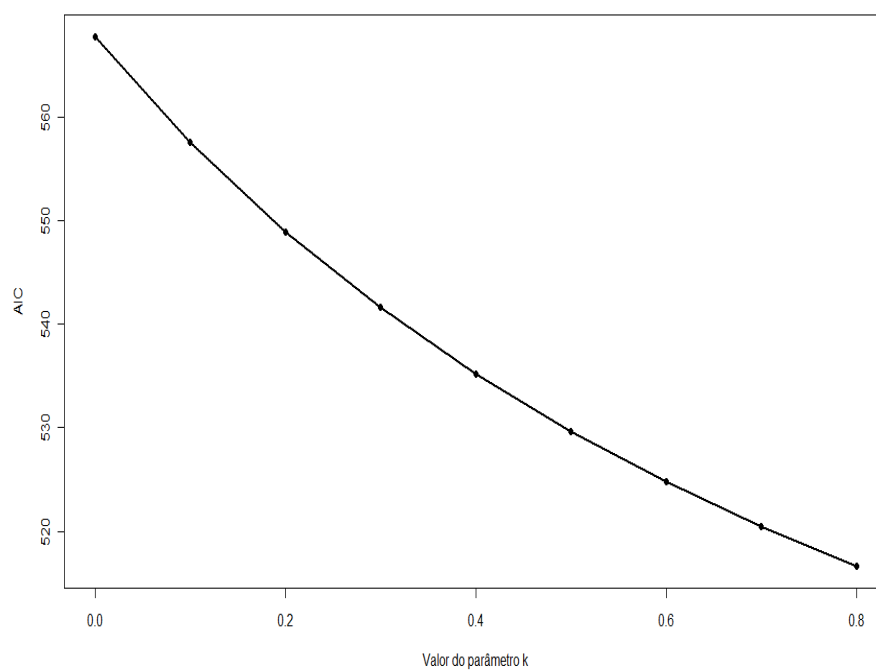


Figura 4.1: AIC para vários valores do parâmetro k da distribuição MPE para o conjunto de pacientes com diabetes.

Tabela 4.1: Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo MPE ($k = 0, 5$), (p -valor em parêntesis).

Parâmetro	H_0		H_2		H_1	
μ_1	5,554	(0,830)	6,445	(1,277)	5,627	(1,261)
μ_2	5,554	(0,830)	6,445	(1,475)	7,524	(1,456)
μ_3	5,554	(0,830)	4,146	(1,366)	4,151	(1,348)
σ^2	2,999	(0,889)	2,733	(0,814)	2,670	(0,793)
ρ	0,972	(0,009)	0,969	(0,010)	0,968	(0,010)
ξ_{SR}	ξ_{LR}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{LR}^*	ξ_W^*	
2,309	2,089	1,888	3,267	3,053	2,890	
(0,117)	(0,133)	(0,149)	(0,195)	(0,217)	(0,235)	

