
UM TESTE DE ESPECIFICAÇÃO CORRETA EM MODELOS
DE REGRESSÃO BETA

LEONARDO BOMFIM DE LIMA

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau
de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2007

Lima, Leonardo Bomfim de
Um teste de especificação correta em modelos de
regressão beta / Leonardo Bomfim de Lima –
Recife : O autor, 2007.
xii, 107 p. : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2007.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Análise de regressão. 2. Regressão beta. 3.
RESET. 4. Simulação de Monte Carlo. I. Título.

519.536

CDD (22.ed.)

MEI2007-014

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

15 de fevereiro de 2007
(data)

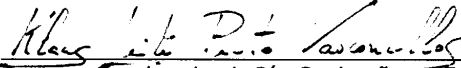
Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Leonardo Bomfim de Lima

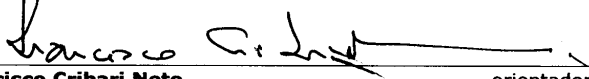
intitulada

"Um Teste de Especificação Correta em Modelos de Regressão Beta"

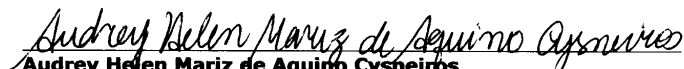
seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.


Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:


Francisco Cribari Neto orientador


Silvia Lopes de Paula Ferrari (USP)


Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por iluminar meu caminho.

Ao professor Francisco Cribari Neto, pela orientação segura, paciência, confiança e amizade demonstrada ao longo deste trabalho.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe, pela confiança e por todo o incentivo que sempre me deu.

À Dinha, pelos momentos de amor, carinho demonstrado e pela confiança.

Aos professores do Departamento de Estatística, em especial aos professores Cristiano Ferraz, Klaus Leite Pinto Vasconcellos e Maria Cristina Falcão Raposo.

Aos meus colegas e amigos de turma, em especial a Hemílio, Marcelo, Ênio e Geraldo, pelos momentos de trabalho e alegria compartilhados.

À Valéria Bittencourt, pela competência e preocupação com os alunos da pós-graduação.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*O que você descobre por si é sempre mais empolgante do que
o que outra pessoa descobre para você – é como a diferença
entre o amor romântico e um casamento de conveniência.*

– Terrence Rafferty

Uma ferramenta útil para a modelagem de dados em que a variável resposta assume continuamente valores no intervalo $(0,1)$ é o modelo de regressão beta proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004). O modelo proposto é baseado na suposição que a variável resposta tem distribuição beta utilizando uma parametrização da lei beta que é indexada pela média e por um parâmetro de precisão. Neste modelo, supõe-se também que a variável resposta é relacionada a outras variáveis através de uma estrutura de regressão.

O objetivo desta dissertação é propor um teste de erro de especificação correta em modelos de regressão beta, a partir do teste RESET proposto por Ramsey (1969).

A avaliação numérica realizada revelou que o teste proposto é útil para detecção do uso de função de ligação incorreta bem como de não-linearidades no preditor linear. Mostramos que o teste proposto realizado através do teste escore apresentou, em geral, melhores resultados no que tange a tamanho e poder. Adicionalmente, mostramos que o melhor desempenho é alcançado quando se utiliza uma potência do preditor linear ajustado ou uma potência da resposta média estimada como variável de teste. O teste proposto também apresenta bom desempenho para pequenos tamanhos amostrais, apesar de ser baseado em aproximações assintóticas.

Palavras-chave: Regressão Beta; RESET; Testes de Hipóteses; Simulação de Monte Carlo.

Abstract

The beta regression model introduced by Ferrari & Cribari-Neto (2004) is useful for modelling responses that assume values in the standard unit interval $(0, 1)$. The beta parametrization used is based on mean and precision parameters, and the mean response is related to a linear predictor through a link function.

The chief goal of this thesis is to propose a misspecification test for such a class of models. Our test is based on that proposed by Ramsey (1969) for the linear regression model. The numerical results favor the use of the score test in the implementation of our test, and the use of powers of the estimated linear predictor and of the fitted mean response as auxiliary variables.

Keywords: Beta Regression; RESET; Hypotheses Tests; Monte Carlo Simulation.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Organização da Dissertação	2
1.3 Suporte Computacional	2
1.4 Estimadores de Máxima Verossimilhança	3
1.5 Otimização Não-linear	5
1.5.1 Newton-Raphson	5
1.5.2 Escore de Fisher	6
1.5.3 BFGS	7
2 O Modelo de Regressão Beta	8
2.1 Introdução	8
2.2 A Distribuição Beta	8
2.3 O Modelo de Regressão Beta	11
3 Testes de Hipóteses	22
3.1 Introdução	22
3.2 Teste da Razão de Verossimilhanças	22
3.3 Teste Escore	23

3.4	Teste de Wald	23
4	Teste de Erro de Especificação da Regressão Beta	24
4.1	Introdução	24
4.2	Teste de Erro de Especificação da Regressão Linear - RESET	25
4.2.1	Distribuição dos Resíduos Sobre as Condições Ideais	25
4.2.2	Erros de Especificação e Seus Efeitos Sobre a Distribuição dos Resíduos de Mínimos Quadrados	26
4.2.3	Procedimento de Teste	28
4.3	Teste de Erro de Especificação da Regressão Beta	28
5	Avaliação Numérica	30
5.1	Experimentos de Monte Carlo	30
5.2	Resultados e Discussão	33
5.2.1	Simulações de Tamanho	33
5.2.2	Simulações de Poder	34
6	Aplicação	74
7	Conclusões	76
	Apêndice	77
A	Programas de Simulação	77
A.1	Não-linearidade	77
A.2	Função de Ligação Incorreta	83
A.3	Biblioteca de Funções	92
B	Programa Utilizado na Aplicação	100
	Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

2.1	Densidades beta para diferentes valores de p e q	11
2.2	Densidades beta para diferentes valores de μ e ϕ	13
2.3	Comparação gráfica das cinco funções de ligação avaliadas.	15

Lista de Tabelas

5.1	Regressores utilizados como variáveis de teste.	31
5.2	Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.	37
5.3	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.	38
5.4	Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.	39
5.5	Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.	40
5.6	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.	41
5.7	Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.	42
5.8	Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.	43
5.9	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.	44
5.10	Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.	45
5.11	Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.	46

5.12	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.	47
5.13	Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.	48
5.14	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$	49
5.15	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$	50
5.16	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$	51
5.17	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$	52
5.18	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$	53
5.19	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$	54
5.20	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$	55
5.21	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$	56
5.22	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$	57
5.23	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$	58
5.24	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$	59
5.25	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$	60
5.26	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$	61
5.27	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$	62
5.28	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$	63
5.29	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação probit).	64

5.30	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação probit).	65
5.31	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação probit).	66
5.32	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).	67
5.33	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).	68
5.34	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).	69
5.35	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).	70
5.36	Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).	71
5.37	Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).	72
5.38	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$, $\phi = 10$ e 20	73
5.39	Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar), $n = 20$, $\phi = 10$ e 20	73
6.1	Estimativas dos parâmetros para os dados de gasolina de Prater.	75

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Introdução

É muito comum, na prática, o uso de modelos normais de regressão para identificar possíveis relações entre variáveis. Entretanto, tais modelos não são adequados para situações onde a variável resposta assume valores no intervalo $(0,1)$, como, por exemplo, dados de taxas e proporções.

Ferrari & Cribari-Neto (2004) propuseram um modelo de regressão para situações em que a variável resposta é medida de forma contínua no intervalo $(0,1)$. O modelo proposto é baseado na suposição de que a variável resposta tem distribuição beta utilizando uma parametrização da lei beta que é indexada pela média e por um parâmetro de precisão. Neste modelo, supõe-se também que a variável resposta é relacionada a outras variáveis através de uma estrutura de regressão e que o preditor envolvendo regressores e parâmetros é, de fato, linear nos parâmetros.

Entretanto, ao postularmos um modelo de regressão beta, não sabemos de fato se a forma funcional que estamos considerando retrata bem a realidade do fenômeno em estudo. Contudo, se a especificação utilizada for errônea, inferências imprecisas podem decorrer no que tange à estimação dos parâmetros, testes de hipótese e intervalos de confiança.

Na classe de modelos de regressão linear clássica, um teste que é bastante utilizado para verificar se a suposição de especificação correta é válida é o teste RESET (*regression*

specification error test - teste de erro de especificação da regressão) proposto por Ramsey (1969). A mecânica do teste RESET reside em adicionar uma forma não-linear ao modelo através de termos de grau dois, três, etc e, em seguida testar, por um teste F usual, a exclusão de tais termos.

Neste trabalho, propomos um teste de erro de especificação para a classe de modelos de regressão beta baseado no teste proposto por Ramsey. O procedimento do teste consiste em incluir potências de variáveis adicionais (variáveis de teste) no modelo e testar a exclusão das variáveis utilizadas para aumentar o modelo utilizando os testes escore, razão de verossimilhanças e Wald. Avaliamos o desempenho do teste quando utilizamos como variáveis adicionais potências do preditor linear ajustado, valores preditos e variáveis explicativas. Avaliamos também se o teste proposto é útil na identificação de erros de especificação. Em particular, os erros de especificação investigados foram não-linearidade no preditor linear e erro de especificação na função de ligação.

1.2 Organização da Dissertação

Neste primeiro capítulo abordaremos alguns conceitos básicos como estimador de máxima verossimilhança bem como suas propriedades sob condições de regularidade. Em seguida, os algoritmos de Newton-Raphson, Escore de Fisher e BFGS são apresentados. No Capítulo 2 apresentamos a distribuição beta bem como o modelo de regressão beta proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004). No terceiro capítulo abordamos testes de hipóteses apresentando os testes escore, razão de verossimilhanças e Wald. No Capítulo 4 mostramos o teste RESET, proposto por Ramsey (1969) e, em seguida, propomos um teste de erro de especificação da regressão beta baseado no teste RESET. No quinto capítulo, com base em simulações de Monte Carlo para o modelo de regressão beta, avaliamos o desempenho do teste proposto com relação a sua capacidade de identificar não-linearidade e erro de especificação na função de ligação utilizada. No Capítulo 6 apresentamos uma aplicação do teste de especificação proposto. No capítulo final apresentamos as conclusões deste trabalho.

