
CORREÇÃO DE VIÉS NO MODELO DE REGRESSÃO NORMAL
ASSIMÉTRICO

ÊNIO ANTÔNIO COSTA LOPES

Orientador: Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Área de Concentração: Estatística Matemática

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em
Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2007

Lopes, Ênio Antônio Costa.

**Correção de viés no modelo de regressão normal
assimétrico / Ênio Antônio Costa Lopes – Recife : O
autor, 2007.**

ix, 101 folhas. : il., fig., tab.

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2007.**

Inclui bibliografia e apêndices.

**1. Análise de regressão. 2. Correção de viés 3.
Bootstrap 4. Normal assimétrica. 5. Máxima
verossimilhança I. Título.**

519.536

CDD (22.ed.)

MEI2007-011

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

09 de fevereiro de 2007
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Ênio Antônio Costa Lopes

intitulada

"Correção de viés no modelo de Regressão normal assimétrico"

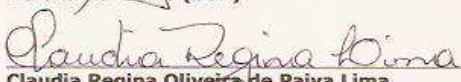
seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau
de Mestre em Estatística.


Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:


Klaus Leite Pinto Vasconcellos orientador


Heleno Bolfarine (USP)


Claudia Regina Oliveira de Paiva Lima

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

*Dedico este trabalho aos meus
queridos e amados pais.*

Agradecimentos

A Deus, que sempre me ilumina, me dá forças nos momentos mais difíceis da minha vida e que colocou pessoas maravilhosas no meu caminho.

A minha amada esposa Rachel e a meu querido filho Gabriel, pelo amor, carinho, momentos de descontração e apoio que têm me dado, aos quais peço sinceras desculpas pela minha ausência durante o período do curso de mestrado.

Aos meus pais, Francisco Lopes e Clédina Lopes, por todo amor, educação, carinho, apoio e incentivo que me deram durante a vida. Com certeza, são as pessoas em que sempre me espelhei e que tenho profunda admiração.

Ao professor Klaus Leite Pinto Vasconcellos, pela orientação, dedicação e compreensão, que sempre me orientou de maneira objetiva, contribuindo para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos Chagas Almeida, Rafael Bráz e Geraldo Henrique, pelas conversas, alegrias, companheirismo e amizade. Aos meus amigos Larissa Barreto, Marcelo Rodrigo, Leonardo Bomfim e Hemílio Fernandes pelas brincadeiras, conversas e convivência durante o mestrado. Aos meus amigos Alexandre Patriota, Evelyn Barroso e Fabienne Rodrigues, por todas as discussões, brincadeiras e incentivo durante a graduação.

Aos professores Klaus Leite Pinto Vasconcellos, Cristiano Ferraz, Francisco Cribari-Neto e Francisco Cysneiros, pelo apoio, incentivo e conhecimentos transmitidos durante o mestrado.

Aos professores Vicente de Paulo, João Maurício e Silvia Maria, pelo estímulo dado durante a graduação e por terem acreditado em mim.

À Valéria Bittencourt, por sua competência, compreensão e presteza aos alunos do mestrado.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*“A vida é a arte do encontro, embora
haja tanto desencontro pela vida.”*

Vinicius de Moraes

Resumo

Esta dissertação tem como objetivos principais fornecer expressões para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico, utilizando-as para obtermos estimadores corrigidos, e apresentar uma alternativa para modelar dados que são restritos ao intervalo $(0, 1)$. Com o intuito de reduzirmos os vieses destes estimadores, em amostras de tamanho finito, utilizamos correção de viés via Cox e Snell (1968) e por bootstrap.

Apresentamos resultados das simulações de Monte Carlo, as quais foram utilizadas a fim de verificarmos o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico, bem como o de suas versões corrigidas, em amostras finitas.

Palavras-chave: Correção de viés; Bootstrap; Normal assimétrica; Máxima verossimilhança.

Abstract

Our chief interest, in this thesis, is to supply closed-form expressions for the second order biases of the maximum likelihood estimators of the skew-normal regression model parameters, using them to get corrected estimators and to present an alternative to data analysis that are restricted to the $(0, 1)$ interval. In order to reduce the bias of these estimators, in finite sample, we use bias correction via Cox & Snell (1968) and via bootstrap. Numerical evaluation is performed using Monte Carlo simulation.

Keywords: Bias correction; Bootstrap; Skew-normal; Maximum likelihood.

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Organização da Dissertação	2
1.3 Suporte computacional	2
2 O modelo de regressão normal assimétrico	4
2.1 Distribuição Normal Assimétrica	4
2.1.1 Introdução	4
2.1.2 Definição e Propriedades	4
2.2 Aspectos Inferenciais	11
2.3 O modelo de regressão normal assimétrico	13
3 Correção de Viés	18
3.1 Revisão	18
3.2 Correção de Cox & Snell	20
3.2.1 Correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão normal assimétrico	20

3.3	Correção por Bootstrap	28
4	Avaliação Numérica	31
4.1	Detalhes Metodológicos	31
4.2	Resultados e Discussão	33
5	Aplicações e conclusões	43
5.1	Distâncias percorridas por carros desde o momento da frenagem até sua parada	43
5.2	Proporção de petróleo cru	44
5.3	Conclusões	45
	Apêndice	46
A	Aproximações	47
B	Cálculo dos Momentos	54
C	Programa de Simulação	91
C.1	Programa Principal	91
C.2	Biblioteca de Funções	96
	Referências Bibliográficas	98

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da distribuição normal assimétrica para alguns valores de α	5
4.1	Gráfico da quantidade $A_2^2(\alpha)$	37
4.2	Gráfico das densidades estimadas do EMV, EMVCS e EMVBOOT para $\alpha = 10$ e $n = 250$	41
A.1	Gráfico da quantidade $A_0^3(\alpha)$ e sua aproximação.	49
A.2	Gráfico da quantidade $A_1^3(\alpha)$ e sua aproximação.	49
A.3	Gráfico da quantidade $A_2^3(\alpha)$ e sua aproximação.	50
A.4	Gráfico da quantidade $A_3^3(\alpha)$ e sua aproximação.	50
A.5	Gráfico da quantidade $A_0^2(\alpha)$ e sua aproximação.	51
A.6	Gráfico da quantidade $A_1^2(\alpha)$ e sua aproximação.	51
A.7	Gráfico da quantidade $A_2^2(\alpha)$ e sua aproximação.	52
A.8	Gráfico da quantidade $A_3^2(\alpha)$ e sua aproximação.	52
A.9	Gráfico da quantidade $A_4^2(\alpha)$ e sua aproximação.	53

Lista de Tabelas

4.1	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3$	34
4.2	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 5$	35
4.3	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 10$	36
4.4	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3$	38
4.5	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 5$	39
4.6	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 10$	40
4.7	Taxas de falha observadas nos diversos cenários considerados.	42
5.1	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de distâncias percorridas.	44
5.2	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de proporção de petróleo cru.	45

1.1 Introdução

Em muitas situações práticas, a rotineira suposição de normalidade não é satisfeita, fato este que alavanca cada vez mais o uso de modelos mais maleáveis, como é o caso do modelo normal assimétrico.

A distribuição normal assimétrica univariada foi introduzida por Azzalini (1985, 1986). Posteriormente, Azzalini e Dalla Vale (1996) estenderam a normal assimétrica ao caso multivariado. Azzalini e Capitanio (1999) enfatizaram aplicações estatísticas da versão multivariada. Sartori (2006) estuda uma correção de viés para o parâmetro de forma α , baseada no método de Firth (1993), a qual sempre produz estimativas finitas. Entretanto, tal autor não considera um modelo com estrutura de regressão.

Neste trabalho, consideramos um modelo de regressão normal assimétrico e utilizamos o método de máxima verossimilhança para estimarmos os parâmetros deste modelo. Porém, tais estimadores podem se apresentar bastante viesados quando o tamanho amostral n é pequeno ou até mesmo moderado. Para grandes tamanhos de amostras, o viés não é um problema sério, pois tipicamente é de ordem $O(n^{-1})$, enquanto que o erro-padrão assintótico é de ordem $O(n^{-1/2})$. Assim, a derivação de expressões que possibilitem reduzir o viés é de suma importância para a obtenção de estimadores mais precisos que os não-corrigidos. Desta forma, adicionalmente, apresentamos expressões de forma fechada

para o cálculo do viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão normal assimétrico, as quais foram obtidas a partir da expressão geral dada por Cox e Snell (1968). Ainda, utilizamos o método bootstrap, introduzido por Efron (1979), com o intuito de reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão normal assimétrico.

1.2 Organização da Dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos e contém três apêndices. No segundo capítulo, apresentamos características e propriedades da distribuição normal assimétrica, abordamos aspectos inferenciais e expomos o modelo de regressão normal assimétrico. Fornecemos, também, uma alternativa para modelar dados que são restritos ao intervalo $(0, 1)$. No terceiro capítulo, apresentamos uma revisão sobre correção de viés. Através da fórmula geral de Cox e Snell (1968), fornecemos expressões de forma fechada para o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico. Adicionalmente, apresentamos a metodologia bootstrap e como utilizá-la para obter estimativas do viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão supracitado. No capítulo quatro, realizamos simulações de Monte Carlo, a fim de verificarmos o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico, bem como o de suas versões corrigidas, em amostras de tamanho finito. No quinto capítulo, apresentamos duas aplicações do modelo de regressão normal assimétrico e as conclusões dos resultados obtidos neste trabalho.

1.3 Suporte computacional

As avaliações numéricas realizadas nesta dissertação foram feitas utilizando a linguagem matricial de programação Ox em sua versão 4.04. Esta linguagem foi desenvolvida por Jurgem Doornik, sendo bastante semelhante à linguagem C. Um grande atrativo desta plataforma computacional é o fato de que ela é distribuída gratuitamente para uso acadêmico, e está disponível em <http://www.doornik.com>. Outra vantagem é que ela possui um número elevado de implementações numéricas que são de grande valia para

estatísticos, economistas, matemáticos, etc. Para mais detalhes veja Doornik (2001) e Cribari-Neto e Zarkos (2003).

Os gráficos que são apresentados ao longo deste trabalho foram confeccionados no ambiente de programação, análise de dados e gráficos R em sua versão 2.4.0. R é distribuída gratuitamente e está disponível em <http://www.r-project.org>. Uma grande vantagem de tal linguagem é o fato dela ser utilizada amplamente no meio acadêmico, o que contribui para a imensa variedade de pacotes desenvolvidos nas diversas áreas da estatística.

O modelo de regressão normal assimétrico

2.1 Distribuição Normal Assimétrica

2.1.1 Introdução

Há um interesse crescente, na literatura estatística, por modelos flexíveis, que permitam representar o comportamento dos dados tão adequadamente quanto possível e capazes de reduzir suposições irrealísticas. Uma das razões dessa tendência é a existência de inúmeros conjuntos de dados que são providos de assimetria.

Uma classe paramétrica de distribuições de probabilidade, introduzida por Azza-
lini (1985), denominada normal assimétrica é o resultado da procura por modelos mais flexíveis. Tal classe engloba o modelo normal através de um parâmetro adicional que regula a assimetria, além de ser matematicamente tratável e de possuir algumas propriedades em comum com a distribuição normal; por exemplo, a função densidade normal assimétrica é unimodal, seu suporte é a reta e o quadrado de uma normal assimétrica é uma distribuição qui-quadrado (χ^2) com um grau de liberdade.

2.1.2 Definição e Propriedades

Definição 2.1.1. Dizemos que Y tem distribuição normal assimétrica padrão com parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, denotado por $Y \sim SN(\alpha)$, se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$f_Y(y; \alpha) = 2\phi(y)\Phi(\alpha y), \quad -\infty < y < \infty \quad (2.1)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são as funções densidade de probabilidade e de distribuição da normal padrão, respectivamente. A densidade (2.1) é idêntica ao modelo normal padrão se $\alpha = 0$. O parâmetro de assimetria α define a forma da distribuição. Valores positivos (negativos) de α apontam uma assimetria positiva (negativa) no modelo. A figura (2.1) mostra o comportamento desta densidade para diferentes valores de α . Note que, se $\alpha \rightarrow \infty$ ou $\alpha \rightarrow -\infty$, mais acentuada se torna a assimetria da distribuição.

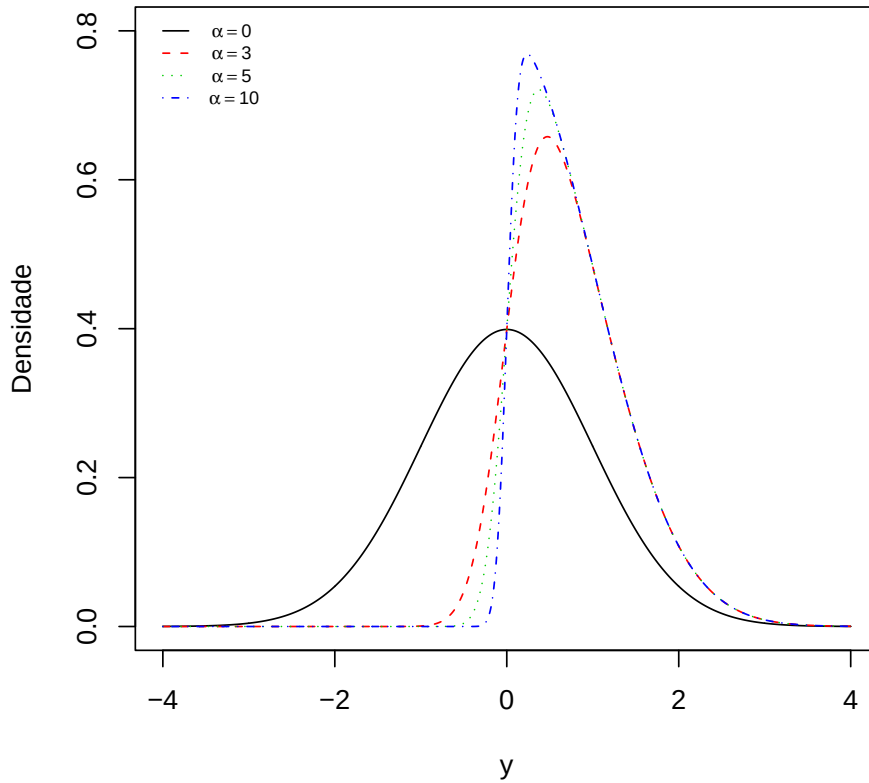


Figura 2.1: Gráfico da distribuição normal assimétrica para alguns valores de α

Apresentaremos algumas propriedades da distribuição normal assimétrica no decorrer do capítulo, tais propriedades já encontram-se na literatura, ver por exemplo Azzalini (1985). Duas propriedades que vêm como consequência da definição (2.1) são expostas a seguir.

Propriedade 2.1.1. A função densidade de uma variável aleatória $Y \sim SN(0)$ é idêntica à de uma variável aleatória $X \sim N(0, 1)$.

Propriedade 2.1.2. Quando $\alpha \rightarrow \infty$, a densidade (2.1) converge para $2\phi(y)I_{y>0}$, a qual corresponde à fdp de uma seminormal.

Propriedade 2.1.3. A fdp (2.1) é unimodal, sendo $\log f_Y(y; \alpha)$ uma função côncava de y .

Propriedade 2.1.4. A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com função densidade como em (2.1) é dada por

$$F_Y(y; \alpha) = \int_{-\infty}^y 2\phi(t)\Phi(\alpha t)dt = 2 \int_{-\infty}^y \phi(t) \int_{-\infty}^{\alpha t} \phi(u)dudt = 2 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\alpha t} \phi(t)\phi(u)dudt.$$

Assim,

$$F_Y(y; \alpha) = 2 \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\alpha t} \phi(t)\phi(u)dudt.$$

A fim de efetuarmos o cálculo de $F_Y(y; \alpha)$ podemos utilizar a função $T(y; \alpha)$, para y e α positivos, estudada por Owen (1956), a qual integra a densidade de uma normal padrão bivariada sobre a região limitada pelas linhas $x = y$, $z = 0$, $z = \alpha x$ no plano (x, z) . A saber,

$$T(y; \alpha) = \int_y^\infty \int_0^{\alpha t} \phi(t)\phi(u)dudt. \quad (2.2)$$

Dessa forma,

$$F_Y(y; \alpha) = \Phi(y) - 2T(y; \alpha). \quad (2.3)$$

$T(y; \alpha)$ é uma função decrescente de y e tem as seguintes propriedades:

$$T(-y; \alpha) = T(y; \alpha), \quad -T(y; \alpha) = T(y; -\alpha), \quad 2T(y; 1) = \Phi(y)\Phi(-y).$$

Para mais detalhes ver Azzalini (1985).

Assim, a partir de (2.3) e das propriedades citadas acima, temos as seguintes propriedades adicionais

Propriedade 2.1.5. $1 - F_Y(-y; \alpha) = F_Y(y; -\alpha)$.

Prova :

$$\begin{aligned} 1 - F_Y(-y; \alpha) &= 1 - [\Phi(-y) - 2T(-y; \alpha)] = 1 - \Phi(-y) + 2T(-y; \alpha) \\ &= \Phi(y) + 2T(y; \alpha) = \Phi(y) - 2T(y; -\alpha) = F_Y(y; -\alpha). \end{aligned}$$

Propriedade 2.1.6. Se $Y \sim SN(\alpha)$, então $-Y \sim SN(-\alpha)$.

Prova : seja $W = -Y$; então,

$$\begin{aligned} P(W \leq w) &= P(-Y \leq w) = P(Y > -w) = 1 - P(Y \leq -w) \\ &= 1 - F_Y(-w; \alpha) = F_Y(w, -\alpha). \end{aligned}$$

Assim, $W = -Y \sim SN(-\alpha)$.

Propriedade 2.1.7. $F_Y(y; 1) = [\Phi(y)]^2$.

Prova :

$$\begin{aligned} F_Y(y; 1) &= \Phi(y) - 2T(y; 1) = \Phi(y) - \Phi(y)\Phi(-y) = \Phi(y)[1 - \Phi(-y)] \\ &= [\Phi(y)]^2. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.1. Se $W \sim N(0, 1)$ e $Y \sim SN(\alpha)$ então $|W|$ e $|Y|$ têm a mesma distribuição (seminormal).

Prova: sejam $w > 0$ e $y > 0$,

$$\begin{aligned} P(|W| \leq w) &= P(-w \leq W \leq w) = \Phi(w) - \Phi(-w) = 2\Phi(w) - 1. \\ P(|Y| \leq y) &= P(-y \leq Y \leq y) = F_Y(y; \alpha) - F_Y(-y; \alpha) \\ &= \Phi(y) - 2T(y; \alpha) - [\Phi(-y) - 2T(-y; \alpha)] \\ &= \Phi(y) - 2T(y; \alpha) - 1 + \Phi(y) + 2T(-y; \alpha) = 2\Phi(y) - 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, uma consequência direta da proposição (2.1.1) é a propriedade que segue:

Propriedade 2.1.8. Se $Y \sim SN(\alpha)$, então $Y^2 \sim \chi_1^2$.

A propriedade (2.1.8) é de suma importância, pois auxilia-nos a calcular os momentos pares da distribuição normal assimétrica, dado que tais momentos são iguais aos de uma variável aleatória normalmente distribuída.

A seguir, apresentamos um lema de grande valia para o cálculo da função geradora de momentos da normal assimétrica, o qual é apresentado em Azzalini (1985).

Lema 2.1.1. *Se V tem distribuição $N(0, 1)$, então*

$$E[\Phi(hV + k)] = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right), \quad \forall h, k \in \mathbb{R}.$$

A função geradora de momentos de uma variável aleatória Y regida por uma distribuição normal assimétrica padrão é dada por

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{tY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} 2\phi(y) \Phi(\alpha y) dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + ty} \Phi(\alpha y) dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2ty + t^2)} e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\alpha y) dy \\ &= 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2} \Phi(\alpha y) dy; \quad \text{se } x = y - t, \\ &= 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Phi(\alpha x + \alpha t) dx = 2e^{\frac{t^2}{2}} E[\Phi(\alpha X + \alpha t)], \end{aligned}$$

onde $X \sim N(0, 1)$. Portanto, a partir do Lema (2.1.1), temos que

$$M_Y(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t), \quad (2.4)$$

onde

$$\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (2.5)$$

Assim, através de (2.4) podemos obter, após alguma álgebra, a esperança e a variância de Y , a saber

$$E[Y] = b\delta, \quad (2.6)$$

$$Var[Y] = 1 - b^2\delta^2, \quad (2.7)$$

onde

$$b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (2.8)$$

Henze (1986) apresenta a seguinte expressão, de forma fechada, para os momentos ímpares de uma variável $SN(\alpha)$:

$$E(Y^{2k+1}) = b\alpha(1 + \alpha^2)^{-(k+1/2)}2^{-k}(2k+1)! \sum_{t=0}^k \frac{t!(2\alpha)^{2t}}{(2t+1)!(k-t)!}. \quad (2.9)$$

Portanto, a partir da propriedade (2.1.8) e de (2.9), podemos calcular os coeficientes de assimetria (μ_3) e curtose (μ_4), os quais são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1}{2}(4 - \pi) \sin(\alpha) \left[\frac{E^2(Y)}{\text{Var}(Y)} \right]^{3/2}, \\ \mu_4 &= 2(\pi - 3) \left[\frac{E^2(Y)}{\text{Var}(Y)} \right]^2. \end{aligned}$$

O coeficiente μ_3 mede a assimetria, enquanto que μ_4 avalia a espessura das caudas da distribuição. Os intervalos de variação de μ_3 e μ_4 são $(-0.9953, 0.9953)$ e $[0, 0.8692]$, respectivamente. Valores de μ_3 positivos (negativos) indicam que a distribuição é assimétrica à direita (esquerda). Como μ_4 só assume valores no intervalo $[0, 0.8692]$ temos que a distribuição normal assimétrica pode ser classificada como mesocúrtica ($\mu_4 = 0$) ou leptocúrtica ($\mu_4 > 0$).

Na prática, freqüentemente é necessário introduzirmos parâmetros de locação e escala. Seja $Y \sim SN(\alpha)$; estenderemos o modelo (2.1) através da transformação $Z = \mu + \sigma Y$. A fdp de Z é apresentada na definição subsequente.

Definição 2.1.2. Dizemos que Z tem distribuição normal assimétrica com parâmetros de locação ($\mu \in \mathbb{R}$), de escala ($\sigma > 0$) e forma ($\alpha \in \mathbb{R}$), denotado por $Z \sim SN(\mu, \sigma, \alpha)$, se sua fdp é dada por

$$f_Z(z) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\alpha \frac{z - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < z < \infty. \quad (2.10)$$

A partir da transformação $Z = \mu + \sigma Y$ podemos obter facilmente a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com função densidade como em (2.10), a qual é dada por

$$\begin{aligned}
F_Z(z; \alpha) &= P(Z \leq z) = P(\mu + \sigma Y \leq z) = P\left(Y \leq \frac{z - \mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{z - \mu}{\sigma}; \alpha\right) \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\frac{z - \mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\alpha t} \phi(t) \phi(u) du dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$F_Z(z; \alpha) = 2 \int_{-\infty}^{\frac{z - \mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\alpha t} \phi(t) \phi(u) du dt.$$

A função geradora de momentos de $Z = \mu + \sigma Y$ é dada por

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E[e^{tZ}] = E[e^{t(\mu + \sigma Y)}] = E[e^{t\mu} e^{t\sigma Y}] = e^{t\mu} E[e^{t\sigma Y}] \\
&= e^{t\mu} M_Y(t\sigma) = 2e^{t\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Phi(\delta t \sigma).
\end{aligned}$$

onde δ é definido em (2.5).

Vê-se facilmente que o valor esperado e a variância de Z são dados por

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \mu + \sigma b \delta, \\
Var[Z] &= \sigma^2 (1 - b^2 \delta^2).
\end{aligned}$$

Apresentaremos dois métodos bem conhecidos, discutidos em Azzalini e Dalla Valle (1996), que possibilitam a geração de variáveis aleatórias normais assimétricas.

Proposição 2.1.2. (*Método da Condição*) Se (X, Y) é um vetor aleatório normal bivariado com distribuições marginais $N(0, 1)$ e correlação δ , então a distribuição condicional de Y dado $X > 0$ é $SN(\alpha)$

A segunda técnica, denominada método da transformação, é uma representação estocástica obtida por Henze (1986). Este método é de extrema importância por facilitar extensões para o caso multivariado.

Proposição 2.1.3. (*Método da Transformação*) Se Y_0 e Y_1 são variáveis aleatórias normais independentes $N(0, 1)$ e $\delta \in (-1, 1)$, então

$$Z = \delta |Y_0| + (1 - \delta^2)^{1/2} Y_1 \quad (2.11)$$

é $SN(\alpha)$, onde δ é definido como em (2.5).