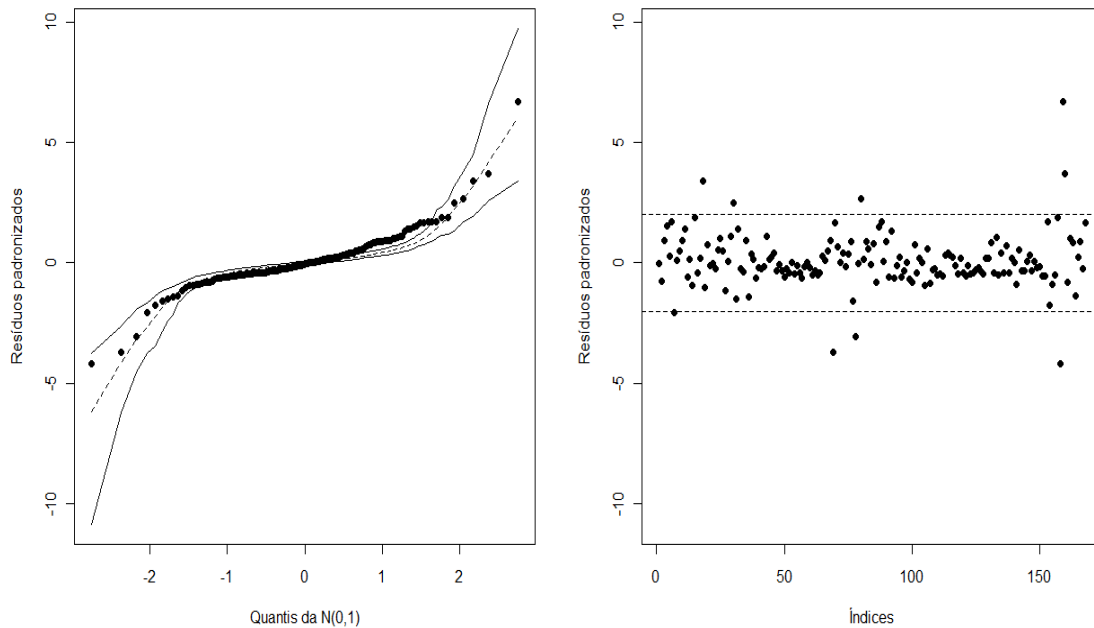


Figura 4.2: Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduo padronizados (direita) sob o modelo MPE($k = 0, 5$).

4.2 Dados sobre volume da vesícula biliar

Reanalisaremos um experimento descrito por Reiczigel (1999), sobre um estudo apresentado em Sterczer *et al.* (1996), em que ultra-sonografias bidimensionais são analisadas com o objetivo de verificar o efeito de *cholagogues* em três grupos de cães saudáveis. Nos grupos 1 e 2 são usados os medicamentos *cholechystokinin* e *clanobutin*, respectivamente. O grupo 3 é o grupo controle. Temos que os tamanhos dos grupos são iguais, $n_1 = n_2 = n_3 = 6$. Os valores referentes ao volume da vesícula biliar é observado antes da aplicação das substâncias citadas anteriormente e depois a cada intervalo de 10 minutos, durante 120 minutos. A variável resposta Y_{ilj} representa o volume da vesícula biliar do i -ésimo cão do ℓ -ésimo grupo no j -ésimo intervalo de tempo. Logo, o modelo será dado como em (4.1), em que $\boldsymbol{\mu}_\ell = \mu_\ell \mathbf{1}_m$, $\mathbf{Y}_{i\ell} = (Y_{ilj}, \dots, Y_{ilm})^\top$ e $\boldsymbol{\epsilon}_{i\ell} \sim \text{MPE}_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_{i\ell}, k)$, com $\boldsymbol{\Phi}_{i\ell} = \sigma^2 \mathbf{R}(\rho)$ e $m = 13$.

A estrutura de correlação AR(1) é usada para $\mathbf{R}(\rho)$ como sugerido em Myers, Montgomery & Vining (2001). É razoável assumir as restrições $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ para os valores esperados do volume da vesícula biliar, visto que os grupos estão dispostos de acordo com as mudanças no volume da vesícula. Dessa maneira, temos interesse em testar as hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra $H_2: \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 , sob o modelo MPE. Sabemos que as distribuições nula assintótica das estatísticas dos testes é dada por uma mistura de distribuições qui-quadrados ponderada por pesos e que, neste caso, assumem os mesmos valores do exemplo anterior, uma vez que o número de restrições é o mesmo.

A Tabela 4.2 apresenta as estimativas por máxima verossimilhança sob H_0 e H_2 , como também os valores das estatísticas dos testes razão de verossimilhanças, escore e Wald (p -valores entre parêntesis) para o modelo normal, como também os resultados dos testes estatísticos para as hipóteses $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra $H_1: \text{pelo menos duas médias diferentes}$. A Figura 4.3 apresenta os gráficos de envelope e resíduos padronizados sob o modelo normal. Note através dos p -valores que a hipótese nula não é rejeitada a 10%, como também o modelo normal parece não ser adequado para este exemplo.