1.3 Suporte Computacional

As avaliações numéricas realizadas ao longo desta dissertação foram realizadas utilizando a linguagem matricial de programação `0x` (Doornik, 2001) em sua versão 4.04 para sistema operacional `Linux`. `0x` é uma linguagem matricial de programação que foi de-

envolvida por Jurgen Doornik em 1994 e é distribuída gratuitamente para uso acadêmico; ela está disponível para **Windows** e algumas variantes do sistema operacional **UNIX** (incluindo **Linux**) e pode ser obtida em <http://www.doornik.com/download>. A linguagem **Ox** é muito flexível e foi desenvolvida a partir da linguagem de programação **C**. Maiores detalhes desta linguagem podem ser encontrados em Cribari-Neto & Zarkos (2003). O apêndice A desta dissertação contém programas de simulação que permitem avaliar o desempenho do teste proposto com relação à sua capacidade de identificar não-linearidade e erro de especificação na função de ligação utilizada.

Os gráficos apresentados nesta dissertação foram produzidos utilizando o software **R** (R Development Core Team, 2005) em sua versão 2.4.0 para o sistema operacional **Linux**. O **R** é uma excelente ferramenta e consiste em um ambiente de programação, análise de dados e gráficos. Também possui versão para sistemas operacionais **Windows** e se encontra disponível gratuitamente em <http://www.r-project.org>. Maiores detalhes sobre o **R** podem ser encontrados em Dalgaard (2002), Venables & Ripley (2002) e Cribari-Neto & Zarkos (1999).

A presente dissertação foi digitada usando o sistema de tipografia **L^AT_EX** desenvolvido por Leslie Lamport em 1985, que consiste em uma série de macros ou rotinas do sistema **T_EX** (Knuth, 1986). **L^AT_EX** também é distribuído de forma gratuita.

1.4 Estimadores de Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança é uma das mais importantes ferramentas de estimação paramétrica. Suponha que $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ é o valor observado de uma variável aleatória $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$. Seja $f(\mathbf{y}; \theta)$ uma função de probabilidade ou densidade conhecida que caracteriza Y e que envolve um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ de parâmetros desconhecidos. A função $f(\mathbf{y}; \theta)$ é denominada função do modelo estatístico e define uma família $\mathcal{F}$ de distribuições de probabilidade. Seja $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ o espaço paramétrico que representa o conjunto de possíveis valores do vetor θ .

A função de verossimilhança para θ baseada na observação $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ é dada por

$$L(\theta) \equiv L(\theta; \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \theta), \quad \theta \in \Theta, \quad \Theta \subseteq \mathbb{R}^p,$$

sendo uma função de θ para $\mathbf{y}$ fixo.

Em geral, as componentes de $\mathbf{Y}$ são mutuamente independentes para todas as distribuições em $\mathcal{F}$ e a função de verossimilhança de θ pode ser escrita como

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^n f_t(y_t; \theta),$$

onde f_t corresponde à densidade da t -ésima observação. Dada a função $L(\theta)$, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ é definido como o valor que maximiza $L(\theta)$ em Θ . Formalmente, o estimador de máxima verossimilhança é definido como a variável aleatória

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

É conveniente trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, também chamada de função de log-verossimilhança:

$$\ell(\theta) \equiv \ell(\theta; \mathbf{y}) = \log\{L(\theta)\} = \sum_{t=1}^n \log\{f_t(y_t; \theta)\}.$$

A função escore, $U(\theta) = (U_1(\theta), \dots, U_p(\theta))^\top$, descreve como a função de log-verossimilhança varia em Θ e é definida como

$$U_r(\theta) = \partial \ell(\theta) / \partial \theta_r, \quad r = 1, \dots, p,$$

ou seja,

$$U(\theta) = \nabla_{\theta} \ell(\theta),$$

em que $\nabla_{\theta} = (\partial/\partial\theta_1, \dots, \partial/\partial\theta_p)$ é o operador gradiente.

Sob condições gerais de regularidade (ver Cox & Hinkley, 1974, Cap. 9), temos que

$$K(\theta) = E_{\theta}[U(\theta)U(\theta)^\top] = E_{\theta}[J(\theta)],$$

onde o subscrito θ indica que o valor esperado é calculado supondo que θ é o verdadeiro valor do parâmetro e $J(\theta) = -\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta \partial \theta^\top$ é o negativo da matriz hessiana da função de log-verossimilhança que é denominado matriz de informação observada (Fisher, 1925). A matriz $K(\theta)$ é chamada de matriz de informação (esperada) de Fisher de θ .

Sob condições gerais de regularidade, $\ell(\theta)$ é diferenciável em θ , $\hat{\theta}$ existe e satisfaz a equação de verossimilhança

$$U(\hat{\theta}) = \nabla_{\theta} \ell(\hat{\theta}) = \mathbf{0}; \tag{1.1}$$

adicionalmente,

$$\ell(\hat{\theta}) \geq \ell(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

A equação de verossimilhança definida em (1.1) pode ser escrita como

$$\sum_{t=1}^n \nabla_{\theta} \log\{f_t(y_t; \theta)\} = \mathbf{0}. \quad (1.2)$$

Lehmann & Casela (1998, Cap. 6) mostram que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, obtido como raiz única da equação (1.2), apresenta as seguintes propriedades:

- (i) É consistente;
- (ii) É assintoticamente eficiente, isto é, dentre todos os estimadores consistentes de θ , o estimador de máxima verossimilhança possui variância assintótica mínima;
- (iii) É invariante sob transformações biunívocas, isto é, se $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ e g é uma função bijetora de θ , então $g(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$;
- (iv) É distribuído assintoticamente de forma normal p -variada como $\hat{\theta} \stackrel{A}{\sim} \mathcal{N}_p(\theta, K(\theta)^{-1})$;
- (v) É, em geral, viesado, embora seja assintoticamente não-viesado.

1.5 Otimização Não-linear

Em geral, na prática, é comum precisarmos maximizar ou minimizar funções. Um exemplo importante é a obtenção de estimativas de máxima verossimilhança em modelos estatísticos. Em muitos casos de interesse o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ não possui forma fechada e as estimativas devem ser obtidas a partir da maximização numérica da função de verossimilhança ou da função de log-verossimilhança. Ou seja, a estimativa $\hat{\theta}$ deve ser encontrada através da maximização numérica da função de log-verossimilhança utilizando algum procedimento iterativo, tal como os algoritmos de Newton-Raphson, escore de Fisher e quasi-Newton BFGS.

1.5.1 Newton-Raphson

O método de Newton ou de Newton-Raphson pode ser descrito pela seguinte equação de atualização:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - H(\theta)^{-1}U(\theta), \quad t = 0, 1, \dots,$$

onde

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top}$$

é a matriz hessiana ou matriz de segundas derivadas da função de log-verossimilhança.

Para entender a motivação por trás deste método, considere uma expansão da função escore $U(\theta)$ em série de Taylor até a primeira ordem em torno de um valor arbitrário, digamos θ_0 :

$$U(\theta) \approx U(\theta_0) + H(\theta_0)(\theta - \theta_0),$$

em que

$$H(\theta_0) = \left. \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right|_{\theta=\theta_0}.$$

Resolvendo para θ e colocando $\theta = \theta_{t+1}$ e $\theta_0 = \theta_t$, obtemos o esquema iterativo de Newton-Raphson dado acima.

A forma mais usual do algoritmo inclui um mecanismo de procura em linha e o esquema iterativo é dado por

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \lambda_t H(\theta_t)^{-1}U(\theta_t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

em que λ_t é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de θ_t na direção $-H(\theta_t)^{-1}U(\theta_t)$. O processo iterativo anterior é repetido até que a distância entre θ_{t+1} e θ_t seja menor que uma tolerância especificada.

O método de Newton-Raphson funciona bem em muitas situações, porém pode apresentar desempenho ruim em alguns casos. Em particular, se a função não for aproximadamente quadrática ou se a estimativa corrente se encontrar muito distante do ponto ótimo pode haver problemas de convergência.

1.5.2 Escore de Fisher

O método de Fisher é semelhante ao método de Newton-Raphson. A diferença é que no esquema iterativo usamos o valor esperado da matriz de segundas derivadas (K) ao invés da matriz de segundas derivadas (H), ou seja, usamos $E(-H) = K$. Com isso, obtemos o seguinte esquema iterativo:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \lambda_t K(\theta_t)^{-1} U(\theta_t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

em que λ_t , como antes, é um escalar determinado por algum procedimento de busca em linha a partir de θ_t na direção de $K(\theta_t)^{-1}U(\theta_t)$.

1.5.3 BFGS

Há uma classe de algoritmos muito eficientes que elimina a necessidade do cálculo de segundas derivadas e que tipicamente apresenta bom desempenho: os algoritmos quasi-Newton. O algoritmo quasi-Newton mais utilizado é o BFGS, que se diferencia do método de Newton-Raphson pelo fato de utilizar uma seqüência de matrizes simétricas e positivas definidas B_t ao invés da matriz $-H^{-1}$; a seqüência é tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_t = -H^{-1}.$$

Em geral, toma-se como matriz inicial, B_0 , a matriz identidade de ordem equivalente, por ser uma matriz positiva definida e simétrica, resultando em aproximações B_t positivas definidas e simétricas. A forma recursiva utilizada para obter tais matrizes é

$$B_{t+1} = B_t - \frac{B_t g_t^\top B_t}{g_t^\top B_t g_t} + \frac{h_t h_t^\top}{h_t^\top g_t}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

onde $g_t = \theta_{t+1} - \theta_t$ e $h_t = U(\theta_{t+1}) - U(\theta_t)$. Analogamente aos métodos apresentados anteriormente, o máximo é obtido pela recorrência

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \lambda_t B_t U(\theta_t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

em que λ_t , de forma análoga, é um escalar determinado por algum procedimento de busca em linha a partir de θ_t na direção de $-B_t U(\theta_t)$.

CAPÍTULO 2

O Modelo de Regressão Beta

2.1 Introdução

Uma ferramenta bastante útil para a modelagem de dados que assumem valores no intervalo $(0,1)$ é a distribuição beta (Johnson, Kotz & Balakrishnan (1995)). Neste capítulo apresentaremos o modelo de regressão beta proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004). Este modelo é adequado para situações em que a variável resposta é medida de forma contínua no intervalo $(0,1)$. O modelo proposto é baseado na suposição de que a variável resposta tem distribuição beta utilizando uma parametrização da lei beta que é indexada pela média e por um parâmetro de precisão. O modelo supõe também que a variável resposta é relacionada com outras variáveis através de uma estrutura de regressão. A seguir, além do modelo de regressão beta, apresentaremos também a distribuição beta e algumas de suas propriedades.