2.2 Aspectos Inferenciais

Seja $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim SN(\mu, \sigma, \alpha)$; então, a função de verossimilhança é dada pela expressão

$$L(\mu, \sigma, \alpha) = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\alpha \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right). \quad (2.12)$$

Portanto, a função de log-verossimilhança, a menos de uma constante, é dada por

$$\ell(\mu, \sigma, \alpha) = \log[L(\mu, \sigma, \alpha)] = -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \phi\left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) + \sum_{i=1}^n \log \Phi\left(\alpha \frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.13)$$

Embora o modelo normal assimétrico possua boas propriedades, existem alguns problemas inferenciais. Considere o caso em que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, ou seja, o cenário em que $Z \sim SN(\alpha)$. Analisando a verossimilhança com um pouco de atenção, vê-se neste caso que se todas as observações forem positivas (negativas), a função de verossimilhança será uma função monótona crescente (decrecente) de α e a estimativa de máxima verossimilhança de α será infinito (menos infinito). Isto ocorre com probabilidade positiva, embora tal probabilidade decresça substancialmente à medida que o tamanho amostral aumenta (Liseo e Loperfido, 2004). No caso em que temos a função dada em (2.12) é mais difícil identificar amostras que produzam estimativas infinitas de α . No entanto, evidências empíricas mostram que tal problema é restrito ao parâmetro de forma α e que estimativas dos parâmetros de locação (μ) e escala (σ) sempre existem.

Com o propósito de solucionar o problema de estimativas infinitas, Sartori (2006) propõe que a estimação de α seja feita através de um estimador corrigido preventivamente (Firth, 1993). No caso geral, em que temos os parâmetros de locação e escala, a sugestão de Sartori (2006) é que a estimação de μ e σ seja feita via método da máxima verossimilhança. A partir daí, tais parâmetros são considerados fixos, e procede-se com a estimação de α através do estimador corrigido preventivamente. Outra opção é proceder uma análise bayesiana, onde se pode incluir informações adicionais sobre α através de uma distribuição a priori. Liseo e Loperfido (2004) realizam uma análise bayesiana para a distribuição normal assimétrica e provam que a priori de Jeffrey é própria.

A partir de (2.13) obtemos as equações de verossimilhança, dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \alpha)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \psi_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n W_i = 0, \\
\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \psi_i^2 - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n W_i \psi_i = 0, \\
\frac{\partial \ell(\mu, \sigma, \alpha)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n W_i \psi_i = 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\psi_i = \frac{z_i - \mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad W_i = \frac{\phi(\alpha \psi_i)}{\Phi(\alpha \psi_i)}.$$

Dessa forma, vê-se que não é possível encontrar uma expressão de forma fechada para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros. Portanto, devemos utilizar procedimentos de otimização não-linear a fim de maximizarmos a função de log-verossimilhança e, conseqüentemente, acharmos as soluções das equações de verossimilhança. Alguns métodos que podem ser empregados são Newton–Raphson, BHHH, Escore de Fisher, BFGS, e em alguns casos de não-convergência o algoritmo EM é sugerido, embora tenha a desvantagem de ser muito lento.

Após alguma álgebra, obtemos a matriz de informação de Fisher $I_F(\mu, \sigma, \alpha)$ dada por

$$I_F(\mu, \sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha^2 c_0}{\sigma^2} & \frac{b\alpha(1+2\alpha^2)(1+\alpha^2)^{-3/2}+\alpha^2 c_1}{\sigma^2} & \frac{b(1+\alpha^2)^{-3/2}-\alpha c_1}{\sigma} \\ \frac{b\alpha(1+2\alpha^2)(1+\alpha^2)^{-3/2}+\alpha^2 c_1}{\sigma^2} & \frac{2+\alpha^2 c_2}{\sigma^2} & -\frac{\alpha c_2}{\sigma} \\ \frac{b(1+\alpha^2)^{-3/2}-\alpha c_1}{\sigma} & -\frac{\alpha c_2}{\sigma} & c_2 \end{bmatrix},$$

onde $c_h = E[\psi_h W^2]$, $h = 0, 1, 2, \dots$

Dessa forma, outra complicação que surge é o fato da matriz de informação de Fisher ser singular quando $\alpha \rightarrow 0$. Além disso, há um ponto de sela em

$$(\mu, \sigma, \alpha) = \left(\bar{z}, \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}, 0 \right).$$

A fim de resolver o problema da singularidade da matriz de informação de Fisher, Azzalini (1985) sugere uma reparametrização do modelo.

2.3 O modelo de regressão normal assimétrico

Em diversas situações práticas, temos interesse em pesquisar o comportamento de uma determinada variável em função de outras. Uma alternativa muito utilizada para detectar tais relações é a aplicação de um modelo de regressão linear. No entanto, tal alternativa pode não ser adequada quando a variável resposta assume valores no intervalo $(0, 1)$, por exemplo, taxas e proporções. Uma possível solução é transformar a variável dependente de tal maneira que esta assuma valores em toda a reta. Entretanto, em alguns casos, tal alternativa pode não produzir um resultado satisfatório, pois a variável resposta pode ser provida de assimetria. Outra possível solução é utilizar um modelo de regressão beta como proposto por Ferrari e Cribari–Neto (2004). Tal modelo é baseado na suposição de que a variável resposta tem distribuição beta sob uma determinada parametrização.

Nossa proposta é aplicar uma transformação na variável resposta de tal forma que esta assuma valores na reta e substituir a usual suposição de normalidade dos erros pela suposição de que os erros têm distribuição normal assimétrica. Dessa forma, utilizando o modelo normal assimétrico, levamos em consideração a assimetria que é inerente à variável dependente.

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ onde os y_i 's são variáveis aleatórias independentes e cada $y_i, i = 1, \dots, n$, é a variável resposta relativa à i -ésima observação. Assumimos que os y_i 's são restritos ao intervalo $(0, 1)$. A transformação sugerida é a logística (veja Aitchison 1986). Assim, o modelo proposto é definido por

$$\log \left(\frac{y_i}{1 - y_i} \right) = X_i^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \quad (2.14)$$

onde $X_i^\top = (1, X_{i1}, \dots, X_{ip-1})$ são observações de p ($p < n$) covariáveis conhecidas e fixas, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros de regressão desconhecidos ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}$) e ε_i são variáveis aleatórias regidas por uma distribuição $SN(0, \sigma, \alpha)$. Definindo z_i da forma

$$z_i = \log \left(\frac{y_i}{1 - y_i} \right).$$

temos que

$$z_i = X_i^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i. \quad (2.15)$$

Ainda,

$$Z = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

onde

$$\mathbf{Z} = [z_1, \dots, z_n]^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^\top.$$

Utilizaremos a seguinte notação, dada por Lawley (1956), para as derivadas da função de log-verossimilhança. $U_r = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r}$, $U_\sigma = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma}$, $U_\alpha = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \alpha}$, $U_{rt} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \beta_t}$, $U_{r\sigma\alpha} = \frac{\partial^3 \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \sigma \partial \alpha}$, e assim sucessivamente, onde as letras $r, t, \dots$, dizem respeito às componentes de $\boldsymbol{\beta}$; da mesma forma, σ e α correspondem aos parâmetros σ e α , respectivamente. Os cumulantes são denotados por $\kappa_{rt} = E(U_{rt})$, $\kappa_{r\sigma, \alpha} = E(U_{r\sigma} U_\alpha)$, $\kappa_{r\sigma\alpha} = E(U_{r\sigma\alpha})$ e assim por diante. As derivadas dos cumulantes são representadas por $\kappa_{rt}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \beta_u}$, $\kappa_{rt}^{(\sigma)} = \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \sigma}$, $\kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\sigma\alpha}}{\partial \beta_u}$, etc.

Portanto, a partir do modelo (2.15), temos que a função de log-verossimilhança, a menos de uma constante, é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha) &= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \phi \left(\frac{z_i - X_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) + \sum_{i=1}^n \log \Phi \left(\alpha \frac{z_i - X_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \quad (2.16) \\ &= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \phi(\omega_i) + \sum_{i=1}^n \log \Phi(\alpha \omega_i), \end{aligned}$$

onde

$$\omega_i = \frac{z_i - X_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\sigma}.$$

Assim, a fim de obtermos o vetor escore, diferenciamos (2.16) em relação aos parâmetros desconhecidos $(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)$. Como se pode verificar no Apêndice B, as quantidades são dadas por

$$U_{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_i \Delta_i, \quad (2.17)$$

$$U_\sigma = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i, \quad (2.18)$$

$$U_\alpha = \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i, \quad (2.19)$$

onde

$$\Delta_i = \frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)}.$$

A partir de (2.17) temos, para $r = 0, \dots, p$,

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i. \quad (2.20)$$

Portanto, o vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$, de dimensão $(p+2 \times 1)$, com $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \sigma, \alpha)^\top$, é dado por

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_\beta \\ U_\sigma \\ U_\alpha \end{pmatrix}.$$

Os estimadores de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ são obtidos pela solução do sistema $U(\boldsymbol{\theta}) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} U_\beta &= 0, \\ U_\sigma &= 0, \\ U_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que não existem soluções explícitas para o sistema $U(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Porém, as estimativas de máxima verossimilhança do vetor $\boldsymbol{\theta}$ podem ser encontradas a partir de procedimentos numéricos que maximizem a função de log-verossimilhança. O método de otimização não-linear empregado a fim de obter tais soluções foi o algoritmo BFGS.

Com o intuito de obtermos a matriz de informação de Fisher $K(\boldsymbol{\theta})$, calculamos as derivadas de segunda ordem e seus momentos. O cálculo dessas quantidades está apresentado no Apêndice B. Os cumulantes são dados por

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt} &= -\frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it}, \\
\kappa_{r\sigma} &= \frac{\alpha}{\sigma^2} [-b(1 + \alpha^2)^{-1/2} - b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir}, \\
\kappa_{r\alpha} &= \frac{1}{\sigma} \{b [\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - (1 + \alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha)\} \sum_{i=1}^n X_{ir}, \\
\kappa_{\sigma\sigma} &= -\frac{n}{\sigma^2} [2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha)], \\
\kappa_{\alpha\sigma} &= \frac{n\alpha}{\sigma} A_2^2(\alpha), \\
\kappa_{\alpha\alpha} &= -n A_2^2(\alpha),
\end{aligned}$$

onde

$$A_n^m(\alpha) = E_{\omega_i}[\Delta_i^m \omega_i^n]. \quad (2.21)$$

Apresentamos aproximações para algumas quantidades da forma $A_n^m(\alpha)$ no Apêndice A.

Assim, de posse dessas informações, definimos a matriz $\widetilde{W}$, de dimensão $(n+2) \times (n+2)$, da forma

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} W_{\beta\beta} & W_{\beta\sigma} & W_{\beta\alpha} \\ W_{\sigma\beta} & W_{\sigma\sigma} & W_{\sigma\alpha} \\ W_{\alpha\beta} & W_{\alpha\sigma} & W_{\alpha\alpha} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
W_{\beta\beta} &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \right\}_{n \times n}, \\
W_{\beta\sigma} &= \text{rep} \left\{ \frac{\alpha}{\sigma^2} [b(1 + \alpha^2)^{-1/2} + b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} + \alpha A_1^2(\alpha)] \right\}_{n \times 1}, \\
W_{\beta\alpha} &= \text{rep} \left\{ -\frac{1}{\sigma} \{b [\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - (1 + \alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha)\} \right\}_{n \times 1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\sigma\beta} &= W_{\beta\sigma}^\top, \\
W_{\sigma\sigma} &= -\kappa_{\sigma\sigma}, \\
W_{\sigma\alpha} &= -\kappa_{\sigma\alpha}, \\
W_{\alpha\beta} &= W_{\beta\alpha}^\top, \\
W_{\alpha\sigma} &= W_{\sigma\alpha}^\top, \\
W_{\alpha\alpha} &= -\kappa_{\alpha\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainda, $\text{diag}\{d_i\}$ é uma matriz diagonal formada pelos elementos $d_i, i = 1, \dots, n$, e $\text{rep}\{d\}$ é um vetor coluna formado por d , onde todos os elementos são iguais.

Definimos a matriz estendida $\widetilde{\mathbf{X}}$, de dimensão $(n+2) \times (p+2)$, da forma

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{X}$ é a matriz de covariáveis, a qual tem dimensão $n \times p$.

Dessa forma, a matriz de informação de Fisher é dada por

$$K(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\sigma} & K_{\beta\alpha} \\ K_{\sigma\beta} & K_{\sigma\sigma} & K_{\sigma\alpha} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\sigma} & K_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{W} \widetilde{\mathbf{X}}, \quad (2.22)$$

onde $K_{\beta\beta} = \mathbf{X}^\top W_{\beta\beta} \mathbf{X}$, $K_{\beta\sigma} = \mathbf{X}^\top W_{\beta\sigma} = K_{\sigma\beta}^\top$, $K_{\beta\alpha} = \mathbf{X}^\top W_{\beta\alpha} = K_{\alpha\beta}^\top$, $K_{\sigma\sigma} = W_{\sigma\sigma}$ e $K_{\alpha\alpha} = W_{\alpha\alpha}$.

Conseqüentemente, temos que a inversa da matriz de informação é dada por

$$K^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} K^{\beta\beta} & K^{\beta\sigma} & K^{\beta\alpha} \\ K^{\sigma\beta} & K^{\sigma\sigma} & K^{\sigma\alpha} \\ K^{\alpha\beta} & K^{\alpha\sigma} & K^{\alpha\alpha} \end{pmatrix} = (\widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{W} \widetilde{\mathbf{X}})^{-1}. \quad (2.23)$$

É importante salientar que os parâmetros não são ortogonais, pois

$$K_{\sigma\beta} = K_{\beta\sigma} \neq 0,$$

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} \neq 0,$$

$$K_{\alpha\sigma} = K_{\sigma\alpha} \neq 0.$$

3.1 Revisão

O estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) em amostras finitas é uma notável área de pesquisa em estatística. Tais estimadores são, tipicamente, viesados para os verdadeiros valores dos parâmetros quando o tamanho amostral n é pequeno ou a informação de Fisher é reduzida. Esse viés não é um problema relevante para tamanhos de amostra relativamente grandes, pois em geral é de ordem $O(n^{-1})$, enquanto que o respectivo erro—padrão é de ordem $O(n^{-1/2})$. Todavia, quando trabalhamos com tamanhos amostrais pequenos ou até mesmo moderados, esse viés pode tornar-se grande quando comparado ao erro—padrão do estimador. Nesse caso, o viés pode vir a ser um problema. Portanto, fórmulas que permitam o cálculo dos vieses de segunda ordem dos EMV são extremamente úteis, essencialmente quando os tamanhos de amostra são reduzidos.

Correções de viés têm sido bastante estudadas na literatura estatística. Um artigo precursor sobre correção de viés surgiu através de Bartlett (1953), o qual apresentou uma expressão simples para o viés de ordem $O(n^{-1})$ do EMV no caso uniparamétrico. Haldane (1953) e Haldane e Smith (1956) forneceram expressões de ordem $O(n^{-1})$ para os primeiros quatro cumulantes em amostras aleatórias de um ou dois parâmetros desconhecidos. Cox e Snell (1968) apresentam uma expressão geral para o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EMV nos

casos uniparamétrico e multiparamétrico. Box (1971) fornece uma expressão geral para o viés de segunda ordem em modelos não-lineares onde a matriz de covariâncias é conhecida. Pike, Hill e Smith (1980) investigam o viés em modelos lineares logísticos. Cook, Tsai e Wei (1986) apresentam os vieses dos EMV em um modelo de regressão não-linear onde os erros têm distribuição normal. Eles mostram que o viés pode ser consequência da posição de covariáveis no espaço amostral. Young e Bakir (1987) mostram que a correção de viés pode melhorar a estimação em modelos de regressão log-gama generalizados.

Posteriormente, Cordeiro e McCullagh (1991) obtêm uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMV em modelos lineares generalizados. Expressões para os vieses de ordem $O(n^{-1})$ dos EMV em modelos de regressão normais heteroscedásticos são fornecidas por Cordeiro (1993). Firth (1993) desenvolve um estimador corrigido, o qual corresponde à solução de uma equação score modificada. Mais recentemente, Cordeiro e Vasconcellos (1997) apresentam uma fórmula geral para calcular o viés de segunda ordem em uma ampla classe de modelos de regressão multivariados não-lineares com erros normais, enquanto Cordeiro e Vasconcellos (1999) obtêm os vieses de ordem $O(n^{-1})$ dos EMV em modelos de regressão von Mises. Vasconcellos e Cordeiro (2000) derivam expressões em forma matricial para o viés de segunda ordem dos EMV em modelos de regressão multivariados não-lineares com erros t -Student. Cordeiro, Ferrari, Uribe-Opazo e Vasconcellos (2000) derivam uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMV em uma classe de modelos de regressão não-lineares simétricos. Cribari-Neto e Vasconcellos (2002) analisam o comportamento, em amostras finitas, dos EMV dos parâmetros que indexam a distribuição beta. Recentemente Vasconcellos e Silva (2005) obtêm uma fórmula geral para os vieses de segunda ordem dos EMV dos parâmetros em um modelo de regressão não-linear t -Student onde o número de graus de liberdade é desconhecido. Ospina, Cribari-Neto e Vasconcellos (2006) derivam expressões de forma fechada para os vieses de ordem $O(n^{-1})$ dos EMV em um modelo de regressão beta.

Outra técnica que pode ser utilizada com o intuito de obter estimadores corrigidos, é o método de reamostragem bootstrap, desenvolvido por Efron (1979). O bootstrap é um método computacional de inferência estatística que substitui cálculos analíticos por esforço computacional. Tal método tem sido bastante explorado nas últimas décadas. O uso de bootstrap em modelos de regressão foi amplamente estudado por Wu (1986). Efron

e Tibshirani (1993) e Davison e Hinkley (1997) descrevem detalhadamente a correção de viés por bootstrap. Ferrari e Cribari–Neto (1998) estudam a relação entre o método analítico, baseado em expansões de Edgeworth, e a técnica bootstrap. Esta técnica está descrita em detalhes na Seção (3.3).

3.2 Correção de Cox & Snell

Uma fórmula geral, bastante conhecida, utilizada com o propósito de obter o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança em modelos multiparamétricos, com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$, foi desenvolvida por Cox e Snell (1968) e é dada por

$$B(\hat{\theta}_a) = \sum_{h,i,j} \kappa^{ah} \kappa^{ij} \left\{ \kappa_{hi,j} + \frac{1}{2} \kappa_{hij} \right\}, \quad (3.1)$$

onde a, h, i, j indexam o espaço paramétrico, κ^{ah} sendo referente ao elemento (a, h) da inversa da matriz de informação de Fisher $K(\boldsymbol{\theta})$. Em diversas situações, é conveniente substituímos, em decorrência das identidades de Bartlett, $\kappa_{hi,j} + \frac{1}{2} \kappa_{hij}$ por $\kappa_{hi}^{(j)} - \frac{1}{2} \kappa_{hij}$.

Assim, a fórmula dada em (3.1) é de grande valia, pois a partir de tal resultado, podemos definir um estimador corrigido $\tilde{\theta}_a = \hat{\theta}_a - \hat{B}(\hat{\theta}_a)$, onde $\hat{B}(\hat{\theta}_a)$ é o viés estimado de $\hat{\theta}_a$. Podemos mostrar que $\tilde{\theta}_a$ tem viés de ordem $O(n^{-2})$. Logo, à medida que o tamanho amostral n aumenta, esperamos que o viés de $\tilde{\theta}_a$ aproxime-se mais rapidamente de zero que o viés de $\hat{\theta}_a$.

3.2.1 Correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão normal assimétrico

A fim de obtermos uma expressão matricial para calcularmos o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão normal assimétrico, utilizaremos a fórmula geral de Cox e Snell (1968). A notação empregada é dada por Lawley (1956), como apresentado no Capítulo 2.

A partir da expressão (3.1), obtemos a fórmula para calcular o viés de segunda ordem da s -ésima componente de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, a qual é dada por

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}_s) = & \sum_{r,t,u} \kappa^{sr} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rtu} \right\} + \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\sigma} \right\} \\
& + \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\alpha} \right\} + \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma u} \right\} \\
& + \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} + \kappa^{s\sigma} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma tu} \right\} \\
& + \kappa^{s\alpha} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha tu} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{s\sigma} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\sigma} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{s\alpha} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\alpha} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{s\alpha} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\alpha} \right\} + \kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\alpha} \right\} + \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha u} \right\} + \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Da mesma forma, temos que a fórmula para calcular o viés de ordem $O(n^{-1})$ do estimador $\hat{\sigma}$ é da forma

$$\begin{aligned}
B(\hat{\sigma}) = & \sum_{r,t,u} \kappa^{\sigma r} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rtu} \right\} + \sum_{r,t} \kappa^{\sigma r} \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\sigma} \right\} \\
& + \sum_{r,t} \kappa^{\sigma r} \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\alpha} \right\} + \sum_{r,u} \kappa^{\sigma r} \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma u} \right\} \\
& + \sum_{r,u} \kappa^{\sigma r} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma tu} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha tu} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_r \kappa^{\sigma r} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_r \kappa^{\sigma r} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_r \kappa^{\sigma r} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_r \kappa^{\sigma r} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\sigma} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\sigma} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\alpha} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\alpha} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\alpha} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha u} \right\} + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ainda, para o estimador $\hat{\alpha}$ temos

$$\begin{aligned}
B(\hat{\alpha}) = & \sum_{r,t,u} \kappa^{\alpha r} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rtu} \right\} + \sum_{r,t} \kappa^{\alpha r} \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\sigma} \right\} \\
& + \sum_{r,t} \kappa^{\alpha r} \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{rt\alpha} \right\} + \sum_{r,u} \kappa^{\alpha r} \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma u} \right\} \\
& + \sum_{r,u} \kappa^{\alpha r} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma tu} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha tu} \right\} + \kappa^{\sigma\sigma} \sum_r \kappa^{\alpha r} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\sigma\alpha} \sum_r \kappa^{\alpha r} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_r \kappa^{\alpha r} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_r \kappa^{\alpha r} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\sigma} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\sigma} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\sigma} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t\alpha} \right\} + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\sigma} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\alpha u} \right\} + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\sigma u} \right\} \\
& + \kappa^{\alpha\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha u} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Devido ao fato dos parâmetros não serem ortogonais, todos os termos dados em (3.2), (3.3), e (3.4) devem ser calculados.

Assim, objetivando facilitar o cálculo de tais quantidades, após alguma álgebra, conseguimos expressá-las em forma matricial. No Apêndice B, são apresentados os cálculos dos cumulantes, as derivadas dos cumulantes e o processo pelo qual as expressões (3.2),

(3.3), e (3.4) foram conduzidas à forma matricial. Dessa forma, notamos que $B(\hat{\beta}_s)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}_s) = & Q_1 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \delta_{\beta\beta} + Q_2 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_3 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_4 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_5 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_4 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) \\
& + Q_5 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + Q_6 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_8 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_7 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} + Q_9 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\alpha\alpha} + Q_{10} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\sigma} \\
& + Q_{11} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{12} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{13} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\alpha\alpha} \\
& + Q_{12} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\sigma\alpha} + Q_{14} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_{15} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\alpha\alpha} + Q_6 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_7 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_8 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_9 \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{16} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} \\
& + Q_{17} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{17} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_{18} \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{e}_s$ é o s -ésimo vetor coluna da matriz identidade de ordem n , $\text{tr}(\cdot)$ denota o operador traço, $\mathbb{1}$ é um vetor coluna com todos os n elementos iguais a 1, $\delta_{\beta\beta}$ é um vetor coluna formado pelos n elementos diagonais de $\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top$ e as quantidades Q_1 a Q_{18} estão definidas no Apêndice B.

