



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO

**Dinâmica Hierárquica, Tempos de Primeira Passagem  
e Informação em Mercados de Câmbio**

Recife

2025

LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO

**Dinâmica Hierárquica, Tempos de Primeira Passagem  
e Informação em Mercados de Câmbio**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

**Área de Concentração:** Física Teórica e Computacional

**Orientador (a):** Antônio Murilo Santos Macêdo

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Ribeiro, Lucas Ramon Carvalho.

Dinâmica hierárquica, tempos de primeira passagem e  
informação em mercados de câmbio / Lucas Ramon Carvalho Ribeiro.  
- Recife, 2025.

105f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro  
de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de pós graduação em  
Física, 2025.

Orientação: Antônio Murilo Santos Macêdo.

Inclui referências e apêndices.

1. Sistemas complexos; 2. Termodinâmica de informação; 3.  
Tempos de primeira passagem; 4. Expert advisor; 5. Redes  
neurais. I. Macêdo, Antônio Murilo Santos. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO**

**DINÂMICA HIERÁRQUICA, TEMPOS DE PRIMEIRA PASSAGEM E  
INFORMAÇÃO EM MERCADOS DE CÂMBIO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Data de aprovação: 31/01/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Antonio Murilo Santos Macedo  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Paulo Roberto de Araujo Campos  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. André Luis da Mota Vilela  
Examinador Interno  
Universidade de Pernambuco

---

Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan  
Examinador Externo  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

---

Prof. Dr. Rodrigo Miranda Pereira  
Examinador Externo  
Universidade Federal Fluminense

## **AGRADECIMENTOS**

Quero agradecer primeiramente a Deus pela vida que tenho e por minha saúde. Aos meus pais Otilia Carvalho Cardozo e Antonio Maria Ribeiro por todo amor, incentivo, suporte e confiança nas minhas escolhas. Ao meu irmão Antonio Filho que sempre me ajuda quando preciso. À minha namorada Ianara de Fátima que me apoia e acredita em mim.

Aos demais familiares que desejam meu bem.

Ao meu orientador, professor Antônio Murilo, pelos ensinamentos, discussões, reuniões e projetos desenvolvidos ao longo desses anos.

Ao professor Giovani Vasconcelos, que sempre esteve presente nos projetos, dando importantes caminhos e perspectivas.

Às amigas que fiz e mantive nesse período.

Ao apoio financeiro dado pelo CNPq.

“A mente quer ser, mas querendo erra  
Pois só sem desejos é que se vive o agora.” (BELCHIOR, 1980).

## RESUMO

Nesta tese, propomos um estudo que conecta conceitos de sistemas complexos e termodinâmica da informação com mercados financeiros. O foco está nos mercados Forex, especificamente nos três pares de moedas mais negociados: EUR-USD, USD-JPY e GBP-USD. As distribuições de retorno e volatilidade são examinadas usando o formalismo da teoria H, que fornece um modelo de intermitência hierárquica para a cascata de informações no mercado de câmbio. Identificamos que os mercados possuem uma hierarquia de escalas de tempo, em que mercados maiores apresentam um número maior de níveis hierárquicos. Os tempos de primeira passagem dentro de um intervalo também foram estudados para os mesmos pares. Para explicar a divergência da lei exponencial nos tempos medidos, utilizamos a abordagem da teoria H para as distribuições de tempos característicos, que foi realizada nas duas classes de universalidade resultantes da teoria. Constatou-se que os mercados possuem um número de níveis de hierarquia distintos e pertencem a classes diferentes. Uma análise sobre a influência do tamanho do intervalo de observação também foi realizada, e verificou-se que intervalos maiores resultam em um menor número de níveis hierárquicos para um mesmo mercado. Na parte de termodinâmica da informação, criamos um análogo da máquina de Szilárd que opera no Forex. Ela funciona utilizando um *Expert Advisor*, ou robô de *trading*, que executa compras e vendas automaticamente. As operações são feitas por uma rede neural artificial que observa os valores dos indicadores financeiros. Por meio de teoremas de flutuação, é possível verificar a contribuição de informação trazida pela rede neural.

**Palavras-chaves:** Sistemas Complexos. Termodinâmica de Informação. Tempos de Primeira Passagem. *Expert Advisor*. Redes Neurais.

## ABSTRACT

In this thesis, we propose a study connecting concepts from complex systems and the thermodynamics of information to financial markets. The focus is on Forex markets, specifically the three most traded currency pairs: EUR-USD, USD-JPY, and GBP-USD. Return and volatility distributions are examined using the H-theory formalism, which provides a hierarchical intermittency model for the cascade of information in the foreign exchange market. We identify that markets exhibit a hierarchy of time scales, where larger markets present a greater number of hierarchical levels. First-passage times within an interval were also studied for the same currency pairs. To explain the deviation from the exponential law in the measured times, we utilized the H-theory approach for the distributions of characteristic times, performed within the two universality classes resulting from the theory. It was found that markets have distinct numbers of hierarchical levels and belong to different classes. An analysis of the influence of the observation interval size was also conducted, revealing that larger intervals result in a smaller number of hierarchical levels for the same market. In the information thermodynamics part, we created an analog of the Szilárd engine that operates in the Forex market. It works using an *Expert Advisor* or trading robot that automatically executes buy and sell operations. These operations are driven by an artificial neural network that observes the values of financial indicators. Using fluctuation theorems, it is possible to verify the informational contribution provided by the neural network.

**Keywords:** Complex Systems. Thermodynamics of Information. First-Passage Times. *Expert Advisor*. Neural Networks.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sinal de velocidade de um fluido em um túnel de vento. <b>Fonte:</b> (FRISCH, 1995) . . . . .	17
Figura 2 – Gráfico log-log do espectro de energia do componente longitudinal (círculos brancos) e do componente lateral (círculos pretos) das flutuações de velocidade no domínio temporal em um jato com $Re=626$ . <b>Fonte:</b> (FRISCH, 1995) . . . . .	18
Figura 3 – Densidade de probabilidade para os incrementos de preços $\Delta x = x(t) - x(t + \Delta t)$ , para diferentes $\Delta t$ . <b>Fonte:</b> (GHASHGHAIE et al., 1996) . . . . .	18
Figura 4 – Função densidade de probabilidade dos tempos de escape para o retorno dos preços para os modelos a) GARCH e b) Heston comparados com dados reais. <b>Fonte:</b> (VALENTI; SPAGNOLO; BONANNO, 2007) . . . . .	21
Figura 5 – Fração de <i>day traders</i> com lucro positivo. Esta figura mostra a fração de indivíduos com lucro bruto positivo (linha preta com círculos) e lucro líquido positivo (linha vermelha com triângulos). As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95%. <b>Fonte:</b> (CHAGUE; DE-LOSSO; GIOVANNETTI, 2020) . . . . .	23
Figura 6 – Relação de flutuação para tempo de primeira passagem. A razão $P_{-N}(t)/P_N(t)$ para vários valores de $N$ . Círculos são valores experimentais e as linhas são valores teóricos. <b>Fonte:</b> (SINGH et al., 2019) . . . . .	24
Figura 7 – Cotações de uma hora para as taxas de câmbio dos três pares de moedas mais negociados: EUR-USD (azul), JPY/USD (laranja) e GBP-USD (verde). Os dados foram normalizados no ponto inicial para facilitar a comparação visual. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	27
Figura 8 – (a) Gráficos da distribuição $P_N(x)$ dada na Eq. (2.14) para $v_0 = 1$ , $\beta = 1$ e $N = 1,2,3,4,5$ . (b) O mesmo que em (a), em escala log-log para o lado positivo ( $x > 0$ ) das distribuições. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	33

Figura 9 – Erros do ajuste conjunto em função do número $N$ de níveis hierárquicos para os três pares de moedas mais negociados: EUR-USD (círculos azuis), USD-JPY (triângulos laranja) e GBP-USD (quadrados verdes). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	35
Figura 10 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para $N = 1$ e $\beta = 0,53$ (tracejado verde), $N = 2$ e $\beta = 0,93$ (pontilhado laranja), $N = 3$ e $\beta = 1,36$ (tracejado roxo), $N = 4$ e $\beta = 1,85$ (tracejado azul), $N = 5$ e $\beta = 2,27$ (vermelho). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para $N = 5$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade $v(t)$ e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	36
Figura 11 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para $N = 1$ e $\beta = 0,38$ (tracejado verde), $N = 2$ e $\beta = 0,85$ (vermelho). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para $N = 2$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade $v(t)$ e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	37
Figura 12 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linha vermelha) para $N = 1$ e $\beta = 0,35$ . O melhor ajuste conjunto foi alcançado para $N = 1$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade $v(t)$ e a previsão do modelo (linha) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024). . . . .	38
Figura 13 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linha vermelha) para $N = 10$ e $\beta = 5,23$ , classe exponencial esticada. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade $v(t)$ e a previsão do modelo (linha) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	39

Figura 14 – Ilustração de um movimento browniano que se inicia em $X = 10$ até atingir a origem. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	44
Figura 15 – Ilustração de um movimento browniano que se inicia em $X = 10$ até atingir uma das duas barreiras situadas em $X = 0$ e $X = 20$ . <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	45
Figura 16 – (a) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para $N = 1$ e $\beta = 1,2,3,4,5$ na classe lei de potência. (b) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para $N = 1,2,3,4,5$ , $\tau_0 = 1$ e $\beta = 1$ na classe lei de potência. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	54
Figura 17 – (a) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para $N = 1$ e $\beta = 1,2,3,4,5$ na classe exponencial esticada. (b) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para $N = 1,2,3,4,5$ , $\tau_0 = 1$ e $\beta = 1$ na classe exponencial esticada. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	56
Figura 18 – Distribuições teóricas das equações 3.53 e 3.63 para $N = 1$ , $\tau_0 = 1$ e $\beta = 1$ . <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	57
Figura 19 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e ajuste exponencial (linha vermelha) para $L = 25\sigma$ . (b) Mesma convenção de cores de (a) com $L = 2\sigma$ . <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	58
Figura 20 – Simulação de cotação de um par de moedas quaisquer ao longo do tempo. A linha azul e contínua representa o valor da cotação. As linhas tracejadas representam as barreiras para um preço inicial específico sendo a vermelha a barreira superior (Take Profit) e a azul a barreira inferior (Stop Loss). Os pontos em vermelho representam o momento em que se entrou comprado nesse mercado. <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	60
Figura 21 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linhas) para $N = 2$ e $\beta_E = 15,94$ na classe exponencial esticada (linha vermelha), $N = 5$ e $\beta_L = 28,18$ na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 1. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média $w(\tau)$ e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). <b>Fonte:</b> Elaborada pelo autor. . . . .	63

- Figura 22 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 5$  e  $\beta_E = 22,78$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 5$  e  $\beta_L = 24,04$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 2. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 64
- Figura 23 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 5$  e  $\beta_E = 34$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 2$  e  $\beta_L = 14,23$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe lei de potência; ver Tabela 3. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 65
- Figura 24 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 1$  e  $\beta_E = 5,55$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 5$  e  $\beta_L = 23,87$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 4. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 67
- Figura 25 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 3$  e  $\beta_E = 8,32$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 8$  e  $\beta_L = 23,67$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 5. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 68

- Figura 26 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 6$  e  $\beta_E = 26,01$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 1$  e  $\beta_L = 4,93$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 6. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 69
- Figura 27 – Ilustração de uma máquina de Szilárd: uma caixa contendo uma única molécula é dividida em duas partes iguais. A parte que contém a molécula pode se expandir até o volume total da caixa levantando o bloco. Em seguida, a partição é introduzida novamente e o processo se repete. **Fonte:** (KOSKI et al., 2014) . . . . . 72
- Figura 28 – Arquitetura básica de redes neurais. (A) Os componentes básicos de uma rede neural são neurônios passam por uma transformação linear que pondera os pesos das várias entradas, seguida por uma função de ativação não linear. (B) Os neurônios são organizados em camadas com a saída de uma camada servindo como entrada para a próxima camada. **Fonte:** (MEHTA et al., 2019) 79
- Figura 29 – Valor da função *Loss* em cada época. Em azul o valor para a fase de treinamento. Em laranja para a fase de validação. **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 84
- Figura 30 – Relação de flutuação para tempos de primeira passagem. Razão  $P_N(t)/P_{-N}(t)$  para  $N = 2$  e vários valores de  $t$ . Os pontos azuis representam a distribuição empírica e a linha vermelha o ajuste exponencial. (a) EA atuando sem rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0109$ . (b) EA atuando com rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0198$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 85
- Figura 31 – Relação de flutuação para tempos de primeira passagem. Razão  $P_N(t)/P_{-N}(t)$  para  $N = 3$  e vários valores de  $t$ . Os pontos azuis representam a distribuição empírica e a linha vermelha o ajuste exponencial. (a) EA atuando sem rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0227$ . (b) EA atuando com rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0252$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor. . . . . 86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Erros para cada $N$ e cada classe do par GBP-USD. $L = 2\sigma_{(GBP-USD)}$	. . .	62
Tabela 2	– Erros para cada $N$ e cada classe do par USD-JPY. $L = 2\sigma_{(USD-JPY)}$	. . .	62
Tabela 3	– Erros para cada $N$ e cada classe do par EUR-USD. $L = 4\sigma_{(EUR-USD)}$	. . .	65
Tabela 4	– Erros para cada $N$ e cada classe do par GBP-USD. $L = 4\sigma_{(GBP-USD)}$	. . .	66
Tabela 5	– Erros para cada $N$ e cada classe do par USD-JPY. $L = 4\sigma_{(USD-JPY)}$	. . .	66
Tabela 6	– Erros para cada $N$ e cada classe do par EUR-USD. $L = 6\sigma_{(EUR-USD)}$	. . .	66

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>HIERARQUIA DA TURBULÊNCIA EM MERCADOS FOREX</b>	<b>26</b>
2.1	TEORIA H EM MERCADOS FOREX	27
2.1.1	<b>O modelo</b>	<b>28</b>
2.1.2	<b>A série da volatilidade</b>	<b>33</b>
2.1.3	<b>Resultados</b>	<b>35</b>
2.1.4	<b>Discussão</b>	<b>38</b>
2.2	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	40
<b>3</b>	<b>HIERARQUIA EM TEMPOS CARACTERÍSTICOS DE PRIMEIRA PASSAGEM</b>	<b>42</b>
3.1	INTRODUÇÃO A TEMPOS DE PRIMEIRA PASSAGEM	42
3.1.1	<b>Tempos de primeira passagem em uma barreira</b>	<b>43</b>
3.1.2	<b>Tempos de primeira passagem dentro de uma região</b>	<b>45</b>
3.1.3	<b>Tempos de primeira passagem para volatilidade estocástica</b>	<b>47</b>
3.2	VERSÃO HIERÁRQUICA DOS TEMPOS CARACTERÍSTICOS	49
3.2.1	<b>Classe Lei de Potência</b>	<b>51</b>
3.2.1.1	<i>Caso <math>N=1</math></i>	52
3.2.1.2	<i>Caso <math>N&gt;1</math></i>	52
3.2.2	<b>Classe Exponencial esticada</b>	<b>53</b>
3.2.2.1	<i>Caso <math>N=1</math></i>	53
3.2.2.2	<i>Caso <math>N&gt;1</math></i>	55
3.3	APLICAÇÃO EM MERCADO FOREX	57
3.3.1	<b>Extração de dados</b>	<b>58</b>
3.3.2	<b>Uma série para a média</b>	<b>60</b>
3.3.3	<b>Resultados</b>	<b>61</b>
3.3.4	<b>Discussão</b>	<b>64</b>
3.4	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	70
<b>4</b>	<b>INFORMAÇÃO EM EXPERT ADVISORS</b>	<b>71</b>
4.1	INTRODUÇÃO À TERMODINÂMICA DA INFORMAÇÃO	71
4.1.1	<b>Máquina de Szilárd</b>	<b>72</b>

4.1.2	<b>Teorema de flutuação</b> . . . . .	<b>73</b>
4.2	REDES NEURAIS E <i>TRADING</i> . . . . .	76
4.2.1	<b>Rede Feed-Forward</b> . . . . .	<b>78</b>
4.2.2	<b>Construção e utilização da Rede</b> . . . . .	<b>80</b>
4.2.2.1	<i>Treinamento</i> . . . . .	80
4.2.2.2	<i>Usando a rede treinada</i> . . . . .	83
4.2.3	<b>Resultados e Discussão</b> . . . . .	<b>83</b>
4.3	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO . . . . .	86
5	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>88</b>
5.1	CONCLUSÕES . . . . .	88
5.2	PERSPECTIVAS . . . . .	89
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE A – TEORIA H</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE B – CÁLCULO DE <math>\tau_0</math></b> . . . . .	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE C – FUNÇÕES <math>A_n(\tau)</math> E <math>B_n(\tau)</math></b> . . . . .	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo do fluxo de fluidos tem sido fundamental para a humanidade desde os tempos antigos. Sistemas hidráulicos eram essenciais para suprir necessidades básicas dos seres humanos em diversas civilizações. A seleção de materiais, dimensionamento de tubulações e otimização de conexões constituíam conhecimentos necessários para uma melhor eficiência do transporte. O projeto e construção de sistemas hidráulicos no período medieval baseavam-se inteiramente em experiência prática (MAGNUSSON, 2003).

O artista renascentista Leonardo da Vinci fez anotações e desenhos detalhados acerca do movimento de fluidos. Em especial, ele registrou a presença de redemoinhos (*eddies*), documentando diferenças de tamanho e velocidade. Um marco na compreensão quantitativa desses fenômenos foi estabelecido por Reynolds em seu experimento seminal, que consistia em inserir corante dentro de um fluido em escoamento num tubo e observar o comportamento desse corante sob diferentes velocidades. Uma quantidade fundamental neste estudo é o número de Reynolds ( $Re$ ), definido como  $Re = UL/\nu$ , onde  $U$  é a velocidade característica do fluido,  $L$  é o comprimento característico do problema (por exemplo, um obstáculo no caminho em que o fluido passa) e  $\nu$  é a viscosidade cinemática. Este número adimensional pode ser interpretado como uma razão entre as forças inerciais e as forças viscosas.

Os princípios de conservação da massa e as leis de Newton, já bem estabelecidos para corpos sólidos no século XIX, motivaram tentativas de estender a mesma descrição para fluidos. Esse raciocínio levou ao desenvolvimento da equação de Navier-Stokes, cuja complexidade matemática não possibilitou até hoje uma solução analítica geral. Esta equação fundamenta-se nos princípios de conservação do momento linear e massa. Para descrever o movimento do fluido, utilizam-se campos contínuos como grandezas fundamentais. A dinâmica do sistema é caracterizada pelos campos de densidade, velocidade, viscosidade e pressão.

A ausência de soluções analíticas gerais para as equações de Navier-Stokes em regimes turbulentos motivou abordagens alternativas. Desenvolveu-se então uma abordagem fenomenológica, caracterizada por uma modelagem que busca descrever fenômenos observáveis sem necessariamente se basear em uma fundamentação microscópica detalhada. A turbulência foi reinterpretada como um fenômeno estocástico.

Na análise de um fluido turbulento, observa-se pelo aspecto das curvas de velocidade a presença de um caráter aleatório como ilustrado na Figura 1. A aleatoriedade manifesta-se em

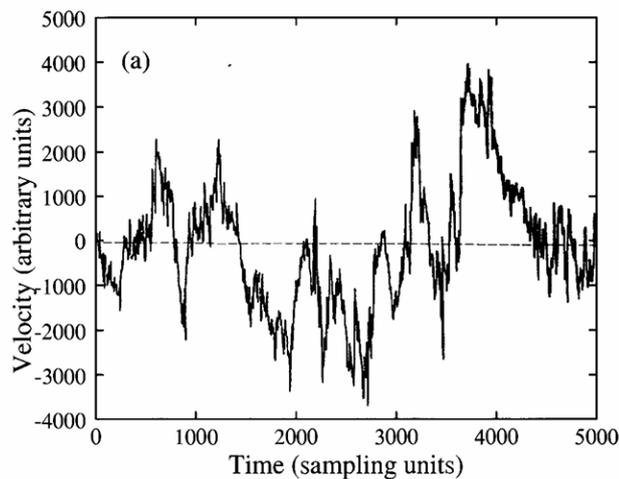


Figura 1 – Sinal de velocidade de um fluido em um túnel de vento. **Fonte:**(FRISCH, 1995)

todas as escalas do sistema, de modo que a análise de intervalos pequenos ou grandes do eixo  $x$  revela uma figura de aparência estocástica. A turbulência possui uma escala característica de injeção de energia, que pode ser observada por exemplo, quando um fluido passa por uma barreira de tamanho  $L$  gerando redemoinhos. A energia é injetada no sistema apenas na escala maior, suscitando questões importantes: Como a injeção de energia na escala de comprimento maior resulta em várias flutuações nas pequenas escalas? Como essas pequenas escalas são geradas?

A teoria estatística da turbulência de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1962) e Obukhov (OBUKHOV, 1962) estabelece relações entre escalas que caracterizam a dinâmica do fluido. As escalas características da turbulência classificam-se em: Escala integral: Compreende as maiores escalas das estruturas turbulentas, coincide com a escala do próprio fluxo e apresenta anisotropia decorrente das condições de contorno do problema; Escala inercial: Compreende escalas menores que a escala integral e caracteriza-se pela ausência de dissipação de energia; Escala dissipativa: Representa a menor escala onde ocorre a dissipação de energia, com estruturas localmente isotrópicas no espaço. Através de análise dimensional, determina-se o número de Reynolds associado a cada escala.

O principal resultado da teoria K41 de Kolmogorov é a lei dos 5/3 para o espectro de energia, representada esquematicamente na figura 2.  $k$  é o número de onda, definido como o inverso da escala característica, sendo que pequenos valores de  $k$  correspondem a grandes escalas espaciais. No regime de baixos números de onda, o espectro exibe um patamar, indicando que o perfil de velocidade aproxima-se de um ruído branco. Para altos números de onda, a queda na energia torna-se mais pronunciada.

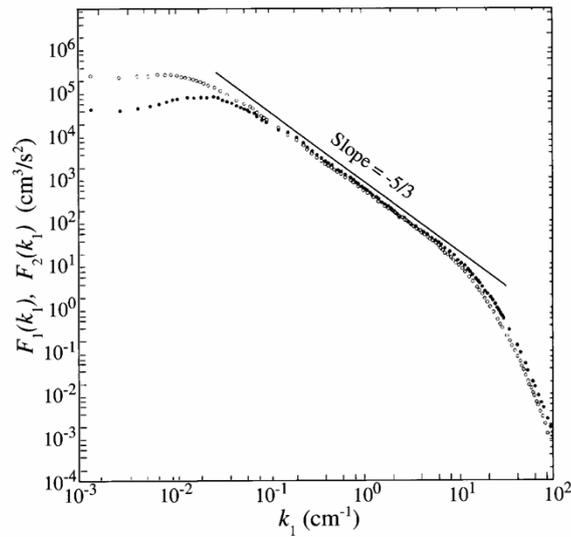


Figura 2 – Gráfico log-log do espectro de energia do componente longitudinal (círculos brancos) e do componente lateral (círculos pretos) das flutuações de velocidade no domínio temporal em um jato com  $Re=626$ . **Fonte:**(FRISCH, 1995)

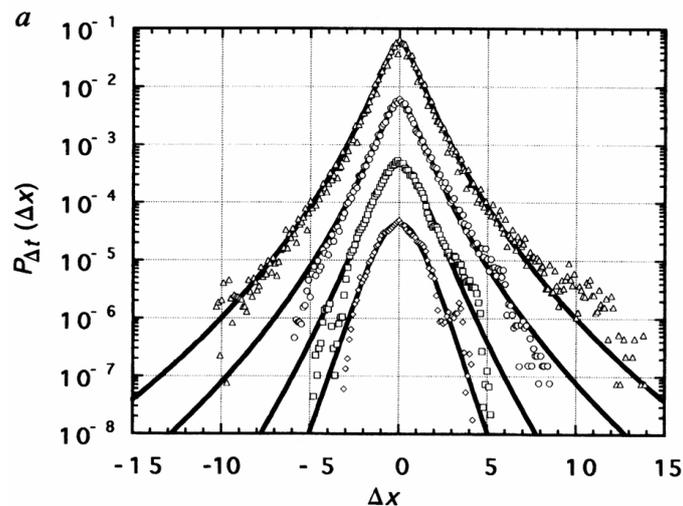


Figura 3 – Densidade de probabilidade para os incrementos de preços  $\Delta x = x(t) - x(t + \Delta t)$ , para diferentes  $\Delta t$ . **Fonte:**(GHASHGHAIE et al., 1996)

Uma limitação da teoria K41 é sua incapacidade de descrever o fenômeno da intermitência, caracterizado pela dependência nas diferentes escalas das distribuições de probabilidade das flutuações de velocidade, conforme identificado por Landau. A teoria Kolmogorov-Obukhov KO62 abordou esta limitação ao não considerar a taxa de dissipação de energia como constante, mas sim como variável aleatória com distribuição log-normal.

Mercados Forex (abreviação em inglês para *Foreign Exchange*, que significa “mercado de câmbio”) apresentam intermitência, como mostrado na Figura 3. Existe uma analogia entre flutuação de preços e turbulência completamente desenvolvida (GHASHGHAIE et al., 1996) onde uma “cascata de informação” (de escalas de tempo mais longas para mais curtas) entre os

---

investidores desempenha o papel da cascata de energia (das escalas de comprimento maiores para as menores) na turbulência de fluidos.

A análise da turbulência em mercados Forex foi realizada à luz da teoria H, que é um formalismo estocástico hierárquico. Ela surgiu inicialmente no contexto de turbulência em fluidos (SALAZAR; VASCONCELOS, 2010) e posteriormente foi estendida a outros sistemas (GONZÁLEZ et al., 2017; MACÊDO et al., 2017; BARBOSA et al., 2022). As famílias de distribuições de probabilidade resultantes dessa teoria são rotuladas pelo número de níveis na cascata de energia. Ela possui duas classes de universalidade de distribuições: classe lei de potência e classe exponencial esticada.

Este estudo permitiu verificar que existem múltiplas escalas de tempo no mercado Forex, bem como calcular o nível da hierarquia. Observou-se também que quanto maior o tamanho do mercado, maior o número de hierarquias.

Outro núcleo da tese consiste em incorporar aspectos temporais na análise de mercados. O tempo de primeira passagem é o tempo que leva para um processo estocástico atingir um certo valor. A dinâmica estocástica faz com que o tempo para chegar nesse valor crítico também seja aleatório, o que conduz a uma formulação estatística, ou seja, tem-se uma distribuição de probabilidade dos tempo de primeira passagem. É possível que este valor limiar nunca seja atingido dependendo do tipo de sistema ou da sua dimensionalidade. Existe uma outra distribuição de probabilidade importante que está intimamente ligada com o tempo de primeira passagem, denominada a probabilidade de sobrevivência. Ela é a probabilidade de que o valor alvo não tenha sido atingido ainda até um certo tempo. Todo esse formalismo pode ser desenvolvido para espaço e tempo discretos, mas o nosso interesse é no contínuo.

A distribuição dos tempos de primeira passagem foi estudada em diversos campos, apresentando aplicação em movimento browniano (REDNER, 2001), bioquímica (SZABO; SCHULTEN; SCHULTEN, 1980), teoria de decisão (SIGGIA; VERGASSOLA, 2013; ROLDÁN et al., 2015) e finanças (VALENTI; SPAGNOLO; BONANNO, 2007; MASOLIVER; PERELLÓ, 2008; EISLER et al., 2009; SAZUKA; INOUE; SCALAS, 2009; MASOLIVER; PERELLÓ, 2009; PERELLÓ; GUTIÉRREZ-ROIG; MASOLIVER, 2011). No ramo de finanças ela é útil para caracterizar mercados distintos; o agente que atua no mercado tem que saber os tempos típicos das negociações para cada mercado que ele opera, uma vez que os mercados possuem diferentes tamanhos e volatilidades. É também usado para descrever o tempo para sair de um intervalo, se é mais provável que o preço atinja uma barreira superior ou inferior. Uma outra aplicação mais completa consiste em modelos financeiros que levem em consideração o caráter estocástico da volatilidade, tal como o mo-

delo de Heston (HESTON, 1993). Enfatiza-se que essas análises têm ampla abrangência, sendo feitas em mercados de títulos, ações e em Forex.

Embora exista uma natureza aleatória nos tempos de primeira passagem, é possível verificar regularidade em algumas características gerais. De forma simples, o resultado observado em um problema de primeira passagem depende de duas características: as propriedades físicas do sistema e a geometria que ele está inserido. A primeira parte se manifesta, por exemplo, na magnitude da volatilidade ou na presença de uma deriva. A segunda parte, por sua vez, tem a ver com a magnitude da distância que deve ser percorrida ou o tipo de barreira. Para ficar mais claro, pode-se fazer uma comparação com um circuito resistor-capacitor, nesse sistema o potencial do capacitor em descarga é dado por  $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ , onde  $V_0$  é o potencial inicial,  $R$  é a resistência e  $C$  a capacitância. Dizemos que  $\tau = RC$  é o tempo característico de descarga do capacitor. A resistência é dada por  $R = \rho L/A$ , onde  $\rho$  é a resistividade do material,  $L$  é o comprimento do resistor e  $A$  é a área transversal. A capacitância de um capacitor de placas paralelas é dada por  $C = \epsilon A_c/d$  onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do material,  $A_c$  é área das placas do capacitor e  $d$  é a distância entre as placas. Temos portanto que o tempo característico é composto por uma parte que depende das propriedades físicas, evidenciadas em  $\rho$  e  $\epsilon$ , e das características geométricas, isto é,  $L, A, A_c$ , e  $d$ .

Em física da matéria condensada, o termo relaxação diz respeito a uma abordagem dependente do tempo de um sistema de um estado estacionário para outro (DATTA GUPTA, 2012), no contexto de termodinâmica isso significa uma transição entre estados em equilíbrio térmico. Em muitos sistemas físicos, observa-se um tempo de relaxação exponencial parecido com aquele mostrado no caso do circuito resistor-capacitor. Porém para sistemas complexos, isso não é verificado. Experimentos evidenciam que a forma da relaxação segue uma exponencial esticada ou uma lei de potência (METZLER; KLAFTER, 2000). É possível desenvolver modelos teóricos capazes de explicar o surgimento de tais divergências da exponencial, eles devem incorporar aspectos físicos como dinâmica, vínculos e hierarquia (PALMER et al., 1984). Veremos que o movimento browniano tem um decaimento exponencial quando se trata de tempos de primeira passagem e portanto possui um tempo característico. Mercados reais, por sua vez, apresentam uma dinâmica mais complexa.

