UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNANBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – NÚCLEO DE TECNOLOGIA
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

LUAN MANOEL SANTOS SILVA

UM PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO EM UMA ENTIDADE MUNICIPAL: Aplicação da abordagem do caixeiro viajante

CARUARU – PE

2025

LUAN MANOEL SANTOS SILVA

UM PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO EM UMA ENTIDADE MUNICIPAL: Aplicação da abordagem do caixeiro viajante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia de Produção do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Área de concentração: Pesquisa Operacional

Orientadora: Professora Dra. Marina Dantas de Oliveira Duarte

CARUARU – PE

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Luan Manoel Santos.
Um problema de roteirização em uma entidade municipal: aplicação da abordagem do caixeiro viajante / Luan Manoel Santos Silva. - Caruaru, 2025.
57 p. : il.

Orientador(a): Marina Dantas de Oliveira Duarte
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Engenharia de Produção, 2025.
Inclui referências.

1. roteirização. 2. caixeiro viajante. 3. solver. 4. princípio da eficiência . 5. princípio da economicidade. I. Oliveira Duarte, Marina Dantas de. (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)

LUAN MANOEL SANTOS SILVA

UM PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO EM UMA ENTIDADE MUNICIPAL: Aplicação da abordagem do caixeiro viajante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia de Produção do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Aprovada em: 11/04/2025 às 10:00

BANCA EXAMINADORA

____

Prof[a]. Dr[a]. Marina Dantas de Oliveira Duarte (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof[a], Dr[a]. Shirley Minneli Ferreira de Oliveira (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____

MSc. Cristiano Rodrigues Ferreira Costa (Examinador Externo)
DNIT - AL

Dedico este trabalho a Adonai, que me fortaleceu nos momentos difíceis e me guiou ao longo dessa jornada. À minha mãe, que sempre esteve presente em todos os momentos, sejam eles bons ou desafiadores, me apoiando e sendo meu porto seguro. E a minha esposa, que caminhou ao meu lado, compartilhando cada riso e cada lágrima nessa trajetória.

AGRADECIMENTOS

Um sonho não se realiza sozinho e este trabalho é a prova disto. A cada pessoa que cruzou meu caminho e, de alguma forma, contribuiu para essa conquista, minha eterna gratidão. Primeiramente, agradeço a Adonai, por me presentear com o dom da vida e me conceder força e sabedoria para trilhar essa jornada.

Aos meus pais, Solange e Manoel, por me ensinarem o poder transformador do conhecimento e como ele pode mudar nossas vidas. Agradeço por serem meus maiores apoiadores, por fazerem tudo que estava ao alcance, e, muitas vezes, o que parecia impossível, para que hoje eu pudesse concluir minha graduação. Vocês são minha maior inspiração!

Aos primeiros que contribuíram para minha jornada acadêmica, Thierry Jean, Janaina Nayara e Verônica Silva. Como dizem: "De pedra em pedra construímos nosso castelo". Saibam que vocês tornaram este momento possível e sou imensamente grato por isso.

A minha esposa, Maira Gomes, que caminhou ao meu lado ao longo dessa jornada. Agradeço por me apoiar nos momentos mais difíceis da graduação e por, nos desafios, me mostrar que sou capaz de alcançar meus objetivos. Você esteve comigo nos altos e baixos dessa caminhada, tornando-a mais leve e significativa. Sua força e determinação são inspiradoras.

Aos meus sogros, Maria e Daniel, que, como costumo dizer, são minha segunda família. Agradeço pelo apoio incondicional, pelo incentivo constante e pelos valiosos conselhos.

Aos meus amigos de jornada acadêmica, que estão comigo desde o segundo dia de aula: Suellen Bezerra, Vinicius Henrique e Michelly Gabriella. Juntos, enfrentamos desafios, compartilhamos momentos de descontração e muitas risadas. Desde os surtos com as provas de Cálculo, Física e Mecânica até às partidas de jogos nas mesas do bloco de Física, cada experiência foi especial. Saibam que vocês tornaram essa trajetória mais leve e inesquecível.

A minha orientadora, Marina Dantas, que me acompanhou desde a orientação de estágio até a construção deste trabalho. Agradeço pelos conselhos, pela paciência e pela dedicação em orientar. Você realmente domina a arte de ensinar, transmitindo conhecimento com zelo, compromisso e amor.

“Só os que se arriscam a ir longe demais são capazes de descobrir o quão longe se pode ir”. – T.S. Eliot

RESUMO

A gestão eficiente dos recursos públicos tem se tornado uma preocupação crescente entre os gestores, tendo em vista que os cidadãos estão cada vez mais atentos à destinação do dinheiro público, exigindo transparência e fiscalização rigorosa. Paralelamente, os órgãos de controle vêm fortalecendo uma cultura de fiscalização, consolidando mecanismos que garantam o uso responsável dos recursos. Nesse contexto, buscando êxito em atender aos princípios da eficiência e da economicidade, este trabalho analisa o impacto da roteirização na distribuição de merenda em uma entidade municipal. Para isso, é realizado a modelagem do problema visando a distribuição nas Escolas em Tempo Integral, identificando a solução ótima que permita otimizar o processo e reduzir os gastos operacionais. A modelagem foi baseada no Problema do Caixeiro Viajante, e a resolução foi conduzida por meio da ferramenta computacional *Solver*. Os resultados obtidos indicam soluções ótimas que, quando implementadas, deverá reduzir significativamente o consumo de combustível e postergar os gastos com manutenção da frota municipal, contribuindo para uma gestão pública mais eficiente.

Palavras-Chaves: roteirização; caixeiro viajante; *solver*; princípio da eficiência; princípio da economicidade.

ABSTRACT

The efficient management of public resources has become a growing concern among managers, given that citizens are increasingly aware of the allocation of public funds, demanding transparency and rigorous monitoring. At the same time, control agencies have been strengthening a culture of monitoring, consolidating mechanisms that ensure the responsible use of resources. In this context, seeking to successfully meet the principles of efficiency and cost-effectiveness, this paper analyzes the impact of routing on the distribution of school meals in a municipal entity. To this end, a model of the distribution problem in Full-Time Schools is made, identifying the optimal solution that allows optimizing the process and reducing operating costs. The modeling was based on the Traveling Salesman Problem, and the resolution was conducted using the Solver computational tool. The results found indicate optimal solutions that should significantly reduce fuel consumption and postpone maintenance costs of the municipal fleet, contributing to more efficient public management.

Keywords: roterization; traveling salesman; solver; principle of efficiency; principle of economy.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ETI	Escola em Tempo Integral
FO	Função Objetivo
GPS	*Global Positioning System*
IOLS	Instituto de Logística e *Supply Chain*
PI	Programação Inteira
PL	Programação Linear
PM	Programação Matemática
PNL	Programação Não-Linear
PO	Pesquisa Operacional
TSP	*Travelling Salesman Problem*

LISTA DE FÓRMULAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ambiente de trabalho vem sofrendo grandes mudanças, no âmbito privado e público, devido a globalização e a alta complexidade das relações. Com isso, fica evidente a importância do bom gerenciamento dos recursos e das pessoas que compõem a organização.

A gestão administrativa, surge com a necessidade das primeiras organizações existentes em administrar (gerir) recursos humanos e não-humanos. (Chiavenato, 2004).

De acordo com Oliveira (1968), Administração Pública são as atividades, ou trabalhos que as pessoas jurídicas de direito público desenvolvem por meio de seus representantes para a aquisição, conservação, uso, gozo e reivindicação dos seus bens, direitos e interesses. Ratificando, Arezzo (1999) define que a Administração Pública abrange o conjunto de atividades que se relacionam diretamente com o cumprimento de tarefas consideradas de interesse público, ou comum, numa coletividade ou organização.

Ainda de acordo com Meirelles (2004, p. 64), a administração é conceituada como:

> Em sentido formal, a Administração Pública, é o conjunto de órgãos instituídos para consecução dos objetivos do Governo; em sentido material, é o conjunto das funções necessárias aos serviços públicos em geral; em acepção operacional, é o desempenho perene e sistemático, legal e técnico, dos serviços do próprio Estado ou por ele assumidos em benefício da coletividade. Numa visão global, a Administração Pública é, pois, todo o aparelhamento do Estado preordenado à realização de seus serviços, visando à satisfação das necessidades coletivas.

Com a publicação da Constituição de 1988, ficaram definidas as atribuições pertencentes à União, ao Estado e aos Municípios, como também os princípios que passaram a governar a Administração Pública. Em seu artigo 37 é explicitado os princípios inerentes a ela: “A Administração Pública direta e indireta de qualquer dos Poderes da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios obedecerá aos princípios da legalidade, impessoalidade, moralidade, publicidade e eficiência” (Brasil, 1988, p. 36).

Com isso, os princípios que regem a Administração Pública têm papel importante na forma que é realizado o gerenciamento das entidades públicas. De acordo com Lima (2007, p. 55-57), tem-se a definição de cada um deles:

- Legalidade: os órgãos e as entidades públicas devem obediência estrita à lei.
- Moralidade: a gestão pública deve pautar-se num código moral de aceitação pública.
- Impessoalidade: não admite tratamentos diferenciados, sendo todos exigidos e atendidos da mesma maneira.
- Publicidade: todos os atos e os fatos da Administração Pública são públicos.

- Eficiência: diferentemente da eficiência considerada no setor privado, a eficiência no setor público pressupõe ações e atividades que contribuam para o bem comum, não apenas para a qualidade aliada á redução de custo. Buscando uma gestão profissional e mais transparente.

Dentro desses conceitos pode-se destacar os princípios que serão abordados neste trabalho, sendo eles, o Princípio da Eficiência e o Princípio da Economicidade.

Ainda no artigo 37 da Constituição Federal de 1988, é definido o Princípio da Eficiência. Neste é estabelecido que a Administração Pública deve atuar com rapidez, perfeição e rendimento, buscando sempre melhores resultados na prestação dos serviços públicos. Ainda afirma que esse princípio exige que os agentes públicos desempenhem suas funções com qualidade, produtividade e economicidade, evitando desperdícios e garantindo a melhor utilização dos recursos disponíveis.

Complementando essa visão, Hely Lopes Meirelles (2003, p. 102) afirma que:

> O Princípio da Eficiência exige que a atividade administrativa seja exercida com presteza, perfeição e rendimento profissional. É o mais moderno princípio da função administrativa, que já não se contenta em ser desempenhado apenas como legalidade, exigindo resultados positivos para o serviço público e satisfatório atendimento das necessidades da comunidade e de seus membros.

Segundo Maria Sylvia Zanella Di Pietro (2002, p. 83),

> O princípio apresenta-se sob dois aspectos, podendo tanto ser considerado em relação à forma de atuação do agente público, do qual se espera o melhor desempenho possível de suas atuações e atribuições, para lograr os melhores resultados, como também em relação ao modo racional de se organizar, estruturar, disciplinar a administração pública, e também com o intuito de alcance de resultados na prestação do serviço público.

Como explicitado anteriormente, em sua definição no *caput*, o Princípio da Eficiência afirma que deve haver economicidade na gestão pública. De acordo com o dicionário Aurélio, economicidade é "qualidade ou o caráter de ser econômico". Na Administração Pública o princípio tem como objetivo a minimização dos gastos públicos, sem comprometimento dos padrões de qualidade. Este refere-se à capacidade de uma instituição gerir adequadamente os recursos financeiros colocados à sua disposição.

Com isso, pode-se afirmar que a Administração Pública busca gerir os recursos de forma mais eficiente, entregando o melhor resultado para a população. Na gestão de transporte não seria diferente, os gestores que compõem essa entidade buscam fornecer aos habitantes da cidade um serviço de qualidade, seja ele voltado a entregas de suprimentos mais rápidas;

atendendo demandas em pontos de difícil acesso; ou com transporte fora de domicílio, entre outros.

Diante disto, o trabalho buscar desenvolver metodologias para determinar as rotas ótimas de distribuição de merenda escolar, possibilitando atender todas as demandas de forma eficiente e que permita uma economia ao município.

1.1.Justificativa

De acordo com o Instituto de Logística e Supply Chain (IOLS, 2024), os custos envolvidos no transporte logístico no Brasi tiveram um aumento de 18,4% no ano de 2023. Baseado nesses dados, é perceptível que o tema de roteirização vem ganhando mais atenção e relevância nas pautas das organizações, indústrias e comércio de modo geral, tendo em vista que toda companhia busca entregar o produto de forma eficaz e eficiente, reduzindo os custos envolvidos nesse processo.