2.2 A Distribuição Beta

A variável aleatória Y tem distribuição beta indexada pelos parâmetros $p > 0$, $q > 0$, denotado por $Y \sim \mathcal{B}(p, q)$, quando sua função densidade é dada por

$$f(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (2.1)$$

onde $\Gamma(a)$ é a função gama avaliada no ponto a , ou seja,

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-y} dy.$$

Como $f(y; p, q)$ não assume valores negativos e como

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1} dy,$$

segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y; p, q) dy = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1} dy = 1,$$

ou seja, a expressão (2.1) é, de fato, uma densidade.

Note que (2.1) consiste em um produto de funções contínuas que admitem derivadas de todas as ordens em relação aos parâmetros p e q . Note também que o suporte da distribuição não envolve p ou q .

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória que tem distribuição $\mathcal{B}(p, q)$ é dada por

$$F(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^y t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt. \quad (2.2)$$

A partir de (2.2), definimos a função beta completa, $B(p, q)$, como o inverso da razão de funções gamas, ou seja,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

e a integral

$$B_y(p, q) = \int_0^y t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

é denominada função beta incompleta. Com isso, podemos expressar a função de distribuição acumulada dada em (2.2) pela razão entre a função beta incompleta e a função beta, ou seja,

$$F(y; p, q) = \frac{B_y(p, q)}{B(p, q)}.$$

Note que $F(y; p, q) = F(1 - y; q, p)$, pois pode-se provar que se $Y \sim \mathcal{B}(p, q)$, então $1 - Y \sim \mathcal{B}(q, p)$.

O momento de ordem r ao redor de zero da distribuição $\mathcal{B}(p, q)$ é

$$\begin{aligned} \mu_r = E(Y^r) &= \int_0^1 y^r \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy \\ &= \frac{B(p+r, q)}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+r)} \\ &= \frac{p_{(r)}}{(p+q)_{(r)}}, \end{aligned}$$

onde $k_{(r)} = k \times (k+1) \times (k+2) \times \cdots \times (k+r-1)$.

Assim, o valor esperado de $Y \sim \mathcal{B}(p, q)$ é dado por

$$E(Y) = \frac{p}{(p+q)} \quad (2.3)$$

e sua variância é

$$\text{Var}(Y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \quad (2.4)$$

Através dos momentos, podem ser obtidos facilmente os valores da assimetria α e curtose k , que são dados, respectivamente por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2(q-p)}{p+q+2} \sqrt{\frac{p+q+1}{pq}}, \\ \alpha_2 &= \frac{3(p+q+1)[2(p+q)^2 + pq(p+q-6)]}{pq(p+q+2)(p+q+3)}. \end{aligned}$$

Como pode ser visto na Figura 2.1, a densidade beta comporta uma família de densidades de variáveis aleatórias que assumem valores no intervalo $(0, 1)$. Se $p = q$, então $\mu_3 = 0$ e a função densidade de probabilidade é simétrica. Se $q > p$, então $\mu_3 > 0$ e a função densidade de probabilidade é assimétrica à direita. Da mesma forma, se $q < p$, então $\mu_3 < 0$ resulta em uma distribuição assimétrica à esquerda. Em particular, quando $p = q = 1$, temos a distribuição uniforme.

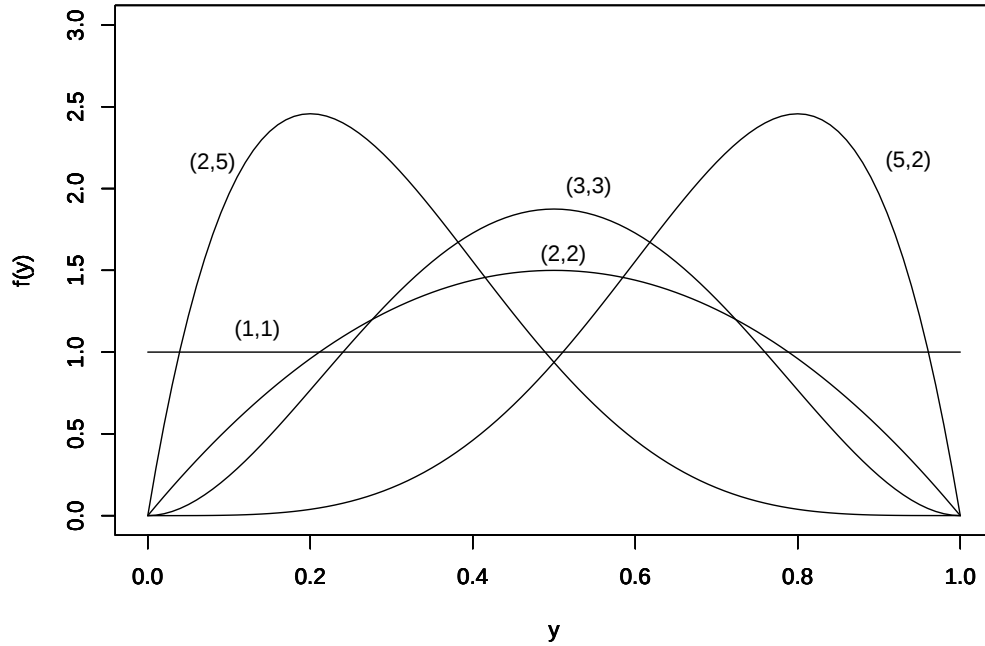


Figura 2.1: Densidades beta para diferentes valores de p e q .

2.3 O Modelo de Regressão Beta

A distribuição beta possui densidade como definida na equação (2.1). Tal densidade é indexada por dois parâmetros: p e q . No entanto, em análises de regressão usualmente modela-se a média da resposta como função de parâmetros e variáveis explicativas. É comum também definir um modelo que contenha um parâmetro de precisão (ou dispersão).

Com o objetivo de especificar uma estrutura de regressão para a média da variável resposta juntamente com um parâmetro de precisão, uma parametrização diferente da densidade beta foi proposta. Ferrari & Cribari-Neto (2004) sugeriram a seguinte parametrização:

$$\mu = p/(p + q) \quad \text{e} \quad \phi = p + q,$$

ou seja,

$$p = \mu\phi \quad \text{e} \quad q = (1 - \mu)\phi.$$

Com isso, a partir de (2.3) e (2.4), conclui-se que

$$E(Y) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = \frac{V(\mu)}{1 + \phi}, \quad (2.5)$$

onde $V(\mu) = \mu(1-\mu)$, de tal forma que μ é a média da variável Y e ϕ pode ser interpretado como um parâmetro de precisão no sentido que, para μ fixado, quanto maior o valor de ϕ , menor a variância de Y . Com essa parametrização, a densidade de Y pode ser escrita como

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (2.6)$$

onde $0 < \mu < 1$ e $\phi > 0$.

Note que assumimos que a variável resposta está restrita ao intervalo unitário padrão $(0, 1)$. Entretanto, o modelo proposto pode ser utilizado em situações mais gerais, em que a resposta é restrita ao intervalo (a, b) , onde a e b são constantes conhecidas, $a < b$. Neste caso, podemos modelar a variável $(y - a)/(b - a)$, que consiste em uma padronização que permite trabalhar com a densidade (2.6) no intervalo $(0, 1)$.

A Figura 2.2 apresenta o comportamento da densidade beta, sob a nova parametrização, para diferentes valores de μ e ϕ . A densidade beta permite modelar densidades na forma de ‘J’, ‘J’ invertido (Figuras 2.2 (a) e (c)) e ‘U’ (Figura 2.2 (b)). Observa-se que a distribuição é simétrica em torno de μ quando $\mu = 1/2$ e é assimétrica quando $\mu \neq 1/2$. No caso em que $\mu = 1/2$ e $\phi = 2$ a densidade se reduz à distribuição uniforme padrão (Figura 2.2 (b)). Adicionalmente, para μ fixo, a dispersão da distribuição decresce quando ϕ cresce (Figuras 2.2 (a), (c) e (d)).

Suponha que $y_1, \dots, y_n$ é uma amostra aleatória, tal que $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi)$, $t = 1, \dots, n$, e que a média de y_t satisfaz uma relação funcional da forma

$$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^k x_{ti} \beta_i = \eta_t, \quad (2.7)$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é um vetor de parâmetros (desconhecidos), $\beta \in \mathbb{R}^k$, η_t é um preditor linear e $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ são observações de k covariáveis (conhecidas), onde $k < n$. Adicionalmente, a função $g : (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$, denominada função de ligação, deve ser estritamente monótona e duas vezes diferenciável.

Quatro funções de ligação $g(\cdot)$ são comumente utilizadas na prática:

1. Logit ou função logística:

$$g(\mu) = \log(\mu/(1 - \mu));$$

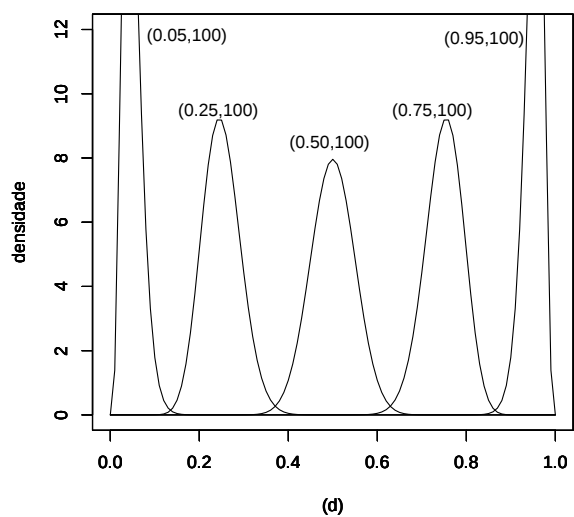
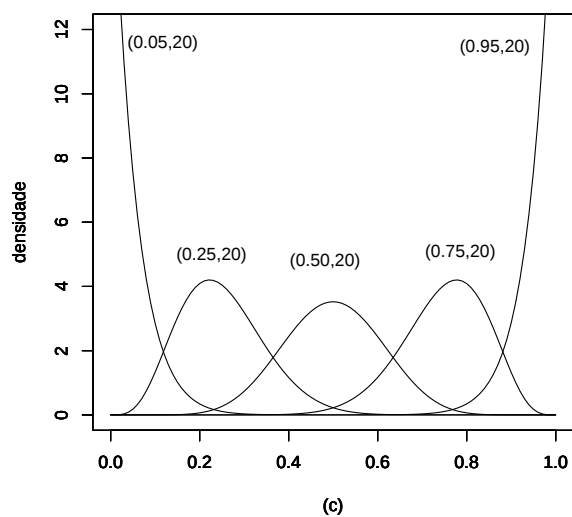
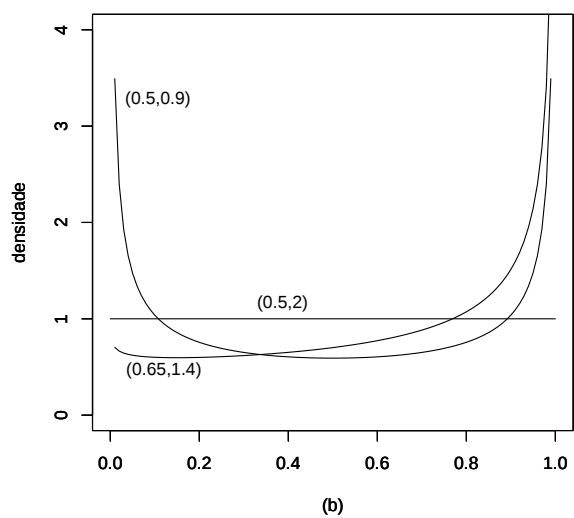
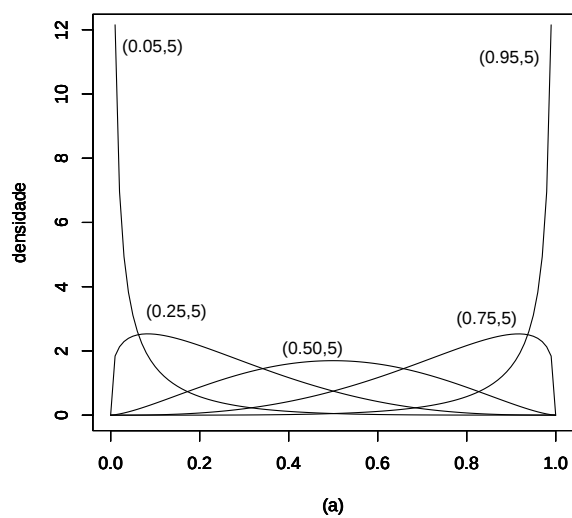


Figura 2.2: Densidades beta para diferentes valores de μ e ϕ .

2. Probit ou função normal inversa:

$$g(\mu) = \Phi^{-1}(\mu);$$

3. Função log-log complementar:

$$g(\mu) = \log\{-\log(1 - \mu)\};$$

4. Função log-log:

$$g(\mu) = -\log\{-\log(\mu)\}.$$

Uma outra possibilidade é a função de ligação Cauchy, definida por

$$g(\mu) = \tan\{\pi(\mu - 0.5)\}.$$

A Figura 2.3 exibe uma comparação gráfica das cinco funções de ligação descritas acima. Percebe-se que as funções de ligação logística, probit e Cauchy são semelhantes quando μ está em torno de 0.5. Em particular, quando μ tende a 1 a função log-log complementar diverge mais lentamente do que as demais funções de ligação em estudo. A função de ligação Cauchy apresenta comportamento marcadamente distinto das demais funções de ligação quando μ está próximo dos limites do intervalo unitário padrão. Para pequenos valores de μ , as funções de ligação logística e log-log complementar são semelhantes. Adicionalmente, quando μ está próximo de um as funções de ligação log-log e logística são semelhantes.

Embora diversas funções de ligação possam ser utilizadas para este modelo, a função de ligação logística conduz a uma interpretação particularmente interessante dos parâmetros de regressão com base na razão de chances. Neste caso, a média de y_t pode ser escrita como

$$\mu_t = \frac{\exp(x_t^\top \beta)}{1 + \exp(x_t^\top \beta)},$$

onde $x_t^\top = (x_{t1}, \dots, x_{tk})$, $t = 1, \dots, n$. Suponha que o valor da i -ésima variável regressora seja aumentado em c unidades, mantendo-se fixos os valores das demais variáveis independentes. Seja $\mu^\dagger$ a média da variável y sob este novo valor da covariável e seja μ a média de y sob o valor original das covariadas. Com isso, temos que

$$\frac{\mu^\dagger}{1 - \mu^\dagger} = \exp\{x_{t1}\beta_1 + \dots + (x_{ti} + c)\beta_i + \dots + x_{tk}\beta_k\}$$

e, assim,

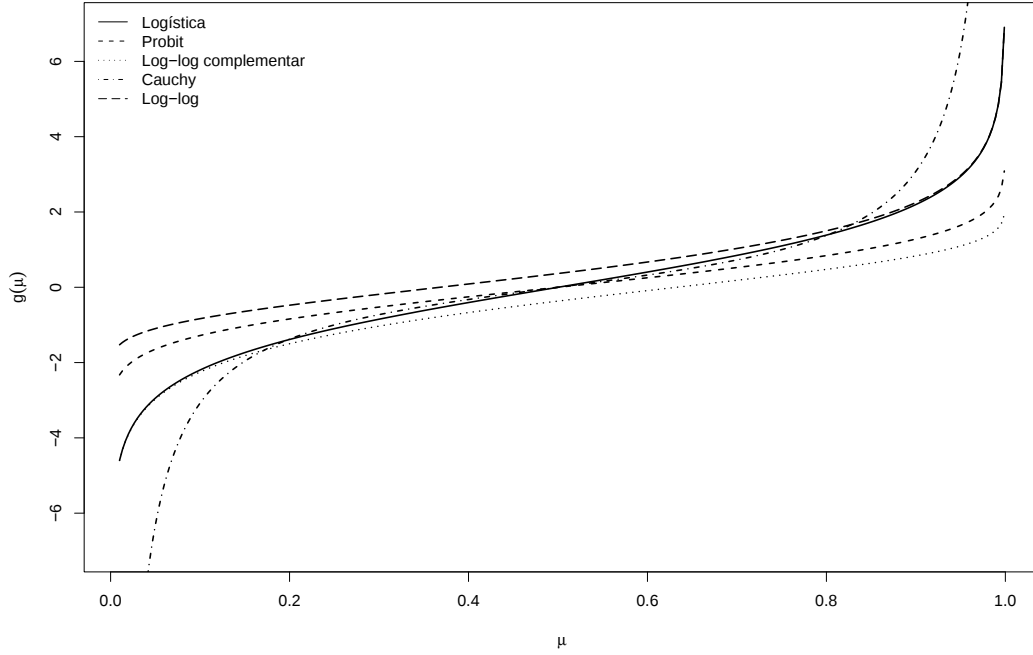


Figura 2.3: Comparação gráfica das cinco funções de ligação avaliadas.

$$\exp(c\beta_i) = \frac{\mu^\dagger/(1 - \mu^\dagger)}{\mu/(1 - \mu)},$$

ou seja, $\exp(c\beta_i)$ é a razão de chances (*odds ratio*).

A partir de (2.7), concluímos que, como a variância de y_t é uma função de μ_t , consequentemente será também função dos valores das variáveis explicativas. Ou seja, o modelo incorpora naturalmente a não-constância de variâncias que caracteriza dados do tipo taxas e proporções.

O logaritmo da função de verossimilhança para o modelo de regressão beta é dado por

$$\ell(\beta, \phi) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\mu_t, \phi),$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_t(\mu_t, \phi) &= \log \Gamma(\phi) - \log \Gamma(\mu_t \phi) - \log \Gamma((1 - \mu_t) \phi) + (\mu_t \phi - 1) \log y_t \\ &+ \{(1 - \mu_t) \phi - 1\} \log(1 - y_t). \end{aligned}$$

Como foi definido em (2.7), $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$ é função de β . A função escore é obtida pela diferenciação do logaritmo da função de verossimilhança em relação aos parâmetros desconhecidos. Temos que, para $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{\partial \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_i}, \quad (2.8)$$

onde

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} = \phi \left[\log \left(\frac{y_t}{1 - y_t} \right) - \{\psi(\mu_t \phi) - \psi((1 - \mu_t) \phi)\} \right], \quad (2.9)$$

em que $\psi(\cdot)$ é a função digama, que é uma das funções denominadas genericamente de poligama; estas funções são definidas, para $j = 0, 1, \dots$, como

$$\psi^{(j)}(a) = \frac{d^{j+1}}{da^{j+1}} \log \Gamma(a), \quad a > 0. \quad (2.10)$$

De (2.8), podemos notar que $d\mu_t/d\eta_t = 1/g'(\mu_t)$ e $\partial \eta_t / \partial \beta_i = x_{ti}$. Sejam $y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\}$ e $\mu_t^* = \psi(\mu_t \phi) - \psi((1 - \mu_t) \phi)$. Com isso, a expressão (2.9) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} = \phi(y_t^* - \mu_t^*)$$

e a expressão (2.8) se reduz a

$$\frac{\partial \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i} = \phi \sum_{t=1}^n (y_t^* - \mu_t^*) \frac{1}{g'(\mu_t)} x_{ti}. \quad (2.11)$$

Supondo que as condições usuais de regularidade são válidas, o valor esperado de $\partial \ell_t(\mu_t, \phi) / \partial \mu_t$ é zero. Porém, $E[\partial \ell_t(\mu_t, \phi) / \partial \mu_t] = 0$ se e somente se $E[\phi(y_t^* - \mu_t^*)] = 0$, o que ocorre se e só se $E[y_t^*] = \mu_t^*$, ou seja, a esperança da variável transformada y_t^* é igual a μ_t^* .

A função escore para β , que consiste em um vetor coluna de dimensão k , pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$U_\beta(\beta, \phi) = \phi X^\top T(y^* - \mu^*), \quad (2.12)$$

em que X é uma matriz de dimensão $n \times k$ cuja t -ésima linha é $x_t^\top$, $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ e $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$.

De maneira similar, a derivada de primeira ordem do logaritmo da função de verossimilhança em relação a ϕ é dada por

$$\frac{\partial \ell(\beta, \phi)}{\partial \phi} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \phi}, \quad (2.13)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \phi} &= \mu_t \left[\log \left(\frac{y_t}{1 - y_t} \right) - \{\psi(\mu_t \phi) - \psi((1 - \mu_t) \phi)\} \right] \\ &\quad + \log(1 - y_t) - \psi((1 - \mu_t) \phi) + \psi(\phi). \end{aligned}$$

Portanto, a função escore para o parâmetro de precisão ϕ é dada por

$$U_\phi(\beta, \phi) = \sum_{t=1}^n \{\mu_t(y_t^* - \mu_t^*) + \log(1 - y_t) - \psi((1 - \mu_t) \phi) + \psi(\phi)\},$$

onde $U_\phi(\beta, \phi)$ é um escalar.