A Figura 4b mostra a distribuição dos tempos de primeira passagem para o mercado de ações e faz a comparação com o modelo de Heston e com uma distribuição exponencial representada pela linha preta. Observa-se que uma exponencial não descreve adequadamente esse fenômeno para tempos pequenos. Nesta tese, é feita uma análise que se assemelha com

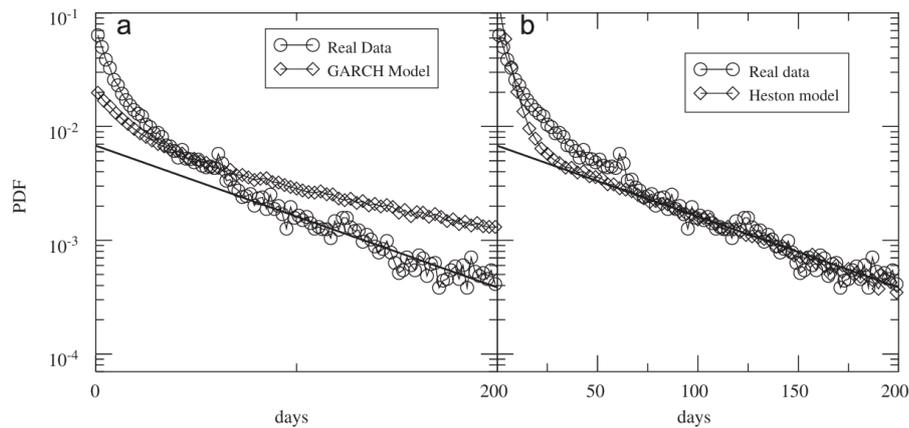


Figura 4 – Função densidade de probabilidade dos tempos de escape para o retorno dos preços para os modelos a) GARCH e b) Heston comparados com dados reais. **Fonte:**(VALENTI; SPAGNOLO; BONANNO, 2007)

o visto nessa figura, porém é feita em mercado Forex e considera duas barreiras absorventes.

Para isso, assume-se que há uma dinâmica hierárquica nos tempos característicos de escape e devemos descrevê-los como uma variável aleatória. Na primeira parte desta tese demonstra-se a existência de níveis de hierarquia para a volatilidade em mercados Forex, isso serve de motivação para que se acredite que a existência de hierarquia também se manifeste nos tempos de primeira passagem. Veremos que nessa análise mercados distintos podem apresentar diferentes classes de universalidade da teoria H.

É importante que também seja observado como o aspecto geométrico condiciona as grandezas observadas. Busca-se que uma boa classificação de um fenômeno físico não dependa excessivamente de parâmetros arbitrários, como distâncias específicas ou limites impostos pelas condições iniciais. Em vez disso, uma descrição robusta deve ser capaz de capturar as características fundamentais do sistema, independentemente de variações no tamanho do intervalo.

O outro aspecto que finaliza as nossas investigações no mercado Forex é quantificar o papel da informação em negociações. Escolher estratégias de investimento neste mercado é uma tarefa desafiadora. Este ambiente é compartilhado por diversos tamanhos de capitais, desde pequenos investidores até grandes corporações devido à sua alta liquidez. O horizonte dos investimentos é também variado, certas negociações têm expectativa de durar anos, outras podem durar até mesmo segundos. Investimentos de longo prazo possuem a característica de proteção. Em geral, eles são feitos para evitar prejuízos oriundos de grandes variações nas cotações. Investimentos com prazos pequenos, em geral, buscam se aproveitar das tendências de preços daquelas horas, dias ou semanas para obter lucro. Denominaremos essas negociações

de curto prazo como *trades*.

Nos dias atuais, informações impactantes no mercado financeiro tais como rendimento de empresas, decisões de bancos centrais, conflitos entre nações etc. são adquiridas cada vez mais rapidamente. O agente que opera nesses mercados precisa ter expertise para filtrar toda essa informação e tomar suas decisões. É conhecido que traços psicológicos podem afetar significativamente o comportamento e a performance em um contexto financeiro (BIAIS et al., 2002). Para evitar intervenções humanas que estejam influenciadas por emoções, estresse ou ansiedade, é preferível que os *trades* sejam feitos de forma automática. Isto é possível por meio de um *Expert Advisor* (EA), que são programas que executam uma operação obedecendo a uma lógica estabelecida previamente. A forma mais popular de usá-los é através da plataforma *MetaTrader*. Quando o agente entra no mercado, seja comprando ou vendendo, é preciso selecionar dois valores importantes: *Stop Loss* (SL) e *Take Profit* (TP), o primeiro diz respeito ao maior prejuízo naquela operação que o agente aceita; é uma barreira que limita as perdas. O segundo é o maior lucro aceito na mesma operação; é também uma barreira. Uma grande parte das transações são feitas de forma automática. Em 2009, 73% dos *tradings* dos Estados Unidos eram algorítmicos (HENDERSHOTT; JONES; MENKVELD, 2011). Mesmo com apoio tecnológico, porém, é preciso ter cuidado: foi mostrado que 97% dos *traders* brasileiros perdem dinheiro (CHAGUE; DE-LOSSO; GIOVANNETTI, 2020). A Figura 5 mostra o percentual de *traders* lucrativos em função do número de dias operando. Ela demonstra que quanto mais tempo no mercado, mais provável estar no grupo dos que perdem dinheiro. Existe também o fenômeno denominado de *Stop hunting* onde participantes do mercado intencionalmente buscam manipulá-lo para ativar ordens de SL de outros participantes (NOERTJAHYANA et al., 2020).

Para evitar ainda mais vieses humanos nas tomadas de decisões, vem crescendo a tendência de que o próprio EA obedeça a uma lógica otimizada, o que pode ser alcançado com o auxílio de redes neurais artificiais. Redes neurais são modelos de aprendizado supervisionado não lineares baseado em neurônios. O uso de redes neurais com objetivo de lucro é bem estabelecido (DUNIS; WILLIAMS, 2002; KUO; CHEN; HWANG, 2001). Nosso interesse é em redes neurais profundas (DNN, do inglês *deep neural network*), comumente usadas em reconhecimento de padrões em imagens, mas nosso interesse, entretanto, é no reconhecimento se uma tendência dos preços é de alta ou de baixa.

O estudo sobre *trading* se dá, quase em sua totalidade, no aspecto financeiro. Entretanto, do ponto de vista físico pouco se sabe sobre essa atividade. Nesta tese, busca-se estreitar a distância entre os campos de *trading* e física. De forma geral, a grandeza mensurável mais

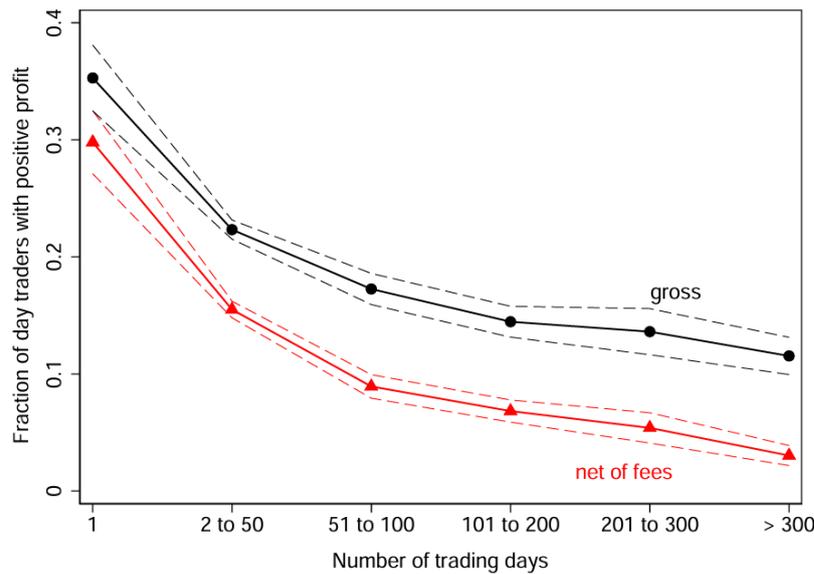


Figura 5 – Fração de *day traders* com lucro positivo. Esta figura mostra a fração de indivíduos com lucro bruto positivo (linha preta com círculos) e lucro líquido positivo (linha vermelha com triângulos). As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de 95%. **Fonte:**(CHAGUE; DE-LOSSO; GIOVANNETTI, 2020)

útil nessa direção é a quantidade de informação disponível (SHANNON, 1948). Para conectar as áreas, a analogia feita é com uma máquina de informação de Szilárd (SZILÁRD, 1929), um experimento imaginário em que é possível extrair trabalho a partir da informação da localização de uma partícula numa caixa. O EA funciona como tal máquina, onde o lucro é extraído da informação do estado do preço. A quantificação do estado do preço é feita a partir de indicadores financeiros que contêm, de forma implícita, informações sobre tendências, desvio padrão, reversões de tendências, etc.

Outra forma de caracterizar fisicamente um EA é através do uso de conceitos da termodinâmica estocástica. Esta área incorpora o efeito de flutuações em sistemas termodinâmicos. Ela tem se tornado importante devido aos avanços teóricos e experimentais (SEKIMOTO, 1998; BUSTAMANTE; LIPHARDT; RITORT, 2005; SEIFERT, 2008). Sua base teórica tem se consolidado em virtude do encontro de várias igualdades tais como teoremas de flutuação e igualdade de Jarzynski (JARZYNSKI, 1997; CROOKS, 1998; CROOKS, 1999). Tempos de primeira passagem podem ser úteis para nos mostrar relações de flutuação, como mostrado em (SINGH et al., 2019). A Figura 6 mostra uma relação de flutuação ao longo do tempo para um sistema que consiste em duas ilhas metálicas no regime de bloqueio de Coulomb. Nesta tese, foi construído um gráfico similar para o período de operação do EA.

Esses sistemas de termodinâmica estocástica podem ser manipulados de forma que ocorram

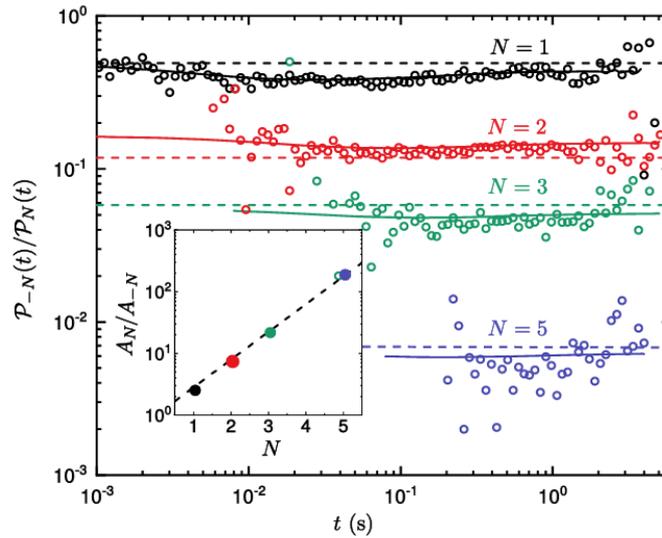


Figura 6 – Relação de flutuação para tempo de primeira passagem. A razão  $P_{-N}(t)/P_N(t)$  para vários valores de  $N$ . Círculos são valores experimentais e as linhas são valores teóricos. **Fonte:** (SINGH et al., 2019)

pequenas mudanças em seu estado, por exemplo, uma modificação em sua posição, ou uma alteração no seu volume. Denominamos essa modificação como protocolo de controle. Se esse protocolo depender dos resultados obtidos após a interação com o sistema, caracteriza-se como um protocolo de controle com *feedback*. Em situações que há protocolo com *feedback*, o teorema de flutuação sofre uma modificação, sendo incorporado um termo devido à informação mútua (SAGAWA; UEDA, 2012). Ao considerarmos o EA como uma máquina de Szilard de informação, a rede neural vai atuar como um protocolo com *feedback* e é possível medir a quantidade de informação acrescentada pela rede.

A tese é dividida da seguinte forma: No capítulo 2 é discutido hierarquia em mercados Forex segundo o formalismo da Teoria H. A análise é feita nos três pares de moedas mais negociados. Um ajuste conjunto nas distribuições de retornos e de volatilidade é realizado a fim de modelar essas curvas. É calculado o número  $N$  de escalas de tempo de cada mercado.

Em seguida, no capítulo 3, são apresentados os tempos de primeira passagem teóricos por uma barreira e por um intervalo. Em seguida, é elaborado um modelo dinâmico e hierárquico para os tempos característicos. As distribuições empíricas são calculadas e ajustes são feitos para evidenciar a existência de hierarquia também nos tempos de primeira passagem.

O capítulo 4 mostra como categorizar informação de *Expert Advisors*. Isso é feito por uma analogia com uma máquina de Szilárd. São demonstradas as formas que teoremas de flutuações têm quando existe informação mútua. Uma rede neural artificial auxilia na decisão de compra ou venda e é possível medir quanto de informação ela adicionou.

O capítulo 5 encerra a presente tese com conclusões e perspectivas a respeito do trabalho aqui elaborado.

## 2 HIERARQUIA DA TURBULÊNCIA EM MERCADOS FOREX

A aplicação inicial de conceitos e métodos da física, especialmente da física estatística, na modelagem de sistemas econômicos e financeiros remonta ao início do século XX, com as contribuições de Louis Bachelier (BACHELIER, 1900) em 1900. Em sua tese de doutorado, ele modelou as flutuações de preços no mercado financeiro usando um passeio aleatório, antecipando o conceito de movimento browniano, formalizado por Albert Einstein em 1905. Bachelier propôs que as mudanças nos preços obedeciam a um processo estocástico, e seu trabalho constitui um precursor fundamental da teoria moderna de finanças.

O mercado financeiro representa um sistema complexo. Uma das características que evidenciam sua complexidade é o desvio da distribuição gaussiana, manifestado através de distribuições com caudas do tipo lei de potência. Isso é observado particularmente na distribuição dos incrementos de preços. O efeito prático desta característica é que fenômenos extremos, como uma alta ou baixa repentina, não são tão improváveis quanto seriam se os incrementos de preços fossem regidos por uma distribuição normal. Uma das primeiras tentativas de modelar os preços considerando essa característica foi através de distribuições de Lévy. O problema que surgiu foi que tais distribuições possuem variância infinita, uma característica indesejável com sistemas financeiros reais. Observou-se também que essas distribuições com cauda pesada podem surgir da superposição de estatísticas. Nessa abordagem considera-se a existência de duas escalas de tempo bem distintas, onde a distribuição para tempos curtos, devido a variáveis rápidas, é calculada sobre a distribuição das variáveis lentas. Esta descrição, entretanto, não fornece a dinâmica que governa o fenômeno, limitando sua capacidade explicativa.

Paralelamente ao mercado de ações e índices, existe outro instrumento financeiro relevante chamado opções. Uma opção dá a seu possuidor o direito de compra (ou venda) de uma quantidade de ações por um preço fixado numa data estabelecida (opção europeia). Neste tipo de contrato, o negociador busca saber se vale a pena exercer seu direito de compra ou venda. A compreensão da dinâmica da opção é fundamental para estratégias de negociação lucrativas. Uma solução matemática foi desenvolvida por Black, Scholes e Merton em 1973 (BLACK; SCHOLE, 1973). Esse modelo fundamenta-se em uma série de suposições e permite encontrar uma forma fechada para determinar o valor da opção.

Entretanto, em mercados reais, o modelo de Black-Scholes falha, devido a suposições irreais do ponto de vista físico como a volatilidade constante, desconsideração de salto entre os preços

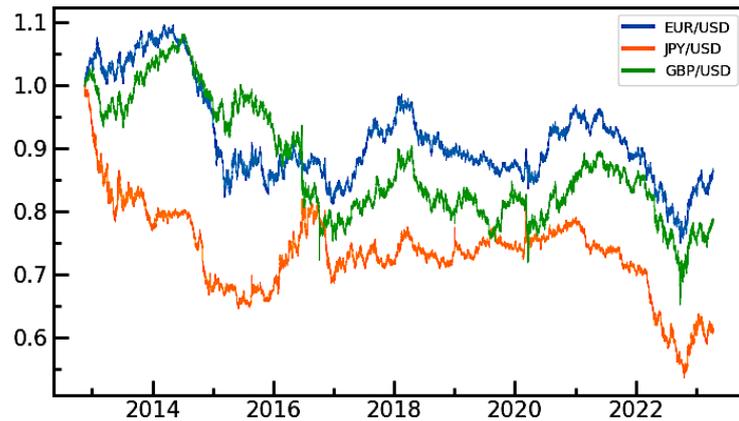


Figura 7 – Cotações de uma hora para as taxas de câmbio dos três pares de moedas mais negociados: EUR-USD (azul), JPY/USD (laranja) e GBP-USD (verde). Os dados foram normalizados no ponto inicial para facilitar a comparação visual. **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

e, do ponto de vista mais técnico, omissão do pagamento de impostos e comissões. Para lidar com o problema da volatilidade constante, surgiram novas abordagens a partir da observação da volatilidade como uma variável aleatória. Exemplos notáveis dessa abordagem incluem os modelos de Heston (HESTON, 1993) e Hull-White (HULL; WHITE, 1987). A volatilidade é modelada não apenas como um processo estocástico, mas através de uma dinâmica via equações diferenciais estocásticas.

Em mercados Forex, uma analogia entre flutuações de preços e turbulência foi proposta de forma que no lugar de uma cascata de energia, há uma cascata de informação (GHASHGHAIE et al., 1996). A hierarquia consiste no fato do fluxo ir das maiores escalas de tempo para as menores. A Figura 7 mostra a característica aleatória das cotações nos três pares de moedas mais negociados do Forex.

Neste capítulo vamos apresentar a teoria H e sua classe de universalidade de distribuições com cauda lei de potência. Apresentamos o procedimento de ajuste conjunto que consiste em fazer o ajuste simultaneamente da distribuição dos retornos e da volatilidade

## 2.1 TEORIA H EM MERCADOS FOREX

A teoria H é uma abordagem para análise de problemas envolvendo sistemas complexos. Desenvolvida inicialmente no estudo de fluidos clássicos, a teoria expandiu-se para diversos outros contextos. Ela fundamenta-se no modelo de cascata de energia de um fluido turbulento, incorporando o fenômeno da intermitência e caracterizando o número de escalas relevantes do sistema. O modelo consiste em um conjunto de equações diferenciais estocásticas com escalas

bem separadas, onde existe uma conexão hierárquica entre escalas adjacentes, formando uma hierarquia.

### 2.1.1 O modelo

Apresentamos a seguir uma descrição matemática do modelo. Em sistemas financeiros, tradicionalmente trabalha-se com o logaritmo dos retornos,  $x_\tau = \ln S(t + \tau) - \ln S(t)$ , onde  $S(t)$  é a taxa de câmbio para um par de moedas no tempo  $t$  e  $\tau$  é uma escala de tempo curta. O correspondente processo estocástico é descrito pela equação de Langevin:

$$dx_\tau(t) = -\mu x_\tau(t)dt + \sqrt{\mu v_\tau(t)}dW_0(t), \quad (2.1)$$

onde  $\mu$  é uma constante positiva,  $v_\tau(t)$  é a volatilidade na escala  $\tau$ , e  $W_0(t)$  é um processo de Wiener (movimento Browniano). Posteriormente mostraremos o método para extrair a série da volatilidade.

É bem estabelecido que a volatilidade em sistemas financeiros não é uma constante (SHEPHARD; ANDERSEN, 2009), portanto deve-se considerar essa característica em qualquer modelagem que busque representar adequadamente a realidade. Este comportamento é análogo à não constância da taxa de dissipação de energia em sistemas turbulentos. Adicionalmente, a volatilidade forma clusters ao longo das escalas de tempo (MANDELBROT, 1967), fenômeno análogo à intermitência da dissipação de energia em turbulência. Para incorporar essas características da volatilidade em mercados forex, a teoria H propõe um modelo de cascata de informação mediante um sistema de equações diferenciais estocásticas, fundamentado na teoria de Kolmogorov de intermitência (FRISCH, 1995).

As volatilidades dependentes das escalas são:

$$dv_i(t) = -\gamma_i[v_i(t) - v_{i-1}(t)]dt + \kappa_i v_i^\alpha v_{i-1}^{1-\alpha} dW_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

onde  $\gamma_i$  e  $\kappa_i$  são constantes positivas e  $W_i(t)$  são processos de Wiener independentes. Detalhes são encontrados no Apêndice A. Só existe solução analítica para os casos  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 1/2$ . Cada um desses valores difere na família de distribuições resultantes, o primeiro dá a classe lei de potência e o segundo a classe exponencial esticada. Neste capítulo, apenas a primeira classe nos interessa. A outra classe produz ajustes teóricos que muito diferem do observado empiricamente. O modelo considera uma hierarquia de escalas de tempo,  $\tau_i \ll \tau_{i-1}$ ,  $i =$

$1, \dots, N$  tal que  $v_i$  é a volatilidade na escala  $\tau_i$ , onde  $\tau_0$  representa a maior escala de tempo (correspondente à extensão da série temporal) e  $v_o$  representa a volatilidade histórica medida na escala  $\tau_0$ . A forma da equação 2.2 apresenta as propriedades desejadas da volatilidade. O primeiro termo descreve a assimetria no fluxo de informação, que flui das escalas maiores para as menores. O segundo termo garante que a volatilidade mantenha-se flutuante e positiva.

Na equação 2.1 a volatilidade está associada com a menor escala na hierarquia. Para  $N$  escalas, define-se  $v(t) = v_N(t)$ . Todas as variáveis  $v_i$  possuem a mesma média  $\langle v_i \rangle = v_o$ . Consequentemente, todas as volatilidades nas várias escalas de tempo flutuam ao redor da mesma média  $v_o$ .

A composição das equações 2.1 e 2.2 não possui solução exata; para lidar com isso assume-se uma grande separação de escalas de tempo. Como a volatilidade é calculada com base nos valores dos retornos, ela apresenta-se mais suave e portanto varia mais lentamente do que os próprios retornos, ou seja,  $\tau_N \gg \tau$ . Assim, sobre uma escala de tempo  $\tau_N$ , na qual a volatilidade  $v_N$  apresenta variação limitada, os retornos atingem um regime quase estacionário descrito por uma distribuição Gaussiana.

$$P(x|v_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_N}} \exp\left(-\frac{x^2}{2v_N}\right). \quad (2.3)$$

Para chegarmos na distribuição dos retornos precisamos integrar sobre todos os valores possíveis de  $v_N$ , portanto :

$$P(x_\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v_N}} \exp\left(-\frac{x_\tau^2}{2v_N}\right) f(v_N) dv_N, \quad (2.4)$$

onde  $f(v_N)$  é a função densidade de probabilidade estacionária para  $v_N$ . Vamos novamente tratar a variável mais lenta como fixa, agora na análise de 2.2. Para  $v_{i-1}$  fixo, calculamos apenas a solução estacionária da equação de Fokker-Planck correspondente, que dá uma distribuição gama inversa:

$$f(v_i|v_{i-1}) = \frac{(\beta_i v_{i-1})^{\beta_i+1}}{\Gamma(\beta_i + 1)} v_i^{-\beta_i-2} \exp\left(-\frac{\beta_i v_{i-1}}{v_i}\right), \quad (2.5)$$

onde  $\beta_i = 2\gamma_i/\kappa_i^2$ . Para encontrar a distribuição  $f(v_N)$  na menor escala devemos integrar sobre as maiores escalas. Devemos fazer

$$f(v_N) = \int f(v_N|v_{N-1})f(v_{N-1})dv_{N-1}$$

e repetir o procedimento até chegar ao topo da hierarquia.

$$f(v_N) = \int dv_{N-1} \dots \int dv_1 \prod_{i=1}^N f(v_i | v_{i-1}). \quad (2.6)$$

Usando a equação 2.5 em 2.6 para todas as integrais, chegamos em:

$$f(v_N) = \frac{1}{v_0 \omega \Gamma(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{1})} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{v_N}{v_0 \omega} \right), \quad (2.7)$$

onde  $\omega = \prod_{j=1}^N \beta_j$ ,  $\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \dots, \beta_N)$ ,  $\Gamma(\boldsymbol{\beta}) \equiv \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta_j)$ , e  $G_{p,q}^{m,n}$  é a função G de Meijer (ERDÉLYI, 1953). A demonstração de como se obtém esse resultado está apresentada no Apêndice A.

Substituindo 2.7 em 2.4, temos

$$P(x_\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v_N}} \exp\left(-\frac{x_\tau^2}{2v_N}\right) \frac{1}{v_0 \omega \Gamma(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{1})} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{v_N}{v_0 \omega} \right) dv_N, \quad (2.8)$$

pela propriedade das funções de Meijer, temos

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2v_N}\right) = 2 \frac{v_N}{x^2} G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{2v_N}{x^2} \right), \quad (2.9)$$

que retornando para a integral fica

$$P(x_\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{v_0 \omega \Gamma(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{1})} \int_0^\infty G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{2v_N}{x^2} \right) \left( \frac{v_N}{\omega v_0} \right)^{1/2} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{v_N}{v_0 \omega} \right) dv_N. \quad (2.10)$$

As funções de Meijer possuem a propriedade

$$x^\rho G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) = G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p + \vec{\rho} \\ \vec{b}_q + \vec{\rho} \end{matrix} \middle| x \right), \quad (2.11)$$

que pode ser usada na integral e assim obter

$$P(x_\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{v_0 \omega \Gamma(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{1})} \int_0^\infty G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{2v_N}{x^2} \right) G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}/2 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{v_N}{v_0 \omega} \right) dv_N. \quad (2.12)$$

Essa expressão possui a integral de duas funções G, que pode ser simplificada usando a propriedade

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \eta x \right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu} \left( \begin{matrix} \vec{c}_\sigma \\ \vec{d}_\tau \end{matrix} \middle| \xi x \right) dx = \frac{1}{\xi} G_{p+\tau,q+\sigma}^{m+\nu,n+\mu} \left( \begin{matrix} \vec{a}_n, -\vec{d}_\tau, \vec{a}_p \\ \vec{b}_m, -\vec{c}_\sigma, \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \frac{\eta}{\xi} \right). \quad (2.13)$$

Identificando  $\eta = 1/\omega v_0$ ,  $\xi = 2/x^2$ ,  $m = q = 0$ ,  $p = q = N$ ,  $\mu = \tau = 0$ ,  $\sigma = \nu = 1$ ,  $\vec{c}_\sigma = 0$  e  $\vec{a}_p = -\beta - 1/2$ , chegamos em

$$P_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega v_0}\Gamma(\beta + 1)} G_{N,1}^{1,N} \left( -\beta - 1/2 \middle| \frac{x^2}{2\omega v_0} \right). \quad (2.14)$$

No restante da tese vamos assumir  $\beta_i = \beta, i = 1, \dots, N$ . Essa escolha é justificada se considerarmos que há invariância de escala ao longo da hierarquia de informação, de modo que as distribuições de probabilidade tenham a mesma forma em todas as escalas.

A equação 2.14 pode ser expressa em termos de uma outra função mais conhecida,  ${}_pF_q$ , que é uma função hipergeométrica generalizada. Para mostrar isso, vamos usar a identidade

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} \mathbf{a}_p \\ \mathbf{b}_q \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(\mathbf{b}_q)}{\Gamma(\mathbf{a}_p)} G_{p,q+1}^{1,p} \left( \begin{matrix} 1 - \mathbf{a}_p \\ 0, 1 - \mathbf{b}_q \end{matrix} \middle| -z \right), \quad (2.15)$$

e chegamos em

$$P_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega v_0}} \frac{\Gamma(\beta + 3/2)}{\Gamma(\beta + 1)} {}_N F_0 \left( \beta + 3/2; -\frac{x^2}{2\omega v_0} \right). \quad (2.16)$$

O caso  $N = 1$  é de particular interesse pois a equação acima pode ser expressa em termos de uma função elementar ao usarmos a identidade  ${}_1F_0(a, z) = (1 - z)^{-a}$ . Ficamos com

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta v_0}} \frac{\Gamma(\beta + 3/2)}{\Gamma(\beta + 1)} \left( 1 + \frac{x^2}{2\beta v_0} \right)^{-(\beta + \frac{3}{2})}. \quad (2.17)$$

A função  $P_1(x)$  também pode ser escrita em termos da distribuição  $q$ -gaussiana (TSALLIS, 1988):

$$P_1(x) = \frac{\sqrt{q-1}}{\sqrt{(5-3q)\pi\sigma^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)} \exp_q \left[ -\frac{x^2}{(5-3q)\sigma^2} \right], \quad (2.18)$$

onde

$$q = 1 + \frac{2}{2\beta + 3}, \quad (2.19)$$

$\sigma^2 = v_0 = \langle x^2 \rangle$ , e

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}. \quad (2.20)$$

A relação 2.19 estabelece uma restrição aos possíveis valores de  $q$  dado que  $\beta > 0$ ,  $1 < q < \frac{5}{3}$ . A distribuição  $q$ -gaussiana é extensivamente aplicada na modelagem de distribuições com

caudas pesadas. Ela aparece no contexto de mecânica estatística não extensiva, resultando da maximização do funcional de entropia generalizado (TSALLIS, 2009). Vale destacar que o aparecimento destas distribuições na teoria H não deriva do formalismo de mecânica estatística não-extensiva. Na teoria H, a  $q$ -gaussiana representa apenas o primeiro membro de uma família de distribuições não gaussianas com comportamento de lei de potência nas caudas.

A distribuição  $P_1(x)$  decai como lei de potência para  $x$  grande:

$$P_1(x) \sim \frac{1}{x^{2\beta+3}}, \quad x \gg x_1^* = \sqrt{2\beta v_0}. \quad (2.21)$$

O comportamento assintótico da  ${}_N F_0$ , por sua vez, é

$${}_N F_0(a_1, \dots, a_N; -x) \sim \sum_{i=1}^N c_i x^{-a_i} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad \text{for } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

onde  $c_i$ 's são constantes. Isso mostra que ela decai como lei de potência para qualquer  $N$ . Como estamos considerando todos os  $\beta_i$  iguais, as distribuições  $P_N(x)$  apresentam a mesma dependência assintótica de lei de potência:

$$P_N(x) \approx \frac{C_N}{x^{2\beta+3}}, \quad \text{for } |x| \gg x_N^*, \quad (2.23)$$

para uma constante  $C_N$  e uma escala característica  $x_N^*$ . Importante ressaltar que as distribuições diferem em sua forma funcional, convergindo assintoticamente da mesma forma.

Adicionalmente, a constante  $C_N$  e o valor característico  $x_N^*$  aumentam com  $N$ . Consequentemente, quanto maior  $N$ , maior o intervalo necessário até que a distribuição entre no regime de lei de potência. Este comportamento é ilustrado na figura 8a, que apresenta funções  $P_N(x)$ , para  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $v_0 = \beta = 1$ . Na figura 8b apresenta-se a parte positiva dessas distribuições em escala log-log. Observa-se um intervalo transiente antes que as curvas, que decaem com o mesmo expoente, tornem-se paralelas. Adicionalmente, na região central da distribuição manifestam-se diferenças significativas.