Podemos ainda, colocar alguns termos em evidência, o que nos permitirá escrever $B(\hat{\beta}_s)$ de uma forma mais simplificada:

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}_s) = & \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top [Q_1 \delta_{\beta\beta} + (Q_2 + Q_4) \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_3 + Q_5) \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + (Q_7 + Q_8) \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_6 \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_9 \mathbb{1} K^{\alpha\alpha}] \\
& + \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\sigma} [Q_4 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_6 + Q_{16}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_7 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + (Q_{11} + Q_{12}) K^{\sigma\alpha} + Q_{10} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha}] \\
& + \mathbf{e}_s^\top K^{\beta\alpha} [Q_5 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_8 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_9 + Q_{18}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + (Q_{13} + Q_{14}) K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\sigma\sigma} + Q_{15} K^{\alpha\alpha}].
\end{aligned}$$

Logo, o viés de segunda ordem de $\hat{\beta}$ é dado por

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}) &= K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top [Q_1 \delta_{\beta\beta} + (Q_2 + Q_4) \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_3 + Q_5) \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + (Q_7 + Q_8) \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
&+ Q_6 \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_9 \mathbb{1} K^{\alpha\alpha}] \\
&+ K^{\beta\sigma} [Q_4 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_6 + Q_{16}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_7 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
&+ (Q_{11} + Q_{12}) K^{\sigma\alpha} + Q_{10} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha}] \\
&+ K^{\beta\alpha} [Q_5 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_8 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_9 + Q_{18}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
&+ (Q_{13} + Q_{14}) K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\sigma\sigma} + Q_{15} K^{\alpha\alpha}].
\end{aligned}$$

Definimos o bloco superior de $K^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, de dimensão $p \times (p+2)$, como

$$K^{\beta*} = (K^{\beta\beta} \quad K^{\beta\sigma} \quad K^{\beta\alpha}).$$

Definimos ainda, as quantidades δ_{11} , δ_{21} e δ_{31} da forma

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= Q_1 \delta_{\beta\beta} + (Q_2 + Q_4) \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_3 + Q_5) \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + (Q_7 + Q_8) \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
&+ Q_6 \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_9 \mathbb{1} K^{\alpha\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{21} &= Q_4 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_6 + Q_{16}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_7 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
&+ (Q_{11} + Q_{12}) K^{\sigma\alpha} + Q_{10} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{31} &= Q_5 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_8 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_9 + Q_{18}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
&+ (Q_{13} + Q_{14}) K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\sigma\sigma} + Q_{15} K^{\alpha\alpha}.
\end{aligned}$$

Consideramos, assim, o vetor $\tilde{\delta}$, o qual tem $(n+2)$ elementos, dado por

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \\ \delta_{31} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o viés de ordem $O(n^{-1})$ de $\hat{\beta}$ pode ser expressado por

$$B(\hat{\beta}) = K^{\beta*} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\delta}. \quad (3.5)$$

Analogamente, mostramos que $B(\hat{\sigma})$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
B(\hat{\sigma}) = & Q_1 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \delta_{\beta\beta} + Q_2 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_3 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_4 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_5 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_4 K^{\sigma\sigma} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) \\
& + Q_5 K^{\sigma\alpha} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + Q_6 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_7 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_8 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} + Q_9 K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\alpha\alpha} + Q_{10} K^{\sigma\sigma} K^{\sigma\sigma} \\
& + Q_{11} K^{\sigma\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\sigma\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{13} K^{\sigma\sigma} K^{\alpha\alpha} \\
& + Q_{12} K^{\sigma\alpha} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\sigma\alpha} K^{\sigma\alpha} + Q_{14} K^{\sigma\alpha} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_{15} K^{\sigma\alpha} K^{\alpha\alpha} + Q_6 K^{\sigma\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_7 K^{\sigma\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_8 K^{\sigma\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_9 K^{\sigma\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{16} K^{\sigma\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} \\
& + Q_{17} K^{\sigma\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{17} K^{\sigma\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_{18} K^{\sigma\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, evidenciando alguns termos, $B(\hat{\sigma})$ pode ser expressado como

$$\begin{aligned}
B(\hat{\sigma}) = & K^{\sigma\beta} \mathbf{X}^\top [Q_1 \delta_{\beta\beta} + (Q_2 + Q_4) \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_3 + Q_5) \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + (Q_7 + Q_8) \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_6 \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_9 \mathbb{1} K^{\alpha\alpha}] \\
& + K^{\sigma\sigma} [Q_4 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_6 + Q_{16}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_7 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + (Q_{11} + Q_{12}) K^{\sigma\alpha} + Q_{10} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha}] \\
& + K^{\sigma\alpha} [Q_5 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + (Q_8 + Q_{17}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + (Q_9 + Q_{18}) \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + (Q_{13} + Q_{14}) K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\sigma\sigma} + Q_{15} K^{\alpha\alpha}].
\end{aligned}$$

Definimos o bloco mediano de $K^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, de dimensão $1 \times (p+2)$, como

$$K^{\sigma*} = (K^{\sigma\beta} \quad K^{\sigma\sigma} \quad K^{\sigma\alpha}).$$

Portanto o viés de segunda ordem de $\hat{\sigma}$ pode ser escrito como

$$B(\hat{\sigma}) = K^{\sigma*} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\delta}. \quad (3.6)$$

Da mesma forma, deduzimos que $B(\hat{\alpha})$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
B(\hat{\alpha}) = & Q_1 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \delta_{\beta\beta} + Q_2 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_3 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_4 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_5 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_4 K^{\alpha\sigma} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) \\
& + Q_5 K^{\alpha\alpha} \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + Q_6 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_7 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_8 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} + Q_9 K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top \mathbb{1} K^{\alpha\alpha} + Q_{10} K^{\alpha\sigma} K^{\sigma\sigma} \\
& + Q_{11} K^{\alpha\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\alpha\sigma} K^{\sigma\alpha} + Q_{13} K^{\alpha\sigma} K^{\alpha\alpha} \\
& + Q_{12} K^{\alpha\alpha} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha} K^{\sigma\alpha} + Q_{14} K^{\alpha\alpha} K^{\sigma\alpha} \\
& + Q_{15} K^{\alpha\alpha} K^{\alpha\alpha} + Q_6 K^{\alpha\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_7 K^{\alpha\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_8 K^{\alpha\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_9 K^{\alpha\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{16} K^{\alpha\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} \\
& + Q_{17} K^{\alpha\sigma} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{17} K^{\alpha\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_{18} K^{\alpha\alpha} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Podemos colocar em evidência algumas quantidades, o que simplificará $B(\hat{\alpha})$ na forma

$$\begin{aligned}
B(\hat{\alpha}) = & K^{\alpha\beta} \mathbf{X}^\top (Q_1 \delta_{\beta\beta} + Q_2 \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_3 \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_4 \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_5 \mathbf{X} K^{\beta\alpha} \\
& + Q_6 \mathbb{1} K^{\sigma\sigma} + Q_7 \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} + Q_8 \mathbb{1} K^{\sigma\alpha} + Q_9 \mathbb{1} K^{\alpha\alpha}) \\
& + K^{\alpha\sigma} [Q_4 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + Q_{10} K^{\sigma\sigma} + Q_{11} K^{\sigma\alpha} + Q_{12} K^{\alpha\sigma} + Q_{13} K^{\alpha\alpha} \\
& + Q_6 \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_7 \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{16} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_{17} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha}] \\
& + K^{\alpha\alpha} [Q_5 \text{tr}(\mathbf{X} K^{\beta\beta} \mathbf{X}^\top) + Q_{12} K^{\sigma\sigma} + Q_{13} K^{\sigma\alpha} + Q_{14} K^{\sigma\alpha} + Q_{15} K^{\alpha\alpha} \\
& + Q_8 \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_9 \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha} + Q_{17} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\sigma} + Q_{18} \mathbb{1}^\top \mathbf{X} K^{\beta\alpha}].
\end{aligned}$$

Definimos o bloco inferior de $K^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, de dimensão $1 \times (p+2)$, como

$$K^{\alpha*} = (K^{\alpha\beta} \quad K^{\alpha\sigma} \quad K^{\alpha\alpha}).$$

Logo, o viés de ordem $O(n^{-1})$ de $\hat{\alpha}$ é dado por

$$B(\hat{\alpha}) = K^{\alpha*} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\delta}. \quad (3.7)$$

Dessa forma, com base nos resultados (2.23), (3.5), (3.6) e (3.7), temos que o viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ pode ser representado como

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = K^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{W}} \widetilde{\mathbf{X}})^{-1} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\boldsymbol{\delta}}.$$

Uma forma bastante interessante de expressar tal resultado é dada a seguir

$$B(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{W}} \widetilde{\mathbf{X}})^{-1} \widetilde{\mathbf{X}}^\top \widetilde{\mathbf{W}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.8)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \widetilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\delta}}$. Desse modo, vê-se facilmente que $B(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ pode ser obtido a partir de uma regressão de mínimos quadrados generalizados.

A partir da expressão (3.8), definimos um estimador de máxima verossimilhança corrigido $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (3.9)$$

onde $\hat{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ denota o estimador de máxima verossimilhança de $B(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, ou seja, os parâmetros $(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \alpha)$ são substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança. Este novo estimador tem viés de ordem $O(n^{-2})$, pois $E(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\theta} + O(n^{-2})$. Portanto, esperamos que o estimador corrigido $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ tenha melhores propriedades em amostras finitas que o usual estimador de máxima verossimilhança, cujo viés é de ordem $O(n^{-1})$.

3.3 Correção por Bootstrap

Em diversos problemas estatísticos existe a dificuldade e, em alguns casos, até mesmo a impossibilidade de se obter soluções analíticas. Uma alternativa que permite obter soluções aproximadas para tais problemas é a metodologia bootstrap. O bootstrap é um método de reamostragem, originalmente proposto por Efron (1979), que se baseia na construção de subamostras a partir de uma amostra inicial. O emprego de tal técnica evita a necessidade de complicados cálculos analíticos, porém, requer um intensivo procedimento computacional.

O método bootstrap é de grande utilidade quando se deseja estimar variâncias, vieses, intervalos de confiança, p -valores e outras quantidades de interesse da inferência estatís-

tica. Ainda, podemos empregá-lo de forma paramétrica ou não-paramétrica. Em sua forma paramétrica, fazemos suposições sobre a distribuição dos dados, e a partir daí, geramos pseudo-amostras com base nas estimativas dos parâmetros provenientes dos dados. No bootstrap não-paramétrico, utilizamos os próprios dados a fim de obtermos as subamostras.

Considere uma amostra aleatória $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ de uma variável aleatória populacional Z cuja distribuição está completamente determinada por sua função de distribuição acumulada F . Seja, $\theta = t(F)$ uma função de F denominada parâmetro e $\hat{\theta} = s(\mathbf{z})$ um estimador de θ . Neste caso, o emprego da técnica bootstrap consiste basicamente em obter, a partir da amostra original $\mathbf{z}$, um grande número de subamostras $\mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$, calcular as respectivas réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{z}^*)$, e com base na distribuição empírica de $\hat{\theta}^*$, estimar a função de distribuição de $\hat{\theta}$.

Em sua versão não-paramétrica, a amostra $\mathbf{z}^*$ é obtida de uma estimativa não-paramétrica $\hat{F}$ de F , que é a função de distribuição empírica da amostra original, dada por

$$\hat{F}(z) = \frac{\#\{z_i \leq z\}}{n},$$

a qual atribui probabilidade $\frac{1}{n}$ a cada $z_i, i = 1, \dots, n$. Assim, o bootstrap não-paramétrico é uma aplicação direta do princípio “plug-in”, que utiliza $\hat{F}$ no lugar da distribuição populacional desconhecida F . Logo, se $\theta = t(F)$, o seu estimador é dado por $\hat{\theta} = t(\hat{F})$. Na versão paramétrica, F deve pertencer a um modelo paramétrico conhecido F_ξ . Assim, a obtenção de um estimador consistente de ξ viabiliza uma estimativa paramétrica de F , denotada por F_ξ .

Podemos utilizar o método bootstrap para estimarmos o viés de um determinado estimador. Assim, denotamos o viés de $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ por $B_F(\hat{\theta}, \theta)$, que é definido como sendo

$$B_F(\hat{\theta}, \theta) = E_F[s(\mathbf{z})] - t(F).$$

Dessa forma, os estimadores bootstrap de viés nas versões não-paramétrica e paramétrica são dados por

$$B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = E_{\hat{F}}[s(\mathbf{z})] - t(\hat{F}) \quad \text{e} \quad B_{F_\xi}(\hat{\theta}, \theta) = E_{F_\xi}[s(\mathbf{z})] - t(F_\xi).$$

Gerando B amostras bootstrap independentes, $(z^{*1}, \dots, z^{*B})$ de $\mathbf{z}$, calculando as suas respectivas réplicas bootstrap $(\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$, onde $\hat{\theta}^{*i} = s(z^{*i})$ para $i = 1, \dots, B$, podemos aproximar $E_{\hat{F}}[s(\mathbf{z})]$ e $E_{F_{\hat{\xi}}}[s(\mathbf{z})]$ pela média

$$\hat{\theta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}^{*i}.$$

Obtemos assim, as estimativas bootstrap de viés $\hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta)$ e $\hat{B}_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta)$, dadas por

$$\hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{z}) \quad \text{e} \quad \hat{B}_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{z}).$$

Observe que a diferença entre as estimativas está na forma de geração das subamostras. Podemos, a partir das estimativas bootstrap de viés, definir estimadores corrigidos até segunda ordem por bootstrap como

$$\bar{\theta}_1 = s(\mathbf{z}) - \hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{z}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \quad (3.10)$$

$$\bar{\theta}_2 = s(\mathbf{z}) - \hat{B}_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{z}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \quad (3.11)$$

onde $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são denominadas estimativas CBC (Constant–Bias–Correcting) como dado em MacKinnon e Smith (1998).

No presente trabalho, faremos uso do estimador corrigido por bootstrap em sua forma paramétrica, como visto em (3.11). Para uma discussão sobre correção de viés de segunda ordem por bootstrap e sua relação com a correção analítica veja Ferrari e Cribari–Neto (1998).

4.1 Detalhes Metodológicos

Neste capítulo, avaliamos numericamente, através do método de simulação de Monte Carlo, o desempenho dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários, bem como suas versões corrigidas analiticamente via Cox e Snell (1968) e por bootstrap. A fim de avaliarmos a qualidade das estimativas obtidas através do emprego dos estimadores citados anteriormente, utilizamos algumas medidas, tais como viés, viés relativo e erro quadrático médio. O processo de simulação foi realizado utilizando a linguagem matricial de programação `0x` na versão 4.04 [Cribari–Neto e Zarkos (2003); Doornik (2001)], enquanto os gráficos foram construídos no pacote estatístico `R` na versão 2.4.0 [Venables e Ripley (2002)].

Os resultados apresentados são baseados no seguinte modelo de regressão:

$$z_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Os valores da covariável x_i permanecem constantes em todo o experimento e foram gerados de forma que $x_i \sim U(0, 1)$. Os parâmetros de regressão são definidos como $\beta_0 = -2$ e $\beta_1 = 2$. O parâmetro de escala foi definido como $\sigma = 1$. Ao parâmetro de forma foram atribuídos os valores: $\alpha = 3, 5$ e 10 . Os ε_i 's são variáveis aleatórias regidas por uma distribuição $SN(0, \sigma, \alpha)$ e foram gerados através do método da transformação, o qual está

descrito no Capítulo 2, proposição (2.1.3). Consideramos, também, os tamanhos amostrais $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350$ e 400 . O número de réplicas de Monte Carlo foi fixado em 5000, enquanto que o número de réplicas bootstrap foi de 600. Para cada cenário considerado, nós calculamos a taxa de falha da simulação, a qual é baseada no número de não-convergências ocorridas, isto é, na quantidade de vezes em que o procedimento de maximização da função de log-verossimilhança não convergiu para uma solução ótima. Nos cenários onde houve a ocorrência de não-convergência para um valor ótimo, nós continuamos com a simulação até obtermos 5000 réplicas para as quais o procedimento de maximização da log-verossimilhança alcançou convergência. A taxa de falha é definida como $(N - 5000)/N$, onde N é o número total de réplicas até a obtenção das 5000 convergências.

A partir da definição das quantidades $\beta_0, \beta_1, \sigma, \alpha$ e da geração das variáveis aleatórias ε_i 's e x_i , obtemos as variáveis dependentes z_i 's, onde cada $z_i \sim SN(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma, \alpha)$. A função de log-verossimilhança foi maximizada utilizando-se o método de otimização não-linear BFGS, através da função `MaxBFGS`, que está implementada no pacote `Maximize` da linguagem de programação `0x`. Os valores de β_0, β_1, σ e α que maximizam a função de log-verossimilhança são as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$, e $\hat{\alpha}$ dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico. A partir das estimativas obtidas, calculamos as estimativas dos vieses de segunda ordem $\hat{B}(\hat{\theta})$ e, a seguir, as estimativas corrigidas $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \hat{B}(\hat{\theta})$.

De posse das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão (4.1), geramos, para cada réplica de Monte Carlo, 600 réplicas bootstrap, de forma paramétrica, provenientes de uma distribuição $SN(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \hat{\sigma}, \hat{\alpha})$. A partir das réplicas bootstrap, calculamos as estimativas dos vieses dos parâmetros do modelo de regressão (4.1), e a seguir, as estimativas corrigidas $\bar{\theta} = \hat{\theta} - \hat{B}_{F_\xi}(\hat{\theta}, \theta)$.

Com o intuito de analisarmos o comportamento dos estimadores apresentados, para cada tamanho de amostra e para os diferentes valores de α , foram calculadas as estimativas de viés, viés relativo ¹ e erro quadrático médio (EQM) baseados nas 5000 estimativas dos parâmetros.

¹O viés relativo de um estimador é definido como sendo $\{E(\hat{\theta}) - \theta\}/\theta$.

4.2 Resultados e Discussão

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulações referentes à correção de viés dos EMV do modelo de regressão normal assimétrico dado em (4.1). Seja $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma, \alpha)^\top$ o vetor de parâmetros do modelo de regressão supracitado. Assim como denotado nos capítulos anteriores, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}, \hat{\alpha})^\top$ diz respeito aos EMV de $\boldsymbol{\theta}$, enquanto que $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\sigma}, \tilde{\alpha})^\top$ é atinente aos EMV corrigidos analiticamente via Cox e Snell (1968) e $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\sigma}, \bar{\alpha})^\top$ é relativo aos EMV corrigidos por bootstrap.

Nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 são apresentados os resultados de simulação para as estimativas dos parâmetros de regressão β_0 e β_1 no caso em que $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3, 5$ e 10 . Podemos observar que no caso onde $\alpha = 3$, para tamanhos amostrais inferiores a 200, o estimador $\tilde{\beta}_0$ possui viés, viés relativo, e EQM superiores aos apresentados pelo estimador $\hat{\beta}_0$. No entanto, para tamanhos amostrais superiores a 200, nota-se que o estimador $\tilde{\beta}_0$ trabalha de forma eficiente no que diz respeito à redução de viés e de EQM. Observe que, em geral, o estimador $\bar{\beta}_0$ apresenta menor viés e viés relativo que $\hat{\beta}_0$, independentemente do tamanho de amostra. Quanto ao EQM, não observamos grandes variações entre os diferentes estimadores para tamanhos de amostra maiores que 200. Nos casos em que $\alpha = 5$ e 10 , notamos que, em grande parte dos tamanhos de amostra, os estimadores $\tilde{\beta}_0$ e $\bar{\beta}_0$ possuem desempenho superior a $\hat{\beta}_0$ no que diz respeito às medidas de viés e viés relativo. Os EQM das estimativas produzidas pelos estimadores $\hat{\beta}_0, \tilde{\beta}_0$ e $\bar{\beta}_0$ não possuem diferenças muito marcantes. Por exemplo, para $n = 350$ e $\alpha = 10$ todas as estimativas do EQM são iguais a 0.00304.

Com relação às estimativas do parâmetro β_1 , podemos observar que o estimador corrigido por bootstrap, em grande parte dos tamanhos amostrais, possui um desempenho inferior ao EMV não-corrigido. Quanto à correção analítica de Cox e Snell (1968), percebemos que, para $\alpha = 3$, tal correção não é eficiente, dado que os valores observados nas medidas de viés e viés relativo são superiores aos obtidos pelo EMV não-corrigido. No entanto, quando temos valores maiores de α ($\alpha = 5$ e 10), notamos que, na maioria dos tamanhos de amostra, o estimador $\tilde{\beta}_1$ apresenta um desempenho satisfatório, diferente do estimador $\bar{\beta}_1$. Por exemplo, para $n = 350$ e $\alpha = 5$, as estimativas de viés relativo de $\hat{\beta}_1, \tilde{\beta}_1$ e $\bar{\beta}_1$ são iguais a 0.00005, 0.00002 e 0.00138, respectivamente. Dessa forma, o emprego da correção de viés por bootstrap para o parâmetro de inclinação β_1

não é recomendado.

Embora, na maioria dos casos, os estimadores corrigidos (analiticamente e por bootstrap) de β_0 e corrigido analiticamente de β_1 possuam melhor desempenho que o EMV não-corrigido, percebemos que tais correções de viés não produzem uma melhora significativa.

Concluimos que os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ possuem boas propriedades em amostras finitas, ou seja, os valores estimados dos parâmetros se aproximam dos verdadeiros valores dos parâmetros de regressão.

Tabela 4.1: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3$.

n	Estimador	Estimativas de β_0			Estimativas de β_1		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	0.06615	0.02205	0.08536	-0.00359	-0.00120	0.11434
	$\tilde{\theta}$	-3.77386	-1.25795	4353.15	-0.00053	-0.00018	0.11429
	$\bar{\theta}$	-0.00285	-0.00095	0.08099	0.00674	0.00225	0.11437
100	$\hat{\theta}$	0.02094	0.00698	0.03281	0.00209	0.00070	0.05422
	$\tilde{\theta}$	-0.13057	-0.04352	24.3339	0.00162	0.00054	0.05422
	$\bar{\theta}$	0.01205	0.00402	0.03252	-0.00138	-0.00046	0.05422
150	$\hat{\theta}$	0.00827	0.00276	0.01872	-0.00124	-0.00041	0.03569
	$\tilde{\theta}$	-0.08347	-0.02782	30.5652	-0.00138	-0.00046	0.03569
	$\bar{\theta}$	-0.00956	-0.00319	0.01874	0.00833	0.00278	0.03575
200	$\hat{\theta}$	0.01064	0.00355	0.01249	-0.00342	-0.00114	0.02399
	$\tilde{\theta}$	0.00412	0.00137	0.01182	-0.00365	-0.00122	0.02399
	$\bar{\theta}$	0.00447	0.00149	0.01240	0.00297	0.00099	0.02399
250	$\hat{\theta}$	0.00346	0.00115	0.00905	-0.00215	-0.00072	0.01836
	$\tilde{\theta}$	-0.00131	-0.00044	0.00881	-0.00229	-0.00076	0.01836
	$\bar{\theta}$	0.00387	0.00129	0.00905	-0.00895	-0.00298	0.01843
300	$\hat{\theta}$	0.00552	0.00184	0.00775	-0.00232	-0.00077	0.01438
	$\tilde{\theta}$	0.00159	0.00053	0.00758	-0.00251	-0.00084	0.01438
	$\bar{\theta}$	-0.00494	-0.00165	0.00774	0.00615	0.00205	0.01442
350	$\hat{\theta}$	0.01128	0.00376	0.01298	-0.00126	-0.00042	0.01224
	$\tilde{\theta}$	0.00800	0.00267	0.01287	-0.00139	-0.00046	0.01224
	$\bar{\theta}$	-0.00189	-0.00063	0.01286	-0.00535	-0.00178	0.01226
400	$\hat{\theta}$	0.00552	0.00184	0.00775	-0.00232	-0.00077	0.01438
	$\tilde{\theta}$	0.00160	0.00053	0.00758	-0.00251	-0.00084	0.01438
	$\bar{\theta}$	-0.00494	-0.00165	0.00774	0.00615	0.00205	0.01442

Nas tabelas 4.4, 4.5 e 4.6, apresentamos os resultados da avaliação numérica de correção de viés dos EMV dos parâmetros σ e α nos casos onde $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3, 5$ e 10. Percebemos que, embora o EMV do parâmetro de escala σ tenha boas propriedades amostrais, isto é, possua viés, viés relativo e EQM muito pequenos, a correção de viés via Cox e Snell (1968) e por bootstrap, na maioria dos casos, trabalham de forma satisfatória.

Tabela 4.2: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 5$.

n	Estimador	Estimativas de β_0			Estimativas de β_1		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	0.06136	0.01227	0.05129	-0.00549	-0.00110	0.08674
	$\tilde{\theta}$	-1.44626	-0.28925	1603.39	-0.00170	-0.00034	0.08671
	$\bar{\theta}$	-0.04993	-0.00999	0.05003	-0.00540	-0.00108	0.08674
100	$\hat{\theta}$	0.01032	0.00206	0.01504	0.00139	0.00028	0.03637
	$\tilde{\theta}$	0.00348	0.00070	0.01671	0.00077	0.00015	0.03637
	$\bar{\theta}$	0.00692	0.00138	0.01499	-0.00889	-0.00178	0.03645
150	$\hat{\theta}$	0.00599	0.00120	0.01116	-0.00034	-0.00007	0.02428
	$\tilde{\theta}$	0.00206	0.00041	0.01099	-0.00052	-0.00010	0.02428
	$\bar{\theta}$	0.00133	0.00027	0.01113	-0.00572	-0.00114	0.02431
200	$\hat{\theta}$	0.00206	0.00041	0.00692	0.00198	0.00040	0.01605
	$\tilde{\theta}$	-0.00075	-0.00015	0.00685	0.00167	0.00033	0.01605
	$\bar{\theta}$	0.00373	0.00075	0.00693	0.00005	0.00001	0.01605
250	$\hat{\theta}$	0.00115	0.00023	0.00516	0.00126	0.00025	0.01268
	$\tilde{\theta}$	-0.00111	-0.00022	0.00512	0.00107	0.00021	0.01268
	$\bar{\theta}$	-0.00745	-0.00149	0.00521	0.00900	0.00180	0.01276
300	$\hat{\theta}$	0.00076	0.00015	0.00438	0.00188	0.00038	0.00971
	$\tilde{\theta}$	-0.00107	-0.00021	0.00435	0.00163	0.00033	0.00971
	$\bar{\theta}$	-0.00129	-0.00026	0.00438	-0.00228	-0.00046	0.00971
350	$\hat{\theta}$	0.00581	0.00116	0.00737	0.00026	0.00005	0.00834
	$\tilde{\theta}$	0.00424	0.00085	0.00736	0.00008	0.00002	0.00834
	$\bar{\theta}$	-0.00112	-0.00022	0.00734	0.00689	0.00138	0.00839
400	$\hat{\theta}$	0.00173	0.00035	0.00317	-0.00120	-0.00024	0.00728
	$\tilde{\theta}$	0.00033	0.00007	0.00316	-0.00135	-0.00027	0.00728
	$\bar{\theta}$	0.00184	0.00037	0.00317	-0.00505	-0.00101	0.00730

É importante notar que o estimador corrigido analiticamente não apresenta um bom desempenho para tamanhos de amostras muito pequenos. Note que, independentemente do

valor de α , para $n = 50$, o EQM de tal estimador é muito superior aos EQM apresentados pelo EMV não-corrigido e corrigido por bootstrap. Por exemplo, para $n = 50$ e $\alpha = 3$, as estimativas dos EQM de $\hat{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$ e $\bar{\sigma}$ são 0.03129, 17.6035 e 0.02919, respectivamente.