Em seguida, devemos obter a matriz de informação de Fisher para (β, ϕ) . A partir de (2.8), a derivada de segunda ordem de $\ell(\beta, \phi)$ com respeito a β_i e β_j é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} &= \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_t} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right) \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_j} x_{ti} \\ &= \sum_{t=1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \mu_t} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right) \right] \frac{d\mu_t}{d\eta_t} x_{ti} x_{tj}. \end{aligned}$$

Porém, $E(\partial \ell_t(\mu_t, \phi) / \partial \mu_t) = 0$. Assim,

$$E \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right) = \sum_{t=1}^n E \left(\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \right) \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 x_{ti} x_{tj}.$$

A partir de (2.9) temos que

$$\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} = -\phi^2 \{\psi'(\mu_t \phi) + \psi'((1 - \mu_t) \phi)\},$$

em que $\psi'(\cdot)$ é a função trigama definida em (2.10) e, com isso,

$$E \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right) = -\phi \sum_{t=1}^n w_t x_{ti} x_{tj},$$

onde

$$w_t = \phi \{\psi'(\mu_t \phi) + \psi'((1 - \mu_t) \phi)\} \frac{1}{g'(\mu_t)^2}.$$

Em forma matricial,

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \right) = -\phi X^\top W X,$$

com $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$.

De (2.11), a derivada de segunda ordem de $\ell(\beta, \phi)$ com respeito a β_i e ϕ pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta_i \partial \phi} = \sum_{t=1}^n \left[(y_t^* - \mu_t^*) - \phi \frac{\partial \mu_t^*}{\phi} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} x_{ti}.$$

Como $\mathbb{E}(y_t^*) = \mu_t^*$ e $\partial \mu_t^* / \partial \phi = \psi'(\mu_t \phi) \mu_t - \psi'((1 - \mu_t) \phi) (1 - \mu_t)$, chegamos a

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \beta \partial \phi} \right) = -X^\top T c,$$

com $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$.

Note que $\partial^2 \ell(\beta, \phi) / \partial \phi^2$ pode ser obtido diferenciando a expressão em (2.13) com respeito a ϕ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \phi^2} &= \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \phi^2} \\ &= - \sum_{t=1}^n [\psi'(\mu_t \phi) \mu_t^2 + \psi'((1 - \mu_t) \phi) (1 - \mu_t^2) - \psi'(\phi)]. \end{aligned}$$

Seja $d_t = \psi'(\mu_t \phi) \mu_t^2 + \psi'((1 - \mu_t) \phi) (1 - \mu_t^2) - \psi'(\phi)$. Logo,

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = - \sum_{t=1}^n d_t,$$

que, em notação matricial, pode ser escrito como

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) = -\text{tr}(D),$$

em que $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ e $\text{tr}(D)$ indica o traço da matriz D .

Finalmente, a matriz de informação de Fisher para (β, ϕ) é dada por

$$K = K(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que $K_{\beta\beta} = \phi X^\top W X$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = X^\top T c$ e $K_{\phi\phi} = \text{tr}(D)$. Note que os parâmetros β e ϕ não são ortogonais, em contraste ao que é verificado na classe de modelos lineares generalizados (McCullagh & Nelder, 1989).

Sob condições gerais de regularidade (Sen & Singer, 1993), é possível estabelecer a normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \overset{A}{\sim} \mathcal{N}_{k+1} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \phi \end{pmatrix}, K^{-1} \right).$$

onde $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de β e ϕ , respectivamente, e $\overset{A}{\sim}$ denota ‘aproximadamente distribuído’.

A partir da normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança, pode-se construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo de regressão beta. Assim, para $r = 1, \dots, k$,

$$\left(\hat{\beta}_r - z_{1-\frac{\alpha}{2}} (K^{rr})^{1/2} \quad ; \quad \hat{\beta}_r + z_{1-\frac{\alpha}{2}} (K^{rr})^{1/2} \right)$$

e

$$\left(\hat{\phi} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} (K^{\phi\phi})^{1/2} \quad ; \quad \hat{\phi} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} (K^{\phi\phi})^{1/2} \right)$$

são intervalos de confiança de cobertura $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1/2$, para β_r e ϕ , respectivamente.

As variâncias assintóticas de $\hat{\beta}_r$ e $\hat{\phi}$ correspondem ao r -ésimo e ao $(k+1)$ -ésimo elementos diagonais da matriz $K^{\beta\beta}$, ou seja, K^{rr} e $K^{\phi\phi}$, respectivamente. É útil, assim, obter uma expressão para K^{-1} , que pode ser utilizada para obter os erros padrão assintóticos para as estimativas de máxima verossimilhança. Utilizando expressões padrões para inversas de matrizes subdivididas (ver, por exemplo, Rao, 1973, p. 29), obtém-se

$$K^{-1} = K^{-1}(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} K^{\beta\beta} & K^{\beta\phi} \\ K^{\phi\beta} & K^{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que

$$K^{\beta\beta} = \phi^{-1} (X^\top W X)^{-1} \left\{ I_k + \frac{X^\top T c c^\top T^\top X (X^\top W X)^{-1}}{\gamma \phi} \right\},$$

com $\gamma = \text{tr}(D) - \phi^{-1} c^\top T^\top X (X^\top W X)^{-1} X^\top T c$, $K^{\beta\phi} = (K^{\phi\beta})^\top = -\frac{1}{\gamma \phi} (X^\top W X)^{-1} X^\top T c$, e $K^{\phi\phi} = \gamma^{-1}$. Aqui, I_k é a matriz identidade de ordem k .

Apresentaremos a seguir algumas aproximações para w_t e u_t^* , $t = 1, \dots, n$, quando $\mu_t \phi$ e $(1 - \mu_t) \phi$ são grandes. Em princípio, note que (Abramowitz & Stegun, 1965, p.259), quando $z \rightarrow \infty$,

$$\psi(z) = \log(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \dots \quad (2.14)$$

e

$$\psi'(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \dots \quad (2.15)$$

No que segue, omitimos o subscrito t (que indexa as observações). Quando $\mu\phi$ e $(1 - \mu)\phi$ são grandes, segue de (2.15) que

$$w \approx \phi \left\{ \frac{1}{\mu\phi} + \frac{1}{(1 - \mu)\phi} \right\} \frac{1}{g'(\mu)^2} = \frac{1}{\mu(1 - \mu)} \frac{1}{g'(\mu)^2}.$$

Adicionalmente, de (2.14), obtemos

$$\mu^* \approx \log(\mu\phi) - \log((1 - \mu)\phi) = \log\left(\frac{\mu}{1 - \mu}\right).$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de β e ϕ são obtidos através da solução do sistema

$$U_\beta(\beta, \phi) = 0$$

e

$$U_\phi(\beta, \phi) = 0.$$

Tais estimadores não possuem forma fechada e devem ser obtidos numericamente pela maximização do logaritmo da função de verossimilhança, utilizando um algoritmo de otimização não-linear, como, por exemplo, o algoritmo de Newton (Newton-Raphson, escore de Fisher) ou um algoritmo quasi-Newton (BFGS), descritos no Capítulo 1. Em geral, estes algoritmos requerem a especificação de um valor inicial para o esquema iterativo. Ferrari & Cribari-Neto (2004) sugerem utilizar como vetor inicial a estimativa do vetor β obtida a partir de uma regressão linear da variável resposta transformada $g(y_1), \dots, g(y_n)$ em X , i.e., $(X^\top X)^{-1}Xz$, onde o vetor z é $z = (g(y_1), \dots, g(y_n))^\top$. Adicionalmente, a partir de (2.5) obtém-se que $\phi = [\mu_t(1 - \mu_t)/\text{Var}(y_t)] - 1$, e, ao expandir até a primeira ordem a função $g(y_t)$ em série de Taylor ao redor do ponto μ_t e tomando a variância, temos que

$$\text{Var}(g(y_t)) \approx \text{Var}[g(\mu_t) + (y_t - \mu_t)g'(\mu_t)] = \text{Var}(y_t)\{g'(\mu_t)\}^2,$$

ou seja,

$$\text{Var}(y_t) \approx \frac{\text{Var}(g(y_t))}{g'(\mu_t)^2}.$$

Com isso, uma estimativa inicial para ϕ é dada por

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\tilde{\mu}_t(1 - \tilde{\mu}_t)}{\tilde{\sigma}_t^2} - 1,$$

onde $\tilde{\mu}_t$ é obtido aplicando $g^{-1}(\cdot)$ ao t -ésimo valor ajustado da regressão linear de z em X , ou seja, $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top (X^\top X)^{-1} X^\top z)$ e $\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{e}^\top \tilde{e} / [(n - k) \{g'(\tilde{\mu}_t)\}^2]$, onde $\tilde{e} = z - (X^\top X)^{-1} X^\top z$ é o vetor de mínimos quadrados de regressão linear sob a variável resposta transformada.

No R, o pacote **betareg** é bastante útil na estimação e diagnóstico do modelo de regressão beta e pode ser obtido em <http://cran.r-project.org>. Nele, a estimação dos parâmetros é feita através do algoritmo BFGS.

Uma outra alternativa na modelagem de dados que assumem valores no intervalo $(0, 1)$ foi proposta por Vasconcellos & Cribari-Neto (2005). Os autores propuseram um modelo onde $y_1, \dots, y_n$ são independentes e distribuídas de acordo com lei beta. A distribuição de y_t é $\mathcal{B}(p_t, q_t)$, $t = 1, \dots, n$, onde p_t e q_t são, para cada t , descritas por conjuntos de regressores $x_1, \dots, x_m$ e $v_1, \dots, v_M$ como

$$p_t = g(\beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_m x_{tm}),$$

$$q_t = h(\gamma_1 v_{t1} + \dots + \gamma_M v_{tM}).$$

Aqui, g e h são funções de ligação e $\beta_1, \dots, \beta_m$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ são parâmetros de regressão desconhecidos. Outras alternativas propostas são abordadas em Kieschnick & McCullough (2003).

3.1 Introdução

A seguir apresentaremos os testes da razão de verossimilhanças, escore e Wald no contexto do modelo de regressão beta. Considere o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta = \beta^{(0)}$ versus a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \beta \neq \beta^{(0)}$, em que β e $\beta^{(0)}$ são vetores m -dimensionais, ou seja, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^\top$ e $\beta^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_m^{(0)})^\top$, para $m < k$, $\beta^{(0)}$ sendo conhecido.