A análise de ajustes de dados empíricos requer cautela devido ao seu alcance limitado, que dificulta a percepção do comportamento das caudas. Ademais, um bom ajuste na região das caudas não garante um bom ajuste na região central da distribuição. Como apresentado, e evidenciado em (VASCONCELOS; SALAZAR; MACÊDO, 2018; SOSA-CORREA et al., 2019), as distribuições do sinal podem ser ajustadas por diferentes modelos probabilísticos, dificultando a escolha do modelo mais adequado. Para superar essa limitação, sugerimos um método de

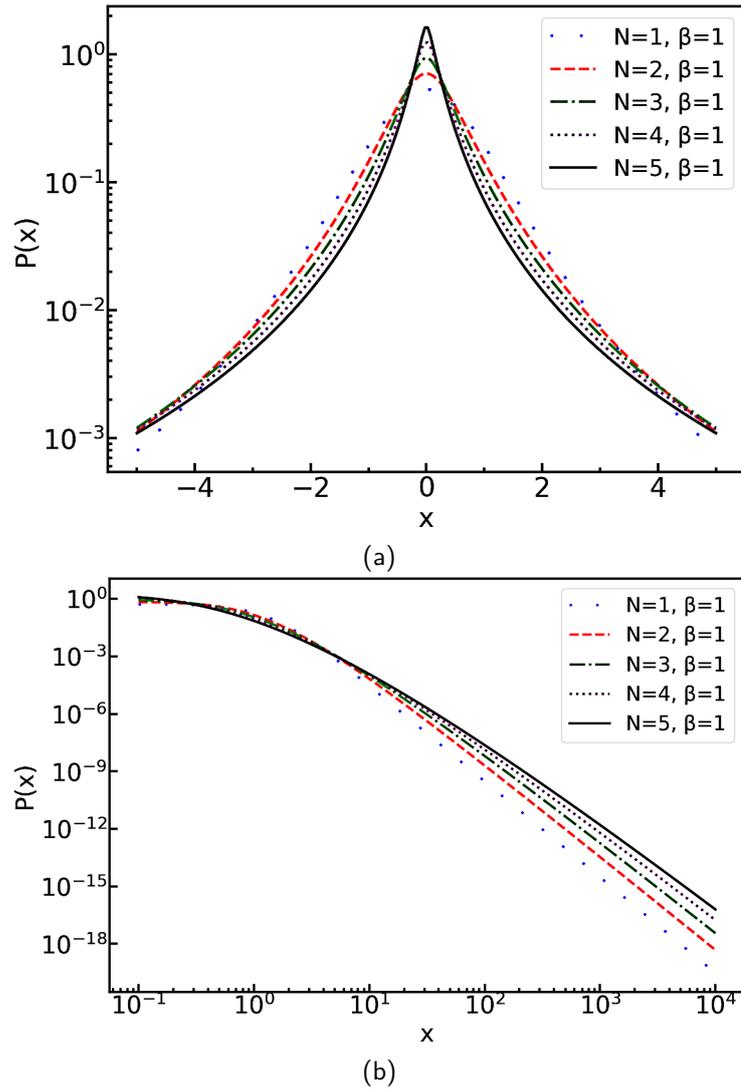


Figura 8 – (a) Gráficos da distribuição  $P_N(x)$  dada na Eq. (2.14) para  $v_0 = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ . (b) O mesmo que em (a), em escala log-log para o lado positivo ( $x > 0$ ) das distribuições. **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

ajuste conjunto (descrito a seguir) no qual ajustamos simultaneamente as distribuições observadas tanto do sinal (retornos) quanto do *background* (volatilidades), utilizando as equações derivadas do modelo.

### 2.1.2 A série da volatilidade

O formalismo da teoria H fornece uma forma analítica para as distribuições dos retornos e da volatilidade, permitindo ajustes e determinar qual a menor escala de tempo relevante do sistema. Nesta análise, ambas as distribuições devem estar bem ajustadas. É necessário obter uma série para a volatilidade. Essa série é extraída da série de retornos  $x_\tau(t)$  variando com o tempo, denotada de  $v_\tau(t)$ . Para uma janela móvel de tamanho  $M$  sobre a série original dos

retornos  $x_\tau(t)$ , para cada janela calcula-se o estimador de variância

$$v(t) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} [x(t-j\delta t) - \bar{x}(t)]^2, \quad (2.24)$$

onde  $\bar{x}(t)$  é dado por

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x(t-j\delta t). \quad (2.25)$$

A série temporal parametrizada pelo tamanho da janela é denotada por  $v_M(t)$ . Resolve-se então numericamente a equação 2.4. A variável de integração é  $v_N$ , representando a média da função

$$P(x_\tau|v_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_N}} \exp\left(-\frac{x_\tau^2}{2v_N}\right). \quad (2.26)$$

Para séries temporais com valores discretos, essa integral, que representa uma média, expressa-se por:

$$P^{(M)}(x) = \frac{1}{n-M} \sum_{i=1}^{n-M} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_M(i)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2v_M(i)}\right), \quad (2.27)$$

onde  $n$  é o número de pontos da série original  $x(t)$ . A soma vai até  $n-M$  porque temos que desconsiderar o tamanho da janela. Note que estamos somando todos os termos que contém  $v_M(i)$  para apenas um valor de  $x$ . Esse procedimento é repetido para diversos valores de  $M$  e selecionamos o melhor valor  $M^*$  que faz com que a distribuição  $P^{(M)}(x)$  se ajuste com a distribuição empírica dos retornos.

Determinado  $M^*$ , realiza-se um ajuste conjunto das distribuições  $P(x)$  e  $f_N(v)$ . O número de escalas  $N$  é fixado e determina-se o valor de  $\beta$  que melhor ajusta as duas distribuições teóricas simultaneamente. Busca-se minimizar, para cada  $N$ , a seguinte função de erro:

$$Error(N) = \frac{1}{2n-M^*} \left[ \sum_{i=1}^n |\ln P_N(x_i) - \ln P_i| + \sum_{i=1}^{n-M^*} |\ln f_N(v_i) - \ln f_i| \right], \quad (2.28)$$

onde  $P_i$  e  $f_i$  são respectivamente os valores dos histogramas dos retornos e da volatilidade. Definimos o valor de  $v_0 = 1$  e isso faz com que, para um dado  $N$ , só tenhamos que encontrar o melhor valor para o parâmetro  $\beta$ . Escolher um certo valor de  $N$  não é considerar apenas aquela escala, mas sim toda a hierarquia até ela.

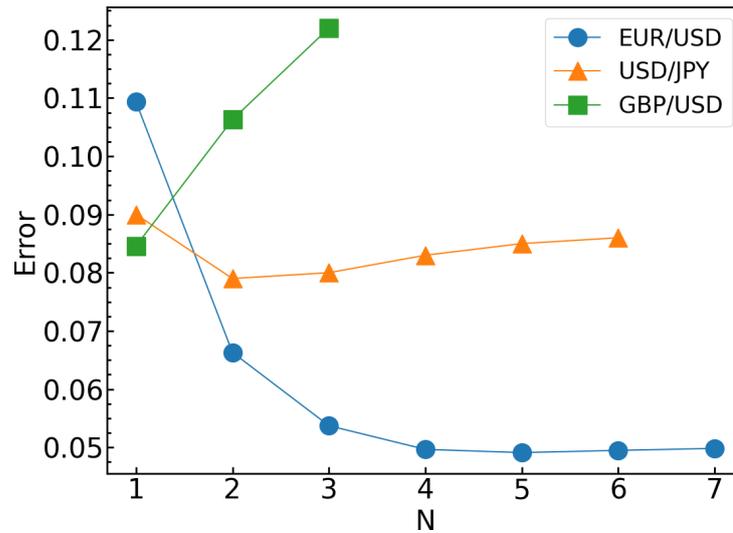


Figura 9 – Erros do ajuste conjunto em função do número  $N$  de níveis hierárquicos para os três pares de moedas mais negociados: EUR-USD (círculos azuis), USD-JPY (triângulos laranja) e GBP-USD (quadrados verdes). **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

### 2.1.3 Resultados

Vamos agora apresentar o resultado desse procedimento de ajuste conjunto aos pares de moedas. Nós analisamos cotações de intervalo de uma hora do período de Novembro de 2012 a Abril de 2024. Isso nos dá um valor aproximado de 64000 pontos para cada mercado. Os dados foram obtidos gratuitamente através do centro histórico da plataforma MetaTrader 4 (MetaTrader 4 Platform, 2023).

Na figura 9, mostramos gráficos da função de erro (2.28) em função de  $N$  para os três pares de moedas considerados aqui. A partir dessa figura, encontramos que o erro mínimo para o par EUR-USD é atingido em  $N = 5$ , enquanto para USD-JPY o erro mínimo ocorre em  $N = 2$ . Para o par GBP-USD, no entanto, o erro aumenta com  $N$  e, portanto, consideramos  $N = 1$  como o melhor valor (ou seja, o menor erro). Os valores do melhor tamanho de janela para cada par são respectivamente  $M^* = 5$ ,  $M^* = 6$ ,  $M^* = 6$ .

Na figura 10 apresentamos o resultado para o par EUR-USD para os valores de  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  onde observa-se que o menor erro ocorre em  $N = 5$ , como já mencionado, e  $\beta = 2,27$ . As linhas representam as curvas teóricas para cada  $N$  com o seu respectivo melhor valor de  $\beta$ , enquanto círculos correspondem ao histograma empírico. Para maiores valores de  $N$  o erro apresenta tendência crescente. Observa-se que a curva teórica para  $N = 5$  ajusta-se adequadamente tanto para a distribuição empírica dos retornos quanto para a volatilidade. Para a distribuição dos retornos, o ajuste mostra-se adequado tanto na região central quanto na região das caudas.

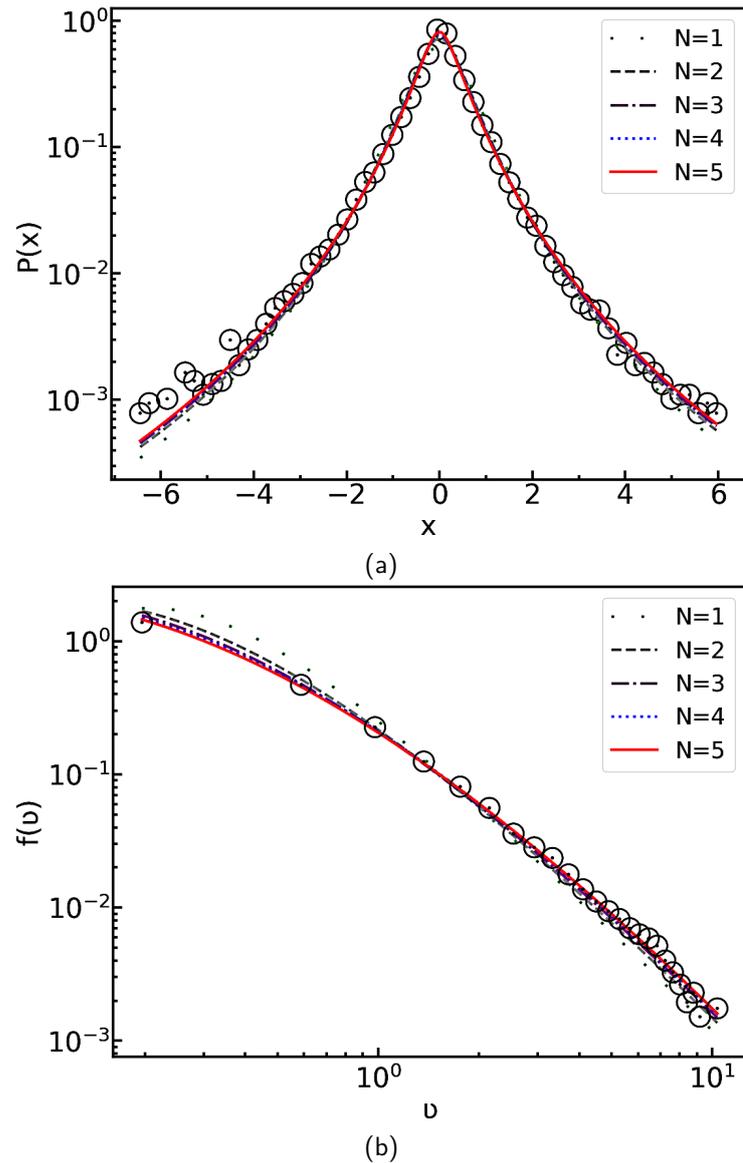


Figura 10 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 1$  e  $\beta = 0,53$  (tracejado verde),  $N = 2$  e  $\beta = 0,93$  (pontilhado laranja),  $N = 3$  e  $\beta = 1,36$  (tracejado roxo),  $N = 4$  e  $\beta = 1,85$  (tracejado azul),  $N = 5$  e  $\beta = 2,27$  (vermelho). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para  $N = 5$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade  $v(t)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

Na figura 11 apresentamos o melhor ajuste para o par USD-JPY para o caso  $N = 1$  e  $N = 2$ . O segundo caso apresenta  $\beta = 0,85$  e resulta em um erro menor. Observa-se que a distribuição de retornos (Figura 11a) possui uma assimetria, característica frequentemente observada em sistemas financeiros e crucial na turbulência em fluidos. Uma abordagem via Teoria H que capta a existência de assimetria pode ser encontrada em (SOSA-CORREA et al., 2019).

Na figura 12 apresentamos o ajuste para o par GBP-USD, onde o melhor caso ocorre para

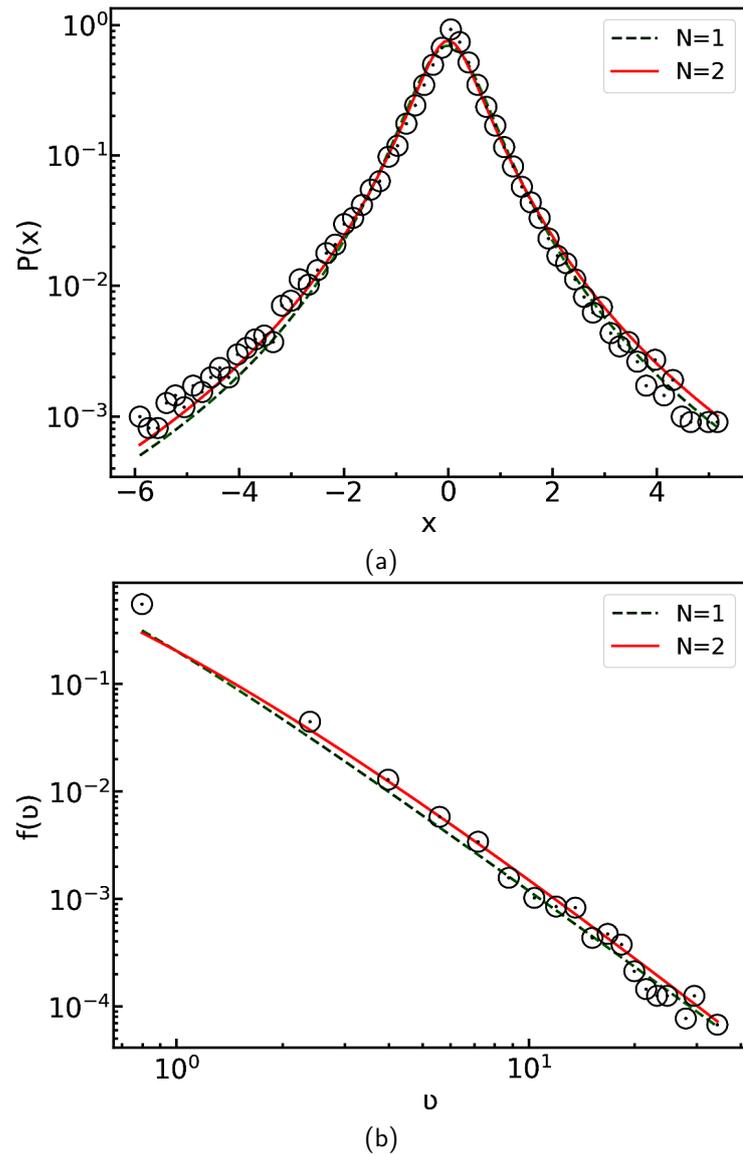


Figura 11 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 1$  e  $\beta = 0,38$  (tracejado verde),  $N = 2$  e  $\beta = 0,85$  (vermelho). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para  $N = 2$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade  $v(t)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

$N = 1$ . Como demonstrado anteriormente, essa distribuição é a  $q$ -gaussiana com  $\beta = 0,35$ . A distribuição  $q$ -gaussiana caracteriza-se por uma lei de potência na cauda; no contexto da teoria H, ela representa a primeira distribuição de uma família hierárquica de distribuições do tipo lei de potência. Esta distribuição apresenta-se como a melhor escolha especificamente no par GBP-USD.

Todos os ajustes foram feitos para a classe lei de potência. Apenas para mostrar que de fato a classe exponencial esticada não corresponde a uma boa descrição dos dados, a Figura 13 mostra o ajuste para o par GBP-USD com  $N = 10$  e  $\beta = 5,23$ . O valor do erro vai diminuindo a taxas cada vez menores com o aumento de  $N$  até se atingir o limite de precisão

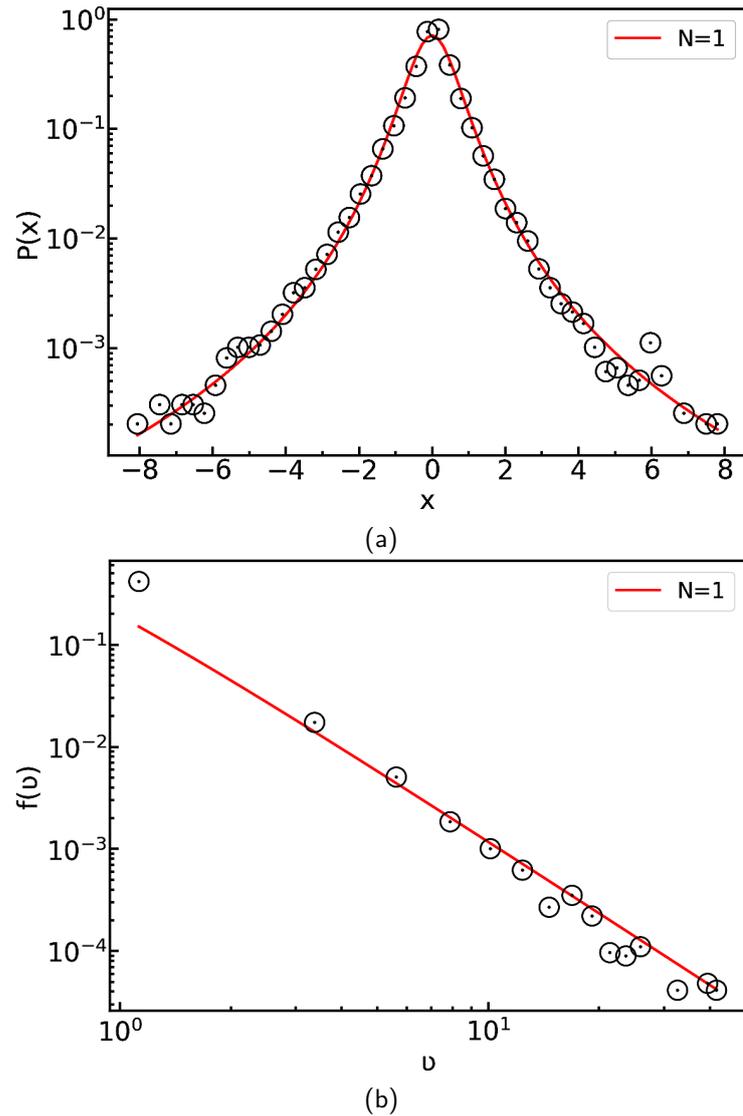
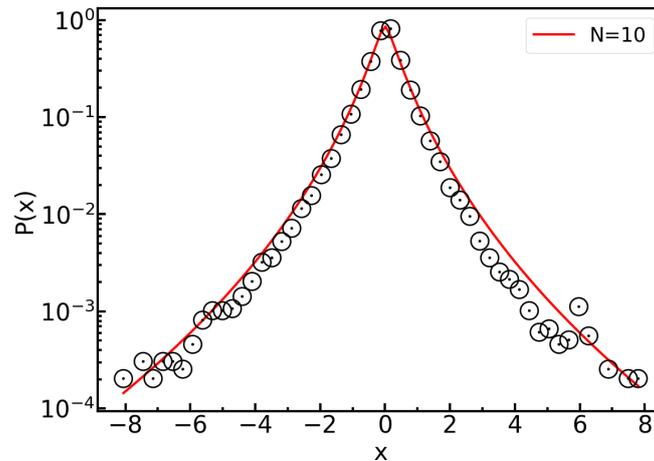


Figura 12 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linha vermelha) para  $N = 1$  e  $\beta = 0,35$ . O melhor ajuste conjunto foi alcançado para  $N = 1$ ; ver Fig. 9. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade  $v(t)$  e a previsão do modelo (linha) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor e publicada em (VASCONCELOS et al., 2024).

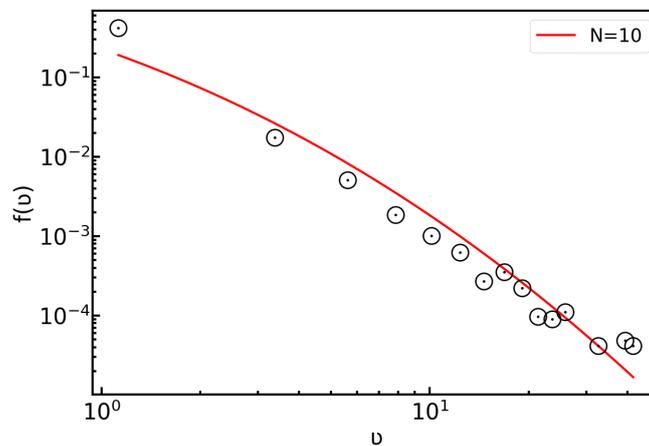
do algoritmo. Mesmo assim, é um erro de magnitude duas vezes maior que o encontrado na classe lei de potência.

#### 2.1.4 Discussão

A análise contemplou os três maiores mercados por volume de negociação: EUR-USD (28%), USD-JPY (13%) e GBP-USD (11%); com  $N$  ótimos dados por :  $N = 5$ ,  $N = 2$  e  $N = 1$  respectivamente. Observa-se que a profundidade da hierarquia correlaciona-se positivamente com o tamanho do mercado. Para garantir a robustez das conclusões, mostramos que a classe



(a)



(b)

Figura 13 – (a) Distribuição dos retornos das taxas de câmbio (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linha vermelha) para  $N = 10$  e  $\beta = 5,23$ , classe exponencial esticada. (b) Histograma (círculos pretos) da série de volatilidade  $v(t)$  e a previsão do modelo (linha) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

exponencial esticada mostrada na Figura 13 não descreve o fenômeno. Percebe-se que na região das caudas o ajuste não fica tão bom quanto o verificado pela figura 12.

Exceto pelo par GBP-USD, verificamos a existência de cascatas de informação nas moedas analisadas. Sugerimos que esse fenômeno em sistemas financeiros resulta do fato de haver diferentes horizontes de investimento pelos agentes participantes do mercado. Investimentos de longo prazo influenciam os investimentos de curto prazo pois os *traders* monitoram esses movimentos visando identificar oportunidades de lucro. O sentido inverso não se observa frequentemente, pois agentes de longo prazo priorizam questões macroeconômicas de variação mais gradual. Esta assimetria caracteriza uma cascata de informação das grandes para as pequenas escalas de tempo.

A caracterização de escoamentos em dinâmica de fluidos baseia-se no número de Reynolds. No contexto de mercados financeiros, adaptações destes conceitos resultaram em um análogo ao “número de Reynolds” para mercados forex (KARTONO et al., 2020). O volume de negociação representa o tamanho do mercado como uma medida da escala integral (grandes escalas). Propõe-se que o tamanho do mercado correlaciona-se com a dispersão dos horizontes de investimento, resultando em mais escalas de tempo diferentes. Esta correlação manifesta-se no nosso estudo. O EUR-USD, maior mercado, apresenta o maior número de escalas de tempo ( $N = 5$ ), enquanto o segundo par mais negociado, USD-JPY, exibe  $N = 2$ . O EUR-USD apresenta volume 2,2 vezes maior que o USD-JPY, e a razão do número de escalas entre ambos os pares é 2,5, indicando correlação significativa. Na comparação entre os pares USD-JPY e GBP-USD a correlação enfraquece. O primeiro é aproximadamente 20% maior que o segundo enquanto o valor de  $N$  é o dobro. Essa discrepância sugere uma limitação do modelo na captura de escalas de tempo discretas; um modelo de cascatas contínuo poderia refinar estas relações, conforme modelos já estabelecidos na literatura (BACRY; KOZHEMYAK; MUZY, 2008; MASKAWA; KURODA, 2020).

Os resultados indicam novas e promissoras direções de pesquisa, destacando-se: A análise dos três pares de moedas mais negociados, onde o terceiro par mais ativo (GBP-USD) apresentou o menor número de níveis hierárquicos ( $N = 1$ ). Consequentemente, a hipótese de que  $N$  cresce com o tamanho do mercado merece investigação em outros contextos, como o mercado de ações e índices de bolsas.

## 2.2 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

A aplicação de uma abordagem de turbulência em mercados de câmbio (Forex) revelou evidência direta de uma hierarquia de escalas de tempo na dinâmica do mercado. A análise quantificou o número de escalas temporais efetivas para os três pares de moedas mais negociados: EUR-USD, USD-JPY e GBP-USD, com base no modelo de intermitência da teoria H. Os resultados demonstram que quanto maior o mercado de câmbio, maior o número de escalas temporais relevantes, estabelecendo uma analogia direta com a turbulência, onde a separação entre as maiores e menores escalas na cascata de energia aumenta com o número de Reynolds.

O modelo proposto proporciona uma compreensão mais profunda do complexo processo pelo qual a informação, medida pela volatilidade dos preços, propaga-se de escalas temporais

mais longas para mais curtas. Modelos financeiros baseados em analogias com a turbulência contribuem para a compreensão da dinâmica das taxas de câmbio. Esta visão hierárquica do processo fornece insights fundamentais para o desenvolvimento de estratégias eficientes de trading algorítmico.

### 3 HIERARQUIA EM TEMPOS CARACTERÍSTICOS DE PRIMEIRA PASSAGEM

O tempo de espera desempenha um papel importante em sistemas financeiros. No mercado de opções, por exemplo, estipula-se uma data limite para o acordo. No mercado Forex, pequenos investidores geralmente buscam operações que terminam no mesmo dia, caso deseje manter uma posição aberta no mercado por mais de um dia, é cobrado uma taxa chamada *swap*. Dessa forma, estimar o tempo típico de uma negociação é uma informação essencial para uma estratégia lucrativa.

Uma análise temporal pode ser incluída nesse contexto através dos tempos de primeira passagem. Veremos que ela conduz a um tempo característico no regime de tempos grandes. De forma análoga ao que é feito para tempos de relaxação em sistemas complexos (PALMER et al., 1984), neste capítulo é mostrado como calcular distribuições de tempos de primeira passagem para mercados Forex; é feita uma composição de uma distribuição do tempo característico  $\tau$  com uma distribuição exponencial.

No Capítulo 1, constatou-se que esses mercados possuem uma dinâmica hierárquica, no qual foi calculado o número de escalas de tempo relevantes. Isso é um indício de que um simples decaimento exponencial não é suficiente para descrever o tempo de primeira passagem para mercado Forex. É preciso verificar e explicar como de fato se dá essa divergência da exponencial. De forma semelhante ao que foi feito para a volatilidade no capítulo anterior, assume-se que há uma hierarquia nos tempos característicos. Será empregado novamente o formalismo da teoria H para calcular o nível dessa hierarquia.

Vamos inicialmente mostrar alguns casos mais elementares do como se calcula os tempos de primeira passagem. Em seguida, a fim de descrever distribuições empíricas, usa-se o modelo dinâmico e hierárquico para os tempos característicos.

#### 3.1 INTRODUÇÃO A TEMPOS DE PRIMEIRA PASSAGEM

Apresentamos uma descrição matemática para problemas que envolvem tempos de primeira passagem. O conteúdo físico do sistema está contido na equação diferencial parcial da distribuição de probabilidade. Os métodos apresentados calculam inicialmente a probabilidade de sobrevivência.

### 3.1.1 Tempos de primeira passagem em uma barreira

Vamos agora voltar nossa atenção para o caso de problemas que sejam contínuos no tempo e no espaço. Podemos encontrar soluções desse tipo em (REDNER, 2001). Esses sistemas são tipicamente descritos por equações diferenciais parciais, sendo fundamental a equação da difusão dada por:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

onde  $c(x,t)$  é a concentração de partículas, que representa a densidade de probabilidade de ocupação no contínuo, e  $D$  é o coeficiente de difusão. Para resolver essa equação, introduzimos a transformada de Fourier

$$c(k,t) = \int c(x,t) e^{ikx} dx. \quad (3.2)$$

Substituindo a equação 3.2 em 3.1, temos

$$\dot{c}(k,t) = -Dk^2 c(k,t). \quad (3.3)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária, cuja solução é

$$c(k,t) = c(k,0) e^{-Dk^2 t}. \quad (3.4)$$

A condição inicial é uma partícula localizada em  $x_0$ , representada por  $c(x,t=0) = \delta(x-x_0)$ .

No espaço de Fourier, isto resulta em  $c(k,0) = \exp(ikx_0)$ , levando a

$$c(k,t) = e^{ikx_0} e^{-Dk^2 t}. \quad (3.5)$$

Para obter a distribuição de probabilidade no espaço real, aplicamos a transformada inversa de Fourier

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-Dk^2 t - ik(x-x_0)} dk. \quad (3.6)$$

Resolvendo esta integral gaussiana através do método de completar quadrados, obtemos a distribuição de probabilidade

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}. \quad (3.7)$$

Para abordar o problema de primeira passagem, exploramos sua analogia com a eletrostática. Esta analogia emerge naturalmente da similaridade matemática entre as equações

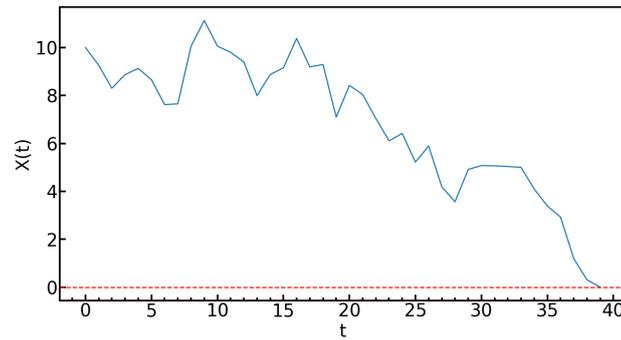


Figura 14 – Ilustração de um movimento browniano que se inicia em  $X = 10$  até atingir a origem. **Fonte:** Elaborada pelo autor.

diferenciais e condições de contorno dos dois problemas. A probabilidade de saída corresponde ao campo elétrico no ponto de fronteira em uma geometria equivalente.