Tabela 4.3: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros β_0 e β_1 no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 10$.

n	Estimador	Estimativas de β_0			Estimativas de β_1		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	0.08083	0.00808	0.04110	-0.00972	-0.00097	0.06223
	$\tilde{\theta}$	-1.59408	-0.15941	2506.85	-0.00537	-0.00054	0.06216
	$\bar{\theta}$	0.02326	0.00233	0.03511	-0.01391	-0.00139	0.06233
100	$\hat{\theta}$	0.01874	0.00187	0.00938	-0.00025	-0.00003	0.02228
	$\tilde{\theta}$	0.01514	0.00151	0.00916	-0.00101	-0.00010	0.02228
	$\bar{\theta}$	0.00285	0.00029	0.00904	0.00763	0.00076	0.02234
150	$\hat{\theta}$	0.00609	0.00061	0.00599	0.00355	0.00036	0.01500
	$\tilde{\theta}$	0.00368	0.00037	0.00595	0.00332	0.00033	0.01500
	$\bar{\theta}$	-0.00085	-0.00009	0.00596	0.00393	0.00039	0.01500
200	$\hat{\theta}$	0.00256	0.00026	0.00379	0.00078	0.00008	0.00974
	$\tilde{\theta}$	0.00088	0.00009	0.00378	0.00039	0.00004	0.00974
	$\bar{\theta}$	0.00102	0.00010	0.00379	0.00308	0.00031	0.00975
250	$\hat{\theta}$	0.00312	0.00031	0.00275	-0.00290	-0.00029	0.00735
	$\tilde{\theta}$	0.00174	0.00017	0.00273	-0.00314	-0.00031	0.00735
	$\bar{\theta}$	-0.00106	-0.00011	0.00274	-0.00109	-0.00011	0.00734
300	$\hat{\theta}$	-0.00010	-0.00001	0.00228	0.00173	0.00017	0.00587
	$\tilde{\theta}$	-0.00120	-0.00012	0.00228	0.00141	0.00014	0.00587
	$\bar{\theta}$	-0.00328	-0.00033	0.00229	0.00812	0.00081	0.00593
350	$\hat{\theta}$	0.00138	0.00014	0.00304	0.00058	0.00006	0.00483
	$\tilde{\theta}$	0.00042	0.00004	0.00304	0.00036	0.00004	0.00483
	$\bar{\theta}$	-0.00079	-0.00008	0.00304	-0.00444	-0.00044	0.00484
400	$\hat{\theta}$	0.00104	0.00010	0.00166	0.00002	0.00000	0.00433
	$\tilde{\theta}$	0.00019	0.00002	0.00166	-0.00017	-0.00002	0.00433
	$\bar{\theta}$	-0.00103	-0.00010	0.00166	-0.00201	-0.00020	0.00433

Contrariamente ao observado nos EMV dos parâmetros β_0 , β_1 e σ , notamos que o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de forma α não possui boas propriedades em amostras finitas, dado que as estimativas de viés, viés relativo e EQM são muito altas. Um fato importante que deve ser ressaltado é que à medida que o parâmetro de forma

aumenta, o EQM do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ também cresce. Percebemos que, para $\alpha = 3$ e tamanhos amostrais menores que 200, o estimador corrigido via Cox e Snell (1968) apresenta EQM muito superior aos obtidos pelo EMV não-corrigido e corrigido por bootstrap.

Nos casos onde $\alpha = 5$ e 10, ocorre um problema similar, sendo diferenciado apenas por manifestar-se em tamanhos amostrais menores que 150. O mau comportamento de tais estimadores pode ser explicado observando a matriz de informação de Fisher $K(\boldsymbol{\theta})$. Note que a informação sobre α é dada por $-\kappa_{\alpha\alpha} = nA_2^2(\alpha)$. Com base na figura 4.1, podemos observar que quando aumentamos o módulo de α , a quantidade $A_2^2(\alpha)$ fica mais próxima de zero. Assim, se α é grande, devemos ter um valor de n relativamente alto para termos informação suficiente a fim de estimarmos α com uma boa precisão.

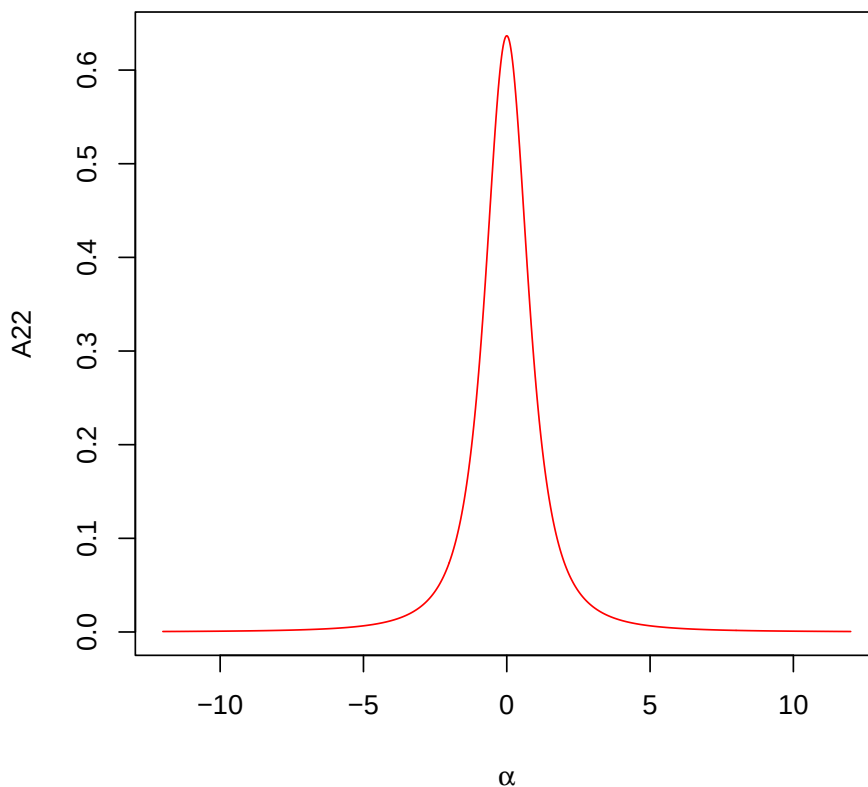


Figura 4.1: Gráfico da quantidade $A_2^2(\alpha)$.

Observamos que, para pequenos tamanhos amostrais, o estimador corrigido por bootstrap trabalha de forma eficiente em relação à redução de viés. Assim, para pequenas amostras, recomendamos o emprego da correção de viés por bootstrap.

Tabela 4.4: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 3$.

n	Estimador	Estimativas de σ			Estimativas de α		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	-0.04856	-0.01619	0.03129	0.89085	0.29695	11.1182
	$\tilde{\theta}$	0.26372	0.08791	17.6035	7.10607	2.36869	19209.1
	$\bar{\theta}$	0.01607	0.00536	0.02919	-0.15926	-0.05309	10.35
100	$\hat{\theta}$	-0.01864	-0.00621	0.01459	0.59821	0.19940	6.80705
	$\tilde{\theta}$	0.00905	0.00302	0.15582	0.19093	0.06364	122.055
	$\bar{\theta}$	-0.00784	-0.00261	0.01431	-1.11418	-0.37139	7.69059
150	$\hat{\theta}$	-0.00864	-0.00288	0.00856	0.39957	0.13319	3.63552
	$\tilde{\theta}$	0.00621	0.00207	0.13631	0.204031	0.06801	133.01
	$\bar{\theta}$	0.00106	0.00035	0.00849	0.17758	0.05919	3.5074
200	$\hat{\theta}$	-0.00904	-0.00301	0.00632	0.19758	0.06586	1.17157
	$\tilde{\theta}$	-0.00231	-0.00077	0.00604	-0.01374	-0.00458	0.75163
	$\bar{\theta}$	-0.00580	-0.00193	0.00627	-0.65905	-0.21968	1.56688
250	$\hat{\theta}$	-0.00349	-0.00116	0.00458	0.20441	0.06814	0.77876
	$\tilde{\theta}$	0.00170	0.00057	0.00447	0.03930	0.01310	0.58374
	$\bar{\theta}$	0.00073	0.00024	0.00457	-0.26799	-0.08933	0.80879
300	$\hat{\theta}$	-0.00408	-0.00136	0.00395	0.12814	0.04271	0.52819
	$\tilde{\theta}$	0.00026	0.00009	0.00387	-0.00124	-0.00041	0.42918
	$\bar{\theta}$	0.00360	0.00120	0.00394	0.03037	0.01012	0.51269
350	$\hat{\theta}$	-0.00635	-0.00212	0.00475	0.08873	0.02958	0.53990
	$\tilde{\theta}$	-0.00266	-0.00089	0.00468	-0.01993	-0.00664	0.46719
	$\bar{\theta}$	0.00288	0.00096	0.00472	0.06021	0.02007	0.53565
400	$\hat{\theta}$	-0.00408	-0.00136	0.00395	0.12814	0.04271	0.52819
	$\tilde{\theta}$	0.00026	0.00009	0.00387	-0.00124	-0.00041	0.42918
	$\bar{\theta}$	0.00360	0.00120	0.00394	0.03037	0.01012	0.51269

Para tamanhos de amostra maiores que 200, os resultados de simulação evidenciam que os estimadores corrigidos são altamente eficazes. Tal eficácia não é restrita apenas à redução de viés e viés relativo das estimativas produzidas, mas se estende à diminuição do EQM das mesmas. Por exemplo, para $n = 200$ e $\alpha = 10$, as estimativas de viés relativo de

$\hat{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ são 0.31624, 0.13234 e 0.07254, respectivamente. Ainda, as estimativas de EQM das mesmas são dadas por 91.4574, 36.9437 e 81.9832, na devida ordem.

Tabela 4.5: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 5$.

n	Estimador	Estimativas de σ			Estimativas de α		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	-0.05804	-0.01161	0.02340	1.01041	0.20208	19.4995
	$\tilde{\theta}$	0.07498	0.01500	6.40787	0.47046	0.09409	7346.36
	$\bar{\theta}$	0.05035	0.01007	0.02257	5.70363	1.14073	51.0099
100	$\hat{\theta}$	-0.01198	-0.00240	0.00898	1.40308	0.28062	20.7737
	$\tilde{\theta}$	-0.00315	-0.00063	0.00867	-0.72798	-0.14560	7.76156
	$\bar{\theta}$	-0.00340	-0.00068	0.00885	-0.49194	-0.09839	19.0471
150	$\hat{\theta}$	-0.00778	-0.00156	0.00609	1.11355	0.22271	18.0888
	$\tilde{\theta}$	-0.00207	-0.00041	0.00597	-0.17863	-0.03573	5.16099
	$\bar{\theta}$	0.00095	0.00019	0.00603	-0.95938	-0.19188	17.7693
200	$\hat{\theta}$	-0.00364	-0.00073	0.00443	0.73891	0.14778	10.6378
	$\tilde{\theta}$	0.00064	0.00013	0.00439	-0.03413	-0.00683	4.52676
	$\bar{\theta}$	-0.00334	-0.00067	0.00443	0.42888	0.08578	10.2758
250	$\hat{\theta}$	-0.00310	-0.00062	0.00338	0.49874	0.09975	3.44447
	$\tilde{\theta}$	0.00032	0.00006	0.00336	0.01486	0.00297	1.8849
	$\bar{\theta}$	0.00305	0.00061	0.00338	0.01804	0.00361	3.19605
300	$\hat{\theta}$	-0.00324	-0.00065	0.00294	0.41749	0.08350	2.54949
	$\tilde{\theta}$	-0.00039	-0.00008	0.00292	0.03417	0.00683	1.5784
	$\bar{\theta}$	-0.00015	-0.00003	0.00293	0.08576	0.01715	2.38254
350	$\hat{\theta}$	-0.00373	-0.00075	0.00318	0.31171	0.06234	1.92501
	$\tilde{\theta}$	-0.00129	-0.00026	0.00316	0.00003	0.00001	1.39815
	$\bar{\theta}$	0.00069	0.00014	0.00317	-0.04780	-0.00956	1.83013
400	$\hat{\theta}$	-0.00176	-0.00035	0.00216	0.28275	0.05655	1.45074
	$\tilde{\theta}$	0.00039	0.00008	0.00215	0.01668	0.00334	1.09107
	$\bar{\theta}$	0.00022	0.00004	0.00215	-0.98791	0.19758	2.34676

Outro fato que pode ser notado, com base nos resultados da avaliação numérica de correção de viés, é que o EMV do parâmetro de forma α tende a superestimar o verdadeiro valor do parâmetro, dado que todos os resultados obtidos mostram viés positivo, com exceção de um caso ($n = 50$ e $\alpha = 10$).

Dessa forma, a correção de viés do EMV do parâmetro de forma α torna-se muito

importante. Para efetuar tal correção, sugerimos o emprego do estimador corrigido por bootstrap se o tamanho amostral é menor que 200. E para outros casos, recomendamos fortemente a utilização do estimador corrigido analiticamente via Cox e Snell (1968), o qual apresenta, no cenário em discussão, todas as estimativas de viés e viés relativo, com exceção de um caso ($n = 200$ e $\alpha = 10$), e todas as estimativas de EQM, sem exceção, menores que as apresentadas pelo EMV não-corrigido e corrigido por bootstrap.

Tabela 4.6: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas dos parâmetros σ e α no caso de $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 2$, $\sigma = 1$ e $\alpha = 10$.

n	Estimador	Estimativas de σ			Estimativas de α		
		Viés	Viés Rel	EQM	Viés	Viés Rel	EQM
50	$\hat{\theta}$	-0.07399	-0.00740	0.02214	-0.81705	-0.08171	34.2103
	$\tilde{\theta}$	0.05381	0.00538	8.71368	-5.17018	-0.51702	14345.4
	$\bar{\theta}$	-0.01100	-0.00110	0.01678	0.05789	0.00579	33.5461
100	$\hat{\theta}$	-0.02002	-0.00200	0.00718	2.77737	0.27774	78.0995
	$\tilde{\theta}$	-0.01356	-0.00136	0.00695	-5.45438	-0.54544	83.0145
	$\bar{\theta}$	-0.00089	-0.00009	0.00678	0.56843	0.05684	70.7089
150	$\hat{\theta}$	-0.01072	-0.00107	0.00459	3.51681	0.35168	106.035
	$\tilde{\theta}$	-0.00650	-0.00065	0.00452	-2.97075	-0.29708	81.7602
	$\bar{\theta}$	-0.00343	-0.00034	0.00448	0.76676	0.07668	94.2549
200	$\hat{\theta}$	-0.00404	-0.00040	0.00338	3.16235	0.31624	91.4574
	$\tilde{\theta}$	-0.00088	-0.00009	0.00338	-1.32335	-0.13234	36.9437
	$\bar{\theta}$	-0.00320	-0.00032	0.00338	0.72537	0.07254	81.9832
250	$\hat{\theta}$	-0.00273	-0.00027	0.00264	2.56996	0.25700	70.0661
	$\tilde{\theta}$	-0.00020	-0.00002	0.00263	-0.55217	-0.05522	17.9073
	$\bar{\theta}$	-0.00023	-0.00002	0.00263	0.91349	0.09135	64.2959
300	$\hat{\theta}$	-0.00252	-0.00025	0.00228	2.27603	0.22760	63.0355
	$\tilde{\theta}$	-0.00041	-0.00004	0.00227	-0.17485	-0.01749	20.3519
	$\bar{\theta}$	0.00031	0.00003	0.00227	1.10782	0.11078	59.0824
350	$\hat{\theta}$	-0.00233	-0.00023	0.00210	1.74024	0.17402	41.0000
	$\tilde{\theta}$	-0.00051	-0.00005	0.00209	-0.03217	-0.00322	17.1723
	$\bar{\theta}$	-0.00313	-0.00031	0.00210	-1.60484	-0.16048	40.5471
400	$\hat{\theta}$	-0.00200	0.00020	0.00169	1.44658	0.14466	26.5398
	$\tilde{\theta}$	-0.00041	0.00004	0.00169	0.07407	0.00741	8.34100
	$\bar{\theta}$	-0.00203	0.00020	0.00169	-8.34879	-0.83488	94.1496

Com o intuito de ilustrar o comportamento do EMV e dos estimadores corrigidos via

Cox e Snell (1968) e por bootstrap do parâmetro α , construímos um gráfico onde são apresentadas as densidades estimadas, via kernel, a partir 5000 estimativas obtidas, para cada um dos estimadores considerados, no caso onde $n = 250$ e $\alpha = 10$. Tal gráfico é apresentado na figura 4.2. Denotamos o estimador corrigido analiticamente via Cox e Snell (1968) por EMVCS e o estimador corrigido por bootstrap por EMVBOOT. Observe que as médias das estimativas produzidas pelos estimadores corrigidos são inferiores às produzidas pelo EMV. As médias dos EMV, EMVCS e EMVBOOT são 12.56996, 9.44783 e 10.91349, respectivamente. Assim, é notório que a correção de viés desloca a distribuição do EMV na direção do verdadeiro valor do parâmetro α . Observe que o EMVBOOT desloca a distribuição do EMV sem afetar muito a estrutura de variância. Já o EMVCS não só desloca a distribuição, como também altera a estrutura de variância de tal forma que as estimativas fiquem mais concentradas em torno do verdadeiro valor do parâmetro $\alpha = 10$.

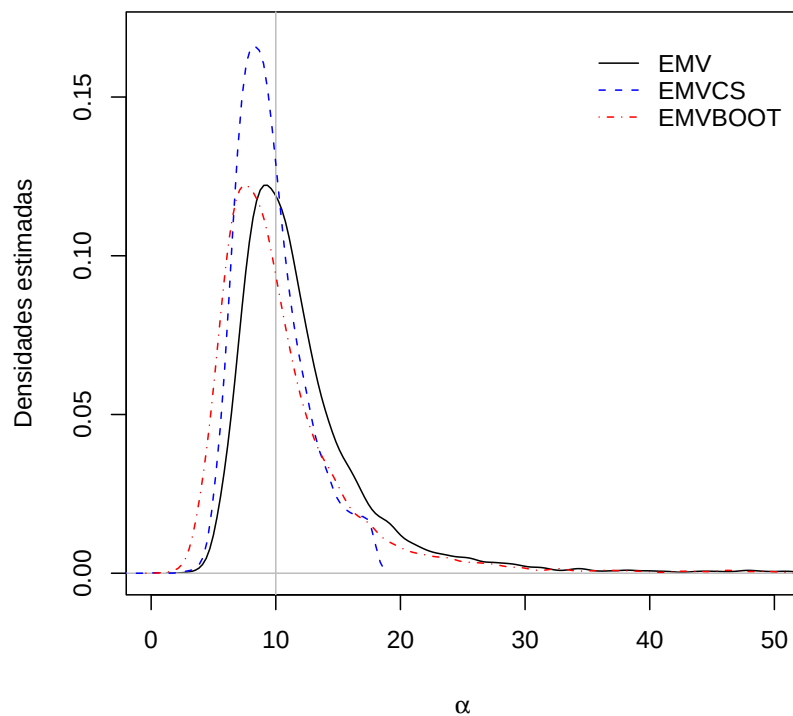


Figura 4.2: Gráfico das densidades estimadas do EMV, EMVCS e EMVBOOT para $\alpha = 10$ e $n = 250$.

Na tabela 4.7 são apresentadas as taxas de falha observadas em cada cenário considerado na avaliação numérica.

Tabela 4.7: Taxas de falha observadas nos diversos cenários considerados.

α	Tamanhos amostrais (n)							
	50	100	150	200	250	300	350	400
3	0.1218	0.0174	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.3508	0.0658	0.0136	0.0018	0.0012	0.0004	0.0002	0.0000
10	1.1212	0.3560	0.1342	0.0624	0.0216	0.0104	0.0036	0.0022

Percebemos que podem ocorrer problemas de convergência, principalmente quando o tamanho amostral é reduzido e o parâmetro α é grande. Porém, quando n aumenta, este problema tende a desaparecer. Por exemplo, para $n = 150$ e $\alpha = 5$, nós observamos que a taxa de falha é de 0.0136, ou seja, tivemos problemas de convergência 68 vezes, precisando de 5068 réplicas para obtermos as 5000 estimativas. No caso de $n = 350$ e $\alpha = 5$, o número de não-convergências foi reduzido a 1, produzindo uma taxa de falha de 0.0002.

Neste capítulo, apresentamos duas aplicações do modelo de regressão normal assimétrico. Os conjuntos de dados utilizados foram extraídos de Ezekiel (1930) e Prater (1956), os quais são referentes às distâncias percorridas por carros desde o momento da frenagem até sua parada e a proporção de petróleo cru que é convertido em gasolina após a destilação e fracionamento, respectivamente.

5.1 Distâncias percorridas por carros desde o momento da frenagem até sua parada

Utilizamos os dados referentes às distâncias percorridas por carros desde o momento da frenagem até sua parada, os quais têm como covariável a velocidade em que o carro se encontra antes da frenagem. As distâncias percorridas e as velocidades são medidas em pés (ft) e milhas por hora (mph), respectivamente. O número de observações de tal conjunto de dados é $n = 50$. O modelo ajustado foi

$$dist_i = \beta_0 + \beta_1 speed_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 50, \quad (5.1)$$

onde $dist_i$ e $speed_i$ correspondem às i -ésimas distâncias percorridas e velocidades antes da frenagem, respectivamente. Assumimos que os ε_i 's são variáveis aleatórias regidas por uma distribuição $SN(0, \sigma, \alpha)$. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros

do modelo de regressão 5.1 e suas versões corrigidas analiticamente via Cox e Snell (1968) e por bootstrap são apresentadas na Tabela 5.1. Um fato que deve ser ressaltado é que as versões corrigidas dos EMV sempre apontam na mesma direção. Este fato indica que os estimadores corrigidos estão trabalhando de forma a reduzir o viés. Mais especificamente, as estimativas corrigidas dos parâmetros β_0 e α indicam que as estimativas de máxima verossimilhança de tais parâmetros estão superestimadas. Por outro lado, as estimativas corrigidas dos parâmetros de inclinação (β_1) e de escala (σ) indicam que as estimativas de máxima verossimilhança dos mesmos estão subestimadas.

Tabela 5.1: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de distâncias percorridas.

Parâmetros	EMV	EMVCS	EMVBOOT
β_0	-25.92804	-26.28965	-28.72346
β_1	3.30412	3.30680	3.33175
σ	23.72400	24.17027	25.42527
α	4.34865	2.94933	3.50036

5.2 Proporção de petróleo cru

Consideramos os dados da proporção de petróleo cru que é convertido em gasolina após a destilação e fracionamento (oil), os quais são a variável de interesse. Como covariável temos o grau API do petróleo cru (api), o qual é uma forma de expressar a sua densidade relativa. O grau API do petróleo cru varia inversamente à sua densidade relativa. Outras covariáveis são a pressão de vapor do petróleo cru (press), que é uma medida de tendência de evaporação do petróleo cru, e ainda, as temperaturas, em Fahrenheit, em que 10% do petróleo cru (tempten) e toda a gasolina (temp) são vaporizados. Tal conjunto de dados é provido de $n = 32$ observações. Note que a variável resposta se trata de uma proporção. Assim, como sugerido no capítulo 2, aplicamos a transformação logística a esta variável. Logo, definimos o modelo da seguinte forma

$$\log \left(\frac{oil_i}{1 - oil_i} \right) = \beta_0 + \beta_1 api_i + \beta_2 press_i + \beta_3 tempten_i + \beta_4 temp_i + \varepsilon_i, \quad (5.2)$$

onde $i = 1, \dots, 32$. Supomos que os ε_i 's têm distribuição $SN(0, \sigma, \alpha)$. Apresentamos

na tabela 5.2 as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão 5.2. Notamos que as estimativas de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_4)^\top$ e de σ não diferem muito daquelas produzidas pelos estimadores corrigidos, da mesma forma como observado na avaliação numérica. Assim, a correção de viés dos EMV dos parâmetros de regressão e escala não são muito necessárias. Entretanto, a correção de viés do EMV do parâmetro de forma α é recomendada. Note que a maior diferença entre os EMV dos parâmetros do modelo de regressão e suas versões corrigidas reside nas estimativas do parâmetro α . Ainda, com base nos resultados da avaliação numérica, a utilização do estimador corrigido por bootstrap é mais indicada.

Tabela 5.2: Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de proporção de petróleo cru.

Parâmetros	EMV	EMVCS	EMVBOOT
β_0	-2.86107	-2.83070	-2.74428
β_1	0.00276	0.00290	0.00339
β_2	0.05568	0.05524	0.05223
β_3	-0.01059	-0.01062	-0.01070
β_4	0.01110	0.01110	0.01114
σ	0.26641	0.29227	0.29778
α	-1.84622	-1.30983	-2.26362

5.3 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos características e propriedades do modelo de regressão normal assimétrico. Adicionalmente, fornecemos uma alternativa para modelar dados que são restritos ao intervalo (0,1). A alternativa apresentada consiste basicamente em transformar a variável resposta de tal forma que esta assuma valores em toda a reta (transformação logística) e substituímos a usual suposição de normalidade dos erros pela suposição de que os erros têm distribuição normal assimétrica.