De acordo com Laporte *et al.* (2000), o problema de roteirização consiste em definir roteiros de veículos de modo que minimizem o custo total de atendimento, cada um dos quais iniciando e terminando no depósito ou base dos veículos, assegurando que cada ponto seja visitado exatamente uma vez e a demanda em qualquer rota não exceda a capacidade do veículo que a atende.

Com isso, é possível afirmar que a roteirização traz alguns benefícios para a organização, uma vez que, aplicando-a de maneira eficiente, o gestor pode aprimorar a gestão do tempo e eliminar períodos de ociosidade, que impactam diretamente na qualidade e rapidez da entrega. Ainda, têm-se a otimização dos custos, resultante da definição de rotas ótimas de distribuição, onde a organização tem redução no consumo de combustível e na manutenção dos veículos.

Essa questão é mais latente na Administração Pública, uma vez que há a necessidade da prestação de conta junto a população e órgãos regulamentadores. Dado isto, é requerido uma boa gestão dos gastos públicos para que não haja incorreções quanto ao que afirma os Princípios da Eficiência e da Economicidade. Como conceituado por Hauner e Kyobe (2010), Mukokoma e Dijk (2013), Peña (2008), a eficiência da gestão pública consiste em otimizar o uso de recursos, obtendo a máxima oferta possível de bens e serviços públicos em termos quantitativos e qualitativos.

O município analisado neste estudo apresenta um gasto expressivo, na ordem de milhares de reais, com o gerenciamento da frota de veículos. Dentre as secretarias que mais demandam recursos, destaca-se a Secretaria de Educação, que atende a um número elevado de alunos, professores e funcionários. Os veículos dessa secretaria realizam trajetos recorrentes, como a coleta de alunos em pontos fixos e a entrega de merendas nas instituições de ensino. Dito isso, a definição de rotas impactaria diretamente na proporção dos gastos do município.

Sendo assim, fica evidente o quanto a roteirização é benéfica as organizações, principalmente na gestão dos recursos públicos. Além do que, tendo um bom gerenciamento de rotas é possível alcançar um melhor desempenho operacional e sucessivamente, uma qualidade maior em suas entregas.

1.2.Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

O presente trabalho busca modelar e resolver o problema de determinação das rotas ótimas da distribuição de merenda escolar em Escolas em Tempo Integral (ETIs) de determinado município do Agreste Pernambucano, que auxiliará na tomada de decisão e visa uma redução dos gastos públicos. Com isso, se adequando aos Princípios da Eficiência e Economicidade, definidos na constituição de 1988.

1.2.2. Objetivos Específicos

São considerados objetivos específicos do presente trabalho:

- Entender a dinâmica de distribuição de merenda do município;
- Construir um modelo matemático para determinar as rotas ótimas de distribuição de merenda nas ETIs;
- Definir as rotas ótimas através de ferramentas computacionais;
- Construção de modelo para futuras aplicação em outras categorias de instituições de ensino do município.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo é apresentado o referencial teórico utilizado para nortear esse trabalho. Os temas abordados são: Pesquisa Operacional, Programação Matemática, Roteirização, Teorema dos Grafos, Caixeiro Viajante e *Solver Microsoft Excel*.

2.1.Pesquisa Operacional

Pode-se datar o surgimento da Pesquisa Operacional (PO) em 1938, na Inglaterra, durante a Segunda Guerra Mundial, com o objetivo de solucionar o problema da escassez dos recursos militares. Visando encontrar a melhor solução foi reunido um grupo de cientistas multidisciplinares, que utilizarão recursos matemáticos para encontrar tal solução, denominada solução “ótima”.

No livro Introdução a Pesquisa Operacional Frederick S. Hillier e Gerald J. Lieberman (2013, p. 2) afirmam que:

> Quando a guerra acabou, o sucesso da PO no empreendimento bélico despertou interesse na sua aplicação fora do ambiente militar. À medida que se ia desenrolando o *boom* industrial pós-guerra, os problemas causados pela crescente complexidade e especialização nas organizações foram novamente ganhando o primeiro plano. Tomava-se aparente para um número cada vez maior de pessoas, entre as quais consultores de negócios que trabalharam nas equipes de PO ou em conjunto com elas durante a guerra, que estes foram basicamente os problemas enfrentados pelos militares, porém, agora, em um contexto diferente.

Segundo os autores, a Pesquisa Operacional é uma abordagem cientifica para a tomada de decisões, que busca estruturar problemas complexos e encontrar soluções ótimas. (Hillier e Lieberman, 2013). Segundo Taha (1997, p. 1), a Pesquisa Operacional “É o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões com relação a operações sob seu controle”.

Complementando as visões descritas anteriormente, Churchman *et al.* (1971, p. 6), ratificam que a Pesquisa Operacional traz uma abordagem multidisciplinar para a solução dos problemas, embasada em sua afirmação “A Pesquisa Operacional é a aplicação do método científico, por equipes multidisciplinares, a problemas envolvendo o controle de sistemas organizados de forma a fornecer soluções que melhor interessam a determinada organização”.

Moreira (2016, p. 2) traz uma visão mais robusta, afirmando que:

> Formalmente, Pesquisa Operacional pode ser definida como o conjunto de técnicas que faz uso do método científico para auxiliar as pessoas a tomarem decisões. Entretanto, mais do que uma disciplina acadêmica, lecionada em cursos de graduação e pós-graduação, a pesquisa operacional tem sido amplamente empregada como

> abordagem gerencial de resolução de problemas nos mais diversos setores da sociedade mundial.

Dentro dessa abordagem, a solução ótima é o resultado que busca maximizar ou minimizar uma Função Objetivo, respeitando restrições definidas. Chvátal (1983, p. 29), no livro *Linear Programming*, afirma que "uma solução ótima de um problema de Programação Linear ocorre quando não há outra solução factível com um valor melhor da função objetivo".

Se entende como Função Objetivo (FO) a expressão matemática que traz o objetivo que se busca alcançar com a solução do problema de otimização, seja este de maximização ou minimização. Chiang (1984, p. 370) define a FO "como a relação matemática que expressa o valor a ser otimizado, podendo representar lucro, custo, tempo, entre outras variáveis relevantes ao problema" e Bazaraa *et al.* (2006, p. 6) afirmam que "a Função Objetivo é uma função matemática que descreve quantitativamente o critério de desempenho que se deseja otimizar, sujeita a restrições".

Pode-se explicitar que restrições são funções de igualdade ou desigualdade sobre as variáveis do problema que define as limitações impostas pelo contexto do problema real. De acordo com Rao (2009, p. 28) as restrições são "condições impostas às variáveis de decisão de um problema de otimização, que restringem a região factível na qual a solução ótima pode ser encontrada". Corroborando com o conceito anterior, Bazaraa *et al.* (2006, p. 6) afirmam que "restrições representam requisitos ou limitações impostas ao problema, geralmente derivadas de fatores físicos, econômicos ou de recursos".

Os problemas de otimização são formados por elementos desconhecidos que precisam ser solucionados para encontrar a resolução do problema de estudo, estes denominados variáveis de decisão. Hillier e Lieberman (2013, p. 29) afirmam que "as variáveis de decisão representam as escolhas disponíveis para o tomador de decisões e são usadas para modelar matematicamente o problema". Para suplementar a ideia expressa, Winston (2003, p. 102) define as variáveis como "quantidades que precisam ser determinadas para resolver um problema de otimização e que influenciam diretamente o valor da Função Objetivo".

A formulação matemática genérica de um problema de otimização é:

$$\max f(x), sujeito\ a\ g(x)\ e\ h(x) \tag{1}$$

Onde:

- $x \in R$ é o vetor de variáveis de decisão;

- $f(x)$ é a Função Objetivo, que se deseja maximizar (ou minimizar, alterando o sinal ou a formulação);
- $g(x) < 0$ são as restrições de desigualdade;
- $h(x) = 0$ são as restrições de igualdade.

Quanto a estrutura, Taha (1997) declara que o objetivo do modelo é uma função matemática que representa o que se deseja alcançar com uma decisão específica. As restrições, por sua vez, são as relações matemáticas entre as variáveis do problema e as limitações do cenário do processo decisório. Além disso, um critério é uma função matemática que avalia o desempenho de uma ação ou preferência.

De acordo com Oliveira (2010, p. 154), a Pesquisa Operacional é dividida em seis fases. As fases da PO são:

1- formulação do problema;
2- construção do modelo;
3- cálculo do modelo;
4- teste do modelo e da solução;
5- controle das soluções; e
6- implantação e acompanhamento.

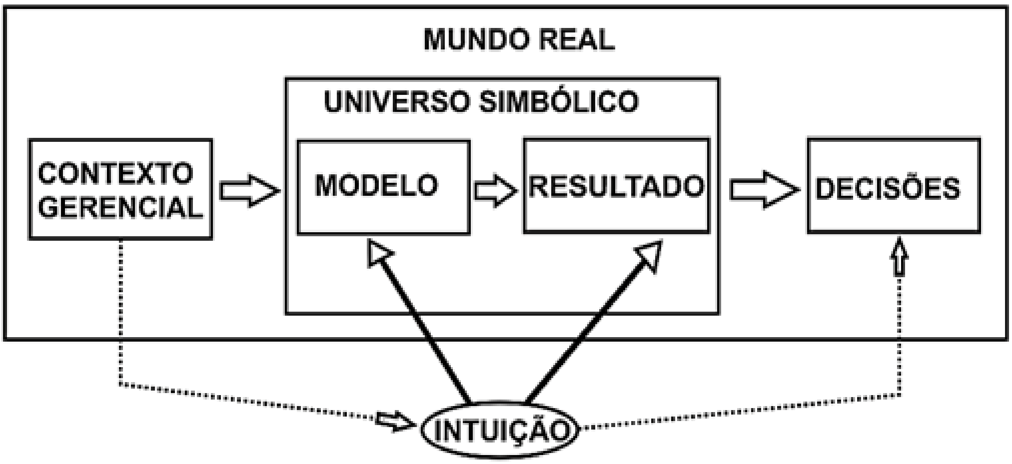
Na fase da formulação do problema, tem-se a identificação e definição da questão de estudo, ou seja, a definição dos objetivos, restrições e variáveis envolvidas. Segundo Hillier e Lieberman (2010, p. 25), "a formulação do problema é crucial para garantir que os esforços de modelagem estejam focados nos objetivos corretos". É importante que a formulação do problema seja uma etapa rigorosa e bem definida, tendo em vista que é a partir desta que toda a solução é embasada, para isto é necessário responder algumas indagações, sendo elas:

a) Quem tomará as decisões?
b) Quais são os seus objetivos?
c) Que aspectos estão sujeitos ao controle de quem decide (variáveis de decisão) e quais as limitações a que estão sujeitas essas variáveis (restrições)?
d) Quais os aspectos que estão envolvidos no processo que fogem ao controle de quem decide?

Na fase seguinte, um modelo matemático e/ou computacional é desenvolvido para representar a situação real. É utilizado técnicas que fazem parte dos ramos de estudo da Pesquisa Operacional para desenvolver o mesmo. De acordo com Taha (2017, p. 6) "um modelo é uma representação simplificada da realidade que captura os elementos essenciais do problema".

Com isso, um modelo matemático que traz a representação de um problema real é expresso em incógnitas, que visam descrever a essência da questão em estudo. Ainda nesta etapa, são levadas em consideração as técnicas que vão e virão a ser utilizadas durante a solução do problema, tendo em vista que pequenas alterações durante a modelagem podem ser facilitadoras da etapa de solução. A Figura 1 ilustra o processo de modelagem dos problemas. Nela, é possível perceber que a modelagem representa uma parte do problema do mundo real, e que este processo desempenha um papel crucial no auxílio à tomada de decisão.

Figura 1 – Processo de modelagem/tomada de decisão



Fonte: BWS Consultoria (2011).

No cálculo do modelo, são utilizadas técnicas analíticas e/ou computacionais para solucionar o problema modelado na fase anterior. Wagner (2009, p. 50) afirma que “a obtenção de solução pode envolver métodos exatos, heurísticos ou aproximações, dependendo da complexidade do modelo e dos recursos disponíveis”. Nesta fase é fundamental identificar qual método de solução que se adequa mais facilmente ao problema de estudo. Tendo em vista que a utilização de um método/software inadequado pode tornar o processo de resolução cansativo e complicado, além disso, pode tendenciar a resultados errôneos. Ao concluir esta fase, é encontrada a solução “ótima”.

No momento que é determinada a solução, aplica-se ao problema real, para validar se o resultado encontrado satisfaz os parâmetros definidos. Esse processo ocorre na fase de teste de modelo e de solução. Para Hillier e Lieberman (2010, p. 40) “a validação do modelo é um passo essencial para garantir que ele representa adequadamente a realidade e pode fornecer recomendações uteis”. Durante este processo de teste pode se identificar deficiências no modelo que necessitam de correções, sejam elas de refinamento de alguns aspectos, considerar aspectos omitidos ou até simplificações no modelo.