O caso em questão é uma partícula em difusão simples iniciando em  $\vec{r}_0$  com uma fronteira absorvente  $B$ . Para resolver matematicamente, temos as condições  $c(\vec{r}, 0; \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  e  $c(\vec{r}, t; \vec{r}_0)|_{\vec{r} \in B} = 0$ . A distribuição dos tempos de primeira passagem é dada pelo fluxo  $j(\vec{r}_B, t)$  através de um ponto  $\vec{r}_B$  na fronteira  $B$  (REDNER, 2001):

$$j(\vec{r}_B, t) = -D \frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial \hat{n}} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_B}, \quad (3.8)$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário normal em  $\vec{r}_B$ .

No caso unidimensional, a partícula inicia seu movimento em  $x_0 > 0$ , e é absorvida na origem, onde  $c(x = 0, t > 0) = 0$ . A figura 14 exemplifica a situação descrita. Denotando a distribuição dos tempos de primeira passagem por  $F(0, t)$ , aplicamos o método das imagens da eletrostática. Este método introduz uma “antipartícula” em  $x = -x_0$  que, junto com a partícula original em  $x = x_0$ , satisfaz automaticamente a condição de contorno na origem. A distribuição de probabilidade resulta da superposição de duas gaussianas com sinais opostos:

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[ \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right) - \exp\left(-\frac{(x + x_0)^2}{4Dt}\right) \right]. \quad (3.9)$$

Para calcularmos a distribuição dos tempos, vamos utilizar a equação 3.8, isto é, fazemos

$$F(0, t) = +D \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{x_0}{\sqrt{4\pi Dt^3}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4Dt}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

que é uma distribuição gaussiana inversa. A equação 3.10 revela importantes propriedades físicas do sistema. A normalização da distribuição implica que a partícula inevitavelmente alcançará a origem, com probabilidade 1. Esta propriedade não se mantém necessariamente

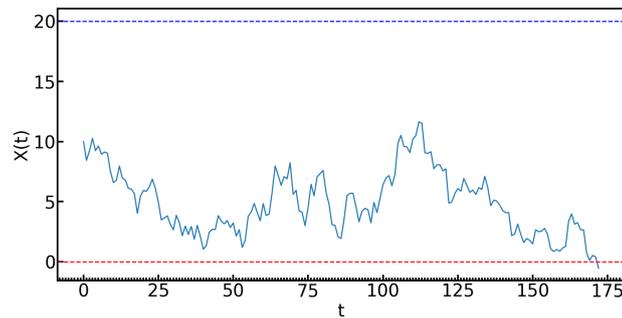


Figura 15 – Ilustração de um movimento browniano que se inicia em  $X = 10$  até atingir uma das duas barreiras situadas em  $X = 0$  e  $X = 20$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor.

para outros regimes difusivos ou em dimensões superiores. Notavelmente, o tempo médio de primeira passagem diverge, como demonstrado por

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t F(0, t) dt \sim \int_0^{\infty} t \times t^{-3/2} dt = \infty. \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Tempos de primeira passagem dentro de uma região

Consideremos agora o movimento browniano confinado a um intervalo finito. As condições de contorno podem variar entre barreiras refletoras, transmissoras ou absorventes. Vamos focar no caso de barreiras absorventes em ambas as extremidades. Uma quantidade fundamental é a probabilidade de sobrevivência  $S(t)$ , que representa a probabilidade da partícula não atingir nenhuma barreira até o tempo  $t$ . A distribuição dos tempos de primeira passagem  $F(t)$  relaciona-se com  $S(t)$  via  $F(t) = -[\partial S(t)/\partial t]$  (GARDINER, 1985; REDNER, 2001). Para uma distribuição inicial normalizada  $c(x, t = 0)$ , a probabilidade de sobrevivência no intervalo  $[0, L]$  é dada por:

$$S(t) \equiv \int_0^L c(x, t) dx. \quad (3.12)$$

Consideremos novamente a difusão simples descrita pela equação 3.1. O movimento agora está restrito ao intervalo  $[0, L]$  com condições de contorno absorventes, temos que  $c(0, t) = c(L, t) = 0$ . A condição inicial localiza a partícula em  $x_0$ , expressa por  $c(x, t = 0) = \delta(x - x_0)$ . A figura 15 fornece uma visão esquematizada do problema.

Analogamente à relação anterior com a eletrostática, este problema apresenta uma correspondência com o poço quadrado infinito da mecânica quântica. Observe a equação de Schrödinger unidimensional dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t). \quad (3.13)$$

Na difusão simples,  $V(x) = 0$  dentro do intervalo e  $V(x) = \infty$  fora. O coeficiente de difusão  $D$  faz o papel do  $-\hbar^2/2m$ . Resolvemos a equação 3.1 através do método de separação de variáveis  $c(x, t) = f(t)g(x)$ , que fica

$$\frac{\partial [f(t)g(x)]}{\partial t} = D \frac{\partial^2 [f(t)g(x)]}{\partial x^2}. \quad (3.14)$$

Separando as variáveis e expressando em termos de derivadas totais, obtemos

$$g(x) \frac{df(t)}{dt} = D f(t) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \rightarrow \frac{\dot{f}}{f} = D \frac{g''}{g} \quad (3.15)$$

A igualdade para todos valores de  $x$  e  $t$  requer que ambos os lados sejam iguais a uma constante negativa, assegurando o decaimento temporal da densidade de probabilidade

$$\dot{f} = -kf, \quad (3.16)$$

$$Dg'' = -kg. \quad (3.17)$$

A solução da parte espacial é da forma  $\sin(n\pi x/L)$  com  $n$  inteiro. A parte temporal apresenta decaimento exponencial, onde o  $n$ -ésimo modo decai com taxa  $k_n = D(n\pi/L)^2$ . A solução geral, obtida pela soma das soluções particulares, é

$$c(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt}, \quad (3.18)$$

onde as constantes  $A_n$  são determinadas pelas condições iniciais. A estrutura temporal merece atenção especial, pois  $t$  aparece exclusivamente no termo exponencial. Os modos de ordem superior decaem mais rapidamente, tornando-se irrelevantes para tempos longos. Assintoticamente, apenas o modo fundamental  $n = 1$  contribui significativamente.

A integração definida na equação 3.12 preserva a dependência temporal. O comportamento assintótico da probabilidade de sobrevivência é dado por

$$S(t) \propto e^{-D\pi^2 t/L^2} \equiv e^{-t/\tau_1}, \quad (3.19)$$

onde  $\tau_1 = L^2/D\pi^2$  é o tempo de decaimento característico do sistema, combinando parâmetros dinâmicos da partícula e geométricos do meio. A análise do tempo característico em diversos mercados é um ponto importante deste capítulo.

### 3.1.3 Tempos de primeira passagem para volatilidade estocástica

Como demonstrado anteriormente, a probabilidade de sobrevivência na difusão simples apresenta decaimento exponencial. Neste processo, a variância permanece constante, pois  $D = \sigma^2/2$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão. Diversos sistemas físicos, entretanto, exibem variância que evolui no tempo. Os modelos de variância estocástica oferecem uma abordagem mais robusta para estes sistemas, superando limitações de modelos mais simples. Esta generalização nos leva a investigar o comportamento assintótico da probabilidade de sobrevivência em sistemas com variância flutuante.

No contexto de sistemas financeiros, destaca-se o modelo de volatilidade estocástica de Heston (HESTON, 1993). O modelo descreve a evolução dos log-preços centrados  $X(t)$ , subtraídos de sua média:

$$dX(t) = \sqrt{Y(t)} dW_1(t). \quad (3.20)$$

A variância do processo  $X(t)$ , representada pela variável aleatória  $Y(t)$ , evolui segundo

$$dY(t) = -\alpha(Y(t) - m^2) dt + k\sqrt{Y(t)} dW_2(t), \quad (3.21)$$

onde  $\alpha$ ,  $m$  e  $k$  são constantes positivas e  $W_i(t)$  são processos de Wiener. A equação 3.21 significa que a solução determinística de  $Y$  tende exponencialmente para  $m^2$  com taxa  $\alpha$ . Aqui  $k$  é a amplitude das flutuações da volatilidade.

A probabilidade de sobrevivência caracteriza os tempos de escape dentro de uma faixa. Para volatilidade flutuante, esta probabilidade depende tanto do retorno quanto da volatilidade. Denotando esta probabilidade de sobrevivência bidimensional por  $S(x,y,t)$ . Esta função representa a probabilidade do retorno  $X(t)$ , iniciando em  $X(0) = x$  com volatilidade  $Y(0) = y$ , permanecer no intervalo  $(-L/2, L/2)$  até o tempo  $t$ .

O processo difusivo bidimensional em  $X(t)$  e  $Y(t)$  resulta na seguinte equação de Fokker-Planck reversa (GARDINER, 1985):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha(y - m^2) \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{1}{2} k^2 y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

com condições de contorno no tempo e no espaço dadas por

$$S(x, y, 0) = 1, \quad S(\pm L/2, y, t) = 0. \quad (3.23)$$

A solução desta equação pode ser obtida via séries de Fourier. Dada a condição de contorno  $S(\pm L/2, y, t) = 0$ , a simetria do intervalo sugere uma solução em termos apenas das componentes de cosseno:

$$S(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(y, t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right), \quad (3.24)$$

onde os coeficientes  $S_n(y, t)$  são dados por

$$S_n(y, t) = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} S(x, y, t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.25)$$

Aplicando a condição inicial da equação 3.23 à expressão dos coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} S_n(y, 0) &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} S(x, y, 0) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) dx = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)} = \gamma_n. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Denotando estes termos por  $\gamma_n$ . Substituindo a solução 3.24 na equação 3.22, a independência dos termos de cosseno resulta na equação diferencial parcial

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = -\alpha(y - m^2) \frac{\partial S_n}{\partial y} + \frac{1}{2} k^2 y \frac{\partial^2 S_n}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 y S_n. \quad (3.27)$$

Introduzindo novas escalas de tempo e volatilidade,  $\tau = \alpha t$  e  $v = (2\alpha/k^2)y$ . Esta transformação resulta em

$$\frac{\partial S_n}{\partial \tau} = -(v - \theta) \frac{\partial S_n}{\partial v} + v \frac{\partial^2 S_n}{\partial v^2} - \left(\frac{\beta_n}{2L}\right)^2 v S_n, \quad (3.28)$$

onde  $\beta_n = (k/\alpha)(2n+1)\pi$  e  $\theta = (2\alpha/k^2)m^2$ . Esta equação diferencial, independente de  $x$ , admite a solução

$$S_n(v, \tau) = \gamma_n \exp[-A_n(\tau) - B_n(\tau)v], \quad (3.29)$$

em que  $A_n(\tau)$  e  $B_n(\tau)$  são funções do tempo a serem determinadas. Substituindo 3.29 em 3.28, obtemos para cada termo

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n}{\partial \tau} &= -[\dot{A}_n(\tau) + \dot{B}_n(\tau)v] S_n, \\ \frac{\partial S_n}{\partial v} &= -B_n(\tau) S_n, \\ \frac{\partial^2 S_n}{\partial v^2} &= B_n^2(\tau) S_n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aqui, fizemos o uso da notação  $\dot{A}_n(\tau)$  e  $\dot{B}_n(\tau)$  para designar derivadas totais em relação ao tempo. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$-[\dot{A}_n(\tau) + \dot{B}_n(\tau)v] = (v - \theta)B_n(\tau) + vB_n^2(\tau) - (\beta_n/2L)^2v. \quad (3.31)$$

Por independência linear da variável  $v$ , encontramos duas equações diferenciais ordinárias para  $A_n(\tau)$  e  $B_n(\tau)$ , são elas

$$\dot{A}_n(\tau) = \theta B_n(\tau), \quad (3.32)$$

$$\dot{B}_n(\tau) = -B_n(\tau) - B_n^2(\tau) + (\beta_n/2L)^2. \quad (3.33)$$

A primeira tem como solução

$$A_n(\tau) = \theta \int_0^\tau B_n(s) ds, \quad (3.34)$$

enquanto a segunda é uma equação de Ricatti. Mostramos a solução da equação de Ricatti e posteriormente da equação para  $A_n(\tau)$  no Apêndice C. Temos que

$$A_n(\tau) = \theta \left[ \mu_n^- \tau + \ln \left( \frac{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{-\Delta_n \tau}}{\Delta_n} \right) \right] \quad (3.35)$$

e

$$B_n(\tau) = \mu_n^- \frac{1 - e^{-\Delta_n \tau}}{1 + (\mu_n^- / \mu_n^+) e^{-\Delta_n \tau}}, \quad (3.36)$$

onde  $\mu_n^\pm = (\Delta_n \pm 1)/2$  com  $\Delta_n = \sqrt{1 + (\beta_n/L)^2}$ . Agora que já calculamos todas as quantidades, podemos retornar à forma da probabilidade de sobrevivência, ela é dada por

$$S(x, v, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \exp[-A_n(\tau) - B_n(\tau)v] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right). \quad (3.37)$$

No regime de tempos grandes, quando  $\tau \gg 1$ , temos que  $A_n(\tau) \approx \theta \mu_n^- \tau$  e  $B_n(\tau) \approx \mu_n^-$ . Então o comportamento assintótico da probabilidade de sobrevivência para tempos longos é dado por

$$S(x, v, \tau) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \exp[-\mu_n^- (\theta \tau + v)] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right). \quad (3.38)$$

### 3.2 VERSÃO HIERÁRQUICA DOS TEMPOS CARACTERÍSTICOS

Ambos os regimes de volatilidade, constante e estocástica, apresentam um tempo característico de escape da região delimitada. Este tempo depende tanto dos parâmetros geomé-

tricos quanto da dinâmica do sistema. No modelo de Heston, evidenciamos a dependência da probabilidade de sobrevivência com a volatilidade. A introdução da dinâmica na volatilidade modifica substancialmente o decaimento assintótico de  $S(t)$ . Conforme demonstrado no Capítulo 1, mercados Forex exibem uma dinâmica hierárquica para a variância. Esta hierarquia naturalmente suscita questões sobre sua influência nos tempos de primeira passagem e sua formalização matemática.

Uma abordagem proposta é incorporar a turbulência observada nos mercados ao estudo dos tempos de primeira passagem. Mantendo os aspectos geométricos, modificamos apenas o tratamento da volatilidade. Uma simplificação possível é tratar o tempo característico como variável aleatória.

Esta abordagem encontra paralelos nos fenômenos de relaxação. Materiais como vidros, polímeros e proteínas apresentam tempos característicos de retorno ao equilíbrio após perturbações. Sistemas complexos exibem relaxação distinta da exponencial de Debye (DEBYE, 1945; DATTA GUPTA, 2012)

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.39)$$

Geralmente, o fenômeno é descrito em termos de uma exponencial esticada de Kohlrausch-Williams-Watts (KOHLRAUSCH, 1847; WILLIAMS; WATTS, 1970; KLAFTER; SHLESINGER, 1986; BLUMEN; KLAFTER; ZUMOFEN, 1986)

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.40)$$

e também pode ser descrita por um assintótico do tipo lei de potência (KLAFTER; SHLESINGER, 1986; SINGH, 2020)

$$\Phi(t) = \Phi_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-n}, \quad n > 1. \quad (3.41)$$

A relaxação de Debye, caracterizada por um único tempo de relaxação  $\tau$ , implica estabilidade dinâmica para tempos superiores. Uma descrição mais completa dos sistemas físicos requer não apenas ajustes às funções 3.40 e 3.41, mas uma fundamentação dinâmica. Como demonstrado em (PALMER et al., 1984), tratar o tempo de relaxação como variável resulta em uma equação mais geral que a relaxação exponencial simples. Esta generalização é obtida pela composição

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) \exp(-t/\tau) d\tau, \quad (3.42)$$

onde  $w(\tau)$  é uma distribuição de probabilidade de  $\tau$ . Fisicamente, esta distribuição deve emergir naturalmente da dinâmica do sistema, em vez de ser arbitrariamente escolhida.

Esta abordagem pode ser estendida à probabilidade de sobrevivência, desde que identificado o *kernel* apropriado. O *kernel* exponencial na equação 3.42 emerge naturalmente do problema. Este *kernel* permite generalizar a relaxação de Debye para sistemas complexos. A exponencial atua como base para uma distribuição mais abrangente.

O capítulo anterior evidenciou múltiplas escalas temporais na evolução dos preços Forex. Considerando os tempos de escape extraídos do histórico, questiona-se: Como será que essa hierarquia se manifesta em problemas de primeira passagem? Será que o número de hierarquias vai se repetir para cada par de moedas? Qual a relação do número de hierarquias com a geometria do problema? Abordaremos estas questões desenvolvendo um modelo dinâmico e hierárquico para os tempos característicos. Iremos novamente empregar o formalismo da teoria H, dessa vez utilizando as classes de universalidades presentes no Apêndice A. A distribuição dos tempos de primeira passagem  $F(t)$  é dada por

$$F_N(t) = \int_0^{\infty} F(t|\tau_N) w_N(\tau_N) d\tau_N, \quad (3.43)$$

em que  $w_N(\tau_N)$  é a distribuição da superposição de  $N$  variáveis de background, tal como no Apêndice A, e  $F(t|\tau_N)$  é uma exponencial

$$F_N(t|\tau_N) = \frac{1}{\tau_N} \exp(-t/\tau_N). \quad (3.44)$$

Da discussão sobre o *kernel*, ficou claro que queríamos um  $S(t|\tau_N) \propto \exp(-t/\tau_N)$ . O fato de que  $F(t|\tau_N) = -[\partial S(t|\tau_N)/\partial t]$  (GARDINER, 1985) faz com que a equação 3.44 seja a escolha certa, ela inclusive já está normalizada. A forma como extrairemos esses dados faz com que a distribuição relevante seja  $F(t)$  ao invés de  $S(t)$ , mais detalhes serão mostrados adiante.

### 3.2.1 Classe Lei de Potência

A primeira classe a ser estudada é a família de distribuições com comportamento assintótico de lei de potência. Inicialmente, realiza-se a composição para  $N = 1$ ; em seguida, aborda-se

o caso geral.

### 3.2.1.1 Caso $N=1$

Começaremos pelo caso onde há apenas uma escala de tempo relevante  $\tau_1$  que segue uma distribuição gama inversa

$$w_1(\tau_1|\tau_0) = \frac{(\beta_1\tau_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \tau_1^{-\beta_1-2} e^{-\frac{\beta_1\tau_0}{\tau_1}}. \quad (3.45)$$

Com isso, a composição é

$$F_1(t) = \frac{(\beta_1\tau_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \tau_1^{-\beta_1-2} e^{-\frac{\beta_1\tau_0}{\tau_1}} d\tau_1 = \frac{(\beta_1\tau_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \tau_1^{-\beta_1-3} e^{-(\beta_1\tau_0+t)/\tau_1} d\tau_1 \quad (3.46)$$

A integral acima é resolvida fazendo uma simples substituição  $\tau_1 = 1/u$ , a nova expressão é identificada como similar a uma função gama em forma integral. Temos então que

$$F_1(t) = \frac{(\beta_1\tau_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \frac{\Gamma(\beta_1+2)}{(\beta_1\tau_0+t)^{\beta_1+2}}. \quad (3.47)$$

Dessa forma fica evidente que o comportamento assintótico neste caso é uma lei de potência  $t^{-\beta_1-2}$ . Veremos agora qual a expressão e o comportamento assintótico para o caso de  $N$  geral.

### 3.2.1.2 Caso $N>1$

Colocando a equação 3.44 no formalismo das funções de Meijer, ela fica

$$F(t|\tau_N) = \frac{1}{t} G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{t}{\tau_N} \right). \quad (3.48)$$

Na classe lei de potência, a distribuição  $w(\tau)$  tem a mesma forma que a equação A.42. Deixando com as variáveis apropriadas, temos

$$w(\tau_N) = \frac{1}{\tau_0\omega\Gamma(\beta+1)} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{\tau_0\omega} \right), \quad (3.49)$$

Vamos usar a propriedade de inversão das funções de Meijer, isso nos dá

$$F_N(t|\tau_N) = \frac{1}{t} G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{t}{\tau_N} \right) = \frac{1}{t} G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{t} \right). \quad (3.50)$$

Inserindo 3.50 e 3.49 em 3.43, temos

$$F_N(t) = \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1) t} \int_0^\infty G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{t} \right) G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{\tau_0 \omega} \right) d\tau_N. \quad (3.51)$$

Usando a propriedade da integral do produto de duas funções de Meijer, resulta em

$$F_N(t) = t \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1) t} G_{N,1}^{1,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{t}{\tau_0 \omega} \right) = \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1)} G_{N,1}^{1,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{t}{\tau_0 \omega} \right). \quad (3.52)$$

Podemos novamente nos valer da relação 2.15 para analisar mais facilmente o comportamento assintótico para tempos longos. Esse procedimento resulta em

$$F_N(t) = \frac{1}{\tau_0 \omega} \frac{\Gamma(\beta + 2)}{\Gamma(\beta + 1)} {}_N F_0 \left( \beta + 2; - \frac{t}{\omega \tau_0} \right). \quad (3.53)$$

Sabendo que o comportamento assintótico de uma função hipergeométrica desse tipo obedece a equação 2.22, chegamos em

$$F_N(t) \approx \frac{C_N}{t^{\beta+2}}, \quad (3.54)$$

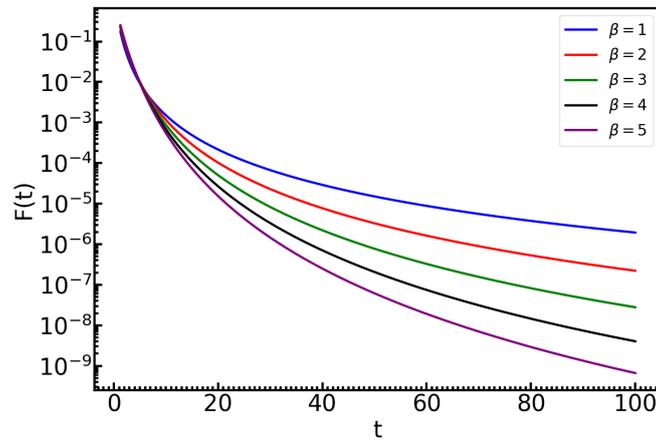
em que fizemos a consideração de que todos os  $\beta_i$ 's são iguais a  $\beta$  e a constante  $C_N$  cresce com o valor de  $N$ . A Figura 16a mostra a distribuição 3.53 onde é fixado o valor  $N = 1$  e os valores de  $\beta$  são diferentes. Nota-se que quanto maior  $\beta$ , mais intenso é o decaimento. A Figura 16b mostra as curvas para o valor de fixo de  $\beta = 1$  para os diferentes valores de  $N$ . Nesse caso, quanto menor o  $N$ , mais intenso é o decaimento.

### 3.2.2 Classe Exponencial esticada

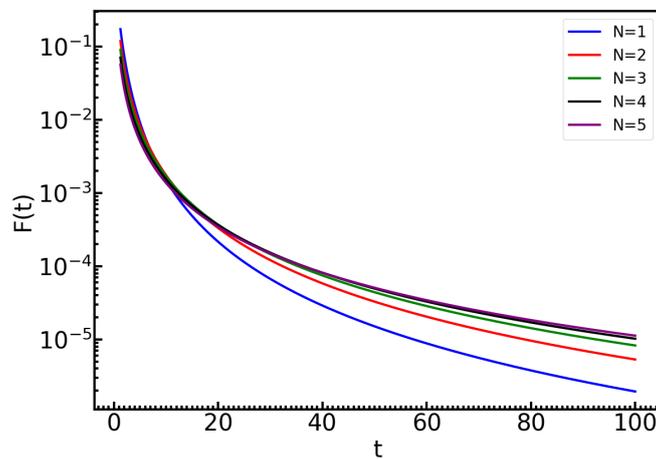
A outra classe é composta por distribuições com comportamento assintótico de uma exponencial esticada modificada. Para evidenciar a razão dessa nomenclatura, inicialmente aborda-se o caso  $N = 1$ , seguido pela análise do caso geral.

#### 3.2.2.1 Caso $N=1$

A variável  $\tau_1$  tem uma distribuição de probabilidade gama dada por



(a)



(b)

Figura 16 – (a) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para  $N = 1$  e  $\beta = 1, 2, 3, 4, 5$  na classe lei de potência. (b) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\tau_0 = 1$  e  $\beta = 1$  na classe lei de potência. **Fonte:** Elaborada pelo autor.

$$w_1(\tau_1|\tau_0) = \frac{(\beta_1/\tau_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \tau_1^{\beta_1-1} e^{-\frac{\beta_1 \tau_1}{\tau_0}}, \quad (3.55)$$

isso faz com que a composição fique

$$F_1(t) = \frac{(\beta_1/\tau_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^\infty \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \tau_1^{\beta_1-1} e^{-\frac{\beta_1 \tau_1}{\tau_0}} d\tau_1 = \frac{(\beta_1/\tau_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^\infty \tau_1^{\beta_1-2} e^{-\frac{\beta_1 \tau_1}{\tau_0} - t/\tau_1} d\tau_1. \quad (3.56)$$

Essa integral é similar a seguinte integral de Bessel (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014):

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{\alpha}{x} - \gamma x} dx = 2(\alpha/\gamma)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{\alpha\gamma}) \quad (3.57)$$

onde  $K_\nu(z)$  é uma função de Bessel modificada de segundo tipo. Ao compararmos as duas equações, conseguimos identificar  $\nu = \beta_1 - 1$ ,  $\gamma = \beta_1/\tau_0$  e  $\alpha = t$ , isso resulta em

$$F_1(t) = \frac{(\beta_1/\tau_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} 2 \left( \frac{t}{\beta_1/\tau_0} \right)^{\frac{\beta_1-1}{2}} K_{\beta_1-1} \left( 2\sqrt{\frac{t\beta_1}{\tau_0}} \right). \quad (3.58)$$

É conhecido que

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.59)$$

Com isso em mãos, conhecemos o comportamento assintótico de  $F_1(t)$ , ele tem a forma

$$F_1(t) \approx t^{(\beta_1-3/2)/2} e^{-2(\beta_1 t/\tau_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.60)$$

### 3.2.2.2 Caso $N > 1$

Na classe lei de potência, a distribuição  $w(\tau)$  tem a mesma forma que a equação A.58 . O que adaptando as variáveis fica

$$w(\tau_N) = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta)} G_{0,N}^{N,0} \left( \beta-1 \left| \frac{\omega \tau_N}{\tau_0} \right. \right), \quad (3.61)$$

Inserindo 3.50 e 3.61 em 3.43, temos

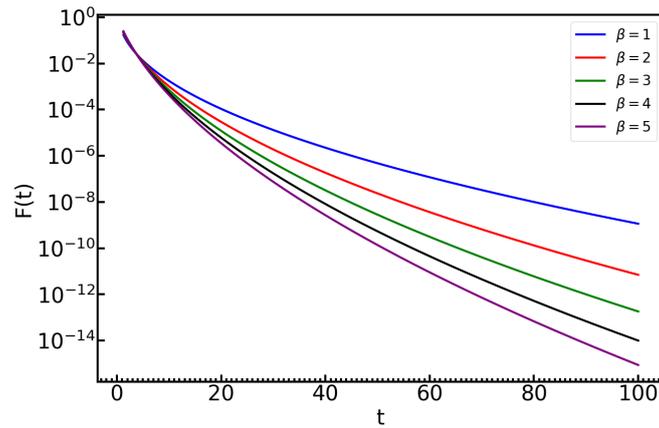
$$F_N(t) = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta) t} \int_0^\infty G_{1,0}^{0,1} \left( 0 \left| \frac{\tau_N}{t} \right. \right) G_{0,N}^{N,0} \left( \beta-1 \left| \frac{\omega \tau_N}{\tau_0} \right. \right) d\tau_N. \quad (3.62)$$

Aplicando a propriedade da integral do produto de funções Meijer, resulta em

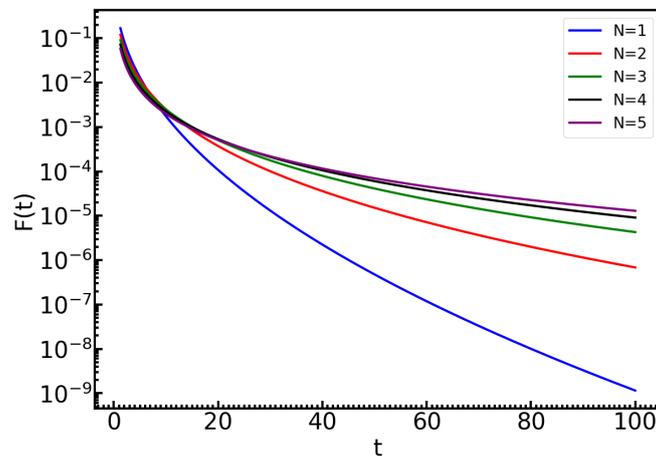
$$F_N(t) = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta) t} t G_{0,N+1}^{N+1,0} \left( \beta-1, 0 \left| \frac{\omega t}{\tau_0} \right. \right) = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta)} G_{0,N+1}^{N+1,0} \left( \beta-1, 0 \left| \frac{\omega t}{\tau_0} \right. \right) \quad (3.63)$$

Queremos o comportamento assintótico para tempos longos para a distribuição acima. Em (MATHAI; SAXENA; HAUBOLD, 2009) podemos encontrar diversas relações assintóticas para funções H de Fox, elas podem ser simplificadas para o caso de uma função G de Meijer, no limite  $x \rightarrow \infty$  vamos usar

$$G_{p,q}^{q,0} \left( \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \middle| x \right) \sim O \left( x^{\left[ \mathbb{R} \left( \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + \frac{p-q}{2} \right) + 1/2 \right] / (q-p)} \right) \exp \left[ -(q-p)x^{1/(q-p)} \right]. \quad (3.64)$$



(a)



(b)

Figura 17 – (a) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para  $N = 1$  e  $\beta = 1,2,3,4,5$  na classe exponencial esticada. (b) Distribuição teórica dos tempos de primeira passagem para  $N = 1,2,3,4,5$ ,  $\tau_0 = 1$  e  $\beta = 1$  na classe exponencial esticada. **Fonte:** Elaborada pelo autor.

