



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E  
TECNOLÓGICA

YASMIN CHAGAS DE OLIVEIRA

O ENSINO DE COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS: uma análise sobre os  
conhecimentos docentes

Recife  
2024

**YASMIN CHAGAS DE OLIVEIRA**

**O ENSINO DE COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS: UMA ANÁLISE SOBRE OS  
CONHECIMENTOS DOCENTES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de título de mestre.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Juliana Azevedo Montenegro

Recife  
2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Oliveira, Yasmin Chagas de.

O ensino de combinatória nos anos iniciais: uma análise sobre os conhecimentos docentes / Yasmin Chagas de Oliveira. - Recife, 2024.

170f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2024.

Orientação: Juliana Azevedo Montenegro.

Inclui referências, apêndices e anexos.

1. Combinatória; 2. Conhecimento docentes; 3. Ensino Fundamental Anos Iniciais. I. Montenegro, Juliana Azevedo. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**YASMIN CHAGAS DE OLIVEIRA**

**O ENSINO DE COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS: uma análise sobre os  
conhecimentos docentes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de título de mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em 28/05/2024.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Juliana Azevedo Montenegro  
(Orientadora e Presidente)  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

---

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrao Santos  
(Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

---

Prof. Dr. Vinicius Pazuch  
(Examinador Externo)  
Universidade Federal do ABC - UFABC

## DEDICATÓRIA

*À minha querida avó Marinalva Costa de Sá Chagas (in memoriam), que mesmo em outro plano está sempre viva em minha memória, pois sempre esteve me apoiando nos momentos mais importantes da minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu Deus que me deu sabedoria e iluminou meu caminho para que eu chegasse a esse momento presente.

À minha família que me garantiu todo o suporte emocional, financeiro e de bem-estar, principalmente minha mãe, Maria Betânia, meu pai, Valdecir Flor, que se empenharam em meios as dificuldades, a tornar a minha educação seu foco de vida, e minha madrinha, Maurinete Costa, na qual dedico também todas as minhas conquistas.

Ao meu amado companheiro Lucas Luãn por me impulsionar para a vida, me apoiando nos momentos que eu pensei que iria desistir e me incentivando a sempre continuar.

Sou grata a minha maravilhosa orientadora Juliana Montenegro, na qual me apoiou para dar continuidade a essas experiências acadêmicas, em que esteve presente desde a minha graduação, acompanhando toda minha trajetória com o seu profissionalismo e cuidado, deixando tudo de forma mais leve, sempre levando em conta a situação emocional, com sua delicadeza, contribuindo de forma relevante para a conclusão desse trabalho.

Ao Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico (Geração) na qual fiz parte, e que ajudaram no crescimento da minha pesquisa.

Agradeço aos professores do EDUMATEC, em especial a Cris Pessoa, por seu carinho. Aos membros da banca examinadora Jaqueline e Vinicius por tanta contribuição.

Aos meus queridos amigos do mestrado Grupo lindinhos: Dayanne, Edilson, Edson e Thiago, ainda meus amigos Alaide e Thales (grupo quinta? socorro), todos esses que foram a alegria e o meu suporte nesse mestrado.

E por fim as minhas primas Thayná Maria, Thays Cristina e Clarinha, que desde que eu nasci são cúmplices de todas minha história, nos momentos felizes e tristes, minhas tias Gloria e Cristina, por sempre me amarem e me considerarem como sua filha e minha afilhada Maria Helena, que é o sol da nossa família.

## RESUMO

Este estudo analisou os conhecimentos docentes para o ensino de Combinatória, mais especificamente no que tange aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para o alcance desse objetivo, desenvolvemos, a partir do estudo de Silva (2023), um curso de formação continuada, que deu base aos professores ampliarem seu conhecimento para a elaboração suas aulas sobre Combinatória. Participaram, de forma voluntária, do processo de formação seis professores do 4º e 5º anos do ensino Fundamental. A formação teve duração de três dias, na qual discutimos as situações, invariantes, representações simbólicas de Combinatória, aprimorando sua compreensão após discussões e análises dos protocolos de respostas dos estudantes, e refletiram sobre como trabalhar a Combinatória em sala de aula. Posteriormente a formação, quatro docentes realizaram uma aula sobre Combinatória, que foram observadas e analisadas e destacadas com base nos conhecimentos docentes de Ball, Thames e Phelps (2008). Além de participarem de uma entrevista semiestruturada, com o intuito de conhecer as participantes e aprofundar nossas análises sobre os conhecimentos mobilizados no ensino de Combinatória. Na análise dos resultados verificamos os diferentes domínios à luz de Ball, Thames e Phelps com respaldo na teoria dos Campos conceituais de Vergnaud (1986). Percebemos que com esta pesquisa conseguimos pontuar diferentes aspectos sobre cada conhecimento docente no ensino de Combinatória nos anos iniciais. No entanto percebemos que o Conhecimento do Horizonte de Combinatória e o Conhecimento de Combinatória e Currículo, foram menos evidenciados durante o processo de ensino, sendo, portanto, discutido a partir das colocações da entrevista. Por fim, acreditamos que o estudo nos possibilitou conhecimentos sobre todos os aspectos do ensino de Combinatória nos anos iniciais, principalmente no que tange o papel do professor na busca da melhoria da aprendizagem desse conteúdo Matemático e a importância da formação continuada no enriquecimento do ensino da Matemática.

**Palavras-chave:** Combinatória; Conhecimentos Docentes; Ensino Fundamental Anos Iniciais.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Esquema dos domínios do conhecimento da Matemática para o ensino, segundo Ball, Thames e Phelps (2008)	23
<b>Figura 2</b> - Tripé para a formação do Campo Conceitual	33
<b>Figura 3</b> - Situação de Arranjo, com o uso de representação por meio da listagem, protocolo de resposta do aluno de 5° Ano.	37
<b>Figura 4</b> - Situação de Combinação, representação por meio da árvore de possibilidades, protocolo de resposta do aluno do 5° Ano.	38
<b>Figura 5</b> - Situação de Produto de Medidas, representação por meio do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), protocolo de resposta do aluno de 5° Ano.	39
<b>Figura 6</b> - Situação de Produto de medidas com três etapas de escolha, e, representações de desenho e tabela, protocolo de resposta aluno do 5° Ano.	40
<b>Figura 7</b> - Protocolo de problemas	67

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 01</b> - Síntese dos domínios por Ball, Thames e Phelps (2008)	27
<b>Quadro 02</b> - Sistematização dos PCN, BNCC e Currículo de Pernambuco sobre os aspectos principais para ensino de combinatória.	48
<b>Quadro 03</b> - Sistematização das lacunas presentes nos estudos da Revisão de Literatura e a relação ao objeto do presente estudo	58
<b>Quadro 04</b> - Perfil dos professores que participaram de todas as etapas da pesquisa.	62
<b>Quadro 05</b> - Objetivos e instrumentos da coleta de dados.	64
<b>Quadro 06</b> - Objetivos e procedimentos do curso de formação fundamentados em Silva (2023)	65
<b>Quadro 07</b> - Situações apresentadas na formação	75
<b>Quadro 08</b> - Resolução da situação problema Arranjo.	76
<b>Quadro 09</b> - Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Arranjo.	77
<b>Quadro 10</b> - Resolução da situação problema de Combinação.	78
<b>Quadro 11</b> - Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Combinação.	79
<b>Quadro 12</b> - Resolução da situação problema de Permutação	80
<b>Quadro 13</b> - Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Permutação.	81
<b>Quadro 14</b> - Resolução da situação problema de Produto de Medidas.	82
<b>Quadro 15</b> - Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Produto de Medidas.	83
<b>Quadro 16</b> - Momento 1: Organização	90
<b>Quadro 17</b> - Momento 2: os alunos respondendo às questões	92
<b>Quadro 18</b> - Momento 3: o professor resolve e explica a questão da primeira estação	95
<b>Quadro 19</b> - Momento 4: professor explicando e resolvendo a questão da estação 2	99

<b>Quadro 20</b> - Momento 5: professor responde e explicar a situação da estação 3	101
<b>Quadro 21</b> - Momento 6: explicação e resolução da quarta questão da estação 4	103
<b>Quadro 22</b> - Momento 7: fechamento	104
<b>Quadro 23</b> - Momento 1: Organização e explicação da atividade	105
<b>Quadro 24</b> - Momento 2: Resolução dos alunos	107
<b>Quadro 25</b> - Momento 3: Comparação das respostas da situação 2	113
<b>Quadro 26</b> - Momento 4: resolução da situação 3	114
<b>Quadro 27</b> - Momento 5: Comparação das resoluções da questão 1	116
<b>Quadro 28</b> - Momento 6: resolução da situação 4 e fechamento	118
<b>Quadro 29</b> - Momento 1 organização	120
<b>Quadro 30</b> - Momento 2: alunos resolvendo a 1° e 2° questão	121
<b>Quadro 31</b> - Momento 3: alunos resolvendo a 3° e a 4° questão	125
<b>Quadro 32</b> - Momento 4: resolução e socialização da questão 1	129
<b>Quadro 33</b> - Momento 5: resolução e socialização da questão 2	131
<b>Quadro 34</b> - Momento 6: resolução e socialização da questão 3	132
<b>Quadro 35</b> - Momento 7: resolução e socialização da questão 4	133
<b>Quadro 36</b> - Momento 1: Organização e apresentação da atividade	135
<b>Quadro 37</b> - Momento 2: resolvendo e discutindo o primeiro desafio	136
<b>Quadro 38</b> - Momento 3: resolver e discutir o segundo desafio	141
<b>Quadro 39</b> - Momento 4: Resolvendo e discutindo o último desafio	146
<b>Quadro 40</b> - Respostas dos professores sobre quando iniciar o ensino de Combinatória nos Anos Iniciais do Fundamental	150
<b>Quadro 41</b> - Respostas dos professores sobre atividades futuras na temática de Combinatória.	151
<b>Quadro 42</b> - Respostas dos professores sobre aspectos importantes do Planejamento.	153
<b>Quadro 43</b> - Respostas dos professores sobre os recursos que auxiliam no ensino da Combinatória.	155

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 Objetivo Geral: .....</b>	<b>17</b>
<b>1.2 Objetivos específicos: .....</b>	<b>17</b>
<b>CAPÍTULO 2: CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO .....</b>	<b>19</b>
<b>CAPÍTULO 3: A COMBINATÓRIA E SUAS PROPRIEDADES.....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Campos Conceituais: uma construção para o conceito de Combinatória.....</b>	<b>31</b>
<b>3.2 Situações, invariantes e representações da Combinatória .....</b>	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 4: A COMBINATÓRIA DOS ANOS INICIAIS: CURRÍCULO E ESPECIFICIDADES .....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO 5: REVISÃO DE LITERATURA: ESTUDOS SOBRE OS CONHECIMENTOS DOCENTES NO ENSINO DA COMBINATÓRIA .....</b>	<b>49</b>
<b>CAPÍTULO 6: PERCURSO METODOLÓGICO .....</b>	<b>59</b>
<b>6.1 Campo de pesquisa .....</b>	<b>60</b>
<b>6.2 Critérios para a seleção dos participantes .....</b>	<b>61</b>
<b>6.3 Participantes .....</b>	<b>62</b>
<b>6.4 Procedimentos e instrumentos de coleta de dados.....</b>	<b>63</b>
6.4.1 Formação .....	64
6.4.2 Planejamento e observação .....	70
6. 4.3 Entrevista .....	71
<b>CAPÍTULO 7: RESULTADOS OBTIDOS: APRESENTAÇÃO E ANÁLISES .....</b>	<b>73</b>
<b>7.1 Discussão conceitual e o Conhecimento comum e especializado de Combinatória.....</b>	<b>74</b>
<b>7.2 Observação de aula: descrições e análises .....</b>	<b>88</b>
7.2.1 Descrição e análise .....	90
<b>7.3 Análise geral das aulas dos professores.....</b>	<b>149</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>157</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>163</b>
<b>ANEXOS E APÊNDICES .....</b>	<b>167</b>

# INTRODUÇÃO

Assim como o mundo, a Educação se transforma ao longo do tempo, então, com a Educação Matemática não tem sido diferente. Compreende-se que a Educação Matemática, hoje está situada em uma área de atuação educacional, que busca a partir de tendências e referenciais teóricos consolidados, as possíveis maneiras e ações para o ensino da Matemática.

Na busca de um melhor desenvolvimento qualitativo educacional, têm-se procurado meios de ensino que oportunizem aos alunos, diferentes habilidades e modos de raciocínio. Baseado nessa intenção a Matemática compõe-se de diversas competências e saberes que devem ser compreendidas e expandidas na vida escolar do aluno. Borba (2010), pesquisadora da Educação Matemática, expõe alguns raciocínios que se pode atingir com o ensino da Matemática, como o senso numérico, relacional, algébrico, funcional, probabilístico e combinatório, dentre outros prescritos no currículo.

A partir desse ponto de vista, as pesquisas em Educação Matemática destacam a sua importância desde o Ensino Infantil, a fim de, desde o início, oportunizar o desenvolvimento global das crianças, como também ampliar o raciocínio lógico-matemático do estudante (LDB, Brasil, 1996). Visando sempre a qualidade do ensino, o papel do professor tem sido cada vez mais abordado em pesquisas e ações voltadas para a formação desse participante. Na preocupação de como está sendo desenvolvido o processo de ensino da Matemática na Educação Básica.

Segundo o documento da Base Nacional Comum da Formação de Professores da Educação Básica encontram-se três dimensões da competência profissional do professor, sendo elas: Conhecimento profissional, que associa-se com a prática docente e suas experiências na sala de aula; A prática educacional, a aprendizagem de metodologias de ensino e avaliação, assim como conteúdos específicos; e o engajamento profissional, relacionado ao compromisso da relação profissional entre professor-aluno, entre os colegas de profissão, na comunidade em que atua e na sociedade (BRASIL, 2018b, p. 43).

Essas premissas anteriormente citadas, devem estar presentes na prática profissional cotidiana do professor. E, a partir desta atual pesquisa, podemos perceber a dimensão sobre a prática educacional docente, entender competências de um conteúdo específico da Matemática, suas metodologias de ensino e os conhecimentos que dão base a elas.

Desse modo o interesse por essa temática de Combinatória e conhecimentos docentes começou ainda no decorrer da jornada de Graduação do curso de Pedagogia. Na qual nos deparamos com as disciplinas de Fundamentos do Ensino da Matemática, que abordam sobre as ações docentes e temáticas para o ensino dos conteúdos matemáticos voltados ao grupo de atuação dos pedagogos. Ao longo do semestre foi despertado uma afetividade com a Matemática, visto que em todas as experiências educacionais anteriores sempre foi percebido uma afinidade com a disciplina.

Na qual foi culminante na dúvida pela escolha do curso da graduação, que só foi decidido por meio do apelo dos números de vagas que os pedagogos possuem no mercado de trabalho e pela amplitude de funções que os pedagogos podem atuar, que conclui sendo uma vantagem na escolha do curso. Mas no decorrer do curso percebi que tomei a decisão correta, pois pouco a pouco ficou clara a inspiração e o amor desenvolvido pela Educação e tudo que acerca.

Nesse contexto, durante uma das dinâmicas educacionais, na aula de Fundamentos da Matemática, a professora responsável presente ou alguns alunos com um livro que contemplava um compilado de pesquisas sobre formação docente e o ensino na Educação Matemática. Na conquista desse livro e na leitura do mesmo a curiosidade surgiu ao perceber necessidade em olhar para os conhecimentos docentes e seus impactos para a formação e práticas educacionais no ensino de Combinatória, pois alguns dos estudos contidos nos livros eram do grupo de estudos Geração, onde participo atualmente.

Ainda durante a experiência como estudante de Pedagogia e na decorrência dos estágios acadêmicos, surgiu a preocupação sobre se os conhecimentos e saberes alcançados na formação inicial eram suficientes para a atuação na Educação

básica, e assim buscamos aprofundar cada vez mais as investigações nas temáticas do conhecimento docente e da Combinatória.

Ao final da graduação, foi exigido o trabalho de conclusão de curso (TCC), no qual foi desenvolvido por uma pesquisa com base na teoria em Ball, Thames e Phelps (2008) sobre as estratégias e ações docentes no ensino de Combinatória. Dentre os resultados percebemos que alguns pedagogos não tinham proximidade com a Combinatória nos anos iniciais, e que existiam algumas lacunas em suas formações iniciais e continuadas, que justificam este como o principal motivo de seus conhecimentos limitados sobre o conteúdo. Porém, os professores mostraram que estavam em busca de construir novos conhecimentos para suas práticas no ensino da Matemática. Sendo assim, notamos que para uma futura pesquisa poderíamos realizar uma investigação sobre o processo de ensino e os conhecimentos docentes a partir de professores que já participaram de uma formação continuada ou que pesquisem sobre a Combinatória, a fim de verificar suas atuações e percepções a respeito da Combinatória.

A escolha pelo conteúdo de Combinatória não foi por acaso, além da trajetória anteriormente apresentada, percebo que cada vez que aprofundo nos estudos sobre esse tema, compreendo a dimensão que esse conteúdo pode gerar em um aluno. Uma vez que o aprendizado em Combinatória pode levar o aluno a desenvolver sua capacidade de raciocínio lógico e hipotético-dedutivo, podendo então aproximar-se de contextos reais.

Isso porque, na Combinatória existe uma gama plural de situações e suas propriedades específicas podem ser relacionadas ou representadas com auxílio de diferentes artefatos e símbolos, levando o aluno a conhecer diferentes estratégias de resolução de problemas. Por isso, sendo capaz de ampliar seus conhecimentos em diversos conceitos matemáticos e até em outras áreas do conhecimento (Azevedo, 2013).

Entendendo que os a formação inicial é uma fonte importante para o desenvolvimento dos saberes docentes para o ensino, estudos como a tese de Barbosa (2021), e a dissertação de Lima (2011) constata-se que a formação inicial no curso de Pedagogia, dá uma pouca ênfase em relação a alguns conteúdos

específicos da Matemática e aos processos de ensino, formando um efeito desfavorável ao objetivo de formação e preparação docente durante o curso da licenciatura em questão.

Sendo então necessário que o estudante/ futuro professor busque uma formação continuada, ou se aprofunde por si só sobre alguns conteúdos da Matemática, como podemos ver na afirmação abaixo:

Pedagogo que atua no ensino de Matemática nos anos iniciais, consciente dos limites da sua formação, deve, por isso, embrenhar-se pelos caminhos da autoformação e formação contínua centrada na escola. É preciso, também, que sejam tais percursos permeados pela pesquisa que tenham a prática como ponto de partida, num movimento de ação-reflexão-ação. (Lima, 2011, p.197)

Deste modo, buscamos observar a atuação profissional docente, pois na prática em seu cotidiano de trabalho esclarece se há limites e/ou possibilidades do processo de ensino do professor, pontuando a necessidade da busca para desenvolver novos conhecimentos, métodos e técnicas para aprimorar ainda mais o ensino. Pois, como afirma Ferreira (2003) que estuda a formação docente, essa “formação de professores passa a ser entendida como um processo contínuo por meio do qual o sujeito aprende a ensinar” (p. 35), evidenciando a importância da pesquisa voltada para o processo de ensino desses professores, para compreender como estão desenvolvendo os métodos e práticas adquiridos ao longo do tempo.

Shulman (1986), a partir de seus estudos, consegue ampliar o que pode ser desenvolvido em uma formação docente, chamando atenção sobre o que professor deve construir em seu aprimoramento, descrevendo dessa forma, os diferentes conhecimentos docentes. Na qual a comunhão de tais domínios o professor mostre-se preparado para o ensino de um determinado conteúdo, como também para os demais conteúdos da Matemática. Acreditamos que a compreensão do professor para ensinar Matemática, é determinada não por demonstrar apenas o conhecimento específico sobre algum tópico matemático, mas porque possui o entendimento de saber ensinar.

Outros investigadores, como Ball, Thames e Phelps (2008), fundamentaram-se das aquisições de Shulman sobre os Conhecimentos Docentes, e desenvolveram

uma série de domínios que contemplassem as conjunturas para o Ensino da Matemática; tais conhecimentos serão especificados no capítulo de fundamentação teórica seção 1. Portanto, tais contribuições mostraram que para conseguir gerar um ensino de qualidade, os profissionais necessitam demonstrar esses domínios, que condicionam suas ações pedagógicas, contextuais, práticos, interativos e singular para cada conteúdo da Matemática.

Fundamentadas aos ideais apontados acima, a presente pesquisa se apoia na busca dos Conhecimentos para o Ensino de Matemática por professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, mais especificamente no estudo da Combinatória, que já vivenciaram alguma formação sobre este conteúdo.

Ainda levamos em conta, para a escolha dessa temática, em razão da Combinatória estar presente na Base Nacional Comum Curricular dos anos iniciais, BNCC (2018) na unidade temática de números, a partir do 4º Ano do Ensino Fundamental como objetos de conhecimento de problemas de contagem. Pontuando que deve ser trabalhado desde o 4º Ano dos Anos Iniciais. Logo, essa discussão será promovida na seção 5 do segundo capítulo.

Para tal, o professor que ensina Combinatória deve estar atento às especificidades desse conteúdo, pois compreendemos que o ensino de Combinatória abrange divergentes propósitos durante o processo de escolaridade, indicadas geralmente por orientações curriculares. Todavia os professores devem entender quais propriedades são exigidas no ensino desse conteúdo nos anos iniciais, onde tais propriedades se tornam diferentes do que é ensinado em etapas escolares à frente. Dessa forma Rocha (2011) aponta que o ensino é efetivado pelo que os professores escolhem vivenciar em sala de aula.

Diante tudo que foi mencionado, esclareceu-se a seguinte questão de pesquisa: Como o professor mobiliza conhecimentos matemáticos para o ensino relacionados às situações de combinatória para o 4º e 5º Anos do Ensino Fundamental?

Descrevemos, a seguir, nossos objetivos, de modo a alcançar a questão de pesquisa levantada.

### **1.1 Objetivo Geral:**

Identificar e analisar os conhecimentos para o ensino de Combinatória mobilizados por professores do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

### **1.2 Objetivos específicos:**

- Averiguar o conhecimento Comum da Combinatória e o conhecimento especializado da Combinatória fomentado por professores durante o curso de formação de Combinatória;
- Examinar o conhecimento da Combinatória e estudantes e o Conhecimento de Combinatória e ensino a partir da mobilização dos professores no processo de ensino de Combinatória;
- Investigar o conhecimento de Combinatória e currículo e o conhecimento de Combinatória no Horizonte a partir do que foi exposto pelos professores que ensinam Combinatória na entrevista.

Nesse sentido, partimos do pressuposto que existe uma forte influência da formação inicial e continuada pelos professores na construção de seus conhecimentos. A seguir apresentamos os capítulos constituintes da presente pesquisa:

O capítulo seguinte é abordado o referencial teórico que serve de base para o estudo dos Conhecimentos docentes no ensino de Combinatória, divididos em subseções. Exibindo os estudos de Shulman (1986; 1987) sobre a base que os docentes precisam ter para o ensino das diversas áreas do conhecimento e o modelo teórico desenvolvida por Ball, Thames e Phelps (2008) pontuando os diferentes domínios para o ensino de Matemática, caracterizando e esclarecendo as diferenças entre os conhecimentos encontrados nos polos: Conhecimento do Conteúdo e no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

O segundo capítulo apresenta as especificidades do conceito da Combinatória, marcando o raciocínio de Combinatória, o raciocínio hipotético-dedutivo, e os indicadores da análise combinatória como um objeto de estudos, que são

desenvolvidos a partir de possibilidades de agrupamentos. Para o auxílio da compreensão da Combinatória desenvolvemos a subseção da Teoria dos Campos Conceituais evidenciados pelo autor Vergnaud (1996) que destaca que o processo de conceitualização será formado a partir do tripé das situações, invariantes e representações teóricas. A próxima subseção é evidenciada no detalhamento das situações, invariantes e representações teóricas na Combinatória. Apresentando as diferentes situações de Combinatória como Arranjo, Permutação, Produto de Medidas e Combinação, e seus invariantes. E ao final apresentar as representações mais comuns na resolução de situações Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O terceiro capítulo salienta como a Combinatória, se apresenta nos documentos orientadores Nacionais (BNCC e PCN) e no Currículo de Pernambuco, em busca das articulações/ diferenças entre os currículos no ensino de Combinatória.

O quarto capítulo apresenta a revisão de literatura, apontando alguns estudos que pesquisam sobre o conhecimento docente no ensino de Combinatória, encontradas no sistema de Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

No quinto capítulo expõe o método, especificando o campo de pesquisa, critérios de seleção dos participantes, detalhamento dos participantes, procedimentos e instrumentos de coleta de dados.

No capítulo seis, encontram-se as análises e discussões do resultado do estudo. Logo, exhibe as etapas de formação, descrições e análises das aulas observadas e entrevistas, e a discussão referente aos conhecimentos matemáticos para o Ensino com base nos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008).

Por fim, é apresentado as considerações finais da pesquisa.

# CAPÍTULO 2: CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

Para os Conhecimentos Matemáticos para o Ensino, precisamos voltar e discutir sobre o caminho concebido por Shulman (1986; 1987) e sua contribuição com a sua produção em relação aos Conhecimentos Docentes, que darão a base para Ball, Thames e Phelps (2008) e os conhecimentos Matemáticos que vamos nos aprofundar.

Dessa forma, Lee Shulman foi um pesquisador que buscava entender e dialogar, a partir de seus estudos e dos resultados de investigações, sobre quais domínios/conhecimentos estavam presentes e que eram necessários o professor ter para a sua ação docente. Pois, em suas práticas de formação, desenvolveu uma crítica aos programas de formação docente, na qual se voltava ao conhecimento disciplinar e pedagógico, mas para Shulman (1987), no que diz respeito à atuação docente era necessário evidenciar a base do conhecimento necessário ao ensino.

Com isso, Shulman e seus colaboradores decidiram desenvolver um marco teórico que esclarecesse e caracterizasse os conhecimentos que contemplam à docência, o que possibilitaria a transição do conhecimento do conteúdo em formas que sejam pedagogicamente eficientes e possíveis de serem adaptadas aos diferentes contextos e competências já alcançadas pelos alunos (ALMEIDA; BIAJONE, 2007).

Dessa maneira, o conjunto de suas investigações tiveram um grande efeito na formação dos professores, pois evidenciaram a base do ensino. Então, Shulman (1986) de forma a buscar a simplificar a complexidade do ensino na sala de aula, a partir da reflexão dos professores das suas experiências e ações, e retirando o foco do conteúdo específico das áreas do conhecimento.

Por isso, ele conclui que a ligação entre o conhecimento e os instrumentos didáticos, são a base para a construção do conhecimento docente. Logo em seus estudos o autor e seus colaboradores elaboraram dois modelos, na qual tem a finalidade de esclarecer algumas características de conhecimentos que os professores precisam para a docência, e de que maneira o conhecimento pedagógico é desenvolvido. Em que Shulman (1987) apresenta como *Knowledge Base*, que está categorizado em:

1) *Conhecimento do conteúdo*, conhecimento do conteúdo a ser ensinado, buscando entender o que se ensina;

2) *conhecimento pedagógico geral*, tendo em conta especialmente aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe que transcendem o âmbito da disciplina, buscando a entende como se ensina;

3) *conhecimento do currículo*, com um especial domínio dos materiais e dos programas que servem como “ferramentas para o ofício” do docente;

4) *conhecimento dos alunos e de suas características*; conhecimento dos contextos educativos, que abarcam desde o funcionamento do grupo classe, a gestão e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas, entender para quem se ensina;

5) *conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos*, consciência de quais objetivos, finalidades e valores norteiam o ensino, entendendo a partir de onde e para onde se ensina;

6) *conhecimento pedagógico do conteúdo*, esse especial amálgama entre matéria e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma especial de compreensão profissional, integrando a ação pedagógica entre ao conteúdo da disciplina e a didática. (Shulman, 1987).

Todas as categorias apresentadas acima são, para Shulman, de grande relevância no sentido de esclarecer os conhecimentos. Podemos entender que esses conhecimentos darão ao professor percepção sobre como agir em sala, sua didática, os recursos que serão usados, como pode ser percebido o aluno de forma a entender suas características e dificuldades, e todo o desenvolvimento e apresentação do conteúdo, de forma organizada, auxiliando na construção do saber do professor.

Ressalta-se, no entanto, dentre todas as categorias o “conhecimento pedagógico do conteúdo” (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*) e os “processos de ação e raciocínio pedagógicos” são categorias teóricas de conhecimento docente que atingem muito o cenário da didática e da formação de professores, nas diversas áreas

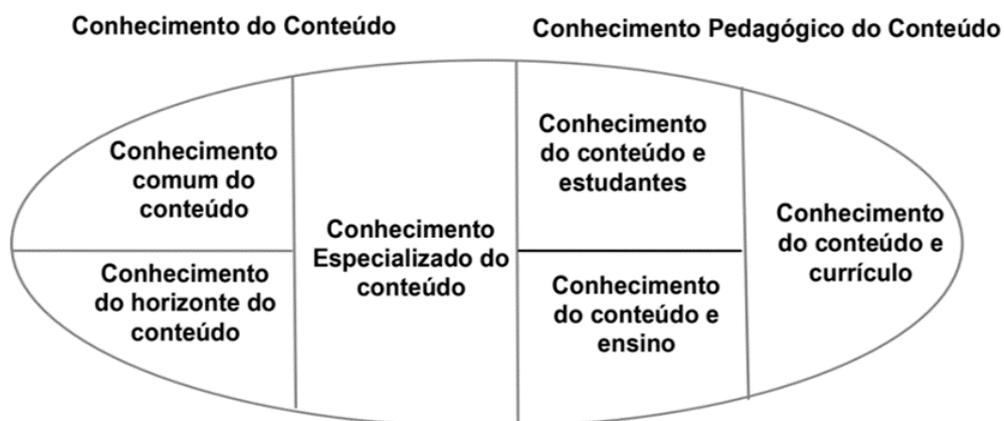
do saber. Shulman (1987) revela que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) como aquele que se designa ao processo de ensino da disciplina, em sua forma de pensar; no que pode ser feito e exposto aos estudantes. Já que “O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria mais apropriada para distinguir a compreensão do especialista em conteúdo do pedagogo”. (SHULMAN, 1987, p. 8) Pois é com ela que percebemos, na ação docente, a sua habilidade didática de ensino.

Então podemos observar que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo se desenvolve no encontro entre o conteúdo e o conhecimento pedagógico, transformando seu conhecimento do conteúdo da disciplina em práticas/ações didáticas importantes, contextuais e adaptáveis aos seus alunos, quanto às suas habilidades e bagagens. Conseguindo, a partir desse conhecimento, distinguir um profissional especialista de um conteúdo, de um professor.

Exercendo como uma base, a partir das discussões sobre os conhecimentos desenvolvidos por Shulman que foi apontado como fundamental para a docência, a pesquisadora Ball propôs o aprofundamento dos conhecimentos docentes, agora voltados para o ensino de Matemática, especificamente. Nessa perspectiva os autores Ball, Thames e Phelps (2008) em suas investigações perceberam a presença de outros domínios particulares a tais conhecimentos. Para além do que foi desenvolvido por Shulman, os autores entenderam que podem estabelecer uma relação a partir do processo de ensino para dar base aos conhecimentos do conteúdo para o ensino, estabelecendo outros domínios (Assis, 2014).

A seguir está a Figura 01, traduzido por Rocha (2011), que mostra os seis domínios definidos por Ball, Thames e Phelps (2008) que serão alistados a seguir:

Figura 01: Esquema dos domínios do conhecimento da Matemática para o ensino, segundo Ball, Thames e Phelps (2008)



Fonte: Rocha 2011

Como podemos ver na Figura 1 o Conhecimento do Conteúdo (*subject matter knowledge*) é composto por: Conhecimento Comum do conteúdo (*common content knowledge*); Conhecimento Especializado do conteúdo (*Specialized content knowledge*); e Conhecimento do horizonte do conteúdo (*Horizon content knowledge*). Já o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical content knowledge*), identificados por Shulman, é formado por: Conhecimento do conteúdo e estudantes (*knowledge of content and students*); Conhecimento do conteúdo e ensino (*knowledge of content and teaching*); e Conhecimento do conteúdo e currículo (*knowledge of content and curriculum*).

Para o entendimento mais detalhado dos domínios elencados por Ball et al (2008), explicaremos os listados acima.

O primeiro domínio, *Conhecimento Comum do Conteúdo* não necessariamente é um conhecimento utilizado para o ensino, podendo outros profissionais possuírem esse conhecimento sobre determinado assunto, e usarem em diversas situações. Dessa forma, é a capacidade de resolução de situações, exercícios e trabalhos que foram atribuídos aos alunos, como também saber aplicar o conteúdo matemático corretamente. Por isso é o conhecimento do conteúdo

disciplinar. Para um maior entendimento sobre o termo "comum" usado em sua nomenclatura os autores trazem:

Por "comum", no entanto, nós não queremos sugerir que todo mundo tem esse conhecimento. Pelo contrário, queremos dizer para indicar que este é o conhecimento de um tipo utilizado em uma ampla variedade de configurações, ou seja, não é exclusivo ao ensino. (Ball, Thames e Phelps, 2008, p.400)<sup>1</sup>

O *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, é o domínio do saber matemático, apresentando maior profundidade do conteúdo, envolvendo as estratégias de raciocínio que determinada situação Matemática envolve, e reconhece as propriedades do conteúdo especificamente.

Ball, Thames e Phelps (2008) apontam ainda que com esse domínio o professor saberá responder às particularidades das questões e os invariantes das situações; encontrando exemplos na indicação para o esclarecimento do conteúdo Matemático; identifica o uso de representações e o que os envolve, relacionando com outras representações; associa a temática ensinada com outros tópicos de ensino prévios ou posteriores; qualifica e ajusta os conteúdos abordados nos livros didáticos; entre outros conhecimentos do conteúdo.

Portanto, mostra que, ampliar o Conhecimento Especializado é ir além de levar somente o assunto que tem que ser ensinado, dando, dessa forma, base para os conhecimentos pedagógicos. Assim a partir do conhecimento especializado poderá fundamentar novas tendências, ainda considerar o erro dos seus alunos, esclarecer dúvidas e avaliarem as discussões apontadas nas aulas, no objetivo de construir qualidade no ensino, a partir do conhecimento especializado do conteúdo.

Para o terceiro domínio temos o *Conhecimento do conteúdo no Horizonte*, é a noção da relação entre os tópicos e temáticas da Matemática, entendendo os diferentes níveis de dificuldade do conteúdo, ou seja, como exemplo, docentes do ensino fundamental anos iniciais ao abordarem um conteúdo em sua turma, tem consciência sobre esse mesmo conteúdo em etapas diferentes de ensino. Etapas que podem ser antes ou depois do que estão estudando na turma atual. Os autores

---

<sup>1</sup> Tradução nossa.

reforçam que esse domínio pode ajudar a refletir, por exemplo, como determinar a base matemática que virá posteriormente e pensar na evolução desse conteúdo, ou seja, níveis de gradação de dificuldade, por exemplo, e na preparação para as novas etapas.

O próximo é o *Conhecimento do Conteúdo e Estudantes*, esse domínio em diante compete ao conhecimento pedagógico do conteúdo, refere-se a compreensão do professor sobre o seu aluno e seu pensamento matemático. Em outras palavras, é evidenciado na antecipação das dúvidas que podem emergir de seus alunos, presumindo seus pensamentos sobre o conteúdo matemático a ser ensinado, ou saber que exemplos ou métodos pode deixá-los motivados ou não, sabendo interpretar as atitudes e questionamentos feitos pelos seus estudantes, promovendo estratégias de ensino que auxiliem seus alunos, nos processos de aprendizagem.