Tabela 4.2: Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo normal, (p -valor entre parêntesis).

Parâmetro	H_0		H_2		H_1	
μ_1	16,923	(1,438)	18,830	(2,444)	18,825	(2,429)
μ_2	16,923	(1,438)	15,958	(2,444)	15,225	(2,429)
μ_3	16,923	(1,438)	15,958	(2,444)	16,688	(2,429)
σ^2	44,099	(12,559)	42,678	(12,101)	42,243	(11,960)
ρ	0,970	(0,009)	0,969	(0,009)	0,968	(0,009)
ξ_{SR}	ξ_{LR}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{LR}^*	ξ_W^*	
0,895	0,908	0,921	1,065	1,088	1,111	
(0,279)	(0,276)	(0,274)	(0,587)	(0,580)	(0,574)	

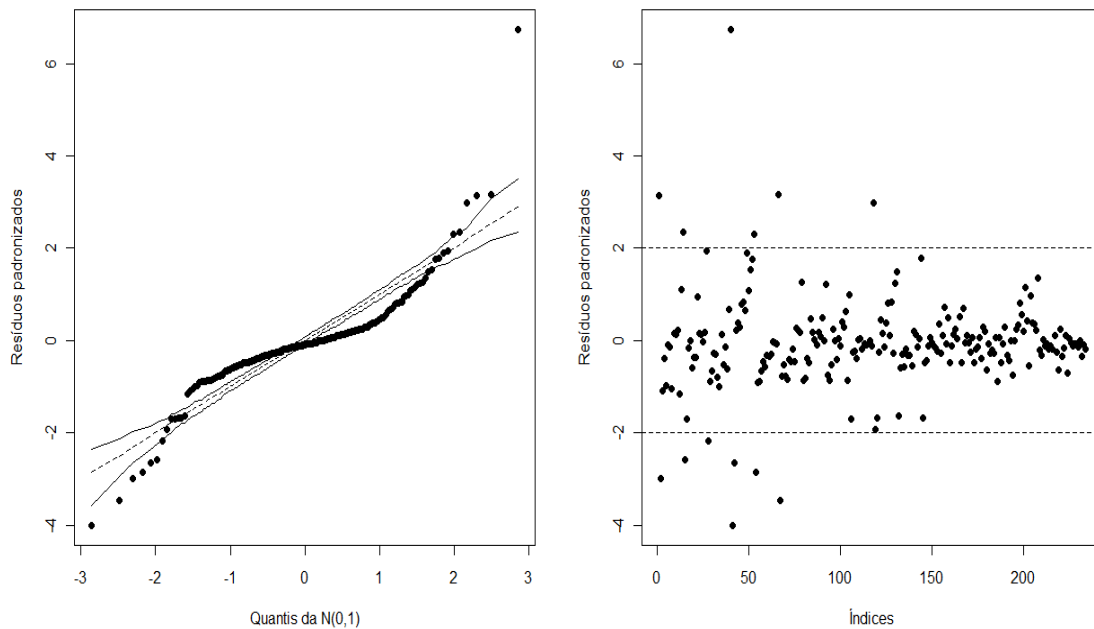


Figura 4.3: Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduos padronizados (direita) sob o modelo normal.

A Tabela 4.3 apresenta as estimativas por máxima verossimilhança sob H_0 e H_2 , como também os valores das estatísticas dos testes razão de verossimilhanças, escore e Wald (p -valores entre parêntesis) para o modelo MPE e $k = 0, 4$. Novamente, ajustamos vários modelos para diferentes valores de k e de forma semelhante ao caso anterior, dentre os modelos analisados o menor AIC foi observado para $k = 0, 8$, todavia analisando-se os gráficos de envelope e dos resíduos padronizados, notamos que o melhor ajuste é obtido quando $k = 0, 4$. Assim, o modelo analisado será o MPE($k = 0, 4$). Na Tabela 4.3 encontra-se os resultados dos testes estatísticos para as hipóteses $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra $H_1 : \text{pelo menos duas médias diferentes}$. A Figura 4.4, apresenta os gráficos de envelope e dos resíduos padronizados sob o modelo MPE($k = 0, 4$). Note através dos p -valores que a hipótese nula não é rejeitada a 10%, entretanto, diferentemente do modelo normal, o modelo MPE ajustado parece ser adequado para o ajuste dos dados, neste exemplo, do que o modelo normal. Semelhante ao caso anterior, observamos que as estimativas de σ^2 e erros-padrão são bem menores do que as obtidas através do modelo normal.