Derivamos expressões de forma fechada para os vieses de ordem $O(n^{-1})$ dos EMV do modelo de regressão normal assimétrico, as quais permitem a remoção do viés de segunda ordem dos EMV dos parâmetros do modelo supracitado. Ainda, mostramos que o viés de ordem $O(n^{-1})$ obtido através da fórmula geral de Cox e Snell (1968) pode ser

encontrado a partir de uma regressão de mínimos quadrados generalizados, o que facilita o seu cálculo. Apresentamos a metodologia de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança por bootstrap paramétrico. Adicionalmente, apresentamos, no Apêndice A, boas aproximações para as quantidades da forma $A_n^m(\alpha)$, as quais são necessárias para o cálculo dos vieses de segunda ordem dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão normal assimétrico. Tais aproximações são de fácil cálculo e diminuem o custo computacional.

Os resultados das simulações de Monte Carlo mostram que as correções de viés são eficazes. Embora tais correções trabalhem reduzindo o viés dos EMV, percebemos, que para os parâmetros de regressão e escala, as estimativas produzidas não apresentam uma forte melhoria, indicando que os EMV desses parâmetros têm boas propriedades em amostras finitas. Entretanto, no caso do parâmetro de assimetria α , as estimativas de máxima verossimilhança se apresentam muito viesadas, e as estimativas corrigidas produzem uma melhora significativa. Mais precisamente, para tamanhos amostrais menores que 200, a correção por bootstrap trabalha de forma mais satisfatória, enquanto que para tamanhos de amostra maiores que 200 o estimador corrigido analiticamente via Cox e Snell (1968) apresenta um desempenho superior aos dos estimadores de máxima verossimilhança e de sua versão corrigida por bootstrap. Assim, recomendamos fortemente a correção de viés do EMV do parâmetro de forma α .

APÊNDICE A

Aproximações

Neste apêndice, apresentamos aproximações para algumas quantidades da forma $A_n^m(\alpha)$, as quais são definidas como

$$A_n^m(\alpha) = E_{\omega_i}[\Delta_i^m \omega_i^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^m \omega_i^n 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i. \quad (\text{A.1})$$

As quantidades para as quais apresentamos aproximações são $A_0^3(\alpha)$, $A_1^3(\alpha)$, $A_2^3(\alpha)$, $A_3^3(\alpha)$, $A_0^2(\alpha)$, $A_1^2(\alpha)$, $A_2^2(\alpha)$, $A_3^2(\alpha)$ e $A_4^2(\alpha)$. As aproximações propostas foram desenvolvidas para valores de α diferentes de zero, dado que $A_n^m(0)$ pode ser obtida sem recorrer a métodos numéricos. Notamos que, para valores pares (ímpares) de m , as funções $A_n^m(\alpha)$ são pares (ímpares). Desta forma, a partir de tal observação, primeiramente as aproximações foram obtidas para valores positivos de α , e, posteriormente, generalizamos as mesmas para valores negativos de α .

As aproximações foram obtidas através de modelos de regressão da forma

$$A_n^m(\alpha) = \beta_0 \alpha^{\beta_1} (1 + \alpha^2)^{\beta_2}. \quad (\text{A.2})$$

Observe que tal modelo se torna linear através da transformação logarítmica

$$\log A_n^m(\alpha) = \beta_0^* + \beta_1 \log \alpha + \beta_2 \log(1 + \alpha^2), \quad (\text{A.3})$$

onde $\beta_0^* = \log \beta_0$. Note que o modelo A.3 considera $\alpha > 0$. Utilizando a informação de que para valores de m pares (ímpares) as funções $A_n^m(\alpha)$ são pares (ímpares), obtemos as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0^3(\alpha) &= \exp\{-0.2172 + 0.2174 \log |\alpha| - 0.5692 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_1^3(\alpha) &= -\sin(\alpha) \exp\{-0.0320 + 1.0852 \log |\alpha| - 1.5257 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_2^3(\alpha) &= \exp\{0.3360 + 0.4581 \log |\alpha| - 1.6676 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_3^3(\alpha) &= -\sin(\alpha) \exp\{1.1627 + 1.1295 \log |\alpha| - 2.5415 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_0^2(\alpha) &= \exp\{-0.3670 + 0.0411 \log |\alpha| - 0.5112 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_1^2(\alpha) &= -\sin(\alpha) \exp\{-0.7260 + 0.9769 \log |\alpha| - 1.4927 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_2^2(\alpha) &= \exp\{-0.2199 + 0.1110 \log |\alpha| - 1.5335 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_3^2(\alpha) &= -\sin(\alpha) \exp\{-0.3460 + 0.9647 \log |\alpha| - 2.4880 \log(1 + \alpha^2)\} \\
\hat{A}_4^2(\alpha) &= \exp\{1.0023 + 0.1678 \log |\alpha| - 2.5544 \log(1 + \alpha^2)\}
\end{aligned}$$

A regressão foi feita para valores de α variando no intervalo $(0.01, 12)$. O número de observações utilizadas para estimar os parâmetros do modelo (A.3) foi 11991.

Com o objetivo de avaliarmos as aproximações propostas, construímos gráficos das funções $A_n^m(\alpha)$, obtidas através de integração numérica, e suas respectivas aproximações. Apresentamos, também, os coeficientes de determinação R^2 obtidos pelos ajustes dos modelos que deram origem às aproximações.

Podemos observar, através dos gráficos, que as aproximações fornecidas trabalham de forma eficiente, pois são muito próximas dos valores obtidos por integração numérica. Outro indicativo de que as aproximações propostas são boas está presente nos valores obtidos pelos coeficientes de determinação R^2 . Notamos que as aproximações onde m é ímpar trabalham de forma mais satisfatória que aquelas onde m é par.

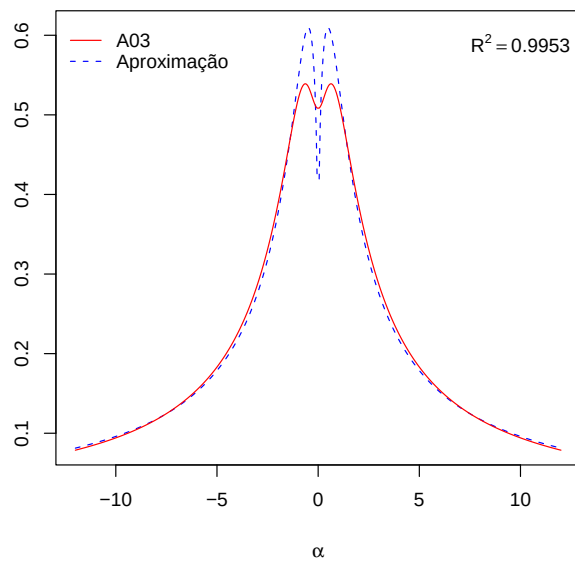


Figura A.1: Gráfico da quantidade $A_0^3(\alpha)$ e sua aproximação.

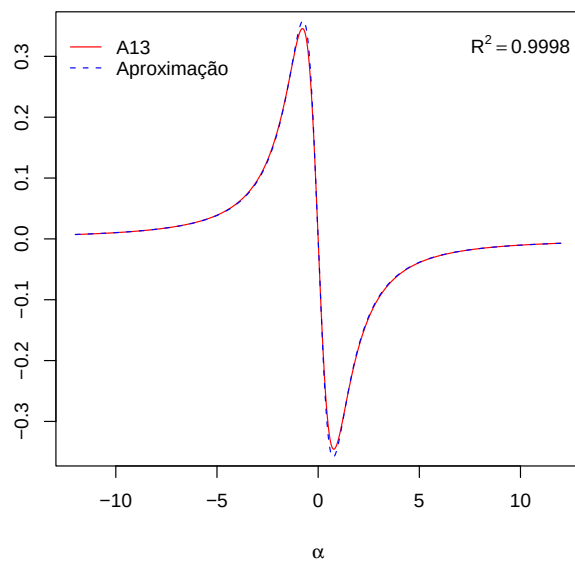


Figura A.2: Gráfico da quantidade $A_1^3(\alpha)$ e sua aproximação.

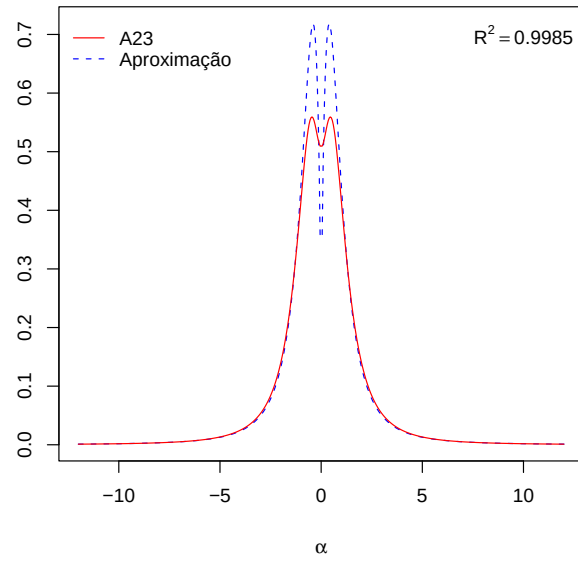


Figura A.3: Gráfico da quantidade $A_2^3(\alpha)$ e sua aproximação.

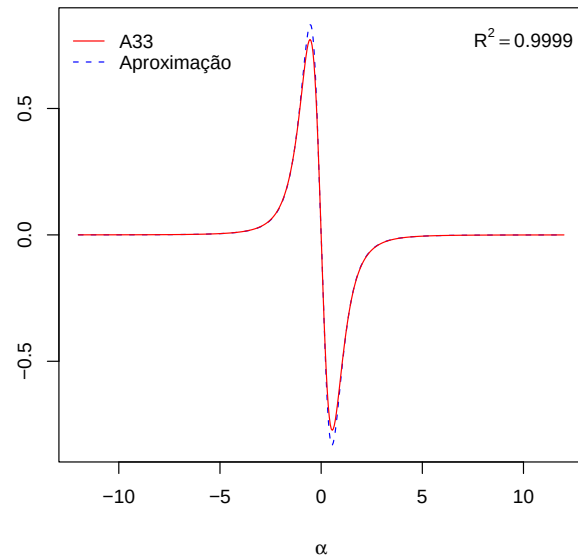


Figura A.4: Gráfico da quantidade $A_3^3(\alpha)$ e sua aproximação.

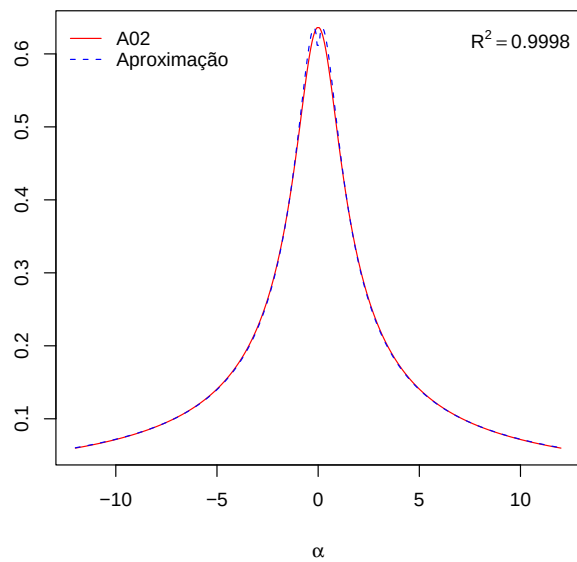


Figura A.5: Gráfico da quantidade $A_0^2(\alpha)$ e sua aproximação.

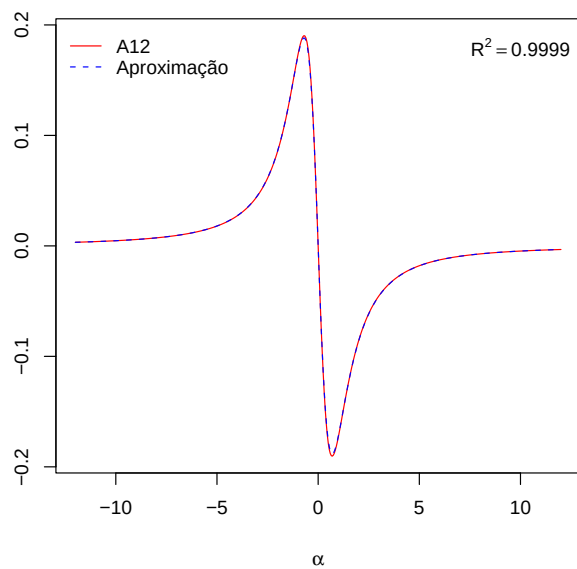


Figura A.6: Gráfico da quantidade $A_1^2(\alpha)$ e sua aproximação.

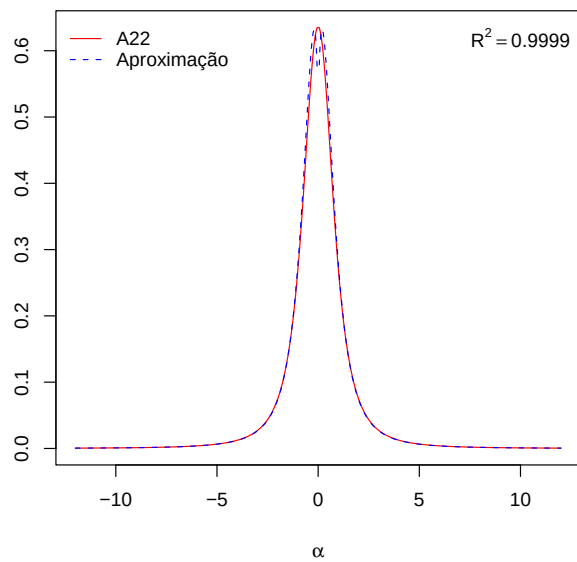


Figura A.7: Gráfico da quantidade $A_2^2(\alpha)$ e sua aproximação.

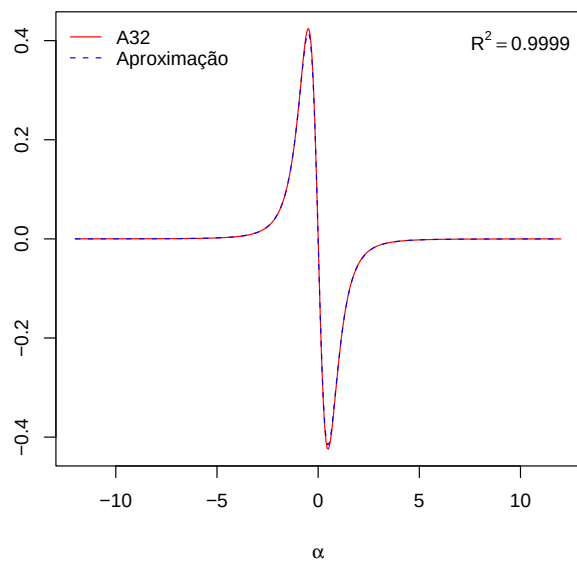


Figura A.8: Gráfico da quantidade $A_3^2(\alpha)$ e sua aproximação.

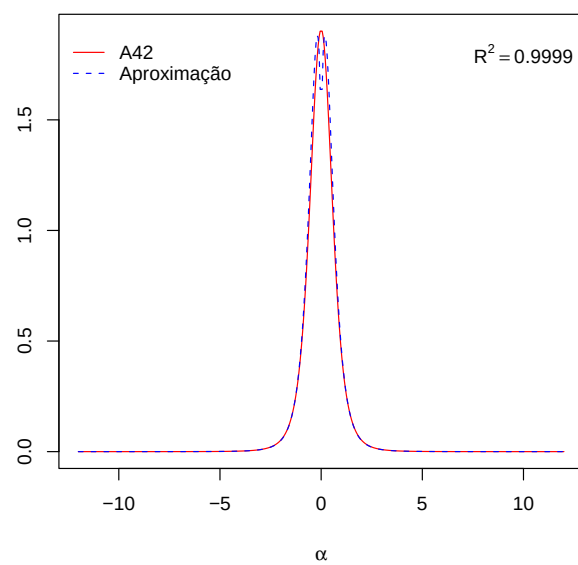


Figura A.9: Gráfico da quantidade $A_4^2(\alpha)$ e sua aproximação.

APÊNDICE B

Cálculo dos Momentos

A função de log-verossimilhança, para o modelo de regressão normal assimétrico, a menos de uma constante, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} l(\beta, \sigma, \alpha) &= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \phi \left(\frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) + \sum_{i=1}^n \log \Phi \left(\alpha \frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) \\ &= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \phi(\omega_i) + \sum_{i=1}^n \log \Phi(\alpha \omega_i), \end{aligned}$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são, respectivamente, a função densidade e a função de distribuição acumulada da variável aleatória normal padrão e $\omega_i = \frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma}$.

As seguintes derivadas serão de grande valia na simplificação dos cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) = 0, \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) = -\frac{\omega_i}{\sigma}, \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial \beta_r} &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left(\frac{z_i - X_i^\top \beta}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \beta_r} (-X_i^\top \beta) = -\frac{X_{ir}}{\sigma}. \end{aligned}$$

Alguns resultados importantes:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} &= \Delta_i \Rightarrow \phi(\alpha\omega_i) = \Delta_i\Phi(\alpha\omega_i), \\ \frac{\phi'(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} &= \frac{-\alpha\omega_i\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} = -\alpha\omega_i\Delta_i, \\ \frac{\phi'(\omega_i)}{\phi(\omega_i)} &= \frac{(2\pi)^{-1/2} \exp(-\omega_i^2/2)(-1/2)(2\omega_i)}{(2\pi)^{-1/2} \exp(-\omega_i^2/2)} = -\omega_i.\end{aligned}$$

Logo,

$$\phi'(\alpha\omega_i) = -\alpha\omega_i\phi(\alpha\omega_i).$$

$$\begin{aligned}E[\Delta_i] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} 2\phi(\omega_i)\Phi(\alpha\omega_i)d\omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i)\phi(\alpha\omega_i)d\omega_i \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp(-\omega_i^2/2) (2\pi)^{-1/2} \exp[(-\alpha\omega_i)^2/2] d\omega_i \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\omega_i^2(1+\alpha^2)\right] d\omega_i; \quad \text{Seu} = (1+\alpha^2)^{-1/2}, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_i}{u}\right)^2\right] d\omega_i = \frac{u\sqrt{2\pi}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_i}{u}\right)^2\right] d\omega_i \\ &= \frac{u\sqrt{2\pi}}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\alpha^2)^{-1/2}; \quad \text{Se } b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ &= b(1+\alpha^2)^{-1/2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[\Delta_i\omega_i^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} \omega_i^2 2\phi(\omega_i)\Phi(\alpha\omega_i)d\omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^2 \phi(\omega_i)\phi(\alpha\omega_i)d\omega_i \\ &= bu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^2 \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_i}{u}\right)^2\right] d\omega_i = bu^3 = b(1+\alpha^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[\Delta_i\omega_i^4] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} \omega_i^4 2\phi(\omega_i)\Phi(\alpha\omega_i)d\omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^4 \phi(\omega_i)\phi(\alpha\omega_i)d\omega_i \\ &= bu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^4 \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_i}{u}\right)^2\right] d\omega_i = bu \frac{4!}{2!} \frac{u^4}{4} = 3bu^5 = 3b(1+\alpha^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

$\forall$ r ímpar, temos:

$$\begin{aligned} E[\Delta_i \omega_i^r] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \omega_i^r 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) d\omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^r \phi(\omega_i) \phi(\alpha \omega_i) d\omega_i \\ &= bu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^r \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_i}{u} \right)^2 \right] d\omega_i = 0. \end{aligned}$$

$$E[\omega_i] = b\alpha(1 + \alpha^2)^{-1/2}.$$

$$\begin{aligned} E[\omega_i^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i^2 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) d\omega_i = \int_{-\infty}^0 2\omega_i^2 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) d\omega_i + \int_0^{\infty} 2\omega_i^2 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) d\omega_i \\ \text{Se } z_i &= -\omega_i, \\ E[\omega_i^2] &= \int_0^{\infty} 2z_i^2 \phi(z_i) \Phi(\alpha z_i) dz_i + \int_0^{\infty} 2z_i^2 \phi(z_i) \Phi(\alpha z_i) dz_i = \int_0^{\infty} 2z_i^2 \phi(z_i) [1 - \Phi(\alpha z_i)] dz_i \\ &+ \int_0^{\infty} 2z_i^2 \phi(z_i) \Phi(\alpha z_i) dz_i = \int_0^{\infty} 2z_i^2 \phi(z_i) dz_i = \int_{-\infty}^{\infty} z_i^2 \phi(z_i) dz_i = 1. \end{aligned}$$

Algumas derivadas importantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \beta_r} &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left[\frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \right] = \frac{-\frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \phi'(\alpha \omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) + \frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \phi(\alpha \omega_i) \phi(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} \\ &= -\frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \frac{\phi'(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} + \frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \frac{\phi^2(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} \\ &= -\frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} (-\alpha \omega_i \Delta_i) + \frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \Delta_i^2 = \frac{\alpha^2}{\sigma} X_{ir} \Delta_i \omega_i + \frac{\alpha}{\sigma} X_{ir} \Delta_i^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \right] = \frac{-\frac{\alpha}{\sigma} \omega_i \phi'(\alpha \omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) + \frac{\alpha}{\sigma} \omega_i \phi(\alpha \omega_i) \phi(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} \\ &= -\frac{\alpha}{\sigma} \omega_i \frac{\phi'(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} + \frac{\alpha}{\sigma} \omega_i \frac{\phi^2(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} = -\frac{\alpha}{\sigma} \omega_i (-\alpha \omega_i \Delta_i) + \frac{\alpha}{\sigma} \omega_i \Delta_i^2 = \frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \right) = \frac{\omega_i \phi'(\alpha \omega_i) \Phi(\alpha \omega_i) - \omega_i \phi(\alpha \omega_i) \phi(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} = \omega_i \frac{\phi'(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} - \omega_i \frac{\phi^2(\alpha \omega_i)}{\Phi^2(\alpha \omega_i)} \\ &= \omega_i (-\alpha \omega_i \Delta_i) - \omega_i \Delta_i^2 = -\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2. \end{aligned}$$

Calcularemos, agora, as derivadas de algumas funções, as quais foram definidas em (2.21):

$$\begin{aligned}
\frac{dA_0^2(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} [E(\Delta_i^2)] = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \right) \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} \omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(\omega_i) \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i) \left\{ 2\Delta_i \Phi(\alpha\omega_i) \frac{d\Delta_i}{d\alpha} + \Delta_i^2 \frac{d\Phi(\alpha\omega_i)}{d\alpha} \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i) \left\{ 2\Delta_i \Phi(\alpha\omega_i) [-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2] + \Delta_i^2 \phi(\alpha\omega_i) \omega_i \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i) \left\{ -2\Delta_i^3 \omega_i \Phi(\alpha\omega_i) - 2\alpha \Delta_i^2 \omega_i^2 \Phi(\alpha\omega_i) + \Delta_i^2 \omega_i \phi(\alpha\omega_i) \right\} d\omega_i \\
&= -4 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^3 \omega_i \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i - 4 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \Delta_i^2 \omega_i^2 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i \phi(\omega_i) \phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&= -2E[\Delta_i^3 \omega_i] - 2\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i^2] + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^3 \omega_i 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&= -2E[\Delta_i^3 \omega_i] - 2\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i^2] + E[\Delta_i^3 \omega_i] \\
&= -A_1^3(\alpha) - 2\alpha A_2^2(\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1^2(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} E[\Delta_i^2 \omega_i] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \right\} \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \omega_i \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} d\omega_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i) \omega_i \left\{ \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_i) \omega_i \left\{ 2\Delta_i \Phi(\alpha\omega_i) \frac{d\Delta_i}{d\alpha} + \Delta_i^2 \omega_i \phi(\alpha\omega_i) \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} 2\Delta_i \omega_i \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) [-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2] d\omega_i + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i^2 \phi(\omega_i) \phi(\alpha\omega_i) d\omega_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^3 \omega_i^2 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i - 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i^3 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i^2 2\phi(\omega_i) \phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&= -2E[\Delta_i^3 \omega_i^2] - 2\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i^3] + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^3 \omega_i^2 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \\
&= -2E[\Delta_i^3 \omega_i^2] - 2\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i^3] + E[\Delta_i^3 \omega_i^2] \\
&= -A_2^3(\alpha) - 2\alpha A_3^2(\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2^2(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} E[\Delta_i^2 \omega_i^2] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i^2 \omega_i^2 2\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) d\omega_i \right\} \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \omega_i^2 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) \frac{d}{d\alpha} [\Delta_i^2 \omega_i^2] + \Delta_i^2 \omega_i^2 \frac{d}{d\alpha} [\phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i)] \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) [2\Delta_i \omega_i^2 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2)] + \Delta_i^2 \omega_i^2 [\phi(\omega_i) \phi(\alpha\omega_i) \omega_i] \right\} d\omega_i \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2\Delta_i^3 \omega_i^3 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) - 2\alpha \Delta_i^2 \omega_i^4 \phi(\omega_i) \Phi(\alpha\omega_i) + \Delta_i^2 \omega_i^3 \phi(\omega_i) \phi(\alpha\omega_i) \right\} d\omega_i \\
&= -2E[\Delta_i^3 \omega_i^3] - 2\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i^4] + E[\Delta_i^3 \omega_i^3] \\
&= -2A_3^3(\alpha) - 2\alpha A_4^2(\alpha) + A_3^3(\alpha) = -A_3^3(\alpha) - 2\alpha A_4^2(\alpha).
\end{aligned}$$