Ball, Thames e Phelps (2008) esclarecem que para esse domínio tratado acima destaca-se a “familiaridade com erros comuns e decidir qual dos vários erros os alunos são mais propensos a fazer.” (p.402). Dessa forma, a partir da antecipação dos erros dos alunos os professores podem desenvolver outras ações pedagógica a fim de superar tais dificuldades.

Mas para reconhecer uma resposta errada, é necessário ter o domínio do primeiro conhecimento esclarecido por nós, o conhecimento comum do conteúdo. Já compreender o aprofundamento da categoria de um erro desse conteúdo, como a percepção dos números, padrões e pensamento flexíveis a esse erro desconhecido, caracteriza ao conhecimento especializado do conteúdo, mostrando que os conhecimentos são por muitas vezes relacionados.

O quinto domínio *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* retrata a conexão do saber ensinar e o conhecimento acerca da Matemática. Dessa forma, expressa as tomadas de decisões durante o processo de ensino, nas escolhas de exemplos, ou nos caminhos que se pode começar, nas estratégias para o desenvolvimento do ensino, nos incentivos para a apresentação dos conteúdos matemáticos ou nas atividades propostas, suas ações pedagógicas, apresentando esclarecimentos diversificados e apropriados, quais colaborações feitas pelos estudantes podem ou não serem aproveitadas, ou em que momento é possível usá-las. Logo, todas

medidas tomadas no processo de ensino da Matemática que possam impactar no processo de aprendizagem do aluno, diante o contexto escolar evidenciam o conhecimento do conteúdo e ensino.

Por fim, para o *Conhecimento do Conteúdo e Currículo*, Ball, Thames e Phelps (2008) não enunciam uma especificação profunda sobre esse domínio, e trazem o inquérito que esse seria mesmo um domínio como os demais. Porém, no estudo de Martins (2021), vai analisar e indicar as abordagens de Combinatória em currículos diversos, a autora vai considerar o currículo de forma abrangente, não somente os currículos que encontramos nos documentos nomeados como currículos.

Para Martins, com base em Sacristan (2000), o currículo se apresenta em: *currículo prescrito*, é descrito como uma prescrição ou referência, que atua como ponto de partida na ordenação do sistema curricular, ou seja, os documentos orientadores como a Base Nacional Comum Curricular, Parâmetros Curriculares Nacionais, dentre outros; *currículo apresentado*, é aquele que interpreta e sintetiza o significado e os conteúdos apontados no currículo prescrito, de forma que chegue mais perto à escola e ao professor, como por exemplo os materiais curriculares estaduais e municipais, materiais didáticos e pedagógicos, entre outros; *currículo moldado*, é a programação ou planos elaborados pelos professores, que podem ocorrer de forma individual ou coletivamente, e tem base no significado das propostas curriculares anteriores; *currículo em ação* se configura como o currículo da prática, como as ações pedagógicas que acontecem na sala de aula; o *currículo realizado* é estabelecido como o efeito da prática pedagógica, ou seja, está ligada à aprendizagem dos alunos, com resultados produzidos pela prática pedagógica e que também geram efeitos nos professores; por fim, o *currículo avaliado*, é indicado como a avaliação propriamente dita, momento em que se verifica os progressos e as dificuldades apresentadas pelos alunos, e como exemplo as avaliações internas e externas, (Martins, 2021).

Por isso, pretendemos avaliar os domínios do conteúdo e currículo por parte dos docentes, fundamentados aos seus entendimentos sobre os currículos prescritos e apresentados, pois acreditamos que os demais currículos serão mobilizados diante das considerações sobre os domínios apontados anteriormente. Assim, pontuamos a

necessidade do conhecimento do conteúdo e currículo, pois o processo de ensino se desenvolve e potencializa, desde a constituição da aula fundamentado a base curricular exercida no contexto educacional de forma abrangente e específica, sobre os materiais de apoio, e no exercício da docência.

A seguir no quadro 1 apresenta em síntese os domínios e informações descritos anteriormente referentes ao modelo teórico desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008).

Quadro 01: Síntese dos domínios por Ball, Thames e Phelps (2008)

Domínios	Descrição
Conhecimento Comum do Conteúdo	É o conhecimento evidenciado por todos aqueles que são colocados em jogo para resolver um determinado problema matemático.
Conhecimento Especializado do Conteúdo	Refere-se ao conhecimento específico dos docentes, que apresenta maior profundidade e especificidades de um determinado conteúdo matemático.
Conhecimento do Conteúdo no Horizonte	É o entendimento dos diferentes níveis e etapas do conteúdo.
Conhecimento do Conteúdo e Estudantes	É o domínio que integra o conhecimento sobre os alunos e sobre o conteúdo matemático.
Conhecimentos do Conteúdo e ensino	Refere-se ao conhecimento do ensino e da Matemática, estratégias, propostas e tomadas de decisões para o ensino de um determinado conteúdo da Matemática.
Conhecimento do Conteúdo e Currículo	É o conhecimento do conteúdo em noção dos currículos presentes no processo de ensino.

Fonte: Autora

Contudo esses conhecimentos esclarecidos por Ball, Thames e Phelps (2008), vão ser desenvolvidos nessa pesquisa a partir das mobilizações de professores dos anos iniciais em um processo de formação e uma aula sobre Combinatória, na qual serão observados de que forma se apresentam e se relacionam nessas etapas.

# CAPÍTULO 3:

## A COMBINATÓRIA E SUAS PROPRIEDADES

No que pode ser percebido como objetivo das bases educacionais da Matemática para os Anos iniciais, destaca-se o incentivo de promover a criatividade, raciocínio lógico e crítico, e investigações por parte dos alunos. A pesquisadora australiana English (2005, p. 131) defende que o “currículo de Matemática nos anos iniciais e finais precisa incluir novas situações problemas que desafiem crianças a explorar ideias e processos combinatórios, sem a instrução direta do professor”. Portanto consideramos que a Combinatória se encontra nos currículos brasileiros e possui indicadores que possibilitam a efetivação desses propósitos.

Dessa maneira a Análise Combinatória refere-se ao procedimento de saber quantos objetos existem em um conjunto sem precisar contá-los (Merayo, 2001). A partir disso a Combinatória, como aponta Montenegro (2018), pode ser entendida como uma especialidade da Matemática que permite determinar a contagem inicial de quantidades dos elementos de um conjunto, com um auxílio do princípio da multiplicação, e por outras estratégias de resolução. Na qual, o trabalho com esse ramo da matemática na escola objetiva o desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte dos alunos, sendo então capazes de pensar de maneira sistemática e generalizada na enumeração dos componentes combinados entre si. Segundo Borba (2010) esse raciocínio é:

[...] entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. (BORBA, 2010, p.3)

Assim sendo essa pesquisa, como outras do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico - Geração, aponta a Combinatória como um importante meio para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e hipotético-dedutivo, pois a Combinatória estimula a curiosidade, e encoraja a busca por soluções para as situações oferecidas, podendo desenvolver outros conceitos a partir de seu ensino.

O raciocínio hipotético-dedutivo na visão de Montenegro (2018), também se encontra associado aos pensamentos de Probabilidade, assim como à Combinatória, e segundo Flavell (1988) associando a distinção entre o real, o possível e o

necessário, determinando em uma habilidade cognitiva a procura em definir a realidade no cenário das possibilidades.

Para a adequação desse tópico matemático nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, é pertinente levar os alunos a conhecerem e ampliarem seu conhecimento nos diferentes tipos de situações que são encontradas na Combinatória. Ideia defendida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática dos anos iniciais (BRASIL, 1997), e estudos do grupo Geração - UFPE que trazem a importância desse contato ainda nos primeiros anos de escolarização.

Para compreender um pouco mais sobre essa temática é preciso também entender um pouco sobre Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986) na qual aponta fundamentos que vão ajudar a caracterizar a construção de conceitos, dentre eles, a Combinatória, inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas.

### **3.1 Campos Conceituais: uma construção para o conceito de Combinatória**

O teórico Gérard Vergnaud foi um psicólogo, doutor em Educação Matemática, aprendiz de Jean Piaget, onde conseguiu ampliar as colaborações feitas por seu mestre. Em suas pesquisas teóricas voltadas para a Educação Matemática, percebeu que o desenvolvimento cognitivista depende de alguns fatores interativos, como situações e conceituações dos conteúdos que aprimoram tais condições cognitivas.

Dessa maneira, Vergnaud (1986) percebe e aponta que a formação de ideias e conhecimentos estão estruturados em Campos Conceituais. Estes desenvolvem por um longo período, dependendo de experiências, comportamentos, concepções, maturidade e aprendizagem que os indivíduos constroem sobre as situações que se deparam. Esta teoria se mostra importante para a presente pesquisa, pois a partir dela conseguimos entender o processo de aprendizagem do conceito, bem como, para o planejamento de atividades de intervenção didática de forma fundamentada, ou para interpretar aquilo que pode ocorrer na sala de aula durante o processo ensino-aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais.

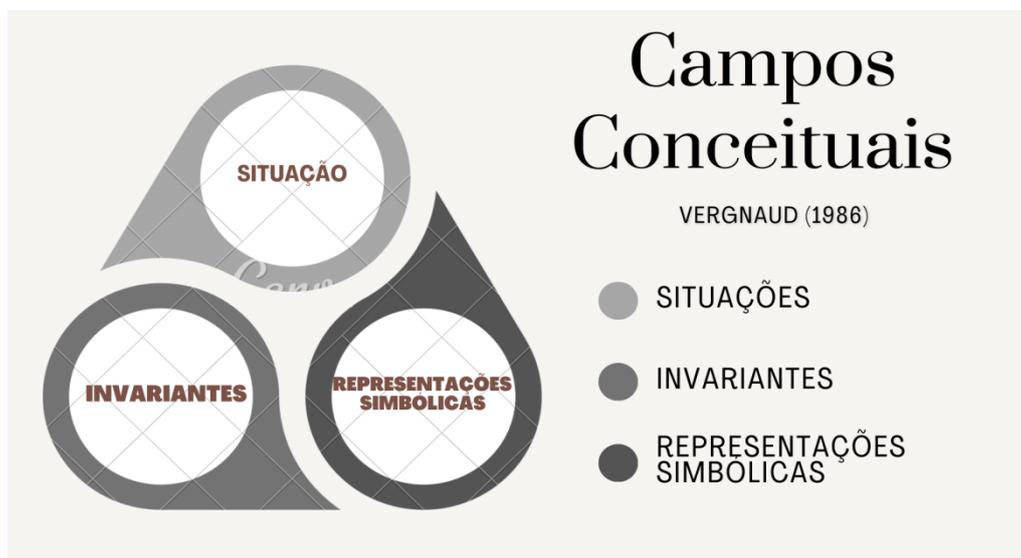
Dessa forma, a teoria dos 'Campos Conceituais' (TCC), retrata sobre o processo de conceitualização. Pois, o autor acredita que a essência de um

desenvolvimento cognitivo é a base da conceitualização, sendo uma peça fundamental para essa promoção. (Vergnaud, 1996, 1998). Com base nisso, acredita-se que os alunos desenvolvem meios de promoção cognitiva dentro e fora da escola (Vergnaud, 1994).

Em uma definição mais pontual, Vergnaud (1986, p.84) determina que “um campo conceitual pode ser como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão”. Portanto, entendemos que se trata de um conjunto de problemas ou situações dos quais requer uma compreensão de procedimentos e conceitos relacionados, em suas especificidades e representações.

Em outras palavras o que formará o Campo conceitual, será o conjunto das situações (S), que podem dar significado ao conceito, ou seja, um conceito torna coerente por meio de uma variedade de situações, mostrando a relevância de envolver a resolução de diversos problemas, levando ao aluno uma gama de explorações, hipóteses e experiências do conceito; o conjunto dos invariantes (I), que são as relações constantes ou propriedades que representam o significado do conceito; E o conjunto das representações simbólicas (R), podem ser utilizadas para representar os invariantes, ou representar as situações e processos para tratar essas situações, podendo ser desenvolvido por meio de desenhos, números, listagens, gráficos, diagramas, tabelas, árvore de possibilidades, etc.

Figura 2: Tripé para a formação do Campo Conceitual



Fonte: autora

Em conformidade a esse pensamento, Vergnaud (1983) estabelece um conjunto de situações matemáticas, de tratamento correspondente a multiplicações, divisões ou a junção de ambas as operações, nomeado de Campo conceitual das Estruturas Multiplicativas, em que a Combinatória está inserida. Mas existe também o campo das estruturas aditivas, que é o conjunto de situações na qual exige uma competência de uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações, dentre outros.

Ao relacionar a Combinatória aos Campos Conceituais, podemos perceber que esse conceito pode ser definido a partir do tripé que desenvolve um Campo Conceitual, que será apontado no tópico a seguir.

### **3.2 Situações, invariantes e representações da Combinatória**

Como esclarecido no subcapítulo anterior as situações são o que vão dar significado ao conceito. A Combinatória foi organizada em uma classificação única por Pessoa e Borba (2009), na qual mostram 4 (quatro) tipo de situações, são elas: Produto de medidas, Arranjo, Permutação e Combinação. Na qual mostram diferentes invariantes, ou seja, relações ou propriedades que permanecem constantes, diante os diferentes enunciados, definidos por Escolhas de elementos; Ordenação; e

Esgotamento de possibilidades. A seguir especificaremos os invariantes de cada situação combinatória a partir das contribuições de Pessoa e Borba (2009).

Situação de *Produto de Medidas*, também conhecido como produto cartesiano, tem sua nomenclatura (produto de medidas) reconhecida pelo teórico Vergnaud (1983), em que o seu invariante é definido por: Escolhas de elementos de dois ou mais conjuntos/ grupos distintos, onde formará um novo subgrupo.

Um exemplo desse tipo de situação é: Para a apresentação de dança da escola, tem 4 meninos (Lucas, Luan, Miguel e Leonardo) e 2 meninas (Helena e Clara). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? Neste exemplo percebe os dois grupos apresentados (meninos e meninas), dos quais, deverão ser escolhidos um elemento pertencente a cada grupo, onde serão formados subgrupos (pares compostos de um menino e uma menina) que constituirão o número de possibilidades.

Na situação de *Arranjo*, o invariante é estabelecido pelos seguintes critérios: a escolha de elementos será feita a partir de um conjunto maior, gerando novas possibilidades ao subgrupo, onde não serão escolhidos todos os elementos do grupo maior, e a ordem de escolha dos elementos geram novas possibilidades.

Como exemplo: A corrida final da Olimpíada será disputada pelos seguintes países: Brasil, Chile, Peru e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados? Percebe-se que o grupo maior é determinado pelos países, composto por 4 elementos, e os subgrupos serão formados por 3 elementos (definidos pelos três primeiros colocados), no qual, a ordem de escolha desses elementos, gerará uma nova possibilidade (na escolha do Brasil em primeiro lugar, Chile em segundo e Peru em terceiro, será diferente se escolhermos, Chile em primeiro, Peru em segundo e Brasil em terceiro, mesmo escolhendo os mesmos elementos).

A situação seguinte é a de *Combinação*, o nome semelhante a Combinatória, porém se mostra sendo um dos tipos de situações da Combinatória. Essa semelhança entre as nomenclaturas sucede em uma confusão, confundindo e considerando os dois como sinônimos, remetendo a Combinatória em uma única situação, quando a

Combinação é uma das situações, e a Combinatória o conceito que aborda o total de possibilidades de uma situação. Nessa situação em particular os invariantes são definidos por um conjunto maior, de onde serão selecionados os elementos que constituirão os subconjuntos, outro aspecto é que nesta situação, a ordem dos elementos não gerará novas possibilidades, dessa forma, devemos reparar nas repetições de possibilidades, onde essas repetições não devem ser contabilizadas.

Como exemplo: Quatro amigas (Ayla, Bruna, Carla e Larissa), retornaram das férias e ao se encontrarem se cumprimentaram com um abraço. Quantos abraços foram dados, entre amigas diferentes ao se encontrarem? Neste exemplar, o conjunto de quatro amigas é o conjunto maior, onde as duas amigas que se abraçarão são os elementos de escolha, ou seja, ao escolher as diferentes amigas para se abraçarem, será gerado um subconjunto. A ordem não vai importar, pois se escolhermos as amigas Ayla e Larissa para darem abraço, será a mesma possibilidade se indicarmos o abraço entre Larissa e Ayla, gerando uma repetição que não devemos considerar como uma nova possibilidade.

Finalmente a situação de *Permutação*, em que seus invariantes serão delimitados pelo uso de todos os elementos do conjunto, porém cada um se apresenta uma única vez, e que a ordem dos elementos desse conjunto gerará novas possibilidades.

Ex: Calcule o número de anagramas da palavra Paz. Nesse caso estaremos utilizando todas as letras (elementos) da palavra PAZ, e quando mudamos a ordem de cada letra como por exemplo (APZ) gera uma nova possibilidade, mostrando que a ordem dos elementos vai acarretar uma outra possibilidade, e cada letra (A), (P) ou (Z) vai se apresentar uma vez em cada anagrama.

A partir disso é necessário entender que existe uma preocupação na formulação de situações Combinatórias para os anos iniciais do Ensino Fundamental, em que torna-se essencial o resultado de tais situações seja um número reduzido, para que a criança, em sua resolução, consiga representar todas as possibilidades daquela situação (Oliveira; Montenegro, 2022). Isso porque a criança deve fortalecer o conceito, através de estratégias diversas, antes de representá-lo por meio de cálculos, procedimentos formais e fórmulas. Lima (2015) acrescenta que o docente

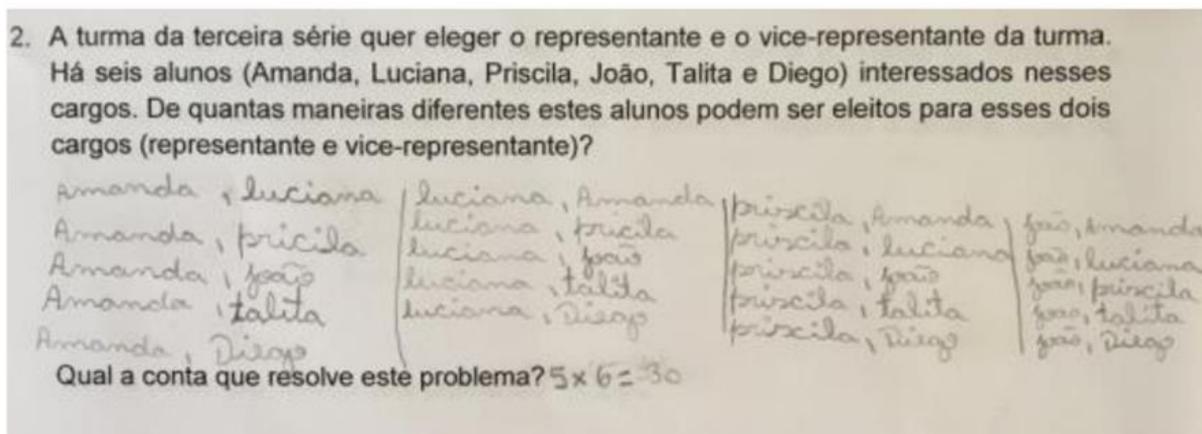
que incentiva formas espontâneas de resolução, de forma gradual antes da inserção das fórmulas no aluno, para o entendimento do conceito, estimulará seus alunos a pensarem sobre as generalizações possíveis na resolução de situações combinatórias.

Isto posto, o conceito da Combinatória vai se construindo a partir da compreensão de suas diferentes situações e no entendimento dos invariantes de cada situação. Mas, para a formação de Campo Conceitual da Combinatória, apresentado por Vergnaud (1986) é necessário entender também as diferentes representações que são possíveis de serem utilizadas na Combinatória, que pode ser reconhecido como uma estratégia de compreensão do conceito, cada tipo de situação pode ser desenvolvida por meio de variadas representações.

Por isso, a seguir apresentaremos alguns protocolos de situações respondidas por alunos, dos estudos de Montenegro (2018), Azevedo (2013) e Vega (2014) que mostram algumas representações, consideradas mais usuais na resolução de situações Combinatórias nos Anos Iniciais. Dessa forma, esclareceremos os tipos de representações que podem auxiliar no ensino e aprendizagem de Combinatória.

A Figura 3, mostra o uso de representações por meio da *Listagem*, onde ao desenvolver a situação o indivíduo lista todas ou parcialmente as possibilidades que podem existir daquela determinada situação. Podendo aparecer de várias formas diferentes, como podemos observar na figura 3, o estudante realizou uma listagem sistemática. Além disso ele consegue estabelecer uma conta que resolve o problema a partir de generalização de possibilidades, depois disso ele percebe um padrão na listagem e opta por não listar os casos de Thalita e Diego como representante para as duas últimas colunas.

Figura 3: Situação de Arranjo, com o uso de representação por meio da listagem, protocolo de resposta do aluno de 5º Ano.

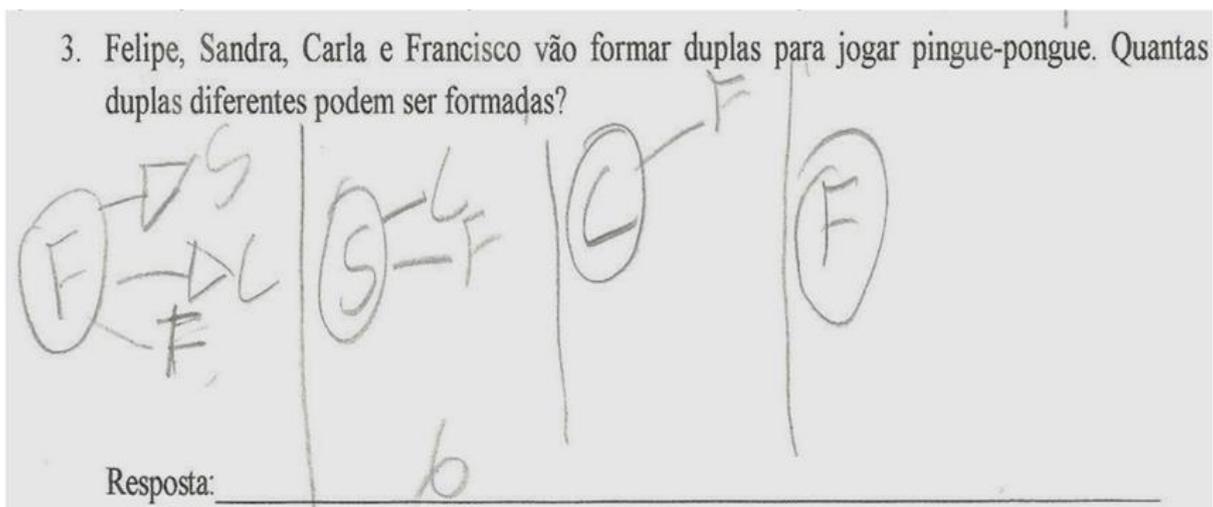


Fonte: Montenegro (2018, p. 179)

A representação mostrada na Figura 4 é a *árvore de possibilidades*, dessa maneira também consegue enumerar todas as possibilidades, mas de forma sistemática, onde inicialmente pontua um dos elementos árvore de subdivide interligando a outros elementos, nesse caso pessoas, e gerando as possibilidades.

Diante o exemplo da figura 4 notamos que o estudante respondeu excluindo a repetição dos casos, pois a dupla Felipe e Sandra, é a mesma de Sandra e Felipe, então no ramo de Sandra ela não repete a dupla com Felipe. Já no ramo de Carla não repete a dupla com Felipe e com Sandra, pois apareceu anteriormente. E no ramo de Francisco não repete nenhuma, pois já foram enumeradas antes.

Figura 4: Situação de Combinação, representação por meio da árvore de possibilidades, protocolo de resposta do aluno do 5º Ano.



Fonte: Azevedo (2013, p. 107)

O tipo de representação apresentado no Figura 5 é chamado de Princípio Fundamental da Contagem, de acordo com Lima (2015) é entendido como um princípio subentendido na resolução de todos os tipos de situações combinatórias, sendo que cada uma das situações combinatórias vai ser desenvolvida com um PFC diferente, em que sua resolução é desenvolvida por meio da expressão numérica da multiplicação de acordo com os invariantes.

Essa representação encontrada na figura 5 não é trabalhado nos anos iniciais, mas pode aparecer principalmente em situações de produto de medidas, na qual é uma multiplicação entre a quantidade presente nos conjuntos. Ainda é possível notar que o estudante destaca em sua resposta que para cada uma das oito opções de comida, podem ser escolhidos seis tipos de bebida e dois de sobremesa, exercendo a multiplicação de  $8 \times 6 \times 2$ .

Figura 5: Situação de Produto de Medidas, representação por meio do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), protocolo de resposta do aluno de 5º Ano.

5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia oito opções de comida (sanduíche misto, sanduíche de frango, coxinha, empada de frango, empada de bacalhau, pão de queijo, enroladinho de salsicha e folheado de queijo), seis tipos de bebida (suco de fruta, refrigerante, água, água com gás, suco de lata e chá gelado) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo).

De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

$8 \times 6 \times 2 = 96$

Qual a conta que resolve este problema?

multplicacao

Fonte: Montenegro (2018, p. 180)

Ainda podem ser encontradas outras representações muito frequentes nos anos iniciais, como: o desenho, na qual o indivíduo por meio do desenho vai apresentando todas ou parcialmente as possibilidades. E também a tabela, mais comum na situação de produto de medidas, em que na linha e na coluna pode escrever os elementos das situações e combinando em cada célula comum. Na Figura 6 está um exemplo da junção desses dois tipos de representações:

Figura 6: Situação de Produto de medidas com três etapas de escolha, e, representações de desenho e tabela, protocolo de resposta aluno do 5º Ano.

1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), três calças (preta e branca), dois sapatos (alto e baixo) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

	Ontem	Hoje	Amanhã
Blusa rosa			
Calça Preta			
Sapato baixo			
Brinco dourado			

Fonte: Vega (2014, p. 72)

Contudo, reconhecemos que existem maneiras outras que podem ser encontradas em diversas etapas de ensino, nas resoluções das situações Combinatórias, porém nos preocupamos em detalhar algumas representações que podem ser mais comuns nos anos iniciais do Ensino Fundamental, para melhor entendimento.

# CAPÍTULO 4: A COMBINATÓRIA DOS ANOS INICIAIS: CURRÍCULO E ESPECIFICIDADES

Na construção e planejamento de determinado conteúdo é necessário levar em conta as orientações prescritas no currículo. Contudo, o Ministério da Educação Brasileira, desenvolveu um documento normativo em que é a base para todo território nacional, chamado Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), a fim de equalizar o ensino nas diferentes regiões do país. Porém existem pontos nesse currículo que são criticados por diversos pesquisadores e estudiosos, e outros que podem ser considerados positivos.

Por esse motivo, neste capítulo vamos apresentar como a Combinatória se apresenta na BNCC (BRASIL, 2018) que é a base atual de orientação para as escolas e profissionais educacionais, e também como se manifesta em outros documentos curriculares anteriores, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que servia de guia antes da construção do documento da BNCC. Por fim destacar algumas particularidades que devemos nos atentar no ensino da Combinatória nos Anos Iniciais do Fundamental.

A Combinatória na BNCC do Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º ao 5º Ano), na área de Matemática, se apresenta conceitualmente a partir do 4º Ano na Unidade temática de Números, em que o objeto de conhecimento desenvolvidos são problemas de contagem na qual a habilidade ED04MA08 para o desenvolvimento do aluno do 4º ano é exposto:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (BRASIL, 2018, P.291)

O que percebemos de início é que a Combinatória não se apresenta na BNCC com sua nomenclatura aqui mencionada, mas nesse documento anuncia a Combinatória como ‘problemas de contagem’, na qual deve ser desenvolvida agrupamentos entre elementos de grupos distintos, na qual o documento se refere como ‘problemas simples de contagem’, que no caso seria a propriedade apenas na situação Combinatória chamada de *produto de medidas*. Ainda afirmamos que a BNCC poderia mencionar e explorar a Combinatória, também na indicação do estudo

com o espaço amostral, em probabilidade, no 3º Ano do Fundamental. Na qual o espaço amostral tem forte relação com a Combinatória.

Na qual esse primeiro ponto mostra-se divergente de estudos que pesquisam Combinatória nos anos Iniciais, como o grupo Geração-UFPE, que valorizam o aprendizado da Combinatória pode ser desenvolvido desde a Educação Infantil, perspectiva essa evidenciada por Silva (2019), em seu estudo de mestrado foi desenvolvido com a Educação Infantil com o uso de materiais manipulados para a promoção do raciocínio Combinatório.

Ainda Pessoa e Borba (2009) que buscaram a compreensão de problemas combinatórios por alunos de 1º a 4º série (2º ao 5º ano), reforçam a ideia de que todas as situações combinatórias, de arranjo, permutação, combinação e produto de medidas, devem ser vistas desde os primeiros anos do início da escolarização, para que na progressão do conceito seja mais facilmente entendida, quando o estudante posteriormente se deparar com as resoluções por meio de fórmulas.

Tal pensamento é fundamentado na orientação evidenciada por Vergnaud (1986), quando aponta que certos conceitos avançam durante um período maior que outros. Ou seja, a Combinatória deve ser desenvolvida o quanto antes, para formalizar o conceito para que no futuro seja expandido com outras propriedades de resolução.

Observa-se também que na habilidade ED04MA08 os professores devem disponibilizar a assistência de recursos visuais, como fichas, figuras, entre outros, e materiais manipuláveis, que são objetos que proporcionam aos alunos o sentir, tocar, manipular e movimentar. Para apoio na resolução de problemas combinatórios, sendo um caráter assertivo na orientação de profissionais docentes.

Pois, estudos como o de Gadelha e Borba (2019), evidenciam que os “materiais manipuláveis são recursos didáticos que permitem a representação de possibilidades combinatórias nos diferentes tipos de situações”. Portanto esses recursos, e outros como tecnológicos auxiliam na construção do conceito e na aprendizagem do aluno, podendo observar a mesma situação em diferentes formas. Dessa forma, o professor deve estar atento na escolha de recursos que possam utilizar durante o ensino da

Combinatória, para que seja uma ajuda efetiva. Sobre isso, Gadelha, Borba e Montenegro (2020) alertam:

Os recursos didáticos precisam ser vistos como alternativas para facilitar a aprendizagem dos estudantes, ou seja, como ferramentas a serem planejadas e trabalhadas a partir da mediação do professor, algo que não substitui o ensino, pois os recursos didáticos por si só não viabilizam a aprendizagem do conteúdo explorado. (GADELHA; BORBA; MONTENEGRO, 2020, p. 424)

Por fim, para as habilidades para o 4º Ano é possível perceber a referência em uso de estratégias de resolução, como os registros pessoais, na qual compreendemos como representações que os alunos possam conhecer, como desenho das possibilidades e listagens, anteriormente mencionadas como representações usuais dessa etapa de ensino.

A Combinatória também é encontrada na BNCC (BRASIL, 2018) de Matemática do 5º Ano na unidade temática de números, e também citada como problemas de contagem, mencionando apenas o trabalho com a situação de produto de medidas, mas há uma diferença entre as habilidades exercidas no 4º Ano, que podemos ver abaixo

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (BRASIL, 2018. P. 295)

Diante dessa habilidade indica-se que os alunos nesse ano de ensino elaborem problemas simples de contagem (produto de medidas). Uma noção positiva, pois com esse desenvolvimento é possível compreender os invariantes da situação na formulação de situações. Também percebemos que a partir do 5º Ano é posto o envolvimento do princípio multiplicativo, mas também podendo usar representações como os diagramas de árvore (árvore de possibilidades) ou por tabela, mostrando então que se deve usar as diferentes representações para intermediar a compreensão desse conteúdo para ao fim desenvolver o princípio multiplicativo, ou como nós mencionamos, relacionado ao o Princípio Fundamental da Contagem, deixando evidente que o princípio multiplicativo não é sinônimo do PFC.

Com essa análise sobre o documento da BNCC, pontuamos nossa insatisfação com este documento, assim como a pesquisadora Borba (2019) que em sua pesquisa sobre documentos curriculares, percebe que a Combinatória deveria ser mencionada desde os primeiros anos escolares, pois a sugestão de trabalhar a Combinatória a partir do 4º Ano, se torna insuficiente, onde sabemos que no exercício desse conteúdo desde o 1º ano, mobiliza o raciocínio combinatório e potencializa seu ensino em anos posteriores, se tornando mais compreensível na etapa com o uso de fórmulas.

Contudo, antes do feito documental da BNCC, as diretrizes curriculares eram elaboradas com o apoio do documento normativo chamado Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) desenvolvido em 1997, com o intuito de orientar educadores e instituições sobre os fatores relativos a cada área do conhecimento.

No documento referente a Matemática, encontramos nos objetivos gerais do Ensino Fundamental, a Combinatória, sendo determinada desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Uma divergência se comparada com a BNCC (Brasil, 2018) que indica o ensino da Combinatória a partir do 4º Ano do Ensino Fundamental. Defendemos, portanto, o ensino da Combinatória desde os primeiros anos de escolarização.

Ainda o PCN (Brasil, 1997) vem sinalizar que a Combinatória, presente no tópico de tratamento de informações, está de acordo com as questões presentes na sociedade, com o tratamento e raciocínio de informações que encontramos no cotidiano. Entendemos a partir disso, a possibilidade da ampliação de um modo de pensar acerca dos acontecimentos da sociedade. Além disso, é estipulado, neste documento, o ensino de definições de termos específicos ao conteúdo, e o uso de tecnologias.

Dessa forma, no que se refere especificamente à Combinatória o PCN (Brasil, 1997, p.40) ressalta: “Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem”. O que podemos observar é uma grande discordância no que tange às habilidades demandadas na BNCC (Brasil, 2018). Pois, nos PCN é proposto o ensino de todos os tipos de situações da

Combinatória, não somente a situação de Produto de Medidas, como é sugerido na BNCC (Brasil, 2018).

Destacando, assim, essa proposta de levar as quatro situações combinatórias desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, com a promoção do princípio multiplicativo de contagem. Essa ideia de salientar as situações diversas da Combinatória é amparada por estudos que pesquisam o ensino dessa temática nos Anos iniciais, como Grupo de estudo Geração-UFPE<sup>2</sup>, que concordam com essa prática, e que apoiamos como base pedagógica de ensino.

Em finalização, com base no documento orientador PCN, nota-se no que tange o ensino de Combinatória, é encontrado aparatos mais completos, ou seja, nos PCN, ressalta-se o pensamento combinatório como importante elemento do desenvolvimento dos estudantes da Educação Básica. No sentido de indicar o início do desenvolvimento desse conteúdo desde os primeiros anos do Fundamental, em fortalecimento do processo gradual de ensino. E de forma plena, na abordagem de todas as situações presentes na Combinatória, que para o propósito a aprendizagem efetiva do aluno em que sua jornada consista na sapiência do conceito como um todo, em todas suas dimensões.

Com base nesses documentos anteriores analisados, traremos a seguir o Currículo base do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2019), onde a pesquisa será desenvolvida, no intuito de revelar o que está sendo prescrito no ensino da Combinatória do Ensino Fundamental Anos Iniciais.

A Combinatória do Fundamental Anos iniciais no Currículo de Pernambuco apresenta no campo de Números, exibindo uma forma semelhante a BNCC (Brasil, 2018), em que conduzem o ensino em atividades que a situação Combinatória, de Produto de medidas, priorizando, o conceito de princípio multiplicativo, levando a criança ainda a investigar as representações e a contagem nas resoluções de diversas situações.