Alguns autores consideram a última fase como sendo a implementação, que nada mais é do que aplicação da solução encontrada na prática. Segundo Charnes e Cooper (1961, p. 154), “a implementação efetiva de soluções de PO requer envolvimento organizacional e suporte gerencial para garantir a adoção e sucesso das recomendações”. Esta, é considerada uma atividade crítica, tendo em vista que apenas nessa fase os resultados do estudo serão obtidos. Neste momento é requerido o envolvimento de toda a equipe de operação e a equipe que irá utilizar, para que alcance o sucesso na implementação.

No entanto, outra parte dos autores considera como fase final o acompanhamento e monitoramento dos resultados. Ackoff (1979, p. 35) destaca que “a Pesquisa Operacional não é um processo estático, mas sim dinâmico, exigindo ajustes contínuos à medida que novas informações surgem”. Portanto, durante esta fase final é importante fazer o acompanhamento dos resultados e, caso necessário, a revisão do modelo ao surgir novas informações pertinentes.

Desta forma, pode-se dizer que a Pesquisa Operacional é uma ciência multidisciplinar que corrobora para a tomada de decisão. Baseada na utilização de métodos matemáticos e auxílio da modelagem para encontra a solução “ótima”, que dará apoio na resolução de problema complexos de situações hipotéticas e reais. Essa ideia é apoiada por Churchman *et al.* (1957, p. 3), que afirmam que “a Pesquisa Operacional é uma abordagem científica para a tomada de decisões, baseada na formulação matemática de problemas reais”.

Dentre os diversos métodos apresentados na literatura que compõem a Pesquisa Operacional, destaca-se a Programação Matemática, uma poderosa ferramenta utilizada para a modelagem e solução de problemas complexos de otimização. A seguir, serão explorados seus principais conceitos.

2.2.Programação Matemática

Para Hillier e Lieberman (2010, p. 102), a Programação Matemática (PM) é “um conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para encontrar a melhor solução possível para um problema de tomada de decisão, sujeita a restrições”. Complementando essa ideia, Winston (2004, p. 100) destaca que a Programação Matemática “envolve a modelagem dos problemas de otimização usando funções matemáticas e restrições para descrever relações entre variáveis de decisão”.

Corroborando com o afirmado no parágrafo anterior pelos autores, pode-se dizer que a PM é uma área da matemática aplicada voltada a busca de soluções ótimas para problemas que necessitam tomar uma decisão, a qual se dá por meio de formulação matemática e de otimização. A Programação Matemática se divide em subáreas, sendo elas: Programação Linear, Programação Não Linear, Programação Inteira e Programação Dinâmica. As subáreas da Programação Matemática serão abordadas nos subitens a seguir.

2.2.1. Programação Linear

Segundo Moreira (2008), a Programação Linear (PL) é um modelo matemático criado para resolver tipos de problemas que possam ser demonstradas por equações e inequações lineares.

Hillier e Lieberman (2013, p. 42) demonstram toda a abrangência da PL ao afirmarem que:

> A Programação Linear usa um modelo matemático para descrever o problema em questão. O adjetivo linear significa que todas as funções matemáticas nesse modelo são necessariamente funções lineares. A palavra programação, nesse caso, não se refere à programação de computador; ela é, essencialmente, um sinônimo para planejamento. Portanto, a Programação Linear envolve o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atinja o melhor objetivo especificado (de acordo com o modelo matemático) entre todas as alternativas viáveis.

Na ótica de Scalabrin *et al.* (2006, p. 56), a PL é tida como o campo mais vasto, o qual ele define como uma variante de aplicação generalizada a decisão. O termo “programação” deve-se entender como “planejamento” e a qualificação “linear” deixa antever como as relações matemáticas utilizadas são funções lineares.

Dessa maneira Fávero e Belfiore, (2012, p. 17) mencionam que na PL “[...] a função objetivo e todas as restrições são representadas por funções lineares. Adicionalmente, as variáveis de decisão devem ser todas contínuas, ou seja, devem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais.”

Ainda segundo Fávero e Belfiore (2012) a PL é um modelo determinístico, onde todas as variáveis envolvidas em sua concepção são conhecidas e constantes e esses modelos são resolvidos por métodos analíticos que geram a solução otimizada.

De acordo com Caixeta-filho (2004, p. 11) qualquer que seja o algoritmo, a formulação do problema a ser resolvido pela Programação Linear segue os seguintes passos básicos:

> a) deve ser definido o objetivo básico do problema - que a princípio deve ser único - com respeito a otimização a ser perseguida. Por exemplo: maximização de lucro, ou de eficiência, ou de bem-estar social; minimização de custos, ou de tempos, ou de

> perdas, e assim por diante. Tal objetivo será assim representado por uma função objetivo, a ser maximizada ou minimizada;
>
> b) para que essa função objetivo possa ser matematicamente especificada, as alterativas possíveis para a ocorrência de tal otimização - as chamadas variáveis de decisão envolvidas - deverão ser definidas. Por exemplo, os tipos de cultura e/ou área a serem explorados; [...] as classes de investimento a disposição de um tomador de decisão etc. Normalmente, assume-se que todas essas variáveis possam assumir somente valores positivos;
>
> c) tais variáveis podem estar sujeitas a uma série de limitações - também conhecidas como restrições do problema -, normalmente representadas por inequações. Por exemplo, limitações referentes à área total disponível.

Complementando, Moreira (2008) aponta as características de um modelo em PL: (1º) a ideia é maximizar ou minimizar o resultado do ajuste de variáveis. Esse ajuste é inserido na forma de uma expressão matemática, chamada de Função Objetivo; (2º) há certa necessidade de recursos, próprios da estruturação problemática; (3º) esses recursos são restringidos, ou seja, suas quantidades sofrem restrições em relação a: determinados valores, normas legais, políticas internas e até do consumidor.

2.2.2. Programação Não-Linear

Segundo Nash e Sofer (1996), o modelo de Programação Não-Linear (PNL) consiste na otimização de uma função-objetivo sujeita ou não a restrições, onde as funções de restrições podem ser não-lineares e/ou lineares. Corroborando com essa definição, Firmino (2004) afirma que essa programação é caracterizada por não possuir um único algoritmo para resolução de seus problemas.

Cirilo (1997) explicita em suas ideias que o maior problema desse tipo de programação está na incerteza de que a solução obtida para o problema seja realmente a melhor, isto é, muitas vezes chega-se a um ótimo local ao invés de um ótimo global, sendo este um fato inerente à natureza não-linear do problema; enquanto que a sua grande vantagem é a abrangência, isto é, uma vez elaborado o modelo matemático do problema a otimizar, com sua função-objetivo e suas restrições, normalmente nenhuma simplificação será necessária em termos de formulação.

Ainda de acordo Cirilo (1997), a PNL é classificada pela junção dos métodos que utilizam técnicas analíticas e técnicas de busca numérica. Ela determina que as técnicas analíticas procuram determinar soluções ótimas, resolvendo sistemas de equações que utilizam derivadas. Como exemplos, têm-se: Método dos Multiplicadores de Lagrange, Programação Geométrica, Método de Cálculo Diferencial. Já de acordo com ele, as técnicas de busca numérica usam informações passadas em um processo iterativo, gerando melhores soluções no processo de otimização. Essas técnicas permitem o emprego de métodos numéricos para resolver problemas dos quais não se conhece solução analítica.

2.2.3. Programação Inteira

Para Winston (1994), a Programação Inteira (PI) é um caso excepcional de Programação Linear onde uma ou mais variáveis de decisão são restringidas a assumir apenas valores inteiros. Complementando essa visão, Hillier e Lieberman (2010), consideram a Programação Inteira como uma extensão da Programação Linear, na qual as soluções devem ser inteiras. Eles enfatizam que devido a essa restrição, a complexidade dos problemas aumenta significativamente em comparação com a Programação Linear continua.

A Programação Inteira é voltada para problemas que ao modelar geralmente se busca escolher algumas opções dentro de uma população finita de alternativas. Neste caso, os problemas do tipo sim ou não estão dentro dos possíveis problemas de PI. Com relação a este tipo, o problema também é chamado de binário. Ou seja, as variáveis destes problemas só podem assumir dois valores ou estados, normalmente 0 ou 1, sendo o 0 relacionado à opção negativa (não fazer, ou ausente) e o 1 à opção positiva (fazer, ou presente).

Segundo Korte e Vygen (2008), problemas que envolvem a Programação Inteira são mais difíceis de solucionar do que os de Programação Linear. Dado que para resolver PLs existem algoritmos de uso geral que são computacionalmente eficientes, como os métodos Simplex e de Pontos Interiores, algo que não se aplica na solução de PIs. Os autores complementam a ideia explicitando quatro características, duas quanto à aplicação e duas quanto à qualidade da solução, presentes nos métodos de solução para PIs:

- Uso Geral: podem resolver qualquer PI, mas são altamente ineficientes do ponto de vista computacional e se aplicam apenas a problemas de pequeno porte;
- Uso Especial: são formulados para resolver um tipo particular de PI de forma muito mais eficiente;
- Ótimo: um algoritmo ótimo é aquele que garante matematicamente que a solução ótima pode ser encontrada;
- Heurística: os algoritmos heurísticos são capazes de encontrar boas soluções factíveis, geralmente próximas do ótimo, com boa eficiência computacional. Também podem encontrar o ponto ótimo, entretanto não há garantias de que isso aconteça sempre.

2.2.4. Programação dinâmica

A Programação Dinâmica deve ser aplicada em situações em que para encontrar a solução ótima é necessário a criação e resolução de subproblemas, ou seja, ela consiste na quebra do problema maior em subproblemas que se sobrepõem, e obedecem a propriedade de subestrutura ótima. Dentro disto, a técnica mais usada em problema de Programação Dinâmica é a memorização, tendo em vista que sem ela, pode ocorrer muitos recálculos.

Segundo Cormen (2019, p. 344), a aplicação de Programação Dinâmica é viável em problemas que são:

> Em geral, aplicamos a Programação Dinâmica a problemas de otimização. Tais problemas podem ter muitas soluções possíveis. Cada solução tem um valor e desejamos encontrar uma solução com o valor ótimo (mínimo ou máximo). Denominamos tal solução "uma" solução ótima para o problema, ao contrário de "a" solução ótima, já que podem existir várias soluções que alcançam o valor ótimo.

Ainda segundo o autor, subestrutura ótima ocorre quando soluções ótimas para um problema incorporam soluções ótimas para subproblemas relacionados, que podemos resolver independentemente (Cormen *et al.*, 2009).

Para solução dos problemas de Programação Dinâmica, Ian Parberry (1995, p. 87) afirma que "[...] Em vez de resolver subproblemas recursivamente, resolva-os sequencialmente e armazene suas soluções em uma tabela. O truque é resolvê-los na ordem certa para que sempre que a solução de um subproblema for necessária, ela já esteja disponível na tabela."

Corroborando, Cormen *et al.* (2009, p. 296), afirma que para elaborar uma solução de problema utilizando a Programação Dinâmica, segue-se uma sequência de quatro etapas. São essas:

- A caracterização de uma subestrutura ótima;
- A definição de seu valor recursivamente;
- O cálculo deste valor;
- A construção da solução ótima a partir destes cálculos.

Ainda Segundo Cormen *et al.* (2009, p. 298), para definir uma subestrutura ótima é necessário seguir os seguintes passos:

- A solução do problema deve consistir em tomadas de decisão e essa decisão produz um ou mais subproblemas a serem resolvidos;
- É necessário supor que para o dado problema exista uma solução ótima;
- Determinar quais subproblemas decorrem a partir da solução ótima e caracterizar melhor o espaço de subproblemas resultante;
- Demonstrar que, dentro de uma solução ótima para o problema, todas as soluções de subproblemas usadas dentro deste são ótimas.

Em outras palavras, é necessário validar se o problema em estudo pode ser decomposto em subproblemas que possuam o mesmo tipo e se a solução ótima que iremos encontrar nos subproblemas pode ser combinada na solução ótima do problema raiz.

2.3.Roteirização

A roteirização de veículos pode ser definida como a busca para atender demandas que estão geograficamente dispersas, sendo que, para se atender essas demandas existe uma distância e um custo envolvido. Para atender o objetivo, faz-se o uso da frota veicular disponível e que ao concluir retorna a um ponto central. A roteirização tem como objetivo determinar quais rotas trazem economia ao atender as demandas definidas, respeitando as restrições, tais como capacidade dos veículos, duração das rotas, janelas de tempo, duração da jornada de trabalho, entre outros.