Derivadas da função de log-verossimilhança

Derivadas de primeira ordem

$$\begin{aligned}
U_r &= \frac{\partial \ell(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_r} \log \phi(\omega_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_r} \log \Phi(\alpha\omega_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\omega_i)}{\phi(\omega_i)} \frac{\partial \omega_i}{\partial \beta_r} + \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\alpha\omega_i)}{\Phi(\alpha\omega_i)} \frac{\partial \alpha\omega_i}{\partial \beta_r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_r &= \sum_{i=1}^n (-\omega_i) \left(-\frac{X_{ir}}{\sigma} \right) + \sum_{i=1}^n \Delta_i \alpha \left(-\frac{X_{ir}}{\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_\sigma &= \frac{\partial l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\omega_i)}{\phi(\omega_i)} \frac{\partial \omega_i}{\partial \sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \frac{\partial \alpha \omega_i}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_\alpha &= \frac{\partial l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \alpha} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\alpha \omega_i)}{\Phi(\alpha \omega_i)} \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i.
\end{aligned}$$

Derivadas de segunda ordem

$$\begin{aligned}
U_{rt} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_t} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_t} \left(\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \right) \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \frac{\partial \omega_i}{\partial \beta_t} - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \beta_t} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (1 + \alpha^3 \Delta_i \omega_i + \alpha^2 \Delta_i^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r\sigma} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \beta_r \partial \sigma} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \right) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i + \left[\sum_{i=1}^n X_{ir} \left(-\frac{\omega_i}{\sigma} \right) \frac{1}{\sigma} \right] - \alpha \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r\alpha} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \beta_r \partial \alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \right) \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \right) \\
&= -\frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i + \sum_{i=1}^n X_{ir} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \alpha \right) \\
&= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-\alpha \Delta_i \omega_i^2 - \Delta_i^2 \omega_i) \alpha \\
&= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i \omega_i^2 + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \Delta_i^2 \omega_i \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-\Delta_i + \alpha^2 \Delta_i \omega_i^2 + \alpha \Delta_i^2 \omega_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\sigma} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \\
&= \frac{n}{\sigma^2} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \\
&= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n 2\omega_i \left(-\frac{\omega_i}{\sigma} \right) + \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \right] \\
&= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + \frac{2\alpha}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i^2 + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^3 \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\sigma} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \alpha \partial \sigma} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i^2 + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^3 - \frac{\Delta_i \omega_i}{\sigma} \right) \\
&= \frac{\alpha^2}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \alpha^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \omega_i + \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha} \Delta_i \right) \\
&= -\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2.
\end{aligned}$$

Derivadas de terceira ordem

$$\begin{aligned}
U_{rtu} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \beta_t \partial \beta_u} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_u} \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (-1 - \alpha^3 \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_u} (-\alpha^3 \Delta_i \omega_i) - \frac{\partial}{\partial \beta_u} (\alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left\{ -\alpha^3 \left[\frac{\alpha^2}{\sigma} X_{iu} \Delta_i \omega_i^2 + \frac{\alpha}{\sigma} X_{iu} \Delta_i^2 \omega_i - \Delta_i \left(\frac{X_{iu}}{\sigma} \right) \right] - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \beta_u} \Delta_i^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[-\frac{\alpha^5}{\sigma} X_{iu} \Delta_i \omega_i^2 - \frac{\alpha^4}{\sigma} X_{iu} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^3}{\sigma} \Delta_i X_{iu} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[2\alpha^2 \Delta_i \left(\frac{\alpha^2}{\sigma} X_{iu} \Delta_i \omega_i + \frac{\alpha}{\sigma} X_{iu} \Delta_i^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu} (-\alpha^5 \Delta_i \omega_i^2 - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i + \alpha^3 \Delta_i - 2\alpha^3 \Delta_i^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{rt\sigma} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \beta_t \partial \sigma} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (1 + \alpha^3 \Delta_i \omega_i + \alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (1 + \alpha^3 \Delta_i \omega_i + \alpha^2 \Delta_i^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha^3 \Delta_i \omega_i + \alpha^2 \Delta_i^2) \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (2 + 2\alpha^3 \Delta_i \omega_i + 2\alpha^2 \Delta_i^2) - \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[\alpha^3 \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i^2 + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^3 - \frac{1}{\sigma} \Delta_i \omega_i \right) + \alpha^2 \left(\frac{2\alpha}{\sigma} \Delta_i^3 \omega_i + \frac{2\alpha^2}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (2 + 2\alpha^3 \Delta_i \omega_i + 2\alpha^2 \Delta_i^2 - \alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^3 + \alpha^3 \Delta_i \omega_i - 2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i - 2\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^2) \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (2 + 2\alpha^2 \Delta_i^2 + 3\alpha^3 \Delta_i \omega_i - 2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{rt\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \beta_r \partial \alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (1 + \alpha^3 \Delta_i \omega_i + \alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^3 \Delta_i \omega_i) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \{ 3\alpha^2 \Delta_i \omega_i + \alpha^3 [\omega_i (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2)] + 2\alpha \Delta_i^2 + 2\alpha^2 \Delta_i (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) \} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (3\alpha^2 \Delta_i \omega_i - \alpha^4 \Delta_i \omega_i^3 - \alpha^3 \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha^3 \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha^2 \Delta_i^3 \omega_i + 2\alpha \Delta_i^2) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (3\alpha^2 \Delta_i \omega_i - \alpha^4 \Delta_i \omega_i^3 - 3\alpha^3 \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha^2 \Delta_i^3 \omega_i + 2\alpha \Delta_i^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r\sigma\sigma} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \sigma^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&= -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&= -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ -2 \left(-\frac{\omega_i}{\sigma} \right) + \alpha \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ \alpha^2 \left[2\Delta_i \omega_i \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^2 \right) + \Delta_i^2 \left(-\frac{\omega_i}{\sigma} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ \alpha^3 \left[\omega_i^2 \left(\frac{\alpha}{\sigma} \Delta_i^2 \omega_i + \frac{\alpha^2}{\sigma} \Delta_i \omega_i^2 \right) + 2\Delta_i \omega_i - \left(\frac{\omega_i}{\sigma} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (4\omega_i - 2\alpha\Delta_i + 2\alpha^2\Delta_i^2 + 2\alpha^3\Delta_i\omega_i^2 + 2\omega_i + \alpha^2\Delta_i^2 + \alpha^3\Delta_i\omega_i^2 - 2\alpha^3\Delta_i^3\omega_i^2) \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\alpha^4\Delta_i^2\omega_i^3 + \alpha^2\Delta_i^2\omega_i - \alpha^4\Delta_i^2\omega_i^3 - \alpha^5\Delta_i\omega_i^4 + 2\alpha^3\Delta_i\omega_i^2) \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (6\omega_i - 2\alpha\Delta_i + 4\alpha^2\Delta_i^2\omega_i + 5\alpha^3\Delta_i\omega_i^2 - 2\alpha^3\Delta_i^3\omega_i^2 - 3\alpha^4\Delta_i^2\omega_i^3 - \alpha^5\Delta_i\omega_i^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r\sigma\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \sigma \partial \alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha\Delta_i - \alpha^2\Delta_i^2\omega_i - \alpha^3\Delta_i\omega_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha\Delta_i) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^2\Delta_i^2\omega_i) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^3\Delta_i\omega_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ [\Delta_i + \alpha(-\Delta_i^2\omega_i - \alpha\Delta_i\omega_i^2)] - 2\alpha\Delta_i^2\omega_i - \alpha^2 [2\Delta_i\omega_i(-\Delta_i^2\omega_i - \alpha\Delta_i\omega_i^2)] \} \\
&- \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ 3\alpha^2\Delta_i\omega_i^2 + \alpha^3[\omega_i^2(-\Delta_i^2\omega_i - \alpha\Delta_i\omega_i^2)] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (\Delta_i - \alpha\Delta_i^2\omega_i - \alpha^2\Delta_i\omega_i^2 - 2\alpha\Delta_i^2\omega_i + 2\alpha^2\Delta_i^3\omega_i^2 + 2\alpha^3\Delta_i^2\omega_i^3 - 3\alpha^2\Delta_i\omega_i^2) \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (\alpha^3\Delta_i^2\omega_i^3 + \alpha^4\Delta_i\omega_i^4) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (\Delta_i - 3\alpha\Delta_i^2\omega_i - 4\alpha^2\Delta_i\omega_i^2 + 2\alpha^2\Delta_i^3\omega_i^2 + 3\alpha^3\Delta_i^2\omega_i^3 + \alpha^4\Delta_i\omega_i^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{r\alpha\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \alpha^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-\Delta_i + \alpha^2\Delta_i\omega_i^2 + \alpha\Delta_i^2\omega_i) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left[-\frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^2\Delta_i\omega_i^2) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha\Delta_i^2\omega_i) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left[\Delta_i^2 \omega_i + \alpha \Delta_i \omega_i^2 + 2\alpha \Delta_i \omega_i^2 + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i \omega_i^2) + \Delta_i^2 \omega_i + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i^2 \omega_i) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left[\Delta_i^2 \omega_i + 3\alpha \Delta_i \omega_i^2 + \alpha^2 \omega_i^2 \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} + \Delta_i^2 \omega_i + 2\alpha \Delta_i \omega_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} [\Delta_i^2 \omega_i + 3\alpha \Delta_i \omega_i^2 + \alpha^2 \omega_i^2 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) + \Delta_i^2 \omega_i + 2\alpha \Delta_i \omega_i (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2)] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} [2\Delta_i^2 \omega_i + 3\alpha \Delta_i \omega_i^2 - 3\alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i^3 - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^4 - 2\alpha \Delta_i^3 \omega_i^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\sigma\sigma} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \right] \\
&= -\frac{2}{\sigma^3} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \left[-3 \sum_{i=1}^n 2\omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \sigma} + 2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Delta_i \omega_i) - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Delta_i^2 \omega_i^2) - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Delta_i \omega_i^3) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \left(-2n + 6 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - 4\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i + 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 + 2\alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \left\{ 6 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n (\alpha \Delta_i^2 \omega_i^2 + \alpha^2 \Delta_i \omega_i^3 - \Delta_i \omega_i) \right\} \\
&- \frac{1}{\sigma^3} \left\{ \alpha^2 \sum_{i=1}^n [2\Delta_i \omega_i^2 (\alpha \Delta_i^2 \omega_i + \alpha^2 \Delta_i \omega_i^2) - 2\Delta_i^2 \omega_i^2] \right\} \\
&- \frac{1}{\sigma^3} \left\{ \alpha^3 \sum_{i=1}^n (\alpha \Delta_i^2 \omega_i^4 + \alpha^2 \Delta_i \omega_i^5 - 3\Delta_i \omega_i^3) \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (-2 + 12\omega_i^2 - 6\alpha \Delta_i \omega_i + 6\alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i^2 + 7\alpha^3 \Delta_i \omega_i^3 - 2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i^3 - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^4 - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\sigma\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i + 2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i \omega_i) - 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i^2 \omega_i^2) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \left[3\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \alpha^3 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i \omega_i^3) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i + 2\alpha \sum_{i=1}^n (-\Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha \Delta_i \omega_i^3) - 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^2 \sum_{i=1}^n (-2\Delta_i^3 \omega_i^3 - 2\alpha \Delta_i^2 \omega_i^4) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \left[3\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \alpha^3 \sum_{i=1}^n (-\Delta_i^2 \omega_i^4 - \alpha \Delta_i \omega_i^5) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left(2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - 4\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - 5\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \left(3\alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 + \alpha^4 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\alpha\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \sigma \partial \alpha^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\alpha^2}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \\
&= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \left[2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \alpha^2 \sum_{i=1}^n \left(\omega_i^3 \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \right) + \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \left(2\Delta_i \omega_i^2 \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\omega_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\alpha\alpha} &= \frac{1}{\sigma} \left[2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \alpha^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^3 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) + \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^2 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&- \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \left(3\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - 3\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5 + 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha\alpha} &= \frac{\partial^3 l(\beta, \sigma, \alpha)}{\partial \alpha^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 \right) \\
&= - \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i \omega_i^3) \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta_i^2 \omega_i^2) \\
&= - \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - \alpha \sum_{i=1}^n \omega_i^3 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) - 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^2 (-\Delta_i^2 \omega_i - \alpha \Delta_i \omega_i^2) \\
&= - \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + 3\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 + 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 + \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5.
\end{aligned}$$

Cálculo de cumulantes

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt} &= E[U_{rt}] = E \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (1 + \alpha^3 + \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \Delta_i^2) \right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \{ 1 + \alpha^3 E[\Delta_i \omega_i] + \alpha^2 E[\Delta_i^2] \} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma} &= E[U_{r\sigma}] = E \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\omega_i + \alpha \Delta_i - \alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -2E[\omega_i] + \alpha E[\Delta_i] - \alpha^2 E[\Delta_i^2 \omega_i] - \alpha^3 E[\Delta_i \omega_i^2] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} [-2b\alpha(1 + \alpha^2)^{-1/2} + b\alpha(1 + \alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2 A_1^2(\alpha) - b\alpha^3(1 + \alpha^2)^{-3/2}] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} [-b\alpha(1 + \alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2 A_1^2(\alpha) - b\alpha^3(1 + \alpha^2)^{-3/2}] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} [-b(1 + \alpha^2)^{-1/2} - b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha} &= E[U_{r\alpha}] = E \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-\Delta_i + \alpha^2 \Delta_i \omega_i^2 + \alpha \Delta_i^2 \omega_i) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -E[\Delta_i] + \alpha^2 E[\Delta_i \omega_i^2] + \alpha E[\Delta_i^2 \omega_i] \} \\
&= \frac{1}{\sigma} \{ -b(1 + \alpha^2)^{-1/2} + b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} + \alpha A_1^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{1}{\sigma} \{ b[\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - (1 + \alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\sigma} &= E[U_{\sigma\sigma}] = E \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ n - 3 \sum_{i=1}^n E[\omega_i^2] + 2\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i] - \alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] - \alpha^3 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[n - 3n - \alpha^2 \sum_{i=1}^n A_2^2(\alpha) \right] = \frac{1}{\sigma^2} [-2n - n\alpha^2 A_2^2(\alpha)] \\
&= -\frac{n}{\sigma^2} [2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\sigma} &= E[U_{\alpha\sigma}] = E \left[\frac{\alpha^2}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i \right] \\
&= \frac{\alpha^2}{\sigma} \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i] = \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n A_2^2(\alpha) \\
&= \frac{n\alpha}{\sigma} A_2^2(\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\alpha} &= E[U_{\alpha\alpha}] = E \left[-\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 \right] \\
&= -\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] - \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] = -\sum_{i=1}^n A_2^2(\alpha) \\
&= -nA_2^2(\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rtu} &= E[U_{rtu}] = E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu} (-\alpha^5 \Delta_i \omega_i^2 - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i + \alpha^3 \Delta_i - 2\alpha^3 \Delta_i^3) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu} \{ -\alpha^5 E[\Delta_i \omega_i^2] - 3\alpha^4 E[\Delta_i^2 \omega_i] + \alpha^3 E[\Delta_i] - 2\alpha^3 E[\Delta_i^3] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu} \{ -b\alpha^5 (1 + \alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^4 A_1^2(\alpha) + b\alpha^3 (1 + \alpha^2)^{-1/2} - 2\alpha^3 A_0^3(\alpha) \} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \{ b\alpha^3 [-\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-3/2} + (1 + \alpha^2)^{-1/2}] + \alpha^3 [-3\alpha A_1^2(\alpha) - 2A_0^3(\alpha)] \} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu} \\
&= \frac{\alpha^3}{\sigma^3} \{ b [(1 + \alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-3/2}] - 3\alpha A_1^2(\alpha) - 2A_0^3(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} X_{iu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt\sigma} &= E[U_{rt\sigma}] = E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (2 + 3\alpha^3 \Delta_i \omega_i - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^2 + 2\alpha^2 \Delta_i^2 - 2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^3) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \{ 2 + 3\alpha^3 E[\Delta_i \omega_i] - 3\alpha^4 E[\Delta_i^2 \omega_i^2] + 2\alpha^2 E[\Delta_i^2] - 2\alpha^3 E[\Delta_i^3 \omega_i] - \alpha^5 E[\Delta_i \omega_i^3] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} [2 - 3\alpha^4 A_2^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_0^2(\alpha) - 2\alpha^3 A_1^3(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt\alpha} &= E[U_{rt\alpha}] = E \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} (3\alpha^2 \Delta_i \omega_i - \alpha^4 \Delta_i \omega_i^3 - 3\alpha^3 \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha^2 \Delta_i^3 \omega_i + 2\alpha \Delta_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \{ -3\alpha^2 E[\Delta_i \omega_i] + \alpha^4 E[\Delta_i \omega_i^3] + 3\alpha^3 E[\Delta_i^2 \omega_i^2] + 2\alpha^2 E[\Delta_i^3 \omega_i] - 2\alpha E[\Delta_i^2] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} [3\alpha^3 A_2^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_1^3(\alpha) - 2\alpha A_0^2(\alpha)] \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} [3\alpha^2 A_2^2(\alpha) + 2\alpha A_1^3(\alpha) - 2A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma\sigma} &= E[U_{r\sigma\sigma}] = E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (6\omega_i - 2\alpha \Delta_i + 4\alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i + 5\alpha^3 \Delta_i \omega_i^2) \right] \\
&+ E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} (-2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i^2 - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^3 - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^4) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ 6E[\omega_i] - 2\alpha E[\Delta_i] + 4\alpha^2 E[\Delta_i^2 \omega_i] + 5\alpha^3 E[\Delta_i \omega_i^2] - 2\alpha^3 E[\Delta_i^3 \omega_i^2] \} \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -3\alpha^4 E[\Delta_i^2 \omega_i^3] - \alpha^5 E[\Delta_i \omega_i^4] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} [6b\alpha(1+\alpha^2)^{-1/2} - 2b\alpha(1+\alpha^2)^{-1/2} + 4\alpha^2 A_1^2(\alpha) + 5b\alpha^3(1+\alpha^2)^{-3/2}] \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} [-2\alpha^3 A_2^3(\alpha) - 3\alpha^4 A_3^2(\alpha) - 3b\alpha^5(1+\alpha^2)^{-5/2}] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} [4b\alpha(1+\alpha^2)^{-1/2} + 5b\alpha^3(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3b\alpha^5(1+\alpha^2)^{-5/2}] \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n X_{ir} [4\alpha^2 A_1^2(\alpha) - 2\alpha^3 A_2^3(\alpha) - 3\alpha^4 A_3^2(\alpha)] \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^3} \{ b [4(1+\alpha^2)^{-1/2} + 5\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2}] \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{\alpha}{\sigma^3} [4\alpha A_1^2(\alpha) - 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha^3 A_3^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma\alpha} &= E[U_{r\sigma\alpha}] = E \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} (\Delta_i - 3\alpha \Delta_i^2 \omega_i - 4\alpha^2 \Delta_i \omega_i^2 + 2\alpha^2 \Delta_i^3 \omega_i^2 + 3\alpha^3 \Delta_i^2 \omega_i^3 + \alpha^4 \Delta_i \omega_i^4) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ E[\Delta_i] - 3\alpha E[\Delta_i^2 \omega_i] - 4\alpha^2 E[\Delta_i \omega_i^2] + 2\alpha^2 E[\Delta_i^3 \omega_i^2] + 3\alpha^3 E[\Delta_i^2 \omega_i^3] + \alpha^4 E[\Delta_i \omega_i^4] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} [b(1 + \alpha^2)^{-1/2} - 3\alpha A_1^2(\alpha) - 4b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2}] \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} [2\alpha^2 A_2^3(\alpha) + 3\alpha^3 A_3^2(\alpha) + 3b\alpha^4(1 + \alpha^2)^{-5/2}] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \{ b[(1 + \alpha^2)^{-1/2} - 4\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1 + \alpha^2)^{-5/2}] \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} [3\alpha^3 A_3^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha\alpha} &= E[U_{r\alpha\alpha}] = E \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} (2\Delta_i^2 \omega_i + 3\alpha \Delta_i \omega_i^2 - 3\alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i^3 - \alpha^3 \Delta_i \omega_i^4 - 2\alpha \Delta_i^3 \omega_i^2) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ 2E[\Delta_i^2 \omega_i] + 3\alpha E[\Delta_i \omega_i^2] - 3\alpha^2 E[\Delta_i^2 \omega_i^3] - \alpha^3 E[\Delta_i \omega_i^4] - 2\alpha E[\Delta_i^3 \omega_i^2] \} \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} [2A_1^2(\alpha) + 3b\alpha(1 + \alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^2 A_3^2(\alpha) - 3b\alpha^3(1 + \alpha^2)^{-5/2} - 2\alpha A_2^3(\alpha)] \\
&= \frac{1}{\sigma} \{ 3b\alpha [(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1 + \alpha^2)^{-5/2}] + 2A_1^2(\alpha) - 2\alpha A_2^3(\alpha) - 3\alpha^2 A_3^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\sigma\sigma} &= E[U_{\sigma\sigma\sigma}] = E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (-2 + 12\omega_i^2 - 6\alpha \Delta_i \omega_i + 6\alpha^2 \Delta_i^2 \omega_i^2 + 7\alpha^3 \Delta_i \omega_i^3) \right] \\
&+ E \left[\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (-2\alpha^3 \Delta_i^3 \omega_i^3 - 3\alpha^4 \Delta_i^2 \omega_i^4 - \alpha^5 \Delta_i \omega_i^5) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \left\{ -2n + 12 \sum_{i=1}^n E[\omega_i^2] - 6\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i] + 6\alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] + 7\alpha^3 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] \right\} \\
&+ \frac{1}{\sigma^3} \left\{ -2\alpha^3 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^3 \omega_i^3] - 3\alpha^4 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^4] - \alpha^5 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^5] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^3} [-2n + 12n + 6n\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2n\alpha^3 A_3^3(\alpha) - 3n\alpha^4 A_4^2(\alpha)] \\
&= \frac{n}{\sigma^3} [10 + 6\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2\alpha^3 A_3^3(\alpha) - 3\alpha^4 A_4^2(\alpha)] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\sigma\alpha} &= E[U_{\sigma\sigma\alpha}] = E \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i - 4\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - 5\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 \right) \right] \\
&+ E \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(3\alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 + \alpha^4 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i] - 4\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] - 5\alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] + 2\alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^3 \omega_i^3] \right\} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 3\alpha^3 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^4] + \alpha^4 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^5] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} [-4n\alpha A_2^2(\alpha) + 2n\alpha^2 A_3^3(\alpha) + 3n\alpha^3 A_4^2(\alpha)] \\
&= \frac{n\alpha}{\sigma^2} [2\alpha A_3^3(\alpha) + 3\alpha^2 A_4^2(\alpha) - 4A_2^2(\alpha)] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\alpha\alpha} &= E[U_{\sigma\alpha\alpha}] = E \left[\frac{1}{\sigma} \left(3\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 - 3\alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 - \alpha^3 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5 \right) \right] \\
&+ E \left[\frac{1}{\sigma} \left(2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \left\{ 3\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] - 3\alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^4] - \alpha^3 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^5] \right\} \\
&+ \frac{1}{\sigma} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^2] - 2\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^3 \omega_i^3] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma} [-3n\alpha^2 A_4^2(\alpha) + 2nA_2^2(\alpha) - 2n\alpha A_3^3(\alpha)] \\
&= \frac{n}{\sigma} [2A_2^2(\alpha) - 2\alpha A_3^3(\alpha) - 3\alpha^2 A_4^2(\alpha)] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\alpha\alpha} &= E[U_{\alpha\alpha\alpha}] = E \left[- \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^3 + 3\alpha \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \omega_i^4 + 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^3 \omega_i^3 + \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \omega_i^5 \right] \\
&= - \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^3] + 3\alpha \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^2 \omega_i^4] + 2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i^3 \omega_i^3] + \alpha^2 \sum_{i=1}^n E[\Delta_i \omega_i^5] \\
&= n[3\alpha A_4^2(\alpha) + 2A_3^3(\alpha)].
\end{aligned}$$