3.2 Teste da Razão de Verossimilhanças

A estatística da razão de verossimilhanças é

$$\omega_1 = 2\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\phi}) - \ell(\tilde{\beta}, \tilde{\phi})\},$$

onde $\ell(\beta, \phi)$ é o logaritmo natural da função de verossimilhança e $(\tilde{\beta}, \tilde{\phi})$ é o estimador de máxima verossimilhança de (β, ϕ) obtido pela imposição da hipótese nula, i.e., é o estimador de máxima verossimilhança restrito.

Sob condições gerais de regularidade e sob $\mathcal{H}_0$, a estatística da razão de verossimilhanças tem, assintoticamente, distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade, ou seja,

$$\xi_1 \xrightarrow{D} \chi_m^2,$$

onde $\xrightarrow{D}$ denota convergência em distribuição. Assim, pode-se realizar o teste utilizando valores críticos aproximados da distribuição χ_m^2 .

3.3 Teste Escore

O teste escore, também conhecido como teste de Rao (1948), é baseado na estatística

$$\xi_2 = \tilde{U}_{1\beta}^\top \tilde{K}_{11}^{\beta\beta} \tilde{U}_{1\beta},$$

onde $U_{1\beta}$ é um vetor coluna m dimensional que contém os primeiros m elementos da função escore de β , $K_{11}^{\beta\beta}$ é uma matriz $m \times m$ formada pelas m primeiras linhas e m primeiras colunas da matriz K^{-1} e o til indica que as quantidades estão sendo avaliadas no estimador de máxima verossimilhança restrito.

A partir de (2.12), pode-se mostrar que, no modelo de regressão beta, $U_{1\beta} = \phi X_1^\top T(y^* - \mu^*)$, em que X é particionada como $[X_1, X_2]$ seguindo a partição de β . Assim como a estatística da razão de verossimilhanças, sob condições gerais de regularidade e sob $\mathcal{H}_0$, a estatística escore tem, assintoticamente, distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade, ou seja, $\xi_2 \xrightarrow{D} \chi_m^2$.

3.4 Teste de Wald

Podemos ainda utilizar o teste de Wald para realizar inferências acerca do vetor de parâmetros β . A estatística Wald é dada por

$$\xi_3 = (\hat{\beta} - \beta^{(0)})^\top (\hat{K}_{11}^{\beta\beta})^{-1} (\hat{\beta} - \beta^{(0)}),$$

onde $\hat{K}_{11}^{\beta\beta}$ corresponde a $K_{11}^{\beta\beta}$ avaliado no estimador de máxima verossimilhança irrestrito e $\hat{\beta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de β . De forma similar aos testes anteriores, sob condições gerais de regularidade e sob $\mathcal{H}_0$, $\xi_2 \xrightarrow{D} \chi_m^2$.

Buse (1982) mostrou que, se a função de log-verossimilhança é quadrática, então as três estatísticas de teste apresentadas são numericamente idênticas e têm distribuição χ^2 para todos os tamanhos amostrais sob a hipótese nula, no caso de hipóteses simples.

Teste de Erro de Especificação da Regressão Beta

4.1 Introdução

No modelo de regressão beta, uma suposição que é feita é que o preditor envolvendo regressores e parâmetros é, de fato, linear nos parâmetros.

Em geral, na prática, postulamos a forma funcional do modelo e as variáveis que devem pertencer a ele com base em estudos anteriores ou por aconselhamento de um profissional da área. Após ajustar o modelo, devemos testar se ele está realmente bem especificado. Se os resultados desta avaliação não forem satisfatórios, então nos preocupamos com a adequação do modelo e devemos procurar meios de correção.

Neste capítulo, apresentaremos um teste de erro de especificação da regressão beta baseado no teste RESET (*regression specification error test* - teste de erro de especificação da regressão) proposto por Ramsey (1969). Antes, porém, apresentaremos o teste RESET no contexto do modelo de regressão linear clássico e os erros de especificação que o teste pode diagnosticar.

No capítulo seguinte avaliaremos o desempenho do teste de erro de especificação proposto no contexto da classe de regressão beta via simulação de Monte Carlo sob diferentes cenários.

4.2 Teste de Erro de Especificação da Regressão Linear - RESET

Ramsey (1969) propôs procedimentos inferenciais para se testar a presença de uma série de erros de especificação. Os testes se baseiam na comparação entre a distribuição dos resíduos sob a hipótese de que o modelo está corretamente especificado e a distribuição dos resíduos produzidos sob a hipótese alternativa de que existe um erro de especificação de um dos tipos considerados. Um dos procedimentos propostos é o teste RESET, que é um procedimento para testar a presença de dois tipos de erros de especificação em um modelo de regressão linear: variável omitida e forma funcional incorreta. A seguir apresentaremos os efeitos sobre a distribuição dos resíduos de mínimos quadrados na presença de desses dois tipos de erros de especificação.

4.2.1 Distribuição dos Resíduos Sobre as Condições Ideais

Para entender o que implica cada má especificação discutida a seguir, definimos precisamente o que significa dizer que o modelo está corretamente especificado. Suponha que temos $k + 1$ variáveis, onde a variável dependente é denotada por y_t e as variáveis regressoras são denotadas por $x_{t1}, \dots, x_{tk}$, $t = 1, 2, \dots, n$ ($k < n$), e que a relação entre a variável dependente e os regressores é dada por

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

ou, em forma matricial,

$$\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{u}, \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor $n \times 1$, X é uma matriz $n \times k$ de posto k , β é um vetor $k \times 1$ de parâmetros e $\mathbf{u}$ é um vetor $n \times 1$ de erros. Assumiremos que no modelo corretamente especificado a distribuição de $\mathbf{u}$ é normal com vetor de média zero e matriz de covariância dada por $\sigma^2 I$, onde I é a matriz identidade de ordem n .

Para o modelo corretamente especificado, o vetor de resíduos de mínimos quadrados é dado por

$$\hat{\mathbf{u}} = [I - X(X^\top X)^{-1}X^\top]\mathbf{y} = M\mathbf{y}, \text{ ou } \hat{u}_t = m_t^\top \mathbf{y},$$

onde $m_t^\top$ é a t -ésima linha de M , onde $M = I - X(X^\top X)^{-1}X^\top$. Um estimador de σ^2 é

$$(n - k)^{-1} \hat{\mathbf{u}}^\top \hat{\mathbf{u}} = (n - k)^{-1} \mathbf{y}^\top M \mathbf{y}.$$

Sob especificação correta, a distribuição de $\hat{\mathbf{u}}$ é normal com vetor de média zero e matriz de covariância $\sigma^2 M$. A matriz M é positiva semi-definida, não-diagonal e idempotente de posto $n - k$. Embora todos os u_t , $t = 1, 2, \dots, n$, sejam independentes e identicamente distribuídos, os resíduos de mínimos quadrados $\hat{u}_t$ não são independentes e identicamente distribuídos. Adicionalmente, $(\hat{\mathbf{u}}^\top \hat{\mathbf{u}})/\sigma^2$ tem distribuição χ^2 com $n - k$ graus de liberdade.

4.2.2 Erros de Especificação e Seus Efeitos Sobre a Distribuição dos Resíduos de Mínimos Quadrados

Variável Omitida

Considere o seguinte modelo, o qual satisfaz as condições ideais:

$$\mathbf{y} = X\beta + \gamma \mathbf{z} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor $n \times 1$, X é uma matriz de regressores $n \times k$ de posto k , $\mathbf{z}$ é um vetor $n \times 1$ do $(k + 1)$ -ésimo regressor, β é um vetor de coeficientes $n \times 1$, γ é o parâmetro de regressão associado ao $(k + 1)$ -ésimo regressor e $\mathbf{u}$ é um vetor $n \times 1$ de erros.

Suponha que o modelo estimado é

$$\mathbf{y} = X\delta + \mathbf{v}, \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{y}$ e X são como antes, δ é um vetor $k \times 1$ de parâmetros e $\mathbf{v}$ é um vetor $n \times 1$ de erros. Se (4.2) é o modelo corretamente especificado, então (4.3) não cumpre as condições ideais e $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{z} + \mathbf{u}$, ou seja, os efeitos das variáveis omitidas são capturados pelo erro do modelo, supondo que o vetor n dimensional $\mathbf{z}$ é não-estocástico. Como (4.2) reúne as condições ideais, a distribuição de $\mathbf{u}$ independe de $\mathbf{z}$.

Os resíduos de mínimos quadrados para o modelo (4.3) são

$$\hat{\mathbf{v}} = M\mathbf{y} = M\mathbf{z}\gamma + M\mathbf{u}.$$

Sob as suposições feitas acima, o vetor de médias e a matriz de covariância de $\hat{\mathbf{v}}$ são, respectivamente,

$$E(\hat{\mathbf{v}}|X) = M\mathbf{z}\gamma \text{ e } E(\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^\top|X) = \sigma_u^2 M.$$

Adicionalmente, $\hat{\mathbf{v}}$ tem distribuição normal sob as suposições dadas acima. Ramsey (1969) mostra que $(\hat{\mathbf{v}}^\top \hat{\mathbf{v}})/\sigma^2$ é distribuída como χ^2 não-central com $n - k$ graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\lambda = \gamma^2(\mathbf{z}^\top M \mathbf{z})/\sigma^2$. A distribuição de cada $\hat{v}_t^2/\sigma^2$, $t = 1, 2, \dots, n$, é também χ^2 não-central com um grau de liberdade e parâmetro de não-centralidade dado por $\lambda_t = \gamma^2(\mathbf{z}^\top m_t m_t^\top \mathbf{z})/\sigma^2$.

Forma Funcional Incorreta

Considere o seguinte modelo, que satisfaz todas as condições ideais:

$$\mathbf{y} = Z\gamma + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I), \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor $n \times 1$ da variável resposta, Z é uma matriz de regressores $n \times k$ de posto k , γ é um vetor $k \times 1$ de parâmetros e $\mathbf{u}$ é um vetor $n \times 1$ de erros. Suponha que o modelo estimado é

$$\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{v}, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{y}$ é como em (4.4), X é uma matriz de regressores $n \times k$ de posto k , β é um vetor $k \times 1$ de parâmetros e $\mathbf{v}$ é um vetor $n \times 1$ de erros. Suponha que a relação entre cada elemento de Z e cada elemento de X seja

$$z_{ti} = f_i(x_{ti}), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (4.6)$$

onde f_i é alguma função não-linear, e.g., função quadrática, função logaritmo, etc. Pode-se também considerar, para cada t ($t = 1, 2, \dots, n$), z_{ti} como uma função de todos os x_{ti} , $i = 1, 2, \dots, k$. Como assumimos que o modelo corretamente especificado é (4.4), a distribuição de $\mathbf{u}$ independe de Z . Com isso, a distribuição de $\mathbf{u}$ independe de X , pois os elementos de X são funções dos elementos de Z .