Tabela 4.3: Estimativas de máxima verossimilhança e valores das estatísticas dos testes sob o modelo MPE ($k = 0, 4$), (p -valor entre parêntesis).

Parâmetro	H_0		H_2		H_1	
μ_1	15,857	(1,298)	17,534	(2,221)	17,532	(2,216)
μ_2	15,857	(1,298)	15,357	(2,221)	14,880	(2,216)
μ_3	15,857	(1,298)	15,357	(2,221)	15,707	(2,216)
σ^2	7,963	(2,348)	7,796	(2,293)	7,763	(2,282)
ρ	0,969	(0,009)	0,968	(0,010)	0,968	(0,010)
ξ_{SR}	ξ_{LR}	ξ_W	ξ_{SR}^*	ξ_{LR}^*	ξ_W^*	
0,560	0,596	0,641	0,637	0,689	0,750	
(0,353)	(0,344)	(0,333)	(0,727)	(0,708)	(0,687)	

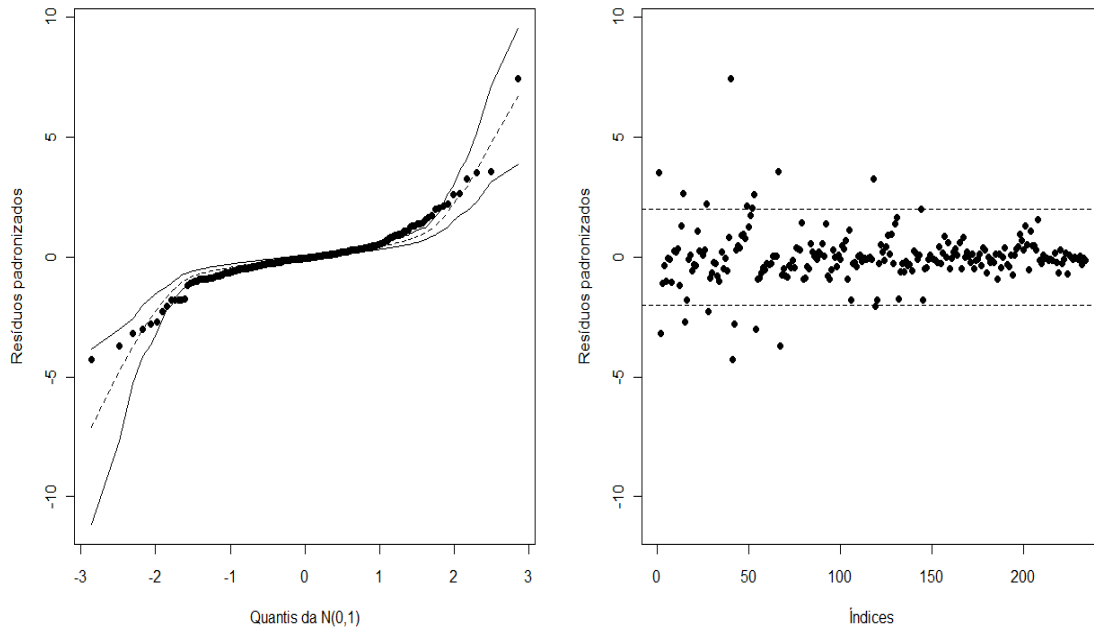


Figura 4.4: Gráficos de envelope (esquerda) e dos resíduos padronizados (direita) sob o modelo MPE ($k = 0, 4$).