---

<sup>2</sup> É um grupo de estudos em raciocínio combinatório liderado pela professora Rute Borba no Centro de Educação da UFPE.

Nesse primeiro momento podemos interpretar que este currículo (2019) orienta o desenvolvimento do conceito na composição somente com a situação combinatória de Produto de Medidas, e formas diferentes de resolução, mas chamando atenção para o princípio multiplicativo.

Contudo, de forma diferente a BNCC (Brasil, 2018), no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019) a Combinatória se apresenta em forma de articulação em outra temática dos Anos Iniciais, o de Estatística e Probabilidade, em que a partir do tratamento de informações pode associar as ideias de Combinatória. Porém em sua referência exemplifica apenas o ensino da situação Combinatória de Produto de Medidas. Em que compreendemos como promissor pois a Combinatória e seu conceito de possibilidades pode ampliar a promoção do pensamento no conceito dentro de Probabilidade, especialmente na discussão do Espaço Amostral, que caracteriza o número total de possibilidades daquele evento sugerido.

Ainda, podemos observar que no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019) que novamente em semelhança com a BNCC (Brasil, 2018) só apresentam o ensino da Combinatória a partir do 4º Ano. Porém, esclarecemos anteriormente que discordamos desse ponto, pois nos baseamos na abordagem do PCN (Brasil, 1997) em que indica o ensino desse conteúdo desde o primeiro ciclo dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Um ponto assertivo do currículo de PE (2019) são as orientações com os recursos didáticos, na qual apresentam diversidades em materiais que auxiliam a criança em seu processo de aprendizagem, mostrando que tais recursos usados de acordo com as situações trabalhadas podem expandir a sistematização, reflexão e compreensão das noções Matemáticas.

Assim, averiguamos que normativamente a Combinatória é encontrada desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, e que é necessário que os professores conheçam as especificidades e orientações necessárias para o ensino desse conceito, fazendo necessário a averiguação dos domínios docentes no ensino da Combinatória.

Quadro 02: Sistematização dos PCN, BNCC e Currículo de Pernambuco sobre os aspectos principais para ensino de combinatória.

Documentos Orientadores	PCN	BNCC	CURRÍCULO DE PE
Aspectos do ensino de Combinatória	<p>Aponta o ensino de Combinatória desde os primeiros anos Do ensino Fundamental;</p> <p>Indica o ensino de todas as situações Combinatórias (Arranjo, permutação, produto de medidas e combinação);</p> <p>Promove o ensino com tecnologias;</p> <p>Relaciona a Combinatória com os problemas do cotidiano.</p>	<p>Apresenta o ensino de Combinatória deve ser feita a partir do 4º Ano;</p> <p>Prioriza somente o ensino de uma das situações de problemas de contagem (produto de medidas);</p> <p>Para o 4º ano indica a resolução de problemas utilizando materiais manipulados e registros pessoais;</p> <p>Para o 5º ano designa resolver e elaborar questões, usando o princípio multiplicativo, árvores de possibilidades, diagramas e tabelas.</p>	<p>Sugere o ensino de Combinatória a partir do 4º Ano;</p> <p>Designa, assim como na BNCC, somente o ensino da situação de produto de medidas;</p> <p>Relaciona o trabalho com o eixo de estatística e probabilidade.</p> <p>Aponta divergentes materiais que auxiliam a criança no processo de aprendizagem.</p>

Fonte: Autora

CAPÍTULO 5:  
REVISÃO DE  
LITERATURA: ESTUDOS  
SOBRE OS  
CONHECIMENTOS  
DOCENTES NO ENSINO  
DA COMBINATÓRIA

Os estudos analisados neste capítulo foram levantados por meio de uma revisão de literatura, realizada no sistema da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), procurando por trabalhos que analisem os Conhecimentos Docentes para o ensino de Combinatória. Os descritores de busca utilizados foram ‘Conhecimentos docentes’ e ‘Combinatória’ e o período delimitado foi entre 2017 a 2022. Conseqüentemente, resultaram em nove (9) estudos de dissertações e teses. Porém, após a leitura dos resumos, verificou-se que apenas um estudo estava efetivamente abordando sobre as especificações da busca.

Esse estudo encontrado, está intitulado como “Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática no interior de Pernambuco: conhecimentos docentes de combinatória” de autoria de Holanda (2017). Dessa forma, a pesquisa procura investigar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um curso de Licenciatura em Matemática.

Logo a autora realizou um estudo de caso em um curso de Licenciatura em Matemática, na qual efetuou uma observação não-participante em 15 aulas, e uma entrevista com a docente, a fim de entender as escolhas e especificações sobre a ação docente nas aulas observadas. Em sua análise a pesquisadora, especificou e caracterizou cada Conhecimento Docente, com base em Ball, Thames e Phelps (2008), presentes em momentos de aula ou nas falas da professora entrevistada.

Em seus principais resultados, foi identificado uma necessidade de mudança na estrutura desse curso de formação inicial desse curso, para que se aproxime e se articule mais com a realidade encontrada em sala de aula. Todas as atividades propostas possibilitaram a discussão dos Conhecimentos Pedagógico e do Conteúdo que pudessem encontrar nas mediações em sala de aula pela professora formadora, que conseguiu garantir uma articulação entre os Conhecimentos Docentes. Ainda as diferentes atividades de elaboração de questões, resolução de problemas, análise de questões, entrevistas, debates, análise de erros, desenvolvidas durante a disciplina, conseguiu influenciar e refletir sobre as práticas dos professores durante sua atuação na educação básica e permitindo considerar o conhecimento pedagógico para o

ensino de Combinatória, como também o domínio do conteúdo na influência sobre sua ação docente.

A autora ainda considerou que em sua pesquisa a presença de cada Conhecimento docente, como o Conhecimento Comum e Especializado do Conteúdo foi bastante encontrado diante as resoluções de questões, pontuando as especificidades dos invariantes da Combinatória. O conhecimento Horizontal do Conteúdo, nomeação feita pela autora, não foi muito dedicado durante as aulas, mas pode ter sido identificado na atividade de produção de questionário. Já o conhecimento do conteúdo e aluno e do conteúdo e ensino foram bastantes explorados em todas as atividades durante a disciplina, pois esses conhecimentos fazem mais parte de disciplinas de formação de professores. Por fim o conhecimento do conteúdo e currículo, também foi pouco desenvolvido durante as aulas, mas nas atividades do questionário e, entretanto, esse conhecimento pode ter sido promovido indiretamente.

Defende-se que todos os conhecimentos determinam a integração do profissional, enquanto profissional responsável pelo ensino e aprendizado de seus estudantes, na qual estão sendo preparados para lidar com diversas situações, é necessário ter uma base sólida e que contemple cada conhecimento docente na procura de qualidade educacional.

Por fim, Holanda (2017) aponta como uma das necessidades de investigação futuras, a busca de entender como se manifestam os conhecimentos docentes ao longo da carreira de professores, em que identificamos como escasso nos Anos Iniciais, e se mostrando como justificativa para a realização da pesquisa presente.

Ao perceber a falta de trabalhos recentes, dos últimos 5 anos, sobre a temática estabelecida, foi necessário renunciar ao critério de busca de estudos recentes, e determinar uma busca mais ampla sobre todos os trabalhos da plataforma do BDTD, em que também apresentassem investigações sobre o Conhecimento Docente no Ensino de Combinatória. Dessa forma encontramos os trabalhos de Rocha (2011), Assis (2014) e Lima (2015), dentre outros estudos que não estavam dentro dos critérios de busca.

A autora Rocha (2011) realizou um estudo intitulado “Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos”, onde o estudo investigou seis professores graduados nas licenciaturas de Pedagogia e de Matemática, que atuavam no Ensino Fundamental e Médio. A pesquisa toma por base os teóricos Vergnaud (1986), Ball Thames e Phelps (2008), entre outros, similares com a presente pesquisa. No intuito de analisar os conhecimentos que professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, e do Ensino Médio têm sobre Combinatória e seu ensino.

A partir dessa finalidade, a autora delimitou os objetivos específicos: Analisar os conhecimentos que esses professores têm sobre as propriedades dos problemas Combinatórios; Averiguar Como analisam as dificuldades apresentadas por alunos; reconhecer como estes professores compreendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte dos alunos; e analisar as estratégias de ensino sugeridas por professores de diferentes níveis de formação.

Para alcançar seus objetivos seu método de coleta de dados se deu pelas entrevistas semiestruturadas, desenvolvidas para conhecer informações sobre a formação e a experiência do professor; entender o conhecimento do conteúdo de Combinatória, os tipos de situações, diferenciação entre problemas de arranjo e combinação; analisar os conhecimentos pedagógicos de Combinatória, em suas percepções sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, verificar estratégias de resolução, levantar estratégias de superação de limitações dos alunos; e entender a ação pedagógica evidenciadas na entrevistas.

Em seus resultados Rocha (2011) evidencia que os professores com formação Matemática que ensinam no Ensino Médio, recomendam o uso do princípio multiplicativo de forma estratégica na resolução de problemas. Já os professores do Ensino Fundamental usavam representações como a tabela e a árvore de possibilidades como estratégias de ensino. Dessa forma, a autora observou que há uma preferência nos aspectos formais em relação aos problemas Combinatórios, mostrando divergência entre as escolhas dos professores.

Diante dessas divergências sobre a estratégia de ensino, alguns professores afirmam a necessidade de alguns pré-requisitos de conhecimento para o

desenvolvimento com o ensino da Combinatória, como por exemplo ter a noção Multiplicativa.

Ainda os professores com formação em Matemática e Pedagogia apresentavam dificuldades de diferenciação das situações combinatórias de arranjo e combinação, a partir das leituras dos problemas ou nos protocolos dos alunos. Mostrando, dessa forma, que demonstram lacunas no Conhecimento Especializado, especificamente na percepção dos invariantes em relação a ordenação desses problemas. Ainda os professores investigados mostraram que não utilizam as nomenclaturas das situações Combinatórias, separando e classificando as situações pela similaridade, ou por reconhecerem seus invariantes. No que diz respeito aos Conhecimentos do Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo, Rocha (2011) reconhece que os docentes mostraram níveis diferentes diante dos domínios.

A pesquisadora constata nessa pesquisa que para desenvolver a análise e o conhecimento do aluno é necessário ter desenvolvido o conhecimento especializado do conteúdo, para poder reconhecer erros e dificuldades nas resoluções e concepções do conceito.

Assim, a autora esclarece que os resultados da pesquisa estabelecem uma necessidade de delimitar o contorno do conteúdo ao longo dos anos escolares, e das ações didáticas para o processo de ensino.

Em conclusão a autora indica para futuras pesquisas: “Pesquisas acadêmicas no que tange os domínios de conhecimentos matemáticos indicados por Ball et al (2008) necessários à função de ensino” (ROCHA, 2011, P.175), o que evidencia a necessidade dessa pesquisa atual; mas também a professora defende pesquisas a partir de formações de professores, na construção e reflexão sobre práticas e estratégias de ensino e utilização de recursos didáticos; Por fim pesquisas que desenvolvam o conteúdo no processo de ensino, e contribuições do ensino para o desenvolvimento do conteúdo em si.

Assis (2014), em sua pesquisa do mestrado, teve como objetivo analisar o efeito de uma formação continuada sobre Combinatória, tendo como base as situações, invariantes e representações simbólicas de cada tipo de problema. De

forma mais específica, verificar quais são as mudanças de conhecimento, demonstradas nas reflexões e na prática da professora, após a intervenção. Em seu trabalho, a pesquisadora desenvolveu um processo de formação continuada, de seis encontros, na qual solicitou algumas elaborações de planejamento de aula, entrevista inicial e final, observações de aula e intervenções.

As entrevistas (inicial e final) foram divididas em três eixos: Formação e Experiência Docente, Conhecimento Didático da Combinatória e Conhecimento Especializado do Conteúdo de Combinatória. Já o processo de formação foi organizado com o primeiro encontro voltado para a discussão e reflexão da Combinatória para a sala de aula à luz da Teoria de Vergnaud (1996), abordando as situações e invariantes dos problemas combinatórios, o segundo encontro abordou a produção dos diferentes problemas combinatórios. No terceiro encontro, foram trabalhadas as diferentes representações simbólicas possíveis para a resolução dos problemas combinatórios, e a elaboração de um planejamento de aula. No quarto encontro aconteceu a aplicação do planejamento de aula pela professora, com observação da pesquisadora e uma entrevista semiestruturada. Em seguida, houve o quinto, para que as professoras participantes do processo de formação pudessem trazer análises e discussões de sua prática diante de todo o processo realizado durante a formação.

Nas observações das aulas, foram levantados três eixos de análise: a relação da professora com os conhecimentos dos alunos sobre o conteúdo, a relação da professora com o conteúdo Combinatória e os recursos utilizados em sala de aula. Essas observações foram realizadas no quarto encontro proposto no processo de formação, intitulado como aula um, e a segunda observação ocorreu no último encontro do processo de formação continuada, intitulado como aula dois. Dois momentos que serviram para identificar se houve alguma mudança nos conhecimentos da docente acerca dos tipos de problemas combinatórios.

Com isso, a pesquisadora percebeu grandes avanços no conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e ensino. Inicialmente a professora participante procurou buscar os conhecimentos prévios dos alunos e desenvolver uma contextualização em suas aulas, sendo desenvolvido o trabalho da

situação de Produto Cartesiano, na primeira aula, e Arranjo na segunda aula. Foi percebido também que a professora usou de diferentes recursos e representações em suas aulas.

Assis (2014) pode notar como a professora teve clareza na questão dos invariantes da Combinatória, além de perceber uma falha no desenvolver da dinâmica com seus alunos, e que a própria professora participante, pode identificar essa falha, e reorganizar o problema apresentado na aula, demonstrando clareza e aprendizagem juntamente com os alunos. Dessa maneira, todos esses aspectos só podem ser considerados com observação da ação pedagógica da professora, os usos de diferentes recursos e representações durante a aula, além de ver o que foi conhecimento construído na participante durante esse processo de formação.

Por conseguinte, os resultados dessa pesquisa apresentaram que a formação continuada promoveu mudanças no uso e abordagem das representações simbólicas, pois a professora conseguiu utilizar diferentes representações durante as aulas promovidas, e considerou que a listagem, o desenho e a árvore de possibilidades, são colaboradores da aprendizagem e ensino da Combinatória. Expressou também mudanças com relação ao conhecimento de Combinatória da professora, especificamente na diferenciação dos tipos de problemas combinatórios e no invariante de escolha, já que a mesma demonstrou maiores reflexões sobre esses problemas e suas características na entrevista final. No entanto, o invariante ordenação, segundo Assis (2014), não foi totalmente compreendido, pois a professora continuou a apresentar dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação.

Assim, a pesquisa desenvolvida por Assis (2014) se mostrou importante e necessária para que a docente pudesse ressignificar seus conhecimentos e refletir sobre esse conteúdo da Matemática, e também para que os pesquisadores possam perceber a observação como um procedimento onde temos contato direto com o objeto a ser pesquisado.

Visando as pesquisas futuras a autora indicou realizar essa mesma investigação em outras etapas do ensino Básico, como também a abordagem do conteúdo de Combinatória na formação inicial em Pedagogia. Ainda a mesma

incentiva outros estudos que procurem verificar os processos de formação continuada de Combinatória, a fim que os professores possam aplicar em sala de aula aquilo que foi estudado durante o processo de formação, analisando os conhecimentos adquiridos dos professores, como também o desenvolvimento dos alunos a partir dos procedimentos feitos em sala de aula. Analisando por fim as metodologias utilizadas na formação, e o processo de ensino e aprendizagem.

O estudo de mestrado de Lima (2015) investigou os conhecimentos de docentes da Educação Básica sobre como o Princípio Fundamental da Contagem pode ser usado nas resoluções de situações combinatórias e no desenvolvimento de fórmulas na Análise Combinatória. Dessa forma, foram elaborados dois estudos: o primeiro com o objetivo de saber se estudantes e professores identificam o Princípio Fundamental da Contagem nas situações combinatórias. Para tal investigação foi efetuado um teste composto por questões de múltipla escolha e argumentações, com professores do ensino Fundamental e Médio e com 37 alunos do 3º Ano do Ensino Médio.

O segundo com a finalidade de pesquisar os conhecimentos de professores de Matemática sobre o ensino e resolução de problemas combinatórios com a utilização do PFC, onde foi desenvolvida uma entrevista semiestruturada com os docentes, dividida em três fases que consistiam em identificar os domínios baseados nos teóricos de Ball, Thames e Phelps (2008), onde a autora criou seis categorias relacionando o PFC com os Conhecimentos Matemáticos para o ensino (conhecimento comum do PFC, conhecimento especializado do PFC, conhecimento horizontal do PFC, conhecimento do PFC e alunos, conhecimento do PFC e ensino e conhecimento do PFC e currículo), para análise dos dados com o auxílio de um software de apoio à análise qualitativa. Essa coleta de dados foi efetuada por meio de protocolos de todos os quatros tipos de situações combinatórias resolvidas por alunos.

Os resultados evidenciaram que os professores do Ensino Médio identificam o uso do Princípio Fundamental da Contagem mais do que os professores do Ensino Fundamental. Já o reconhecimento dos alunos se mostrou inferior comparado aos

professores da mesma etapa de ensino, podendo ser um indício que tais professores não destacam o ensino desse princípio.

No que se refere ao Conhecimento Docente do Princípio Fundamental da Contagem, a pesquisa aponta que os professores participantes do segundo estudo mostraram ter alguns domínios, como: conhecimento comum, especializado e horizontal do PFC, porém não conseguiram associar esse princípio multiplicativo com as fórmulas da Análise Combinatória. Ainda apresentam o conhecimento do aluno, mas ao destacar o conhecimento e ensino, não classificam o PFC com outras estratégias de representações simbólicas. Outro conhecimento não esclarecido foi o conhecimento do currículo.

Por fim, entende-se que tais conhecimentos do PFC podem auxiliar ou ser fundamento para a construção do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. E a pesquisa mostra que a necessidade de melhoria nos domínios mostrados pelos professores.

A autora ao final sugere para pesquisas futuras intervenções com professores realizando uma relação dos conhecimentos do conteúdo e pedagógicos da Combinatória entre o uso do PFC, e estudos que visam contribuir com a formação inicial e continuada de professores quanto aos conhecimentos referentes a Combinatória e ao Princípio Fundamental da Contagem.

Contudo, esse estudo expressa as contribuições pertinentes ao uso no ensino e na aprendizagem da Educação Básica (na atuação de professores licenciados em Matemática), como uma estratégia eficaz na resolução de diferentes situações combinatórias.

No Quadro 3 é possível observar a sistematização dos estudos citados e como cada estudo contribuiu para a construção da presente pesquisa, especialmente na construção da metodologia, em fazer entender como os instrumentos de coletas podem ser utilizados em diferentes objetivos propostos, e como suas análises foram desenvolvidas com base nos Conhecimentos Docentes se apresentam em diferentes etapas da Educação Básica, fortalecendo os embasamentos teóricos que estarão presentes nesse estudo.

Quadro 03: Sistematização das lacunas presentes nos estudos da Revisão de Literatura e a relação ao objeto do presente estudo

Estudos da Revisão da Literatura	Holanda (2017)	Rocha (2011)	Assis (2014)	Lima (2015)
Lacunas presentes em relação ao Conhecimento docente em Combinatória.	A pesquisa foi feita com uma professora da Educação superior, especialista em Combinatória. Dessa maneira, é necessário entender a formação dos conhecimentos durante a trajetória docente e em todas as etapas escolares, na qual apresenta-se a Combinatória.	Realizada o estudo com professores do Ensino Médio e Fundamental, por meio de uma entrevista, faltando entender como se desenvolve esses conhecimentos na sala de aula.	Desenvolveu a formação continuada e observou a mobilização dos conhecimentos docentes por uma professora do 1º ano do EF. Mostrando a necessidade de pesquisas com um número maior de docentes para entender como são mobilizados os conhecimentos docentes, durante a formação e na sala de aula.	Especificou sua pesquisa na investigação dos conhecimentos docentes do ensino fundamental e médio sobre o PFC.  Faltando investigar o uso do PFC na sala de aula por professores dos anos iniciais do fundamental.

Fonte: Autora

Por fim, é importante salientar que essa pesquisa em comparação com os estudos da revisão de literatura, será distinto no campo de pesquisa, em que a etapa abordada da Educação básica será apenas os Anos Iniciais do Fundamental; a ampliação de participantes, a fim de diversificar nossos dados de análises e resultados; e observar o Conhecimento Docente em três diferentes momentos de coleta de dados, na formação, observação de aula e entrevista.

# CAPÍTULO 6: PERCURSO METODOLÓGICO

Na busca de responder o objetivo proposto, apoiamos em uma abordagem qualitativa, pois, buscamos entender o significado das ações e a mobilização dos Conhecimentos docentes elencados por Ball, Thames e Phelps (2008), em sala de aula. Porém, compreendemos que a perspectiva quantitativa pode estar presente nas análises para dar suporte nos fatores de investigação.

Sendo assim, entendemos a perspectiva qualitativa a partir dos teóricos Martins e Theóphilo (2007, p.135), pois apontam que “[...] pedem descrições, compreensões e análise de informações, fatos e ocorrências que naturalmente não são expressas por números”. Com isso, podemos perceber os fenômenos presentes na Educação e na sociedade, além de compreendermos a não neutralidade do investigador, em todas as intervenções, observações e análises das ocorrências para a presente pesquisa.

## **6.1 Campo de pesquisa**

A presente pesquisa foi realizada em escolas privadas, localizadas no bairro do Ibura, fronteira dos Municípios de Recife e Jaboatão dos Guararapes (região metropolitana do Recife), Pernambuco. O bairro do Ibura é o terceiro maior bairro do Recife, com 50.617 habitantes, sendo caracterizado como uma região periférica, em dados encontrados no Censo Demográfico do IBGE (2010).

A escolha das escolas da rede privada se deu pela dificuldade de acesso e disponibilidades aos profissionais do 4º e 5º ano da rede municipal de ensino de toda Região Metropolitana do Recife. Pois no período em que definimos a coleta de dados, priorizamos inicialmente as escolas públicas, fazendo chamadas, nos meses de agosto a setembro, via internet em grupos de diversas redes sociais, por meio do preenchimento de um formulário online, Google Formulários, onde recebemos quatro respostas com esse formulário. Ao contactar tais profissionais nenhum se dispôs a participar desse estudo. Também recebemos outros seis contatos de professores que estavam na rede municipal de ensino, mas novamente recebemos uma negativa para a realização dessa pesquisa.

Dessa forma, ao considerarmos os acontecimentos anteriores, definimos a efetivação desse estudo em escolas particulares, na qual os profissionais se mostraram solícitos a participar das etapas seguintes desta pesquisa.

As escolas participantes são escolas em que suas instalações iniciaram a partir de casas residenciais e foram desenvolvendo conforme suas necessidades. Dessa forma duas escolas (escola 1 e 2) são de porte pequeno, tendo por volta de 200 alunos matriculados, que atendem poucas turmas, em salas pequenas, com quantitativo menor que 20 alunos por sala. Contudo apenas uma (escola 3) se enquadra como médio porte, tendo, dessa maneira, um número de matriculados maior que 300 alunos e menor que 500. Todas utilizam livros didáticos, jogos, brinquedos, materiais lúdicos e tecnologias como seus materiais pedagógicos.

Consideramos também a representatividade da localidade na qual tais escolas estão inseridas, isso porque buscamos obter uma visão sobre a realidade local, em que, também, entendemos a importância em expandir conhecimento a essas escolas de pequeno porte, situadas em um bairro periférico que aporta uma grande quantidade de pessoas de baixa renda, aprimorando o conhecimento daqueles que fazem parte desse contexto.

Por fim, avaliamos que a proximidade da pesquisadora com o lugar escolhido permitiu um maior envolvimento com o sistema educacional local, o que contribuiu com a realização das atividades, no fácil o acesso às instituições, e com a interação com os participantes, que resultou em uma maior participação na coleta e na compreensão dos dados obtidos.

## **6.2 Critérios para a seleção dos participantes**

A pesquisa foi conduzida com os seguintes critérios, para a escolha de participantes: 1) Ensinar no 4º e 5º ano; 2) ser formado em Pedagogia; 3) ensinar em uma instituição da Região metropolitana do Recife; 4) demonstrar disponibilidade para a pesquisa, na qual conseguimos participantes que estivessem de acordo com todos os critérios estabelecidos.

Acreditamos, portanto, que nossos critérios são necessários para entender, que a partir do que está indicado no documento da BNCC (2018), a Combinatória vai surgir, oficialmente, a partir do 4º Ano do Fundamental, sendo dessa forma indicado para o início do ensino desse conteúdo. Também é importante que o participante seja formado em Pedagogia, pois esse curso forma profissionais licenciados capacitados em atuar em diferentes áreas da educação: professor do Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental, este último correspondente à área de pesquisa do presente estudo.

### 6.3 Participantes

O quadro total de participantes foi sendo modificado conforme as etapas da coleta de dados. Inicialmente conseguimos desenvolver uma formação com seis professores, atuantes do 4º e 5º ano de três diferentes escolas particulares no Bairro do Ibura. Abaixo está o Quadro 4 mostrando o perfil dos participantes.

Quadro 04: Perfil dos professores que participaram de todas as etapas da pesquisa.

Nome fictício	Escolas	idade	formação inicial	pós graduação	tempo de atuação	atua em qual ano	gosta de matemática	ensina combinatória em suas turmas
Amélia	1	48	Pedagogia e nutrição	não	16 anos	4º ano (manhã e tarde)	Sim	Não
Clécia	1	28	Pedagogia	não	5 anos	5º ano (manhã e tarde)	Sim	Não
Tais	2	52	Pedagogia	Psicopedagogia	11 anos	2º ano (manhã) 4º ano (tarde)	Sim	Não
Tainá	2	46	Pedagogia e Letras	não	4 anos	5º Ano (manhã)	Sim	Não

João	3	27	Pedagoga	Em andamento (metodologias ativas e educação especial)	5 anos	5° ano (manhã e tarde)	Sim	Sim
Helena	3	31	Pedagoga	não	10 anos	4° ano (manhã) e algumas disciplinas no 3° e 5° ano	Sim	Só depois da formação

Fonte: Autora

Contudo a partir da segunda etapa, de observação de aula, tivemos uma perda de duas docentes, uma das professoras não conseguiu disponibilizar tempo suficiente para realizar a etapa de observação, e outra professora desenvolveu sua aula fora da temática da formação, realizando uma aula sobre números decimais. Ainda assim, tentamos entrar em contato, para que a mesma participasse da nossa terceira etapa de coleta, mas ela não respondeu nossas tentativas de comunicação, sendo então removida do nosso número total de participantes. Ambas as professoras trabalham na mesma escola, na qual nos referimos como Escola 1.

Sendo assim, quatro professores conseguiram participar das três etapas da coleta de dados, sendo então definidos como nossos principais participantes da pesquisa. Os dois primeiros participantes trabalham na mesma escola que definimos como Escola 2, e os dois últimos participantes também trabalham na mesma escola que nomeamos como Escola 3.

#### **6.4 Procedimentos e instrumentos de coleta de dados**

A fim de ter uma perspectiva de forma heterogênea dos dados e alcançar os objetivos definidos, foram escolhidos três instrumentos de coleta de dados que compõem este estudo, exibidos no quadro a seguir com os respectivos objetivos determinados.

Quadro 05: Objetivos e instrumentos da coleta de dados.

Instrumento	Objetivo
Curso de formação	Discutir e refletir com professores sobre o conteúdo, características e o ensino de Combinatória nos anos iniciais;
Observação	Investigar e identificar a mobilização do Conhecimento Docente em uma aula de Combinatória;
Entrevista	Entender a ação do participante e aprofundar a compreensão dos conhecimentos docentes nas etapas anteriores.

Fonte: Autora

Dessa forma a seguir, apresentaremos mais detalhes sobre cada instrumento.

#### 6.4.1 Curso de formação

O curso de formação, como nosso primeiro procedimento de coleta de dados, foi baseado no estudo apresentado por Silva (2023), que desenvolveu uma formação sobre a Combinatória que buscou perceber os Conhecimentos Matemáticos para ensino durante o feito. Seguimos com os procedimentos e materiais elencados e usados pela autora para a formação, mas desenvolvemos algumas mudanças, uma vez que observamos as necessidades específicas desse grupo de professores.

Como indicado, formamos duplas de professores atuantes no 4° e 5° ano do Fundamental, correspondente ao seu comum local de trabalho, para o desenvolvimento de cada dia de formação, cada dupla tinha um canal de comunicação, junto com a pesquisadora, no WhatsApp, na qual alguns materiais, avisos, dúvidas e outro tipo de comunicação foram realizados por lá.

Os encontros ocorreram de forma online, via Google Meet, totalizando em 3 dias de formação para cada dupla. Silva (2023) em seu último (terceiro) encontro de

formação, reuniu todos os participantes em uma única chamada, e desenvolveu de forma conjunta, no entanto adaptamos essa proposta, pois não foi possível encontrar uma data e hora compatível a todos os professores participantes.

Dessa maneira, a partir do quadro abaixo pontuamos os objetivos e os procedimentos desenvolvidos durante a formação com base na proposta de Silva (2023).

Quadro 06: Objetivos e procedimentos do curso de formação fundamentados em Silva (2023)

Dia de Formação	Objetivo	Procedimentos
Encontro 1	Analisar e discutir o Conhecimento Especializado do Conteúdo dos professores sobre as diferentes situações que atribuem significados aos conceitos combinatórios e explorar as suas propriedades invariantes e como elas se apresentam em cada situação.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Apresentação</li> <li>- Entrega do material;</li> <li>- Apresentação;</li> <li>- Resolução de situações Combinatórias;</li> <li>- Preenchimento do protocolo destacando os invariantes de cada situação resolvida.</li> </ul>
Encontro 2	Tratar das variadas representações simbólicas possíveis para a resolução dos problemas combinatórios e da ideia de organização dos procedimentos de resolução e generalização.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Retomada as situações anteriormente trabalhadas;</li> <li>- Pontuar os invariantes e especificações de cada situação;</li> <li>- Mostrar protocolos de respostas de estudantes, e desenvolver um diálogo e análise;</li> <li>- Pontuar as representações</li> </ul>

		presentes de cada protocolo.
Encontro 3	Discutir e refletir sobre como pode ser trabalhada, em sala de aula, a Combinatória.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar problemas semelhantes;</li> <li>- Desenvolver uma discussão de possibilidades para o ensino de Combinatória nos anos iniciais, e alertar para alguns cuidados para esse grupo.</li> </ul>

Fonte: Silva (2023)

Logo, para o primeiro encontro foi preparado um material físico que foi entregue a cada um dos participantes previamente, contendo quatro envelopes com as situações de Combinatória, descritas no Quadro 07; imagens impressas, correspondente a cada situação problema entregue; um protocolo, apresentado na figura abaixo; além de uma carta de instruções e agradecimento.

Figura 7: Protocolo de Problemas

<b>Protocolo dos problemas</b>			
<b>Problema 1</b>	<b>Problema 2</b>	<b>Problema 3</b>	<b>Problema 4</b>
1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.	1. Escolha dos elementos: ( ) de um conjunto único. ( ) de dois ou mais conjuntos distintos.
2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.	2. Os elementos do(s) conjunto(s): ( ) todos são utilizados. ( ) alguns são utilizados.
3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.	3. A ordem dos elementos: ( ) gera novas possibilidades. ( ) não gera novas possibilidades.

Fonte: Silva (2023)

A partir da organização previamente estabelecida, marcamos horários de acordo com a comum disposição da dupla. Dessa forma, o primeiro encontro foi dividido em três momentos: apresentação; resolução e discussão das situações; identificação e registro dos invariantes.

No primeiro momento, a pesquisadora iniciou as apresentações, discorrendo sobre a trajetória acadêmica e profissional, explicou brevemente o intuito da formação. Os participantes também realizaram suas apresentações de forma coletiva, ao término, foi dado um espaço para o esclarecimento de possíveis dúvidas.

No segundo momento, a pesquisadora apresentou algumas justificativas no estudo de Combinatória, pontuando algumas habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), do ensino fundamental, em que a Combinatória está presente. Ainda foi pontuado o que seria visto nos três encontros da formação.

No terceiro momento, foi pedido para os participantes utilizarem o material dado antecipadamente, dessa maneira, em slides foram apresentados, um por vez, quatro problemas combinatórios de cada tipo: Arranjo, Combinação, Permutação e Produto de medidas (quadro 07).

Por conseguinte, com o uso das imagens, foi dado um tempo para que cada um dos professores resolvessem a situação apresentada no slide. Ao finalizarem, a pesquisadora fez alguns questionamentos para a discussão dos resultados e dos invariantes percebidos em cada situação, questionamentos esses baseados no estudo de Silva (2023) que envolvem conjuntos, elementos, ordem, repetição e possibilidades, descritos no Anexo 1.

Ao término de todas as discussões sobre os resultados e dos invariantes das situações Combinatórias, foi pedido para que os professores utilizassem o protocolo dos invariantes (figura 7). Assim, para cada tipo de situação Combinatória anteriormente trabalhada, a pesquisadora perguntava sobre os invariantes, esperava o reconhecimento, e pedia para que registrassem no protocolo. Por fim, a pesquisadora deu mais um tempo para atender as possíveis dúvidas sobre esse primeiro encontro.

No segundo encontro, não foi feito nenhum material físico, pois a pesquisadora adaptou da pesquisa de Silva (2023) deixando, o material que seria usado para esse segundo encontro, no slide. Sendo assim, iniciou com uma retomada dos problemas resolvidos e discutidos no primeiro encontro, pois foi percebido uma dificuldade no entendimento e diferenciação da situação de combinação e arranjo.

Portanto, a pesquisadora desenvolveu uma retomada, na qual, esclareceu novamente os invariantes de cada situação e pela primeira vez nomeou cada situação, mostrando qual situação era de arranjo, combinação, produto de medidas e permutação. Além disso, enfatizou mais características, dando outros exemplos das situações em que demonstraram ter mais dificuldades no encontro anterior.

Em seguida, a pesquisadora pontuou também outra justificativa do estudo da Combinatória, explicando que o conteúdo aparece também quando se estuda sobre Probabilidade, pois ao buscarmos o espaço amostral, estamos desenvolvendo todas

as possibilidades para alguma determinada situação. A pesquisadora também achou necessário desenvolver um triângulo para mostrar na formação, com base no estudo de Vergnaud (1986), o tripé que contempla o entendimento da Combinatória, destacando as situações e os invariantes, e que seguiria para a compreensão das representações simbólicas.

Também para a compreensão de algumas representações na Combinatória, e para desenvolver uma discussão sobre o que os professores percebiam nas respostas de outros alunos, a pesquisadora apresentou em slides quatro protocolos de respostas de estudantes, cada um de uma situação Combinatória diferente, adaptados do material e procedimentos de Silva (2023), tais protocolos estão no Anexo 2. Então, ao longo dos problemas e respostas apresentadas, os participantes iam respondendo para descobrir o resultado, para comparar com que os estudantes apresentaram, usando a representação mostrada na imagem.