O vetor de resíduos de mínimos quadrados para o modelo dado em (4.5) é

$$\hat{\mathbf{v}} = M\mathbf{y} = MZ\gamma + M\mathbf{u}.$$

Condicionalmente à matriz observada X , temos que

$$E(\hat{\mathbf{v}}|X) = MZ\gamma \text{ e } E(\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^\top|X) = \sigma^2 M, \quad (4.7)$$

onde Z é definida pela substituição dos elementos de X em (4.6). Com base na especificação do modelo dado em (4.4), vê-se que a distribuição de $\hat{\mathbf{v}}$ condicional a X é normal com vetor de média e matriz de covariância dados em (4.7). Adicionalmente, Ramsey

(1969) mostra que a distribuição de $\hat{\mathbf{v}}^\top \hat{\mathbf{v}}/\sigma^2$ é χ^2 não-central com $n - k$ graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\lambda = (\gamma^\top Z^\top M Z \gamma)/\sigma^2$. A distribuição de cada $\hat{v}_t^2/\sigma^2$, $t = 1, 2, \dots, n$, é também χ^2 não-central com um grau de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\lambda_t = (\gamma^\top Z^\top m_t m_t^\top Z \gamma)/\sigma^2$.

4.2.3 Procedimento de Teste

Considere o modelo dado em (4.1). A hipótese nula a ser testada através do teste RESET é que a distribuição de $u|X$ é $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$. Sob a hipótese alternativa de que houve um erro de especificação, a distribuição de $u|X$ é $\mathcal{N}(\xi, \tau^2 I)$.

Seja $\tilde{\mathbf{u}} = A^\top \mathbf{y} = A^\top \mathbf{u}$, onde A é uma matriz $n \times (n - k)$ que satisfaz $A^\top X = \mathbf{0}$, $A^\top A = I$, e $AA^\top = M$. O procedimento do teste RESET consiste em estimar uma regressão entre $\tilde{\mathbf{u}}$ e uma matriz B de dimensão $(n - k) \times r$ de variáveis de teste e utilizar um teste F usual para testar a significância dos coeficientes. A estatística de teste é

$$F = [\tilde{\mathbf{u}}^\top R_B \tilde{\mathbf{u}} / \tilde{\mathbf{u}}^\top M_B \tilde{\mathbf{u}}] [(n - k - r)/r],$$

onde $R_B = B(B^\top B)^{-1} B^\top$ e $M_B = I - R_B$. Podemos verificar que, sob a hipótese nula, a estatística F tem distribuição $F(r, n - k - r)$, contanto que a matriz B seja não-estocástica, ou, se estocástica, que as colunas de B sejam independentes de $\tilde{\mathbf{u}}$.

Ramsey & Schmidt (1976) mostram que o teste RESET baseado no uso dos resíduos de mínimos quadrados é equivalente ao teste originalmente proposto em Ramsey (1969), ou seja, o procedimento do teste se reduz a regressar $\mathbf{y}$ contra (X, B) , e usar um teste F usual para testar a hipótese que os coeficientes associados a B são zero.

Ramsey & Gilbert (1972) sugerem usar a segunda, terceira e quarta potências de $\hat{y}_t$ como variáveis de teste, i.e., $B = (\hat{y}_t^2, \hat{y}_t^3, \hat{y}_t^4)$. Entretanto, Thursby & Schmidt (1977) recomendam usar a segunda, terceira e quarta potências das variáveis independentes, i.e., $B = (x_t^2, x_t^3, x_t^4)$.

4.3 Teste de Erro de Especificação da Regressão Beta

O teste RESET foi proposto no contexto de regressão linear e objetivamos investigar sua utilidade como teste de erro de especificação na classe de regressão beta. Com base na idéia original do teste RESET, propomos um teste de erro de especificação da regressão beta. Considere o modelo de regressão beta na forma matricial

$$g(\mu) = X\beta,$$

onde μ é um vetor $n \times 1$ e $g(\cdot)$ é uma função de ligação, X é uma matriz $n \times k$ de regressores de posto k ($k < n$) e β é um vetor $k \times 1$ de parâmetros.

O procedimento do nosso teste consiste em aplicar o teste escore, da razão de verossimilhanças ou Wald para testar a hipótese nula $\theta = 0$ (o modelo está bem especificado) contra a hipótese alternativa $\theta \neq 0$ (o modelo está mal especificado) na regressão aumentada

$$g(\mu) = X\beta + Z\theta,$$

onde Z é uma matriz $n \times s$ de variáveis de teste e θ é um vetor $s \times 1$ de parâmetros. A estatística de teste será a estatística do teste da exclusão dos termos adicionais no modelo dado acima. Potências dos valores preditos $\hat{\mu}_t$, potências do preditor linear ajustado $\hat{\eta}_t$ ou dos regressores x_{ti} , $i = 1, \dots, k$, são utilizadas como variáveis de teste.

No modelo de regressão linear, assume-se normalidade e a exclusão de variáveis é testada de forma exata, através do teste F . Na classe de regressão beta, todavia, é necessário recorrer a testes assintóticos. No capítulo seguinte, investigaremos qual teste assintótico conduz a inferências mais precisas em amostras finitas através de simulações estocásticas.

5.1 Experimentos de Monte Carlo

Através de simulações de Monte Carlo nós avaliamos o desempenho do teste proposto no contexto do modelo de regressão beta sob dois tipos de erros de especificação: não-linearidade no preditor linear e uso de função de ligação incorreta. No primeiro caso, avaliamos o teste no que tange à sua capacidade de identificar não-linearidades existentes e que não foram incorporadas na modelagem. No segundo caso, avaliamos a capacidade do teste de identificar erro de especificação na função de ligação selecionada. A avaliação numérica foi realizada utilizando a linguagem de programação `0x` (Doornik, 2001). Consideramos para este estudo o modelo de regressão beta

$$g(\mu_t) = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

onde $g(\cdot)$ é a função de ligação utilizada. Os valores das variáveis explicativas x_{t1} e x_{t2} são conhecidos e $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e ϕ são parâmetros desconhecidos.

Os valores assumidos pelos regressores são selecionados independentemente como realizações de uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo unitário padrão, $\mathcal{U}(0, 1)$, com as quais formamos a matriz de regressores X . Consideramos os tamanhos amostrais $n = 20, 40, 60, 100$ e 200 e realizamos $r = 10000$ réplicas de Monte Carlo. Em cada réplica, geramos uma amostra aleatória da variável resposta $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ com $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi)$, $t = 1, \dots, n$, onde $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$.

Utilizamos o gerador de números pseudo-aleatórios “multiply-with-carry” (GM) desenvolvido por George Marsaglia, cujo período é de aproximadamente 2^{60} ; ver Marsaglia (1997) para mais detalhes. A maximização numérica da função de log-verossimilhança foi realizada utilizando o método quasi-Newton BFGS com primeiras derivadas analíticas. Os valores iniciais para os parâmetros desconhecidos são escolhidos de acordo com a regra proposta por Ferrari & Cribari-Neto (2004)

Os testes foram realizados considerando-se as possibilidades de aumento da regressão beta descritas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Regressores utilizados como variáveis de teste.	
Potências dos valores ajustados	$\hat{\mu}_t^2$
	$\hat{\mu}_t^3$
	$\hat{\mu}_t^4$
	$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$
	$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$
Potências dos regressores	(x_{t1}^2, x_{t2}^2)
	(x_{t1}^3, x_{t2}^3)
	(x_{t1}^4, x_{t2}^4)
	$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$
	$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$
Potências do preditor linear estimado	$\hat{\eta}_t^2$
	$\hat{\eta}_t^3$
	$\hat{\eta}_t^4$
	$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$
	$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$

Por exemplo, o cenário $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$ consiste em incluir as segundas e terceiras potências dos regressores como variáveis regressoras adicionais; por outro lado, o cenário $\hat{\mu}_t^3$ consiste em incluir a terceira potência dos valores ajustados como variável regressora adicional. Em cada caso, testa-se a exclusão das variáveis utilizadas para aumentar o modelo utilizando os testes escore, razão de verossimilhanças e Wald. Todos os testes foram realizados considerando-se três diferentes níveis nominais, a saber: $\alpha = 10\%$, 5% e 1% .

Nas simulações de tamanho, i.e., realizadas sob a hipótese nula, y_t é gerado de acordo com o modelo (5.1) e foram utilizadas as funções de ligação logística: $g(\mu_t) = \log(\mu_t/(1 - \mu_t))$, probit: $g(\mu_t) = \Phi^{-1}(\mu_t)$, log-log complementar: $g(\mu_t) = \log\{-\log(1 - \mu_t)\}$, log-

log: $g(\mu_t) = -\log\{-\log(\mu_t)\}$ e Cauchy: $g(\mu_t) = \tan\{\pi(\mu_t - 0.5)\}$. Quando a função de ligação logística é utilizada, definimos os valores verdadeiros dos parâmetros no modelo (5.1) como sendo $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0.8$ e $\phi = 120$. Para as demais funções de ligação utilizadas os valores reais dos parâmetros foram $\beta_0 = -1.8$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.6$ e $\phi = 120$.

O comportamento de μ varia de acordo com a função de ligação utilizada. Em particular, quando y_t é gerado a partir de um modelo que utiliza a função de ligação logística, μ_t assume valores no intervalo $(0.5, 0.85)$; quando a função de ligação probit é utilizada, μ_t assume valores no intervalo $(0.04, 0.85)$; quando y_t é gerado utilizando a função de ligação log-log complementar, μ_t assume valores entre 0.17 e 0.94; quando y_t é gerado utilizando a função de ligação log-log, μ_t assume valores no intervalo $(0.004, 0.7)$; por fim, quando y_t é gerado utilizando a função de ligação Cauchy, μ_t assume valores no intervalo $(0.17, 0.76)$.

Para o caso de não-linearidade, nas simulações de poder y_t é gerado a partir do modelo não-linear

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = (\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2})^\delta, \quad t = 1, \dots, n,$$

tomando-se $\delta = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$, com $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0.8$ e $\phi = 120$. Note que quanto maior o valor de δ mais nos afastamos da especificação linear, que corresponde a $\delta = 1$.