CAPÍTULO 5

Conclusões

Neste estudo, desenvolvemos o processo iterativo de estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança restrito em modelos de regressão linear, supondo erros exponencial potência multivariada. Discutimos sobre a distribuição nula assintótica em testes de hipóteses da forma $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{d}$ versus $H_2 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{d}$, com pelo menos uma desigualdade estrita em H_2 . Observamos que a distribuição nula assintótica é única, ou seja, não depende de parâmetros sobre a hipótese nula, todavia, pode depender das correlações.

Os estudos de simulação apresentados indicaram, em geral, uma boa concordância entre as distribuições teórica e empírica. Constatamos a superioridade dos testes de hipóteses unilaterais sobre os bilaterais, principalmente para valores perto dos parâmetros sob a hipótese nula. Notamos que, dentre os casos analisados para dados agrupados e presença de regressores as maiores diferenças foram observadas quando $n = 20$ e o parâmetro de curtose da distribuição MPE e $k = -0,3$. Nos exemplos analisados, verificamos que a distribuição parece ajustar bem os dados, entretanto, no que tange à sensibilidade dos testes unilaterais isso não é verificado.

Por fim, acrescentamos propostas de estudos de simulação que poderão ser realizados a partir do trabalho apresentado nessa dissertação:

- Estender os resultados encontrados sob o modelo exponencial potência multivariado para a classe elíptica multivariada;
- Avaliar o poder dos testes de hipóteses razão de verossimilhanças, Wald e escore, supondo correlação negativa;
- Verificar o desempenho do teste Bootstrap, como também, do teste tipo escore proposto por Silvapulle & Silvapulle (1995), nos modelos MPE.

Referências Bibliográficas

- [1] Aigner, D. J., Lovell, C. K. & P. Schmidt (1977). Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models. *Journal of Econometrics*, **6**, 21-37.
- [2] Bartholomew, D. J. (1959a). A test of homogeneity for ordered alternatives, I. *Biometrika*, **46**, 36-48.
- [3] Bartholomew, D. J. (1959b). A test of homogeneity for ordered alternatives, II. *Biometrika*, **46**, 328-335.
- [4] Bazaraa, M.S, Sherali, H. D. & C. M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York.
- [5] Basu, S., Micchelli, C. S. & Olsen, P. (2001). Power exponential densities for the training and classification of acoustic feature vectors in speech recognition. *Journal of Computational & Graphical Statistics*, **10**, 158-184.
- [6] Box, G. E. P. & Tiao, G. C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison-Wesley.
- [7] Cambanis, S., Huang, S. & Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 368-385.
- [8] Cardoso-Neto, J. & Paula, G. A. (2001). Wald one-sided test using generalized estimating equations. *Computational Statistics and Data Analysis*, **36**, 475 - 495.

- [9] Chacko, V. J. (1963). Testing homogeneity against ordered alternatives. *The Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 945-956.
- [10] Crawley, M. (2007). *The R Book*. Wiley, New York.
- [11] Crowder, M. J. & Hand, D. J. (1990). *Analysis of Repeated Measurements*. London: Chapman and Hall.
- [12] Cysneiros, F. J. A. & Paula, G. A. (2004). Restricted Methods in Symmetrical Linear Regression Models. *Computational Statistical & Data Analysis*, **49**, 689-708.
- [13] Cysneiros, F. J. A. & Paula, G. A. (2005). One-Sided Tests in Linear Models with Multivariate t-Distribution. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, **33**, 747-771.
- [14] Dalgaard, P. (2009). *Introductory Statistics with R*. Springer, New York.
- [15] Doornik, J. A. (2009). *Ox: an Object-Oriented Matrix Language*, 4th ed. Timberlake Consultants Press; Oxford: [http ://www:doornik:com](http://www.doornik.com).
- [16] Eisenberger, I. (1964). Genesis of bimodal distribution. *Technometrics*, **6**, 357-363.
- [17] Fang, K. T., Kotz, S., Ng, K. W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, London.
- [18] Fang, K. T., Zhang, Y. T. (1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Springer-Verlag, London.
- [19] Fahrmeir, L., Klinger, J. (1994). Estimating and testing generalized linear models under inequality restrictions. *Statistical Papers*, **35**, 211-229.
- [20] Fletcher, R.(1987). *Practical Methods of Optimization*. Wiley, New York.
- [21] Galea, M., Paula, G. A, Bolfarine, H., (1997). Local Influence in elliptical linear regression models. *Statistician*, **46**, 71-79.
- [22] Garre, F. G., Vermut, J. K. & Croon, M. A. (2002). Likelihood-ratio tests for order-restricted log-linear models: A comparison of asymptotic and bootstrap methods. *Metodologia de las Ciencias del Comportamento*, **1**, 1-18.