Durante a apresentação, a pesquisadora fazia três questionamentos, fundamentados no procedimento realizado por Silva (2023), que podem ser encontrados no Anexo 3, e ao finalizar a apresentação das quatro situações, a pesquisadora fazia mais quatro perguntas, também no Anexo3. Todas as perguntas tinham o intuito de entender se os professores participantes conseguiam identificar alguma dificuldade, ou acerto, no aluno, entender as representações usadas, e de que maneira eles poderiam atuar para motivar os alunos e ajudá-los em suas dificuldades. Por fim, a investigadora pontuou que no próximo encontro a temática seria voltada para a prática de ensino, e adiantou a todos os participantes a pensarem sobre possíveis aulas na temática. E assim, com todas as discussões, foi concluído o segundo encontro.

No terceiro e último encontro, a pesquisadora já iniciou as atividades perguntando sobre as ideias de aulas que os professores levaram, sobre como eles poderiam trazer a Combinatória para a sala de aula. Dessa forma, levando em consideração o ano de atuação desses professores, a pesquisadora apresentou, por meio dos slides, alguns alertas como: para os anos iniciais não é necessário decorar fórmulas; o uso positivo das representações simbólicas; devem entender o intuito,

característica/invariante da questão; e se atentar para o número de possibilidades, iniciar com números baixos de possibilidades.

Em seguida, foram discutidas possibilidades de desenvolver uma aula em Combinatória, considerando também as ideias trazidas dos participantes, apresentando imagens de exemplos. Por fim, foi enviado por meio do WhatsApp, e apresentado em slide, uma lista de questões, para ser comparada e identificadas situações semelhantes de arranjo, combinação, produto de medidas e permutação. E novamente retomar os invariantes, de cada situação.

Ao final, a pesquisadora pediu para que todos os professores planejassem uma aula tomando base tudo que foi discutido e visto no curso de formação, mostrando que poderia ajudar nesse processo, e perguntou a todos a disponibilidade para participar dessa aula presencialmente.

No grupo de *Whatsapp* a pesquisadora enviou o material da formação, uma vez que foi solicitado pelos participantes.

#### 6.4.2 Planejamento e observação

O segundo procedimento de coleta de dados ocorreu duas semanas depois da formação, em que os professores indicavam sua disponibilidade para que pudesse ocorrer a observação da aula. Para isso, no final da formação foi combinado que os professores deveriam planejar uma aula, no período de duas semanas, e mandar para a pesquisadora, seguindo um modelo de um plano de aula, disponibilizado e enviado pela pesquisadora. E que eles poderiam pedir ajuda na construção desse plano. No entanto, apenas uma professora entregou o plano. Mesmo sem a entrega dos demais planos de aulas, todos os professores afirmaram por meio do *Whatsapp* que conseguiram planejar suas aulas, só não tiveram tempo de sintetizar em um plano de aula, dessa forma continuamos com as seguintes etapas.

Dos seis participantes da formação, apenas uma professora não conseguiu ter disponibilidade para essa segunda etapa da pesquisa, justificando o acúmulo de conteúdos que estavam pendentes para a prova, que estava para ocorrer em uma data próxima. Dessa forma, foi possível observar a aula de cinco professores, três

professores do 4º ano e dois do 5º ano. Porém a professora Amélia não desenvolveu a aula na temática de Combinatória, por fim analisamos apenas as aulas de quatro professores.

Todas as observações ocorreram na semana final do mês de setembro e na semana inicial do mês de outubro de 2023. Feitas individualmente com cada professor. E seguindo um roteiro de observação, que foi confeccionado com base nas pesquisas de Rocha (2011) e Lima (2015), contidas no apêndice 1, que tem como finalidade identificar os diferentes Conhecimentos Docentes, seguindo a descrição de Ball, Thames e Phelps (2008), manifestados pelos professores no Ensino de Combinatória. Como recurso de apoio, a pesquisadora usou recursos como gravação de áudio, fotografia (quando autorizado) e caderno para anotações.

A razão pela qual defendemos a observação, é descrita por Marconi e Lakatos (1996) em que caracterizam a observação como um instrumento de coleta de dados que auxilia o pesquisador a conseguir informações sob determinados aspectos da realidade, como em “[...] identificar e obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento” (MARCONI e LAKATOS, 1996, p. 79). Permitindo ao pesquisador um contato direto com o contexto ou objeto observado.

Assim, caracterizamos o instrumento como observação não-participante, pois com base em Marconi e Lakatos (1996) que o observador entra em contato com o grupo, a comunidade ou a realidade estudada, porém, não se envolve, nem se integra a ela; permanece de fora. O observador presencia o fato, mas não participa dele. Apesar de que, em algumas situações observadas, foi exigida uma intervenção por parte da pesquisadora, mas que não comprometeu com o objetivo a ser identificado na observação.

#### 6. 4.3 Entrevista

Com o propósito de entender e discutir as etapas anteriores, pela visão do participante, concluímos nossa coleta de dados com uma entrevista semiestruturada (MANZINI, 1990/1991). Este instrumento nos permitiu conhecer e traçar o perfil do sujeito, como: sua formação e experiência docente; também identificar as dificuldades

e perspectivas no processo, assim como, o entendimento acerca dos Conhecimentos do Conteúdo, e Pedagógico do Conteúdo de Combinatória, mobilizados na aula, na expectativa de entender os dados obtidos nas etapas antecedentes.

Logo, a entrevista semiestruturada, nos permitiu confeccionar um roteiro com perguntas principais organizadas, apresentadas no apêndice 2, a partir da pesquisa de Rocha (2011) e Lima (2015), na qual dividimos em quatro objetivos que são:

- Traçar o perfil do sujeito;
- Analisar e abordar os acontecimentos da formação;
- Investigar os Conhecimentos de Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo dos professores em relação ao tema Combinatória;
- Dialogar sobre as ações realizadas na aula de Combinatória.

Todas as entrevistas foram realizadas no mês de outubro de 2023, de forma individual, e online via Google Meet. As entrevistas foram marcadas de acordo com a disponibilidade de cada professor, e durou aproximadamente 30 minutos cada. Com a entrevista conseguimos perceber as percepções dos docentes sobre cada etapa anterior, também suas justificativas para cada ação feita.

Ao finalizar as entrevistas, todas as respostas foram transcritas exatamente de acordo com a fala de cada participante, por isso seja descrito contendo vício de linguagem, sendo fiel a fala de cada entrevistado.

# CAPÍTULO 7:

## RESULTADOS OBTIDOS: APRESENTAÇÃO E ANÁLISES

Apresentaremos a seguir os resultados do estudo. As análises foram realizadas de forma qualitativa, seguindo as etapas de forma cronológicas, primeiro a formação realizada com os professores participantes da presente pesquisa, em seguida as observações de aula, ministrada e planejada por cada professor, ainda para compor as discussões, a comparação da perspectiva dos professores sobre os processos anteriores, em uma entrevista posterior a aula ministrada. Evidenciando principalmente os conhecimentos discutidos por Ball, Thames e Phelps (2008), verificando os conhecimentos do conteúdo e pedagógicos do conteúdo para o ensino de Combinatória nos anos iniciais do Fundamental.

### **7.1 Discussão conceitual e o Conhecimento comum e especializado de Combinatória**

O intuito inicial da formação era dar um maior aporte teórico para os professores desenvolverem suas aulas de Combinatória, porém durante a formação percebemos a mobilização de alguns conhecimentos docentes de Ball, Thames e Phelps (2008), e aqui analisaremos, principalmente o conhecimento comum de Combinatória e o conhecimento especializado de Combinatória, mobilizado pelos professores durante o curso de formação. O curso de formação, como detalhada anteriormente, foi baseada no estudo de Silva (2023). Sendo assim, seguimos as orientações e planejamentos feitos pela autora.

No primeiro dia de formação, esteve focado para verificar, por meio de resolução de problemas, entender as quatro situações Combinatórias e perceber os invariantes presentes nas situações apresentadas para os professores.

Tais problemas também são baseados no estudo de Silva (2023) que estão destacados abaixo. A partir das resoluções desenvolvidas no primeiro dia, percebemos a compreensão comum de cada professor sobre a temática de Combinatória. Portanto, o que Ball, Thames e Phelps (2008) pontua sobre o conhecimento Comum do Conteúdo é a capacidade de resolução de situações, exercícios e trabalhos que são atribuídos aos participantes, a aplicação do conteúdo matemático de forma correta. Na qual analisaremos a partir das resoluções dos

professores das situações de Arranjo, Combinação, Permutação e produto de Medidas, que podem ser observadas no Quadro 7.

Quadro 07: Situações apresentadas na formação

Situação de Arranjo	Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?
Situação de Combinação	Na barraca 'Espaço Drinks' há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?
Situação de Permutação	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?
Situação de Produto de medidas	Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?

Fonte: Silva (2023)

Todas as situações foram entregues de forma escrita, com imagens referentes a cada problema, e eram apresentadas seguindo o slide, apresentado no dia da formação. No Quadro 8 é possível observar a resolução correta da primeira situação.

Quadro 08: Resolução da situação problema Arranjo.

Situação de Arranjo	Há quatro alunos (César, Maria, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice-representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice-representante?	Resolução: Representante (Rep); Vice-Representante (Vice) Rep: César - Vice: Maria Rep: César- Vice: Bete Rep: César- Vice: Luan Rep: Maria -Vice: Cesar Rep: Maria- Vice: Bete Rep: Maria - Vice: Luan Rep: Bete- Vice: César Rep: Bete - Vice: Maria Rep: Bete- Vice: Luan Rep: Luan - Vice: César Rep: Luan- Vice: Bete Rep: Luan - Vice: Maria (Total de 12 possibilidades)
---------------------	--	---

Fonte: Autora.

A primeira dupla da escola 1, Amélia e Clécia, Amélia em sua resolução pontuou que conseguiu 6 possibilidades, conseguindo então listar algumas duplas de representante e vice, porém não considerou que a mesma dupla de representante e vice, poderia ter seus cargos trocados, ou seja, ela listou César e Maria, (César como representante e Maria como vice), mas não listou Maria e César (Maria como representante e César como vice). Já Clécia não demonstrou dificuldades, e listou as 12 possibilidades dessa primeira questão.

A segunda dupla, da escola 2, Tais e Tainá, estavam inseguras sobre a resolução de questões, e de início uma delas perguntou se poderia errar, e logo afirmou que não sabia as questões, a formadora teve que falar palavras de incentivo às professoras. Logo após a apresentação do problema, as professoras apresentaram bastante dificuldades em entender o problema de Arranjo, que necessitou novamente da intervenção da formadora e uma explicação mais detalhada exemplificando uma possibilidade.

Mas antes da explicação da questão, Tais não conseguiu resolver a situação, e Tainá por meio do seu raciocínio, sem o uso de papel e caneta, indicou que o

resultado era de 8 combinações, na qual estava errado. Então, depois da explicação da formadora, sobre a mudança de cargos que geram possibilidades diferentes, Tais e Tainá conseguiram listar todas as 12 possibilidades.

Por conseguinte, a dupla João e Helena, da escola 3, conseguiram também chegar na resposta final de 12 possibilidades, porém usando estratégias diferentes. João logo de cara percebeu que nessa questão a ordem importava, e que por meio da listagem conseguiu descrever os representantes e vices da questão. No entanto Helena resolveu a questão por meio da multiplicação direta de 4 vezes 3, e em sua explicação não ficou claro como ela chegou nesse cálculo. Acreditamos que pelo que Helena não usou o cálculo na intenção de desenvolver o Princípio Fundamental da Contagem para essa situação, pois, pelo que foi percebido durante a formação, ela estava usando a multiplicação para resolver todos os problemas apresentados. Além disso, a mesma comentou na entrevista sobre as resoluções:

Para mim como você viu, eu tava resolvendo tudo multiplicando né, então a minha dificuldade foi em identificar aquela que tinha mais oportunidades de resolver, que tínhamos que ver por um outro lado, então foi essa dificuldade que eu senti, porque tudo vinha na cabeça multiplicação rápida, mas nem sempre a resposta tava lá exata. (Professora Helena 4º Ano)

Entendemos também que a dificuldade dos professores para a situação de Arranjo se deu, pois foi o primeiro problema a ser apresentado. E aqueles que usaram a representação da listagem, conseguiram chegar no resultado certo para essa situação.

Quadro 09: Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Arranjo.

Professores	Acertos	Erros	Acerto parciais/ dificuldades
Amélia			
Clécia			

Tais			
Tainá			
João			
Helena			

Fonte: Autora

No Quadro 10 é possível observar a resolução correta da segunda situação.

Quadro 10: Resolução da situação problema de Combinação.

Situação de Combinação	Na barraca 'Espaço Drinks' há cinco frutas (acerola, caju, laranja, graviola e maracujá) e os sucos são preparados misturando-se duas das frutas disponíveis. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?	Resolução: Acerola e Caju; Acerola e Laranja; Acerola e Graviola; Acerola e Maracujá; Caju e Laranja; Caju e Graviola; Caju e Maracujá; Laranja e Graviola Laranja e Maracujá; Graviola e Maracujá. (totalizando 10 possibilidades)
------------------------	---	--

Fonte: Autora

Ficou mais evidente a adversidade de diversos participantes, pois eles não conseguiam perceber a repetição das possibilidades, o que fez alguns sentirem mais dificuldades nessa situação:

Amélia relatou dúvidas entre duas respostas 5 e 25, dessa forma diante sua explicação ficou claro que Amélia não considerou os sucos repetidos da questão. Já Clécia perguntou à formadora se era para considerar as repetições das possibilidades ou não, só após a ajuda da formadora, Clécia conseguiu relatar as 10 possibilidades.

A segunda dupla de formação teve também dificuldade em responder e precisou de uma explicação mais detalhada da formadora, sendo assim, após a explicação Tais e Tainá conseguiram obter, através da listagem, o resultado de 10 possibilidades de sucos, e ainda conseguiram perceber que a ordem nessa questão não influencia no resultado.

João, participante da terceira dupla, comenta que acredita que esse problema é parecido com a primeira situação, mas compreendendo que para a situação de Combinação a ordem não vai importar, conseguindo então efetuar a resolução através de listagem, acertando o resultado de 10 possibilidades. Mesmo com o acerto dessa situação, na entrevista o professor João considerou essa situação como a mais difícil.

Helena por outro lado, demonstrou bastante dificuldade com a situação de Combinação, e novamente usa o método da multiplicação dos termos  $5 \times 4$ , assim, não consegue obter o resultado correto da situação. Mas após a explicação de João, compreendeu como devem ser feitas as possibilidades da situação de Combinação, mas não chegou a responder o resultado da questão.

Tal desempenho dos professores pode ser entendido pelo fato da situação ser interpretada como a mais difícil, nos estudos de Montenegro (2018), Gadelha (2020) e Silva (2019) em pesquisas realizadas com estudantes, apresentaram rendimento insuficiente na resolução de problemas de Combinação, mostrando essa dificuldade aparente nessa situação. Porque essa dificuldade pode ser explicada, pela falta de compreensão, de um invariante de ordem no que diz respeito a alteração da ordem dos elementos não vão originar novas possibilidades.

Quadro 11: Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Combinação.

Professores	Acertos	Erros	Acerto parcial/ dificuldades
Amélia			

Clécia			
Tais			
Tainá			
João			
Helena			

Fonte: Autora

No Quadro 12 é possível observar a resolução correta para a terceira situação apresentada na formação:

Quadro 12: Resolução da situação problema de Permutação

Situação de Permutação	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e um porta-retrato). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?	Resolução: Bola- Troféu- Porta retrato Bola- Porta retrato- Troféu Troféu- Bola- Porta retrato Troféu- Porta retrato- Bola Porta retrato- Bola- Troféu Porta retrato- Troféu- Bola (Totalizando de 6 possibilidades)
------------------------	---	---

Fonte: Autora

A dupla Clécia e Amélia conseguiram entender a situação de Permutação. Porém Amélia em sua listagem apresentou apenas 4 possibilidades, na qual por não esgotar as possibilidades, acabou apresentando a resposta final errada. Já Clécia, sem dificuldades, também usando o método da listagem, conseguiu chegar nas 6 diferentes possibilidades.

A segunda dupla Tais e Tainá tentaram desenvolver essa situação por meio da multiplicação em que resultaram 9 possibilidades, mas a formadora pediu para tentarem por meio da listagem. Dessa forma Tais não conseguiu entender a questão,

nem resolver por meio da listagem, pois estava repetindo as possibilidades e também não encontrando as possibilidades que faltava. Tainá por outro lado conseguiu por meio da listagem descobrir todas as 6 possibilidades da questão.

Por fim, João identificou que se tratava de uma permutação, porém demonstrou dificuldades com a resolução, pois ao colocar a bola em uma posição não considerou que o mesmo objeto poderia ocupar outras posições nas demais possibilidades, e não encontrou a resposta. Helena por sua vez, utilizou a listagem para encontrar as possibilidades, mas não conseguiu encontrar, só após a explicação da formadora, conseguiu entender que todos os elementos deveriam ser usados em cada possibilidade, então conseguiu chegar nas 6 possibilidades.

Quadro 13: Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Permutação.

Professores	Acertos	Erros	Acerto parcial/ dificuldades
Amélia			
Clécia			
Tais			
Tainá			
João			
Helena			

Fonte: Autora

No Quadro 14 é possível observar a resolução correta para a última situação apresentada na formação:

Quadro 14: Resolução da situação problema de Produto de Medidas.

Situação de Produto de Medidas	Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (caju, laranja, morango e uva), os quais podem ser servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de cada sabor em um tamanho diferente de copo?	Resolução: Caju- Copo pequeno Caju- Copo médio Caju- Copo grande Laranja- Copo pequeno Laranja- Copo médio Laranja- Copo grande Morango- Copo pequeno Morango- Copo médio Morango- Copo grande Uva- Copo pequeno Uva- Copo Médio Uva- Copo Grande. (Totalizando 12 possibilidades)
--------------------------------	--	---

Fonte: Autora

Amélia e Clécia conseguiram concluir a questão com êxito, ambas utilizando a listagem como meio de representação das possibilidades. Clécia ainda explica que teve duas informações importantes que ajudaram ela a conseguir resolver a questão, foi a descrição dos três tipos de copos e os quatro tipos de fruta, na qual facilitou a compreensão para o enunciado.

A segunda dupla resolveu usar métodos diferentes. Tais conseguiu resolver a questão através da multiplicação, e Tainá teve um pouco de dificuldade inicialmente, mas com a releitura do problema conseguiu listar as 12 possibilidades.

A terceira dupla, conseguiram resolver esse problema, Helena usou novamente a multiplicação de  $(3 \times 4)$  para resolver a questão, e conseguiu chegar ao resultado correto da questão. João começou a explicar a situação, na qual usou a lógica de três opções de tamanho para cada sabor de suco, chegando também na resposta correta.

Quadro 15: Esquemas de acertos e erros dos professores na resolução do problema de Produto de Medidas.

Professores	Acertos	Erros	Acerto parcial/dificuldades
Amélia			
Clécia			
Tais			
Tainá			
João			
Helena			

Fonte: Autora

Para a análise do Conhecimento Comum do Conteúdo (Ball, Thames e Phelps, 2008) nesse estudo, chamamos de conhecimento comum de Combinatória. Foi possível perceber que avaliando as resoluções das questões apresentadas durante a formação, na qual essas questões poderiam ser atribuídas aos alunos do 4º e 5º ano dos Ensino Fundamental, consideramos que os professores apresentaram esse conhecimento, mesmo que cada professor tenha demonstrado ter dificuldade em uma determinada situação, ou mais, mas que de forma geral, demonstraram um conhecimento inicial do conteúdo, e que durante a formação, foi ampliando cada vez mais. Isso porque, não tiveram dificuldades nos invariantes de escolha; apresentaram eventuais dificuldades com o invariante de ordem, mas, a principal questão foi com o esgotamento das possibilidades. Nesse caso, os professores conseguiam elencar muitas possibilidades, mas não conseguiam indicar todas.

O conhecimento comum de combinatória não é um conhecimento específico do professor, e nem um conhecimento voltado para o ensino, mas é necessário o professor ter esse conhecimento para identificar, resolver e utilizar as noções e resoluções da Combinatória.

Por isso Lima (2011) pontua que os pedagogos, que atuam em sala de aula, no ensino da Matemática nos anos iniciais, devem estar atentos aos seus limites, da formação inicial, e irem em busca de autoconhecimento, ou formações continuadas que atendam essas necessidades. Dessa forma é preciso ter consciência de que o conhecimento Matemático do professor respalda na aprendizagem dos seus alunos.

Nessa perspectiva identificamos também que a situação em que os professores mais acertaram foi a de produtos de medidas, considerados por todos na formação a mais fácil de desenvolver. Já as situações em que os professores mostraram mais dificuldade foi a de combinação e permutação, na qual apenas um professor acertou em cada situação sem haver a intervenção da formadora.

Consideramos ainda que o resultado apresentado, nas resoluções dos quatro problemas Combinatórios, não foi satisfatório, pois, entendemos que por esses profissionais já atuarem nos anos iniciais, no qual os documentos curriculares, como BNCC (Brasil, 2018) e o PCN (Brasil, 1997) já contempla a Combinatória em sua grade de ensino, indicando que os professores precisam ter um conhecimento comum para o ensino de Combinatória mais consolidado.

Em uma análise mais detalhada, voltada para o Conhecimento Especializado do Conteúdo (Ball, Thames e Phelps, 2008), observamos se os professores conheciam ou identificavam os invariantes das situações apresentadas na formação. Ainda no primeiro dia de formação, pudemos perceber se os professores compreendiam alguns invariantes, de escolhas de elementos, se partiam de um conjunto único, ou de mais de um conjunto, os elementos dos conjuntos, vão ser todos utilizados, ou não, ou se a ordem dos elementos vai gerar ou não novas possibilidades, de cada questão usando um protocolo de respostas (Figura 7). em que eles conseguiam marcar, a partir das questões apresentadas.

Nessa perspectiva, acreditamos que os professores devem demonstrar entendimento sobre os invariantes/características, de cada problema Combinatório, como Arranjo, Combinação, Permutação e Produto de medidas, a fim de posteriormente, no ensino do mesmo, seja discutido e refletido com seus alunos, assim como os significados, símbolos, e representações que estão presentes na Combinatória.

O primeiro problema discutido foi a situação de Arranjo, na qual possui os seguintes invariantes: A escolha de elementos parte de um único conjunto, só alguns elementos do conjunto são utilizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Dessa forma, após a resolução dos problemas, perguntamos aos professores o que eles identificaram na questão acerca dos invariantes, e a partir disso podemos perceber inicialmente o conhecimento especializado de Combinatória de cada dupla de professores.

A dupla da Escola 1 perceberam que a escolha de elementos partiu de um único conjunto, e que a ordem dos elementos gera novas possibilidades, porém as professoras discordaram sobre os elementos da questão seriam ou não todos utilizados. Amélia considerou que pela escrita de todas as possibilidades, nomeando todos os elementos de escolha, que todos os elementos são utilizados. Em contrapartida, Clécia entendeu que para desenvolver uma possibilidade, não era necessário a escolha de todos os elementos, sendo então a perspectiva correta sobre a situação de Arranjo.

A dupla da escola 2, Tais e Tainá, e a dupla da escola 3, João e Helena, tiveram a mesma perspectiva que Clécia sobre os invariantes da situação de Arranjo, ambas responderam que a escolha de elementos parte de um conjunto único, alguns elementos serão utilizados e que a ordem gera novas possibilidades. Percebendo corretamente os invariantes presentes na situação de Arranjo.

Aqui percebemos que todos os professores demonstram ter conhecimento sobre o problema 1 de arranjo, na qual apenas um invariante é confundido por uma professora. Sua confusão é compreensível, pois os elementos aparecem nas

possibilidades, vistas de forma geral, porém o que era questionado, estava relacionado se para a construção de uma possibilidade, todos os elementos são utilizados, ou só alguns deles, e após uma explicação da formadora, esse ponto ficou esclarecido pela professora Amélia.

A situação de Combinação, foi nosso segundo problema discutido, na qual seus invariantes, de acordo com o protocolo apresentado são: as escolhas dos elementos são de um único conjunto, alguns elementos desse conjunto são utilizados e a ordem dos elementos não geram novas possibilidades.

Sendo assim, Amélia e Clécia, elas têm as mesmas perspectivas e relatam que nesse problema a escolha dos elementos são de dois ou mais conjuntos, que os elementos alguns são utilizados e que a ordem vai gerar novas possibilidades. Para essa dupla precisamos esclarecer novamente que a questão de escolha de elementos, é para formar uma possibilidade, na qual partem de um único conjunto.

A dupla Tais e Tainá, tiveram respostas semelhantes em dizer que no problema de Combinação a escolhas de elementos partem de um único conjunto, todos os elementos são utilizados e que a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Durante a formação foi possível destacar que a situação de Combinação foi considerada a mais difícil, entre os participantes, uma vez que, diante das respostas das duas duplas anteriores, percebemos que não conseguem compreender o cuidado com a repetição das possibilidades, visto que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Dessa forma, a formadora achou necessário, além da explicação sobre essa situação, mostrar novamente os invariantes no segundo dia de formação.

Por outro lado, a dupla João e Helena apresentaram todos os invariantes corretos para a situação de Combinação, e não comentaram sobre essa característica.

No caso da discussão dos invariantes do problema de Permutação pontuamos que os invariantes dessa situação são: Os elementos partem de um único conjunto, todos os elementos são utilizados e a ordem dos elementos gera nova possibilidade.

Dessa forma, a dupla Amélia e Clécia e a dupla João e Helena conseguiram pontuar acertadamente os invariantes que perceberam a situação de Permutação.

Já a dupla da escola 2 Tais e Tainá, apenas Tais conseguiu acertar todos os invariantes. No entanto, Tainá comenta que os elementos são escolhidos de dois ou mais conjuntos, mostrando que ainda não compreendeu que os elementos da questão 3 são todos dentro do conjunto de objetos, pois a mesma compreende que se configuram em diferentes objetos, com diferentes propriedades. Percebe-se que a própria discussão dos invariantes nos problemas anteriores já dá mais base para a construção do conhecimento e para a identificação dos invariantes nesta situação.

No que diz respeito à situação de Produto de Medidas, na qual seus invariantes são: Escolha de elementos de dois ou mais conjuntos, os elementos dos conjuntos são alguns utilizados e a ordem dos elementos não geram novas possibilidades.

Amélia e Clecia (dupla 1) e Tainá e Tais (dupla 2), novamente relatam as respostas iguais em que as professoras concordam em dizer que nessa situação, os elementos são escolhidos de dois ou mais conjuntos, que todos os elementos são utilizados e que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Percebemos que esse ponto de que todos os elementos são utilizados, se iguala a mesma perspectiva em que as professoras enxergam que por escreverem todos os elementos em possibilidades diferentes, as mesmas enxergam que todos esses elementos são utilizados.

Todavia os professores Helena e João conseguem perceber os invariantes de produtos de medidas corretamente.

Na investigação sobre o conhecimento dos professores a certa dos invariantes da Combinação, mesmo observando alguns enganos e erros em algum invariante, não podemos concluir que tais professores não possuem um conhecimento especializado, pois estamos descrevendo a perspectiva inicial de cada professor sobre tais características, mesmo que acreditamos que tais professores deveriam compreender as particularidades do conteúdo, pois estão de frente a sala de aula em que seus alunos se deparam com a Combinatória.

Isso porque, de acordo com, Borba (2016), para avaliar o desenvolvimento dos alunos é necessário que o docente tenha o conhecimento de Combinatória, ou seja, compreender cada situação combinatória: arranjo, combinação, permutação e produto de medidas e, especialmente uma percepção dos invariantes que assemelham e distinguem cada uma dessas situações.

Também entendemos que para compor um conhecimento mais especializado é necessário que o professor domine também o uso e identificações das representações, encontrar exemplos para o esclarecimento da Combinatória, conseguir diversificar o seu conhecimento e apresentar novas tendências (Ball, Thames e Phelps, 2008).

Por isso que no segundo dia de formação, achamos necessário levar para os professores novas abordagens sobre os invariantes e representações simbólicas, também optamos em trabalhar com protocolos de alunos, na qual aviamos se as respostas dos alunos estavam corretas e quais meios de representações foram utilizadas pelos estudantes. Dessa forma durante a análise desses protocolos, discutimos sobre os invariantes presentes, sendo necessário os participantes responderem os problemas apresentados. Por fim, pedimos para todos os professores pensarem em ideias para o ensino de Combinatória.

Já no terceiro encontro retomamos mais uma vez as discussões sobre as situações e invariantes de Combinatória, além de apresentar e discutir ideias para o ensino desses professores, expandindo o repertório desses professores fosse ampliado, a fim dos mesmos planejarem, e colocarem em prática uma aula de Combinatória em que analisaremos a seguir.

## **7.2 Observação de aula: descrições e análises**

A partir dessa sessão estaremos analisando cada aula individualmente, pontuando principalmente os Conhecimentos docentes mobilizados durante o ensino de Combinatória, na qual os Conhecimentos Docentes descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) estão, na prática, interligados de tal forma que não é possível separá-

los. Dessa forma, pontuamos que nem todos os conhecimentos docentes apareceram diante o recorte de cada aula observada, porém poderá ser apresentada durante a discussão com as perspectivas dos professores na entrevista realizada. Também nesse momento usaremos as falas dos professores da entrevista, para justificar ou compreender ainda mais as ações tomadas pelos docentes.

Para uma compreensão mais clara dos conhecimentos, deixamos marcado usando a colorimetria, os momentos em que identificamos algum determinado conhecimento, que seguimos a especificação abaixo:

- Conhecimento comum do conteúdo está sendo marcado de VERDE
- conhecimento especializado do conteúdo está sendo marcado de AMARELO
- conhecimento do conteúdo no horizonte está sendo marcado de ROXO
- conhecimento do conteúdo e ensino está sendo marcado de AZUL
- conhecimento do conteúdo e aluno está sendo marcado de ROSA
- conhecimento do conteúdo e currículo está sendo marcado de LARANJA

Sinalizamos novamente que conseguimos observar a aula de 5 professores, pois a participante Clécia, por conta da alta demanda da escola, não conseguiu disponibilizar um dia para desenvolver essa observação. Também é necessário pontuar que chegamos a observar a aula da professora Amélia, porém a professora não apresentou uma aula sobre Combinatória, mas produziu uma aula de revisão na temática dos números decimais, em que na sua aula esclareceu a leitura de tais números onde propôs uma atividade em que apresentava um número decimal e seus alunos poderiam fazer “Combinações”, escrever tais números, formando números decimais diferentes e então praticar a leitura dos números, evidenciando os inteiros, os décimos, centésimos e os milésimos. Sendo assim, não descrevemos e analisamos a aula da professora Amélia, por não estar dentro da temática pesquisada, e por não ter realizado a entrevista final.

Dessa forma a seguir, mostraremos as descrições das quatro aulas divididas em momentos para facilitar a discussão, em que será analisada cada aula em sua particularidade.

### 7.2.1 Descrição e análise

Nessa sessão analisaremos as aulas desenvolvidas pelos 4 participantes de forma individualizada, de início apresentamos as aulas dos professores João e Tainá, ambos professores do 5° ano, e finalizar com as aulas das professoras Helena e Taís, que atuam no 4° ano.

#### **Aula do professor João turma do 5° Ano**

A seguir a aula do professor João que ocorreu no final do ano de 2023, será descrita dentro dos quadros 17 ao 23, e será destacado em cores os Conhecimentos Docentes identificado pela autora, e após o quadro será discutido o que foi analisando diante a descrição feita.

#### Quadro 16: Momento 1: Organização

Quando a observadora chegou na sala, estava no período do lanche e percebeu que o professor já tinha escrito no quadro as estações (relacionando a dinâmica que ele havia planejado) e grupos. Ao término do intervalo, o professor iniciou a aula apresentando a observadora para a turma, e pediu para que os alunos se separassem em quatro grupos de 6 pessoas, pegar seus materiais, como caderno, caneta e lápis e copiar o cabeçalho.

Dessa forma, começou a explicar a dinâmica da sala: “Então vocês vão estar divididos em grupos e vamos fazer uma rotação por estações, ou seja, cada grupo vai ter 7 minutos para resolver a atividade que vocês receberão, certo? Então quem pegar a atividade rosa (estação 1), vai ter que responder utilizando desenhos, da forma que vocês acharem que deve, a estação 2 vocês vão responder utilizando o cálculo que você acha que é, da forma que você entender, na estação 3 que é esse verdinho vocês vão utilizar as imagens, para resolver, e no quarto vocês vão

escrever nos espaços para ver quanto ficaria. Quando você abrir o papelzinho vai entender como vai funciona, certo?, e toda a resposta vocês precisam anotar no caderno, ok?”

Depois da explicação, o professor começou a distribuir as questões de acordo com as estações pré-determinadas, e deu 7 minutos para os alunos resolverem.

Fonte: Autora

Nesse primeiro momento, em que o professor organiza sua dinâmica em sala, fica evidente que optar pela organização em estações é uma estratégia de didática, em que os alunos experienciam em grupo a resolução das situações, utilizando diferentes meios para a resolução, como representações e imagens, em diferentes estações, evidenciando o conhecimento de combinatória e ensino principalmente quando oportuniza o uso de diferentes meios de resolução, na qual o professor vem esclarecer essa dinâmica em sua fala:

Eu sabia o que eu conseguiria atingir, mas como eu não tenho o conhecimento prévio da turma, eu achei melhor para que eles conseguissem resolver de forma diferente, e outra coisa, a rotação, não posso deixar eles livres, para resolver de todas as formas, então cada estação eu precisava colocar qual missão eles tinham, então, eu coloquei para que cada estação eles resolvessem de forma diferente. Uma estação resolvia pela imagem, no outro ele utilizava o cálculo, no outro o desenho, foi por conta de não ter esse feedback deles sobre essa questão de Combinatória, mas também com a metodologia das estações. (Professor João).

Borba (2016) também afirma que é importante que o professor valorize as distintas representações que seus estudantes poderão utilizar para resolver os problemas, na qual o professor opta por determinar quais representações serão usadas, a BNCC (2018) já indica para o 5º ano a resolução por meio de diagramas de árvore ou por tabelas, que o professor não incluiu em suas representações.

Dessa forma, utilizar o método de estações é interessante, mas é importante não esquecer de oportunizar momentos para que os alunos apresentem seus próprios meios de resolverem os problemas, sem o comando direto do professor. Ainda quando ele afirma que não tinha o conhecimento prévio da turma, é em relação à

Combinatória, pois o professor compartilhou que ainda não tinha dado uma aula dessa temática para sua turma, sendo mais uma oportunidade de observar os meios que os alunos resolvem os problemas.

Por isso que a partir da dinâmica conseguimos identificar o Conhecimento de Combinatória e Ensino, na qual percebemos a relação da atividade proposta, com o uso de desenhos, cálculos, listagem e o uso da imagem, que pode facilitar a aprendizagem do aluno, seguindo diferentes estratégias de resolução. Em que Ball, Thames e Phelps (2008), relatam que para desenvolver o conhecimento do conteúdo e ensino, todas as decisões do professor precisa haver uma integração entre a Matemática que está sendo apresentada e os objetivos de ensino.

Os estudos de Montenegro (2018) e Vega (2014) vem apresentar as representações nas resoluções de situações Combinatórias nos Anos Iniciais, podendo auxiliar na compreensão do conteúdo, fortalecendo a visualização das possibilidades.

#### Quadro 17: Momento 2: os alunos respondendo às questões

Logo uma aluna perguntou se escolheria o modo de resolver, e o professor teve que explicar novamente dizendo: “se você pegou a estação 2 vai ter que ser pelo cálculo”.