Como  $p = 0$ , não temos termos  $a_j$ . O parâmetro  $q = N + 1$  em que um dos termos  $b_j = 0$ , os outros  $b_j = \beta - 1$ , ao passo que  $x = \omega t / \tau_0$ . Isso nos dá o comportamento assintótico de uma exponencial esticada modificada, de modo que a distribuição dos tempos de primeira passagem fica

$$F_N(t) \sim t^{\left(\frac{N(\beta-3/2)}{N+1}\right)} \exp \left[ -(N+1)(\omega t / \tau_0)^{1/(N+1)} \right]. \quad (3.65)$$

A Figura 17a mostra as curvas teóricas da equação 3.63 para  $N$  fixo e variando o valor de  $\beta$ . Percebe-se que  $\beta$  pequeno decai de forma mais branda. Na Figura 17b pode-se ver as curvas teóricas para o caso de  $\beta$  fixo e  $N$  variando. Nota-se que quanto menor  $N$ , mais intenso é o decaimento.

A distinção entre os níveis da hierarquia são mais evidentes em tempos longos. A forma

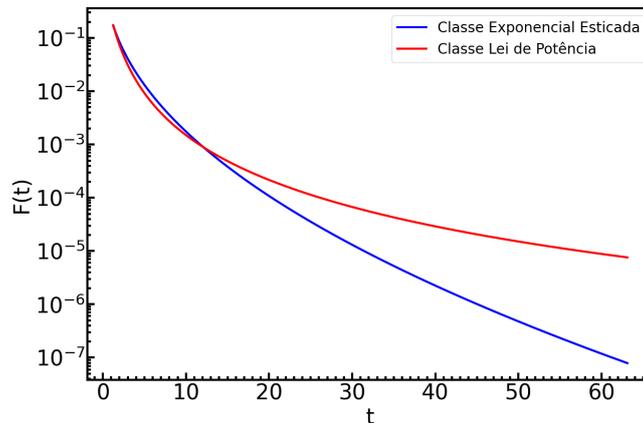


Figura 18 – Distribuições teóricas das equações 3.53 e 3.63 para  $N = 1$ ,  $\tau_0 = 1$  e  $\beta = 1$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor.

de extrair empiricamente essas distribuições nem sempre resulta numa distribuição com muito alcance, isso dificulta na hora de se fazer um ajuste e selecionar qual a melhor distribuição. Essa complicação pode existir até mesmo na comparação entre classes diferentes, como mostra a Figura 18. Percebe-se que até algo em torno de  $t = 10$  as distribuições das classes, com mesmo valor de  $N$  e  $\beta$  são bem próximas.

### 3.3 APLICAÇÃO EM MERCADO FOREX

Para manter consistência com o tipo de sistema analisado anteriormente, vamos explorar o conceito de hierarquia em tempos característicos e as correspondentes equações estabelecidas nos mesmos pares de moedas, a saber: EUR-USD, USD-JPY, GBP-USD. Um tipo muito comum de estratégia usada em mercado Forex é você realizar uma operação de compra ou venda e estabelecer limites superiores e inferiores para encerrar a posição através de uma operação inversa de mesmo volume. Este tipo de operação possui uma clara semelhança com o problema de escape de uma partícula dentro de um intervalo. Estamos interessados no aspecto temporal dessa operação. Tal conhecimento pode contribuir não apenas para a compreensão científica mas também fornecer informação útil para estratégias de negociações no mercado financeiro.

Antes de prosseguirmos, devemos examinar uma questão fundamental: O mercado Forex é realmente um exemplo de desvio da exponencial? Inicialmente, precisamos verificar a adequação do sistema em estudo. Na Figura 19a vemos um ajuste exponencial para os tempos de primeira passagem por um intervalo significativamente mais amplo do que na 19b. Os métodos

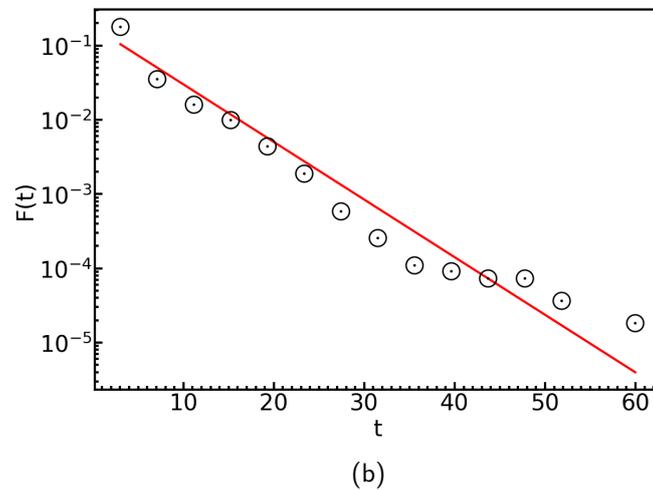
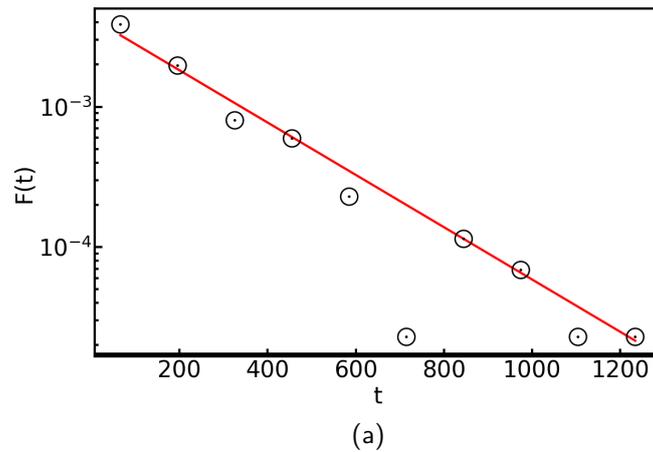


Figura 19 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e ajuste exponencial (linha vermelha) para  $L = 25\sigma$ . (b) Mesma convenção de cores de (a) com  $L = 2\sigma$ .  
**Fonte:** Elaborada pelo autor.

de extração desses valores serão detalhados adiante. A primeira figura mostra que o ajuste exponencial apresenta boa concordância, embora exista um ponto discrepante (chamamos de *outlier*). Já na segunda figura o ajuste mostra limitações, não reproduzindo adequadamente a forma levemente curvada da distribuição. Isso serve de motivação para buscarmos o ajuste teórico apropriado.

### 3.3.1 Extração de dados

Os dados foram coletados diretamente do centro histórico da plataforma MetaTrader. O arquivo possui o histórico de preços com informações temporais, dos valores de abertura, máxima, mínima, fechamento e volume. O valor de referência adotado é o preço de fechamento.

Uma questão importante a considerar para a extração dos tempos de primeira passagem

é sua metodologia de obtenção. Uma abordagem possível é realizar simulações que geram várias trajetórias a partir de um modelo escolhido, mensurando quanto tempo foi necessário para que cada trajetória atingisse uma das barreiras. Nosso interesse entretanto não é analisar simulações, mas sim o mercado real. Por se tratar de uma série histórica, o mercado real só possui um valor para cada instante medido, uma única trajetória é observável. A forma de abordar tal problema é fazer uma sucessão de *trades*, todos com o mesmo tamanho  $L$  ao longo da trajetória.

Podemos ilustrar esse procedimento pela figura 20. Nela, a linha contínua azul representa a evolução temporal de uma cotação. Observa-se que logo no início temos um ponto vermelho que simboliza uma compra efetuada nesse mercado, representando o ponto inicial até que uma das barreiras seja atingida. Nota-se que as linhas tracejadas esboçam os limites que esse preço pode atingir. Uma vez que esse preço é atingido, uma nova entrada nesse mercado é feita (gerando um novo ponto vermelho na figura) e novos valores para as barreiras são estabelecidos.

Para determinar onde serão posicionadas as barreiras é preciso considerar um detalhe, as equações que derivamos para tempos de primeira passagem no início deste capítulo derivam de um movimento browniano. No caso do modelo de Heston, são os log-retornos que apresentam uma distribuição gaussiana com volatilidade flutuante. Isso significa que o tamanho  $L$  não pode ser usado diretamente no preço. Seja  $S_1$  o preço da barreira inferior e  $S_2$  o preço da barreira superior, numa trajetória que se inicia em  $S_0$ , para um intervalo simétrico, temos:

$$S_1 = S_0 - \delta, \quad (3.66)$$

$$S_2 = S_0 + \delta, \quad (3.67)$$

onde  $\delta$  é a distância do ponto inicial da trajetória para qualquer uma das duas barreiras. A distância  $L$  tem que ser mantida nos log-preços em todas as entradas (compras) no mercado. Assim, requeremos que

$$\log S_2 - \log S_1 = L \rightarrow \log \left( \frac{S_0 + \delta}{S_0 - \delta} \right) = L \rightarrow \delta = \frac{(e^L - 1)}{(e^L + 1)} S_0. \quad (3.68)$$

Dessa forma, sabemos como encontrar a posição das barreiras para qualquer valor inicial de uma compra  $S_0$  mantendo o  $L$  fixo nos log-preços. A equação 3.68 é usada no algoritmo que faz a varredura nos preços de fechamento para observar se as barreiras foram atingidas,

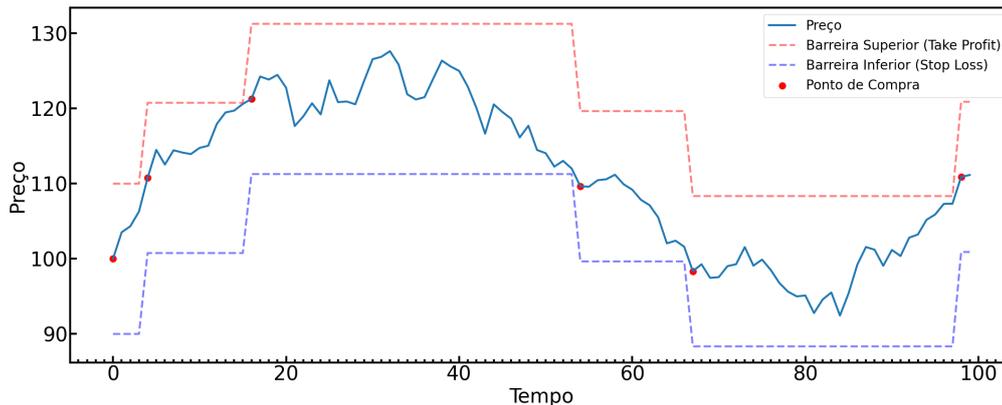


Figura 20 – Simulação de cotação de um par de moedas quaisquer ao longo do tempo. A linha azul e contínua representa o valor da cotação. As linhas tracejadas representam as barreiras para um preço inicial específico sendo a vermelha a barreira superior (Take Profit) e a azul a barreira inferior (Stop Loss). Os pontos em vermelho representam o momento em que se entrou comprado nesse mercado.  
**Fonte:** Elaborada pelo autor.

e em caso positivo, posicionar novas barreiras. Também é registrado o tempo decorrido entre as negociações, o que fornece a série de tempos de primeira passagem  $T(t) = \{t_i\}$ , onde  $i$  conta os trades.

Outro fator importante na extração dos tempos de primeira passagem é o tamanho do fator  $L$ . Espera-se intuitivamente uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho do intervalo e o tempo que é necessário para o preço atingir uma das barreiras. Para realizar uma comparação mais equilibrada entre diferentes moedas utilizaremos intervalos  $L$  comparáveis ao desvio padrão dos log-retornos de cada uma delas, são eles:  $\sigma_{(EUR-USD)}$ ,  $\sigma_{(USD-JPY)}$  e  $\sigma_{(GBP-USD)}$ .

### 3.3.2 Uma série para a média

É importante que se obtenha um bom ajuste tanto para a distribuição dos tempos de primeira passagem quanto para os tempos característicos. Na seção anterior, descrevemos o procedimento para obter a série  $T(t)$ , agora buscamos um procedimento para construir uma média móvel  $\tau(t)$ . Considere uma janela móvel tamanho  $M$  sobre a série  $T(t)$  e em cada janela calculamos a média móvel

$$\bar{\tau}(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} [T(t - j\delta t)]. \quad (3.69)$$

Existe uma dependência dessa série com o tamanho da janela  $M$ , adotaremos a notação

$\tau^M(t)$  com o índice sobrescrito para não ser confundido com o índice subscrito que foi usado para designar o número de escalas. Agora podemos escrever a versão discreta da equação 3.43, dada por

$$F^{(M)}(t) = \frac{1}{n - M} \sum_{i=1}^{n-M} \frac{1}{\tau^M(i)} \exp\left(-\frac{t}{\tau^M(i)}\right), \quad (3.70)$$

onde  $n$  é o número de pontos da série original  $T(t)$ . Para obter o melhor ajuste de  $F^{(M)}(t)$  aos valores empíricos, precisamos do melhor valor do tamanho da janela  $M^*$ . Ele é obtido através da realização deste processo para diversos tamanhos de janela.

Conhecendo o valor de  $M^*$  realizaremos o ajuste conjunto das funções  $F_N(t)$  e  $w_N(\tau)$  para cada uma das classes. O valor  $N$  é fixado e buscamos o melhor valor de  $\beta$  que ajusta simultaneamente as duas distribuições. Para cada  $N$ , buscamos minimizar a função

$$Erro(N) = \frac{1}{2n - M^*} \left[ \sum_{i=1}^n |\ln F_N(t_i) - \ln F_i| + \sum_{i=1}^{n-M^*} |\ln w_N(\tau_i) - \ln w_i| \right], \quad (3.71)$$

onde  $F_i$  e  $w_i$  são os valores dos histogramas dos tempos de primeira passagem e das médias. Como temos duas classes, exponencial esticada e lei de potência, utilizaremos uma notação para diferenciá-las. Para a primeira temos  $\beta_E$  e  $Erro_E(N)$ , para a segunda  $\beta_L$  e  $Erro_L(N)$ .

### 3.3.3 Resultados

Apresentamos o resultado do procedimento de ajuste conjunto para os tempos de primeira passagem em um intervalo nos pares de moedas já mencionados. Aplicamos a equação 3.71 nas classes lei de potência e exponencial esticada, isso resulta em vários valores para o erro e buscamos o menor deles.

Em todos os conjuntos de dados precisamos criar histogramas para comparar com as curvas teóricas. Utilizamos a regra de Sturges (STURGES, 1926) para determinar o número de *bins*. No apêndice B é mostrado que o valor  $\tau_0$  é obtido pela média dos tempos de primeira passagem, portanto ele não é um parâmetro que precisa ser encontrado pelo ajuste.

As tabelas a seguir mostram os erros e os valores de  $\beta$  para cada classe e cada  $N$ . A Tabela 1 é referente ao par GBP-USD com tamanho do intervalo  $L = 2\sigma_{(GBP-USD)}$ , o tamanho da janela  $M = 99$  e  $\tau_0 = 4,78$ . Ela indica que o menor erro ocorre para  $N = 2$  na classe exponencial esticada com  $\beta_E = 15,94$ . A Figura 21 ilustra esse resultado, apresentando as

correspondentes curvas teóricas. Na distribuição dos tempos de primeira passagem as curvas são bastante similares, exceto para tempos longos. Já na Figura 21b as curvas apresentam maior distinção, permitindo ver que a curva vermelha aproxima-se melhor aos pontos.

Tabela 1 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par GBP-USD.  $L = 2\sigma_{(GBP-USD)}$

$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	8,18	8,22	0,151	0,133
2	15,28	15,94	0,141	0,131
3	22,36	24,44	0,139	0,132
4	29,44	32,94	0,138	0,1335
5	28,18	-	0,1383	-

**Fonte:** Elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 2 diz respeito ao par USD-JPY com  $L = 2\sigma_{(USD-JPY)}$ ,  $M = 33$  e  $\tau_0 = 4,49$ . Nela vemos que o menor erro ocorre para  $N = 5$  na classe exponencial esticada com  $\beta_E = 22,78$ . A classe lei de potência chega ao limite de precisão do algoritmo a partir de  $N = 6$ . A Figura 22 exhibe as curvas teóricas que permitem fazer a comparação entre as classes. Na Figura 22b podemos ver que na região da cauda a curva vermelha está mais próxima dos pontos.

Tabela 2 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par USD-JPY.  $L = 2\sigma_{(USD-JPY)}$

$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	4,49	3,91	0,089	0,080
2	9,70	8,74	0,080	0,0735
3	14,49	13,52	0,077	0,0730
4	19,27	18,29	0,0766	0,0728
5	24,04	22,78	0,0758	0,0727
6	-	27,26	-	0,0728

**Fonte:** Elaborada pelo autor (2024)

A Tabela 3 é relativa ao par EUR-USD com  $L = 4\sigma_{(EUR-USD)}$ ,  $M = 181$  e  $\tau_0 = 9,51$ . Ela mostra que o menor erro ocorre para  $N = 2$  na classe lei de potência com  $\beta_L = 14,23$ . A classe exponencial esticada chega ao limite de precisão a partir de  $N = 6$ . A figura 23 mostra as melhores curvas teóricas de cada classe. As curvas da distribuição dos tempos de primeira passagem são bastante similares enquanto na Figura 23b é possível ver uma boa diferenciação, sendo a curva azul a melhor.

A mesma análise em busca das melhores curvas teóricas para cada valor de  $N$  será feita escolhendo um intervalo  $L$  maior para cada par de moedas. A Tabela 4 é referente ao par

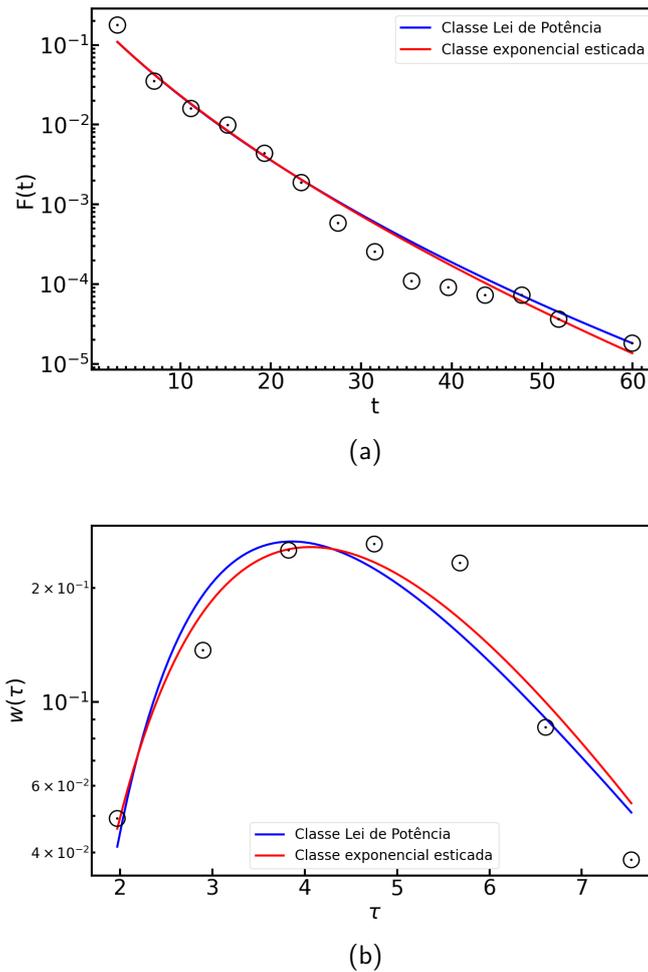


Figura 21 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 2$  e  $\beta_E = 15,94$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 5$  e  $\beta_L = 28,18$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 1. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

GBP-USD com  $L = 4\sigma_{(GBP-USD)}$ ,  $M = 15$  e  $\tau_0 = 10,96$ . Ela exibe o valor  $N = 1$  da classe exponencial esticada como sendo o menor erro e temos  $\beta_E = 5,55$ . A classe lei de potência chega ao limite de precisão do algoritmo a partir de  $N = 6$ . Esse resultado é ilustrado na Figura 24, podemos notar em 24b que a curva vermelha é bem melhor ajustada.

A Tabela 5 diz respeito ao par USD-JPY com  $L = 4\sigma_{(USD-JPY)}$ ,  $M = 15$  e  $\tau_0 = 10,23$ . Nela vemos que o menor erro ocorre para  $N = 3$  na classe exponencial esticada com  $\beta_E = 8,32$ . A classe lei de potência chega ao limite de precisão do algoritmo a partir de  $N = 9$ . A Figura 25 mostra as melhores curvas de cada classe. Verifica-se que na Figura 25b a linha vermelha se aproxima mais dos pontos na região da cauda.

A Tabela 6 é relativa ao par EUR-USD com  $L = 6\sigma_{(EUR-USD)}$ ,  $M = 71$  e  $\tau_0 = 16,63$ .

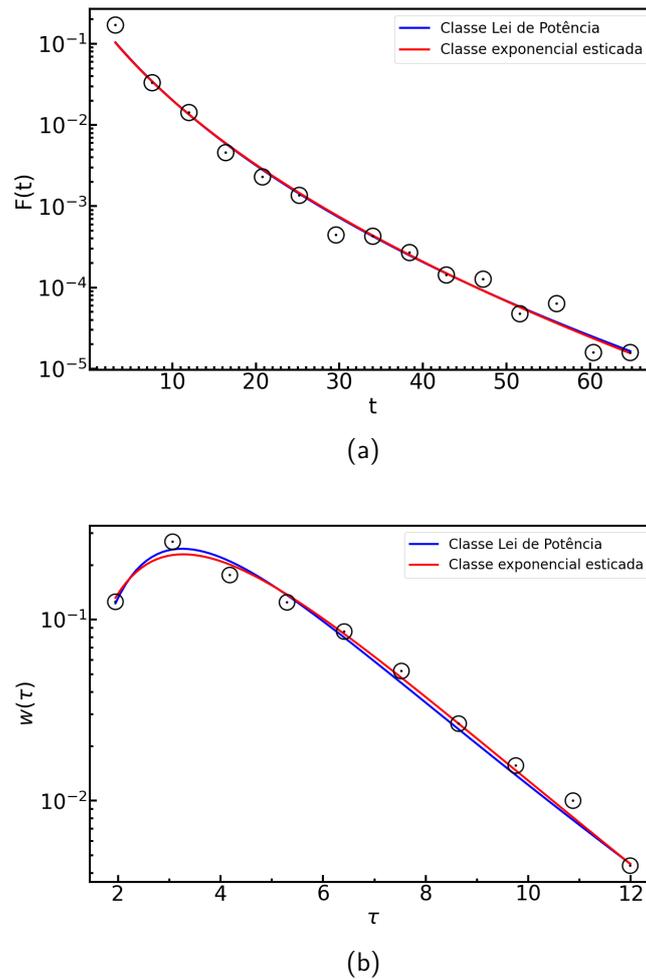


Figura 22 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 5$  e  $\beta_E = 22,78$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 5$  e  $\beta_L = 24,04$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 2. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

Ela mostra que o menor erro ocorre para  $N = 1$  na classe lei de potência com  $\beta_L = 4,93$ . A classe exponencial esticada chega ao limite de precisão a partir de  $N = 7$ . Isso é ilustrado na Figura 26. Na Figura 26b vemos que nenhuma das curvas duas classes passam exatamente sobre os pontos da cauda, em contra partida a curva azul se sai excelente na primeira metade do gráfico.

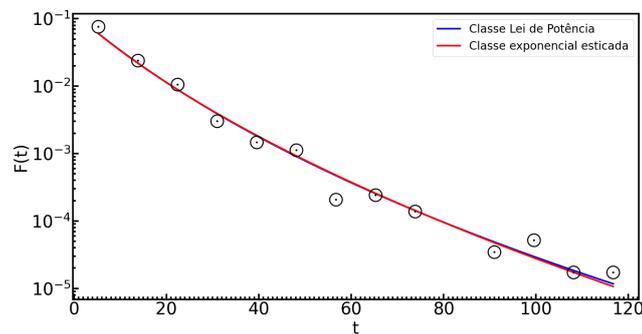
### 3.3.4 Discussão

Os resultados mostrados dizem respeito aos três maiores mercados em volume de negociações. Demonstramos que os tempos característicos para que a cotação atinja uma das barreiras

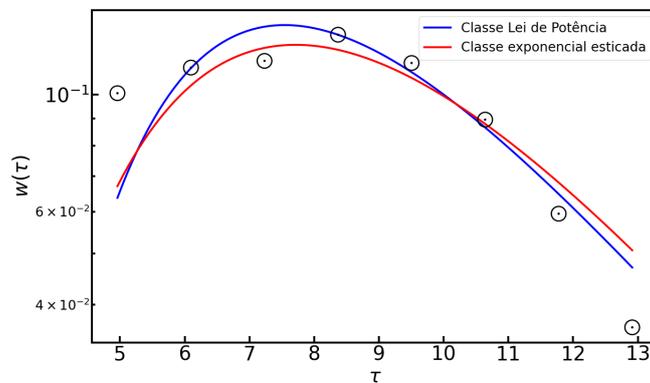
Tabela 3 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par EUR-USD.  $L = 4\sigma_{(EUR-USD)}$ 

$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	6,59	6	0,0933	0,108
2	14,23	13	0,092	0,10
3	21,88	20,01	0,0931	0,0983
4	29,01	27,02	0,0936	0,0976
5	-	34	-	0,09715

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)



(a)



(b)

Figura 23 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 5$  e  $\beta_E = 34$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 2$  e  $\beta_L = 14,23$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe lei de potência; ver Tabela 3. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). Fonte: Elaborada pelo autor.

apresentam uma dinâmica própria que é necessária para a determinação do número de escalas de tempo relevantes e da classificação do fenômeno. Note-se que nos gráficos das distribuições dos tempos de primeira passagem as curvas são bem similares, isso aumenta a importância de possibilitar a distinção entre as possíveis distribuições para  $\tau_N(t)$ .

Para a elaboração dos histogramas foi preciso um algoritmo que realizasse uma varredura

Tabela 4 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par GBP-USD.  $L = 4\sigma_{(GBP-USD)}$ 

$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	2,82	5,55	0,1739	0,1058
2	7,47	8,60	0,153	0,1161
3	12,99	13,26	0,1466	0,1202
4	19,22	-	0,1425	-
5	23,87	-	0,14.01	-

**Fonte:** Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 5 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par USD-JPY.  $L = 4\sigma_{(USD-JPY)}$ 

$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	2,40	2,45	0,1	0,078
2	5,50	5,49	0,083	0,0721
3	8,55	8,32	0,077	0,0714
4	11,66	11,28	0,074	0,0716
5	14,61	-	0,0735	-
6	17,63	-	0,0730	-
7	20,65	-	0,0726	-
8	23,67	-	0,073	-

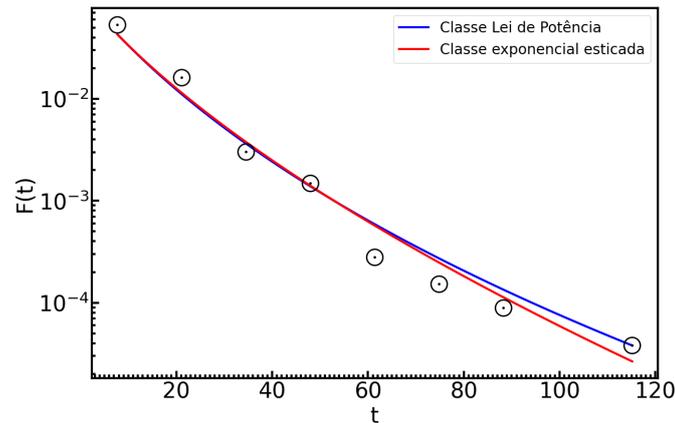
**Fonte:** Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 6 – Erros para cada  $N$  e cada classe do par EUR-USD.  $L = 6\sigma_{(EUR-USD)}$ 

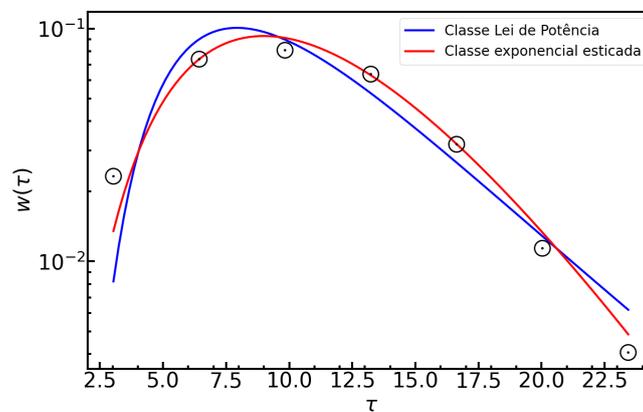
$N$	$\beta_L$	$\beta_E$	$Erro_L$	$Erro_E$
1	4,93	3,57	0,1171	0,1414
2	10,26	8,29	0,1220	0,1327
3	15,01	12,19	0,1239	0,1309
4	16,63	16,98	0,1249	0,13
5	-	21,69	-	0,1295
6	-	26,01	-	0,1291

**Fonte:** Elaborada pelo autor (2024)

em toda trajetória das cotações e verificasse se uma das barreiras era atingida, bem como contabilizar o intervalo de tempo decorrido. Por se tratar de dados reais, os histogramas podem ficar irregulares de maneira que não seja possível realizar um bom ajuste. Aplicamos a regra de Sturges em todos os histogramas para padronizar a análise. A escolha do tamanho  $L = 4\sigma_{(EUR-USD)}$ , que é diferente de  $L = 2\sigma$  para os outros dois pares, foi feita devido à irregularidade que aparecia, uma distribuição repleta de *outliers*. O mesmo motivo justifica a escolha de  $L = 6\sigma_{(EUR-USD)}$  quando optamos por ampliar o tamanho do intervalo. Para o



(a)



(b)

Figura 24 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para GBP-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 1$  e  $\beta_E = 5,55$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 5$  e  $\beta_L = 23,87$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 4. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

par EUR-USD ampliamos o tamanho do intervalo em 50%, enquanto para os pares USD-JPY e GBP-USD ampliamos em 100%. Essa diferença não gera prejuízo na análise pois o objetivo é mostrar a influência do tamanho de  $L$  no valor de  $N$ .

O primeiro valor de  $L$  resultou nos seguintes valores do número de escalas:  $N = 2$  para o EUR-USD,  $N = 5$  para o USD-JPY e  $N = 2$  para o GBP-USD. O segundo e maior valor de  $L$  resultou em:  $N = 1$  para o EUR-USD,  $N = 3$  para o USD-JPY e  $N = 1$  para o GBP-USD. Observa-se que  $N$  decresce com o aumento de  $L$ , uma observação que exige mais discussão.

A série dos tempos de primeira passagem  $T(t)$  é claramente dependente do tamanho do intervalo  $L$ ; espera-se que intervalos maiores necessitem de mais tempo para serem atingidos. Consequentemente, os tempos característicos  $\tau(t)$  também são dependentes do intervalo.