- [23] Gómez, E., Gomez-Villegas, M. A. & Marín, J. M. (1998). A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **27**, 589-600.
- [24] Gómez, E., Gomez-Villegas, M.A. & Marín, J.M. (2008). Multivariate exponential power distributions as mixtures of normal distributions with bayesian application. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 972-985.
- [25] Gouriéroux, G. & Monfort, A. (1995). *Statistics and Econometrics*. Vols 1 e 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] Jennrich, R. I & Schluchter, M. D. (1986). Unbalanced repeated-measures models with structured covariance matrices. *Biometrics*, **42**, 805-820.
- [27] Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhya A*, **32**, 419-430.
- [28] Kodde, D. A. & Palm, F. C. (1986). Wald criteria for jointly testing equality and inequality restriction. *Econometrica*, **54**, 1243 - 1248.
- [29] Kowalski, J., Mendoza-Blanco, J., Tu, X. M. & Gleser, L. J. (1999). On the difference in inference and prediction between the joint and independent *t*-error models for seemingly unrelated regressions. *Communication in Statistics - Theory and Methods*, **28**, 2119-2140.
- [30] Kudô, A. (1963). A Multivariate analogue of the one-sided test. *Biometrika A*, **50**, 403-418.
- [31] Knuth, D. (1986). *The TeXbook*. Addison-Wesley, New York.
- [32] Kwitt, R., Meerwald, P. & Uhl, A. (2009). Color-image watermarking using multivariate power exponential distribution. Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, 4245-4248.
- [33] Lamport, L. (1986). *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison-Wesley. Retrieved 2007-02-02.

- [34] Lange, K. L., Litte, R. J. A. & Taylor, J. M. G. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 881-896.
- [35] Lindsey, J. K. (1999). Multivariate elliptically contoured distributions for repeated measurements. *Biometrics*, **55**, 1277-1280.
- [36] Lindsey, J. K. (2006). Multivariate distributions with correlation matrices for non-linear repeated measurements. *Biometrics*, **50**, 720-732.
- [37] Little, R. J. A. (1988). Robust estimation of the linear mean and covariance matrix from data with missing values. *Applied Statistics*, **37**, 23-39.
- [38] Liu, M. & Bozdogan, H. (2008). Multivariate regression models with power exponential random errors and subset selection using genetic algorithms with information complexity. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **1**, 4-37.
- [39] Lunetta, G. (1963). Di una generalizzazione dello schema della curva normale. *Annali della Facoltà di Economia e Commercio di Palermo*, **17**, 237-244.
- [40] Mardia, K. V., Kent, J. T. & Bibby, J. M. (1982). *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- [41] Milliken, G. A. & Jonhson, D. E. (2002). *Analysis of Messy Data: Volume III - Analysis of Covariance*. 1st ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [42] Myers, R. H., Montgomery, D. C. & Vining, G. G. (2001). *Generalized Linear Models: With Applications in Engineering and the Sciences*. Wiley, New York.
- [43] Nagahata, H. (1979). Tests against order restrictions in binomial populations. *Memoirs of the Faculty of Science*, **34**, 369-378.
- [44] Nyquist, H. (1991). Restricted estimation of generalized linear models. *Applied Statistics*, **40**, 133-141.
- [45] Olive, D. J. (2008). *Applied Robust Statistics*, disponível em: www.math.siu.edu/olive/cont.pdf.