O professor revelou que se chegar aos 7 minutos irá passar as questões, mesmo se os alunos não tiverem concluído. Depois de um tempo o professor falou para colocarem no caderno o que conseguiram.

Um aluno questionou: “Que desenho tenho que fazer para resolver?”, então o professor comentou “O desenho das possibilidades que vocês podem encontrar, e vocês vão chegar a resposta”.

Diante de um questionamento de um aluno (na qual não conseguimos identificar, pois o aluno falou muito baixo) o professor reforçou dizendo: “Isso daí é

só lembrando, que eles vão colocar condições diferentes, não é uma possibilidade só”.

Enquanto o tempo foi chegando ao fim, o professor foi alertando os minutos que faltava.

Alguns alunos levantaram a questão do uso da raiz quadrada para resolver a situação, e o professor ao escutar o assunto alertou que não tinha nenhuma situação que se resolveria com raiz quadrada, e que os alunos não tinham estudado sobre esse conteúdo.

Ao dar o tempo final, o professor trocou as questões entre as estações, e deu mais sete minutos para resolverem os problemas. Desse modo, os alunos começaram a resolver a segunda rodada.

O professor percebeu que um grupo de alunos tinham respondido no envelope que tinha disponibilizado, e alertou que deveriam responder tudo no caderno.

Os alunos dentro dos seus grupos tinham diversas percepções sobre a situação problema em que estavam, em que alguns alegam que deveria fazer de uma forma e outros de outra. Porém fazem uma votação para aceitar o modo que a maioria concorda.

Também é perceptível que nos grupos tem aqueles que deixam a minoria resolver todas as situações. Ainda conseguimos perceber que havia um grupo que se dividiu e que cada pessoa poderia resolver uma questão.

Novamente o professor alertou o tempo que falta para poder trocar as questões das estações. E assim, trocou novamente as questões. Os alunos começaram a discutir e responder os problemas.

O professor informou a observadora, que o tempo estipulado é para todos terminarem no mesmo instante, para funcionar bem a dinâmica, pois tem alunos

que são mais rápido e outros mais devagar, então é necessário dar um tempo igual para todos para as estações andarem de forma igual.

Um dos alunos chamou o professor para alertar dizendo que no envelope só tinha 4 imagens e na questão falava 5, o professor ficou preocupado e pediu para todos os alunos procurarem a outra imagem que estava no envelope.

Ao encontrar as imagens, o professor alertou que faltavam apenas 2 minutos para trocar as questões. O professor comentou que queria fazer algo prático futuramente, usando a temática de Combinatória, falou que gosta da questão de possibilidades de senhas.

O professor percebeu que tinha um grupo na qual uma única pessoa estava resolvendo e chamou atenção dizendo: “Lembra que vocês são um grupo, e que não é para uma única pessoa resolver não.” E pediu a todos para trocarem os envelopes, e deu o tempo para todos responderem.

Fonte: Autora

O professor João indicou aos alunos que ficaram na estação 2, a resolverem o problema por meio do cálculo, porém percebemos que essa aula foi o primeiro contato com a turma com Combinatória, seria mais adequado deixar os estudantes utilizem estratégias próprias, visto que Montenegro (2018) vem abranger em sua tese, as representações intermediárias, para chegar na expressão numérica, pois inicialmente o cálculo não se mostra não claro para os estudantes fazerem o uso, então é necessária uma intervenção específica.

Com base nesse segundo momento, conseguimos perceber a interação do professor com seus alunos, enquanto os mesmos estavam resolvendo as questões. No aparecimento de dúvidas e limitações, mas ao conversar com a observadora, identificamos a apresentação do conhecimento do conteúdo e estudante, em que ele antecipa em sua organização, a estipulação de tempo, por conhecer seus alunos a ponto de saber que existe alunos que são mais rápidos em suas resoluções, e outros que demoram mais a resolver.

Ainda na percepção do conhecimento de Combinatória e estudantes, o professor reconhece seus alunos que não fazem questão de responder, e responsabilizam apenas um integrante do grupo, para fazer todas as questões.

Percebemos pouca interferência do professor nesse momento, visto que o mesmo planejou na etapa seguinte uma socialização.

Por fim, acreditamos que ao pensar futuramente em novas propostas para seus alunos, em desenvolver outra aula desenvolvendo uma atividade prática, percebemos que há uma mobilização do Conhecimento de Combinatória no Horizonte, tendo consciência na evolução da Combinatória, em vista ao que se deve ser vivenciado no 5º Ano, apesar de não ter desenvolvido nessa aula as indicações da BNCC para o 5º ano.

Quadro 18: Momento 3: o professor resolve e explica a questão da primeira estação.

Ao final do tempo, o professor recolheu todos os envelopes, e perguntou qual das estações os alunos acharam mais difícil, e os alunos colocaram a quarta e a terceira estação. Logo após, o professor fez uma tabela relacionando os grupos e as estações para anotar o resultado que cada grupo chegou em cada estação.

Então o professor leu o primeiro problema da estação 1: “Na cantina do colégio há 4 sabores de sucos, caju, morango, laranja e uva, e podem ser servidos em copos de três tamanhos, pequeno, médio e grande. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um suco de cada sabor, em um tamanho diferente de copo?” (devendo ser respondido por desenho).

Após a leitura, o professor perguntou ao grupo 1 como eles fizeram o cálculo, e eles responderam: “Para cada suco tem três tamanhos, então o resultado foi três maneiras”.

Já o grupo 2 responderam: “No pequeno um sabor, no médio dois sabores e no terceiro, três sabores, e o resultado ficou seis maneiras”

O professor questionou ao grupo 3 o motivo de terem colocado uma única possibilidade, então o grupo 3 respondeu: “não conseguimos terminar de fazer e colocamos uma possibilidade, mas achamos que vai um sabor em um copo para escolher”

O grupo 4 falou: “Como tem quatro sabores e três copos diferentes, fizemos  $4 \times 3$  que deu 12”.

Dessa maneira, o professor foi resolver a questão no quadro por meio de desenhos, das frutas e o desenho dos copos em diferentes tamanhos. E falou: “Quando chegar na cantina eu posso ter dúvida nos tamanhos de copos, não sei se quero o médio, e também nos sabores, então vou contar as possibilidades que eu tenho”

E perguntou aos alunos quantas frutas eles poderiam escolher, e todos responderam “quatro”, então o professor falou: “uma de quatro num é?” e depois perguntou quantos tamanhos de copos tinha, e todos responderam “três” foi escrevendo as possibilidades uma a uma no quadro, e foi relatando “Eu posso pegar esse caju e tomar no tamanho pequeno, no tamanho médio, e no tamanho grande, certo? por que eu posso dizer assim, eu quero o de caju mas eu tenho três opções no médio, no pequeno ou no grande, mas se eu escolher o caju no médio é só uma possibilidade que eu tenho”

Depois ele retomou para a fruta laranja e disse: “No suco de laranja também tenho três opções, pequeno, médio e grande” e perguntou: “Já são quantas opções?”, os alunos responderam: “seis”.

E continuou com cada fruta, com o morango contabilizando mais três opções, perguntando aos alunos quantas possibilidades tinha até então, e os alunos responderam: “nove”, e finalizou escrevendo mais três possibilidades com a uva, totalizando junto com os alunos 12 possibilidades. E comentou: “o que vai dar o número de possibilidades, vai depender do que eu tenho a ser oferecido, se eu escolher uma possibilidade como caju e copo médio, é só uma possibilidade, e se eu quiser morango do médio? eu também podia, pois tenho 12 possibilidades ao

total, entenderam? e a lógica que as meninas tiveram ali de multiplicar a quantidade de fruta vezes a quantidade de tamanho de copos deu a minha possibilidade”.

E ao final perguntou aos alunos se a ordem nessa questão importava, os alunos responderam que não, e o mesmo se complicou sem saber se importava ou não, e retomou dizendo “se eu pego laranja e o grande, é a mesma coisa se eu pegar o grande e laranja?” os alunos responderam que não. Sem perceber que os alunos responderam de forma errônea o professor se voltou a observadora perguntado se estava certo, a questão que a ordem nesse caso não importa, e ela concordou. O professor ainda marcou com um círculo a resposta correta na tabela preenchida.

Fonte: Autora

Antes da explicação da primeira questão de Combinatória, o professor socializa as respostas e anota, por meio de uma tabela, ao fazer isso, entendemos que foi uma estratégia para socialização e comparação dos resultados, na qual os alunos poderiam perceber os caminhos que seus colegas chegaram, e até mesmo refletir sobre seu próprio resultado. Mostrando então um conhecimento de Combinatória e ensino. Além de contemplar o que a BNCC (2018) propõe o uso de tabelas no 5º ano, apresentando assim, um conhecimento de Currículo de forma implícita.

Também João, após a leitura do problema, oportunizou aos grupos a debaterem como resolveram a questão da estação 1, possibilitando aos demais alunos refletirem, sobre sua própria resolução, ou entenderem que uma situação pode ser feita de diversas maneiras.

Na resolução do quadro, o professor mobiliza o conhecimento comum de Combinatória, mas ao discutir sobre suas possibilidades, fazendo perguntas às turmas, percebemos uma estratégia de ensino na qual os alunos vão ajudando coletivamente na construção da resposta. Então os alunos sempre são incentivados a participar da resolução do próprio professor para a turma.

Notamos que o primeiro problema discutido é uma situação de Produto de Medidas, em que na formação o professor mostrou ter dificuldades na resolução

desse problema, mas que durante o ensino, conseguiu resolver esse problema, superando qualquer dificuldade.

Também identificamos que as 4 situações que o professor levou a sua turma são baseadas na que a pesquisadora levou durante a formação, então, durante a entrevista, perguntamos como foi elaborado as situações, e a resposta apresentada foi:

Eu utilizei as perguntas que tu tinha feito, na verdade eu peguei e trouxe para a realidade deles, eu trouxe que teria a festa do 5º ano, que eu tinha em casa uma estante e eu queria mudar, então eu quis trazer para algo que eles sentissem pertencente daquela questão, que não fosse algo aleatório, pois não adianta eu dizer “Pedrinho tem 3 objetos e eles querem testar lugares diferentes” eles não sabem nem que é Pedrinho, é diferente quando eu boto Tio João, tem um notebook, um celular e uma bola e ele que colocar, então eles vão ajudar ao tio João a resolver as coisas da casa dele. (Professor João)

João foi o único professor que aproveitou as questões da formação para sua aula, porém não foi algo reprimido, mas gostaríamos de perceber a formulação de novas questões sobre Combinatória, desenvolvidas pelo professor. Apesar que consideramos positivo formular perguntas levando em conta a realidade vivida pelos alunos.

Depois, ao pontuar as possibilidades, em que os alunos acompanhavam cada possibilidade, em diálogo com o professor percebemos o conhecimento especializado em que o professor pontua que depende do que vai ser oferecido, na situação, e esclarece o que pode ser possibilidade na situação de produtos de medidas. Ainda evidencia a lógica que as alunas fizeram na multiplicação, percebendo que o cálculo serviu para responder essa situação apontada, na qual em uma situação de produto de medidas, multiplicar a quantidade de elementos de cada grupo de escolha vai resultar no número total de possibilidades.

No momento final, o professor decidiu perguntar sobre o invariante de ordem aos alunos, como uma possibilidade de ensino, por isso está marcado como conhecimento de Combinatória e ensino. No entanto, o mesmo não conseguiu entender o que estava propondo, por isso houve uma confusão na explicação, dando um momento para refletir. Mas João tentou desenvolver uma saída, em que mostrava

que a possibilidade de suco de laranja no copo grande, ao inverter, continua sendo a mesma possibilidade, porém não percebeu que os alunos relataram que são possibilidades diferentes, deixando esse erro passar.

Com base nesse contexto não consideramos uma boa estratégia de ensino, pois os alunos não estavam entendendo, visto que era o primeiro contato da temática na sala de aula, e que o professor poderia evidenciar o invariante mais adiante, em um outro momento que os alunos conseguissem reconhecer as semelhanças e as diferenças das situações Combinatórias, e o professor estivesse mais preparado para essa situação.

Assim acreditamos que o professor poderia pontuar a ordem apenas nas situações em que a ordem é necessária, seja ela nos casos de Combinação, Arranjo ou Permutação. Já em Produtos de Medidas a ordem não é um invariante que causa dívidas.

#### Quadro 19: Momento 4: professor explicando e resolvendo a questão da estação 2

Então passou para a segunda questão da estação 2, e leu: “Na eleição de representante e vice representante do 5° ano, há 4 alunos concorrendo ao cargo, que foi o caso de que aconteceu aqui, José, Heloisa, Isabele e Rafaela de quantas maneiras diferentes pode ser escolhido um representante e um vice?” (responder usando o cálculo)

“Quais foram a resposta de vocês?” O professor perguntou, o primeiro grupo respondeu 4, já o segundo grupo respondeu 5, o terceiro grupo respondeu 2, e o quarto grupo respondeu 8.

Então ele perguntou quantos cargos tinha, e os alunos responderam 2, e depois perguntou quantas pessoas tinham para concorrer aos cargos, e os alunos responderam 4. O professor pediu para apresentar as possibilidades no quadro, por meio de diagrama (nome dado por ele) e foi comentando: “José pode ser representante e quem pode ser o vice dele?” e os alunos falaram: “Heloisa, Rafaela

e Isabela”, assim o professor retomou “então por enquanto tem quantas possibilidades?” os alunos responderam: “três”. E o professor continuou “Depois a gente tem Heloisa, Heloisa pode ser representante e ter quem como vice quem?” E os alunos responderam “José, Rafaela e Isabela”. Então o professor falou: “Vocês tem certeza que José vai poder aparecer aqui de novo?” e os alunos falaram que não e outros falaram que sim, e ele confirmou que José agora está na posição de vice e antes ele estava na posição de representante, então é correto ele estar junto de Heloísa novamente. E perguntou aos alunos “Nessa situação a ordem importa?” e os alunos responderam que sim. Assim reforçou dizendo “José aqui aparece como representante é uma possibilidade e depois ele apareceu como vice, já é outra possibilidade, então a ordem vai importar”

Então um aluno perguntou: “ele vai tá nos dois cargos?” e o professor respondeu: “não to dizendo que ele vai assumir os dois cargos mas aqui (apontando para o quadro) ele está como representante e as meninas como vice, já aqui, ele está como representante de Heloísa, são possibilidades diferentes.”

E continuou fazendo o diagrama com Rafaela como Representante e os três que sobram como vice, e por fim Isabela como Representante e os demais como vice, totalizando 12 possibilidades, e ninguém conseguiu chegar na resposta.

Fonte: Autora

Novamente percebemos que o professor ao anotar a resolução da questão da situação da estação 2 (Arranjo), o mesmo vai perguntando aos estudantes, para que eles acompanhem na resolução.

Ao questionar os alunos sobre o elemento José, se vai estar junto com outro representante, o professor está mostrando ao aluno que no caso de José vai ocupar duas posições diferentes, vice e no outro representante, em que o professor está chamando atenção para a ordem, dos elementos, para formar uma possibilidade, mostrando então um invariante da situação de arranjo. Entendemos ainda que nessa situação mostra-se que a fala do estudante está relacionado ao pensamento concreto,

na qual só uma possibilidade acontece no contexto real, e a Combinatória está dentro do pensamento referente ao hipotético-dedutivo, na qual Montenegro (2018) mostra que é uma estratégia cognitiva que tenta determinar a realidade no cenário das possibilidades.

Ainda João vai resolvendo por meio de uma árvore de possibilidades/diagrama com os nomes dos representantes e vices, mostrando outro meio de resolução da Combinatória, uma representação que não é intuitiva nos alunos, sendo então necessário que o professor ensine. Mostrando além do conhecimento comum, o conhecimento especializado de Combinatória e um Conhecimento de Currículo, já que o diagrama é indicado como uma representação de resolução na BNCC (2018) para o 5º Ano.

Quadro 20: Momento 5: professor responde e explicar a situação da estação 3

A professora passou para a questão seguinte da estação 3: “Na festa ‘glowparty’, terá um espaço para ‘drinks’, nas opções temos as seguintes frutas, acerola, caju, laranja, graviola e maracujá, os sucos eles podem ser misturas de duas frutas, de quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?” (Esse era necessário usar a imagem que estava dentro do envelope)

Logo perguntou a resposta que os alunos chegaram, grupo 1 respondeu 8, grupo 2 respondeu 10, o grupo 3 respondeu 2, o grupo 4 respondeu 12.

E perguntou: “como vocês fizeram?” Um aluno disse que estava juntando na imagem duas e duas frutas.

Desse jeito, começou a escrever as possibilidades indicando a laranja juntando com caju, graviola, acerola e maracujá e foi para o caju, e anotou caju e laranja e perguntou: “Peguei duas frutas laranja e caju, se eu pegar e fazer um suco, bati para o suco laranja e caju, caju e depois laranja, é a mesma coisa?”

Os alunos responderam sim, em seguida o professor exclui as possibilidades repetidas do caju no quadro. Assim o professor seguiu escrevendo as

possibilidades, juntando as demais frutas, e apagando as possibilidades repetidas, e no total deu 10 possibilidades. E um grupo comemorou pois acertou a questão.

O professor perguntou se nessa questão a ordem importa, e os alunos responderam sim, então ele repetiu a explicação: “se pegar laranja e acerola, e misturar, vai dar o mesmo suco, se pegar acerola e laranja, então a ordem não vai importar.”

Fonte: Autora

Percebemos que o professor segue a mesma estratégia de chamar a atenção dos alunos, perguntando a eles suas resoluções. Mantendo os alunos sempre atentos no que o professor está fazendo.

Ao resolver o problema da estação 3, de Combinação, o professor vai questionando aos alunos sobre as possibilidades das frutas, ao inverter de posição continua sendo o mesmo suco. Nesse momento o professor está chamando a atenção sobre o invariante da situação de Combinação, que a ordem dos elementos não vai importar, sendo assim, os alunos devem ficar atentos para não repetir, caracterizando um conhecimento específico de Combinatória atrelada com o Conhecimento de Combinatória e ensino.

Mas percebam que quando ele vai perguntar sobre a ordem, posteriormente, os alunos falam que vai importar, mostrando o não entendimento sobre essa questão, pois mesmo que tenham entendido a explicação da mistura das frutas, eles ainda não estão familiarizados com essas situações para identificar os invariantes e definir se a ordem vai importar ou não nessa questão. Reforçamos novamente, que o professor poderia desenvolver melhor sobre os invariantes em momentos posteriores a essa aula inicial de Combinatória, até mesmo em uma atividade de construção de problemas, que a BNCC (2018) atribui essa atividade ao 5º Ano do Fundamental.

Quadro 21: Momento 6: explicação e resolução da quarta questão da estação 4

Para última questão o professor leu: “Na prateleira da casa do tio João tinha três objetos: uma bola, um livro e um porta retrato de quantas maneiras diferentes ele poderia colocar os três objetos lado a lado na prateleira” (resolver usando os espaços/traços que tinha na folha).

Ao final da leitura ele perguntou qual seria o resultado, grupo 1 respondeu 9 possibilidades, grupo 2 respondeu 9, grupo 3 respondeu 4 e o grupo 4 respondeu 9 também.

E foi resolver no quadro colocando 3 espaços e perguntou: “no primeiro espaço posso colocar o que?”

Os alunos responderam: porta retrato, então o professor falou: mas também posso colocar a bola e o livro, então aqui no primeiro espaço eu tenho três opções. Perguntou para o segundo espaço: “ali no segundo eu posso colocar quantas opções?” e os alunos responderam: duas. “E sobra quanto para o último espaço?” ele perguntou, e os alunos responderam: 1. E ele complementa “eu não tenho como colocar um livro ou uma bola, aqui denovo, então de início eu tenho três opções para cá, mas se escolho um para ficar aqui, no outro só tenho duas opções, e para o fim só sobra um objeto. Então tenho quantas possibilidades?” e todos falaram: 6.

Por fim, perguntou qual era o mais difícil, depois que responderam, e todos falam a questão 4.

Fonte: Autora

Continuando com sua estratégia de ensino, o professor resolve a última situação, sendo de Permutação, perguntando aos alunos a cada momento que o mesmo resolve a questão.

Para essa situação o professor já define três espaços que neles devem ser colocados os elementos, e foi desenvolvendo uma lógica do princípio fundamental da contagem, em que a quantidade de cada elemento ia diminuindo a cada espaço

colocado e por fim gerando uma multiplicação. No caso ficou  $3 \times 2 \times 1$ , gerando 6 possibilidades. Novamente o professor mostrou outra forma de resolução para seus alunos. Essa representação se chama Princípio Fundamental da Contagem, mostra um conhecimento especializado do conteúdo.

Por fim, o professor procurou entender pela perspectiva dos alunos a questão mais difícil para eles, e assim vai desenvolvendo uma noção de que seus alunos acham essa situação a mais difícil, promovendo um conhecimento de Combinatória e aluno.

#### Quadro 22: Momento 7: fechamento

Por fim, o professor entrega papéis para cada aluno, igual ao que a pesquisadora entregou para a formação, contendo os protocolos de problemas com invariantes para serem marcados em cada problema, e foi perguntando aos alunos e marcando junto com eles.

Sobre a escolha dos elementos: era de um conjunto único ou de dois ou mais conjuntos distintos. Também os elementos do(s) conjunto(s) são utilizados ou alguns são utilizados. E a ordem dos elementos: se gera novas possibilidades ou não gera novas possibilidades.

Nesse momento, os alunos começaram a se confundir, com as palavras conjunto e elementos, e o professor também estava confuso em relação aos termos, e não conseguiram concluir pois o sinal para largar tinha tocado, interrompendo esse último momento.

Fonte: Autora

Por fim, o professor tenta novamente levar definições dos invariantes de cada situação Combinatória, replicando a estratégia da formação, em que a formadora distribui o protocolo para a marcação dos invariantes a partir da discussão com os professores. Porém, essa atividade não foi bem-sucedida nesse primeiro dia com os alunos, devemos compreender que aquele quadro foi construído para um estudo com

professores. Ainda pontuamos que os estudantes dos anos iniciais ainda estão se familiarizando com as características das situações, e a sistematização e o destaque dos invariantes podem acontecer de outras formas, fazendo os próprios estudantes entendam as semelhanças entre as situações ou suas divergências.

Assim, perguntamos ao professor João qual foi sua percepção sobre a aula:

Então, eu gostei do processo, na verdade eu só não gostei da má educação deles, (risos), mas assim eu gostei dessa experiência de fazer por rotação, eu nunca tinha trabalhado a matemática na rotação por estações, e eu gostei muito, eu acho que apesar dos pesares, eles ainda participaram, contribuíram bastante, eles queimaram os neurônios para poder resolver, então a expectativa foi alcançada. Acho que como foi algo do momento, pela minha parte como mediador, eu poderia ter me construído melhor, para promover essa aula com mais eficácia.

Contudo percebemos que o professor João reconheceu os pontos positivos de sua aula, e também os pontos a melhorar, e concluímos que é a partir da busca pessoal continuada, que os profissionais conseguem se aperfeiçoar na promoção de suas aulas.

### **Aula da professora Tainá 5° ano**

Em seguida apresentamos a descrição da aula dada pela professora Tainá, que realizou mesmo evidenciando suas inseguranças, organizadas em quadros do 23 ao 27, e seguindo o mesmo modelo de análise dos demais professores, está identificado por cores momentos identificados como Conhecimento Docente, e as discussões feita posteriormente.

Quadro 23: Momento 1: Organização e explicação da atividade.

Ao chegar na sala de aula a professora Tainá avisou aos alunos, que faria uma dinâmica diferente e começou a formar os grupos de alunos. Estavam presentes 11 alunos do 5° ano. Dessa maneira a professora foi chamando os alunos e separando em três trios e uma dupla, assim pediu aos alunos que colocassem os quatro grupos nas extremidades da sala.

Com o fim da organização da sala, Tainá falou para que os alunos pegassem os seguintes materiais: folha, caderno, caneta, lápis e borracha. Começou a falar que seria uma atividade que vale ponto, mas quem não conseguir, não teria problema, ou quem errar não iria diminuir nos pontos. E ainda falou que o desafio era para a aprendizagem, mas eles deveriam se esforçar.

Posteriormente a professora começou a explicar como seria a atividade: “Eu vou dar aqui algumas questões a vocês, como um rodízio, então vou dar a questão 1 a esse grupo, questão 2 a esse, questão 3 a esse, e questão 4 a esse. Quando esse resolver a 1 e esse resolver a 2, vai passando até que todos resolvam todas as quatro, vocês entenderam?”. Ainda a professora avisou que o grupo deveria escrever apenas em uma única folha, contendo as respostas e o nome do grupo. Também pontuou que todo o grupo deveria auxiliar nas respostas e que ela não daria a resposta para as questões, mas que iria ajudar eventualmente.

Fonte: Autora

Nesse primeiro momento, na qual a professora explica a dinâmica, percebemos uma semelhança com a proposta do professor João, mas vamos compreender que mesmo com propostas semelhantes, cada um desenvolve sua aula de formas diferentes.

A professora propõe um rodízio, na qual os alunos vão receber uma questão, e ao término da resolução, vai recebendo outras questões que estavam em outros grupos, até que todos os grupos de alunos respondam as 4 questões. Diferente do professor João, a professora não estabelece um método de resolução, deixando seus alunos abertos a escolherem suas formas de resolver os problemas.

Borba (2010) salienta a importância de aproveitar as estratégias espontaneamente apresentadas pelos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem, além de buscar diferentes representações durante esse processo.

Outro ponto importante a ser considerado, é que a professora Tainá teve algumas dificuldades em planejar e desenvolver suas questões, pedindo auxílio a

pesquisadora, que disponibilizou um acervo de ideias e questões que poderiam ser tomados como base, porém a professora escolheu quatro das situações e definiu essa atividade de rodízio. Sendo assim, percebemos que a professora não estava à vontade com a etapa de observação, mostrando muita insegurança com o planejamento, questionamos suas expectativas com a aula e a professora comentou que:

Bom, naquele dia eu estava com medo, mas de mim e não dos alunos, pois eu estava com medo de que eu não conseguisse, que eles ficassem perdidos, e eu não conseguisse passar justamente isso aí para que eles entendessem, é...eu ainda fico com medo na verdade, porque eu sou muito nova ainda nessa questão, principalmente na matemática. Só que quando você ver que um entendeu, o outro entende, você entende que você está no caminho, tá certo que a maioria ou alguns não entendeu, aí você melhora a linguagem, e melhora o argumento, mas que se alguém entendeu, o que você está pensando e foi no seu raciocínio foi produtivo. Eu achei que foi bom. (Professora Tainá)

Mesmo com as inseguranças, a professora Tainá desenvolveu sua aula, assim vamos entender o desenvolvimento da professora no ensino de Combinatória.

#### Quadro 24: Momento 2: Resolução dos alunos

Logo a professora distribui as questões para os grupos e deu tempo para eles responderem, às quatro questões eram:

(1) Ana e Bento são afilhados do tio Daniel. Como adoram animais, seu tio decidiu presentear cada um deles com animais diferentes. As opções eram: cão, gato, coelho, peixe e tartaruga. Com quais possíveis combinações diferentes o tio Daniel pode presentear cada sobrinho?

(2) Leandro tem 3 camisetas de cores diferentes (azul, branco, verde) e quer organizá-las lado a lado em sua gaveta, de quantas maneiras diferentes ele poderá organizar as suas camisetas na gaveta?

(3) Para fazer tapetes, mamãe usa sobras de retalhos de cores diferentes (Rosa, Laranja, Cinza, Amarelo, Verde e Vermelho) e tecidos diferentes (jeans e malha). Em cada um, ela coloca uma cor e um tipo de tecido. Quais são as

diferentes combinações possíveis, que mamãe poderá fazer ao usar uma cor e um tipo de tecido em cada tapete.

(4) Uma lanchonete de sanduíches, oferece os seguintes sabores: frango, atum, carne moída e queijo. Por um preço único, o cliente deve escolher uma combinação de sanduíche com dois sabores. Dessa forma, determine quais são as possibilidades total de um sanduíche com dois sabores diferentes.

Tainá, durante a distribuição das questões, pediu para que eles lessem com atenção várias vezes, pois a leitura facilitaria a compreensão do que se pede. Depois de um tempo, um trio avisou que havia finalizado a primeira questão, e a professora falou para que eles esperassem outro grupo terminar para trocar as questões.

Um grupo chamou a professora para mostrar sua resolução, na qual fizeram por meio de cálculos, a questão do tapete, em que perceberam que por meio de uma listagem, as seis cores poderiam ser combinadas com o jeans e mais seis cores poderiam ser combinadas com a malha, na qual o cálculo feito seria  $6 \times 2$ . Então a professora não indicou a resposta e disse que iam conferir de forma conjunta.

Outro grupo chamou a professora, e a mesma percebeu que cada integrante do grupo tinha uma resposta diferente, e explicou para os alunos que eles deveriam chegar em uma única resposta, e deveriam fazer de forma conjunta a questão, contendo uma resposta por grupo. Assim, Tainá alertou a todos os grupos a fazerem uma resposta por grupo.

Logo após, outro grupo de alunos chamou a professora para verificar o resultado da questão da organização das blusas na gaveta, em que os alunos responderam escrevendo: frontal, vertical, horizontal, lado a lado. A professora ficou surpresa com a criatividade dos alunos, e tentou explicar a questão: “Vamos imaginar como a gente pode organizar essas camisas no guarda roupa. A gente organiza como? A gente coloca no cabide, e a gente coloca a primeira, a segunda, a terceira e assim sucessivamente. Tem gente que gosta de botar todas pretas, mas

quando a gente coloca todas as pretas, a gente coloca uma, duas, três, num é isso? então é isso que eu quero que vocês façam”.

Os alunos ficaram sem entender, e a professora continuou a explicar: “não tem nada a ver com a posição do espaço não, tem a ver com a posição de ordem das roupas. Vamos lá ! Leandro tem três camisetas...”

O aluno falou: “então é primeiro a branca e depois outra cor.”

Professora: “é isso, ele vai colocar azul, branca e verde, se ele colocar azul, branco, e verde já é uma posição.”

Os alunos falam: “entendi, entendi”

Tainá: “Entendeu? olha tá vendo.”

Outros alunos foram terminando, e a professora falou: “Vocês terminando troca as questões”. E depois falou para os alunos, que estavam indo bem, que não ajudariam na resposta, mas sim na interpretação.

Alguns alunos estavam escrevendo nos cadernos e a professora indicou, que uma pessoa só anotasse as respostas colocando o número referente aquele que estava no papel. E deu mais tempo para que os alunos resolvessem as questões.

Um grupo estava com dúvidas perguntando se tinham a ver com porcentagem e a professora foi até eles, e indicou para que eles colocassem os ingredientes e escolhessem dois recheios e misturar para dar as possibilidades, e que a questão não tinha relação com porcentagem.

Aos que estavam terminando, tinham que esperar outro grupo terminar para trocar as questões. E um grupo quis verificar as questões com a professora, e os alunos falaram: “a gente pegou cada animal, juntou com cada pessoa, e somou as possibilidades, cão com Ana uma possibilidade, o gato com Ana duas

possibilidades, peixe com Ana três e depois que terminou, multipliquei o resultado por dois, pois tem duas pessoas, então deu dez”.

A professora falou: “ele quer levar animais para cada sobrinho e que não pode fazer de forma separada.”

Outro grupo pediu ajuda à professora sobre a questão dos sabores do lanche, e ela deu a dica de anotar os sabores e prestar atenção na mistura.

O grupo que estava resolvendo a questão dos animais, chamou novamente, e a professora percebeu que o peixe só estava em uma possibilidade, e explicou: “se o peixe tá em primeiro, ele vai para Ana, mas quando o peixe iria para o Bento?”

Então o aluno disse: “pode repetir tudo de novo?”

e a professora disse: “a gente quer ver todas as possibilidades, cada um dos sobrinhos tem a mesma quantidade de possibilidades.”

E aos que foram terminando, a professora ia trocando novamente as questões.

Outro grupo teve dúvida na questão dos sabores do lanche, e a professora falou: “você pega o frango e pode misturar com carne, e depois pode misturar com o que?” os alunos foram indicando os outros sabores.

Desse jeito a professora retomou e disse, depois pega a carne e cuidado para não repetir, pq frango e carne, carne e frango é a mesma coisa.

Depois de um tempo, alguns alunos foram terminando e tinham que esperar outros grupos para terminar e trocar as questões, pois cada um ia seguindo um ritmo diferente.

Um aluno perguntou sobre a questão dos sobrinhos, e novamente o grupo estava anotando os animais com as pessoas, de forma separada, não juntando

como um par. A professora então anotou uma possibilidade como exemplo para eles entenderem.

Um outro grupo perguntou sobre a questão da gaveta e a professora falou: “aqui a gente também tá vendo a posição, quando a posição é diferente é outra possibilidade, colocando os três juntos, vá escrevendo para não se perder”.

Fonte: Autora

Identificamos neste momento que existem várias interações da professora incentivando o trabalho em grupo, é interessante desenvolver uma atividade em grupo, pois os alunos dialogam, comparam, argumentam e aprendem uns com os outros, sendo uma boa estratégia de ensino. A professora também comentou na entrevista sobre desenvolver uma atividade de forma individual:

Eu gostei, mas se tivesse feito individual... Quando faz em dupla, eu sei mais ou menos quem é quem, mas eu prefiro individual, para ver mesmo o potencial de cada um mesmo, se eu tivesse que trabalhar mais vezes esse assunto eu iria trabalhar ele individual. (Professora Tainá)

Também acreditamos que é necessário haver uma avaliação individual dos alunos, para conseguir mapear os pontos fortes e de dificuldade da turma e de cada aluno, em específico, para posteriormente a professora poder atuar em cima das dificuldades dos alunos, de forma mais direcionada.

Por conseguinte, os alunos demonstram ter dificuldade na questão das camisas (Permutação), Tainá logo encontra um exemplo para que os alunos entendam, mas neste momento, o exemplo dado, fez com que os alunos sentissem ainda mais dúvidas. Pois, a mesma tenta encontrar outro exemplo para ajudar o grupo e fala sobre a posição das camisas, e não do espaço, acreditamos que Tainá procurou uma melhor forma de esclarecer as dúvidas sobre a questão, mas não conseguiu fazer entender. No entanto, mesmo com o diálogo confuso, um dos alunos conseguiu expressar uma das possibilidades, na qual fez com que o grupo entendesse a situação da gaveta.

Outro grupo de alunos não conseguiram entender sobre a situação dos animais (Arranjo). Ao verificar a resposta dos alunos a professora, tenta mostrar que os mesmos animais podem estar com crianças diferentes e gerando novas possibilidades. Dessa forma, no momento que o aluno pergunta sobre a repetição dos animais, a professora pontua que a mesma quantidade de possibilidades de animais que Bento tem, a Ana também tem. Pontuamos que a questão está confusa desde sua formulação principalmente quando consideramos o ano de atuação, dessa forma, ela poderia ter encontrado um outro contexto de problema, ou outra forma de explicação.

Posteriormente, a professora solucionando a dúvida de outro grupo sobre a questão dos sanduíches (Combinação), evidencia a mistura dos sabores, para que os alunos entendam essa situação, uma vez que acreditamos que a professora está sinalizando para a ordem da situação, que nesse caso de Combinação, não vai gerar novas possibilidades, fazendo que os alunos possam repetir as possibilidades.

Em outro momento a professora chega a afirmar para que os alunos tenham cuidado com a repetição, dando o exemplo da carne e frango. Evidenciando principalmente o invariante da situação, no momento do ensino, e acreditamos que destacar os invariantes dando exemplos com a situação é um ponto positivo quando estamos ensinando Combinatória. Ainda a professora não resolve a situação, mas pede para os próprios alunos responderem, no momento que a mesma faz a mediação para que eles entendam essa situação.