Segundo Novaes (2007, p. 283) “A roteirização tem como um dos objetivos principais propiciar um serviço de alto nível aos clientes, mas mantendo os custos operacionais e de capitais tão baixos quanto possível”. Corroborando com essa visão Belfiore *et al.* (2006), afirma que o objetivo da roteirização é determinar rotas de veículos que minimizem os custos de transporte, de modo que as demandas de todos os clientes sejam atendidas e as restrições de capacidade dos veículos sejam respeitadas.

Trazendo um complemento, Cunha (2000) afirma que a roteirização pode ser caracterizada por n clientes (representados numa rede de transportes por nós ou arcos) que deverão ser servidos por uma frota de veículos, sem apresentarem restrições ou a ordem em que deverão ser atendidos.

Partyka e Hall (2000) definem um problema de roteirização por três fatores: decisões, objetivos e restrições. As decisões envolvem a alocação de um grupo de clientes que deve ser visitado por um grupo de veículos envolvendo uma sequência nas visitas. Como objetivo o projeto deve atender os serviços no alto nível solicitado pelo cliente. Para que isso aconteça devem-se respeitar as restrições.

Para Belfiore *et al.* (2006) a cada instante t, são tomadas decisões de roteamento de veículos e reabastecimento de estoque dos clientes. As decisões são tomadas diariamente. O custo de uma decisão no instante t pode incluir:

- Custo de transporte c_{ij} dos arcos (i, j);
- Lucro: se for entregue uma quantidade Q_{ti} ao cliente i no instante t, o vendedor tem um lucro de $L_I(Q_{ti})$;
- Penalidade de falta $p_i(s_{ti})$ se a demanda s_{ti} do cliente i no dia t não for atendida. A demanda não atendida é tratada como demanda perdida e não atraso na entrega;

- Custo de estoque $c_{est.i}$ que pode ser definido como $c_{est.i}(I_{ti} - 1 + Q_{ti} - v_i,$ sendo que: $I_{ti} - 1$ – nível de estoque do cliente i no dia anterior. Q_{ti} – quantidade entregue ao cliente i no dia t. v_i – demanda diária do cliente i.

Ballou (2006, p. 123) destaca oito princípios como diretrizes para o desenvolvimento de boas rotas e cronogramas. São eles:

1- Carregar caminhões com volumes destinados a paradas que estejam mais próximas entre si. Os roteiros dos caminhões devem ser organizados em torno do agrupamento de paradas próximas umas das outras a fim de minimizar o tráfego entre elas e também o tempo total em trânsito nesse roteiro.
2- Paradas em dias diferentes devem ser combinadas para produzir agrupamentos concentrados. Elas devem ser segmentadas em problemas de roteirização e programações diferentes para cada dia da semana. Os segmentos diários programados devem evitar a superposição dos agrupamentos de paradas. Isso ajuda a minimizar o número de caminhões necessários para servir todas as paradas e a minimizar tempo de viagem e a distância que percorrerão durante a semana.
3- Iniciar os roteiros a partir da parada mais distante do depósito. Uma vez identificada a parada mais distante, é preciso selecionar as paradas em torno dessa parada-chave que completam a capacidade do caminhão a ser utilizada.
4- O sequenciamento das paradas num roteiro de caminhões deve ter forma de lágrima. As paradas devem ser sequenciadas de maneira a não ocorrer nenhuma superposição entre elas.
5- No roteiro ideal, devem-se utilizar veículos com capacidade suficiente para abastecer todas as paradas de um roteiro, minimizando a distância ou tempo total percorrido para servir todas as paradas.
6- As coletas devem ser feitas, tanto quanto possível, ao longo do andamento das entregas a fim de minimizar o número de superposições de roteiros que tende a ocorrer quando tais paradas são servidas depois da realização de todas as entregas.
7- Paradas isoladas de pontos de entregas, especialmente aquelas de baixo volume, são servidas ao maior custo de tempo do motorista e despesas do veículo. A utilização de veículos menores para cuidar dessas paradas pode revelar-se mais econômica, dependendo da distância e dos volumes envolvidos. A utilização de transporte terceirizado é uma boa alternativa nesses casos.
8- As pequenas janelas de tempo de paradas muito pequenas podem forçar uma sequência de paradas longe do padrão ideal.

Segundo a literatura os problemas de roteirização podem ser de dois tipos: roteirização pura ou combinados de roteirização e programação. Para os problemas de roteirização pura, Bodin *et al.* (1983) afirmam que a definição de roteiros e sequências de atendimentos não depende de condicionantes temporais. Em vez disso, as estratégias de solução são focadas nos aspectos espaciais da localização dos pontos a serem atendidos. Já em contrapartida os autores afirmam que a maioria dos problemas combinados de roteirização e programação se dá nas situações que se tem restrição de janela de tempo (horário de atendimento) e de precedência entre tarefas (coleta deve preceder a entrega e ambas devem estar alocadas ao mesmo veículo).

Na figura 2 é possível ver os principais tipos de problemas de roteirização pura:

Figura 2 – Classificação dos problemas de roteirização pura

Denominação	*número de roteiros*	*localização dos clientes*	*limite de capacidade nos veículos*	*número de bases*	*demandas*
Problema do caixeiro viajante	um	nós	não	uma	determinísticas
Problema do carteiro chinês	um	arcos	não	uma	determinísticas
Problema de múltiplos caixeiros viajantes	múltiplos	nós	não	uma	determinísticas
Problema de roteirização em nós com uma única base	múltiplos	nós	sim	uma	determinísticas
Problema de roteirização em nós com múltiplas bases	Múltiplos	nós	sim	múltiplas	determinísticas
Problema de roteirização em nós com demandas incertas	Múltiplos	nós	sim	uma	estocásticas
Problema de roteirização em arcos com limite de capacidade	Múltiplos	arcos	sim	uma	determinísticas

Fonte: Bodin et al (1983)

Para Christofides (1985, apud Belfiore, 2006) o problema básico de roteirização de veículos é definido como o problema de distribuição no qual veículos localizados em um depósito central devem ser programados para visitar clientes geograficamente dispersos, de modo a atender suas demandas conhecidas. Complementando essa visão, Belfiore (2006) afirma que o problema básico de roteirização ignora um grande número e variedade de restrições adicionais e extensões, que são frequentemente encontradas em situações reais.

De acordo com Cunha (2000), os problemas de roteirização são muitas vezes definidos como problemas de múltiplos caixeiros viajantes com restrições de capacidade e outras restrições que dependem de cada aplicação.

Finalizando, Ballou (2006) afirma que, se adequadamente implantado, este método constitui uma das mais poderosas ferramentas das empresas para garantir um elevado nível de serviço no transporte de seus produtos, enquanto tratam ainda sobre a minimização de custos e diminuição dos tempos.

2.4.Teorema dos Grafos

O surgimento da definição do teorema dos grafos se dá por meio da resolução do problema das Pontes de Königsberg no século XX. A história das pontes é de 300 anos atrás. Königsberg foi uma importante cidade da Prússia, localizada ao norte da Europa, próximo à costa do Mar Báltico, e que hoje é chamada de Kaliningrado. A cidade possuía duas ilhas cortadas pelo Rio Pergel e, na época, seis pontes as ligavam às margens e outra fazia a ligação das duas ilhas entre si. Por volta de 1735, os moradores de Königsberg se desafiaram com o seguinte problema: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida. Na época, foi o matemático Leonhard Euler quem resolveu o enigma, demonstrando ser impossível alcançar esse resultado.

Compilando as definições dadas por Wallis (2007), Neto (2012) e Lovász *et al.* (2012) em suas obras, o teorema dos grafos pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

Definição 1.1 Um grafo (simples) G consiste em um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados vértices, juntamente com um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices; os elementos de $E(G)$ são chamados de arestas. Podemos representá-lo por $G = (V; E)$, onde $V = V(G)$ e $E = E(G)$.

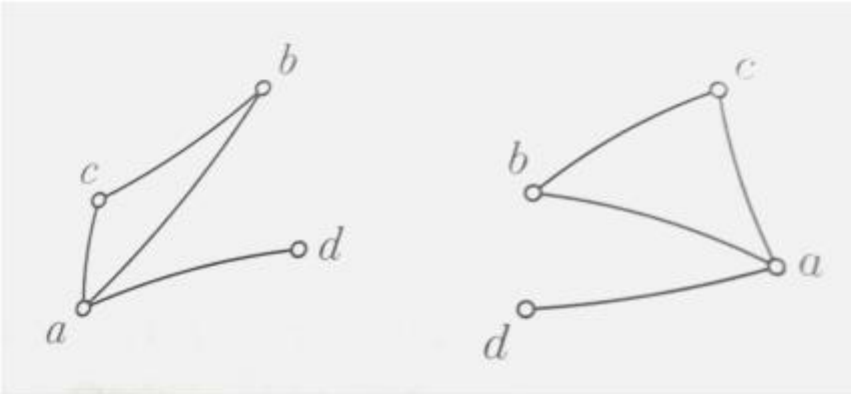
Se $G = (V; E)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são adjacentes se $\{u, v\} \in E$; neste caso, dizemos ainda que a aresta $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v. Podemos denotar a aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv, sempre que não houver perigo de confusão. Se u e v não forem adjacentes, diremos que são vértices não adjacentes de G.

Grafos são geralmente representados por diagramas, onde os elementos de V correspondem a pontos no plano e as arestas de G correspondem a arcos ligando os vértices correspondentes. A figura assim obtida não tem nenhum significado geométrico, seu propósito sendo somente o de representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices de G. Por exemplo, se

$$G = \big(\{a, b, c, d\}; \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\big\}\big) \qquad (2)$$

então G pode ser representado por qualquer um dos diagramas abaixo, haja vista que ambos encerram as mesmas relações de adjacência.

Figura 3 – Representação de um grafo



Fonte: M. S. Gildson (2014)

Definição 1.2: Um **grafo trivial** é um grafo no qual $G = (V; \emptyset)$, ou seja, é um grafo que possui n vértices, podendo ser representado por conjunto de n pontos no plano, sem quaisquer arcos (arestas).

Definição 1.3: Um **grafo completo** é um grafo que possui n vértices, com dois quaisquer deles conectados por um arco. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n; em particular, K_n tem exatamente $\binom{n}{2}$ arestas

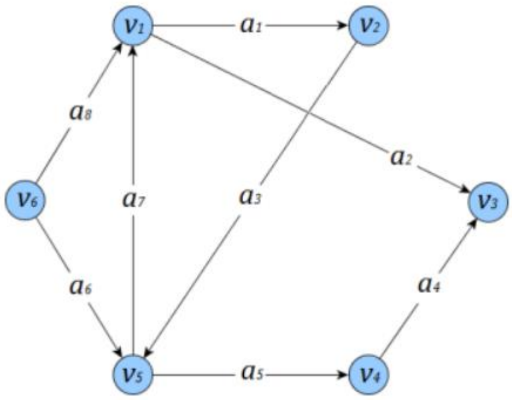
2.5.Caixeiro Viajante

De acordo com Goldbarg & Luna (2000), o problema do Caixeiro Viajante ou TSP (*travelling salesman problem*) é um dos mais tradicionais problemas de programação matemática e pode ser aplicado a diversas áreas.

Segundo Wolsey (1998) Esse modelo tem como objetivo determinar um caminho de custo mínimo, no qual o caixeiro viajante deve visitar cada ponto exatamente uma vez e então retornar ao ponto inicial.