Derivadas de cumulantes

$$\kappa_{rt}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(\sigma)} &= \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \right\} \\
&= -[1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left(\frac{\partial \sigma^{-2}}{\partial \sigma} \right) = \frac{2}{\sigma^3} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \right\} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 A_0^2(\alpha)] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \left[2\alpha A_0^2(\alpha) + \alpha^2 \frac{dA_0^2(\alpha)}{d\alpha} \right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \{ 2\alpha A_0^2(\alpha) - \alpha^2 [A_1^3(\alpha) + 2\alpha A_2^2(\alpha)] \} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} [\alpha A_1^3(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},
\end{aligned}$$

$$\kappa_{r\sigma}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{r\sigma}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u} \left\{ \frac{\alpha}{\sigma^2} [-b(1 + \alpha^2)^{-1/2} - b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} &= \frac{\partial \kappa_{r\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\alpha}{\sigma^2} [-b(1 + \alpha^2)^{-1/2} - b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} \\
&= \frac{2\alpha}{\sigma^3} [b(1 + \alpha^2)^{-1/2} + b\alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} + \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{r\sigma}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\alpha}{\sigma^2} [-b(1+\alpha^2)^{-1/2} - b\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - \alpha A_1^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [-b\alpha(1+\alpha^2)^{-1/2}] - \frac{d}{d\alpha} [b\alpha^3(1+\alpha^2)^{-3/2}] - \frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 A_1^2(\alpha)] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -b[(1+\alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2}] - b[3\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2}] \} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -2\alpha A_1^2(\alpha) - \alpha^2[-A_2^3(\alpha) - 2\alpha A_2^3(\alpha)] \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ b[-(1+\alpha^2)^{-1/2} + \alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2}] \} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{ir} \{ -2\alpha A_1^2(\alpha) + \alpha^2 A_2^3(\alpha) + 2\alpha^3 A_3^2(\alpha) \} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \{ b[-(1+\alpha^2)^{-1/2} - 2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2}] \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \{ -2\alpha A_1^2(\alpha) + \alpha^2 A_2^3(\alpha) + 2\alpha^3 A_3^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\kappa_{r\alpha}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{r\alpha}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u} \left\{ \frac{1}{\sigma} \{ b[\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - (1+\alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} &= \frac{\partial \kappa_{r\alpha}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{\sigma} \{ b[\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - (1+\alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \{ b[\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - (1+\alpha^2)^{-1/2}] + \alpha A_1^2(\alpha) \} \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{r\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{\sigma} \left\{ b \left[\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-3/2} - (1 + \alpha^2)^{-1/2} \right] + \alpha A_1^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ b \left[2\alpha (1 + \alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^3 (1 + \alpha^2)^{-5/2} \right] + b \left[\alpha (1 + \alpha^2)^{-3/2} \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n X_{ir} \left\{ A_1^2(\alpha) + \alpha \left[-A_2^3(\alpha) - 2\alpha A_3^2(\alpha) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-5/2} \right] + A_1^2(\alpha) - \alpha A_2^3(\alpha) - 2\alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir},
\end{aligned}$$

$$\kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\sigma\sigma}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u} \left\{ -\frac{n}{\sigma^2} \left[2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha) \right] \right\} = 0,$$

$$\kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} = \frac{\partial \kappa_{\sigma\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ -\frac{n}{\sigma^2} \left[2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha) \right] \right\} = \frac{2n}{\sigma^3} \left[2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha) \right],$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\sigma\sigma}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -\frac{n}{\sigma^2} \left[2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha) \right] \right\} = -\frac{n}{\sigma^2} \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha^2 A_2^2(\alpha) \right] \\
&= -\frac{n}{\sigma^2} \left\{ 2\alpha A_2^2(\alpha) + \alpha^2 \left[-A_3^3(\alpha) - 2\alpha A_4^2(\alpha) \right] \right\} \\
&= \frac{n\alpha}{\sigma^2} \left[2\alpha^2 A_4^2(\alpha) + \alpha A_3^3(\alpha) - 2A_2^2(\alpha) \right],
\end{aligned}$$

$$\kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\sigma\alpha}}{\partial \beta_u} \left[\frac{n\alpha}{\sigma} A_2^2(\alpha) \right] = 0,$$

$$\kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} = \frac{\partial \kappa_{\sigma\alpha}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{n\alpha}{\sigma} A_2^2(\alpha) \right] = -\frac{n\alpha}{\sigma^2} A_2^2(\alpha),$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\sigma\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{n\alpha}{\sigma} A_2^2(\alpha) \right] = \frac{n}{\sigma} \left\{ A_2^2(\alpha) + \alpha \left[-A_3^3(\alpha) - 2\alpha A_4^2(\alpha) \right] \right\} \\
&= \frac{n}{\sigma} \left[A_2^2(\alpha) - \alpha A_3^3(\alpha) - 2\alpha^2 A_4^2(\alpha) \right],
\end{aligned}$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \beta_u} = \frac{\partial}{\partial \beta_u} [-nA_2^2(\alpha)] = 0,$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} [-nA_2^2(\alpha)] = 0,$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [-nA_2^2(\alpha)] = n[A_3^3(\alpha) + 2\alpha A_4^2(\alpha)].$$

Utilizando os resultados acima, calculamos as quantidades a seguir:

$$\kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{rtu} = -\frac{\alpha^3}{2\sigma^3} \left\{ b \left[(1 + \alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} \right] - 3\alpha A_1^2(\alpha) - 2A_0^3(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir}X_{it}X_{iu}.$$

Definindo Q_1 como

$$Q_1 = -\frac{\alpha^3}{2\sigma^3} \left\{ b \left[(1 + \alpha^2)^{-1/2} - \alpha^2(1 + \alpha^2)^{-3/2} \right] - 3\alpha A_1^2(\alpha) - 2A_0^3(\alpha) \right\},$$

temos

$$\kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{rtu} = Q_1 \sum_{i=1}^n X_{ir}X_{it}X_{iu},$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{r,t,u} \kappa^{sr} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{rtu} \right\} &= \sum_{r,t,u} \kappa^{sr} \kappa^{tu} Q_1 \sum_{i=1}^n X_{ir}X_{it}X_{iu} = Q_1 \sum_{i=1}^n \sum_{r,t,u} \kappa^{sr} \kappa^{tu} X_{ir}X_{it}X_{iu} \\ &= Q_1 \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \sum_{t,u} X_{it} \kappa^{tu} X_{iu} = Q_1 \sum_{i=1}^n e_s^\top K^{\beta\beta} X_i X_i^\top K^{\beta\beta} X_i \\ &= Q_1 e_s^\top K^{\beta\beta} \sum_{i=1}^n X_i (X_i^\top K^{\beta\beta} X_i) = Q_1 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top \delta_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

onde $\delta_{\beta\beta}$ é o vetor formado pelos elementos diagonais de $XK^{\beta\beta}X^\top$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\sigma} &= \frac{2}{\sigma^3} [1 + \alpha^2 A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&- \frac{1}{2\sigma^3} [2 - 3\alpha^4 A_2^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_0^2(\alpha) - 2\alpha^3 A_1^3(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \left[2\alpha^2 A_0^2(\alpha) + 2 - 1 + \frac{3}{2}\alpha^4 A_2^2(\alpha) + \alpha^3 A_1^3(\alpha) - \alpha^2 A_0^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&= \frac{1}{\sigma^3} \left[\alpha^2 A_0^2(\alpha) + 1 + \frac{3}{2}\alpha^4 A_2^2(\alpha) + \alpha^3 A_1^3(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_2 como

$$Q_2 = \frac{1}{\sigma^3} \left[\alpha^2 A_0^2(\alpha) + 1 + \frac{3}{2}\alpha^4 A_2^2(\alpha) + \alpha^3 A_1^3(\alpha) \right],$$

temos

$$\kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\sigma} = Q_2 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{rt}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\sigma} \right\} &= \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\sigma} Q_2 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} = Q_2 \sum_{i=1}^n \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\sigma} X_{ir} X_{it} \\
&= Q_2 \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \sum_t \kappa^{t\sigma} X_{it} = Q_2 \sum_{i=1}^n e_s^\top K^{\beta\beta} X_i X_i^\top K^{\beta\sigma} \\
&= Q_2 e_s^\top K^{\beta\beta} \sum_{i=1}^n X_i X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_2 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top X K^{\beta\sigma}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\alpha} &= \frac{\alpha}{\sigma^2} [\alpha A_1^3(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&- \frac{\alpha}{2\sigma^2} [3\alpha^2 A_2^2(\alpha) + 2\alpha A_1^3(\alpha) - 2A_0^2(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[\alpha A_1^3(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2A_0^2(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_2^2(\alpha) - \alpha A_1^3(\alpha) + A_0^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[2\alpha^2 A_2^2(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2A_0^2(\alpha) + A_0^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[\frac{\alpha^2}{2} A_2^2(\alpha) - A_0^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_3 como

$$Q_3 = \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[\frac{\alpha^2}{2} A_2^2(\alpha) - A_0^2(\alpha) \right],$$

obtemos

$$\kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\alpha} = Q_3 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{rt}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{rt\alpha} \right\} &= \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\alpha} Q_3 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{it} = Q_3 \sum_{i=1}^n \sum_{r,t} \kappa^{sr} \kappa^{t\alpha} X_{ir} X_{it} \\
&= Q_3 \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \sum_t \kappa^{t\alpha} X_{it} = Q_3 \sum_{i=1}^n e_s^\top K^{\beta\beta} X_i X_i^\top K^{\beta\alpha} \\
&= Q_3 e_s^\top K^{\beta\beta} \sum_{i=1}^n X_i X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_3 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top X K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos

$$\kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma u} = \frac{1}{2\sigma^3} [-2 + 3\alpha^4 A_2^2(\alpha) - 2\alpha^2 A_0^2(\alpha) + 2\alpha^3 A_1^3(\alpha)] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu}.$$

Definindo Q_4 como

$$Q_4 = \frac{1}{2\sigma^3} \left[-2 + 3\alpha^4 A_2^2(\alpha) - 2\alpha^2 A_0^2(\alpha) + 2\alpha^3 A_1^3(\alpha) \right],$$

obtemos

$$\kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma u} = Q_4 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu},$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma u} \right\} &= \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\sigma u} Q_4 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu} \\ &= Q_4 \sum_{i=1}^n \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\sigma u} X_{ir} X_{iu} = Q_4 \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \sum_u \kappa^{\sigma u} X_{iu} \\ &= Q_4 \sum_{i=1}^n e_s^\top K^{\beta\beta} X_i X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_4 e_s^\top K^{\beta\beta} \sum_{i=1}^n X_i X_i^\top K^{\beta\sigma} \\ &= Q_4 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top X K^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha u} &= -\frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[3\alpha^2 A_2^2(\alpha) + 2\alpha A_1^3(\alpha) - 2A_0^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu} \\ &= \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[A_0^2(\alpha) - \alpha A_1^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_2^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu}. \end{aligned}$$

Definindo Q_5 como

$$Q_5 = \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[A_0^2(\alpha) - \alpha A_1^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_2^2(\alpha) \right],$$

temos

$$\kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha u} = Q_5 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{r\alpha u} \right\} &= \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\alpha u} Q_5 \sum_{i=1}^n X_{ir} X_{iu} \\
&= Q_5 \sum_{i=1}^n \sum_{r,u} \kappa^{sr} \kappa^{\alpha u} X_{ir} X_{iu} = Q_5 \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \sum_u \kappa^{\alpha u} X_{iu} \\
&= Q_5 \sum_{i=1}^n e_s^\top K^{\beta\beta} X_i X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_5 e_s^\top K^{\beta\beta} \sum_{i=1}^n X_i X_i^\top K^{\beta\alpha} \\
&= Q_5 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top X K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\kappa_{\sigma t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t u} = Q_4 \sum_{i=1}^n X_{it} X_{iu},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\kappa^{s\sigma} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t u} \right\} &= \kappa^{s\sigma} \sum_{t,u} \kappa^{tu} Q_4 \sum_{i=1}^n X_{it} X_{iu} \\
&= Q_4 \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_{t,u} \kappa^{tu} X_{it} X_{iu} = Q_4 \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_{t,u} X_{it} \kappa^{tu} X_{iu} \\
&= Q_4 e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\beta} X_i = Q_4 e_s^\top K^{\beta\sigma} \text{tr}(X K^{\beta\beta} X^\top).
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\kappa_{\alpha t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t u} = Q_5 \sum_{i=1}^n X_{it} X_{iu},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\kappa^{s\alpha} \sum_{t,u} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t u} \right\} &= \kappa^{s\alpha} \sum_{t,u} \kappa^{tu} Q_5 \sum_{i=1}^n X_{it} X_{iu} \\
&= Q_5 \kappa^{s\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{t,u} X_{it} \kappa^{tu} X_{iu} = Q_5 e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\beta} X_i \\
&= Q_5 e_s^\top K^{\beta\alpha} \text{tr}(X K^{\beta\beta} X^\top).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\sigma} &= \frac{\alpha}{\sigma^3} \left[2b(1+\alpha^2)^{-1/2} + 2b\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 2\alpha A_1^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{\alpha}{\sigma^3} \left\{ b \left[2(1+\alpha^2)^{-1/2} + \frac{5}{2}\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{\alpha}{\sigma^3} \left[2\alpha A_1^2(\alpha) - \alpha^2 A_2^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^3} \left\{ b \left[2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - \frac{5}{2}\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{\alpha}{\sigma^3} \left[\alpha^2 A_2^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{\alpha}{\sigma^3} \left\{ b \left[-\frac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + \alpha^2 A_2^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_6 como

$$Q_6 = \frac{\alpha}{\sigma^3} \left\{ b \left[-\frac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + \alpha^2 A_2^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right\},$$

obtemos

$$\kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\sigma} = Q_6 \sum_{i=1}^n X_{ir},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\kappa^{\sigma\sigma} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\sigma} \right\} &= \kappa^{\sigma\sigma} \sum_r \kappa^{sr} Q_6 \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= Q_6 \kappa^{\sigma\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} = Q_6 K^{\sigma\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\beta} e_s = Q_6 K^{\sigma\sigma} 1^\top X K^{\beta\beta} e_s \\
&= Q_6 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top 1 K^{\sigma\sigma}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\alpha} &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[-(1+\alpha^2)^{-1/2} - 2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \left[-2\alpha A_1^2(\alpha) + \alpha^2 A_2^3(\alpha) + 2\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-1/2} - 2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) + \alpha^2 A_2^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha A_1^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[-\frac{3}{2}(1+\alpha^2)^{-1/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] - \frac{\alpha}{2} A_1^2(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_7 como

$$Q_7 = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[-\frac{3}{2}(1+\alpha^2)^{-1/2} + \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] - \frac{\alpha}{2} A_1^2(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right\},$$

temos

$$\kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\alpha} = Q_7 \sum_{i=1}^n X_{ir}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\kappa^{\sigma\alpha} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\sigma\alpha} \right\} &= \kappa^{\sigma\alpha} \sum_r \kappa^{sr} Q_7 \sum_{i=1}^n X_{ir} = Q_7 \kappa^{\sigma\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \\
&= Q_7 K^{\sigma\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\beta} e_s = Q_7 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top 1 K^{\sigma\alpha}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\sigma} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - (1+\alpha^2)^{-1/2} \right] + \alpha A_1^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ b \left[(1+\alpha^2)^{-1/2} - 4\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{1}{2\sigma^2} \left[3\alpha^3 A_3^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha A_1^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-1/2} + \alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{\alpha}{2} A_1^2(\alpha) - \alpha^2 A_2^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{ir}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_8 como

$$\begin{aligned}
Q_8 &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ b \left[\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-1/2} + \alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{\alpha}{2} A_1^2(\alpha) - \alpha^2 A_2^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right],
\end{aligned}$$

obtemos

$$\kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\sigma} = Q_8 \sum_{i=1}^n X_{ir},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\kappa^{\alpha\sigma} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\sigma} \right\} &= \kappa^{\alpha\sigma} \sum_r \kappa^{sr} Q_8 \sum_{i=1}^n X_{ir} = Q_8 \kappa^{\alpha\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \\
&= Q_8 \kappa^{\sigma\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\beta} e_s = Q_8 K^{\sigma\alpha} 1^\top X K^{\beta\beta} e_s = Q_8 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top 1 K^{\sigma\alpha}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\alpha} &= \frac{1}{\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1+\alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + A_1^2(\alpha) - \alpha A_2^3(\alpha) - 2\alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&- \frac{1}{\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-3/2} - \frac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + A_1^2(\alpha) - \alpha A_2^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir} \\
&= \frac{1}{2\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1+\alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] - \alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{ir}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_9 como

$$Q_9 = \frac{1}{2\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1 + \alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1 + \alpha^2)^{-5/2} \right] - \alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\},$$

temos

$$\kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\alpha} = Q_9 \sum_{i=1}^n X_{ir},$$

assim,

$$\begin{aligned} \kappa^{\alpha\alpha} \sum_r \kappa^{sr} \left\{ \kappa_{r\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{r\alpha\alpha} \right\} &= \kappa^{\alpha\alpha} \sum_r \kappa^{sr} Q_9 \sum_{i=1}^n X_{ir} = Q_9 K^{\alpha\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_r \kappa^{sr} X_{ir} \\ &= Q_9 K^{\alpha\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\beta} e_s = Q_9 e_s^\top K^{\beta\beta} X^\top 1 K^{\alpha\alpha}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\sigma} &= \frac{2n}{\sigma^3} [2 + \alpha^2 A_2^2(\alpha)] - \frac{n}{2\sigma^3} [10 + 6\alpha^2 A_2^2(\alpha) - 2\alpha^3 A_3^3(\alpha) - 3\alpha^4 A_4^2(\alpha)] \\ &= \frac{n}{\sigma^3} \left[-1 - \alpha^2 A_2^2(\alpha) + \alpha^3 A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^4 A_4^2(\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Definindo Q_{10} como

$$Q_{10} = \frac{n}{\sigma^3} \left[-1 - \alpha^2 A_2^2(\alpha) + \alpha^3 A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^4 A_4^2(\alpha) \right],$$

obtemos

$$\kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\sigma} = Q_{10},$$

assim,

$$\kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\sigma} \right\} = \kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\sigma} Q_{10} = Q_{10} e_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\sigma}.$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\alpha} &= \frac{n\alpha}{\sigma^2} [2\alpha^2 A_4^2(\alpha) + \alpha A_3^3(\alpha) - 2A_2^2(\alpha)] - \frac{n\alpha}{\sigma^2} \left[\alpha A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha) - 2A_2^2(\alpha) \right] \\ &= \frac{n\alpha^3}{2\sigma^2} A_4^2(\alpha). \end{aligned}$$

Definindo Q_{11} como

$$Q_{11} = \frac{n\alpha^3}{2\sigma^2} A_4^2(\alpha),$$

temos

$$\kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\alpha} = Q_{11},$$

daí,

$$\kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma\alpha} \right\} = \kappa^{s\sigma} \kappa^{\sigma\alpha} Q_{11} = Q_{11} e_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\alpha}.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\sigma} &= -\frac{n\alpha}{\sigma^2} A_2^2(\alpha) - \frac{n\alpha}{\sigma^2} \left[\alpha A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha) - 2A_2^2(\alpha) \right] \\ &= -\frac{n\alpha}{\sigma^2} \left[-A_2^2(\alpha) + \alpha A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Definindo Q_{12} como

$$Q_{12} = -\frac{n\alpha}{\sigma^2} \left[-A_2^2(\alpha) + \alpha A_3^3(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha) \right],$$

obtemos

$$\kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\sigma} = Q_{12},$$

logo,

$$\kappa^{s\sigma} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\sigma} \right\} = \kappa^{s\sigma} \kappa^{\alpha\sigma} Q_{12} = Q_{12} e_s^\top K^{\beta\sigma} K^{\sigma\alpha}.$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\alpha} &= \frac{n}{\sigma} \left[A_2^2(\alpha) - \alpha A_3^3(\alpha) - 2\alpha^2 A_4^2(\alpha) \right] - \frac{n}{\sigma} \left[A_2^2(\alpha) - \alpha A_3^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha) \right] \\ &= -\frac{n\alpha^2}{2\sigma} A_4^2(\alpha). \end{aligned}$$

Definindo Q_{13} como

$$Q_{13} = -\frac{n\alpha^2}{2\sigma} A_4^2(\alpha),$$

temos

$$\kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\alpha} = Q_{13},$$

daí,

$$\kappa^{s\sigma}\kappa^{\alpha\alpha}\left\{\kappa_{\sigma\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha\alpha}\right\} = \kappa^{s\sigma}\kappa^{\alpha\alpha}Q_{13} = Q_{13}e_s^\top K^{\beta\sigma}K^{\alpha\alpha}.$$

Analogamente,

$$\kappa_{\alpha\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma\sigma} = Q_{12},$$

daí,

$$\kappa^{s\alpha}\kappa^{\sigma\sigma}\left\{\kappa_{\alpha\sigma}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma\sigma}\right\} = \kappa^{s\alpha}\kappa^{\sigma\sigma}Q_{12} = Q_{12}e_s^\top K^{\beta\alpha}K^{\sigma\sigma}.$$

De forma similar,

$$\kappa_{\alpha\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma\alpha} = Q_{13},$$

assim,

$$\kappa^{s\alpha}\kappa^{\sigma\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\sigma}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma\alpha}\right\} = Q_{13}e_s^\top K^{\beta\alpha}K^{\sigma\alpha}.$$

De maneira semelhante,

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\sigma} = -\frac{n}{\sigma}\left[A_2^2(\alpha) - \alpha A_3^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha)\right].$$

Definindo Q_{14} como

$$Q_{14} = -\frac{n}{\sigma}\left[A_2^2(\alpha) - \alpha A_3^3(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 A_4^2(\alpha)\right],$$

temos

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\sigma} = Q_{14},$$

daí,

$$\kappa^{s\alpha} \kappa^{\alpha\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\sigma} \right\} = Q_{14} e_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\sigma\alpha}.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} &= n[A_3^3(\alpha) + 2\alpha A_4^2(\alpha)] - n \left[\frac{3}{2} \alpha A_4^2(\alpha) + A_3^3(\alpha) \right] \\ &= \frac{n\alpha}{2} A_4^2(\alpha). \end{aligned}$$

Definindo Q_{15} como

$$Q_{15} = \frac{n\alpha}{2} A_4^2(\alpha),$$

obtemos

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} = Q_{15},$$

daí,

$$\kappa^{s\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right\} = Q_{15} e_s^\top K^{\beta\alpha} K^{\alpha\alpha}.$$

De forma similar,

$$\kappa_{\sigma t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\sigma} = Q_6 \sum_{i=1}^n X_{it}.$$

daí,

$$\begin{aligned} \kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\sigma} \right\} &= \kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\sigma} Q_6 \sum_{i=1}^n X_{it} = Q_6 \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_t \kappa^{t\sigma} X_{it} \\ &= Q_6 e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_6 e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\sigma} \\ &= Q_6 e_s^\top K^{\beta\sigma} 1^\top X K^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\kappa_{\sigma t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t\alpha} = Q_7 \sum_{i=1}^n X_{it},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\sigma t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma t \alpha} \right\} &= \kappa^{s\sigma} \sum_t \kappa^{t\alpha} Q_7 \sum_{i=1}^n X_{it} = Q_7 \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_t \kappa^{t\alpha} X_{it} \\
&= Q_7 e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_7 e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\alpha} \\
&= Q_7 e_s^\top K^{\beta\sigma} 1^\top X K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\kappa_{\alpha t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t \sigma} = Q_8 \sum_{i=1}^n X_{it},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\sigma} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t \sigma} \right\} &= \kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\sigma} Q_8 \sum_{i=1}^n X_{it} = Q_8 \kappa^{s\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_t \kappa^{t\sigma} X_{it} \\
&= Q_8 e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_8 e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\sigma} = Q_8 e_s^\top K^{\beta\alpha} 1^\top X K^{\beta\sigma}.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\kappa_{\alpha t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t \alpha} = Q_9 \sum_{i=1}^n X_{it},$$

daí,

$$\begin{aligned}
\kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha t}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha t \alpha} \right\} &= \kappa^{s\alpha} \sum_t \kappa^{t\alpha} Q_9 \sum_{i=1}^n X_{it} = Q_9 \kappa^{s\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_t \kappa^{t\alpha} X_{it} \\
&= Q_9 e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_9 e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\alpha} = Q_9 e_s^\top K^{\beta\alpha} 1^\top X K^{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{\sigma\sigma u} &= -\frac{\alpha}{2\sigma^3} \left\{ b \left[4(1+\alpha^2)^{-1/2} + 5\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{iu} \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\sigma^3} \left[4\alpha A_1^2(\alpha) - 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{iu}.
\end{aligned}$$

Definindo Q_{16} como

$$\begin{aligned} Q_{16} &= -\frac{\alpha}{2\sigma^3} \left\{ b \left[4(1+\alpha^2)^{-1/2} + 5\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} - 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\sigma^3} \left[4\alpha A_1^2(\alpha) - 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha^3 A_3^2(\alpha) \right], \end{aligned}$$

obtemos

$$\kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma u} = Q_{16} \sum_{i=1}^n X_{iu},$$

assim,

$$\begin{aligned} \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\sigma\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\sigma u} \right\} &= \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\sigma u} Q_{16} \sum_{i=1}^n X_{iu} = Q_{16} \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{\sigma u} X_{iu} \\ &= Q_{16} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{u\sigma} X_{iu} = Q_{16} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_{16} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\sigma} \\ &= Q_{16} e_s^\top K^{\beta\sigma} 1^\top X K^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha u} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ b \left[(1+\alpha^2)^{-1/2} - 4\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \sum_{i=1}^n X_{iu} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[3\alpha^3 A_3^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha A_1^2(\alpha) \right] \sum_{i=1}^n X_{iu}. \end{aligned}$$

Definindo Q_{17} como

$$\begin{aligned} Q_{17} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ b \left[(1+\alpha^2)^{-1/2} - 4\alpha^2(1+\alpha^2)^{-3/2} + 3\alpha^4(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[3\alpha^3 A_3^2(\alpha) + 2\alpha^2 A_2^3(\alpha) - 3\alpha A_1^2(\alpha) \right], \end{aligned}$$

temos

$$\kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha u} = Q_{17} \sum_{i=1}^n X_{iu},$$

daí,

$$\begin{aligned} \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\sigma\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\sigma\alpha u} \right\} &= \kappa^{s\sigma} \sum_u \kappa^{\alpha u} Q_{17} \sum_{i=1}^n X_{iu} = Q_{17} \kappa^{s\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{\alpha u} X_{iu} \\ &= Q_{17} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{u\alpha} X_{iu} = Q_{17} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_{17} e_s^\top K^{\beta\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\alpha} \\ &= Q_{17} e_s^\top K^{\beta\sigma} 1^\top X K^{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

De forma semelhante, temos

$$\kappa_{\alpha\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma u} = Q_{17} \sum_{i=1}^n X_{iu},$$

assim,

$$\begin{aligned} \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\sigma u} \left\{ \kappa_{\alpha\sigma}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\sigma u} \right\} &= \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\sigma u} Q_{17} \sum_{i=1}^n X_{iu} = Q_{17} \kappa^{s\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{\sigma u} X_{iu} \\ &= Q_{17} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{u\sigma} X_{iu} = Q_{17} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\sigma} = Q_{17} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\sigma} \\ &= Q_{17} e_s^\top K^{\beta\alpha} 1^\top X K^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha u} = -\frac{1}{2\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1+\alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + 2A_1^2(\alpha) - 2\alpha A_2^3(\alpha) - 3\alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\} \sum_{i=1}^n X_{iu}.$$

Definindo Q_{18} como

$$Q_{18} = -\frac{1}{2\sigma} \left\{ 3b\alpha \left[(1+\alpha^2)^{-3/2} - \alpha^2(1+\alpha^2)^{-5/2} \right] + 2A_1^2(\alpha) - 2\alpha A_2^3(\alpha) - 3\alpha^2 A_3^2(\alpha) \right\},$$

obtemos

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha u} = Q_{18} \sum_{i=1}^n X_{iu},$$

daí,

$$\begin{aligned} \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha}^{(u)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha u} \right\} &= \kappa^{s\alpha} \sum_u \kappa^{\alpha u} Q_{18} \sum_{i=1}^n X_{iu} = Q_{18} \kappa^{s\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{\alpha u} X_{iu} \\ &= Q_{18} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_u \kappa^{u\alpha} X_{iu} = Q_{18} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n X_i^\top K^{\beta\alpha} = Q_{18} e_s^\top K^{\beta\alpha} \sum_{i=1}^n \rho_i^\top X K^{\beta\alpha} \\ &= Q_{18} e_s^\top K^{\beta\alpha} 1^\top X K^{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

APÊNDICE C

Programa de Simulação

Apresentamos, neste apêndice, o programa de simulação utilizado nesta dissertação. O programa foi desenvolvido na linguagem de programação `Ox`, a qual está descrita com mais detalhes no Capítulo 1, seção 1.3.