Perguntamos a professora sobre como ela acha que lidou com os erros e dúvidas dos alunos e a professora respondeu:

Tive vontade de dar a resposta, porque quando eles não entendem, a gente faz tudo para que eles entendam, né? A gente vai por outro caminho, a gente fala outras palavras, mas por exemplo, da Combinatória, tinha umas que eram... eu não lembro, mas cada uma não tinha características? Daí dava vontade de dizer as características para que eles já fossem fazendo aquilo ali. (Professora Tainá)

A partir dessa fala percebemos que a professora ao invés de dizer os alunos as características ela os incentiva a pensarem sobre essas características, e promover esse pensamento é muito importante, pois faz com que as crianças

compreendam melhor os invariantes de cada situação Combinatória, que posteriormente ajudará a entender o caminho que deve seguir para a resolução do problema.

#### Quadro 25: Momento 3: Comparação das respostas da situação 2

Quando a professora percebeu que os alunos estavam terminando, explicou como seria feita a próxima etapa: “eu vou chamar aqui, os que não terminaram ainda podem continuar, eu vou chamar aqui, um representante de cada grupo vem e coloca a resposta no quadro e explica o método que utilizou, os outros podem discordar se o resultado for diferente, e no final eu digo quem acertou”

A professora chamou o primeiro grupo, e uma aluna foi escrever sua resposta no quadro e que esse grupo ia mostrar a resposta da questão 2. Então Tainá leu para todos lembrarem da questão 2: “Leandro tem 3 camisetas de cores diferentes (azul, branco, verde) e quer organizá-las lado a lado em sua gaveta, de quantas maneiras diferentes ele poderá organizar as suas camisetas na gaveta?”

As alunas escreveram: branco azul e verde, verde branco e azul, azul verde e branco, azul branco e verde, branco verde azul. (5 possibilidades)

A Professora então perguntou: quem discorda dessa resposta? Está alguém diferente?

Um grupo então falou, que fez igual o grupo mais tinha mais uma possibilidade verde, azul e branco. Dessa forma Tainá perguntou a outro grupo, e eles falaram que tinha apenas 3 possibilidades.

Depois a professora foi explicar a todos: são três camisetas de três cores diferente, e eles podem ficar em três posições diferentes na gaveta, primeiro, segundo e terceiro, e a gente vai repassando, o grupo 1, utilizou o método correto, e o outro grupo também, mas o grupo 1 esqueceu de uma possibilidade que é da camiseta verde, azul e branco, então temos 6 possibilidades.

O outro grupo continuou sem entender, que todas as cores podem ficar em três posições diferentes. Então a professora falou para todos: “o objetivo aqui é debater e aprender, não é interessante quem errou, modificar o seu feito, até porque a nota aqui vai ser de participação”.

Fonte: Autora

Para esse momento, a proposta feita pela professora é interessante. Inicialmente pediu que os alunos escrevessem as respostas no quadro, explicando o método utilizado, pois nessa perspectiva o processo de ensino promove a colaboração do estudante para com a discussão da Combinatória.

Percebemos que nessa situação de Permutação as alunas fizeram por meio da listagem das possibilidades, como uma representação intuitiva, não esgotando todas as possibilidades. E na comparação dos resultados dos outros alunos, foi identificado que faltava apenas uma possibilidade.

No entanto, quando a professora foi explicar a situação não deixou muito claro, pois alguns alunos continuam sem compreender como chegar nas respostas. E a professora não voltou a detalhar mais sobre a situação e passou para a próxima questão. Sentimos que a professora não promoveu, o conhecimento do conteúdo e estudantes, na qual poderia possibilitar estratégias para fazê-los compreender melhor essa situação pois com base em Ball, Thames e Phelps (2008), é ofício do professor propor atividades motivadoras e pertinentes, escutar e interpretar o pensamento dos alunos, ajudando-os em sua formação.

#### Quadro 26: Momento 4: resolução da situação 3

Dessa forma chamou o grupo 2, para fazer a questão 3 e releu a questão: “Para fazer tapetes, mamãe usa sobras de retalhos de cores diferentes (Rosa, Laranja, Cinza, Amarelo, Verde e Vermelho) e tecidos diferentes (jeans e malha). Em cada um, ela coloca uma cor e um tipo de tecido. Quais são as diferentes

combinações possíveis, que mamãe poderá fazer ao usar uma cor e um tipo de tecido em cada tapete.”

O grupo 2 foi escrever no quadro sua listagem de 12 possibilidades encontrada para essa questão. Ao término da escrita, a professora perguntou aos outros: “está certo?” e os outros grupos confirmaram, que fizeram desse jeito e que daria 12 possibilidades.

Um dos grupos mostrou a professora que fizeram uma tabela, distribuindo as cores para cada tecido (jeans e malha), e a professora achou muito interessante. Então a professora explicou: “Todos aqui ficaram de acordo que eram 12 possibilidades, e aqui era só distribuir as cores para cada tecido, jeans com rosa, e malha com rosa, jeans com laranja, e malha com laranja, e assim por diante, tá bom então 12 possibilidades.”

Fonte: Autora

Para a resolução da situação de Produto de Medidas, a professora chama novamente um outro grupo, na mesma estratégia da resolução anterior. Nesse momento conseguimos identificar que o grupo respondeu de forma correta, listando suas possibilidades, e que ao comparar com a resolução dos demais, todos conseguiram chegar às 12 possibilidades, outros grupos resolveram resolver por meio da listagem, desenhos, tabela e diagramas, ligando os tecidos às cores.

Dessa forma, só conseguimos reconhecer a mobilização do conhecimento de Combinatória e ensino e o conhecimento comum de combinatória, que a professora sistematiza por meio da sua fala a distribuição das cores para cada tipo de tecido, além de está chamando os alunos para acompanhar a resolução do grupo que respondeu no quadro.

A tabela e o diagrama estão previstos como formas de resolução na BNCC (2018), percebemos que a professora acha interessante os meios que os alunos usaram para resolver a situação de Produto de Medidas, identificando que ela não sabe ou não lembra que essas representações estão indicadas na BNCC. Ela poderia

ter identificado e mobilizado o conhecimento de Combinatória e Currículo, além de chamar os alunos para apresentar suas resoluções no quadro.

À vista disso, Assis (2014) defende que quando a estratégia de resolução é sistematizada, os estudantes conseguem resolver as situações e esgotar as possibilidades com mais facilidade, do que quando não sistematizam suas estratégias de resolução.

#### Quadro 27: Momento 5: Comparação das resoluções da questão 1

E logo depois chamou o grupo 3 para escrever no quadro sua resolução para a questão 1, e assim se levantaram. Enquanto os meninos procuravam no caderno as respostas, a professora leu a questão 1: “Ana e Bento são afilhados do tio Daniel. Como adoram animais, seu tio decidiu presentear cada um deles com animais diferentes. As opções eram: cão, gato, coelho, peixe e tartaruga. Com quais possíveis combinações diferentes o tio Daniel pode presentear cada sobrinho?”

E o menino foi explicar como fez a questão, pois não quis escrever no quadro: “eu peguei esse cinco (animais) a gente fez 5 possibilidades para Ana e cinco também para bento, ai não sei explicar mais, mas tem 20 possibilidades”

A professora então percebeu que os alunos apagaram seu registro no caderno, e pediu para os meninos escreverem no quadro. E os meninos não conseguiram fazer. Dessa forma, a professora perguntou o resultado de outro grupo, na qual informaram que deu 12 possibilidades, não esgotando as possibilidades. E os outros alunos não conseguiram entender a questão, não conseguindo nenhuma possibilidade.

A professora não conseguiu escrever as possibilidades, e pediu auxílio para a observadora escrever no quadro e explicar aos alunos como seriam. Dessa maneira a observadora listou todas as possibilidades, pontuando que nessa questão os animais se repetiram, como um exemplo dado: Ana fica com cão e Bento

com Gato, mas essa possibilidade pode se inverter, pois Bento pode ficar com o Cão e Ana com o gato, e diante todas as combinações chegou as 20 possibilidades.

Nessa perspectiva a professora complementou: “Realmente quando é uma conta grande, às vezes a gente se perde, a gente se perde na quantidade de possibilidades, às vezes passa despercebido que faltou possibilidades, mas todos entenderam o método?” E todos falaram que sim.

Fonte: Autora

Para a resolução da questão 1 houve bastante dificuldade por parte dos alunos e da professora, a situação de Arranjo, durante a resolução foi a que mais os alunos chamavam para a professora explicar, e mesmo assim ninguém conseguiu entender a situação.

Ao comparar a formação, com a aula, percebemos a dificuldade de Tainá em ambas as etapas com a situação de Arranjo, e que essa adversidade se mostrou presente na sala de aula. Essa situação mostra que os nossos conhecimentos e dificuldades atingem nossos alunos, por isso a necessidade de estudar e compreender o conteúdo antes do ensino.

Outro ponto importante é na construção do problema, ao ler o enunciado percebemos que a questão não é muito clara, no sentido que os alunos não compreendem se devem fazer a listagem com os sobrinhos de forma separada ou se a escolha dos animais pode ser em duplas para os sobrinhos, dificultando então o entendimento.

E a professora poderia ter evitado essa situação, reformulando ou escolhendo outra questão para entrar na dinâmica, ou também poderia resolver a questão anteriormente, durante seu planejamento, e analisar se seus alunos conseguiriam ou não resolver a situação.

A professora ao perceber o número de 20 possibilidades e considera que esse foi o motivo pela dificuldade de todos. Entendemos com base em Oliveira e Montenegro (2022) na qual mostram que principalmente no ensino fundamental anos

iniciais é importante que as situações sejam elaboradas, para resultar em um número baixo de possibilidades. Uma questão com 20 possibilidades pode ser representada pelos alunos, mesmo que por muitas vezes os alunos confundam na sua resolução. Para isso, é importante com sistematização dos elementos no momento da resolução da situação. Consideramos, dessa forma, resultados a partir de 30, números altos de possibilidades, na qual os alunos vão ter limitações em suas representações.

#### Quadro 28: Momento 6: resolução da situação 4 e fechamento

E por fim a professora chamou o grupo 4, para responder a questão 4. E a professora leu a quarta questão: “Uma lanchonete de sanduíches, oferece os seguintes sabores: frango, atum, carne moída e queijo. Por um preço único, o cliente deve escolher uma combinação de sanduíche com dois sabores. Dessa forma, determine quais são as possibilidades totais de um sanduíche com dois sabores diferentes.”

O sinal tocou, e os alunos ficaram agoniados para irem para casa, mas a professora disse a todos que iria terminar a questão. A professora, assim, perguntou as possibilidades dos outros grupos: uns falaram 6, outros 12.

O aluno começou a explicar: “O cliente queria um sanduíche com dois sabores, aí eu fiz, frango com atum, dá uma possibilidade, frango com carne moída, duas possibilidades, frango com queijo, três possibilidades, agora a vez do atum, como o frango já foi, atum com carne moída, quatro possibilidades, atum com queijo cinco possibilidades, aí carne moída, carne moída com queijo, seis possibilidades”

A professora então conclui: “quem deu 6 possibilidades está correto”. E perguntou a todos se gostaram das atividades, e todos responderam que sim e liberaram os alunos, prometendo mais atividades como essa.

Fonte: Autora

A última questão foi a de Combinação e a professora seguiu com sua didática de chamar um grupo para responder. Mas como o sinal tocou os demais alunos

ficaram impacientes, e não conseguiram dialogar e comparar essa situação com os resultados dos demais grupos.

Percebemos que o grupo chamado para apresentar sua resolução falou as possibilidades corretamente, então a professora não explicou aos demais estudantes como seria feito essa situação, fechando a atividade apenas falando o número de possibilidades correta.

De forma geral, observamos que a professora não pontuou alguns invariantes das situações que foram apresentadas, e que tais evidências poderiam ter facilitado os alunos a resolver algumas situações que acharam mais difícil. Percebemos ainda que o conhecimento mais mobilizado foi o conhecimento de conteúdo e ensino.

Enfim a professora faz algumas considerações sobre a aula:

Eu acho que se tivesse preparado melhor antes, por exemplo se eu tivesse feito materiais lúdicos mesmo, talvez tivesse feito algum jogo ou coisa assim, os que não entenderam poderiam ter entendido melhor porque seria como você tinha feito com a gente né, ia pegar as figuras lá. eu senti falta disso aí. (Professora Tainá).

E assim, conseguimos perceber que mesmo com inseguranças, a professora conseguiu desenvolver uma aula de Combinatória. Também é necessário pontuar que com o aprofundamento maior da professora sobre o domínio do conteúdo, fará com que a mesma se sinta ainda mais preparada para o ensino da Combinatória em ocorrências futuras. Percebemos por fim, que o conhecimento de combinatória no horizonte e o conhecimento de combinatória e currículo não pode ser avaliado, pois não esteve presente durante a aula, mas pontuamos outras considerações na seção posterior.

#### **Professora Helena 4º Ano**

A seguir será descrito a aula de Combinatória da professora Helena, organizada em quadros, e destacadas por cores a fim de identificar os conhecimentos docentes evidenciados pela professora. E abaixo dos quadros 29 a 35, estão as análises.

## Quadro 29: Momento 1 organização

Para dar início a aula a professora apresentou a pesquisadora que estaria ali para observar a aula ao 4º ano, e solicitou aos alunos a pegarem seus materiais como caderno, lápis e borracha para poderem se deslocar para a sala de vídeo. Ainda a professora falou que era necessário que eles fizessem o registro no caderno, dos resultados de cada situação que seria apresentado, sem ter a necessidade de copiar o problema no caderno.

A professora avisou a observadora que nesse dia seria realizado um desfile de pets, em que cada aluno poderia levar seu animal de estimação para a escola. Então os alunos estariam fazendo atividades na temática do “Pet day”. Também a professora comunicou que já tinha desenvolvido no dia anterior uma atividade no caderno sobre a Combinatória, levando outros problemas para os alunos responderem.

Por conseguinte, a turma se deslocou para a sala de vídeo, em que tinham mesas, cadeiras, quadro branco e uma televisão. Estavam presentes 24 alunos, na qual também continha 1 aluno com Transtorno do Espectro Autista. A professora relatou que tinha desenvolvido o jogo, mas por conta da alta demanda na semana esqueceu de pedir aos alunos que levassem seus celulares, e teve que planejar novamente e apresentar os problemas em slides, e deixaria o jogo para a semana seguinte. Os alunos questionaram a professora sobre a atividade, se valeria o conceito (nota), mas a professora informou que vale a experiência de resolver a charada. A professora teve dificuldades em apresentar os slides da televisão, e teve que esperar outra pessoa para auxiliar na apresentação dos slides.

Fonte: Autora

Inicialmente percebemos que a professora esclareceu que iniciou fazendo uma atividade prévia sobre Combinatória com seus alunos, no dia anterior a aula observada. Dessa forma, entendemos que a professora preferiu que os alunos já tivessem o contato com a temática antes da dinâmica organizada por ela.

Também percebemos que a professora informa sobre a semana do *Pet day* e explica a situação na entrevista:

Foi na semana do pet, por que é assim, no nosso colégio ele trabalha sempre utilizando o semanal né, o que tiver na semana em temática a gente utiliza em perguntas, no caderno ou dinâmicas, como a gente estava no “pet day” que é o dia do seu Pet na escola, aí eu dei todas as temáticas usando o pet que eles poderiam ter em casa, né, poderia ser uma ave, um cachorro, um gato, e aí ficou muito mais familiarizado para eles, coisas que realmente eles têm no cotidiano deles, aí tem o adereço a questão do adereços, quantos animais participaram do desfile naquela semana. (Professora Helena)

Observamos que a professora, diferente dos demais professores, utiliza o recurso da televisão para apresentar suas questões. A televisão pode ser um recurso muito positivo, que motiva a participação dos estudantes, pois não é um recurso que os professores usam geralmente em uma aula de Matemática, e facilita também aos alunos observarem as imagens, que a professora organizou para cada situação. A professora esclarece o uso desse recurso:

Pronto a TV, é porque quando a gente tá em uma sala que só usa o quadro os meninos não imaginam como realmente vai acontecer, aí a gente tem que trazer figuras, aí como no colégio temos acesso a televisão, não precisou imprimir a figura para colar no quadro, mas o que chamou atenção foi ver já os animais, quando as perguntas, que a pergunta poderia ser escrita no quadro normal, só que quando os meninos param para ver a televisão e a questão tá lá eles são desafiados a fazer. Uma é porque é mais lúdico, estava bem colorido, assim estavam atraídos pela imagem, e outra que quando bota na TV os meninos acham que é tudo videogame ou é jogo e fica mais atrativo, do que só copiar a questão no quadro.

Quadro 30: Momento 2: alunos resolvendo a 1° e 2° questão

Assim, depois das adversidades a professora apresentou a primeira situação na televisão: “Os alunos do 4° ano trouxeram para a escola seu animal de estimação para participar do Pet day, tinha cão, gato, porquinho da índia e aves, de quantas maneiras poderá ordenar os animais em um sofá de quatro lugares?”. No slide tinha a imagem dos animais e a imagem do sofá.

Um aluno perguntou se poderia desenhar, e a professora respondeu que pode fazer do jeito que preferir. E ressaltou que ela tem um sofá e que esse animal deveriam estar sentados no sofá, mas ela quer saber de quantas formas ele poderia

organizá-los nesse sofá, de formas diferentes, e deu uma possibilidade como exemplo: “poderia ser como está na imagem, o cachorro primeiro, o passarinho no meio, o gato e o porquinho da índia, e pode ser de outras formas”. E acrescentou que cada um tem sua forma de pensar e não tem erro. A professora deu um tempo de resposta para todos os alunos.

Um dos alunos reconheceu e falou: “parece com a questão de ontem” e a professora concordou. A professora pediu para nenhum aluno expor o resultado oralmente, e que era necessário apenas anotar no caderno.

Uma aluna perguntou: “o que fazer com o bichinho que sobrar?” e a professora respondeu que tem que organizar os quatros animais no sofá.

Depois de um tempo a professora perguntou se poderia passar para a próxima questão, e os alunos informaram que não. A partir da observação foi percebido que a maioria dos alunos fizeram por meio de listagem, e que não haviam esgotado as possibilidades.

A professora então lembrou que não pode repetir as possibilidades, e que era necessário escrever todas as diferentes possibilidades, e ainda repetiu o exemplo já posto no slide, “eu organizei dessa maneira, mas tem outras maneiras, quais são essas outras maneiras de organizar?”. Então uma criança perguntou: “tem que ser lugares diferentes né?” e a professora confirmou: “isso lugares diferentes, só quero maneiras diferentes” então outro aluno perguntou: “como assim maneiras diferentes?” e a professora complementou “eu coloquei cachorro no primeiro lugar, mas eu poderia botar a ave sentando no primeiro, ou poderia botar o gato em primeiro lugar, ou o porquinho da índia em primeiro lugar, eu só quero saber de quantas maneiras diferentes eu posso organizar os animais no sofá”.

Ao perceber uma aluna apagando o caderno a professora disse: “era para você ter deixado o que você pensou, a maneira que você trabalhou para achar a resposta, era para ter deixado, não é para apagar”.

Preocupada com o tempo, a professora preferiu passar para a próxima questão. A segunda questão ela falou: “Não mistura as respostas. Para esse desfile, a coordenação preparou cinco diferentes adereços de cabeça (coroa, laço, tiara, chapéu e a presilha) sendo possível combinar com dois de corpo, sendo colar e pulseira, por vez em cada animal, quantas combinações diferentes podem ser feitas escolhendo um adereço de cabeça e um adereço do corpo?”

Os alunos perguntaram “são quantos animais?”, “eu não entendi”, e a professora respondeu: “só está contando agora os adereços, um de cabeça e um de corpo, o que vocês vão fazer agora é o trabalho de coroa, laço, tiara, presilha e chapéu, combinando com o colar ou pulseira, eu não posso colocar pulseira e colar, ou laço e chapéu, então você vai escolher a cora com colar ou pulseira, são dois objetos só, posso fazer quantas combinações aí?”

Novamente no slide continham as imagens dos adereços.

E a professora continuou a explicar para os alunos: “Ah tia, estou com meu cãozinho eu poderia botar a pulseira e o chapéu, pronto mas aí eu já usei o chapéu e quero agora o laço com a pulseira, então quantas combinações podem ser feitas?, aí você escolhe, fazer desenho ou o nome, ou só a inicial”

Ainda alguns alunos ficaram confusos e a professora falou: “eu não posso botar chapéu e chapéu, ou chapéu e colar e colar e chapéu”

Então a aluna perguntou “e eu posso colocar chapéu e colar e chapéu e pulseira. A professora respondeu que “pode”. A aluna perguntou “posso fazer quatro? e a professora respondeu “todas as possibilidades”.

Outro aluno perguntou: “o que é presilha?” e a professora falou “é tictac, coloca como quiser”. E assim a professora deu mais tempo para os alunos responderem.

Alguns alunos falaram que achavam esse problema mais fácil.

Conseguimos perceber que a professora Helena, não define o meio de como seus alunos vão resolver as questões, seja quaisquer representações que possam ser usadas. Um aspecto bastante positivo, pois Helena e outros professores aqui analisados estabelecem a relação entre as representações dos alunos, com o registro no caderno, com a discussão e socialização que será feita posteriormente.

Apesar de não ser no nível de ensino aqui analisado o RCNEI – Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil (BRASIL, 1998), sinaliza o registro como uma fonte de informação rica, tanto para a criança, durante a aprendizagem, como para o docente, em seu processo de ensino, como também destacado por Assis (2014) em sua análise de estudo com uma professora dos anos iniciais.

Dessa forma acreditamos que os alunos, em seus registros individuais, podem expressar diferentes representações, e utilizar a forma que consideram mais confortável de resolução, sendo então uma estratégia de ensino positiva principalmente nas aulas iniciais de Combinatória.

Vale ressaltar ainda que a professora esclarece que nessa primeira questão (permutação) deve-se organizar os animais no sofá, pontuando que de formas diferentes. Assim a professora mostrando um exemplo de possibilidades, expressa na tv, por meio de imagens. O exemplo pode ajudar a perceber os invariantes de escolha e de ordenação, mas não está sendo esclarecido pela professora.

Sobre essa primeira situação de Permutação, acreditamos que para o 4º ano a professora desenvolveu um problema com muitas possibilidades (24), e mesmo que tenha feito uma aula de introdução, os alunos ainda precisam entender os invariantes de cada situação, para depois aprofundar nas resoluções de maiores possibilidades.

Depois a professora ao responder a dúvida da aula sobre o que fazer com o animal que sobrar, a professora pontua que os quatro animais devem estar sentados no sofá, ou seja, expressa um invariante de que todos os elementos são usados na situação de Permutação.

Por muitas vezes a professora retoma falando que quer apenas diferentes maneiras dos animais sentarem no sofá, pontuando que não pode repetir a mesma

possibilidade. Porém ela não exemplifica a situação, dificultando o entendimento dos alunos na resolução do problema.

Na resolução da segunda questão percebemos que os alunos não conseguiram entender bem o enunciado, pois a construção do enunciado da questão deixou os alunos confusos, se seria mais de um animal, e também quais tipos de adereço que pode ser ou não usado com outro tipo de adereço. A professora consegue identificar essa dificuldade, e decide explicar a situação, pontuando principalmente os dois grupos de escolhas, evidenciando os adereços de cabeça são diferentes dos adereços de corpo.

Em seguida a professora pontua algumas possibilidades, para mostrar como deve ser construído pelos alunos. E conclui mostrando que não se deve repetir um elemento, como chapéu, com o mesmo elemento, como o colar, apenas trocando a ordem, uma vez que 'chapéu e colar' e 'colar e chapéu' são a mesma possibilidade. Percebemos então que a professora está discutindo os invariantes de escolha, apresentando o conhecimento especializado de Combinatória.

Analisando a situação feita pela professora, seria mais interessante que a mesma escolhesse grupos de objetos diferentes, como um grupo com adereços de cabeça e o outro de sapatos de cores diferentes, na qual os alunos conseguiriam identificar melhor esses grupos diferentes e montar as suas possibilidades.

#### Quadro 31: Momento 3: alunos resolvendo a 3° e a 4° questão

A professora alertou a todos que não era necessário copiar a pergunta, somente deixar a resposta no caderno. Com isso a professora passou para a terceira situação: "Patrícia aluna do 4° ano, resolveu levar todos os pets que possui, ela levou um gato, um cachorro, um coelho e um porquinho da índia, porém apenas dois animais poderiam entrar no desfile, de quantas maneiras diferentes, Patrícia poderia montar sua dupla para entrar no desfile?"

Ao término da leitura da questão do slide a professora falou: “você tem que pensar, Patrícia levou 4, mas só pode ser duplas, dois desses, e de quantas maneiras diferentes ela poderia formar sua duplinha para participar do desfile”.

Enquanto a professora tentava explicar para aqueles alunos que não tinham compreendido, o aluno com transtorno de espectro autista ficou bastante agitado, fazendo barulhos que estavam desconcentrando os demais alunos, e a observadora teve que intervir para auxiliar a professora em acalmar o aluno, para que a professora atendesse os outros alunos da turma.

Uma aluna falou: “eu já sei a resposta, mas preciso colocar todas as possibilidades?”. A professora confirmou: “todas as possibilidades”

Enquanto também ajudava um outro aluno: “Esse primeiro pode fazer par com quem? apontando para o coelho.”

O aluno respondeu: “com os outros três”

Então Helena apontou para outro animal e perguntou: “e esse?” E assim o aluno conseguiu dar continuidade a sua resolução.

Depois de um tempo em que a professora disponibilizou para os alunos responderem, perguntou: “quantos vocês conseguiram?”

Alguns alunos responderam 12, outros 3, outros 6, então a professora perguntou se poderia passar para a próxima pergunta e novamente lembrou para os alunos deixarem o que respondeu no caderno, sem apagar o feito.

Por conseguinte, começou a ler a última questão apresentada na televisão: “O desfile do *pet day* realizada pelo colégio, foi realizado uma votação para eleger o *pet* mais elegante entre cães, gatos, hamsters, aves e coelhos, de quantas maneiras diferentes podemos ter o 1° e o 2° lugar”.

Assim que terminado a leitura, um aluno também identificou semelhança com outra questão anteriormente já trabalhada pela professora. E a professora confirma “seguindo a mesma lógica do roteiro de ontem”.

Uma alunos perguntou se tinha imagens e outro aluno perguntou: “temos que escolher dois né?”. Então a professora respondeu: “todos vão ser escolhidos, porém vamos ver um para o primeiro lugar e outro para o segundo lugar, de cinco animais. Dentre esses cinco só um será o primeiro lugar e outro para o segundo lugar” repetiu a professora.

Alguns alunos iam respondendo com ajuda de outros alunos, comparando suas respostas. E no momento que os alunos estavam escrevendo suas possibilidades o aluno autista ficou muito agitado, gritando e se batendo na sala. E a observadora decidiu intervir e ajudar o aluno a se acalmar, enquanto a professora atendia os demais alunos.

Alguns alunos continuaram com dúvidas então a professora falou para todos: “são cinco animais, só que não pode os cinco, quando você vai eleger, você dá a medalha de ouro para o primeiro lugar, e o segundo lugar a medalha de prata, mas desses cinco dois vão ser escolhidos, mais um será o primeiro lugar e o outro o segundo lugar, você tem que dizer quantas maneiras eu posso combinar essa duplinha, só que eles vão ficar em lugares diferentes, porque poderia ter o cão no primeiro lugar, mas também pode ter o cão no segundo lugar, eu poderia ter o gato no primeiro lugar mas também poderia ter o gato no segundo lugar”

Assim um aluno falou: “tia tô fazendo duplas e colocando eles no primeiro e segundo lugar”. Dessa maneira a professora respondeu: “pronto, se você acha melhor colocar o nome pode botar, ou só as letrinhas iniciais também podem”. Enquanto os alunos estavam respondendo, a professora voltou sua atenção para seu aluno autista, fazendo se acalmar. Então a professora perguntou se esse foi o mais difícil, e os alunos falaram que não, que foi quase o mesmo anterior.

Ao apresentar a terceira questão, a professora Helena logo aponta o invariante de escolha para a situação de Combinação, na qual Helena informa que Patrícia deve escolher dois animais, dentre os quatro animais que levou, destacando que a dupla de animais irá participar do desfile. Portanto, evidencia o conhecimento especializado de Combinatória, em que a professora identifica e reconhece o invariante de ordem e usa como processo de ensino.

Identificamos que a professora, a todo o momento, atende a cada aluno que mostra-se com dificuldades dando auxílio a esses alunos. Dessa forma, no momento de esclarecimento de dúvidas a professora aponta cada animal e pergunta ao aluno com quais outros podem fazer dupla com o animal escolhido, mostrando a formação das possibilidades até o aluno compreender como deve ser feito, as demais combinações. Assim, reconhecemos que seu direcionamento aos alunos é uma manifestação do conhecimento do conteúdo e estudante, identificando aqueles que a mesma reconhece como que sentem mais limitações.

Ao passar para a próxima questão, um aluno identifica a questão semelhante que foi trabalhada no dia anterior, e a professora confirma. Percebemos a partir disso uma estratégia de ensino em fazer com que os estudantes percebam similaridades com outros problemas trabalhados, facilitando a resolução desse problema. Pois, os alunos vão se recordar das estratégias utilizadas anteriormente e usá-las novamente.

Para o uso de resolução das dúvidas, a professora pontua o invariante de ordem, da situação de Arranjo, exemplificando o primeiro e o segundo lugar, mostrando a possibilidade dos animais nesse “pódio”, na qual um animal poderá receber a medalha de ouro, e outro a medalha de prata. E por fim a mesma evidência que o cão em uma possibilidade vai estar em primeiro lugar, e também vai aparecer no segundo lugar, mas pontuamos que é necessário deixar claro que são em possibilidades diferentes.

Em seguida, a aluna mostra que está escrevendo o nome dos animais no pódio, e a professora vem reforçar que os alunos, podem listar os nomes, usar a letra inicial. Evidenciando novamente a representação das possibilidades.

## Quadro 32: Momento 4: resolução e socialização da questão 1

Ao término das resoluções dos alunos a professora explicou que ia socializar os resultados e as maneiras que eles elaboraram para chegar no resultado final. Dessa forma a professora lembrou à primeira questão do sofá, e explicou retomando a atividade do dia anterior, que ao invés do sofá teve uma situação envolvendo uma prateleira e organização de objetos, mas tem o mesmo sentido de ocupar os 4 animais, em quatro lugares do sofá, sendo utilizado todos os animais, e por fim perguntou a estratégia que os alunos usaram.

Uma aluna relatou que fez uma conta direto, de  $4 \times 3$  e o resultado foi 12. Então a professora perguntou como ela chegou nessa resolução, e a aluna explicou que tinha 4 animais e cada um ia ocupar um lugar sobrando 3 lugares e fez a multiplicação desses números. Alguns alunos relataram que não conseguiram o primeiro problema resolver, e os demais resolveram utilizando o desenho ou a listagem, porém não chegou no resultado esperado, pois não havia esgotando as possibilidades, a professora escutou as repostas alguns relataram 4, 3, 2, 7, 5, 16 possibilidades, a aluna que relatou ter 16 possibilidades explicou que repetiu os dois primeiros animais e trocou os outros, e ao final outro aluno por meio de desenho do sofá conseguiu 24 possibilidades.

No momento de conferir as possibilidades no quadro, a professora demonstrou ter dificuldade, percebendo o número de possibilidades que daria para essa questão, e pediu para a observadora ajudar na listagem das possibilidades, que explicou para os alunos as possibilidades desse problema, resultando na resposta de 24 possibilidades. Ao término da explicação os alunos identificaram que a maioria faltou algumas possibilidades.

Sendo assim a professora retomou falando que a questão era a mesma da prateleira, mostrada no dia anterior, e que deveriam ir trocando os animais de lugares, sem repetir as possibilidades.

Como os dois professores anteriores, a professora também escolheu que os alunos socializarem os resultados e como método utilizado por eles. Além da socialização, a professora começa a lembrar os alunos da atividade do dia anterior, em que a situação usada era no contexto da prateleira, inspirada nas questões da formação, e que eles agora estavam organizando os animais no sofá.

Ainda assim, os alunos não conseguiram entender a situação, e outros não conseguiram esgotar as possibilidades, e apenas um aluno pontuou o resultado de 24 possibilidades. No entanto, a professora não conseguiu sistematizar no quadro a resolução dessa primeira situação de Permutação, pedindo então ajuda da observadora para resolver essa primeira questão.

Ao analisar sua resolução na formação, Helena também demonstrou dificuldades em resolver a situação de Permutação, e percebemos que essa limitação decorreu na própria dificuldade no ensino dessa situação. Situação semelhante à da professora Tainá, na qual poderiam superar tais dificuldades, resolvendo e revisando tais situações anteriormente a aula, e entendendo como pode ser desenvolvida com seus alunos.

Também identificamos que ambas as professoras demonstraram limitações em situações que envolveram um número superior de 20 possibilidades, dificultando a organização e o esgotamento das possibilidades, pois em um determinado momento, não conseguiam identificar quais possibilidades estavam faltando, pois não organizou de maneira sistematizada, atrapalhando a resolução.

Por isso, é importante ter cuidado na resolução de problemas, desenvolvendo de maneira sistematizada e na construção dos problemas, e que de forma inicial desenvolver situações com números baixos de possibilidades, a fim de fazer com que os alunos entendam a situação e conforme sua evolução, avance no número alto de possibilidades, e com as estratégias sistemáticas para a resolução.

## Quadro 33: Momento 5: resolução e socialização da questão 2

Por conseguinte, passou para a segunda questão, relendo, começou a explicar que a combinação dessa questão era direcionada aos adereços da cabeça e do corpo, e que não era necessário pensar em mais de um animal. E retomou com o exemplo do dia anterior citando a situação de suco que poderia escolher o tamanho, o copo e o sabor.

Então pediu para os alunos falarem o total de possibilidades que eles teriam chegado, uns faltam 10, outros 7, 4, 12 e perguntou como eles chegaram nesses resultados. Assim um aluno falou: “tenho 5 possibilidades para uma (colar), e cinco possibilidades para a outra (pulseira) e o total deu 10”. Dessa maneira a professora perguntou se havia alguma outra resposta diferente e os alunos falaram que sim, mas que a resposta do aluno fazia mais sentido.

Logo a professora falou: “ali temos dois grupos, o que vai usar o colar que combina com todos os adereços da cabeça, então pode ser, colar e laço, colar com a presilha, colar com o chapéu, colar com a coroa, colar com a tiara. Ou só a pulseira, pulseira com presilha, pulseira com chapéu, pulseira com a coroa, pulseira com tiara. Então aqui não precisa ser vários animais, só combinar os adereços, mas quem escolher a pulseira não pode escolher o colar.”

Após a explicação, a aluna falou: “tia então é 5 acessórios de cabeça vezes 2 acessórios de corpo”, e a professora confirmou, e passou para o terceiro problema.

Fonte: Autora

A segunda situação é a de Produto de Medidas, dessa forma a professora inicia retomando a dúvida de quantos animais seriam, e indicando a todos que o foco das combinações era para o grupo de adereços de cabeça e outro grupo de adereços para o corpo. E novamente lembrou a questão dos sucos e tamanhos de copos, que realizou com os alunos no dia anterior.