A Figura 4, mostrada a seguir, ilustra o problema do Caixeiro Viajante:

Figura 4 – Problema do Caixeiro Viajante



Fonte: Adaptado de Christofides (1975)

Para a modelagem da programação matemática do caixeiro-viajante, segundo Jamilson (2009), podemos considerar um grafo no qual $G = (Cidades,\ A)$ onde Cidades refere-se ao conjunto de cidades (clientes) e A ao conjunto de arcos ligando duas cidades, ou seja, $A = \{(i,j)|i \neq j\}$. Temos, também, que dij refere-se distância da cidade i para a cidade j.

a) As variáveis de decisão são:

- d_{ij}: que é uma variável binária que assume o valor 1 se o arco (i,j) for utilizado e 0 caso não o utilize.
- f_{ij}: referente a quantidade de fluxo enviada da cidade i para a cidade j.

b) A Função Objetivo

$$min \sum_{i \in Cidades} \sum_{j \in Cidades} d_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

c) As restrições são:

- À cada cidade k só chega um arco:

$$\sum_{i \in Cidades} x_{ijk} = 1, \forall k \ \in Cidades \tag{4}$$

- De cada cidade k só sai um arco:

$$\sum_{j \in Cidades} x_{kj} = 1, \forall k \ \in Cidades \tag{5}$$

- Eliminação de subciclos:

$$\sum_{i \in Cidades} f_{ik} - \sum_{j \in Ciddes} f_{kj} = 1, \qquad \forall k \in Cidades | k \neq 1 \tag{6}$$

$$f_{ij} \leq (n-1)x_{ij}, \forall i,j \in Cidades \tag{7}$$

- Restrições de não-negatividade:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \, \forall i,j \in Cidades \tag{8}$$

$$f_{ij} \geq 0 \, \forall i,j \in Cidades \tag{9}$$

2.6. Solver Microsoft Excel

O Solver é um suplemento do Microsoft Excel usado para teste de hipóteses. Essa ferramenta é utilizada para localizar um valor ideal (máximo ou mínimo) para uma fórmula numa célula, denominada célula de objetivo, sujeito a restrições ou limites, nos valores de outras células de fórmula numa folha de cálculo. O Solver trabalha com um grupo de células, chamadas variáveis de decisão ou simplesmente de células variáveis, usadas no cálculo das fórmulas nas células de objetivo e de restrição. Com isso, este ajusta os valores nas células variáveis de decisão para satisfazer aos limites sobre células de restrição e produzir o resultado que você deseja para a célula objetiva.

Segundo Ragsdale (2014), as etapas para implementação de um problema de otimização linear em uma planilha do Excel, visando a utilização do Solver, são:

I. Definição do Problema

Antes de mais nada, é necessário entender o problema de otimização. A primeira etapa é a tradução do problema em termos matemáticos, com uma função objetivo (que pode ser maximizar ou minimizar) e restrições (que podem ser de igualdade ou desigualdade).

II. Modelagem no Excel

Para implementar um problema de otimização linear no Excel, a primeira ação é configurar as células para representar os parâmetros do modelo, como variáveis de decisão, coeficientes da função objetivo e os valores das restrições.

- Função Objetivo: Definir uma célula para a função objetivo, que normalmente será uma célula que calcule a soma ponderada das variáveis de decisão.
- Restrição: As células que representam as restrições devem ser configuradas de acordo com os coeficientes das variáveis e os limites das desigualdades ou igualdades.

III. Uso do Solver

O Solver é a ferramenta do Excel que permite resolver problemas de otimização linear. Para usá-lo, é necessário:

- Definir as variáveis de decisão: O Solver precisa saber quais células podem ser alteradas para otimizar a função objetivo.
- Definir a função objetivo: O Excel precisa saber qual célula contém a função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada.
- Definir as restrições: As restrições devem ser configuradas como condições para as células de decisão, assegurando que os valores dessas células satisfaçam as condições do problema.

IV. Execução do Solver

Após configurar todos os parâmetros, o usuário deve rodar o Solver para encontrar a solução ótima para o problema. O Solver tenta ajustar as variáveis de decisão de modo a otimizar a função objetivo, levando em consideração as restrições impostas.

V. Análise de Sensibilidade

Uma vez que o Solver encontra uma solução, o próximo passo é analisar como as alterações nas variáveis do problema, como os coeficientes da função objetivo ou os limites das restrições, afetam a solução. O Excel fornece ferramentas para gerar uma análise de sensibilidade, que pode ser útil para entender a robustez da solução.

VI. Ajustes e Iteração

Dependendo dos resultados da análise de sensibilidade, pode ser necessário ajustar o modelo ou tentar outras abordagens para refinar a solução. O processo de iteração é uma parte importante da modelagem de problemas de otimização.

Concluindo, o solver é uma ferramenta que traz grandes benefícios para a solução de problemas de otimização, entre eles, economiza de tempo, precisão, reaproveitamento e flexibilidade. Tendo em vista que o mesmo realiza cálculos automaticamente avaliando todos os cenários e retornando a melhor solução. Ainda, este pode ser aplicado em diferentes cenários e dados de entrada.

3. METODOLOGIA

Este tópico descreve os procedimentos metodológicos adotados para alcançar os objetivos pressupostos neste trabalho. O tópico se subdivide da seguinte forma: Classificação da pesquisa e Passos para desenvolvimento da pesquisa.

3.1. Classificação da pesquisa

De acordo com Will (2012), a pesquisa quantitativa permite classificar e realizar análise traduzindo os resultados em números, para serem classificados e consequentemente analisados. Com isso, é possível classificar a pesquisa com relação a abordagem, como quantitativa. Tendo em vista que a mesma busca transformar dados numéricos em informação concisas e objetivas para dar suporte a tomada de decisão.

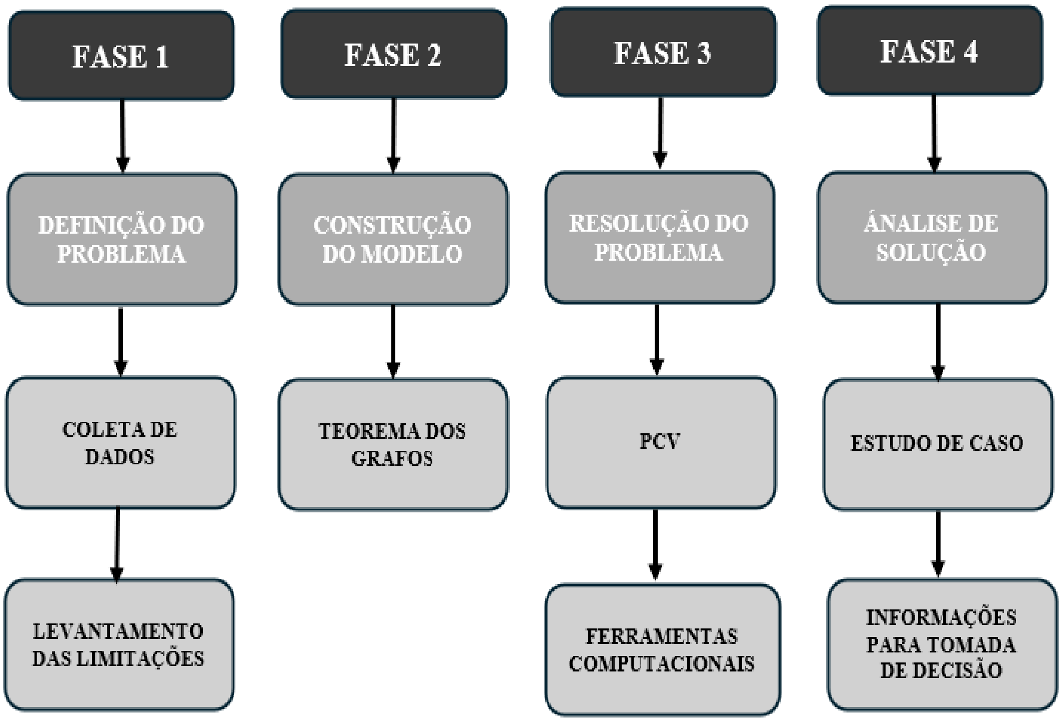
Já com relação a natureza, a pesquisa é tida como aplicada, dado que utiliza teorias e princípios conhecidos e aceitos na comunidade acadêmica para propor uma solução para o problema de distribuição de merenda escolar.

A pesquisa, quanto aos objetivos, pode ser classificada como exploratória, visto que esta se enquadra como um estudo de caso. De acordo com Yin (2001, p. 32): "o estudo de caso é uma investigação empírica de um fenômeno contemporâneo dentro de um contexto da vida real, sendo que os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos".

3.2.Passos para desenvolvimento da pesquisa

Para construção do modelo matemático o autor estabeleceu um passo a passo, conforme apresentado na figura abaixo:

Figura 5 – Fluxograma dos passos de desenvolvimento da pesquisa



Fonte: O autor (2025)

Apresentado as etapas de forma a simplificar e facilitar o entendimento:

Fase 1: Trata da contextualização do problema, que se dá por meio do entendimento do problema, buscando a definição dos objetivos. Assim como, da coleta de dados e do levantamento das limitações.

Fase 2: Nesta, foi realizado a modelagem do problema cm auxílio do Teorema dos Grafos, realizando a identificação das variáveis, a construção da função objetivo e das restrições.

Fase 3: A etapa tem como finalidade a resolução do problema, para obter a/as rotas ótimas que irão facilitar a tomada de decisão e auxiliaram na redução de gastos públicos, O problema foi identificado como Problema do Caixeiro Viajante e foi utilizado ferramentas computacionais para a solução dele.

Fase 4: É a análise da solução, que visa transforma os dados numéricos em instruções operacionais inteligíveis que auxiliaria o dia a dia dos gestores responsáveis pela distribuição de merenda do município.

4. APLICAÇÃO

Tendo em vista os conceitos da Eficiência e Economicidade, já abordados e definidos anteriormente, o presente trabalho busca desenvolver um método que busque definir as rotas ótimas de distribuição de merenda escolar em um município do Agreste Pernambucano, visando trazer a melhor gestão dos recursos públicos.

Com isso, o método desenvolvido na construção deste trabalho foi aplicado no município em questão, onde há 148 instituições de ensino, divididas entre Escolas em Ensino Integral, Escolas de Ensino Regular e Centros Municipais de Educação Infantil que necessitam semanalmente de abastecimento de merenda para proporcionar um bom ambiente aos estudantes. Almejando sempre entregar melhores condições para a população, o governo municipal utiliza 11 caminhões direcionados à distribuição de merenda nas instituições de ensino, dentre estes, seis são caminhões próprios e cinco são locados de uma empresa terceirizada.

O processo de distribuição de merenda no município ocorria de forma precária, dado que não dispunha do *Global Positioning System* (GPS) instalado nos veículos e não dispunha de um sistema de georreferenciamento apurado. Este processo se dava de forma desorganizada, ou seja, os motoristas conheciam as rotas e as faziam da forma que julgavam ser melhor, ocasionalmente ocorrendo escolhas que causavam desperdícios ao município. Ainda dentre as falhas cometidas, havia o hábito de quando uma instituição esquecia de requerer algum alimento, o veículo voltava a esta localidade fora da rota definida para entregar, em muitos casos, uma quantidade mínima de alimento.

Todas essas questões vão contra o que é estabelecido nos princípios que baseiam esse trabalho, levando em conta que geram um desperdício alto nos recursos do município. Tendo em vista que: os caminhões necessitam de combustível para locomoção e é necessário fazer a manutenção preventiva e corretiva dos veículos.

Aspirando uma padronização e controle deste processo, o município concluiu um processo de licitação para contratação de uma empresa para instalação de equipamento de GPS em todos os veículos que compõe a frota. Além disto, uma instituição especializada foi responsável pelo levantamento georreferencial das possibilidades de rotas do município. Detendo estas informações está sendo criado um fluxo padronizado de rotas para a distribuição de merenda escolar nas instituições do órgão, ou seja, estão sendo construídas rotas padronizadas para a distribuição de alimentos que devem ser seguidas pelos motoristas, sem que haja a possibilidade de tomada de decisão destes na escolha de caminhos diferentes.

Com relação ao retrabalho da entrega de alimentos faltante, foi definido um fluxo para que este só ocorra em casos sem possibilidade de solução. Dado que a maioria dos casos se dá porque os gestores das instituições não se atentam a falta dos alimentos, os responsáveis realizaram um estudo e definiram que o fluxo agora se dará da seguinte maneira:

1. Entender o porquê da falta do alimento no pedido feito;
2. Acionar a nutricionista responsável pela unidade e definir junto a ela se existe um alimento no estoque que possa substituir o alimento faltante, nas questões nutricionais. Caso sim, definir essa nova configuração de cardápio enquanto não haja nova entrega. Caso não, retorna a demanda a gerência de merenda.
3. A gerência de transporte estudar a viabilidade de retorno do caminhão, e/ou, se esta unidade está dentro de outra rota definida.

Considerando essas questões o objeto de estudo desta pesquisa foram as Escola em Tempo Integral (ETIs), que somam dez instituições no município, em razão de apresentarem maior demanda de alimentos dentre as 148 unidades de ensino da entidade municipal. As ETIs são escolas onde os alunos permanecem de forma integral, ou seja, estes ficam na escola em dois turnos (das 08:00 às 17:00). Essa medida proporciona a ampliação da jornada de tempo e a priorização das escolas que atendem estudantes em situação de maior vulnerabilidade socioeconômica. Com isso, cabe ao município primordialmente fornecer refeições saudáveis, sendo estas lanche da manhã, almoço e lanche da tarde.

Vale ressaltar que estas escolas estão distribuídas geograficamente por todo o território do município, visando levar um ensino de qualidade ao maior número de jovens/adultos. Dentre as dez instituições, temos nove localizada na zona urbana da cidade, chamada “Sede”, e uma na zona rural, mais precisamente localizada na 3º Distrito.