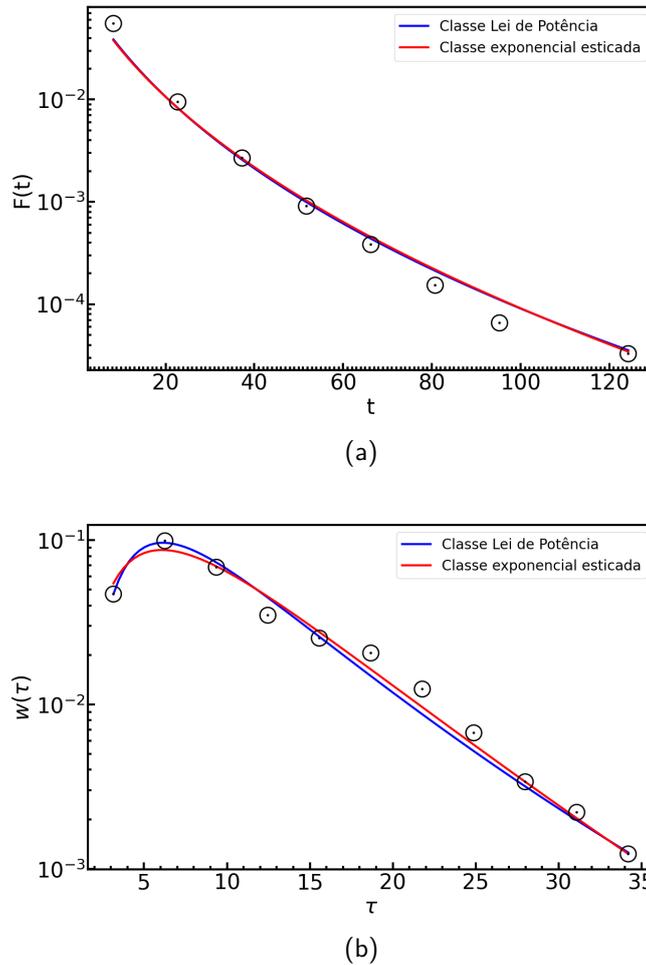
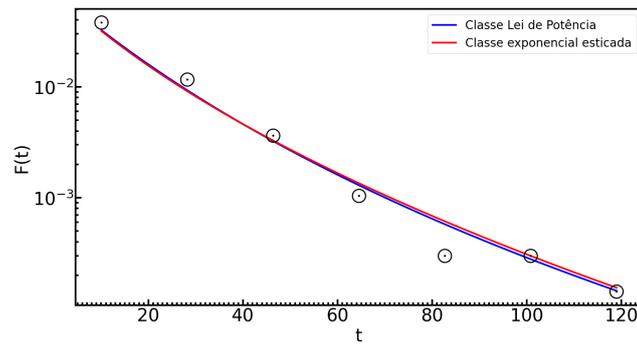


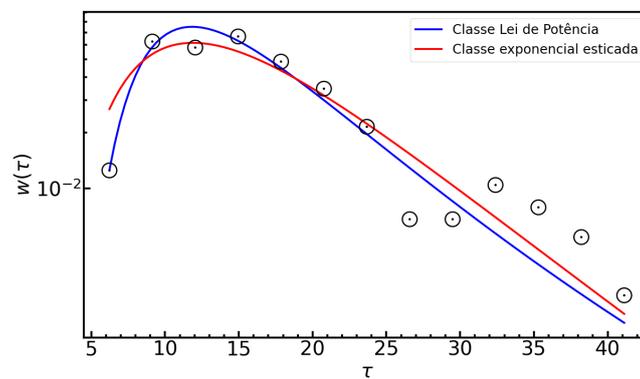
Figura 25 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para USD-JPY e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 3$  e  $\beta_E = 8,32$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 8$  e  $\beta_L = 23,67$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 5. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

Como vimos na Figura 19a, a distribuição  $F(t)$  para  $L$  grande é dada por uma exponencial, dessa forma existe apenas um tempo característico desse processo. O fato de termos observado que  $N$  diminuiu com o aumento de  $L$  está de acordo com o esperado uma vez que no limite de  $L$  grande retornamos ao caso exponencial, saindo de uma situação de múltiplas escalas de tempo relevantes para apenas uma única.

Nas tabelas, vimos que a partir de um certo valor de  $N$  chegamos ao limite de precisão do algoritmo. Embora isso tenha ocorrido, nota-se que os valores dos erros mínimos nas duas classes foram suficientemente diferentes para que uma classe apropriada fosse selecionada. Também observou-se que o erro estava diminuindo com o aumento de  $N$  de forma desacelerada. Por exemplo, veja a Tabela 4. De  $N = 4$  para  $N = 5$  o  $Erro_L$  só reduziu 0,0024, e de



(a)



(b)

Figura 26 – (a) Distribuição dos tempos de primeira passagem (círculos pretos) para EUR-USD e a previsão da teoria H (linhas) para  $N = 6$  e  $\beta_E = 26,01$  na classe exponencial esticada (linha vermelha),  $N = 1$  e  $\beta_L = 4,93$  na classe lei de potência (linha azul). O melhor ajuste conjunto foi alcançado para a classe exponencial esticada; ver Tabela 6. (b) Histograma (círculos pretos) da série da média  $w(\tau)$  e a previsão do modelo (linhas) com os mesmos parâmetros e convenção de cores utilizada em (a). **Fonte:** Elaborada pelo autor.

certa forma, está proporcionalmente longe de  $Erro_E = 0,1058$ .

Uma outra questão pertinente é o fato dos pares USD-JPY e GBP-USD pertencerem a classe exponencial esticada enquanto o par EUR-USD pertence à classe lei de potência. Constatou-se que mudar o valor de  $L$  não modifica a classe à qual o par de moedas pertence. É conhecido que tempos de primeira passagem em sistemas financeiros distintos podem apresentar distribuições diferentes. Em (SAZUKA; INOUE; SCALAS, 2009) podemos ver uma descrição do USD-JPY do Sony Bank usando uma distribuição de Weibull enquanto os futuros do BTP (*Buoni del Tesoro Poliennali*), um título do governo italiano, são descritos por uma função de Mittag-Leffler.

No processo de modelagem dos retornos e da volatilidade presente em (VASCONCELOS et al., 2024), foi encontrado  $N = 5$  para o EUR-USD,  $N = 2$  para o USD-JPY e  $N = 1$  para o GBP-USD. Esses números de escalas de tempo relevantes não coincidem em valor com

o que obtivemos para a modelagem dos tempos característicos. Isso nos indica que embora continuemos a notar indícios das múltiplas escalas em sistemas financeiros, os tempos de primeira passagem possuem uma dinâmica própria.

### 3.4 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Propusemos uma versão hierárquica para os tempos que caracterizam a duração necessária para o preço sair de um intervalo. Uma vez que já foi demonstrado haver evidências de múltiplas escalas de tempo em mercados financeiros, constatamos que esta hierarquia se estendeu para os tempos característicos de escape. Nossa análise nos levou a categorizar este fenômeno em duas classes distintas: exponencial esticada e lei de potência. Verificamos que nem todos os mercados pertencem à mesma classe, o EUR-USD pertence à classe lei de potência e os pares USD-JPY e GBP-USD à classe exponencial esticada. Tal diferença de classes observada nos pares pode auxiliar investidores na escolha de estratégias de investimento e dessa forma alinhar o andamento de suas ordens enviadas com o que é esperado para aquele mercado.

Observamos o impacto que o tamanho do intervalo em que a cotação está confinada influencia no número de escalas de tempo relevantes dos tempos característicos; é uma relação de inversa proporcionalidade. Entretanto o tamanho do intervalo não modifica a classe à qual um determinado par de moedas pertence, dando mais consistência à hipótese de que realmente o par de moedas foi corretamente caracterizado.

## 4 INFORMAÇÃO EM EXPERT ADVISORS

O *trading* algorítmico é um tipo de operação financeira executada por programas que operam no mercado seguindo uma lógica pré-estabelecida. Um programa desse tipo é chamado de *Expert Advisor* (EA), através do qual é possível realizar simulações de negociações para otimizar estratégias. Através do histórico de negociações, pode-se comparar quais estratégias levaram a um maior ganho. Mais do que analisar o desempenho do EA, vamos caracterizá-lo fisicamente.

A medida essencial da teoria da informação é a entropia de Shannon (SHANNON, 1948), que quantifica a incerteza de um conjunto de dados. Ao se considerar a relação entre duas variáveis, outra quantidade importante entra em cena: a informação mútua. Este capítulo desenvolve uma forma de quantificar essa quantidade para sistemas financeiros.

Uma rede neural artificial é treinada e usada para melhorar o desempenho do EA. A rede usa indicadores financeiros para tomar decisões. Assim, é possível comparar o desempenho do EA com a rede e sem ela e com isso verificar se a rede é efetivamente adequada para essa tarefa. Outro resultado fornecido é a quantidade de informação que a rede adiciona ao EA.

### 4.1 INTRODUÇÃO À TERMODINÂMICA DA INFORMAÇÃO

Para que se possa quantificar em termos físicos o desempenho de um EA devemos estabelecer quais grandezas são as mais relevantes e como elas se relacionam. O foco será uma análise que se utiliza de conceitos oriundos da Termodinâmica. O ponto de partida será a segunda lei da Termodinâmica. Ela estabelece que a mudança de entropia em um sistema termicamente isolado é sempre igual ou maior que zero, ou seja,  $dS \geq 0$ . Este princípio tem sido resistente aos avanços teóricos e experimentais da área e se manteve verdadeiro.

Um experimento mental proposto por Maxwell questionou a segunda lei. Imagine um observador microscópico, chamado de demônio de Maxwell, que interfere na dinâmica do sistema. Ele observa o movimento das partículas, obtém informação sobre elas e executa ações conforme necessário. Assume-se que exista uma barreira separando duas partes de uma caixa que contém gás, e que nessa barreira exista uma pequena porta que o demônio pode deixar uma partícula passar de um lado para o outro. Ao observar a velocidade das partículas, ele abre a porta e permite que uma partícula com velocidade mais baixa passe para o outro

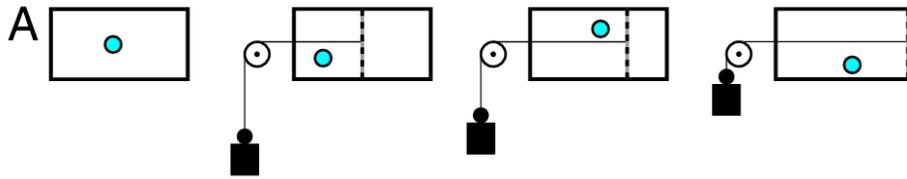


Figura 27 – Ilustração de uma máquina de Szilárd: uma caixa contendo uma única molécula é dividida em duas partes iguais. A parte que contém a molécula pode se expandir até o volume total da caixa levantando o bloco. Em seguida, a partição é introduzida novamente e o processo se repete.  
**Fonte:** (KOSKI et al., 2014)

lado. Esse processo seria repetido inúmeras vezes até que os dois lados da caixa possuam temperaturas diferentes. Dessa forma, teríamos uma diferença de temperatura suficiente para criar uma máquina térmica sem realizar nenhum trabalho no sistema, em uma clara violação da segunda lei.

Um importante resultado para essa questão foi mostrado por Landauer (LANDAUER, 1961). O argumento é que o demônio precisa guardar a informação que ele obtém ao observar as partículas e depois apagá-las para registrar novas informações. Ao apagar informação de uma memória, uma quantidade de energia é dissipada, o que aumenta a entropia e no final não resulta em uma violação da segunda lei.

#### 4.1.1 Máquina de Szilárd

Outro experimento mental com uma aparente violação da segunda lei da termodinâmica é a máquina de Szilárd. Sua forma consiste em uma caixa de volume  $V$  contendo uma única partícula. A caixa está em contato com um banho térmico de temperatura  $T$ . Em um dado momento, uma medida da posição da partícula é feita, e ela pode se encontrar no lado direito ou esquerdo da caixa. Uma barreira móvel é inserida instantaneamente após a medida com gasto de energia desprezível. Como é conhecida a posição da partícula, também é conhecido para que lado a barreira vai se deslocar. Dentro da máquina, a partícula perde energia para a barreira após cada colisão, mas como está num banho térmico, ela a recupera. A força exercida pela partícula para mover a barreira pode ser usada para realizar trabalho, podendo-se acoplar um peso, por exemplo, e elevá-lo à medida que a barreira se move.

A Figura 27 ilustra a situação. O trabalho feito pelo gás de uma partícula uma vez que a barreira foi posta no meio é dado por:

$$W = \int_{V/2}^V dV \frac{K_B T}{V} = K_B T \ln 2 \quad (4.1)$$

As paredes são térmicas de modo que a partícula se mantém com temperatura constante e o calor flua para dentro do sistema durante a expansão. Essa observação permite deixar claro que na verdade o trabalho de mover o pistão está vindo do banho térmico. Por conservação de energia, o calor absorvido pelo sistema é igual ao trabalho realizado pelo sistema.  $Q = W = K_B T \ln 2$ . O processo é bem lento de forma que em todo contato com a barreira o sistema está em equilíbrio. A variação de entropia ao final de um ciclo seria então  $\Delta S = -K_B \ln 2$ . Essa máquina serve de motivação para a descrição física de um EA.

#### 4.1.2 Teorema de flutuação

A termodinâmica estocástica emergiu como um campo fundamental para estudar sistemas microscópicos e mesoscópicos, onde flutuações térmicas desempenham um papel significativo. Diferentemente da termodinâmica clássica, que lida com médias macroscópicas, a termodinâmica estocástica descreve os processos termodinâmicos no nível de trajetórias individuais, levando em conta a natureza probabilística dos sistemas microscópicos.

Apresentamos brevemente a notação para a termodinâmica estocástica. Seja  $x$  um ponto no espaço de fase de um certo sistema e  $\lambda$  um conjunto de parâmetros externos. Um protocolo de controle  $\lambda(t)$  guia o sistema durante um certo tempo, portanto criando uma trajetória  $x(t)$ . É possível pensar que esse protocolo atua modificando o valor do volume de um gás, por exemplo. Ao longo do tempo, o sistema entra em contato com  $n$  banhos térmicos com temperaturas diferentes. É possível discretizar o intervalo de tempo de atuação do protocolo de controle  $[0, \tau]$  dividindo em  $N$  intervalos pequenos com tamanho  $\Delta t = \tau/N$ . Um tempo  $t_n$  dentro do intervalo é dado por  $t_n = n\Delta t$ . A trajetória para os tempos discretos é dada por  $X_n = (x_0, \dots, x_n)$ . Assumindo que o protocolo  $\lambda(t)$  seja constante entre dois tempos consecutivos, ele pode ser discretizado como  $\Lambda_n = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ .

A distribuição de probabilidade de  $x$  em um tempo  $t_n$  é dada por  $P_n[x_n]$ , sendo que a distribuição inicial é  $P_0[x_0]$ . O  $x_{n+1}$  é determinado a partir de um protocolo  $\lambda_n$  atuando em  $X_n$ , com uma probabilidade de transição dada por  $P[x_{n+1}|X_n, \lambda_n]$ . A probabilidade da trajetória  $X_n$ , condicionada à trajetória do protocolo  $\Lambda_n$ , é dada por:

$$P[X_n|\Lambda_n] = \prod_{k=0}^{n-1} P[x_{k+1}|X_k, \lambda_k] P_0[x_0]. \quad (4.2)$$

Nessa equação inicia-se do estado inicial  $x_0$  e é feita uma série de transições para outros estados seguindo o protocolo em cada etapa. A distribuição condicionada ao estado inicial ser  $x_0$  é

$$P[X_n|x_0, \Lambda_n] = \prod_{k=0}^{n-1} P[x_{k+1}|X_k, \lambda_k]. \quad (4.3)$$

Formularemos agora a dinâmica para o protocolo reverso. O protocolo  $\lambda^*$  é a reversão temporal de  $\lambda$ . Sua forma dependente do tempo é dada por  $\lambda^\dagger(t) = \lambda^*(\tau - t)$  onde  $\tau$  é o tempo final de atuação do protocolo  $\lambda(t)$ . Para tempos discretos, temos  $\Lambda_n^\dagger = (\lambda_{N-1}^*, \dots, \lambda_{N-n}^*)$ . Consideramos que a trajetória gerada pelo protocolo reverso é igual a reversão temporal da trajetória  $X_N$ , isto é,  $X_n^\dagger = (x_0^\dagger, \dots, x_n^\dagger)$ , com a notação  $x_n^\dagger = x_{N-n}^*$ . A distribuição inicial do processo reverso é  $P_0^\dagger[x_0^\dagger]$ . A probabilidade de se obter a trajetória reversa  $X_N^\dagger$  condicionada ao protocolo reverso  $\Lambda_N^\dagger$  é dada por

$$P[X_N^\dagger|\Lambda_N^\dagger] = \prod_{k=0}^{N-1} P[x_{k+1}^\dagger|X_k^\dagger, \lambda_k^\dagger] P_0^\dagger[x_0^\dagger]. \quad (4.4)$$

A distribuição condicionada ao estado inicial ser  $x_0^\dagger$  é

$$P[X_N^\dagger|x_0^\dagger, \Lambda_N^\dagger] = \prod_{k=0}^{N-1} P[x_{k+1}^\dagger|X_k^\dagger, \lambda_k^\dagger]. \quad (4.5)$$

A seguir apresentamos um resultado bem estabelecido para termodinâmica estocástica no que diz respeito a troca de energia (SAGAWA; UEDA, 2012). Seja  $Q_i[X_N, \lambda_N]$  o calor absorvido pelo sistema pelo  $i$ -ésimo banho térmico que satisfaz  $Q_i[X_N, \Lambda_N] = -Q_i[X_N^\dagger, \Lambda_N^\dagger]$ , temos que

$$\frac{P[X_N|x_0, \Lambda_N]}{P^\dagger[X_N^\dagger|x_0^\dagger, \Lambda_N^\dagger]} = \exp\left(-\sum_i \beta_i Q_i[X_N, \Lambda_N]\right) \quad (4.6)$$

que é chamado de teorema de flutuação detalhado. Nota-se que existe uma dependência condicional dos pontos iniciais das trajetórias. Pelas relações 4.3 e 4.5 substituindo em 4.6 temos

$$\frac{P[X_N|x_0, \Lambda_N]}{P^\dagger[X_N^\dagger|x_0^\dagger, \Lambda_N^\dagger]} = \frac{P[X_N|\Lambda_N]P_0[x_0]}{P^\dagger[X_N^\dagger|\Lambda_N^\dagger]P_0^\dagger[x_0^\dagger]} = \frac{P[X_N|\Lambda_N]}{P^\dagger[X_N^\dagger|\Lambda_N^\dagger]} \exp\left(\ln \frac{P_0[x_0]}{P_0^\dagger[x_0^\dagger]}\right). \quad (4.7)$$

Portanto é possível reescrever o teorema da flutuação detalhado como

$$\frac{P[X_N|\Lambda_N]}{P^\dagger[X_N^\dagger|\Lambda_N^\dagger]} = e^{\sigma[X_N]}, \quad (4.8)$$

onde

$$\sigma[X_N] = -\ln P_0^\dagger[x_0^\dagger] + \ln P_0[x_0] - \sum_i \beta_i Q_i[X_N, \Lambda_N], \quad (4.9)$$

é a produção de entropia ao longo da trajetória  $X_N$ . A equação 4.8 diz respeito a um protocolo de controle arbitrário, geral. Em diversos sistemas físicos é desejado que se tenha um certo controle sobre a forma com que o sistema vai ser modificado de modo a obter uma melhor performance em um determinado critério.

O conceito de controle de *feedback* estabelece que a decisão tomada por um protocolo depende dos resultados observados. Assim, o agente passa a interferir no sistema baseando-se na informação disponível, em vez de fazê-lo de forma desorientada. A forma de quantificar essa ideia é apresentada a seguir.

Seja  $x$  uma variável aleatória com distribuição  $P[x]$ . Realizamos uma medida nela e obtemos o resultado  $y$ , que também é uma variável aleatória. Pode-se caracterizar o erro dessa medida pela distribuição condicional  $P[y|x]$ . A probabilidade conjunta é  $P[x,y] = P[y|x]P[x]$ . O conteúdo de informação de cada uma dessas variáveis é dado pela entropia de Shannon, já o conteúdo de informação mútua entre essas duas variáveis é dado por

$$\langle I \rangle = \sum_{xy} P[x,y] I[x:y], \quad (4.10)$$

onde

$$I[x:y] = \ln \frac{P[y|x]}{P[y]}. \quad (4.11)$$

Quando há controle de *feedback*, o protocolo de controle depende do resultado medido, isto é,  $\lambda_n(Y_n)$  onde  $Y_n = (y_0, \dots, y_n)$ . A equação 4.11 diz respeito a duas variáveis, sua versão com duas trajetórias e com controle de *feedback* é (SAGAWA; UEDA, 2012)

$$I_c[Y_n : X_n] = \ln \frac{P_c[Y_n|X_n]}{P[Y_n]} \quad (4.12)$$

onde o subíndice  $c$  significa que está sendo realizado um controle de *feedback*. O teorema de flutuação detalhado nessas condições é modificado para incluir a contribuição da informação mútua, sendo dado por (SAGAWA; UEDA, 2012)

$$\frac{P[X_N|Y_N]}{P^\dagger[X_N^\dagger|Y_N]} = \exp(\sigma[X_N, \Lambda_N(Y_N)] + I_c[X_N : Y_n]), \quad (4.13)$$

onde o controle de *feedback* não foi aplicado na trajetória reversa. Observa-se que o conteúdo de informação mútua aumenta a produção de entropia efetiva do processo.

## 4.2 REDES NEURAIIS E *TRADING*

Em sistemas financeiros, é de se esperar que a quantidade de informação seja uma grandeza importante na obtenção de lucros. Tais informações chegam para os agentes do mercado através de diferentes formas e métricas. Além de ser necessário obter várias fontes de informação sobre o comportamento do mercado é de fundamental importância dar os devidos pesos para cada informação; o agente precisa ter critérios para selecionar o que lhe serve.

Iniciamos aqui uma abordagem que quantifica em termos físicos informações presentes no mercado. Tal procedimento foi descrito, por exemplo, em (TOUZO; MARSILI; ZAGIER, 2021). O estudo mostra uma análise física acerca de um mercado simplificado de ativo único, o modelo de Glosten-Milgrom (GLOSTEN; MILGROM, 1985). Esse estudo foi capaz de mostrar qual a melhor estratégia para *traders* informados, qual o limite de ganho médio e identifica uma “temperatura do mercado”.

Em mercados reais, entretanto, a complexidade é maior. Enquanto em um modelo teórico tal como descrito em (TOUZO; MARSILI; ZAGIER, 2021) os *traders* são classificados apenas como informados ou não informados, numa situação real existem níveis de informação em um espectro contínuo. O fato do mercado ser um sistema aberto onde é permitido o fluxo de informação ou até mesmo de valores já dificulta uma tentativa de universalizar conceitos e estratégias de investimento. Além do mais, é de se esperar que se uma estratégia for lucrativa e de conhecimento público, a tendência é de que ela torne-se cada vez menos lucrativa ao longo do tempo até se tornar obsoleta.

A pergunta fundamental que um agente do mercado se faz é se a tendência do preço de um determinado ativo financeiro será de alta ou baixa. Devido à natureza aleatória de mercados financeiros, não há uma expectativa de acertar com precisão absoluta se o preço subirá ou descerá. Ao invés disso, espera-se que após várias tentativas a estratégia seja lucrativa no fim das contas. *Traders* guiam suas ações com base em indicadores de mercado tais como: Índice de força relativa (RSI - Relative Strength Index) e Bandas de Bollinger. Esses índices serão explicados com detalhes adiante. Os EA's calculam os valores desses índices e tomam a decisão de comprar ou vender baseado em sua lógica interna que foi desenvolvida por um agente. Isso automatiza o processo, tirando a necessidade de se passar horas em frente ao computador esperando por tais oportunidades. Percebe-se que o EA apenas está reproduzindo os mesmos critérios que uma pessoa usaria. Um exemplo de uso de EA seria a seguinte lógica: se o valor do RSI for menor que 30, compre; se for maior que 70, venda.

Embora exista muita informação disponível *online* sobre quais valores dos indicadores que tipicamente são usados para tomar a decisão de compra ou venda, eles ainda parecem ser arbitrários. Outra questão importante é qual a relação entre os indicadores. Para lidar com esses problemas, vamos criar uma rede neural que decida se a melhor forma de entrar no mercado é através de uma compra ou uma venda com base nos indicadores. A relação entre os indicadores vai estar implícita, contida nas camadas internas da rede. Ela precisa ser treinada com um histórico de valores de preços e dos indicadores numa forma que será detalhada adiante.

Existe uma similaridade entre esse procedimento e uma máquina de Szilárd. Na máquina, o demônio observa se a partícula está do lado esquerdo ou direito da caixa para decidir quando colocar o pistão e poder extrair trabalho. De forma análoga, a rede neural identifica se a tendência é de alta ou baixa e a partir disso decide se entra comprado ou vendido. Como a tendência pode não se confirmar, existe uma probabilidade da rede medir o resultado errado, isso faz com que o conceito de informação mútua apresentado seja aplicável. Enquanto na máquina de Szilárd o trabalho de mover o pistão está vindo, através da partícula, do banho térmico, no EA o lucro está vindo, através da rede neural, da informação dos indicadores. A rede neural faz com que o EA aja como uma espécie de protocolo com *feedback*.

Uma forma prática de se calcular a quantidade de informação mútua devido a um protocolo com *feedback* é através das equações 4.8 e 4.13. Se  $I_c[X_n : Y_n] = 0$  a última fica igual a primeira. É possível executar o experimento das duas formas e ver efetivamente qual a contribuição que veio da parte com *feedback*.

Desenvolvemos uma forma de observar fisicamente qual a influência da rede neural no *trading*. O ponto de partida é novamente um problema de primeira passagem. O interesse não está no tempo que demora para atingir uma das barreiras tal como foi estudado no capítulo anterior. O interesse é em quanto tempo demora para que se tenha um certo valor de lucro. Essa ideia é uma adaptação direta do problema apresentado em (SINGH et al., 2019). Neste artigo, foi analisado o tempo de primeira passagem para o número líquido de elétrons transferidos entre duas ilhas metálicas no regime de bloqueio de Coulomb.  $P_N(t)$  é a probabilidade de um processo estocástico atingir pela primeira vez o valor  $N$  no tempo  $t$ .  $N$  é o número líquido de elétrons que foram para o lado esquerdo do aparato. O número líquido de elétrons no lado direito é denotado por  $-N$ .

Analogamente para o EA, realizamos todas as entradas no mercado com o mesmo valor de SL e TP, isso faz com que uma operação de prejuízo anule uma operação com lucro.

Com isso, o que antes era um procedimento de contagem do saldo do número de elétrons se torna uma contagem do lucro. Apenas para explicitar o que realmente  $N$  está contabilizando, consideramos alguns exemplos de resultados que o EA pode obter:

- Resultado 1 do EA: (ganho, ganho, ganho)  $\rightarrow N = 3$
- Resultado 2 do EA: (ganho, perda, ganho)  $\rightarrow N = 1$
- Resultado 3 do EA: (perda, perda, perda)  $\rightarrow N = -3$

Nos exemplos acima, houve 3 resultados que podem ter ocorrido em tempos distintos já que o tempo até atingir uma barreira é uma variável aleatória. A razão  $P_N(t)/P_{-N}(t)$  é uma relação de flutuação (SINGH et al., 2019; DERRIDA, 2007). Ela é a principal relação para que se possa comparar empiricamente o processo com *feedback* e sem (com a rede neural e sem). Realizamos um ajuste exponencial nos valores empíricos obtidos para essa relação.

#### 4.2.1 Rede Feed-Forward

Apresentamos o básico do funcionamento de uma rede neural. A unidade básica de uma rede é um “neurônio”  $i$  representado por um vetor de entradas  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  e produz uma saída escalar  $a_i(\mathbf{x})$ . Esses neurônios são empilhados em camadas em que a saída de uma camada é a entrada de outra, tal como ilustrado na Figura 28. Os valores  $a_i$  são obtidos através de uma operação que dá um peso relativo a cada uma das entradas do neurônio mais um fator de viés, isso combinado com uma operação não-linear  $\sigma_i(z)$ . O vetor de pesos para cada neurônio é  $\mathbf{w}^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_d^{(i)})$  e o viés é  $b^{(i)}$ . Assim,  $a_i(\mathbf{x}) = \sigma_i(z^{(i)})$ , onde  $z^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)} \cdot \mathbf{x} + b^{(i)}$ . A não-linearidade é inserida nessa abordagem através de funções que possuem tais características. Dois exemplos bastante usados são as funções ReLU (do inglês *rectified linear unit*) e sigmoide.

O número de parâmetros de entrada, a quantidade de neurônios e o número de camadas escondidas não possuem uma receita pronta. Cada escolha nesses valores vai gerar uma rede que aprende de forma diferente. De forma geral, existem dois problemas principais que devem ser evitados: *underfitting* e *overfitting*. O primeiro ocorre quando a rede é simples demais para capturar os padrões nos dados. O segundo ocorre quando a rede aprende em excesso, ela captura até pequenos desvios mas não aprende a tendência geral. Nos dois casos a rede é frágil em fazer boas previsões com dados novos.

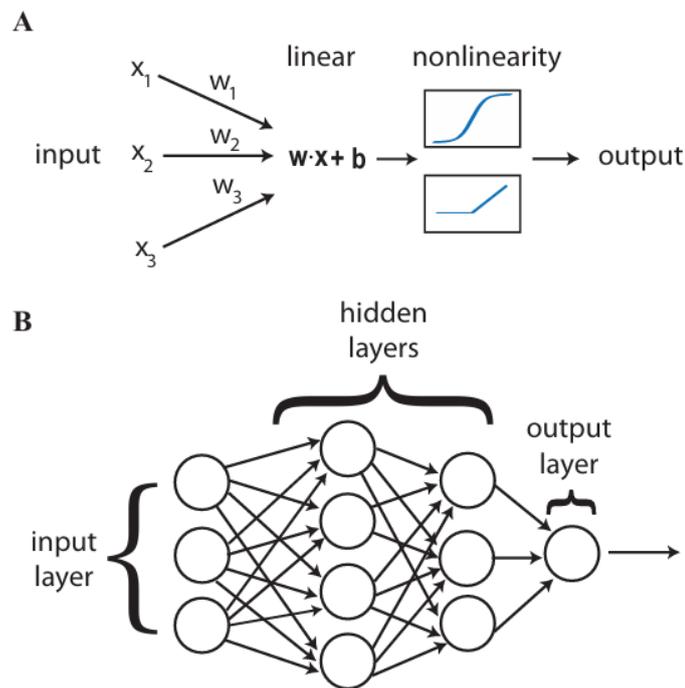


Figura 28 – Arquitetura básica de redes neurais. (A) Os componentes básicos de uma rede neural são neurônios passam por uma transformação linear que pondera os pesos das várias entradas, seguida por uma função de ativação não linear. (B) Os neurônios são organizados em camadas com a saída de uma camada servindo como entrada para a próxima camada. **Fonte:** (MEHTA et al., 2019)

De forma simplificada, uma rede neural aprende segundo o seguinte procedimento: construir uma função de custo, minimizar essa função custo. Em algoritmos mais simples, como regressão linear, essa minimização é feita, por exemplo, por gradiente descendente. Em redes neurais, entretanto, devido ao grande número de camadas escondidas é usado o algoritmo *backpropagation* para calcular esses gradientes.