Ao perceber a resposta correta do seu aluno, a professora sistematiza o pensamento dele no quadro. Pontuando os invariantes que partem de dois grupos de escolha, para qual a professora vai listando cada possibilidade no quadro. E novamente chamou atenção para que poderia apenas fazer as possibilidades com a pulseira e depois com o colar.

Dessa maneira, a professora apresenta mais segurança em sua resolução, diferente da questão anterior de Permutação. Isso mostra que a mesma superou sua dificuldade apresentada na formação, e conseguiu compreender as especificidades da situação de Produto de medidas apresentando as possibilidades de forma mais hábil.

#### Quadro 34: Momento 6: resolução e socialização da questão 3

A professora leu o terceiro problema novamente para a turma. Ao terminar a leitura, os alunos já foram falando os resultados obtidos para a terceira questão citando 12, 11, e 10 possibilidades. Dessa forma a professora explicou: “**lembra que são duplas, eu preciso combinar as duplas agora**”, e **foi para o quadro listar as possibilidades usando as letras iniciais de cada animal. Começando pelo coelho, explicou que teria que combinar com cachorro, gato e com porquinho da índia, e fez com todos os animais.**

Ao terminar pontuou: “**quando for fazer as combinações faz com um animal de cada vez, o coelho tem 3 combinações, quando usar o cachorro ele também terá três possibilidades, o cachorro pode ir com o coelho, com o gato e com o porquinho da índia, e se começar com o gato também vai ter 3 possibilidades, com o cachorro, com o coelho, e com o porquinho da índia e o porquinho da índia também vai ter 3 possibilidades, com o cachorro, gato, e o coelho.**”

**Por fim perguntou como os alunos tinham feito suas resoluções, e a maioria apontou que fez usando a listagem dos nomes dos animais.**

Fonte: Autora

Na questão 3 de Combinação, percebemos as evidências dos invariantes de escolha, na qual é necessário escolher apenas 2 animais do grupo. Porém ao listar os animais a professora não considerou a repetição das possibilidades, e explicou

para seus alunos que cada animal teria três possibilidades de formar duplas para o desfile.

Dessa forma, nota-se que a professora não percebeu que ao colocar gato e cachorro, seria a mesma possibilidade, pondo cachorro e gato, mostrando que a ordem desses elementos não gera novas possibilidades. Apresentando que não compreendeu o que foi solicitado no problema e apresentando para seus alunos forma incorreta invariante de ordem, que não gera novas possibilidades, que configura a situação de Combinação.

A professora Helena demonstrou dificuldades em relação à situação de Combinação na formação, que sua limitação refletiu na resolução e ensino desacertado. Novamente ressaltamos a importância do professor reconhecer suas limitações e procurar um maior aprofundamento antes do processo de ensino, também podendo usar a estratégia de resolver previamente e analisar cada questão proposta para sua turma, para que não ocorram essas situações. Sobre a resolução das questões a professora falou:

O resultado fiz na hora, eu fui fazendo e coloquei na folhinha que eu tava. Eu tinha feito no caderno, mas na hora que trocamos de sala o caderno ficou na outra sala, por isso que eu fui ao quadro para ver se realmente estava correto ou não.

Não sabemos se no caderno ela também pode ter resolvido de forma errônea, mas percebemos que houve uma confusão na resolução de Combinação, na qual ela respondeu como uma situação de Arranjo.

#### Quadro 35: Momento 7: resolução e socialização da questão 4

Chegando na última questão a professora leu o slide, e falou que essa questão era parecida com a anterior, que vai escolher 2 animais, e que eles podem se repetir, pois um vai ser no 1º lugar e o outro no 2º lugar. Dessa maneira explicou que a diferença vai ser que nessa questão poderá inverter a dupla, e deu o exemplo do cachorro, que vai estar no pódio (primeiro lugar), e pode também ficar no segundo lugar. Ao fim da explicação, perguntou os resultados das possibilidades dos alunos. Uns falaram 12 possibilidades, outros 20, 11 e 6 possibilidades.

Isto posto a professora deu o seguinte exemplo: “Se for o coelho em primeiro lugar, seus amigos seriam em segundo, o cachorro em primeiro lugar, seus amigos em segundo, o gato em primeiro lugar, os demais em segundo, o hamster em primeiro lugar e os demais em segundo”.

À vista disso, a maioria dos alunos confirmaram que seria 12 possibilidades, e a professora falou que se teve 12 o resultado seria 24, pois estariam invertendo o pódio. A professora então percebeu que faltava um animal, pois nessa questão tinha 5 animais no enunciado, faltando contabilizar a ave. E ficou um tempo refletindo sua confusão, então concluiu que seria  $4 \times 5$  resultando em 20, e o dobro, por inverter os pódios seria 40. Assim finalizou a aula pedindo para todos guardarem seus materiais.

Fonte: Autora

A última situação discutida foi a de Arranjo, a professora inicia fazendo uma comparação a questão anterior, afirmando que são parecidos, pontuando que os animais vão poder repetir, pois apareceram no primeiro e no segundo lugar, podendo inverter. Percebemos que a docente reconhece o invariante de ordem, em que vai está considerando os elementos em todas as posições que ocupam, mas ela mesma não percebe o erro cometido na situação anterior.

Quando Helena começa a listar, percebemos que a mesma consegue resolver inicialmente de forma certa, pontuando todos os animais que vão ficar em 1° e em 2° lugar. Mas a professora percebeu o resultado de 12 possibilidades com 4 animais, e logo entendeu que esqueceu de um dos animais, assim que percebeu a professora precisou de um tempo para refletir, mas ficou um pouco confusa sobre a sua resolução. Assim decidiu resolver por meio da conta  $4 \times 5$  e dobrou o resultado falando que seria 40 possibilidades, pois poderia repetir os animais.

Durante a confusão a professora não conseguiu sistematizar o resultado encontrado pelos seus alunos, e não efetuou a apresentação das possibilidades completas, dificultando no entendimento dos alunos.

Percebemos que a professora na adversidade não conseguiu desenvolver o ensino da situação de arranjo, acrescentando contas a mais, em que seus alunos não

conseguiram compreender o porquê da conta estabelecida, talvez por ter decorado o invariante, mas não conseguiu aplicar na situação.

Infelizmente a professora demonstrou bastante limitações na parte da socialização e sistematização de três situações Combinatórias. Mas perguntamos a professora sua perspectiva sobre a aula:

Eu acho que poderia mudar, quando a gente tem o lúdico e o visual, aí a gente poderia fazer assim, o professor testar antes, porque eu não testei as questões com outra pessoa né, para ver se eles iam entender realmente a questão, eu só levei na hora, eu só mostrei a você, e você me ajudou a botar os detalhes lá, mas era para eu ter testado com alguma pessoa, para ver a reação dela já me preparar e ver a reação dos alunos lá na hora.

Para as turmas dos Anos iniciais, indicamos o uso de recursos lúdicos, manipuláveis e visuais, para que os alunos consigam perceber de forma mais concreta as possibilidades. Além disso, é interessante envolver o lúdico no processo de ensino e aprendizagem de quaisquer temáticas, mas dando foco na Matemática, precisamos chamar atenção para sair da Matemática tradicional, em resumir o ensino da Matemática em resolução de contas.

### **Professora Taís 4º Ano**

Posteriormente está descrito a aula da professora Taís, que ocorreu, como as demais aulas, em outubro de 2023, está organizada em quadros do 36 ao 39, também está grifada em cores a fim de apresentar os Conhecimentos Docentes percebidos durante a aula, e abaixo as análises.

#### Quadro 36: Momento 1: Organização e apresentação da atividade

Após o intervalo os alunos do 4º Ano, retomaram para a sala de aula, se depararam com uma caixa, na qual a professora já tinha deixado na sala, os alunos demonstraram curiosidade sobre o que tinha dentro da caixa. Nesse dia estavam presentes 15 alunos. Assim que a professora retomou para sala, os alunos se

organizaram em seus respectivos lugares e a professora pediu para os alunos pegarem os materiais como: caderno, lápis e borracha, e orientou para fazerem o cabeçalho.

Posteriormente a professora explicou para a turma que tiraria alguns desafios da caixa (os desafios seriam questões de Combinatórias formuladas por ela), e seria posteriormente escrito no quadro e seria necessário que todos registrassem em seus cadernos.

Fonte: Autora

Inicialmente a professora Taís levou uma proposta de uma caixa de desafios, e logo os alunos demonstraram ter curiosidade sobre o que tinha dentro da caixa. Esse despertar da curiosidade é a apresentação do Conhecimento do Conteúdo e estudante, em que a professora conhece os alunos, na forma de planejar a sua aula trazendo meios que deixem os alunos motivados, curiosos e atentos para o que vem a seguir.

Dessa forma, Tais explica aos alunos o que vai acontecer durante a aula, pedindo que os alunos registrem suas resoluções no caderno, como já pontuamos anteriormente, que Assis (2014) vai caracterizar como importante, para salientar as estratégias pessoais dos alunos. Assim como a professora Helena, a professora Taís também optou por uma atividade individual com os alunos.

Quadro 37: Momento 2: resolvendo e discutindo o primeiro desafio.

Desse modo, Tais sorteou o primeiro desafio, e escreveu no quadro. Depois, a professora colocou algumas imagens no quadro, de meninos, referentes à questão do primeiro desafio, e ao terminar, leu o primeiro desafio: “Sara tem cinco primos, e quer escolher três deles para acompanhá-la no aniversário de sua amiga, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer sua escolha. Então são André, Bruno, César, Diogo e Eraldo.” E repetiu, pontuando que deveria levar três primos para a festa e que os alunos deveriam raciocinar.

Um aluno perguntou sobre as imagens, Taís esclareceu que as imagens eram para mostrar quem são os primos, e que devem levar três deles, mostrando quantas combinações Sara pode fazer. Na qual falou: “A imagem é para facilitar a vocês, para vocês fazerem as combinações”.

Enquanto os alunos iam refletindo individualmente o primeiro desafio, de forma silenciosa, a professora sentou para também resolver a mesma questão em seu caderno. Uma aluna perguntou “tia é para fazer conta?” e a professora respondeu “você que vai saber, como você vai... você que tem que decifrar aí o enigma” e a aluna voltou para seu lugar.

A professora ao perceber que os alunos estavam sem entender, pediu a ajuda da observadora para esclarecer essa questão. Dessa forma, a observadora perguntou aos alunos, como eles estavam resolvendo a questão, e uma aluna respondeu: “Estou escrevendo todas as combinações que podem ser feita dos primos” e os outros alunos continuaram sem entender, a observadora foi ao quadro e mostrou um exemplo de possibilidades para aquele primeiro desafio. Alguns alunos mostraram entendimento, e a professora Taís esclareceu que era para listar sem repetir. Um aluno então falou: “é assim que estou fazendo”, e a professora respondeu: “então está no caminho certo”.

Taís foi chamando o nome de alguns alunos que estavam aparentemente confusos, e os alunos novamente pontuaram o não entendimento da questão. Então a observadora deu mais um exemplo de possibilidades e a professora Taís falou: “Anotando os nomes eu posso levar, fulano, fulano e fulano, você vai anotando os nomes. Matemática não é só conta, não é só calculo”. E a sala voltou a ficar em silêncio.

Alguns alunos sinalizaram que terminaram suas resoluções, mas a professora continuou sentada resolvendo o desafio.

A professora percebe a quantidade alta de possibilidade e comenta com a observadora: “vai dar um bocado, né?”, a observadora confirmou, e a professora pontuou: “acho que uns 10”. Ao receber a confirmação, perguntou se todos os

alunos estavam finalizados, e os alunos confirmaram. Assim perguntou: “quantas possibilidades ela tem?”, e um aluno respondeu: “três”, a professora surpresa perguntou: “só três?”, outro aluno fala: “sete” e outro “nove”. Assim a professora falou “estão caminhando né? é por aí, só quem se aproximou mais foi quem respondeu nove”, uma aluna falou “eu cheguei em dez”, a professora então falou: “você que conseguiu”.

Os outros alunos ficaram se perguntando como que chegaria a dez, e a professora começou a listar as possibilidades oralmente: “André, Bruno, Cesar (1), André, Cesar, Diogo (2), André, Eraldo, Diogo (3), então vocês vão fazer, e depois, Bruno, Cesar, Diogo (4), Bruno, Eraldo, André (5), estão entendendo? então seguindo aí?” e finalizou a sua fala, para conferir a resposta de um aluno. Após perceber a dificuldade dos alunos decidiu escrever as possibilidades no quadro.

Ao colocar no quadro, os alunos foram entendendo o que era para ser feito. Taís mostrou ter dificuldade em listar todas as possibilidades e pediu a resposta feita pela observadora para terminar a listagem no quadro.

Ao fim da listagem um aluno identificou que ele não tinha esgotado todas as possibilidades, faltando apenas um. Assim, a professora perguntou aos demais o que estava faltando em suas respostas, e questionou aos alunos que colocaram três possibilidades, contando que o total seria 10 possibilidades. O aluno falou que não pensou daquela forma, e que pensou em colocar: “os três da frente, com três de trás e depois os outros dois”. Ao final, Taís pediu para todos completarem as possibilidades em seus cadernos e perguntou aos alunos: “imagine isso na prova”, o que fez todos os alunos reprovarem essa ideia e pediram em coro para ela não colocar na prova.

Fonte: Autora

A primeira situação sorteada foi a de Combinação, na qual a professora levou imagens para representar os primos que seriam escolhidos. A professora pontua que as imagens seriam para facilitar, porém os alunos não tiveram acesso a essas imagens, que a todo momento ficou grudada no quadro. Dessa forma, os recursos das imagens foram só ilustrativos, e não conseguiu servir como um recurso

manipulado. Assim, perguntamos à professora por que da escolha dos recursos usados, e a professora Taís respondeu: “Porque fica mais lúdica, fica melhor para eles compreenderem. A caixa para deixar surpresa e as imagens para eles entenderem melhor”.

Essas escolhas refletem a estratégia de ensino que a professora optou, porém se a mesma disponibilizasse as imagens para que os alunos moldassem as possibilidades a partir da sua manipulação, poderia facilitar ainda mais a aprendizagem daqueles que só pelo meio abstrato, em colar a imagem no quadro, pois a forma abstrata é mais complexa de introduzir o raciocínio hipotético nos alunos. Além disso a BNCC (2018) indica o uso de materiais manipuláveis no 4º ano do Ensino Fundamental, como um meio dos alunos perceberem as possibilidades usando esses materiais.

Outro ponto observado é que a professora vai resolver em seu caderno, enquanto seus alunos estão resolvendo também, isso interfere em sua atuação em sala, em que perde o momento de circular e atender os alunos que tem dificuldades, no momento das resoluções. Percebemos em outras aulas, que as professoras que não resolveram anteriormente, tiveram dificuldades na resolução e tiveram que pedir ajuda à observadora. Por isso é importante resolver, e analisar a questão anteriormente a aula.

Posteriormente, quando a professora identifica alguns alunos que não conseguiram resolver a questão, Taís não tenta resolver sozinha e pede ajuda a observadora, que precisou ir ao quadro e dar exemplo de como ficaria uma possibilidade. Ainda a professora Taís reforça que não devem listar possibilidades repetidas. Porém alguns alunos ainda ficaram sem entender, e a professora não agiu nesse momento, em que a observadora novamente teve que atuar e esclarecer mais algumas possibilidades, como exemplo.

A dificuldade dos alunos é compreensível, pois era o primeiro contato dos alunos sobre Combinatória, e iniciaram com a situação de Combinatória, que como dito anteriormente, é considerada a mais difícil (Montenegro, 2018), principalmente com mais de três etapas de escolha para o 4º ano, sendo ideal deixar situações de combinação com duas etapas. Mas a professora, a partir dessas limitações de seus

alunos, deveria tomar a frente e desenvolver estratégias para fazer com que os alunos entendam a situação, usando outros meios e exemplos que os ajudem.

Em seguida, a professora sugere a listagem dos nomes dos primos, e pontua que a Matemática nem sempre se resolve com cálculos. Aqui percebemos que a professora está indicando que seus alunos resolvam a situação por meio da representação, pois alguns alunos, mesmo com a intervenção da observadora, não demonstram entendimento da questão.

Dessa forma, conseguimos perceber que a professora pontua sobre a Matemática nem sempre estar relacionada com cálculos, e para a Combinatória as representações simbólicas são de suma importância na compreensão do conteúdo, pois as crianças conseguem desenvolver suas resoluções por meio de representações próprias como desenho, listagem, ou até pelas representações que são ensinadas, como tabelas ou diagramas, que facilitam o ensino e aprendizagem, tanto na resolução de problemas, quanto na aprendizagem das características de cada problema, sendo um meio necessário nos Anos Iniciais.

Ao término da resolução, a professora pede para que os alunos falem o resultado, e essa socialização dos resultados é interessante para que os alunos reflitam sobre seus resultados, comparando com os resultados dos demais. Assim, a professora falou das possibilidades oralmente, pois nem todos os alunos conseguiram entender as 10 possibilidades. Porém a professora não conseguiu falar todas as 10 possibilidades, mas decidiu escrevê-las no quadro. Porém a professora não conseguiu chegar às 10 possibilidades, e pediu ajuda novamente a observadora.

Com isso fica perceptível a dificuldade no esgotamento de possibilidades, pois a professora ainda conseguiu identificar algumas possibilidades, mas percebemos que ela fazia de forma aleatória, sem uma organização. E isso fez com que não identificasse algumas possibilidades restantes. Dessa forma, quanto maior o número de possibilidades (mesmo ainda sendo um número baixo) maior a necessidade de sistematização, para não se perder na contagem.

Durante a formação a professora Taís também apresentou limitações na situação de Combinação, conseguimos então identificar, que a mesma não superou

tais dificuldades, sendo então necessário um aprofundamento maior nessa situação. Também como falado anteriormente, é importante a resolução prévia das questões, para que os professores possam seguir e entender o que foi feito, e estudar anteriormente todas as situações, antes do processo de ensino.

#### Quadro 38: Momento 3: resolver e discutir o segundo desafio

Então Taís decidiu ir para a próxima pergunta, e afirmou que “essa questão seria mais fácil para os meninos, porque os meninos gostam de futebol”. Logo a professora escreveu no quadro o segundo desafio e colocou as imagens no quadro com fita. E da mesma forma os alunos individualmente iam ter que copiar e responder a questão em seu caderno. A professora relatou a demora em copiar as questões no caderno.

Segundo desafio: Quatro rapazes desejam participar de uma pelada com seus amigos e querem definir um atacante e um goleiro. De quantas formas diferentes, os rapazes podem se organizar para ocupar as posições citadas? Anderson, Júlio, Matheus e Cícero.

A professora não leu a questão, mas pontuou os alunos, dizendo que ao invés de cinco pessoas, como na questão anterior, iam escolher dentre quatro meninos, um atacante e um goleiro. Na qual os alunos falaram que seria mais fácil. Taís então falou: “quantas maneiras vai ter para eles... bora lá, como vocês vão organizar isso aí? será que vai ser mais fácil? para ser um atacante e um goleiro”. A maioria dos alunos afirmou que seria mais fácil e um aluno comentou dizendo que só faria uma multiplicação.

Então a professora retorna para sua banca, para novamente responder a questão em seu caderno, enquanto os alunos permanecem em silêncio efetuando individualmente a questão. Posteriormente um aluno pergunta se deve escolher dois, e a professora repete que vai escolher um atacante e um goleiro, e quantas possibilidades tem no total. Desse jeito a aluna afirma que nessa questão vai ter mais de dez possibilidades e a professora fala: “tem certeza disso? presta atenção.”

Por conseguinte, um aluno relata o não entendimento da questão, mas o colega tenta explicar para ele, mas a professora interrompe e pede para ele reler o desafio no quadro. Alguns estudantes vão terminando e ficam comparando as suas respostas com as dos seus colegas.

A professora pede para que os alunos falem seus resultados, alguns, então, falam que deu mais de dez, outros respondem que deu 6, e os alunos conversam tentando entender os outros resultados. Dessa forma o aluno afirma que deve contar os pares, e o outro afirma que deve contar às pessoas. Enquanto essa discussão acontece, a professora termina sua resolução no caderno.

Na sequência, Taís confere se todos os alunos terminaram, mas quando percebe que há alunos sem fazer a atividade repreende, pontuando que “é necessário pensar”. Os outros alunos estavam ansiosos em falar a resposta, pediram a autorização da professora para falar, e a professora permitiu, e vários alunos responderam doze possibilidades. Sendo que um aluno falou: é doze pessoas, e seis possibilidades” e a professora falou “dozes pessoas não, doze possibilidades”. E pediu para ver como ele estava fazendo.

Em seguida a professora chamou a aluna para escrever no quadro as possibilidades. Enquanto a aluna ia escrevendo as possibilidades os demais conferiam. Quando a professora percebeu que um outro aluno estava com dificuldades, ela interveio falando “Para facilitar, você colocava ali o nome atacante e o nome goleiro, então quem pode ser atacante? Anderson com Júlio, Anderson com Matheus e Anderson com Cícero. E agora com Júlio, Júlio poderia ser atacante e Anderson o goleiro, Júlio atacante e Matheus goleiro” e o aluno percebeu que havia feito errado: “eu fiz como se fosse dois atacantes e dois goleiros”.

Ao fim a professora pede para os alunos conferirem a combinação com a que está sendo feita no quadro, por uma aluna. Enquanto isso, um aluno volta a falar que escreveu sendo dois atacantes, então a professora reforça que é um atacante e um goleiro, e o aluno compreendeu seu erro. Um outro aluno fala que deu 15 possibilidades, a professora se surpreende com a resposta, e os alunos falam que

essa resposta está errada, e o aluno comenta que repetiu Anderson com Anderson e por isso deu 15, a professora então fala que a resposta são 12 possibilidades.

Um aluno olhando a resposta no quadro pergunta: “o tia pode repetir? Anderson e Júlio e Júlio e Anderson?”

A professora fala: “Pode, Anderson pode ser atacante e Júlio Goleiro, ou pode ser Júlio Goleiro e Anderson atacante”

Os alunos conferem sua resposta com outros colegas de sala, pontuando que devem ser escolhidos dois meninos, diferente da questão anterior, que pedia para escolher três meninos.

Assim a professora repete a questão da repetição de possibilidades, ao conferir o caderno de um aluno “Então, Anderson pode ser atacante e Matheus goleiro, ou pode ser Matheus atacante e Anderson goleiro.”

A professora e os alunos parabenizam a aluna que escreveu corretamente todas as possibilidades no quadro.

Uma estudante comenta que o resultado dela deu o mesmo resultado da colega, mas fez de outra maneira, então a professora pontua: “Sim, não vai ter que ser igual como ela fez ali, cada um vai da sua maneira.”

Os alunos comentam que esse desafio foi mais fácil que o primeiro e a Taís concorda com essa afirmação.

Então ela conclui “se tem 4 jogadores para duas posições, fazer a multiplicação aqui serviria?”, os alunos falam que não ia dar certo, uma aluna diz “só se multiplicar 4 por 3”, e outros alunos falam que não ia ter sentido fazer essa multiplicação. A professora então pergunta “Vamos mais uma?” e a sala se divide em respostas positivas e negativas, mas a professora verifica as horas, decide finalizar com mais um desafio.

Ao ler a questão, a professora identificou que essa questão os alunos (homens) achavam mais fácil, poderia ser uma mobilização do conhecimento do conteúdo dos estudantes. Porém a sua justificativa se refere ao contexto de futebol, e não a situação de Arranjo. Dessa maneira os alunos pontuam que esse problema é mais fácil pois são menos elementos, e duas etapas de escolha, mesmo que tenha mais possibilidades, pois no estudo de Vega (2014) na qual apresenta problemas com mais etapas de duas etapas, os alunos apresentam mais dificuldades na sua resolução.

Ao explicar a questão, a professora pontuou o invariante de escolha que dentro do grupo de quatro elementos, era necessário escolher dois para ocupar duas posições, evidenciando um conhecimento específico de Combinatória.

Novamente a professora vai resolver a questão junto com os alunos no momento de aula. Acreditamos que o ideal seria a professora estar atenta para as dúvidas que vão surgindo, e observando como cada aluno está produzindo, ao invés de colocar sua atenção inteiramente na resolução da questão.

Assim, quando a aluna identifica que nessa questão vai dar mais de dez possibilidades, a professora não identifica o acerto da aluna e só pede para a menina prestar atenção, deixando a oportunidade passar, de entender como a menina desenvolveu sua resolução.

Em seguida, dois alunos discutem suas resoluções, onde um afirma que é necessário contar os pares, e o outro aluno afirma que se deve levar em conta as pessoas. Porém a professora não participa dessa discussão e perde a oportunidade de ensinar, que nessa situação deve se atentar para os pares de jogadores, que ocupará posições diferentes.

Ao comparar as respostas a professora, percebe que um aluno comenta que são 12 pessoas, e o corrige, afirmando que são 12 possibilidades, podendo perguntar e entender se ele está realizando a contagem das pessoas e não das possibilidades, perdendo então explica que a possibilidades é composta por duas pessoas. Essa é uma dificuldade frequente na contagem, os estudantes podem considerar as os nomes listados e não as possibilidades, por isso a professora poderia ter indicado um conhecimento de combinatória e alunos, caso ela tivesse mais experiência com o

ensino desse conteúdo, e percebendo essa dificuldade. Nesse caso, Taís poderia perguntar como ele efetuou a contagem, para em seguida verificar se a contagem estava correta, e ajudá-lo a perceber que a possibilidade é formada pelo conjunto de dois jogadores, no qual um é um goleiro e o outro é o atacante.

Também percebemos que a professora chama os alunos para responderem no quadro, e esse método é interessante para que as crianças fiquem motivadas a compartilhar suas resoluções, e que os demais consigam comparar suas respostas e cada possibilidade alcançada, ainda a professora poderia em suas aulas seguintes, ensinar outras representações a partir do que identificou na resolução do quadro.

A professora identifica um aluno que continua a não entender a situação de Arranjo, e indicou a listagem dos nomes, pontuando o lugar de atacante e goleiro, perguntando ao aluno quem poderia ser o atacante e o goleiro, e listando com ele algumas possibilidades, mostrando outro meio para a criança lidar com tal dificuldade, na qual percebeu seu erro.

Contudo, ao retomar a comparação das respostas no quadro, alguns alunos conseguem entender que repetiu ou não esgotou as possibilidades da questão, evidenciando a boa estratégia de ensino da professora.

Ao final da comparação, um aluno perguntou se poderia repetir a mesma dupla, e a professora respondeu que cada um estaria em posições diferentes, evidenciando o invariante de ordem, porém ao dar o exemplo, a mesma repetiu a mesma possibilidade. Mas posteriormente consegue evidenciar outra possibilidade em que jogador seja atacante e outro goleiro, e o inverso, mostrando então o invariante de ordem da situação de Arranjo, assim mobilizando o conhecimento especializado de Combinatória.

Por fim, a professora conclui perguntando se a multiplicação para aquela situação serve, mas não esclarece aos alunos se de fato serve ou não para resolver, e deixar essa questão em aberto. Diante disso, pontuamos que está orientado na BNCC, que o princípio multiplicativo deve ser envolvido nas resoluções dos problemas simples de contagem apenas na situação de produto de medidas a partir do 5º Ano. Por isso Montenegro (2018) indica que essa multiplicação deve ser

desenvolvida de forma natural, quando a partir de uma representação a criança note esse cálculo, ou ainda quando a criança apresentar essa multiplicação a partir da generalização de possibilidades.

Apesar da BNCC (2018) não indicar o princípio multiplicativo, a criança pode perceber em meio a sua discussão e a professora pode aproveitar esse momento para discutir e incentivar essa aprendizagem, mas também indicamos principalmente para o 4º Ano a resolução com o apoio de imagens e o uso de materiais manipulados, para termos o foco principal em compreender e resolver a partir de recursos didáticos, ou pelas representações para só após essa compreensão desenvolver a ligação com o princípio multiplicativo.

#### Quadro 39: Momento 4: Resolvendo e discutindo o último desafio

Enquanto a professora escreve o último desafio no quadro, os alunos falam que desejam fazer Matemática assim todo dia, expressando suas satisfações com a aula. A professora então coloca as imagens referentes ao terceiro desafio. A aluna questiona se essa questão é igual a anterior, e a professora pede para ela ler e raciocinar.

E então a professora ler o terceiro desafio: “Maria gosta muito de ler literatura brasileira, e seu autor favorito é José de Alencar, ela ganhou três livros desse autor, mas ela não decidiu qual será a ordem dos livros que ela vai começar a ler. Então quantas possibilidades ela vai ter para começar a ler os livros?” E as imagens dos livros eram os livros de Iracema, Senhora e Lucíola.

Os alunos pontuam que era parecido com a questão anterior e ficaram comentando sobre a questão. Conseqüentemente a professora pediu silêncio: “para pensar a gente não pode tá conversando não”. E repreendeu alguns alunos que estavam sem fazer a atividade.

Então a professora voltou ao seu lugar e começou a responder a terceira questão. Depois de um tempo os alunos foram comunicando que haviam finalizado. Dessa forma Tais perguntou o resultado dos alunos. Um dos alunos respondeu

sete, outros falaram três, quatro, cinco. O aluno explicou: “é em ordem diferente, tipo, Iracema, Lucíola, Senhora (1); Lucíola, Iracema, Senhora (2).” Então a professora falou que não é sete, “vamos pensar minha gente, quem seria o primeiro, o segundo” ela disse. E a aluna respondeu “é seis tia”,

O aluno estava insistindo no resultado errado, então a professora falou “é o seu raciocínio, eu não posso dizer que o seu está errado, o negócio é você chegar na quantidade correta.”

E os alunos começaram a falar diversas possibilidades, dessa forma a professora chamou um aluno para escrever as possibilidades no quadro e comunicou que a aula estava terminando, então os alunos demonstraram sua insatisfação com o fim da aula. Enquanto os outros alunos iam conferindo, outros relatam que conseguiram seis possibilidades. Nessa comparação entre os alunos, um dos alunos percebeu que estava com uma possibilidade a mais e concluiu: “não sei se eu repeti ou coloquei a mais, é repeti um”.

O aluno que estava no quadro listando, estava escrevendo dois livros ao invés de três, e os demais alunos estavam alertando o erro, e a professora ficou sem entender a forma que o aluno estava seguindo. A professora então perguntou à turma: “tá certo isso aqui?” e os alunos responderam que não estava certo, comentaram que o aluno escreveu dois livros ao invés de três. Dessa maneira, a professora chamou outra aluna para escrever as possibilidades.

E no final da listagem da aluna, concluiu com os alunos que a forma da menina estava correta, mesmo não percebendo que havia uma possibilidade repetida, e permitiu que todos guardassem os materiais, pois o tempo da aula já tinha terminado.

Fonte: Autora

A última questão sorteada foi a de Permutação, na qual a professora leu a questão, e voltou a responder no seu caderno. E fez o mesmo processo de perguntar os resultados dos alunos, para discutirem a questão.

Ao perceber que o aluno estava falando a resposta errada a professora não procura entender o porquê ele chegou no resultado de sete possibilidades, e só pontua para que ele chegue no resultado correto. Percebemos que a professora poderia ir verificar a situação do aluno, e ajudar a ele chegar no resultado, porém a mesma deixa passar essa oportunidade.

Logo a professora chamou outro aluno para responder no quadro, mas esse aluno estava listando de forma errada, a professora identificou e perguntou à turma sobre a resposta do aluno, e decidiu chamar outra aluna para listar. E nesse momento mostra-se um domínio do conhecimento de Combinatória e ensino, na qual refletem de forma conjunta com os alunos, comparando e dialogando sobre as possibilidades encontradas.

Finalmente a aluna consegue listar as possibilidades, mas acaba repetindo uma das possibilidades, mas a professora não consegue perceber e conclui a aluna sem pontuar e fazer uma síntese de como formar aquelas possibilidades.

Fica evidente que a professora Taís foi a única que desenvolveu sua aula de combinatória apresentando e resolvendo três situações, e deixando de fora a situação de Produto de Medidas. Podemos entender, que isso se deu pela falta de tempo na aula, mas que poderia ser resolvido, com uma organização de tempo melhor nas resoluções das situações anteriores.

No entanto evidenciamos a importância de proporcionar o ensino Combinatória com variadas situações Combinatórias, pois Borba, Rocha e Azevedo (2015) vão afirmar que o processo de ensino no desenvolvimento do raciocínio combinatório com variadas situações combinatórias (arranjos, combinações, permutações e produto de medidas), pode propiciar ao longo da escolarização básica um grande ganho no desenvolvimento deste raciocínio. Então por fim, perguntamos a perspectiva da professora sobre a aula: “Teve muitos que eu me surpreendi, teve uma menina que eu achei que ela não vai conseguir muito não, e ela conseguiu, eu achei que eles desenvolveram bem a atividade e eu gostei.”

Por fim queremos pontuar a satisfação dos alunos ao dizerem que querem a Matemática assim todo dia, mostrando que a Combinatória é interessante para os

estudantes, além de ajudar no desenvolvimento do raciocínio lógico e na interpretação de enunciados. Ainda evidenciando que os alunos conseguem resolver as diferentes situações Combinatórias, além dos problemas de produtos de medidas que é o único promovido pela BNCC (2018).

### **7.3 Análise geral das aulas dos professores**

Em análise das quatro aulas podemos perceber os conhecimentos docentes mais evidenciados, são: O conhecimento comum de Combinatória, conhecimento especializado de Combinatória, o conhecimento de Combinatória e estudante, e o conhecimento de Combinatória e ensino. Na qual esses conhecimentos foram evidenciados em todas as atividades realizadas, de forma relacional entre elas, em que quando foi identificado um dos conhecimentos, o outro foi também identificado de forma seguinte. Consideramos que o conhecimento de Combinatória e ensino, esteve mais presente entre os momentos, por se tratar de um processo de ensino.

Dessa forma, o conhecimento de Combinatória no horizonte, e o conhecimento de Combinatória e currículo foram os que menos foram mobilizados, ou não foram mobilizados durante o processo de ensino de Combinatória, das aulas observadas.

Contudo, podemos entender que a partir do que Ball, Thames e Phelps (2008) pontua o conhecimento de conteúdo no horizonte, será apresentado quando o professor consegue mostrar uma noção do conteúdo em diferentes etapas de ensino, ou pela discussão do uso das etapas de escolhas ou o uso do PFC, podendo determinar a base da etapa de ensino presente, percebendo o que pode evoluir posteriormente neste conteúdo, para a etapa seguinte. O único que conseguiu pontuar essa evolução na aula foi o professor João, em uma conversa com a observadora, em que relata o que pode desenvolver com seus alunos posteriormente.

Ressaltamos a importância desse conhecimento para que os professores entendam que o raciocínio Combinatório deve ser estimulado em todo período de escolarização básica, e que por esse motivo, os professores devem agir como um grupo com o objetivo da aprendizagem em comum.

Ainda na entrevista perguntamos aos professores, em que ano escolar de ensino a Combinatória pode ser ensinada, para poder perceber o que eles pensam sobre quando iniciar o ensino da Combinatória com os alunos, seguem as respostas no quadro abaixo:

Quadro 40: Respostas dos professores sobre quando iniciar o ensino de Combinatória nos Anos Iniciais do Fundamental.