Os horários que são realizados os aportes dos alimentos nas escolas são determinados pelo horário administrativo do órgão e respeitando o horário de funcionamento das escolas, este sendo definido no intervalo das 08:00 às 16:00 horas. Considerando a logística de carregamento do caminhão é fundamental ter mais cautela por parte dos estivadores (pessoas que prestam serviço ao município em troca de redução penal), para que haja agilidade na execução da tarefa sem que ocorra a distribuição errônea da carga dentro do caminhão, de modo a não misturar os alimentos. Dessa forma, para concluir essa atividade, é necessário em média um período de 15 a 20 minutos. Ademais, o processo de descarregamento em cada ETI leva em média um período igual, tendo em conta que este processo exige mão de obra de cada instituição e que além da retirada dos alimentos, é necessário também realizar a conferência deles e a assinatura da guia de recebimento.

Cada caminhão do município tem capacidade de abastecer cinco escolas por rota, tendo em vista a quantidade de alimentos solicitados por estas instituições e o espaço de armazenagem dos veículos. Contudo, não existe nenhuma restrição com relação ao tempo de permanência dos insumos no caminhão, dado que estes contam com sistema de refrigeração específico para este tipo de atividade. Os gestores participantes da entrevista determinaram que seriam disponibilizados dois caminhões para atender a demanda das instituições de ensino objeto de estudo dessa pesquisa.

Essas informações foram adquiridas por meio da aplicação de questionário não estruturado com os gestores responsáveis pela coordenação dos veículos e da merenda do município, objeto de estudo dessa pesquisa. O questionário foi aplicado para entender questões pertinentes ao funcionamento do plano de distribuição de merenda. Pode ser vista no Quadro 1 as questões que roteirizaram a entrevista.

Quadro 1 – Questionário não estruturado

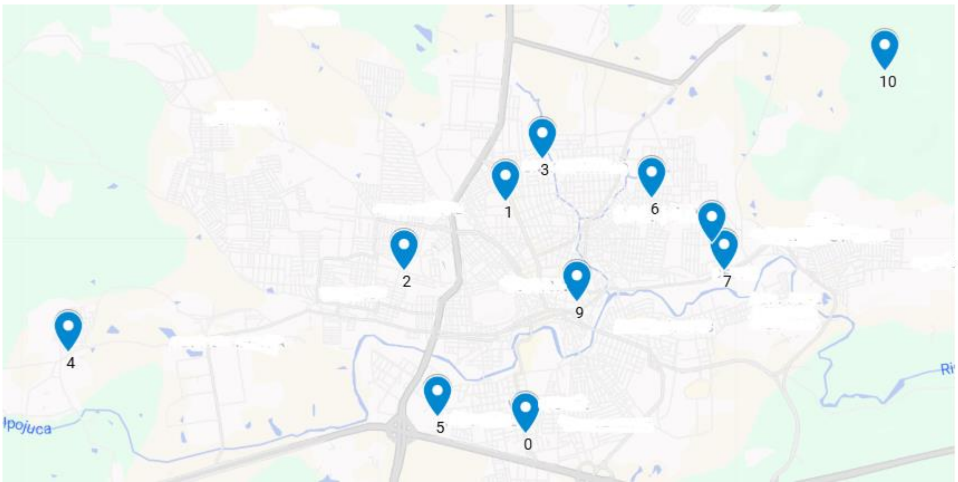
Questionário
Como é realizado a distribuição de merenda no município?
Existe sistema de georreferenciamento de rotas?
Quantas instituições de ensino em funcionamento?
Como é realizado o planejamento das rotas de distribuição?
Quantos veículos são responsáveis por esta atividade?
O município detém de veículos climatizados?
Qual a frequência de abastecimentos das instituições de ensino?
Qual o horário que ocorre a distribuição?
Existe alguma restrição de ordem de distribuição?
Pode haver retrabalho, ou seja, retornar a unidade antes do previsto?
Como é realizado a acomodação dos alimentos no caminhão?
Como é realizado o estudo para os requerimentos dos alimentos?
Um veículo abastece quantas Escolas em Tempo Integral?
Qual o tempo de carregamento e descarga do veículo?
Existe alguma restrição com relação a acomodação dos alimentos?

Fonte: O autor (2025)

Em paralelo foi levantado junto ao arquivo do município dados pertinentes ao desenvolvimento do trabalho, sendo estes: quantidade e endereço referentes as Instituições de ensino da entidade.

Em posse dessas informações, foi iniciado o processo de estruturação e resolução do problema. Tendo como partida o Teorema dos Grafos, onde cada vértice (nó) corresponde a localização de uma Escola em Ensino Integral e cada aresta corresponde a distância entres elas. Com o auxílio da ferramenta *Google My Maps* foi construído um mapa que facilita a visualização da posição de cada escola dentro do território do município.

Figura 6 – Mapa com posição das ETIs



Fonte: *Google My Maps* (2025)

Dando prosseguimento, foi realizada a construção da matriz de distância com o apoio da ferramenta *Google Maps*. Vale destacar que foram considerados os menores valores apresentados por esta ferramenta. Outro ponto que vale a menção, é que as distâncias estão em Quilômetros (Km).

Figura 7 – Matriz de distâncias

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	4,2	3,5	4,5	10,1	1,4	4,7	4,3	5,1	2,4	13,7
1	5,5	-	2,8	1,2	8,7	4,1	3,2	3,9	4,5	2,6	11,7
2	4,1	2,1	-	3,6	6,3	2,7	4,6	4,5	5,2	2,9	14
3	6,5	1,2	3,8	-	9,7	5,1	2,4	3,8	3,7	2,7	10,9
4	8,6	7,7	5,8	8,7	-	6,3	9,5	9,1	9,9	7,2	21
5	1,6	4,1	3,2	4,8	8,3	-	5,3	4,9	5,7	2,9	14,2
6	4,8	3	5	2,4	10,8	5,6	-	1,7	1,4	2,6	9,7
7	4,4	4,2	4,5	3,8	14,4	5	1,7	-	0,75	1,9	10
8	5,3	4,6	5,4	3,9	15,3	6	1,6	0,75	-	2,8	10,9
9	2,6	2,4	2,7	2,5	8,5	3	2,7	2,3	3,1	-	11,7
10	13,8	12,7	14,3	10,9	23,1	15,6	9,7	10,1	10,1	11,6	-

Fonte: O autor (2025)

Vale salientar que o ponto 0 corresponde a Central de Distribuição de Merenda, e os demais são códigos referenciais para as ETIs. Essa Matriz apresentada na Figura 7 é um dado de entrada para a resolução do Problema do Caixeiro Viajante. Esta pode ser representa como $D_{ij}\ \forall i, j\ \in P$ tendo P = (0, 1, ..., n).

Para dar início ao processo de modelagem desse problema, considerado um Problema de Programação Inteira (PI), o autor definiu as variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, se\ (i, j)\ pertecente\ a\ rota \\ 0, c.c \end{cases}, \forall i, j\ \in P \tag{10}$$

Com isso, caso tenha que (i, j) pertencente a rota, significa que o ponto j será visitado imediatamente após o ponto i. Portanto, não faria sentido o vértice (i, i), tendo em vista que não há a possibilidade do ponto i ser visitado após ele mesmo. Uma abordagem que podemos adotar para solucionar esse quesito é tendenciar D_{Ii} ao infinito, ou a um número elevado. Para o problema de estudo, o autor adotou $D_{II}\ = 999999$. A matriz de distância com a utilização desse artificio pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Matriz de distâncias com adoção de artificio

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	999999	4,2	3,5	4,5	10,1	1,4	4,7	4,3	5,1	2,4	13,7
1	5,5	999999	2,8	1,2	8,7	4,1	3,2	3,9	4,5	2,6	11,7
2	4,1	2,1	999999	3,6	6,3	2,7	4,6	4,5	5,2	2,9	14
3	6,5	1,2	3,8	999999	9,7	5,1	2,4	3,8	3,7	2,7	10,9
4	8,6	7,7	5,8	8,7	999999	6,3	9,5	9,1	9,9	7,2	21
5	1,6	4,1	3,2	4,8	8,3	999999	5,3	4,9	5,7	2,9	14,2
6	4,8	3	5	2,4	10,8	5,6	999999	1,7	1,4	2,6	9,7
7	4,4	4,2	4,5	3,8	14,4	5	1,7	999999	0,75	1,9	10
8	5,3	4,6	5,4	3,9	15,3	6	1,6	0,75	999999	2,8	10,9
9	2,6	2,4	2,7	2,5	8,5	3	2,7	2,3	3,1	999999	11,7
10	13,8	12,7	14,3	10,9	23,1	15,6	9,7	10,1	10,1	11,6	999999

Fonte: O autor (2025)

A função objetivo consiste em estabelecer a rota ótima que minimize a distância total, representada matematicamente a seguir:

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} D_{IJ}\, x_{ij} \tag{11}$$

Com relação às restrições que o problema apresenta, temos que os pontos devem ser visitados apenas uma vez. Ou seja, de cada ponto ocorre a saída para um único ponto e em cada ponto ocorre a chegada a partir de um único ponto.

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \tag{12}$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \tag{13}$$

Ainda nas restrições, temos a limitação do tempo disponibilizado para a distribuição da merenda nas instituições de ensino. Como apresentando anteriormente, essas entregas podem ocorrer das 08:00 às 16:00 horas, ou seja, durante oito horas diárias. Porém é necessário eliminar uma hora, caracterizada como o horário de almoço dos motoristas. Faz-se necessário também retirar do tempo, o período de carregar e descarregar o caminhão, que como explicitando antes, é de 15 à 20 minutos. Para melhor adequação será utilizado 20 minutos para os cálculos.

Baseado nessas informações e com o auxílio da ferramenta *Google Maps* foi construído uma tabela com a estimativa do tempo médio de deslocamento.

Figura 9 – Matriz de tempo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	11	9	13	15	4	12	11	12	7	27
1	10	-	7	4	17	7	9	11	12	7	21
2	9	6	-	9	12	6	13	13	14	8	25
3	10	4	8	-	17	8	6	10	9	7	19
4	12	16	11	17	-	11	22	20	22	14	33
5	4	10	88	13	13	-	13	12	14	8	26
6	13	8	12	6	22	13	-	4	4	7	18
7	11	12	13	10	21	12	4	-	3	5	21
8	14	12	14	10	22	14	4	3	-	7	21
9	7	7	8	7	19	9	8	6	8	-	22
10	24	20	25	18	31	22	17	20	19	20	-

Fonte: O autor (2025).

Subsequentemente, foi somado ao tempo encontrado o período necessário para carga e descarga dos alimentos.

Figura 10 – Matriz de tempo com inclusão do período de carga e descarga

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	31	29	33	35	24	32	31	32	27	47
1	30	-	27	24	37	27	29	31	32	27	41
2	29	26	-	29	32	26	33	33	34	28	45
3	30	24	28	-	37	28	26	30	29	27	39
4	32	36	31	37	-	32	42	40	42	34	53
5	24	30	28	33	33	-	33	32	34	28	46
6	33	28	32	26	42	33	-	24	24	27	38
7	31	32	33	30	41	32	24	-	23	25	41
8	34	32	34	30	42	34	24	23	-	27	41
9	27	27	28	27	39	29	28	26	28	-	42
10	44	40	43	38	51	42	37	40	39	40	-

Fonte: O autor (2025)

A Figura 10 mostra os valores possíveis para cada vértice do problema. A mesma pode ser representada matematicamente como T_{ij}, $\forall\ (i,j) \in P$.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} T_{ij}x_{ij} \leq 420, \forall(i,j) \in P \qquad (14)$$

Visando a eliminação de sub-rotas na solução encontrada, são introduzidas variáveis denominadas fluxos, representadas por f_{ij}. Esta variável deve assumir valor não negativo e inteiro. Com isso, são determinadas novas restrições, escritas matematicamente da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{n} f_{ij} - \sum_{i=0}^{n} f_{ji} = 1, \forall j \; com \; j \neq 0 \tag{15}$$

$$f_{ij} \leq (|pontos| - 1)x_{ij} \tag{16}$$

A variável f_{ij} representa o fluxo que vai da cidade i para a cidade j. O lado esquerdo da equação (15) corresponde à diferença entre o fluxo que entra e o que sai de cada cidade. Essa restrição garante que, para cada cidade $j \neq 0$, essa diferença seja igual a 1, indicando que uma unidade de fluxo é consumida em cada cidade visitada. A cidade 0 é uma exceção, pois representa o ponto de partida e retorno do percurso, funcionando como fonte e destino do fluxo total.