Um ponto no conjunto de dados é dado por  $(x_i, y_i)$ , onde  $y_i$  é o valor nos dados da característica na qual se deseja fazer previsões. O valor da previsão em si é chamado de  $\hat{y}_i(\mathbf{w})$ , com dependência dos parâmetros da rede. Para redes que busque categorizar dados, a função custo mais usada é chamada de *cross-entropy*. Para categorização binária, ela tem a forma (MEHTA et al., 2019):

$$E(\mathbf{w}) = - \sum_{i=1}^n y_i \log \hat{y}_i(\mathbf{w}) + (1 - y_i) \log[1 - \hat{y}_i(\mathbf{w})] \quad (4.14)$$

Com essa função custo pode-se treinar o modelo. O algoritmo de *backpropagation* calcula os gradientes da rede, resta agora buscar os melhores valores dos parâmetros. Existem diversas formas de realizar essa otimização, um algoritmo bastante popular para isso é o Adam (KINGMA, 2014).

## 4.2.2 Construção e utilização da Rede

### 4.2.2.1 Treinamento

A rede neural foi construída usando o pacote *TensorFlow*, que é uma biblioteca de aprendizado de máquina e aprendizado profundo desenvolvida pelo *Google*. Ele permite, de forma simples, criar uma rede em que os parâmetros importantes para o treinamento são de escolha do usuário. Para a realização dos *trades*, foi utilizado o pacote *backtrader*. Ele utiliza um histórico preços e simula negociações seguindo uma lógica pré-determinada. O procedimento para treinamento da rede é descrito a seguir.

O interesse continua sendo em mercados Forex. Portanto, inicialmente obtém-se os dados do centro histórico da plataforma MetaTrader para o par GBP-USD. As cotações são dadas em intervalos de cinco minutos. Realizamos o procedimento de *backtest* do período de julho de 2023 até dezembro de 2023. A estratégia utilizada nesse período são entradas aleatórias no mercado com 50% de chance de entrar comprado ou vendido. Em todas as entradas, o tamanho de SL e TP são mantidos fixos de forma que o lucro e o prejuízo sejam iguais (em módulo) em todas as operações. No momento em que se entra no mercado, seja comprando ou vendendo, é registrado o preço e uma série de valores dos indicadores financeiros, são eles:

- Índice de Força Relativa (RSI, do inglês *Relative Strength Index*): Mede a força e a velocidade dos movimentos de preço em relação às altas e baixas recentes.

$$RSI = 100 - \frac{100}{1 + RS}$$

Onde:

$$RS = \frac{\text{Média de ganhos positivos (n períodos)}}{\text{Média de perdas negativas (n períodos)}}$$

- Média Móvel Rápida (FMA, do inglês *Fast Moving Average*): Calcula a média dos preços de fechamento em um curto período, identificando tendências de curto prazo.

$$FMA_n = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$$

Onde:

- $P_i$ : Preço de fechamento no dia  $i$ ;
- $n$ : Período de cálculo.

- Média Móvel Lenta (SMA, do inglês *Slow Moving Average*): Calcula a média dos preços de fechamento em um longo período, identificando tendências de longo prazo.

$$SMA_n = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$$

- Bandas de Bollinger (Upper\_BB e Lower\_BB, do inglês *Bollinger Bands*): Representam desvios padrão acima e abaixo de uma média móvel, medindo a volatilidade do mercado.

$$\text{Upper\_BB} = SMA_n + k \cdot \sigma$$

$$\text{Lower\_BB} = SMA_n - k \cdot \sigma$$

Onde:

- $k$ : Número de desvios padrão (geralmente 2);
  - $\sigma$ : Desvio padrão dos preços no período  $n$ .
- Média Móvel Ponderada (WMA, do inglês *Weighted Moving Average*): Pondera com maior peso os preços mais recentes, capturando mudanças rápidas no mercado.

$$WMA_n = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Onde:

- $w_i$ : Peso atribuído ao preço do dia  $i$  (geralmente proporcional a  $i$ , com pesos maiores para valores mais recentes);
  - $P_i$ : Preço no dia  $i$ .
- Média Móvel Exponencial (EMA, do inglês *Exponential Moving Average*): Atribui maior peso aos preços recentes, suavizando os dados históricos e identificando tendências mais rapidamente que a SMA.

$$EMA_t = \alpha \cdot P_t + (1 - \alpha) \cdot EMA_{t-1}$$

Onde:

- $\alpha = \frac{2}{n+1}$ : Fator de suavização;
- $P_t$ : Preço no período atual;
- $EMA_{t-1}$ : EMA do período anterior;

- $n$ : Número de períodos.
- Convergência e Divergência de Médias Móveis (MACD, do inglês *Moving Average Convergence Divergence*): Mede a diferença entre duas médias móveis exponenciais (rápida e lenta) para identificar mudanças de tendências.

$$\text{MACD} = \text{EMA}_{\text{rápida}} - \text{EMA}_{\text{lenta}}$$

Linha de sinal:

$$\text{Sinal} = \text{EMA de 9 períodos do MACD}$$

Histograma:

$$\text{Histograma} = \text{MACD} - \text{Sinal}$$

Onde:

- $\text{EMA}_{\text{rápida}}$ : Geralmente uma EMA de 12 períodos;
- $\text{EMA}_{\text{lenta}}$ : Geralmente uma EMA de 26 períodos.

Nem todas as operações obtêm lucro. De fato, só interessam as operações lucrativas, uma vez que são elas que corretamente acertaram a tendência, mesmo que ao acaso. São nelas que os valores dos indicadores realmente têm algo significativo para a rede aprender. O objetivo é que a rede decida, com base nos indicadores, se é melhor entrar comprado ou vendido. Podemos dizer que as entradas do neurônio são  $x = (\text{preço de entrada, RSI, FMA, SMA, Upper\_BB, Lower\_BB, WMA, EMA, MACD})$ , e  $y$  só pode possuir dois valores (comprado, vendido).

Para um bom desempenho na fase de treinamento indica-se dividir o conjunto de dados nas fases de treinamento, validação e teste. Foi escolhido 50% para treinamento, 25% para validação e 25% para teste. A rede possui duas camadas escondidas, cada uma com 18 neurônios e função de ativação ReLU. A camada de saída só tem um neurônio, e por estar em um problema de classificação binária a função de ativação é sigmoide. Outro fator que contribui para o aprendizado da rede é normalizar os *inputs* pela sua média e seu desvio padrão, tal procedimento também foi realizado. Um ciclo completo de atualização de todos os dados de treinamento de uma rede são chamados de épocas, após uma época os pesos são atualizados. Foi escolhido um total de 20 épocas.

O procedimento descrito anteriormente cria um modelo que pode ser usado para fazer previsões, é possível armazenar os valores dos pesos que a rede aprendeu em um arquivo no

formato h5, uma abreviação para HDF5 (Formato de Dados Hierárquicos, versão 5, do inglês *Hierarchical Data Format*). O modelo faz a previsão de que comprar é a melhor opção se, dados os devidos *inputs*, ele der uma probabilidade maior que 50%; do contrário a venda seria mais indicada. Vamos nos ater apenas a operações de compra.

#### 4.2.2.2 Usando a rede treinada

O período em análise nesta outra fase é de Janeiro de 2024 até Outubro de 2024. O primeiro protocolo a seguir é realizar apenas operações de compra durante todo esse período, elas ocorrem de maneira sequencial, assim que uma acaba a outra é iniciada com SL e TP de forma a manter o lucro ou prejuízo por operação sempre o mesmo. Isso corresponde a não usar um controle de *feedback*. Realizar esse *backtest* fornece um arquivo com todas as compras, resultados (lucro ou prejuízo) e o tempo que demorou cada operação.

O segundo protocolo é realizar o *backtest* no mesmo período com a diferença que as operações de compras não são feitas sem critério, é preciso que a rede faça a avaliação e decida se é melhor comprar. Isso corresponde a usar um controle de *feedback* uma vez que as ações são tomadas apenas quando a rede observar uma situação favorável. Os dados dos *trades* executados também contêm o tempo que demorou cada operação, com isso é possível fazer histogramas para as distribuições  $P_N(t)$ .

#### 4.2.3 Resultados e Discussão

O primeiro resultado importante de se observar é se de fato a rede está aprendendo. Isso pode ser verificado pela diminuição do valor da função *Loss* tanto na fase de treino quanto da fase de validação. O contrário significa que pode estar havendo um *underfitting* ou *overfitting*. A Figura 29 mostra que a rede construída de fato aprendeu algo.

A figura 30 exibe o teorema de flutuação  $P_N(t)/P_{-N}(t)$ . Através dos resultados dos *backtests* foram criados histogramas para um saldo de  $N$  lucros e de  $-N$ , neste caso  $N = 2$ . Para calcular essa razão, os histogramas devem ter a mesma largura no tempo. Isso é necessário para evitar que se execute a divisão em tempos diferentes. Outra exigência matemática é não fazer a divisão nos valores em que  $P_{-N}(t)$  é nulo. As figuras claramente têm uma dependência temporal. As linhas vermelhas correspondem a ajustes exponenciais da forma  $P_N(t)/P_{-N}(t) = Ae^{\alpha t}$ . A Figura 30a diz respeito ao *backtest* sem rede neural, sempre comprando sem nenhum crité-

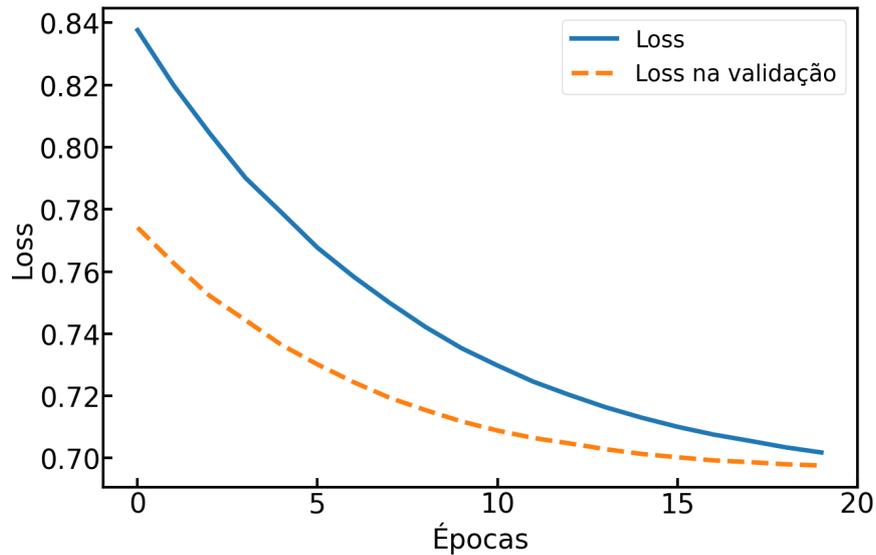


Figura 29 – Valor da função *Loss* em cada época. Em azul o valor para a fase de treinamento. Em laranja para a fase de validação. **Fonte:** Elaborada pelo autor.

rio. Nela temos que  $\alpha = 0,0109$ . A Figura 30b é relativa ao uso da rede neural, as operações são apenas de compra mas com critério definido pela rede. Calculou-se que  $\alpha = 0,0198$ .

A Figura 31 mostra o histograma da relação de flutuação para  $N = 3$  e os ajustes exponenciais. Na Figura 31a temos o caso sem a rede neural e foi calculado um expoente  $\alpha = 0,0227$ . Na Figura 31b temos o resultado para o *backtest* com uso da rede neural, o expoente é  $\alpha = 0,0252$ . Nota-se um bom ajuste que passa próximo a todos os pontos.

Aumentar o valor de  $N$  implica em expandir o alcance do saldo, isso faz com que seja necessário incluir na contagem um número maior de operações o que aumenta o tempo para atingir uma das metas. O efeito disso é a diminuição do número de pontos no histograma. O gráfico para  $N = 4$ , por exemplo, não é apresentado devido ao baixo número de pontos que inviabiliza realizar o ajuste.

Para os dois valores de  $N$  verificou-se que o valor de  $\alpha$  é maior para o *backtest* com a rede. Isso, de certa forma, está de acordo com o previsto pela equação 4.13. O expoente deve ser maior no caso com controle de *feedback* por que a informação mútua é uma quantidade maior ou igual a zero. Para  $N = 2$  o aumento do valor de  $\alpha$  foi quase o dobro, enquanto que para  $N = 3$  o aumento foi bem mais modesto. Esse fato merece atenção pois ele implica que a rede neural tem uma contribuição maior na informação quanto menor a produção de entropia sem controle de *feedback*.

Do ponto de vista de estratégia de investimento, é fundamental que se entenda primeira-

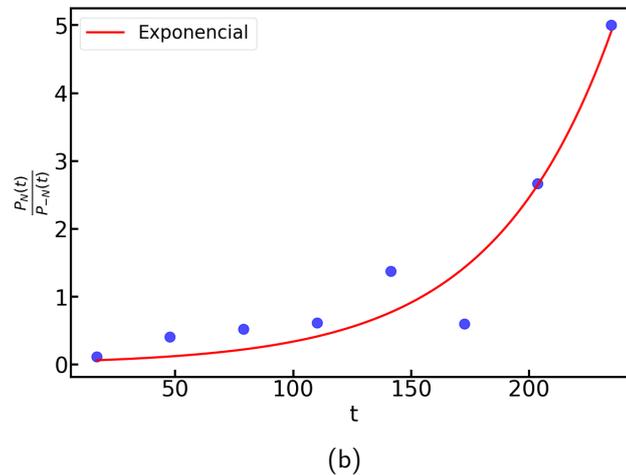
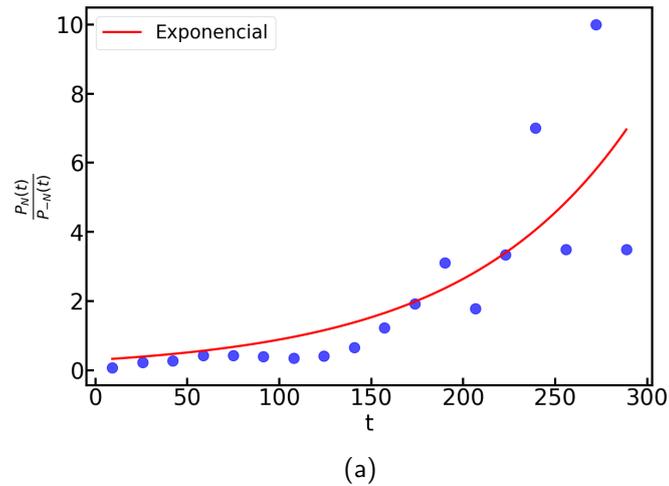
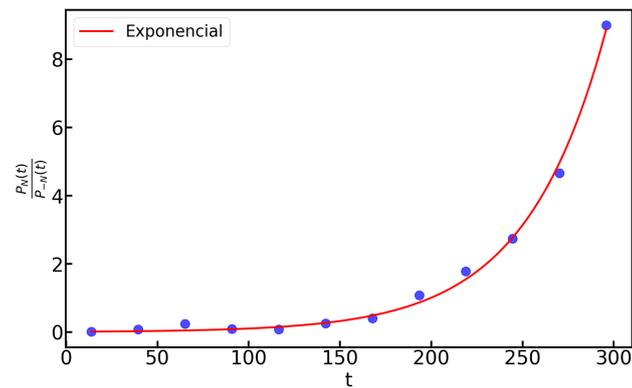
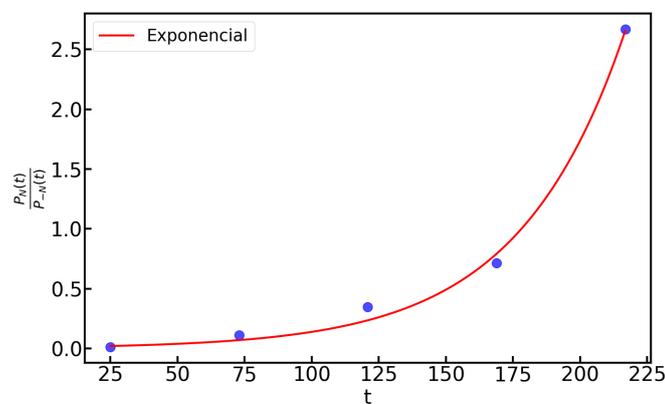


Figura 30 – Relação de flutuação para tempos de primeira passagem. Razão  $P_N(t)/P_{-N}(t)$  para  $N = 2$  e vários valores de  $t$ . Os pontos azuis representam a distribuição empírica e a linha vermelha o ajuste exponencial. (a) EA atuando sem rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0109$ . (b) EA atuando com rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0198$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor.

mente que os resultados aqui apresentados têm objetivo acadêmico e não devem ser usados como recomendação de investimentos. Uma contribuição que é evidenciada através dessa análise é a melhora da eficiência dos *trades*. Em situações reais, as corretoras cobram taxas em cada operação realizada, portanto deve-se atentar ao número total de operações realizadas para evitar gastos elevados. Em todos os testes feitos, o valor de lucro ou prejuízo de cada operação foi fixado em US\$ 1,5. O EA sem rede neural teve lucro médio de US\$ 0,015 por trade, enquanto o EA com rede obteve US\$ 0,055 por trade.



(a)



(b)

Figura 31 – Relação de flutuação para tempos de primeira passagem. Razão  $P_N(t)/P_{-N}(t)$  para  $N = 3$  e vários valores de  $t$ . Os pontos azuis representam a distribuição empírica e a linha vermelha o ajuste exponencial. (a) EA atuando sem rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0227$ . (b) EA atuando com rede neural e coeficiente  $\alpha = 0,0252$ . **Fonte:** Elaborada pelo autor.

### 4.3 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Foi elaborada uma forma de quantificar informação em EA's através de uma série de *trades*. O EA pode atuar como um agente sem informação, executando compras sem critério, ou com informação, escolhendo o melhor momento para entrar comprado no mercado. Uma rede neural artificial foi criada para a tomada de decisão de compra, ela foi treinada usando indicadores financeiros comumente usados durante um período de seis meses. Uma conexão com conceitos de termodinâmica estocástica foi estabelecida, em especial com o teorema de flutuação para um protocolo com controle de *feedback*. Sabe-se que a existência de *feedback* resulta em um aumento da produção de entropia efetiva devido à informação mútua. De forma similar, vimos que a grandeza  $\alpha$ , que de certa forma representa a produção de entropia efetiva, é maior quando há a rede neural.

Redes neurais artificiais podem ser aliadas no desenvolvimento de estratégias de investimento. A rede que apresentamos possui alguns pontos que podem ser otimizados. Pode-se escolher um número maior de indicadores financeiros, bem como alterar o valor de parâmetros desses indicadores como por exemplo o período que eles são calculados. Os valores de SL e TP também podem ser aprimorados. É de se esperar que para cada mercado seja necessário construir uma rede própria uma vez que mercados diferentes possuem propriedades distintas, tais como as mostradas nos capítulos anteriores. Um outro aspecto que pode ser melhorado é a frequência com que a rede é treinada e seus parâmetros são atualizados. Nesse trabalho, a rede neural foi treinada em um período de seis meses e não foi mais atualizada durante os dez meses que o EA operou. Pode-se atualizar a rede semanalmente ou mensalmente, por exemplo. Existem redes criadas com aprendizado por reforço, elas tomam decisões com base no ambiente que estão e são atualizadas a cada decisão como presente em (THÉATE; ERNST, 2021), esse também é um possível caminho futuro.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

### 5.1 CONCLUSÕES

Nesta tese, investigamos conexões entre física e mercados financeiros. Começamos por uma evolução histórica do entendimento sobre turbulência até evidenciarmos que cotações nos mercados de câmbio podem ser descritas dessa forma. Apresentamos a modelagem matemática dos retornos, dos tempos de primeira passagem e elaboramos uma técnica de *trading* algorítmico que permite quantificar informação.

Por meio do formalismo da teoria H, quantificamos o número de escalas temporais efetivas para os pares de moeda mais negociados. Mostramos que quanto maior o mercado de câmbio, maior o número de escalas temporais relevantes. Esse modelo permite um maior entendimento sobre como a informação, medida pela volatilidade dos preços, é propagada das escalas mais longas para as mais curtas.

A versão hierárquica dos tempos de primeira passagem é uma forma de incorporar a variável tempo nas nossas análises de mercados. A presença de uma dinâmica hierárquica verificada no capítulo 3 serviu de motivação para verificar como isso se manifesta em tempos de primeira passagem. Assim como sistemas complexos possuem tempos de relaxação que diferem da exponencial, mercados reais também diferem na forma do tempo característico para o preço sair de um intervalo. Mostramos que nem todos os mercados pertencem à mesma classe de universalidade da teoria H. O impacto do tamanho do intervalo em que a cotação está confinada também foi medido, mostrando que quanto maior o intervalo, menor o número de escalas de tempo relevantes.

Fizemos a analogia entre uma máquina de Szilárd e um EA. Uma rede neural artificial foi treinada para decidir quando entrar no mercado com base nos valores dos indicadores financeiros. Através do teorema de flutuação, percebeu-se que essa rede acrescenta informação se comparado ao EA sem a rede. Essa parte da tese tem uma importância fundamental pois aplica conceitos de física para o desenvolvimento de estratégias de *trading*.

Os resultados apresentados no capítulo 3 foram publicados e podem ser encontrados na referência:

- Vasconcelos, G. L., Ribeiro, L. R., Macêdo, A. M., González, I. R., Ospina, R., & Brum, A. A. (2024). Turbulence hierarchy in foreign exchange markets. *Physical Review E*,

---

109(4), 044313.

## 5.2 PERSPECTIVAS

A modelagem dos retornos foi realizada em três pares de moedas, isso sugere a possibilidade de realizar o mesmo procedimento para outras moedas. Um outro segmento que tem cada vez mais adeptos e também pode ser avaliado é o de criptomoedas.

Outra perspectiva, relacionada aos tempos de espera, refere-se à demora para que o preço mude de valor, independentemente de qual seja. Essa abordagem permite uma visão discreta sobre o movimento dos preços. Há evidências de que uma descrição em que um processo estocástico está subordinado a outro seja aplicável a mercados financeiros. Esse aspecto apresenta potencial para investigações futuras, visando explorar de forma mais detalhada suas implicações. Uma versão hierárquica de processos subordinados é um caminho possível.

No âmbito do desenvolvimento de EA's pode-se aprimorar a forma como se treina a rede, testar diferentes valores dos conjuntos de treino e validação, selecionar diferentes indicadores financeiros, escolher outro valor para o número de épocas. Também podem ser construídas redes de aprendizado por reforço que visem encontrar a melhor política para um agente agir em um ambiente, como no caso do algoritmo *deep Q-learning*.

## REFERÊNCIAS

- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1900. v. 17, p. 21–86.
- BACRY, E.; KOZHEMYAK, A.; MUZY, J.-F. Continuous cascade models for asset returns. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 156–199, 2008.
- BARBOSA, A. L. R.; LIMA, T. H. V. de; GONZÁLEZ, I. R. R.; PESSOA, N. L.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L. Turbulence hierarchy and multifractality in the integer quantum hall transition. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 128, p. 236803, Jun 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.236803>>.
- BELCHIOR, A. C. G. *Ypê*. 1980. In: Belchior. *Objeto Direto*. São Paulo: Warner Music Brasil Ltda, 1980. Faixa 4, 1 LP.
- BIAIS, B.; HILTON, D.; MAZURIER, K.; POUGET, S. Psychological traits and trading strategies. *Available at SSRN 302026*, 2002.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.
- BLUMEN, A.; KLAFTER, J.; ZUMOFEN, G. Models for reaction dynamics in glasses. *Optical spectroscopy of glasses*, Springer, p. 199–265, 1986.
- BUSTAMANTE, C.; LIPHARDT, J.; RITORT, F. The nonequilibrium thermodynamics of small systems. *Physics today*, AIP Publishing, v. 58, n. 7, p. 43–48, 2005.
- CHAGUE, F.; DE-LOSSO, R.; GIOVANNETTI, B. Day trading for a living? *Available at SSRN 3423101*, 2020.
- CROOKS, G. E. Nonequilibrium measurements of free energy differences for microscopically reversible markovian systems. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 90, p. 1481–1487, 1998.
- CROOKS, G. E. Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 3, p. 2721, 1999.
- DATTAGUPTA, S. *Relaxation phenomena in condensed matter physics*. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- DEBYE, P. *Polar Molecules*. New York: Dover, 1945.
- DERRIDA, B. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2007, n. 07, p. P07023, 2007.
- DUNIS, C.; WILLIAMS, M. 'modelling and trading the eur/usd exchange rate: Do neural network models perform better?'. *Derivatives use, trading and regulation*, v. 8, n. 3, p. 211–239, 2002.
- EISLER, Z.; KERTESZ, J.; LILLO, F.; MANTEGNA, R. N. Diffusive behavior and the modeling of characteristic times in limit order executions. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 9, n. 5, p. 547–563, 2009.

- ERDÉLYI, A. Higher transcendental functions. *Higher transcendental functions*, p. 59, 1953.
- FRISCH, U. *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- GARDINER, C. W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. *Springer series in synergetics*, Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- GHASHGHAIE, S.; BREYMAN, W.; PEINKE, J.; TALKNER, P.; DODGE, Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 381, n. 6585, p. 767–770, 1996.
- GLOSTEN, L. R.; MILGROM, P. R. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 14, n. 1, p. 71–100, 1985.
- GONZÁLEZ, I. R.; LIMA, B. C.; PINCHEIRA, P. I. R.; BRUM, A. A.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L.; MENEZES, L. de S.; RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L.; KASHYAP, R. Turbulence hierarchy in a random fibre laser. *Nature Communications*, v. 8, 2017. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:10881183>>.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- HENDERSHOTT, T.; JONES, C. M.; MENKVELD, A. J. Does algorithmic trading improve liquidity? *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 66, n. 1, p. 1–33, 2011.
- HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 6, n. 2, p. 327–343, 1993.
- HULL, J.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 42, n. 2, p. 281–300, 1987.
- JARZYNSKI, C. Nonequilibrium equality for free energy differences. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 14, p. 2690, 1997.
- KARTONO, A.; FEBRIYANTI, M.; WAHYUDI, S. T. et al. Predicting foreign currency exchange rates using the numerical solution of the incompressible navier–stokes equations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 560, p. 125191, 2020.
- KINGMA, D. P. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.
- KLAFTER, J.; SHLESINGER, M. F. On the relationship among three theories of relaxation in disordered systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 83, n. 4, p. 848–851, 1986.
- KOHLRAUSCH, R. Nachtrag uber die elastische nachwirkung beim cocon und glasladen. *Ann. Phys.(Leipzig)*, v. 72, n. 393, p. 7, 1847.
- KOLMOGOROV, A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 13, n. 1, p. 82–85, 1962.

- KOSKI, J. V.; MAISI, V. F.; PEKOLA, J. P.; AVERIN, D. V. Experimental realization of a szilard engine with a single electron. *Proceedings of the National Academy of Sciences, National Acad Sciences*, v. 111, n. 38, p. 13786–13789, 2014.
- KUO, R. J.; CHEN, C.; HWANG, Y. An intelligent stock trading decision support system through integration of genetic algorithm based fuzzy neural network and artificial neural network. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 118, n. 1, p. 21–45, 2001.
- LANDAUER, R. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM journal of research and development*, Ibm, v. 5, n. 3, p. 183–191, 1961.
- MACÊDO, A.; GONZÁLEZ, I. R. R.; SALAZAR, D.; VASCONCELOS, G. Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems. *Physical Review E, APS*, v. 95, n. 3, p. 032315, 2017.
- MACÊDO, A. M. S.; GONZÁLEZ, I. R. R.; SALAZAR, D. S. P.; VASCONCELOS, G. L. Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems. *Phys. Rev. E, American Physical Society*, v. 95, p. 032315, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.032315>>.
- MAGNUSSON, R. J. *Water technology in the Middle Ages: cities, monasteries, and waterworks after the Roman Empire*. [S.l.]: JHU press, 2003.
- MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business, JSTOR*, v. 40, n. 4, p. 393–413, 1967.
- MASKAWA, J.-i.; KURODA, K. Model of continuous random cascade processes in financial markets. *Frontiers in Physics, Frontiers Media SA*, v. 8, p. 565372, 2020.
- MASOLIVER, J.; PERELLÓ, J. Escape problem under stochastic volatility: The heston model. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, APS*, v. 78, n. 5, p. 056104, 2008.
- MASOLIVER, J.; PERELLÓ, J. First-passage and risk evaluation under stochastic volatility. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, APS*, v. 80, n. 1, p. 016108, 2009.
- MATHAI, A. M.; SAXENA, R. K.; HAUBOLD, H. J. *The H-function: theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- MEHTA, P.; BUKOV, M.; WANG, C.-H.; DAY, A. G.; RICHARDSON, C.; FISHER, C. K.; SCHWAB, D. J. A high-bias, low-variance introduction to machine learning for physicists. *Physics reports*, Elsevier, v. 810, p. 1–124, 2019.
- MetaTrader 4 Platform. *Historical data from MetaTrader 4*. 2023. <<https://www.metatrader4.com>>.
- METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics reports*, Elsevier, v. 339, n. 1, p. 1–77, 2000.
- NOERTJAHYANA, A.; CHRISTOPHER, A.; ABAS, Z. A.; YUSOH, Z.; SETIAWAN, A. Stop hunt detection using indicators and expert advisors in the forex market. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2020. v. 1502, n. 1, p. 012054.