- [46] Osorio, F., Paula, G. A. & Galea, M. (2007). Assessment of local influence in elliptical linear models with longitudinal structure. *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 4354-4368.
- [47] Paula, G. A. & Artes, R. (2000). One-sided test to assess correlation in logistic linear models using estimation equations. *Biometrical Journal*, **42**, 701-714.
- [48] Paula, G. A. & Sen, P. K. (1995). Tests for ordered hypotheses in linkage in heredity. *Statistics and Probability Letters*, **20**, 395-400.
- [49] Pilla, R. S. & Qu, A. (2006). Testing for order-restricted hypothesis in longitudinal data. *Journal of the Royal Statistical Society*, **68**, 437-455.
- [50] Qu, A., Lindsay, B. G. & Li, B. (2000). Improving generalised estimation equations using quadratic inference functions. *Biometrika*, **87**, 823-836.
- [51] Rao, C. R., Toutenburg (1999). *Linear Models: Least squares and alternatives*, 2nd ed. Springer, New York.
- [52] R Development Core Team (2008). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org>.
- [53] Reicziguel, J. (1999). Analysis of experimental data with repeated measurements. *Biometrics*, **55**, 1059-1063.
- [54] Robertson, T. & Wegman, E. J. (1978). Likelihood ratio tests for order restrictions in exponential families. *The Annals of Statistics*, **6**, 485-505.
- [55] Savalli, C. R., Paula, G. A. & Cysneiros, F. J. A. (2006). Assessment of variance components in elliptical linear mixed models. *Statistical Modelling*, **6**, 59-76.
- [56] Shapiro, A. (1988). Towards a unified theory of inequality constrained testing in multivariate analysis. *International Statistical Review*, **56**, 49-62.
- [57] Shi, W. D, Park, C. G. & Park, T. P. (1996). Testing for ordered group effects with repeated measurements. *Biometrika*, **83**, 688 - 694.

- [58] Silvapulle, M. J & Silvapulle, P. (1995). A score test against one-sided alternative. *Journal of The American Statistical Association*, **90**, 853 - 858.
- [59] Silvapulle, M. J., Silvapulle, P. & Basawa V. I. (2002). Test against inequality constraints in semiparametrics models. *Journal of Planning and Inference*, **107**, 307-320.
- [60] Singer, J. M., Nobre, J. S. & Rocha, F. M. M. (2009). *Análise de dados longitudinais*. A publicar.
- [61] Sterczer, A., Vörös, K. & Karsai, F. (1996) Effect of cholagogues on the volume of the gallbadder of dogs. Research in Veterinary. *Science*, **60**, 44-47.
- [62] Subbotin, M. (1923). On the law of frequency of errors. *Mathematicheskii Sbornik*, **31**, 296-301.
- [63] Tannuri-Pianto, M. E., Arcoverde, F. D. & Sousa, M. C. S. (2009). Mensuração das eficiências das distribuidoras do setor energético brasileiro usando fronteiras estocásticas, disponível em www.anpec.org.br/encontro2005/artigos/A05A110.pdf.
- [64] Taylor, J. M. G (1992). Properties of modeling the error distribution with an extra shape parameter. *Computational Statistics and Data Analysis*, **13**, 33-46.
- [65] Venables, W. N. & Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*. 4th ed. Springer, New York.
- [66] Verbeke, G. (1995). The Linear Mixed Models. A Critical Investistigation in the Context of Longitudinal Data Analysis. Unpublished PhD thesis, Catholic University of Leuven, Faculty os Science, Department of Mathematics, Belgica.
- [67] Verbeke, G. & Molenberghs, G. (2003). The use of score tests for inference on variance components. *Biometrics*, **59**, 254-262.
- [68] Weiss, E. R. (2005). *Modeling Longitudinal Data*. Springer, New York.
- [69] Yamaguchi, K. (1990). Generalized EM algorithm for model with contaminated error terms. *Proceedings of the Seven Japan and Korea Joint Conference of Statistics*.