O autor optou por seguir com a resolução do problema pela ferramenta computacional *Solver*, uma vez que o órgão objeto desse estudo tem uma defasagem tecnológica, não tendo acesso a ferramentas / softwares mais robustos e não permitindo a instalação externa. Essa decisão é ocasionada pelo fato de que é utilizado um servidor com todas as informações do órgão e existe uma grande preocupação com relação a segurança. Além do que, o Excel já é utilizado diariamente pelas equipes gerenciais, desse modo, os servidores terão um aprendizado mais eficiente na utilização do modelo.

Todavia, é de conhecimento do público que esta ferramenta apresenta limitação com relação a quantidade de variáveis de decisão. O *Solver* do Excel permite um limite de 200 células variáveis, de acordo com o *Microsoft Support*. Almejando se adequar a essas limitações, o autor construiu o artificio de dividir os pontos em dois grupos, dado que foi informado que entre os caminhões disponíveis, dois são disponibilizados para o abastecimento das ETIs. A divisão se deu da seguinte maneira:

- O ponto zero tem obrigatoriedade de estar presente nos dois grupos, pois é o ponto de início e finalização de todas as rotas de distribuição de merenda.

- Os demais pontos foram divididos de acordo com os bairros, de modo que, as escolas que estão localizadas em bairros vizinhos foram agrupadas em conjunto.

Realizado essa divisão, foi obtido a seguinte configuração de pontos para cada grupo:

Figura 11 – Matriz de distância grupo A

	0	**1**	**2**	**4**	**5**	**9**
0	999999	4,2	3,5	10,1	1,4	2,4
1	5,5	999999	2,8	8,7	4,1	2,6
2	4,1	2,1	999999	6,3	2,7	2,9
4	8,6	7,7	5,8	999999	6,3	7,2
5	1,6	4,1	3,2	8,3	999999	2,9
9	2,6	2,4	2,7	8,5	3	999999

Fonte: O autor. (2025)

Figura 12 – Matriz de distância grupo B

	0	**3**	**6**	**7**	**8**	**10**
0	999999	4,5	4,7	4,3	5,1	13,7
3	6,5	999999	2,4	3,8	3,7	10,9
6	4,8	2,4	999999	1,7	1,4	9,7
7	4,4	3,8	1,7	999999	0,75	10
8	5,3	3,9	1,6	0,75	999999	10,9
10	13,8	10,9	9,7	10,1	10,1	999999

Fonte: O autor. (2025)

Iniciando a resolução do problema dentro da ferramenta, foi construída a função objetivo aplicando a fórmula SOMARPRODUTO entre a matriz de distâncias D_{ij} e uma matriz de variáveis, reservada para designar os valores que as variáveis de decisão irão assumir. Vale ressaltar que a matriz de variáveis elaborada se refere as variáveis x_{ij}. Para o grupo A, a matriz de variáveis ficou da seguinte maneira:

Figura 13 – Matriz para designar variáveis x_{ij} no grupo A

	0	**1**	**2**	**4**	**5**	**9**
0						
1						
2						
4						
5						
9						

Fonte: O autor (2025).

Já para as variáveis do grupo B, tem-se:

Figura 14 – Matriz para designar variáveis x_{ij} no grupo B

	0	3	6	7	8	10
0						
3						
6						
7						
8						
10						

Fonte: O autor (2025).

Seguindo os passos de solução, o autor estabeleceu as restrições dentro da ferramenta. As primeiras restrições, que se referem ao fato de os pontos não serem visitados mais de uma vez, foi representada da seguinte maneira:

Figura 15 – Representação da restrição um

R1	0	0	0	0	0	0

Fonte: O autor (2025)

Figura 16 – Representação da restrição dois

R2
0
0
0
0
0
0

Fonte: O autor (2025).

Dando continuidade, o autor construiu de forma gráfica a restrição três, referente ao tempo. As matrizes de tempo de cada grupo foram esboçadas da seguinte forma:

Figura 17 – Matriz de tempo do grupo A

	0	1	2	4	5	9
0	-	31	29	35	24	27
1	30	-	27	37	27	27
2	29	26	-	32	26	28
4	32	36	31	-	32	34
5	24	30	28	33	-	28
9	27	27	28	39	29	-

Fonte: O autor (2025).

Figura 18 – Matriz de tempo do grupo B

	0	**3**	**6**	**7**	**8**	**10**
0	-	33	32	31	32	47
3	30	-	26	30	29	39
6	33	26	-	24	24	38
7	31	30	24	-	23	41
8	34	30	24	23	-	41
10	44	38	37	40	39	-

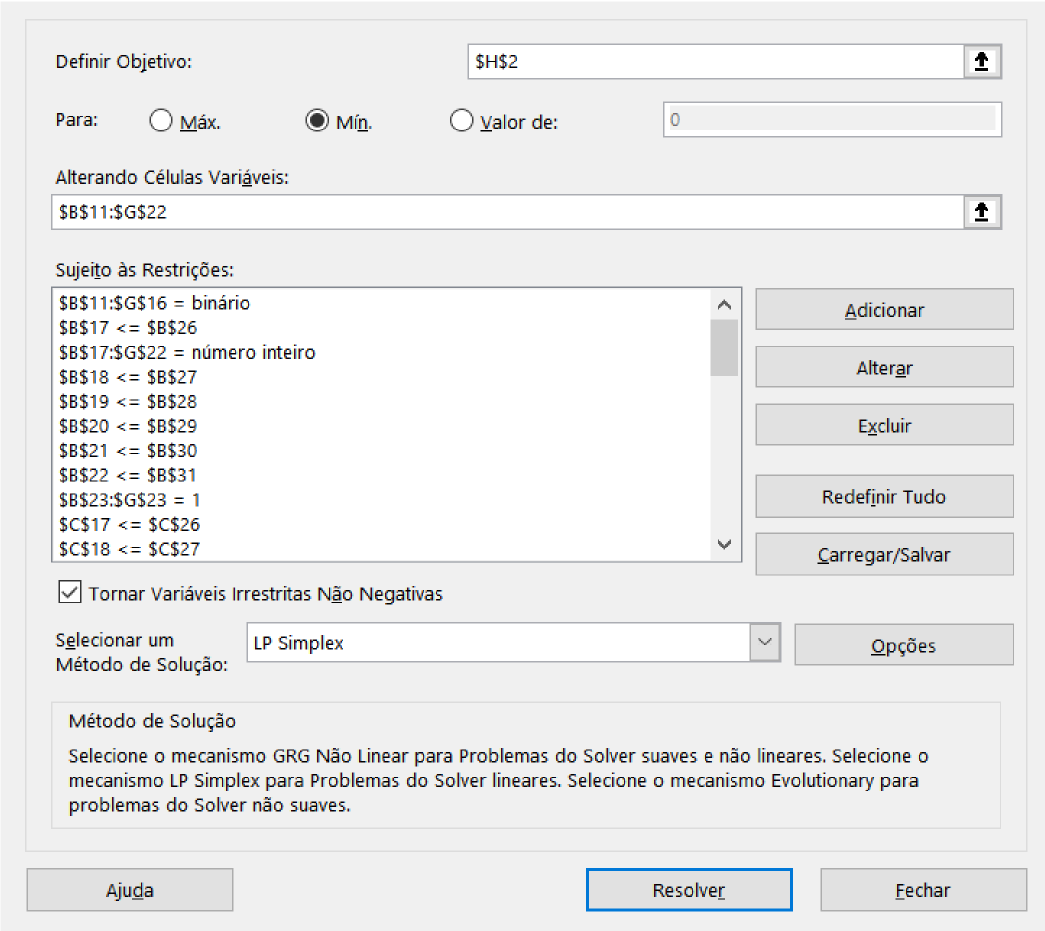
Fonte: O autor (2025).

E por fim, tem-se as restrições com relação a evitar sub-rotas na solução. O autor construí uma nova matriz para alocação dos valores de fluxo f_{ij} e f_{ji}, semelhante a matriz das variáveis. Dado isto, realizou o somatório de cada linha e de cada coluna, com exceção da primeira, considerando o descrito na formulação matemática. Logo após, o autor fez a subtração dos valores de cada somatório f_{ji} pelos valores de cada somatório f_{ji}.

Para estruturação da última restrição, foi aplicado a fórmula $|pontos| - 1$, que referente a este problema de estudo é igual a cinco. Além do que, foi realizada a construção de uma matriz de apoio que acomodará os valores da equação dessa restrição, para que esta seja usado como parâmetro de entrada na ferramenta.

Finalizando, foram inseridas na ferramenta *Solver*: a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições para encontrar a solução ótima (rota ótima).

Figura 19 – Parâmetros do *Solver*



Fonte: *Solver Excel* (2025)

5. RESULTADOS

Assim que inseridas as informações nos parâmetros do *Solver*, obteve-se o retorno dos seguintes resultados:

Figura 20 – Matriz das variáveis x_{ij} para o grupo A com as soluções

	0	1	2	4	5	9
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0

Fonte: O autor (2025).

Figura 21 – Matriz das variáveis x_{ij} para o grupo B com as soluções

	0	3	6	7	8	10
0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0
10	0	0	1	0	0	0

Fonte: O autor (2025).

As matrizes mostradas acima estabelecem quais são as arestas que compõem a solução ótima encontrada. Ou seja, os x_{ij} que estão alocados com o valor um estão presentes na solução e fazem parte da rota ótima.

Ainda, é valido ressaltar que todas as restrições foram atendidas na solução. O autor traz a resolução da restrição três para demonstrar essa afirmação. Para recordação, essa restrição afirmava que o tempo disponível para ação deveria ser menor ou igual a 420 minutos.

Figura 22 – Solução da restrição três para o grupo A

R3
169

Fonte: O autor (2025).

Figura 23 – Solução da restrição três para o grupo B

R3
187

Fonte: O autor (2025).

Analisando esses resultados pode-se notar que o tempo necessário para as rotas é menor que o estabelecido pela restrição, 169 minutos para o grupo A e 187 minutos para o grupo B. Logo, tem-se um ganho, tendo em vista que esse tempo menor possibilita que os caminhões estejam disponíveis para as outras demandas da gerência.

Com relação a função objetivo, foram obtidos os seguintes resultados:

Figura 24 – Resultado da função objetivo para o grupo A

F.O
21,8

Fonte: O autor (2025).

Figura 25 – Resultado da função objetivo para o grupo B

F.O
31,65

Fonte: O autor (2025).

Pode-se analisar que a menor distância para percorrer todos os pontos do grupo A atendendo todas as restrições é de 21,8 km. Já para o grupo B é de 31,65 km. Essas distâncias encontradas representam uma otimização de tempo e uma redução de gastos para o processo de distribuição de merenda do munícipio.

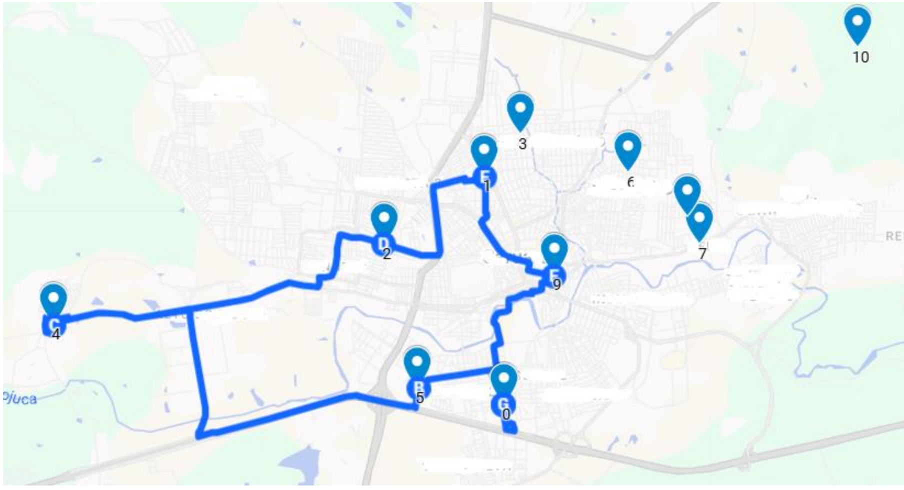
Dados os resultados encontrados, o autor pôde construir as rotas ótimas para cada um dos grupos. Essas rotas apresentam os melhores caminhos que devem ser percorridos para atender todos os pontos e, com saída e volta para o centro de distribuição.