C.1 Programa Principal

```
/******  
* Autor: Ênio Lopes *  
* * *  
* Programa:Prog_Correção.ox *  
* * *  
* Função: Correção analítica via Cox e Snell (1968) e *  
* correção por bootstrap dos EMV dos parâmetros *  
* de regressão, escala e forma do modelo de regressão *  
* normal assimétrico. *  
* * *  
* Orientador: Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos. *  
*****/  
  
/*Bibliotecas Principais*/  
#include<oxstd.h>  
#include<oxprob.h>  
#include<oxfloat.h>  
#import<maximize>  
#include<quadpack.h>  
#include "funcoes.ox"  
  
/*Definições da simulação e do modelo utilizado*/  
const decl rep=2; //Número de réplicas  
const decl p=2; //Número de parâmetros de regressão  
const decl beta_0=-2; //Valor do parâmetro beta_0  
const decl beta_1=2; //Valor do parâmetro beta_1
```

```

const decl sigma=1; //Valor do parâmetro de escala sigma
const decl Bboot=2; //Número de réplicas bootstrap

/*Corpo Principal do Programa*/

main()
{

/*Declaração das variáveis locais*/
decl beta,alpha,b;
decl thetaini,theta,dfunc,msg;
decl i,j,k,n,conv,nrep;
decl hattheta,vieshattheta;
decl A12,A03,A02,A22,A13,A23,A32,A33,A42,erro,erro1;
decl q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10;
decl q11,q12,q13,q14,q15,q16,q17,q18;
decl hatsigma,hatbeta_0,hatbeta_1;
decl w1,W,W_bb,W_bs,W_ba,W_sb,W_ss,W_sa,W_ab,W_as,W_aa;
decl delta_bb,delta11,delta21,delta31;
decl K,B,invK;
decl invK_bb,invK_bs,invK_ba,invK_sb,invK_ss,invK_sa,invK_ab,invK_as,invK_aa;
decl hatB,hatthetacor,vieshatthetacor;
decl liminf,limsup;
decl eqmhattheta,eqmhatthetacor;
decl hatz,m,hatthetaboot;
decl erroboot,thetainiboot,msgboot;
decl vieshatthetaboot,hatthetabootcor;
decl vieshatthetabootcor,eqmhatthetabootcor;

/*Algumas definições*/
n=(200|250); //Tamanhos amostrais
b=sqrt(1/(M_PI_2)); //Define a constante b;
alpha=(3|5|10); //Valores do parâmetro de forma alpha
beta=(beta_0|beta_1); //Vetor de beta's

/*Início do loop para os diversos tamanhos de amostra*/
for(k=0;k<rows(n);++k){

    ranseed("MWC_52"); //Define o gerador de números pseudo-aleatórios de George Marsaglia
    ranseed(-1); //Retorna à semente inicial

    W_bb=zeros(n[k][0],n[k][0]);
    x=(1~ranu(n[k][0],1)); //Matriz de covariáveis

    /*Início do loop para os diferentes valores de alpha*/
    for(j=0;j<rows(alpha);++j){

        nrep=0;
        i=0; //zerando contador do número de réplicas
        theta=(beta|sigma|alpha[j][0]); //Vetor de parâmetros do modelo

        /*Inicialização de variáveis que armazenarão alguns resultados*/
        hattheta=zeros(p+2,rep); //Armazenará parâmetros estimados por Máxima Verossimilhança
        hatthetacor=zeros(p+2,rep); //Armazenará parâmetros estimados corrigidos analiticamente
        hatthetaboot=zeros(p+2,Bboot); //Armazenará os parâmetros estimados corrigidos por bootstrap
        vieshattheta=0; //Armazenará os vieses estimados por Máxima Verossimilhança
        vieshatthetacor=0; //Armazenará os vieses estimados analiticamente
        vieshatthetaboot=zeros(p+2,rep); //Armazenará os vieses estimados por Máxima Verossimilhança
        hatthetabootcor=zeros(p+2,rep); //Armazenará os vieses estimados por bootstrap
        eqmhattheta=0; //Armazenará o erro quadrático médio do EMV dos parâmetros do modelo
        eqmhatthetacor=0; //Armazenará o erro quadrático médio do EMV corrigido analiticamente dos
        //parâmetros do modelo
        hatB=zeros(p+2,rep); //Armazenará os vieses estimados de determinada réplica de Monte Carlo

```



```

while(i<rep){ //Início da simulação de Monte Carlo

    m=0; //inicialização do contador do número de réplicas bootstrap
    erro=rskewnormal(n[k][0],alpha[j][0]); //geração dos erros

    z=x*beta+sigma*erro; //Geração da variável resposta segundo o modelo definido

    thetaini=(invert(x'*x)*x'*z|0.5|0.5); //chute inicial para os parâmetros.
    msg=MaxBFGS(flogver,&thetaini,&dfunc,0,TRUE); //Maximização da função de log-verossimilhança
    if(MaxConvergenceMsg(msg)=="Strong convergence"){ //Verifica se ocorreu convergência forte
        hattheta[i]=thetaini; //armazena os valores estimados dos parâmetros do modelo
        hatalpha=thetaini[3][0]; //armazena o valor estimado de alpha
        hatsigma=thetaini[2][0]; //armazena o valor estimado de sigma
        hatbeta_0=thetaini[0][0]; //armazena o valor estimado de beta_0
        hatbeta_1=thetaini[1][0]; //armazena o valor estimado de beta_1

        /*início da correção por bootstrap*/

        hatz=x*(hatbeta_0|hatbeta_1);
        while(m<Bboot){
            erroboot=rskewnormal(n[k][0],hatalpha);
            zboot=hatz+hatsigma.*erroboot;
            thetainiboot=(invert(x'*x)*x'*zboot|0.5|0.5);
            msgboot=MaxBFGS(flogverboot,&thetainiboot,&dfunc,0,TRUE);
            if(MaxConvergenceMsg(msgboot)=="Strong convergence"){
                hatthetaboot[m]=thetainiboot;
                m=m+1;
            } //fim-do-se
        } //fim-do-while(bootstrap)

        /*Cálculo dos vieses estimados e estimativas corrigidas por bootstrap*/
        vieshatthetaboot[i]=meanr(hatthetaboot)-hattheta[i];
        hatthetabootcor[i]=hattheta[i]-vieshatthetaboot;

        /*Início da correção analítica de Cox e Snell (1968) */

        liminf=-36/fabs(hatalpha); //Limite inferior para a integração numérica
        limsup=36/fabs(hatalpha); //Limite superior para a integração numérica

        QAGS(a12,liminf,limsup,&A12,&erro1); //calcula o valor de A12(alpha)
        QAGS(a03,liminf,limsup,&A03,&erro1); //calcula o valor de A03(alpha)
        QAGS(a02,liminf,limsup,&A02,&erro1); //calcula o valor de A02(alpha)
        QAGS(a22,liminf,limsup,&A22,&erro1); //calcula o valor de A22(alpha)
        QAGS(a13,liminf,limsup,&A13,&erro1); //calcula o valor de A13(alpha)
        QAGS(a23,liminf,limsup,&A23,&erro1); //calcula o valor de A23(alpha)
        QAGS(a32,liminf,limsup,&A32,&erro1); //calcula o valor de A32(alpha)
        QAGS(a33,liminf,limsup,&A33,&erro1); //calcula o valor de A33(alpha)
        QAGS(a42,liminf,limsup,&A42,&erro1); //calcula o valor de A42(alpha)

        /*Cálculo das quantidades necessárias para efetuar a correção analítica */
        q1=((-hatalpha^3)/(2*hatsigma^3))*(b*((1+hatalpha^2)^(-1/2)-hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2))-
        3*hatalpha*A12-2*A03);
        q2=(1/hatsigma^3)*(hatalpha^2*A02+1+(3/2)*hatalpha^4*A22+hatalpha^3*A13);
        q3=(hatalpha/hatsigma^2)*((hatalpha^2/2)*A22-A02);
        q4=(1/(2*hatsigma^3))*(-2+3*hatalpha^4*A22-2*hatalpha^2*A02+2*hatalpha^3*A13);
        q5=(hatalpha/hatsigma^2)*(A02-hatalpha*A13-(3/2)*hatalpha^2*A22);
        q6=(hatalpha/hatsigma^3)*(b*((-1/2)*hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)+(3/2)*hatalpha^4*
        (1+hatalpha^2)^(-5/2))+hatalpha^2*A23+(3/2)*hatalpha^3*A32);
        q7=(1/hatsigma^2)*(b*((-3/2)*(1+hatalpha^2)^(-1/2)+(3/2)*hatalpha^4*(1+hatalpha^2)^(-5/2))-
        (hatalpha/2)*A12+(1/2)*hatalpha^3*A32);
        q8=(1/hatsigma^2)*(b*((1/2)*(1+hatalpha^2)^(-1/2)+hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)-(3/2)*
        hatalpha^4*(1+hatalpha^2)^(-5/2)))+(1/hatsigma^2)*((hatalpha/2)*A12-hatalpha^2*A23-(3/2)*
        hatalpha^3*A32);
        q9=(1/(2*hatsigma))*(3*b*hatalpha*((1+hatalpha^2)^(-3/2)-hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-5/2))-

```

```

hatalpha^2*A32);
q10=(n[k][0]/hatsigma^3)*(-1-hatalpha^2*A22+hatalpha^3*A33+(3/2)*hatalpha^4*A42);
q11=(n[k][0]*hatalpha^3*A42)/(2*hatsigma^2);
q12=((n[k][0]*hatalpha)/(hatsigma^2))*(-A22+hatalpha*A33+(3/2)*hatalpha^2*A42);
q13=(-n[k][0]*hatalpha^2*A42)/(2*hatsigma);
q14=(-n[k][0]/hatsigma)*(A22-hatalpha*A33-(3/2)*hatalpha^2*A42);
q15=(n[k][0]*hatalpha*A42)/2;
q16=(-hatalpha/(2*hatsigma^3))*(b*(4*(1+hatalpha^2)^(-1/2)+5*hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)-
3*hatalpha^4*(1+hatalpha^2)^(-5/2))-(hatalpha/(2*hatsigma^3))*(4*hatalpha*A12-2*hatalpha^2*
A23-3*hatalpha^3*A32);
q17=(-1/(2*hatsigma^2))*(b*((1+hatalpha^2)^(-1/2)-4*hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)+3*hatalpha^4*
(1+hatalpha^2)^(-5/2))-(1/(2*hatsigma^2))*(3*hatalpha^3*A32+2*hatalpha^2*A23-3*hatalpha*A12);
q18=(-1/(2*hatsigma))*(3*b*hatalpha*((1+hatalpha^2)^(-3/2)-hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-5/2))+2*A12-
2*hatalpha*A23-3*hatalpha^2*A32);

/*Cálculo da matriz W til*/
w1=((1/hatsigma^2)*(1+hatalpha^2*A02)).*ones(n[k][0],1);
W_bb=diag(w1);

W_bs=-((hatalpha/hatsigma^2)*(-b*(1+hatalpha^2)^(-1/2)-b*hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)-
hatalpha*A12)).*ones(n[k][0],1);
W_ba=-((1/hatsigma)*(b*(hatalpha^2*(1+hatalpha^2)^(-3/2)-(1+hatalpha^2)^(-1/2))+hatalpha*A12)).*
ones(n[k][0],1);
W_sb=W_bs';
W_ss=(n[k][0]/hatsigma^2)*(2+hatalpha^2*A22);
W_sa=-n[k][0]*hatalpha*A22/(hatsigma);
W_ab=W_ba';
W_as=W_sa';
W_aa=n[k][0]*A22;

W=((W_bb~W_bs~W_ba)|(W_sb~W_ss~W_sa)|(W_ab~W_as~W_aa));

/*Definindo X aumentada*/
Xaum=((x~0~0)|(0~0~1~0)|(0~0~0~1));

K=Xaum'*W*Xaum; //Matriz de Informação de Fisher

/*Inversa da Matriz de Informação de Fisher*/
invK=invert(K);

invK_bb=invK[0:p-1][0:p-1];
invK_bs=invK[0:p-1][2];
invK_ba=invK[0:p-1][3];
invK_sb=invK[2][0:p-1];
invK_ss=invK[2][2];
invK_sa=invK[2][3];
invK_ab=invK[3][0:p-1];
invK_as=invK[3][2];
invK_aa=invK[3][3];

/*Cálculo do vetor delta til*/

delta_bb=(diagonal(x*invK_bb*x'))';

delta11=q1.*delta_bb+(q2+q4).*x*invK_bs+(q3+q5).*x*invK_ba+(q7+q8).*ones(n[k][0],1)*invK_sa+
q6.*ones(n[k][0],1)*invK_ss+q9.*ones(n[k][0],1)*invK_aa;
delta21=q4.*trace(x*invK_bb*x')+(q6+q16).*ones(1,n[k][0])*x*invK_bs+(q7+q17).*ones(1,n[k][0])*
x*invK_ba+(q11+q12).*invK_sa+q10.*invK_ss+q13.*invK_aa;
delta31=q5.*trace(x*invK_bb*x')+(q8+q17).*ones(1,n[k][0])*x*invK_bs+(q9+q18).*ones(1,n[k][0])*x*
invK_ba+(q13+q14).*invK_sa+q12.*invK_ss+q15.*invK_aa;

deltatil=(delta11|delta21|delta31);

/*Cálculo do viés estimado*/
B=invK*Xaum'*deltatil;

```

```

/*Cálculo das estimativas corrigidas via Cox e Snell (1968)*/
hatthetacor[i]=hattheta[i]-B;

i=i+1;//incrementando contador

} //fim-do-se

nrep=nrep+1;//incrementando contador do número de réplicas executadas

} //fim-do-while(loop de Monte Carlo)

/*Cálculo dos vieses dos diferentes estimadores dos parâmetros do modelo*/
vieshattheta=meanr(hattheta)-theta;
vieshatthetacor=meanr(hatthetacor)-theta;
vieshatthetabootcor=meanr(hatthetabootcor)-theta;

/*Cálculo do erro quadrático médio dos diferentes estimadores dos parâmetros do modelo*/
eqmhattheta=vieshattheta.^2+varr(hattheta);
eqmhatthetacor=vieshatthetacor.^2+varr(hatthetacor);
eqmhatthetabootcor=vieshatthetabootcor.^2+varr(hatthetabootcor);

/*Impressão dos resultados da simulação de Monte Carlo*/
println("Número de Réplicas: ",rep);
println("Tamanho amostral: ",n[k][0]);
println("alpha: ",alpha[j][0]);
println("Número de réplicas totais: ",nrep);

println(" ");

println("Viés de theta      Viés de theta corrigido      Viés de theta corrigido por bootstrap");
println(vieshattheta[0][0], "      ",vieshatthetacor[0][0], "      ",vieshatthetabootcor[0][0]);
println(vieshattheta[1][0], "      ",vieshatthetacor[1][0], "      ",vieshatthetabootcor[1][0]);
println(vieshattheta[2][0], "      ",vieshatthetacor[2][0], "      ",vieshatthetabootcor[2][0]);
println(vieshattheta[3][0], "      ",vieshatthetacor[3][0], "      ",vieshatthetabootcor[3][0]);

println(" ");

println("EQM de theta      EQM de theta corrigido      EQM de theta corrigido por bootstrap");
println(eqmhattheta[0][0], "      ",eqmhatthetacor[0][0], "      ",eqmhatthetabootcor[0][0]);
println(eqmhattheta[1][0], "      ",eqmhatthetacor[1][0], "      ",eqmhatthetabootcor[1][0]);
println(eqmhattheta[2][0], "      ",eqmhatthetacor[2][0], "      ",eqmhatthetabootcor[2][0]);
println(eqmhattheta[3][0], "      ",eqmhatthetacor[3][0], "      ",eqmhatthetabootcor[3][0]);

println(" ");

} //fim-do-for(diferentes valores de alpha)

} //fim-do-for(diferentes tamanhos de amostra)

} //fim-de-main()

```

C.2 Biblioteca de Funções

```
/******
* Autor: Ênio Lopes
* Programa:funcoes.ox
******/

/*Declaração das variáveis globais*/
decl x,z,erro;
decl hatalpha;
decl Xaum,deltatil;
decl zboot;

/*função que gera uma amostra de tamanho n de uma SN(alpha) */
rskewnormal(n,alpha){
  decl y,delta,dados;
  delta=alpha/(sqrt(1+alpha^2));
  y=rann(n,2);
  dados=delta*fabs(y[] [0])+sqrt(1-delta^2)*(y[] [1]);
  return dados;
}

/*função de log-verossimilhança*/
flogver(const vp,const adfunc, avscore, const amhess)
{
  decl soma1,soma2,omega,beta;
  beta=(vp[0] |vp[1]);
  omega=(z-x*beta)/vp[2];
  soma1=sumc(log(densn(omega)));
  soma2=sumc(log(probn(vp[3]*omega)));
  adfunc[0]=-rows(x)*log(vp[2])+soma1+soma2;
  return 1;
}

/*função de log-verossimilhança para bootstrap*/
flogverboot(const vp,const adfunc, avscore, const amhess)
{
  decl soma1,soma2,omega,beta;
  beta=(vp[0] |vp[1]);
  omega=(zboot-x*beta)/vp[2];
  soma1=sumc(log(densn(omega)));
  soma2=sumc(log(probn(vp[3]*omega)));
  adfunc[0]=-rows(x)*log(vp[2])+soma1+soma2;
  return 1;
}

/*Funções necessárias para o cálculo das quantidades da forma Anm*/
a12(omega)
{
  return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^2*omega*2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a03(omega)
{
  return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^3*2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a02(omega)
{
  return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^2*2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}
```

```

a22(omega)
{
    return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^2*omega^2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a13(omega)
{
    return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^3*omega^2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a23(omega)
{
    return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^3*omega^2*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a32(omega)
{
    return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^2*omega^3*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

a33(omega)
{
    return (densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^3*omega^3*densn(omega)*probn(hatalpha*omega);
}

a42(omega)
{
    return ((densn(hatalpha*omega)/probn(hatalpha*omega))^2*omega^4*densn(omega)*probn(hatalpha*omega));
}

```

Referências Bibliográficas

- [1] Aitchison, J. (2003). *The Statistical Analysis of Compositional Data*. The Blackburn Press, New Jersey.
- [2] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171–178.
- [3] Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, **46**, 199–208.
- [4] Azzalini, A., Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **61**, 579–602.
- [5] Azzalini, A., Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew normal distribution. *Biometrika*, **83**, 715–726.
- [6] Bartlett, M. S. (1953). Aproximate confidence intervals. *Biometrika*, **40**, 12–19.
- [7] Box, M. J. (1971). Bias in nonlinear estimation (with discussion) *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **33**, 171–201.
- [8] Cook, R., Tsai, C., Wei, B. (1986). Bias in nonlinear regression. *Biometrika*, **73**, 615–623.

- [9] Cordeiro, G. M. (1993). Barlett corrections and bias correction for two heteroscedastic regression models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **22**, 169–188.
- [10] Cordeiro, G. M., Ferrari, S. L. P., Uribe-Opazo, M. A., Vasconcellos, K. L. P. (2000). Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **46**, 317–328.
- [11] Cordeiro, G. M., McCullagh, P.(1991). Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **53**, 629–643.
- [12] Cordeiro, G. M., Vasconcellos, K. L. P. (1997). Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **35**, 155–164.
- [13] Cordeiro, G. M., Vasconcellos, K. L. P. (1999). Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von Mises regression models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 901–910.
- [14] Cox, D. R., Snell, E. (1968). A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **30**, 248–275.
- [15] Cribari-Neto, F., Vasconcellos, K. L. P. (2002). Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72**, 107–118.
- [16] Cribari-Neto, F., Zarkos, S. G. (2003). Econometric and statistical computing using Ox. *Computational Economics*, **21**, 277–295.
- [17] Davison, A. C., Hinkley, D. V.(1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press, New York.
- [18] Doornik, J. A. (2001). *Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. 4th ed. Timberlake Consultants Press, London; Oxford, <http://www.doornik.com>.
- [19] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1–26.

- [20] Efron, B., Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [21] Ezekiel, M. (1930). *Methods of Correlation Analysis*. John Wiley and Sons, New York.
- [22] Ferrari, S. L. P., Cribari-Neto, F. (1998). On bootstrap and analytical bias corrections. *Economics Letters*, **58**, 7–15.
- [23] Ferrari, S. L. P. ; Cribari-Neto, F. (2004). Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 799–815.
- [24] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, **80**, 27–38.
- [25] Haldane, J. B. S. (1953). The estimation of two parameters from a sample. *Sankhyā*, **12**, 313–320.
- [26] Haldane, J. B. S., Smith, S. M. (1953). The sampling distribution of a maximum likelihood estimate *Biometrika*, **43**, 96–103.
- [27] Henze, N. (1986). A probabilistic representation of the “skew normal” distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, **13**, 271–275.
- [28] Lawley, D. (1956). A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, **43**, 295–303.
- [29] Liseo, B., Loperfido, N. (2006). A note on reference priors for the scalar skew-normal distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 373–389.
- [30] MacKinnon, J. G., Smith, J. A. A. (1998). Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics*, **85**, 205–230.
- [31] Ospina, R., Cribari-Neto, F., Vasconcellos, K. L. P. (2006). Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 960–981.

- [32] Prater, N. H. (1956). Estimate gasoline yields from crude. *Petroleum Refiner*, **35**, 236–238.
- [33] Sartori, N. (2006). Bias prevention of maximum likelihood estimates for scalar skew normal and skew t distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 259–275.
- [34] Vasconcellos, K. L. P., Cordeiro, G. M. (2000). Bias corrected estimates in multivariate Student t regression models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **29**, 797–822.
- [35] Vasconcellos, K. L. P., Silva, S. G. (2005). Corrected estimates for Student t regression models with unknown degrees of freedom. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**, 409–423.
- [36] Venables, W. N., Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*. 4th ed. Springer Verlag, New York.
- [37] Wu, C. F. J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Annals of Statistics*, **14**, 1261–1295.
- [38] Young, D., Bakir, S. (1987). Bias correction for a generalized log-gamma regression model. *Technometrics*, **29**, 183–191.