- OBUKHOV, A. Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Geophysical Research*, Wiley Online Library, v. 67, n. 8, p. 3011–3014, 1962.
- PALMER, R. G.; STEIN, D. L.; ABRAHAMS, E.; ANDERSON, P. W. Models of hierarchically constrained dynamics for glassy relaxation. *Physical Review Letters*, APS, v. 53, n. 10, p. 958, 1984.
- PERELLÓ, J.; GUTIÉRREZ-ROIG, M.; MASOLIVER, J. Scaling properties and universality of first-passage-time probabilities in financial markets. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, APS, v. 84, n. 6, p. 066110, 2011.
- REDNER, S. *A guide to first-passage processes*. [S.l.]: Cambridge university press, 2001.
- ROLDÁN, É.; NERI, I.; DÖRPINGHAUS, M.; MEYER, H.; JÜLICHER, F. Decision making in the arrow of time. *Physical review letters*, APS, v. 115, n. 25, p. 250602, 2015.
- SAGAWA, T.; UEDA, M. Nonequilibrium thermodynamics of feedback control. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, APS, v. 85, n. 2, p. 021104, 2012.
- SALAZAR, D. S. P.; VASCONCELOS, G. L. Stochastic dynamical model of intermittency in fully developed turbulence. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 82, p. 047301, Oct 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.047301>>.
- SAZUKA, N.; INOUE, J.-i.; SCALAS, E. The distribution of first-passage times and durations in forex and future markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 14, p. 2839–2853, 2009.
- SEIFERT, U. Stochastic thermodynamics: principles and perspectives. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 64, p. 423–431, 2008.
- SEKIMOTO, K. Langevin equation and thermodynamics. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Oxford Academic, v. 130, p. 17–27, 1998.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- SHEPHARD, N.; ANDERSEN, T. G. Stochastic volatility: origins and overview. In: *Handbook of financial time series*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 233–254.
- SIGGIA, E. D.; VERGASSOLA, M. Decisions on the fly in cellular sensory systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 110, n. 39, p. E3704–E3712, 2013.
- SINGH, R. Anomalous decay of linear and quadratic states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 545, p. 123374, 2020.
- SINGH, S.; MENCZEL, P.; GOLUBEV, D. S.; KHAYMOVICH, I. M.; PELTONEN, J. T.; FLINDT, C.; SAITO, K.; ROLDÁN, É.; PEKOLA, J. P. Universal first-passage-time distribution of non-gaussian currents. *Physical review letters*, APS, v. 122, n. 23, p. 230602, 2019.
- SOSA-CORREA, W.; PEREIRA, R.; MACÊDO, A.; RAPOSO, E.; SALAZAR, D.; VASCONCELOS, G. Emergence of skewed non-gaussian distributions of velocity increments in isotropic turbulence. *Physical Review Fluids*, APS, v. 4, n. 6, p. 064602, 2019.

- 
- STURGES, H. A. The choice of a class interval. *Journal of the american statistical association*, New York, v. 21, n. 153, p. 65–66, 1926.
- SZABO, A.; SCHULTEN, K.; SCHULTEN, Z. First passage time approach to diffusion controlled reactions. *The Journal of chemical physics*, AIP Publishing, v. 72, n. 8, p. 4350–4357, 1980.
- SZILARD, L. Über die entropieverminderung in einem thermodynamischen system bei eingriffen intelligenter wesen. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 53, n. 11, p. 840–856, 1929.
- THÉATE, T.; ERNST, D. An application of deep reinforcement learning to algorithmic trading. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 173, p. 114632, 2021.
- TOUZO, L.; MARSILI, M.; ZAGIER, D. Information thermodynamics of financial markets: the glosen–milgrom model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2021, n. 3, p. 033407, 2021.
- TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann–gibbs statistics. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 52, p. 479–487, 1988.
- TSALLIS, C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*. [S.I.]: Springer, 2009. v. 1.
- VALENTI, D.; SPAGNOLO, B.; BONANNO, G. Hitting time distributions in financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 382, n. 1, p. 311–320, 2007.
- VASCONCELOS, G. L.; RIBEIRO, L. R.; MACÊDO, A. M.; GONZÁLEZ, I. R.; OSPINA, R.; BRUM, A. A. Turbulence hierarchy in foreign exchange markets. *Physical Review E*, APS, v. 109, n. 4, p. 044313, 2024.
- VASCONCELOS, G. L.; SALAZAR, D. S.; MACÊDO, A. Maximum entropy approach to h-theory: Statistical mechanics of hierarchical systems. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 2, p. 022104, 2018.
- WILLIAMS, G.; WATTS, D. C. Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function. *Transactions of the Faraday society*, Royal Society of Chemistry, v. 66, p. 80–85, 1970.

## APÊNDICE A – TEORIA H

Apresentamos os argumentos e pressuposições necessários para implementação desse modelo que foi desenvolvido por Salazar e Vasconcelos em 2012 e Macêdo et al. em 2017. Vamos considerar um sistema que possua  $N$  escalas de tempo  $\tau_i, i = 1, \dots, N$  bem separadas. A maior escala é  $\tau_0$ , e para as demais escalas vale a relação  $\tau_i \ll \tau_{i-1}$ . Vamos chamar nossas variáveis de interesse de  $\epsilon_i$  e elas são descritas por um processo estocástico geral da seguinte forma:

$$d\epsilon_i = F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dt + G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)dW_i \quad (\text{A.1})$$

É associado a cada nível de hierarquia uma variável aleatória  $\epsilon_i$  e a um processo de Wiener independente  $W_i$ . Queremos que os termos  $F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)$  e  $G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t)$  satisfaçam algumas restrições dinâmicas.

i) Simetria de Translação no Tempo:

$$\partial_t F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = \partial_t G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

ii) Interação Local:

$$F_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \quad (\text{A.3})$$

$$G_i(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N, t) = G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

iii) Invariância de Escala:

$$F_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \lambda F_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \quad (\text{A.6})$$

$$G_i(\lambda\epsilon_{i-1}, \lambda\epsilon_i) = \lambda G_i(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \quad (\text{A.7})$$

$$(\text{A.8})$$

iv) Condição de Equilíbrio:

$$\langle \epsilon_i \rangle = \epsilon_0 \quad \text{para } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.9})$$

v) Positividade de  $\epsilon_i$ :

$$P(\epsilon_i < 0) = 0, \quad \forall t, \quad \text{se } \epsilon_i(t=0) \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

É possível mostrar que tais condições levam a:

$$d\epsilon_i = -\gamma(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i \epsilon_i^\alpha \epsilon_{i-1}^{1-\alpha} dW_i, \quad (\text{A.11})$$

onde  $\gamma_i$  e  $\kappa_i$  são constantes reais positivas. Queremos ter uma solução analítica para a equação de Fokker-Planck associada com a equação acima, isso só é possível para dois valores de  $\alpha$ , são eles  $\alpha = 1/2$  e  $\alpha = 1$ .

i)  $\alpha = 1$ .

A equação diferencial estocástica fica:

$$d\epsilon_i = -\gamma(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i \epsilon_i dW_i. \quad (\text{A.12})$$

Como se assumiu que as escalas de tempo são bem separadas, a variável  $\epsilon_i$  flutua muito mais rapidamente que  $\epsilon_{i-1}$ . Pode-se então, via equação de Fokker-Planck, encontrar a distribuição de probabilidade condicional  $f_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1})$  para o caso estacionário. Ela é dada por:

$$f_i(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) = \frac{(\beta_i \epsilon_{i-1})^{\beta_i+1}}{\Gamma(\beta_i + 1)} \epsilon_i^{-\beta_i-2} \exp\left(-\frac{\beta_i \epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}\right), \quad (\text{A.13})$$

onde  $\beta_i = \frac{2\gamma_i}{\kappa^2}$ . Essa é a distribuição gama inversa. Nota-se que o cálculo foi feito de uma forma geral, independente da escala escolhida. Porém, ela diz respeito apenas a uma única escala, queremos uma solução que considere múltiplas escalas. A variável  $\epsilon_N$  tem distribuição  $f_N(\epsilon_N)$ . Como a dependência está na escala anterior, temos que:

$$f_N(\epsilon_N) = \int f(\epsilon_N|\epsilon_{N-1})f(\epsilon_{N-1})d\epsilon_{N-1}. \quad (\text{A.14})$$

Este procedimento é repetido de forma recursiva até que se chegue nas maiores escalas,

$$f_N(\epsilon_N) = \int d\epsilon_{N-1} \dots \int d\epsilon_1 f(\epsilon_N|\epsilon_{N-1}) \dots f(\epsilon_1|\epsilon_0). \quad (\text{A.15})$$

O próximo passo para resolvermos essa integral é com o uso da transformada de Mellin que é definida como

$$\mathcal{M}\{h(x)\}(s) = H(s) = \int_0^\infty x^{s-1} h(x) dx, \quad (\text{A.16})$$

e da fórmula de Parseval

$$\int_0^\infty h(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s)G(1-s)ds, \quad (\text{A.17})$$

onde  $H(s)$  e  $G(s)$  são as transformadas de Mellin de  $h(x)$  e  $g(x)$  respectivamente.

A distribuição  $f(\epsilon_2)$  é calculada através das distribuições condicionais  $f(\epsilon_2|\epsilon_1)$  e  $f(\epsilon_1|\epsilon_0)$ , assim temos

$$f_2(\epsilon_2) = \int_0^\infty f(\epsilon_2|\epsilon_1)f(\epsilon_1|\epsilon_0)d\epsilon_1. \quad (\text{A.18})$$

Utilizando a equação (A.13) na integral acima, obtemos

$$f_2(\epsilon_2) = \frac{\beta_2^{\beta_2+1} \epsilon_2^{-\beta_2-2} (\beta_1 \epsilon_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \epsilon_1^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 \epsilon_1}{\epsilon_2}\right] \epsilon_1^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \epsilon_0}{\epsilon_1}\right] d\epsilon_1. \quad (\text{A.19})$$

Algumas propriedades das transformadas de Mellin serão usadas, são elas:

$$\mathcal{M}\{h(ax)\}(s) = a^{-s}H(s), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{M}\{h(a/x)\}(s) = \mathcal{M}\{h(ax)\}(-s) = a^sH(-s), \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{M}\{x^b h(x)\}(s) = H(s+b), \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{M}\{e^{-\alpha x}\}(s) = \alpha^{-s}\Gamma(s). \quad (\text{A.23})$$

Pode-se identificar  $g(x) = x^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\epsilon_2}\right]$  e  $h(x) = x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \epsilon_0}{x}\right]$ , onde fizemos  $x = \epsilon_1$ . Usando (A.22) temos que

$$\mathcal{M}\{g(x)\}(1-s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\epsilon_2}\right]\right\}(1-s) = \mathcal{M}\left\{\exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\epsilon_2}\right]\right\}(2+\beta_2-s). \quad (\text{A.24})$$

Usando agora (A.23), temos

$$\mathcal{M}\{g(x)\}(1-s) = \left(\frac{\beta_2}{\epsilon_2}\right)^{-(2+\beta_2-s)} \Gamma(2+\beta_2-s). \quad (\text{A.25})$$

O uso dessas propriedades é feito também para  $h(x)$ , obtemos

$$\mathcal{M}\{h(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \epsilon_0}{x}\right]\right\}(s). \quad (\text{A.26})$$

Antes de prosseguir, é preciso usar (A.21), que implica em

$$\mathcal{M}\left\{x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \epsilon_0}{x}\right]\right\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_1+2} \exp\left[-\beta_1 \epsilon_0 x\right]\right\}(-s). \quad (\text{A.27})$$

Pela propriedade (A.22), temos então que

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_1+2} \exp\left[-\beta_1 \epsilon_0 x\right]\right\}(-s) = \mathcal{M}\left\{\exp\left[-\beta_1 \epsilon_0 x\right]\right\}(2+\beta_1-s), \quad (\text{A.28})$$

e pela (A.23):

$$\mathcal{M} \left\{ \exp \left[ -\beta_1 \epsilon_0 x \right] \right\} (2 + \beta_1 - s) = (\beta_1 \epsilon_0)^{-(2+\beta_1-s)} \Gamma(2 + \beta_1 - s). \quad (\text{A.29})$$

Esses valores são as transformadas de Mellin das funções que aparecem em (A.19). Substituindo os valores encontrados em (A.25) e (A.29) na equação (A.19) e usando a fórmula de Parseval A.17, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \Gamma(\beta_1 + 1) \Gamma(\beta_2 + 1) \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \\ &\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0} \right)^{-s} \Gamma(2 + \beta_1 - s) \Gamma(2 + \beta_2 - s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Pode-se escrever esse resultado em termos da função G de Meijer, definida por (MATHAI; SAXENA; HAUBOLD, 2009)

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_L} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)} x^{-s} ds, \quad (\text{A.31})$$

Onde  $\vec{a}_p = (a_1, \dots, a_n, \dots, a_p)$  e  $\vec{b}_q = (b_1, \dots, b_m, \dots, b_q)$ .

Comparando a definição (A.31) com a equação (A.30), conclui-se que  $x = \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0}$ ,  $\vec{b}_q = 0$ ,  $a_1 = -\beta_1 - 1$  e  $a_2 = -\beta_2 - 1$ . Temos, portanto

$$\begin{aligned} f_2(\epsilon_2) &= \int_0^\infty f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 \\ &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \Gamma(\beta_1 + 1) \Gamma(\beta_2 + 1) \epsilon_0} G_{2,0}^{0,2} \left( \begin{matrix} -\beta_1 - 1, -\beta_2 - 1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Algumas das propriedades importantes das funções G de Meijer são:

$$e^{-x} = G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| x \right) = G_{1,0}^{0,1} \left( \begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$x^f G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) = G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p + \vec{f} \\ \vec{b}_q + \vec{f} \end{matrix} \middle| x \right), \quad (\text{A.34})$$

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \eta x \right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu} \left( \begin{matrix} \vec{c}_\sigma \\ \vec{d}_\tau \end{matrix} \middle| \xi x \right) dx = \frac{1}{\xi} G_{p+\tau, q+\sigma}^{m+\nu, n+\mu} \left( \begin{matrix} \vec{a}_n, -\vec{d}_\tau, \vec{a}_p \\ \vec{b}_m, -\vec{c}_\sigma, \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \frac{\eta}{\xi} \right). \quad (\text{A.35})$$

Com  $f(\epsilon_2)$  calculado, pode-se encontrar a distribuição para as demais variáveis usando as propriedades acima das funções G. Vamos calcular a distribuição da variável  $\epsilon_3$ . Pela equação (A.15) temos

$$f_3(\epsilon_3) = \int \int f(\epsilon_3|\epsilon_2) f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 d\epsilon_2, \quad (\text{A.36})$$

ou

$$f_3(\epsilon_3) = \int f(\epsilon_3|\epsilon_2) \left( \int f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 \right) d\epsilon_2, \quad (\text{A.37})$$

onde o resultado da integração entre parêntesis é  $f_2(\epsilon_2)$ . Utilizando das equações (A.13) e (A.32) obtemos

$$f_3(\epsilon_3) = \int_0^\infty \frac{(\beta_3 \epsilon_2)^{\beta_3+1}}{\Gamma(\beta_3+1)} \frac{\epsilon_3^{-\beta_3-2} e^{-\frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3}}}{\beta_1 \beta_2 \Gamma(\beta_1+1) \Gamma(\beta_2+1) \epsilon_0} G_{2,0}^{0,2} \left( \begin{matrix} -\beta_1-1, -\beta_2-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0} \right) d\epsilon_2. \quad (\text{A.38})$$

Vamos deixar a forma desse integrando como sendo o produto de duas funções G. Inicialmente, note que pelas propriedades (A.33) e (A.34)

$$\left( \frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right)^{\beta_3+1} e^{-\frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3}} = \left( \frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right)^{\beta_3+1} G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right) = G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta_3+1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right). \quad (\text{A.39})$$

Substituindo o resultado acima na equação (A.38), resulta

$$f_3(\epsilon_3) = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \Gamma(\beta_1+1) \Gamma(\beta_2+1) \Gamma(\beta_3+1) \epsilon_0 \epsilon_3} \times \int_0^\infty G_{2,0}^{0,2} \left( \begin{matrix} -\beta_1-1, -\beta_2-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0} \right) G_{0,1}^{1,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta_3+1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_3 \epsilon_2}{\epsilon_3} \right) d\epsilon_2. \quad (\text{A.40})$$

Usando (A.35) com  $\eta = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \epsilon_0}$  e  $\xi = \frac{\beta_3}{\epsilon_3}$  chegamos em

$$f_3(\epsilon_3) = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \Gamma(\beta_1+1) \Gamma(\beta_2+1) \Gamma(\beta_3+1) \epsilon_0} G_{3,0}^{0,3} \left( \begin{matrix} -\beta_1-1, -\beta_2-1, -\beta_3-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\epsilon_2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \epsilon_0} \right). \quad (\text{A.41})$$

É possível observar um padrão. Esse processo pode ser repetido para as demais escalas.

Para uma escala arbitrária  $N$ , temos (MACÊDO et al., 2017):

$$f_N(\epsilon_N) = \frac{1}{\epsilon_0 \omega \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1})} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\vec{\beta} - \vec{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\epsilon_N}{\epsilon_0 \omega} \right), \quad (\text{A.42})$$

onde

$$\omega = \prod_{i=0}^N \beta_i, \quad (\text{A.43})$$

$$\Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) = \prod_{i=0}^N \Gamma(\beta_i + 1), \quad (\text{A.44})$$

$$-\vec{\beta} - \vec{1} = (-\beta_1 - 1, -\beta_2 - 1, \dots, -\beta_N - 1). \quad (\text{A.45})$$

ii)  $\alpha = 1/2$ .

A equação diferencial estocástica é da forma

$$d\epsilon_i = -\gamma_i(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})dt + \kappa_i \epsilon_i^{1/2} \epsilon_{i-1}^{1/2} dW_i. \quad (\text{A.46})$$

A equação de Fokker-Planck associada a (A.46) tem solução estacionária dada por

$$f(\epsilon_i|\epsilon_{i-1}) = \frac{(\beta_i/\epsilon_{i-1})^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} \epsilon_i^{\beta_i-1} \exp\left[-\frac{\beta_i \epsilon_i}{\epsilon_{i-1}}\right], \quad (\text{A.47})$$

que é uma distribuição gama. Vamos inicialmente considerar o caso de duas escalas. Ao substituímos a equação (A.47) na (A.18) temos

$$f_2(\epsilon_2) = \frac{\beta_2^{\beta_2} \epsilon_2^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} \frac{(\beta_1/\epsilon_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^\infty d\epsilon_1 \epsilon_1^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \epsilon_2/\epsilon_1} \epsilon_1^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 \epsilon_1/\epsilon_0}. \quad (\text{A.48})$$

Faremos agora a transformada de Mellin sendo  $\epsilon_1 = x$ ,  $g(x) = x^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \epsilon_2/x}$  e  $h(x) = x^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 x/\epsilon_0}$ . As propriedades das transformadas de Mellin permitem fazer:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{x^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \epsilon_2/x}\}(1-s) &= \mathcal{M}\{x^{\beta_2} e^{-\beta_2 \epsilon_2 x}\}(s-1) \\ &= \mathcal{M}\{e^{-\beta_2 \epsilon_2 x}\}(\beta_2 - 1 + s) \\ &= (\beta_2 \epsilon_2)^{-(\beta_2-1+s)} \Gamma(\beta_2 - 1 + s), \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

e também

$$\mathcal{M}\{x^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 x/\epsilon_0}\}(s) = \mathcal{M}\{e^{-\beta_1 x/\epsilon_0}\}(\beta_1 - 1 + s) = \left(\frac{\beta_1}{\epsilon_0}\right)^{-(\beta_1-1+s)} \Gamma(\beta_1 - 1 + s). \quad (\text{A.50})$$

Usando a fórmula de Parseval junto com as duas transformadas de Mellin encontradas acima em (A.48) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 &= \frac{\beta_1 \beta_2}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \epsilon_0} \frac{1}{2\pi i} \\ &\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{\beta_1 \beta_2 \epsilon_2}{\epsilon_0}\right)^{-s} \Gamma(\beta_1 - 1 + s) \Gamma(\beta_2 - 1 + s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Comparando a integral acima com (A.31) vemos que  $x = \frac{\beta_1 \beta_2 \epsilon_2}{\epsilon_0}$ ,  $\vec{a}_p = 0$ ,  $b_1 = \beta_1 - 1$  e  $\beta_2 = \beta_2 - 1$ . Substituindo tudo isso, segue que

$$f_2(\epsilon_2) = \int_0^\infty f(\epsilon_2|\epsilon_1) f(\epsilon_1|\epsilon_0) d\epsilon_1 = \frac{\beta_1 \beta_2}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \epsilon_0} G_{0,2}^{2,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1 \beta_2 \epsilon_2}{\epsilon_0} \right). \quad (\text{A.52})$$

Substituindo o resultado acima na equação (A.37) temos

$$f_3(\epsilon_3) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \epsilon_0} \frac{1}{\Gamma(\beta_3)} \int_0^\infty d\epsilon_2 (\beta_3/\epsilon_2)^{\beta_3} \epsilon_3^{\beta_3-1} e^{-\beta_3 \epsilon_3/\epsilon_2} G_{0,2}^{2,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1 \beta_2 \epsilon_2}{\epsilon_0} \right). \quad (\text{A.53})$$

Para usar novamente a propriedade da integral do produto de duas funções G, vamos inicialmente fazer

$$e^{-\beta_3 \epsilon_3 / \epsilon_2} = G_{0,1}^{1,0} \left( - \left| \frac{\beta_3 \epsilon_3}{\epsilon_2} \right. \right) = G_{1,0}^{0,1} \left( 1 \left| \frac{\epsilon_2}{\beta_3 \epsilon_3} \right. \right), \quad (\text{A.54})$$

$$\left( \frac{\beta_3 \epsilon_3}{\epsilon_2} \right)^{\beta_3} e^{-\beta_3 \epsilon_3 / \epsilon_2} = \left( \frac{\epsilon_2}{\beta_3 \epsilon_3} \right)^{-\beta_3} G_{1,0}^{0,1} \left( 1 \left| \frac{\epsilon_2}{\beta_3 \epsilon_3} \right. \right) = G_{1,0}^{0,1} \left( 1 - \beta_3 \left| \frac{\epsilon_2}{\beta_3 \epsilon_3} \right. \right), \quad (\text{A.55})$$

Substituindo os resultados acima em (A.53), resulta

$$f_3(\epsilon_3) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \Gamma(\beta_3) \epsilon_0 \epsilon_3} \int_0^\infty d\epsilon_2 G_{1,0}^{0,1} \left( 1 - \beta_3 \left| \frac{\epsilon_2}{\beta_3 \epsilon_3} \right. \right) G_{0,2}^{2,0} \left( - \left| \frac{\beta_1 \beta_2 \epsilon_2}{\epsilon_0} \right. \right). \quad (\text{A.56})$$

Usando a propriedade (A.35) chegamos em

$$f_3(\epsilon_3) = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \Gamma(\beta_3) \epsilon_0} G_{0,3}^{3,0} \left( - \left| \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \epsilon_3}{\epsilon_0} \right. \right) \quad (\text{A.57})$$

Um padrão se forma e a distribuição de probabilidade para a escala  $N$  é da forma (MACÊDO et al., 2017)

$$f_N(\epsilon_N) = \frac{\omega}{\Gamma(\vec{\beta}) \epsilon_0} G_{0,N}^{N,0} \left( - \left| \frac{\omega \epsilon_N}{\epsilon_0} \right. \right), \quad (\text{A.58})$$

Onde  $\omega$  é definido por (A.43) e

$$\Gamma(\vec{\beta}) = \prod_{i=0}^N \Gamma(\beta_i), \quad (\text{A.59})$$

$$\vec{\beta} - \vec{1} = (\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \dots, \beta_N - 1). \quad (\text{A.60})$$

## APÊNDICE B – CÁLCULO DE $\tau_0$

Neste apêndice é mostrado que  $\tau_0$  é média a dos tempos de primeira passagem e das distribuições de background.

i) Classe lei de potência.

A distribuição de background é dada por

$$w(\tau_N) = \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1)} G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{\tau_0 \omega} \right), \quad (\text{B.1})$$

e tem por média

$$\langle \tau_N \rangle = \int \tau_N w(\tau_N) d\tau_N = \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1)} \int \tau_N G_{N,0}^{0,N} \left( \begin{matrix} -\beta-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\tau_N}{\tau_0 \omega} \right) d\tau_N. \quad (\text{B.2})$$

Em A.31 definimos a função G de Meijer pela transformada inversa de Mellin. De forma equivalente, podemos usar a transformada de Mellin

$$\int_0^\infty x^{s-1} G_{p,q}^{m,n} \left( \begin{matrix} \mathbf{a}_p \\ \mathbf{b}_q \end{matrix} \middle| \eta x \right) dx = \eta^{-s} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}. \quad (\text{B.3})$$

Comparando com a equação anterior, conseguimos identificar  $s = 2$ ,  $\eta = 1/\tau_0 \omega$ ,  $m = n = 0$ ,  $p = q = N$  e  $\mathbf{a}_p = -\beta - 1$ . A média fica

$$\langle \tau_N \rangle = \frac{1}{\tau_0 \omega \Gamma(\beta + 1)} (\tau_0 \omega)^2 \prod_{j=1}^N \Gamma(1 - 2 + \beta + 1) = \tau_0 \omega \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta) \frac{1}{\prod_{j=1}^N \Gamma(\beta + 1)}. \quad (\text{B.4})$$

Usando o fato de que  $\omega = \prod_{j=1}^N \beta$  e  $\Gamma(\beta + 1) = \beta \Gamma(\beta)$ , temos que

$$\langle \tau_N \rangle = \frac{\tau_0 \prod_{j=1}^N \beta \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta)}{\prod_{j=1}^N \beta \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta)} = \tau_0 \quad (\text{B.5})$$

ii) Classe exponencial esticada.

A distribuição de background é

$$w(\tau_N) = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta)} G_{0,N}^{N,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta-1 \end{matrix} \middle| \frac{\omega \tau_N}{\tau_0} \right), \quad (\text{B.6})$$

e tem por média

$$\langle \tau_N \rangle = \int \tau_N w(\tau_N) d\tau_N = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\beta)} \int \tau_N G_{0,N}^{N,0} \left( \begin{matrix} - \\ \beta-1 \end{matrix} \middle| \frac{\omega \tau_N}{\tau_0} \right) d\tau_N. \quad (\text{B.7})$$

Comparando com B.3, pode-se identificar  $s = 2$ ,  $\eta = \omega/\tau_0$ ,  $p = q = 0$ ,  $m = n = N$  e  $\mathbf{b}_q = \boldsymbol{\beta} - \mathbf{1}$ . A média fica

$$\langle \tau_N \rangle = \frac{\omega}{\tau_0 \Gamma(\boldsymbol{\beta})} (\tau_0/\omega)^2 \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta_j - 1 + 2) = \frac{\tau_0}{\omega \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta_j)} \prod_{j=1}^N \Gamma(\beta_j + 1) = \tau_0 \quad (\text{B.8})$$

iii) Distribuição dos tempos de primeira passagem.

Vamos calcular a média dos tempos de primeira passagem, definida por

$$\langle t \rangle = \int t F_N(t) dt, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$F_N(t) = \int_0^\infty F(t|\tau_N) w_N(\tau_N) d\tau_N, \quad (\text{B.10})$$

e

$$F_N(t|\tau_N) = \frac{1}{\tau_N} \exp(-t/\tau_N). \quad (\text{B.11})$$

Para o presente propósito,  $w_N(\tau_N)$  pode ser de qualquer uma das duas classes. Substituindo as equações acima na média, temos

$$\langle t \rangle = \int t \int \frac{1}{\tau_N} \exp(-t/\tau_N) w_N(\tau_N) d\tau_N dt = \int \frac{1}{\tau_N} \int t \exp(-t/\tau_N) dt w_N(\tau_N) d\tau_N \quad (\text{B.12})$$

A integral dependente de  $t$  é resolvida com a substituição  $t = \tau_N x$ , e fica

$$\int_0^\infty x \tau_N e^{-x} \tau_N dx = \tau_N^2 \Gamma(2) = \tau_N^2. \quad (\text{B.13})$$

Dessa forma, a média do tempo é

$$\langle t \rangle = \int \frac{1}{\tau_N} \tau_N^2 w_N(\tau_N) d\tau_N = \int \tau_N w_N(\tau_N) d\tau_N = \langle \tau_N \rangle = \tau_0, \quad (\text{B.14})$$

onde foi usado o resultado obtido nos itens i) e ii) sobre o valor da média das distribuições de background.

### APÊNDICE C – FUNÇÕES $A_n(\tau)$ E $B_n(\tau)$

Para obter as funções  $A_n(\tau)$  e  $B_n(\tau)$ , vamos começar pela equação de Riccati

$$\dot{B}_n = -B_n - B_n^2 + \left(\frac{\beta_r}{2L}\right)^2, \quad (\text{C.1})$$

com condição inicial  $B_n(0) = 0$ . Vamos definir uma função  $Z(\tau)$ , dada por

$$B_n(\tau) = \frac{\dot{Z}}{Z}. \quad (\text{C.2})$$

Desta forma é obtido uma equação linear

$$\ddot{Z} + \dot{Z} - \left(\frac{\beta_r}{2L}\right)^2 Z = 0, \quad (\text{C.3})$$

cuja solução é

$$Z(\tau) = C_1 e^{\mu_n^- \tau} + C_2 e^{-\mu_n^+ \tau}, \quad (\text{C.4})$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias, e

$$\mu_n^\pm = \frac{\Delta_n \pm 1}{2}, \quad \Delta_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_r}{L}\right)^2}. \quad (\text{C.5})$$

A expressão para  $B_n(\tau)$  é dada, portanto, por

$$B_n(\tau) = \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- \tau} - (C_2/C_1) \mu_n^+ e^{-\mu_n^+ \tau}}{e^{\mu_n^- \tau} + (C_2/C_1) e^{-\mu_n^+ \tau}}, \quad (\text{C.6})$$

e a condição inicial  $B_n(0) = 0$  fornece

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\mu_n^-}{\mu_n^+}. \quad (\text{C.7})$$

Portanto,

$$B_n(\tau) = \mu_n^- \frac{1 - e^{-\Delta_n \tau}}{1 + (\mu_n^- / \mu_n^+) e^{-\Delta_n \tau}}. \quad (\text{C.8})$$

Sabe-se que

$$A_n(\tau) = \theta \int_0^\tau B_n(s) ds. \quad (\text{C.9})$$

Utilizando  $\xi = e^{-\Delta_n s}$  como nova variável de integração, temos:

$$A_n(\tau) = \frac{\theta \mu_n^-}{\Delta_n} \int_{-\Delta_n \tau}^{e^1} \frac{1 - \xi}{\xi [1 + (\mu_n^- / \mu_n^+) \xi]} d\xi, \quad (\text{C.10})$$

mas

$$\int \frac{1 - \xi}{\xi [1 + (\mu_n^- / \mu_n^+) \xi]} d\xi = \ln \xi - (1 + \mu_n^+ / \mu_n^-) \ln [1 + (\mu_n^- / \mu_n^+) \xi]. \quad (\text{C.11})$$

o que resulta em

$$A_n(\tau) = \theta \left[ \mu_n^- \tau + \ln \left( \frac{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{-\Delta_n \tau}}{\Delta_n} \right) \right]. \quad (\text{C.12})$$