Figura 26 – Sequência de rotas

Grupo	Nº de Escolas	Sequência de rota	Distância (km)	Tempo (min)
A	5	0-5-4-2-1-9-0	21,8	169
B	5	0-7-8-6-10-3-0	31,65	187

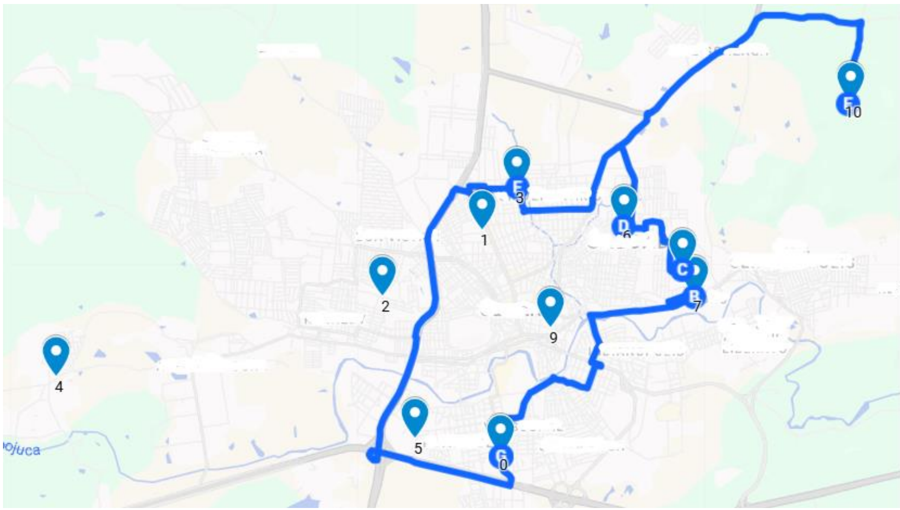
Fonte: O autor (2025)

Figura 27 – Rota grupo A



Fonte: *Google My Maps* (2025)

Figura 28- Rota grupo B



Fonte: *Google My Maps* (2025).

A padronização das rotas traz um ganho para a entidade, dado que a partir disso é possível ter controle dos custos envolvidos. Além de que, limita a liberdade da escolha dos motoristas, que podem acabar optando por caminhos que apresentem riscos para o veículo ou para o próprio. A definição de rotas ótimas impacta positivamente os custos envolvidos no processo, pois a partir desta há a possibilidade de redução do consumo de combustível e dos valores empregados na manutenção dos veículos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de uma solução para otimizar as rotas de distribuição de merenda nas Escolas em Tempo Integral, utilizando o Problema do Caixeiro Viajante, como base para a modelagem e a resolução por meio da ferramenta computacional Solver, do Microsoft Excel. A definição de rotas ótimas e a padronização dos trajetos geram benefícios financeiros significativos para o município, alinhando-se aos princípios da Eficiência e da Economicidade na gestão pública.

O modelo proposto demonstrou-se eficaz na resolução desse problema específico e pode servir como base para outras aplicações semelhantes. Como apresentado ao longo do estudo, o município conta com 148 instituições de ensino, divididas em três categorias, todas demandando uma logística eficiente para a distribuição da merenda escolar. Dessa forma, a metodologia desenvolvida poderá ser utilizada pelos gestores municipais para otimizar e padronizar as rotas de distribuição em todas as unidades de ensino, reduzindo custos operacionais e melhorando a qualidade do serviço ofertado.

Ainda, é importante destacar que a ferramenta utilizada não disponibiliza análise de sensibilidade para problemas com variáveis inteiras. No entanto, alterações nos parâmetros de entrada e pressupostos podem gerar cenários cujas análises podem ser interessantes. Para trabalhos futuros, sugere-se a investigação de outras possibilidades, como a modificação da regra de divisão dos pontos e a possível alteração do número de veículos alocados a essa atividade.

Outro aspecto que pode ser explorado em trabalhos futuros é a possibilidade de mudança do ponto de distribuição (ponto 0). Poderia ser realizado um estudo para identificar uma localização mais estratégica para esse ponto, avaliando os impactos dessa alteração. Embora a mudança possa gerar custos iniciais, os resultados podem demonstrar que, a longo prazo, haveria uma redução de gastos operacionais e, consequentemente, um ganho financeiro para o município.

Como também, sugere-se a implementação do modelo em ferramentas computacionais mais avançadas, permitindo a incorporação de um maior número de variáveis e ampliando a aplicabilidade da abordagem para cenários mais complexos. Com isso, busca-se tornar o modelo ainda mais abrangente e adaptável a diferentes contextos, contribuindo para uma gestão pública cada vez mais eficiente e eficaz.

REFERÊNCIAS

ACKOFF, Russell Lincoln. **The future of operational research is past.** *Journal of the Operational Research Society*, v. 30, n. 2, p. 93–104, 1979.

AREZZO, Dryden Castro de. **Introdução à administração pública**. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE OPERADORES LOGÍSTICOS (ABOL). **Custos logísticos no Brasil atingem 18,4% do PIB em 2023**. *ABOL Brasil*, 2024. Disponível em: https://abolbrasil.org.br/noticias/noticias-do-setor/custos-logisticos-no-brasil-atingem-184-do-pib-em-2023. Acesso em: 25 fev. 2025.

BALLOU, Ronald H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos: logística empresarial**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear programming: theory & algorithms**. New York: John Wiley & Sons, 2006.

BELFIORE, Patrícia P. **Algoritmos heurísticos para o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade**. São Paulo: Ed. UNESP, 2006.

BELFIORE, P. P. **Scatter Search para problemas de roteirização de veículos com frota heterogênea, janelas de tempo e entregas fracionadas**. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BELFIORE, P. P.; COSTA, O. L.; FÁVERO, L. P. L. **Problema de estoque e roteirização: revisão bibliográfica**. *Produção*, v. 16, n. 3, p. 442–454, set./dez. 2006.

BELFIORE, P. P.; FÁVERO, L. P. L.; ALVAREZ, R. A. G. **Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea: revisão da literatura**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 38., 2006, Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2006. Disponível em: https://din.uem.br. Acesso em: 01 mar. 2025.

BODIN, L. D.; GOLDEN, B.; ASSAD, A. **Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art**. *Computers & Operations Research*, v. 10, n. 2, 1983.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações adotadas pelas Emendas Constitucionais n.º 1/1992 a 68/2011, pelo Decreto Legislativo n.º 186/2008 e pelas Emendas Constitucionais de Revisão n.º 1 a 6/1994**. 35. ed. Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Escola em tempo integral**. *Portal Gov.br*, [ano]. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral. Acesso em: 02 fev. 2025.

CAIXETA-FILHO, José Vicente. **Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. **Programming with linear fractional functionals**. *Econometrica*, v. 29, n. 3, p. 429–438, 1961.

CHIANG, A. C. **Fundamental methods of mathematical economics**. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1984.

CHIAVENATO, Idalberto. **Introdução à teoria geral da administração**. 12. ed. São Paulo: Elsevier, 2004.

CHURCHMAN, C. West; ACKOFF, Russell Lincoln; ARNOFF, E. Leonard. **Introduction to operations research**. New York: John Wiley & Sons, 1957.

CHURCHMAN, C. W.; ACKOFF, R. L.; ARNOFF, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1971.

CHRISTOFIDES, N. **Vehicle routing**. In: CHRISTOFIDES, N. *Combinatorial optimization*. Chichester: Wiley, 1985. p. 315–338.

CHVÁTAL, V. **Linear programming**. New York: Freeman, 1983.

CIRILO, J. A. **Programação não linear aplicada a recursos hídricos**. In: PORTO, R. L. L. et al. **Técnicas quantitativas para o gerenciamento de recursos hídricos**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da Universidade, UFRGS, 1997.

CORMEN, Thomas H. **Algoritmos: Teoria e Prática**. 3. ed. São Paulo: LTC, 2019.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Algoritmos: teoria e prática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

CUNHA, Cláudio Barbieri da. **Aspectos práticos da aplicação de modelos de roteirização de veículos a problemas reais**. *Transportes*, v. 8, n. 2, p. 43–54, 2000. Disponível em: https://revistatransportes.org.br. Acesso em: 01 fev. 2025.

DI PIETRO, Maria Sylvia Zanella. **Direito administrativo**. 14. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

FÁVERO, L. P. L.; BELFIORE, P. **Análise de dados: modelagem multivariada para tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

FIRMINO, M. B. M.; CURI, W. F.; CURI, R. C.; LINS, G. M. L. **Otimização econômica de redes malhadas destinadas a sistemas pressurizados de irrigação**. In: SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE, 7., 2004, São Luís, MA. *Anais*... CD-ROM.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

HAUNER, D.; KYOBE, A. **Determinants of government efficiency**. *World Development*, v. 38, n. 11, p. 1527–1542, 2010.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. Porto Alegre: AMGH, 2013.

KORTE, B. H.; VYGEN, J. **Combinatorial optimization: theory and algorithms**. 4. ed. Berlin: Springer, 2008.

LAPORTE, G.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y.; SEMET, F. **Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem**. *International Transactions in Operational Research*, v. 7, n. 4/5, p. 285–300, 2000.

LIMA, Paulo Daniel Barreto. **A excelência em gestão pública: a trajetória e a estratégia do Gespública**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2007.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

MEIRELLES, Hely Lopes. **Direito administrativo brasileiro**. 27. ed. São Paulo: Malheiros, 2003.

MEIRELLES, Hely Lopes. **Direito administrativo brasileiro**. 29. ed. Atualizada por Eurico Andrade Azevedo, Délcio Balestero Aleixo e José Emmanuel Burle Filho. São Paulo: Malheiros, 2004.

MICROSOFT. **Definir e resolver um problema usando o Solver**. Microsoft Support, [ano]. Disponível em: https://support.microsoft.com/pt-br/office/definir-e-resolver-um-problema-usando-o-solver-5d1a388f-079d-43ac-a7eb-f63e45925040. Acesso em: 01 mar. 2025.

MOREIRA, D. A. **Administração da produção e operações**. 2. ed. ver. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia, administração e ciências contábeis**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MUKOKOMA, M.; DIJK, M. P. **Public sector efficiency: how to improve it?** African Journal of Public Affairs, v. 6, n. 3, p. 104–117, 2013.

NASH, S. G.; SOFER, A. **Linear and nonlinear programming**. New York: McGraw-Hill, 1996.

NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar: volume 4 - Combinatória**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

NOVAES, Antônio Galvão. **Logística e gerenciamento da cadeia de distribuição**. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

OLIVEIRA, José Nilo de Castro. **Direito administrativo**. Belo Horizonte: Del Rey, 1968.

OLIVEIRA, R. M. S. et al. **Engenharia de produção: tópicos e aplicações**. Belém: EDUEPA, 2010.

PARBERRY, Ian. **Problems on algorithms**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. 180 p. ISBN 978-0134335582.

PARTYKA, J.; HALL, R. W. Route generation and maintenance. In: HALL, Randolph W. (ed.). **Handbook of transportation science**. 2. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

PEÑA, H. **Gestão pública para resultados: estratégias de governo e instrumentos de planejamento**. Brasília: ENAP, 2008.

RAGSDALE, K. **Spreadsheet modeling & decision analysis: a practical introduction to management science**. 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2014.

RAO, S. S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.

REDE GLOBO. **Entenda o enigma das pontes de Königsberg que instigou a geometria**. Globo Ciência, 2011. Disponível em: https://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html. Acesso em: 02 fev. 2025.

SCALABRIN, Idionir; MORES, Claudionor José; BODANESE, Ronaldo Enderli; OLIVEIRA, José Adrelino de. **Programação linear: estudo de caso com utilização do Solver da Microsoft Excel**. Revista Universo Contábil, v. 2, n. 2, p. 54–66, 2007. DOI: 10.4270/ruc.20062. Disponível em: https://ojsrevista.furb.br/ojs/index.php/universocontabil/article/view/121. Acesso em: 01 fev. 2025.

SOUZA, Marcone Jamilson Freitas. **Otimização combinatória**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2009. Disponível em: Departamento de Computação UFOP. Acesso em: 01 fev. 2025.

TAHA, Hamdy A. **Pesquisa operacional**. 6. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

TAHA, H. **Operations research: an introduction**. 10. ed. London: Pearson, 2017.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

WAGNER, H. M. **Pesquisa operacional**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

WALLIS, W. D. **A beginner's guide to graph theory**. Boston: Birkhäuser, 2007.

WILL, D. E. M. **Metodologia da pesquisa científica**. 2. ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2012. Livro digital.

WINSTON, Wayne L. **Pesquisa operacional: aplicações e algoritmos**. 4. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2003.

WINSTON, Wayne L. **Operations research: applications and algorithms**. 4. ed. Belmont: Thomson-Brooks/Cole, 2004.

WOLSEY, L. **Integer programming**. New York: Wiley-Interscience, 1998.