Professor	Resposta
João	No segundo ano já podia ser trabalhado, mas com a dificuldade menor, com uma prática mais simples para eles, do segundo ano, por exemplo se eu fosse utilizar eu utilizaria a Combinatória de forma simples, eu pegava Joana vai para uma festa e tem saias e blusas, quais as possibilidades que ela tem. Ai de fato trazer a questão de ludicidade, eles montarem a roupa, levar o manequim ver as possibilidades. Mas para eles se divertirem também.
Tainá	A Combinatória eu acho que dá para dar na primeira série. E aí vai dificultando, né? Conforme os anos forem passando. Mas eu acho que é até porque é uma coisa que a gente já trabalha na vida a própria criança já tem essa noção antes da criança ir para escola ela tem uma noção de matemática, tanto da língua materna língua portuguesa quanto essas duas nações. Ela já tem, só não vai ter se ela tiver algum déficit.
Helena	Do segundo ano, do primeiro ano só se for bem concreto mesmo está trabalhando, como já fazem no infantil 5, porque tudo eles pegam vai falar de um sólidos geométricos vão pegar, se é das cores vão realmente ter as cores, agora nessa na soma, multiplicação essas coisas assim, a partir do segundo ele já começa, a partir da nossa leitura, da compreensão, se for ao menos que isso primeiro ano, infantil cinco o professor precisa se preparar para levar os elementos, não só para eles ver na TV mas realmente eles tocar e fazer combinações.
Taís	Eu acho que desde o terceiro ano de forma mais simples, deve trabalhar para colocar eles para raciocinar desde cedo.

Fonte: Autora

Notamos que os professores indicam o ensino a partir do primeiro ciclo do Fundamental, em que pontuam a questão da ludicidade, materiais concretos e de forma mais simples, apresentando assim o Conhecimento da Combinatória no Horizonte. Consideramos que essa perspectiva dos professores está correta, em

desenvolver o quanto antes o raciocínio Combinatório do aluno. Pois Vergnaud (1983) considera que os Campos Conceituais precisam de um longo tempo para se desenvolver, a partir das experiências, comportamentos e as situações que os sujeitos se deparam ao longo do processo de aprendizagem.

Posteriormente perguntamos aos professores se concordam se pode ser trabalhado essa temática desde o 1º ano do Fundamental, e todos concordam com essa colocação. Por isso é perceptível que os professores demonstraram por meio dessas afirmações um conhecimento Combinatória no Horizonte. Pois, pontuaram que a partir dos primeiros anos do Fundamental é pode-se desenvolver a Combinatória de forma mais concreta, levando materiais físicos e lúdicos, e formulando as situações de forma mais simples, para esta etapa de ensino.

Assim como Borba, Rocha e Azevedo (2015) onde declaram que o raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver, por isso essas pesquisadoras defendem que desde o início da escolarização pode-se propor às crianças a resolução de situações combinatórias mais simples. Na qual Silva (2019), vai mostrar o trabalho na Educação Infantil com o uso de materiais manipulativos, desenhos, e sem a necessidade de esgotar as possibilidades, no objetivo do desenvolvimento do raciocínio Combinatório.

Também questionamos aos professores que atividades futuras eles consideram importante realizar em sua turma sobre Combinatória, e os professores responderam:

Quadro 41: Respostas dos professores sobre atividades futuras na temática de Combinatória.

Professores	Respostas
João	Trabalhar com senhas, usar tecnologias, essas coisas.
Tainá	Eu não sei se dá para fazer ao ar livre levando-os para levar eles fazerem em alguma coisa em algum lugar, de uma pastel, que era uma atividade tinha que saber os sabores, eu pensei que a gente aqui no bairro poderia colocar o açaí como exemplo e colocar os sabores para adicionar e assim fazer as combinações e descobri-las. Assim, poderíamos incluir o cotidiano deles na

	atividade e ficaria mais fácil para eles poderem entender a combinatória
Helena	Assim... fica um pouco difícil se não tem o material pronto, mas eu vi que pode ser levada em todas as matérias ciências, português a gente poderia até combinar até com os gêneros textuais, ou na formação de frases, quando a gente vai dar adjetivos. quantas oportunidades a gente pode dar, aquela menina é vários adjetivos, ou com cores, ou elementos, ou até inglês por que vai perpassando em todas as matérias.
Tais	Rapaz... a gente poderia fazer... combinar sabores de sorvete, e se pudesse fazer até alguma coisa com sorvete mesmo, e eles fazerem mesmo as combinações, eles iam amar. Trabalhar com alimentos.

Fonte: Autora

Percebemos que os professores mobilizam o conhecimento do conteúdo e ensino em suas respostas, na qual a maioria pontua trabalhar a Combinatória com elementos cotidianos e práticos, na qual pode trabalhar com elementos, senhas, tecnologias. Na qual, consideramos ideias interessantes em levar a Combinatória para além de resolução de questões, pois a combinação de elementos está dentro da prática social cotidiana dos alunos, em que são levados a refletir sobre modos diferenciados de realizar combinações, envolvendo vestuários, alimentação, participação de equipes, entre outros contextos reais (BORBA, 2016).

Porém não compreendemos o que a professora Helena quis propor a Combinatória e os gêneros textuais, e formação de frases. Mas a mesma também propõe um trabalho interdisciplinar com ciências, português e inglês. Se no caso, usar o contexto estudado nessas disciplinas e desenvolver situações com base nesses contextos, e vivenciá-las, pode ser um trabalho bem interessante envolvendo a interdisciplinaridade.

Já o conhecimento de conteúdo e currículo Ball, Thames e Phelps, não especifica a profundidade sobre esse conhecimento, mas Martins (2021) vai apresentar o currículo em diferentes dimensões, como o currículo prescrito, apresentado, entre outros.

Pedimos aos professores o planejamento da aula, porém apenas uma professora mandou, e não conseguimos analisar o currículo pela visão do

planejamento. Mas perguntamos os professores, durante a entrevista para entender a perspectiva sobre em um planejamento uma aula sobre Combinatória que aspectos eles consideram mais importante:

Quadro 42: Respostas dos professores sobre aspectos importantes do Planejamento.

Professores	Respostas
João	A partir de como vamos evidenciar a aprendizagem, de forma como vamos fomentar o conhecimento adquirido, como é que vamos fazer essa documentação para que fique visível para a gente.
Tainá	A primeira vez eu faria individualmente para ver mesmo a que pé estava o raciocínio deles. Os recursos ele poderia desenhar e fazer o que fossem, mas eu acho que individualmente seria melhor aproveitado.
Helena	O mais importante que eu considere ela que fizesse parte do dia a dia do aluno porque naquela semana específica eu só usei o tema que eles estavam fazendo todos os dias e os elementos que fazem parte do dia a dia deles.
Taís	A questão do combinar mesmo, prestar atenção nas combinações.

Fonte: Autora

Reparamos que os professores indicam situações diferentes diante o que diz respeito ao planejamento, identificamos alguns pontos referentes ao Conhecimento de Combinatória e Currículo. João pontua o “como vamos fomentar o conhecimento”, entendemos como percepção do currículo moldado, apresentando a preocupação sobre a ação do professor que será feito. E isso podemos conceber como uma ação necessária a todos os docentes, na qual a didática pode levar ao aluno a construírem concepções positivas no raciocínio Combinatória.

A professora Tainá pontua principalmente a avaliação diagnóstica, que faz parte ao Currículo avaliado para os alunos, para entender os conhecimentos deles, e poder partir dessa avaliação. Também a professora pontua a importância de observar os recursos e representações como o desenho, apresentando um conhecimento de Combinatória e Currículo. E consideramos essa fala muito pertinente, na qual é

necessário conhecer a turma para entender seu desenvolvimento e pensar nas ações direcionadas a cada aluno, dependendo das suas limitações e virtudes, com a Combinatória e entre outros conteúdos Matemáticos, na qual percebe a relação do currículo em ação.

A professora Helena vai evidenciar a importância de desenvolver a matemática a partir dos elementos do dia a dia do aluno. Também contemplamos o currículo moldado, quando a professora mostra a necessidade de desenvolver aulas que façam sentido para aqueles que estão estudando, levando situações que vivenciam no dia a dia, para que o conteúdo seja aprendido com mais facilidade.

E a professora Taís chama a atenção nas combinações, nas possibilidades que serão mostradas. Por isso acreditamos que o uso das representações poderá fazer os alunos perceberem o processo de resolução, apresentando dessa forma o currículo prescrito e moldado. Ainda a professora pontua que quer compreender as especificidades de cada situação Combinatória, e por fim efetivar o conhecimento da Combinatória, e o esgotamento de cada possibilidade.

Podemos considerar também o currículo sendo considerações a partir do planejamento e escolhas de recurso que os professores utilizam em suas aulas. Pois de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008) deve incluir os materiais empregados para o ensino desses conteúdos, nesse caso de Combinatória, a organização dos conteúdos de acordo com os diferentes níveis escolares e as referências e contraindicações para a utilização de determinados materiais, em diferentes circunstâncias.

Ainda podemos caracterizar a escolha dos materiais como currículo realizado, entrando no conhecimento de Combinatória e Currículo Conhecimento de Combinatória e ensino, visto que a escolha dos materiais, será de acordo com a finalidade da aula ministrada, e a didática escolhida.

Perceba que nas aulas observadas cada professor optou por materiais e didáticas diferentes, na qual o professor João, em suas estações usou, imagens, fichas com as situações, e caderno para o registro, a fim de desenvolver uma rotação, e experimentação de várias representações da Combinatória.

No caso da professora Tainá, também utilizou como estratégia uma rotação em grupos, mas não utilizou dos mesmos materiais, que o professor João, optantes apenas pelo caderno e lápis, mas que para a sua proposta foi eficiente.

A professora Helena, por outro lado, apresentou suas situações por meio da televisão, o que, na sua perspectiva, chamou a atenção dos alunos, e serviu para apresentar imagens referentes a cada situação, e ainda usou o caderno como fonte de registro.

Já a professora Taís, apresentou a caixa, como meio diferencial, também fazendo com que os alunos achassem muito interessante o trabalho com a Combinatória, especialmente ao demonstrarem que gostariam que a aula de matemática fosse sempre assim. A professora também colocou imagens impressas no quadro, referente a cada situação apresentada, e também usou o caderno como registro dos alunos.

Perguntamos então que outros recursos/representações você acredita que pode utilizar para auxiliar seus alunos no ensino da Combinatória? e tivemos as seguintes respostas:

Quadro 43: Respostas dos professores sobre os recursos que auxiliam no ensino da Combinatória.

Professores	Respostas
João	Então eu acho que a ideia da tecnologia é muito importante, material que possa pegar e vivenciar na prática.
Tainá	Para mim a turma que já é quinto ano não necessitaria se eles tivessem nivelados com 5º ano. Mas eles não estão muito nivelados com 5º ano todo. No primeiro ano, eu acho que os materiais mais para o que é mais interessante. Do quarto para o quinto ano ele já tem um raciocínio já, e também qualquer coisa que eu não conseguisse eu faria mesmo no papel tanto aqui, mas como a minha turma não está bem nivelada para o quinto ano assim eu não vejo ali. Eu acho que eu vejo ali ou dois que é menino assim dizer se não consegue o 5º ano.
Helena	Quando não temos acesso a tecnologia, podemos usar a impressão, que a gente usa muitas vezes, mas também pode levar um elemento de pelúcia e

	brinquedos ou até mesmo pedir para que eles tragam seus brinquedos favoritos, e dar exemplos com eles mesmo usando, e eles ficam assim mais participativos na aula, fazendo parte daquela construção.
Tais	Outros recursos, eu acho que pode ser o tocar, o físico, você colocar um monte de elementos e eles usar lá e utilizar, material tátil.

Fonte: Autora

Dessa forma, conseguimos perceber que os professores propõem materiais tecnológicos, usar a impressão, brinquedos, e materiais manipulativos. Sendo então, recursos que devem ser apresentados a partir do objetivo de aprendizagem, e levando em conta a realidade escolar. Gadelha, Borba e Montenegro (2020) vão indicar que o uso desses recursos pode sim ajudar na aprendizagem dos estudantes, mas sendo contemplado junto com a mediação docente.

Ainda entendemos que na BNCC (2018) na habilidade voltada para o ensino da Combinatória (problemas simples de contagem) no 4º ano, devem ter o suporte de imagens e ou materiais manipuláveis.

A professora Tainá, vai apontar o nivelamento como recurso de auxílio no ensino de Combinatória, mas o nivelamento dependerá do conhecimento de Combinatória e Aluno, que a professora vai desenvolver em sua turma, e entender as capacidades e as dificuldades apresentadas pelos seus alunos, e por fim apresentar estratégias direcionadas a resolução e progresso dos alunos no ensino da Combinatória.

Contudo podemos concluir que os professores apresentam de forma implícita conhecimentos que podem ser aprofundados acerca do currículo da Combinatória, e o conhecimento da combinatória no Horizonte. A fim de aprimorar ainda mais os conhecimentos docentes e em consequência desenvolver o ensino e aprendizagem da combinatória nos Anos Iniciais do Fundamental.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação deu início com a proposta de discutir os conhecimentos docentes dos professores que ensinam Combinatória nos anos iniciais do Fundamental. Isto foi desenvolvido por meio de uma observação de aula idealizada e promovida pelos participantes e uma entrevista na qual retratou a visão dos participantes sobre todas as etapas vivenciadas. Abordou também, o processo de formação continuada desses professores, permitiu que os professores se sentissem mais seguros e preparados para desenvolver suas práticas educativas, e quais conhecimentos foram mobilizados durante a formação.

Logo, o curso de formação sendo a primeira etapa da pesquisa, em que participaram seis professores, foi estabelecida para abordar sobre as situações Combinatórias (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto de Medidas) pontuando principalmente os invariantes dessas situações e evidenciando meios de resolução como a representação simbólica e o uso de recursos. Ainda foram discutidas propostas de ensino para os anos iniciais e como se apresenta no currículo da BNCC (2018). Apesar de tão pouco tempo de discussão na formação, os professores foram muito bem nas suas aulas, e algumas dificuldades que surgiram foram esperadas e acredita-se que poderão ser superadas com outras discussões sobre o tema com esses professores.

No decorrer da formação, conseguimos analisar os Conhecimentos Comum de Combinatória, em que evidenciamos que os professores obtiveram mais acertos, quatro professores conseguiram com a resolução dos problemas, a situação de Produto de Medidas, em que podemos identificar que essa facilidade se deu por essa situação ser mais presente no contexto escolar dos Anos Iniciais do Fundamental, e assegurado na BNCC (2018) como problemas simples de contagem, que deve se combinar cada elemento de uma coleção com todos de outra.

Já a situação de Permutação e Combinação, foram as situações em que apenas obtiveram um acerto em cada situação. Com isso, podemos perceber que a maioria dos professores, não apresentaram um conhecimento comum de Combinatória, fazendo com que a formação fosse reestruturada para auxiliar nessa dificuldade apresentada pelos docentes.

Também com a formação, investigamos o Conhecimento Especializado de Combinatória, onde fortalecemos nossa identificação com os Invariantes de Combinatória. Contudo usamos um protocolo para ajudar os professores na identificação desses invariantes de cada situação, pois apenas o invariante de ordem era mais conhecido por um dos docentes. Dessa forma, com o protocolo conseguimos pontuar a escolha dos elementos, a ordem e o grupo dos elementos.

Diante das análises percebemos que o conhecimento especializado de Combinatória não estava presente em cada situação discutida, em que os docentes se confundiam ou não identificavam o invariante de algumas das situações. Com isso, reforçamos a necessidade do aprofundamento dos invariantes de Combinatória, visto que os professores devem ter esse conhecimento especializado para dar mais fundamento em seu processo de ensino.

Posteriormente a formação continuada, conseguimos que quatro participantes desenvolvessem e colocassem em prática uma aula na temática de Combinatória, na qual fizemos a observação e analisamos com base nos Conhecimentos Docentes de Ball, Thames e Phelps (2008).

Durante as observações, conseguimos pontuar os seguintes conhecimentos docentes nas aulas dos professores: Conhecimento Comum de Combinatória, Conhecimento Especializado de Combinatória, Conhecimento de Combinatória e Ensino, Conhecimento de Combinatória e Aluno, e Conhecimento de Combinatória e currículo (percebendo o currículo em ação e realizado). Dessa forma, identificamos e destacamos por meio de cores, os momentos que evidenciam tais conhecimentos durante a aula.

Consideramos que o conhecimento de Combinatória e ensino foi o conhecimento mais apresentado pelos professores, mostrando diferentes estratégias e métodos de ensino, por cada professor. Ainda percebemos que todos os docentes desenvolveram uma aula em que os alunos respondessem situações de Combinatória, e alguns iam evidenciando as suas resoluções.

Pontuamos que durante o processo de ensino percebemos muitos pontos positivos durante essa etapa e também alguns professores apresentaram

dificuldades, principalmente na evidência da resolução da situação de Combinação, mostrando que tais docentes devem continuar se aprofundando, no que diz respeito às especificidades de cada situação, para no futuro não apresentar tais limitações com essas situações, ou os seus invariantes. Pois, é possível haver mudança e que ela depende principalmente do professor. Destacamos assim que todos os participantes estiveram na formação, e em outras etapas, por vontade própria, pois não foi uma parceria ou um encargo da escola. Ainda todos esses receberam um certificado pela sua presença na pesquisa e formação do grupo de pesquisa Geração.

Conseguimos perceber que todos os docentes salientaram o uso das representações simbólicas em suas aulas, que esses aspectos ajudaram os alunos no entendimento e resolução dos desafios propostos pelos docentes.

No que diz respeito ao Conhecimento de Combinatória e Aluno, nem todos os professores evidenciaram esse conhecimento, mas também concluímos que isso se deu, pois, tais professores relataram ser o primeiro contato dos alunos com essa temática. Porém, entendemos que é de suma importância os professores irem em busca de entender seus alunos a fim de perceber qual estratégia usar durante sua aula.

Ainda sinalizamos que os conhecimentos de Combinatória no Horizonte e o de Combinatória e Currículo foram poucas vezes mobilizados durante as aulas dos participantes. Sendo considerada uma baixa evidência. Assim conseguimos perceber, durante a entrevista, alguns pontos que possam ser conectados a esses conhecimentos.

Percebemos que ao questionar sobre quando devemos iniciar o ensino de Combinatória e questionamos sobre atividades futuras, os professores evidenciaram o conhecimento de Combinatória no Horizonte, mostrando o entendimento de diferentes etapas da Combinatória em diferentes níveis de ensino, visto que era o primeiro contato da maioria dos professores com essa temática.

Dessa forma, os professores conseguiram perceber que nas etapas do primeiro ciclo do Fundamental, é importante desenvolver a Combinatória de forma

mais simples e indicando os usos dos materiais manipulados para o apoio na aprendizagem.

Além disso, quando indagamos sobre o planejamento e os recursos que auxiliam no desenvolvimento da Combinatória, os professores a partir de suas respostas apresentaram o Conhecimento de Combinatória e Currículo. Na qual apresentaram, diferentes indicações como a didática, a avaliação diagnóstica, a aproximação do contexto vivido pelo aluno, e evidenciar a atenção às possibilidades que serão mostradas.

Sobre o uso dos recursos atrelados ao desenvolvimento Combinatório, os professores apontam o uso de tecnologias, materiais manipuláveis, materiais que estejam na realidade vivenciada do professor e do aluno, brinquedos dentre outros.

Contudo, defendemos a integração do conhecimento docente e os processos de ensino desenvolvidos por professores, a fim que desde a formação inicial sejam aperfeiçoados e em suas buscas pessoais, sejam ainda mais evidenciados.

Conseguimos entender, que essa formação continuada ajudou os professores no desenvolvimento de suas aulas, porém, alguns aspectos podem ser melhorados, como o tempo maior para a formação, em que dê mais ênfase nas situações Combinatórias, e seus invariantes, apresentando ainda diferentes contextos de resolução das situações e mais informações didáticas sobre a Combinatória. Principalmente, fazer uma análise diagnóstica dos participantes e a partir disso desenvolver uma formação mais pontual.

Essa pesquisa pode contribuir com a compreensão acerca da interação entre os domínios dos conhecimentos docentes no processo de ensino na sala de aula dos 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, centrado especialmente nos professores que ensinam Matemática e, mais especificamente, na preparação e ação desses professores para o ensino da Combinatória. E ainda, contribuir com o desenvolvimento de futuras formações continuadas sobre Combinatória nos Anos Iniciais. Servindo de inspiração para que outros professores se conscientizem da necessidade de maior conhecimento acerca dos conteúdos Matemáticos que serão desenvolvidos na sala de aula no Ensino Fundamental.

Com isso, o presente estudo pôde trazer elementos para que outros pesquisadores investiguem o Conhecimento de Combinatória no Horizonte, apresentando processos de ensino em todas as etapas da Educação Básica; Propostas de investigações em sala de aula e a partir das considerações evidenciadas nesse processo, fazer uma formação em loco sobre as dificuldades apresentadas no processo de ensino, em colaboração aos Conhecimentos Docentes no ensino de Combinatória.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. C. A.; BIAJONE, J. **Saberes docentes e formação inicial de professores**: implicações e desafios para as propostas de formação. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 33, n. 2, p. 281-295, maio/ago. 2007.

ASSIS, A. M. R. B. **Conhecimentos de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora**. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2014.

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?** 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013. Cap. 4.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. ContentKnowledge for Teaching: what makes it special? *JournalofTeacherEducation*. Michigan, v. 59, n. 5 p. 389-407. Novembro, 2008.

BARBOSA, A. P. R.. **A Matemática nos cursos de Pedagogia: contexto formativo de futuros professores**. 2021. 253 p. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru, 2021.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Proposta para Base Nacional Comum da Formação de Professores da Educação Básica**. Brasília-DF: MEC, 2018b.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil/Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental**. - Brasília: MEC/SEF, 1998, volume: 1 e 2.

BORBA, R. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. **Anais** eletrônicos do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. ENCEPAI. Recife -PE. 2016.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais... 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM)**. Bahia, 2010.

BORBA, R. Vamos combinar? Aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. **Salto para o Futuro**, v. 6, p. 6-10, 2014.

BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), V. 29, pp. 1348-1368, 2015.

CENSO Demográfico, 2010. **Resultados do universo: características da população e domicílios**. Disponível em <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em nov.2023. Para outras informações, consultar o ATLAS do desenvolvimento humano

na Região Metropolitana do Recife, 2011-nova tiragem. Disponível em  
<<http://www.recife.pe.gov.br>>

ENGLISH, L. Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In: Jones, G. A. (Ed) **Exploring probability in school: Challenges for teaching and Learning**. USA: Springer, 2005. pp. 121-141.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: Fiorentini, D. **Formação de professores da Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado das letras, 2003.

FLAVELL, J.H. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. 3 São Paulo, 1988.

GADELHA, D.; BORBA, R. Contribuições de materiais manipuláveis - concreto e virtual - na resolução de problemas combinatórios. In: **Anais XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Anais...Cuiabá (MT), 2019.

GADELHA, D.; BORBA, R.; MONTENEGRO, J. O uso de recursos didáticos na resolução de problemas combinatórios. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.18, p.419-441, jan.-jun. 2020.

HOLANDA, D. S. **Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática: conhecimentos docentes de combinatória**. 2017. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

LIMA, A. P. B. **Princípio fundamental da contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias**. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2015.

LIMA, S. M. **A formação do pedagogo e o ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2011. 212 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, 2011.

MANZINI, E. J. **A entrevista na pesquisa social**. Didática, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1990/1991

MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração e interpretação de dados**. 3.ed. São Paulo: Atlas, 1996.

MARTINS, G. A.; THEÓPHILO, C. R. **Metodologia da investigação científica para ciências sociais aplicadas**. São Paulo: Editora Atlas, 2007.

MARTINS, G. V. **Do prescrito ao avaliado: o currículo de matemática da EJA em suas distintas instâncias no que se refere ao tema combinatória**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

MERAYO, F. **Matemática discreta**. Madri: Thomson Paraninfo, 2001.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 2018. 247 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação em

Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2018.

OLIVEIRA, Y. C.; MONTENEGRO, J. A. Possibilidades de práticas docentes sobre combinatória utilizadas por professores dos anos iniciais do ensino fundamental. In: **Anais do Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Anais...Caruaru(PE) Webconferência**, 2022. Disponível em:

<<https://www.even3.com.br/anais/VIIIPEM/459533-POSSIBILIDADES-DE-PRATICAS-DOCENTES-SOBRE-COMBINATORIA-UTILIZADAS-POR-PROFESSORES-DOS-ANOS-INICIAIS-DO-ENSINO-FUN>>. Acesso em: 16/05/2023

PERNAMBUCO, **Currículo de Pernambuco Ensino Fundamental**, 2019.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1º a 4º série. **Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan/jun – 2009.**

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA- Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010.

ROCHA, C. A.; Borba, R. E. S. R. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo**: Uma reflexão sobre a prática. 3. ed., Porto Alegre: Artmed, 2000.

SHULMAN, L. Knowledgeandteaching: foundationsofthe New Reform. **Harvard Educational Review**. Massachusetts. v. 57, n. 1, pp. 1-21. Fevereiro, 1987.

SHULMAN, L. S. Thosewhounderstand: knowledgegrowth. In: **TeachingEducationalResearch**. Washington: DC, v. 15, n. 2, 1986.

SILVA, A. C. **O uso de material manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação infantil**. 2019. 139 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.

SILVA, D. F. C. **A mobilização de conhecimentos combinatórios de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais a partir de um processo formativo**. 2023.168 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduaçãoem Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2023.

VEGA, D. A. **Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação?**. 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, PE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014.

VERGNAUD, G. A comprehensivetheoryofrepresentation for mathematicseducation. **JournalofMathematicalBehavior**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. Multiplicative Conceptual Field WhatandWhy?. In: HAREL, Guershon; CONFREY, Jere (org.). **The developmentofmultiplicativereasoning in**

**the learning of mathematics.** Nova York: Eric, 1994. p. 41-59. Disponível: <https://eric.ed.gov/?id=ED379161>. Acesso em: 2 jun. 2023.

VERGNAUD, G. Multiplicativestructures. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (ed.) **AcquisitionofMathematicsConceptsand Processes.** New York: Academic Press Inc, 1983.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, um exemplo:** as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, p. 75-90, 1986.

# ANEXOS E APÊNDICES

## Anexo 1–Questionamentos feitos pela pesquisadora com base em Silva (2023)

Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles? / Qual é ele?

- De quantas maneiras diferentes pode ser escolhido um representante e um vice-representante? Por quê? 158

- Todos os elementos do conjunto alunos serão utilizados?

- A ordem da colocação dos cargos gera novas possibilidades? Por quê?

- Escolher os alunos César e Bete é a mesma coisa que escolher os alunos Bete e César? Isso gera novas possibilidades?

Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles /Qual é ele?

- Poderão ser constituídos subconjuntos de frutas a partir deste conjunto maior de frutas?

- Quantos subconjuntos diferentes podemos ter nesta situação?

- A ordem sabores das frutas da barraca poderá escolher gera novas possibilidades? Por quê?

- Escolher acerola e laranja é a mesma coisa que escolher laranja e acerola?

Questionamentos feitos pela pesquisadora às professoras participantes:

- Quantos conjuntos há neste problema? Quais são eles? / Qual é ele?

- Todos os objetos são utilizados lado a lado na prateleira?

- De quantas formas diferentes pode-se organizar os três objetos na prateleira?

Neste problema há quantos conjuntos? Quais são eles? / Qual é ele?

- Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos dos copos são diferentes?

- Os conjuntos de sabores de sucos e de tamanhos de copos, ao serem combinados, podem construir um novo conjunto? Quais seriam as possibilidades?

- A ordem dos sabores dos sucos e de tamanhos dos copos gera novas possibilidades de combinação? Por quê?

- A ordem da organização gera novas possibilidades? Por quê? Escolher, nesta ordem, bola, troféu e porta-retrato, é a mesma coisa que escolher porta-retrato, troféu e bola?

Fonte: Silva (2023)

## Anexo 2 – Protocolos de respostas de alunos baseados em Silva (2023)

## Protocolos - respostas de estudantes

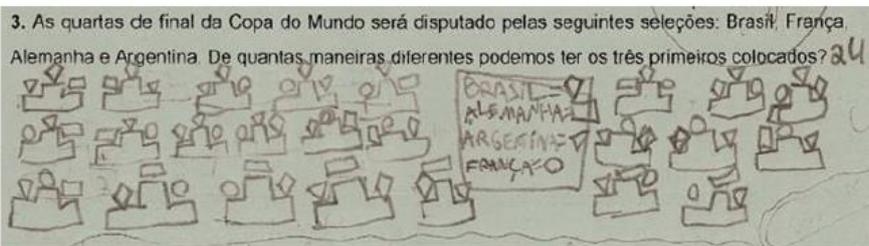
## Protocolo 1

4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

Cão, gato  
 rato, peixe  
 peixe, cão  
 rato, cão  
 peixe, gato

Fonte: VEGA (2014)

## Protocolo 2



Fonte: Pessoa e Borba (2009, p. 33)

## Protocolo 3

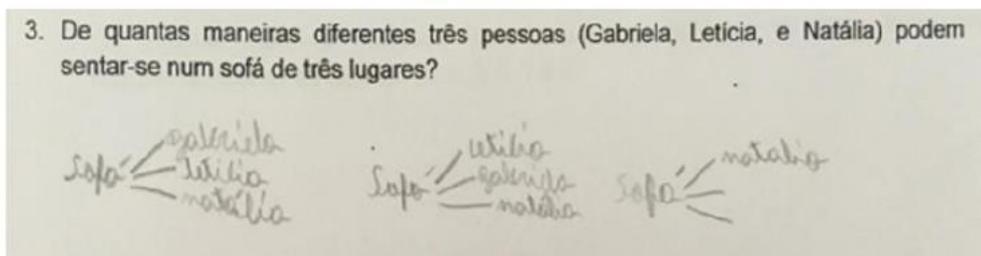
4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (cajambresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 + 3 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

R: Júlia poderá comer uma pizza de 5 maneiras diferentes

Fonte: VEGA (2014)

## Protocolo 4



Fonte: Montenegro (2018)

## Anexo 3 – Questionamentos sobre os protocolos de respostas dos alunos

Questionamento (1-3) feitos na apresentação dos protocolos:

- 1 – O estudante compreendeu o problema? Qual foi a lógica utilizada?
- 2 – A resposta do estudante ao problema apresentado está adequada? Caso não, qual seria a resposta correta?
- 3 – Foram esgotadas todas as possibilidades de combinações? Ou seja, foram enumerados ou contados todos os casos que atendem ao solicitado no problema?

*Estes questionamentos (4-7) foram feitos após a apresentação das quatro situações:*

- 4 – Qual dos estudantes apresentou mais dificuldades? Qual foi a dificuldade? Por que isso aconteceu?
- 5 – De que maneira os estudantes resolveram os problemas (listagem, diagramas de possibilidades ou desenhos)? O que você pode dizer sobre as estratégias escolhidas por eles?
- 6 – Como trabalhar com essas questões na sala de aula a fim de que os estudantes possam enxergar as propriedades dos invariantes de cada problema?
- 7 – O que poderia ser antecipado para que os estudantes considerassem interessante e motivador na estratégia de resolução de situações combinatórias?

Fonte: Silva (2023)

## Apêndice 1 – Roteiro de Observação

Etapas da Observação	Conhecimentos	Pontos a serem observados
Itens a serem observados sobre os Diferentes Conhecimentos Docentes manifestados pelo professor no Ensino de Combinatória	Conhecimento Comum de Combinatória:	Como os professores solucionaram os problemas e os trabalhos, propostos para os alunos?

<p>Conhecimento Especializado de Combinatória:</p>	<p>Todas as situações foram trabalhadas em sala? Se não, quais não foram? Houve destaque para os Invariantes, de escolha e de ordenação? O docente demonstra saber as representações que podem ser utilizadas na combinatória? Os professores demonstram ter estratégias de resolução que uma determinada situação de Combinatória exige?</p>
<p>Conhecimento Horizontal do Conteúdo:</p>	<p>O professor se utiliza de quantidades baixas nos problemas e situações propostas de Combinatória? visto que seus alunos são do 5º Ano? O professor mostra ter ciência no conhecimento da Combinatória em diferentes etapas do ensino?</p>
<p>Conhecimento de Combinatória e Alunos</p>	<p>O professor buscou atividades ou ações que motivem os alunos? O professor antecipou as possíveis dúvidas ou erros dos seus alunos?</p>
<p>Conhecimento de Combinatória e Ensino</p>	<p>Quais exemplos foram usados no ensino de Combinatória? A professora levou em consideração as diferentes representações possíveis? Se sim, quais? Os professores buscam perceber ou identificar os conhecimentos prévios que os alunos trazem a respeito de Combinatória? Eles levam esses conhecimentos em consideração? De que forma a Combinatória foi trabalhada? O conteúdo foi transmitido ou construído em sala de aula? Quais recursos foram utilizados durante a aula?</p>
<p>Conhecimento de Combinatória e Currículo</p>	<p>Os recursos e representações apontados no currículo foram usados na aula? De que forma foram utilizados esses recursos? Os recursos utilizados ajudaram no aprendizado desse conteúdo? A professora fez referência a BNCC no seu planejamento?</p>

Fonte: Autora

## Apêndice 2 – Roteiro de Entrevista

### **Traçar o perfil**

Qual a sua idade?

Qual a sua formação?

Você possui pós-graduação?

Há quanto tempo você leciona?

Você trabalha na rede pública ou privada?

Você já trabalhou em outra rede de ensino?

Atualmente, está em qual(is) ano(s)/ ciclo(s)?

Você trabalha em qual(is) turnos?

Você ensina matemática há quanto tempo? Gosta da disciplina?

Você ensina Combinatória em suas turmas? Se não, por quê?

### **Formação**

Quais dificuldades você teve durante a formação?

O que você mais gostou da formação?

O que você acha que poderia melhorar em uma próxima formação?

Qual situação combinatória você achou mais difícil?

Quais cuidados o professor deve levar em conta no ensino de Combinatória?

### **Investigar os Conhecimentos de Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo dos professores em relação ao tema Combinatória.**

Você poderia me falar sobre suas expectativas com cada etapa planejada de sua aula?

Suas expectativas foram atendidas?

Qual a sua percepção sobre a aula?

Qual dificuldade você sentiu na realização da aula?

Quais as situações que você escolheu para trabalhar na aula? Por quê?

Como você trouxe os invariantes/características das diferentes situações trabalhadas?

Como você acredita que lidou com os erros/dúvidas demonstrados pelos alunos? Cite exemplos

Ao planejar a aula, qual estratégia você pensou em utilizar para o desenvolvimento das atividades didáticas propostas?

Como você pensou nos problemas propostos?

O resultado das situações trabalhadas em sala foi previamente planejados? Por quê?

Qual representação era esperada para a resolução dos problemas?

Você esperava a utilização do cálculo numérico?

Você poderia me explicar o motivo da escolha de cada recurso utilizado em aula?

Pelas representações feitas no caderno por seus alunos, qual você observou com mais frequência?

O que você achou sobre as diferentes representações feitas pelos alunos?

Por que você utilizou os recursos para apresentar as situações?

### **Investigar os Conhecimentos de Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo dos professores em relação ao tema Combinatória.**

- Por que você acredita que essa temática trabalhada possa ser dada na sua turma?

- Podemos trabalhar com esta temática a partir de que ano? Por quê?

- Você concorda que seja possível esse trabalho com alunos dos primeiros ciclos dos anos iniciais?

- Ao planejar sua aula sobre essa temática, que aspectos você considera mais importante?

- Que outros recursos/representações você acredita que pode utilizar para auxiliar seus alunos no ensino da Combinatória?

- Quais outras atividades futuras você considera importante realizar em sua turma, sobre a temática de Combinatória?

Fonte: Autora