Com o objetivo de avaliar o desempenho do teste em diagnosticar o uso de função de ligação incorreta, consideramos três cenários distintos. No primeiro cenário geramos as observações da variável dependente a partir do modelo (5.1) utilizando a função de ligação probit $g(\mu_t) = \Phi^{-1}(\mu_t)$ e aplicamos o teste em um modelo estimado que utiliza função de ligação incorreta, em particular a função de ligação logística. No segundo cenário, as observações da variável dependente são geradas de acordo com o modelo (5.1) utilizando a função de ligação log-log complementar $g(\mu_t) = \log\{-\log(1 - \mu_t)\}$ e, por fim, no último cenário as observações são geradas utilizando a função de ligação Cauchy $g(\mu_t) = \tan\{\pi(\mu_t - 0.5)\}$. Assim como no primeiro cenário, no segundo e terceiro cenários aplica-se o teste no modelo estimado que utiliza incorretamente a função de ligação logística. Para os casos onde o interesse era avaliar o desempenho do teste com relação à detecção do uso de função de ligação incorreta, os valores reais dos parâmetros foram $\beta_0 = -1.8$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.6$ e $\phi = 120$.

Adicionalmente, os poderes dos testes nos casos em que há baixa precisão foram investigados tomando $\phi = 10$ e $\phi = 20$.

As simulações de poder foram realizadas utilizando valores críticos estimados obtidos das simulações de tamanho ao invés de valores críticos assintóticos. Isso foi feito para que

as comparações de poder se dêem entre testes que possuem o mesmo tamanho.

5.2 Resultados e Discussão

Nesta seção apresentaremos resultados de simulação de Monte Carlo referentes ao teste de erro de especificação proposto na Seção 4.3.

5.2.1 Simulações de Tamanho

As Tabelas 5.2 a 5.13 apresentam os percentuais de rejeição da hipótese nula de que o modelo está corretamente especificado quando nosso teste de erro de especificação é realizado através dos teste score, razão de verossimilhanças e Wald. As Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 exibem os percentuais de rejeição da hipótese nula considerando um modelo que utiliza função de ligação logística. Nas Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7 são apresentados os percentuais de rejeição da hipótese nula para o caso em que o modelo utiliza função de ligação probit. Em seguida, as Tabelas 5.8, 5.9 e 5.10 exibem os percentuais de rejeição da hipótese nula quando o modelo foi gerado utilizando a função de ligação log-log complementar. Os percentuais de rejeição da hipótese nula no caso em que os dados foram gerados utilizando a função de ligação log-log foram semelhantes àsquelas do caso anterior e são omitidos. Por fim, as Tabelas 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam as taxas de rejeição da hipótese nula quando a função de ligação Cauchy é utilizada.

Em todos os cenários de simulação de tamanho, ou seja, para todas as funções de ligação utilizadas, o teste score apresentou, em geral, taxas de rejeição da hipótese nula mais próximas dos níveis nominais de significância do que os testes da razão de verossimilhanças e Wald. Ainda no que se refere às simulação de tamanho, o teste Wald foi o que apresentou o pior desempenho global.

Com relação aos testes da razão de verossimilhanças e Wald, para $n = 20, 40, 60$ e 100 e todos os níveis nominais em estudo, verificamos que à medida em que o número de regressores incluídos como variáveis de teste aumenta, os desempenhos dos testes tendem a piorar. Por exemplo, para $n = 40$, $\alpha = 5\%$, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística e utilizando o teste Wald para testar a exclusão dos regressores adicionais, pode-se notar, de acordo com a Tabela 5.4, que os seis casos em que utilizamos apenas um regressor como variável de teste, ou seja, as inclusões de $\hat{\mu}_t^2$, $\hat{\mu}_t^3$, $\hat{\mu}_t^4$, $\hat{\eta}_t^2$, $\hat{\eta}_t^3$ e $\hat{\eta}_t^4$ apresentaram taxas de rejeição de 7.39%, 7.14%, 7.20%, 7.17%, 7.23% e 7.32%, respectivamente. As taxas de rejeição passaram a ser 8.51%, 8.48%, 8.59%, 8.77% e 8.91% quando adicionamos duas variáveis de teste. Quando incluímos três variáveis regressoras

adicionais o teste apresentou taxas de rejeição da hipótese nula de 10.55% e 10.52%. Por fim, quando incluímos quatro e seis variáveis regressoras adicionais o teste apresentou, respectivamente, as seguintes taxas de rejeição da hipótese nula: 12.12% e 17.03%.

Para $\alpha = 5\%$ e 10% todos os testes em estudo apresentaram, em geral, tamanhos maiores que o nível nominal de significância estabelecido para as diversas funções de ligação utilizadas. Ou seja, os testes tendem a rejeitar a hipótese que o modelo está corretamente especificado mais freqüentemente do que seria esperado com base em seu tamanho nominal.

Para todas as funções de ligação avaliadas, os testes da razão de verossimilhanças e Wald apresentaram, em geral, tamanhos maiores que o níveis nominais de significância estabelecidos.

5.2.2 Simulações de Poder

Não-linearidade

As Tabelas 5.14 a 5.28 exibem os resultados de simulação de poder dos testes escore, razão de verossimilhanças e Wald quando nos afastamos da linearidade. Os resultados de simulação de poder do teste escore quando nos afastamos da hipótese de linearidade são apresentados nas Tabelas 5.14 a 5.18. Para todos os tamanhos amostrais e níveis nominais em estudo, o teste escore apresentou, em geral, poder mais elevado do que os testes da razão de verossimilhanças (Tabelas 5.19 a 5.23) e Wald (Tabelas 5.24 a 5.28).

Os testes baseados na adição de potências do preditor linear ajustado como variáveis de teste apresentaram, em geral, poderes mais elevados em comparação aos testes baseados na adição de potências dos regressores e potências dos valores ajustados como variáveis de teste para os três testes em estudo. Em particular o uso de $\hat{\eta}_t^2$ ou $\hat{\mu}_t^4$ como variável de teste resultou em poderes do teste maiores à medida que havia um afastamento da hipótese nula. Por exemplo, para $n = 60$, $\alpha = 10\%$ e $\delta = 1.6$, a inclusão de $\hat{\eta}_t^2$ resultou em uma taxa de rejeição da hipótese nula de 94.41%, enquanto que a inclusão de $\hat{\mu}_t^4$ resultou em uma taxa de rejeição da hipótese nula de 94.03%. Por outro lado, o melhor desempenho do uso de potências dos regressores como variáveis de teste ocorreu quando adicionamos (x_{t1}^4, x_{t2}^4) como variáveis de teste, tendo resultado em uma taxa de rejeição da hipótese nula de 54.29%. Estes resultados são obtidos quando utilizamos o teste escore para testar a exclusão destas variáveis (Tabela 5.16).

Quando n é grande, o teste baseado na inclusão de potências dos valores ajustados é equivalente ao teste baseado na inclusão de potências do preditor linear ajustado. Em todos os casos, o teste Wald apresentou poderes mais baixos relativamente aos outros

testes.

O teste apresenta baixo poder para pequenos valores de ϕ . Como ilustração, a Tabela 5.38 exibe as taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa para $n = 20$, utilizando a segunda potência do preditor linear ajustado e a quarta potência dos valores preditos como variáveis de teste. Por exemplo, para $\delta = 1.8$ e $\alpha = 10\%$ a inclusão de $\hat{\mu}_t^4$ como variável de teste resultou em uma taxa de rejeição da hipótese nula de 18.91% para $\phi = 10$ ao passo que a inclusão dessa mesma variável como variável de teste resultou em uma taxa de rejeição de 76.82% para $\phi = 120$ (Tabela 5.14).

Função de Ligação Incorreta

Os resultados de simulação de poder dos testes no que tange à identificação de erro na especificação da função de ligação em uso encontram-se exibidos nas Tabelas 5.29 a 5.37.

Quando os dados foram gerados utilizando a função de ligação probit e o modelo foi estimado usando a função de ligação logística (Tabelas 5.29, 5.30 e 5.31), o teste apresentou baixo poder. Por exemplo, a maior taxa de rejeição da hipótese de que o modelo está corretamente especificado obtida foi de 61.40% e ocorreu quando o teste foi realizado utilizando o teste escore incluindo a terceira potência do preditor linear ajustado como variável de teste, $n = 200$ e $\alpha = 10\%$ (Tabela 5.29). O desempenho pobre do teste neste caso deve-se ao fato de que as funções de ligação logística e probit são semelhantes, exceto nas caudas, como pode ser visto na Figura 2.3.

As Tabelas 5.32, 5.33 e 5.34 exibem os percentuais de rejeição dos testes em estudo no caso em que os dados são gerados utilizando a função de ligação log-log complementar, mas o modelo é estimado com base na função de ligação logística. Neste cenário, o teste apresenta bom desempenho quando o tamanho da amostra é grande. Quando $n = 200$, a inclusão de potências do preditor linear ajustado e dos valores preditos como variáveis de teste resultaram, em alguns casos, em taxas de rejeição da hipótese nula de 100%. Por exemplo, a inclusão de $(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$ resultou em rejeição de 100% mesmo para $\alpha = 1\%$ quando o teste escore foi utilizado. O uso de $\hat{\eta}_t^2$ ou $\hat{\mu}_t^4$ como variável de teste resultou nos maiores poderes, sendo o desempenho do teste baseado na adição de $\hat{\mu}_t^4$ como variável de teste ligeiramente superior.

O desempenho apresentado pelo teste quando os dados foram gerados utilizando a função de ligação log-log foi semelhante ao caso que os dados foram gerados utilizando a função de ligação log-log complementar.

Os resultados de simulação relativos aos casos em que os dados são gerados utilizando a função de ligação Cauchy e o modelo é estimado usando a função de ligação logística são

mostrados nas Tabelas 5.35, 5.36 e 5.37. Neste caso, o teste apresenta poder mais baixo em comparação ao caso em que os dados são gerados utilizando a função de ligação log-log complementar. No global, todavia, o teste apresenta boa capacidade de discriminação, ou seja, ele se mostra útil como teste de má especificação da ligação utilizada na modelagem. A inclusão de potências do preditor linear ajustado ou potências dos valores preditos resultou nos maiores poderes. Em particular, o teste de Wald apresentou desempenho ligeiramente superior aos demais testes.

Uma análise global dos resultados conduz à conclusão de que o teste escore tipicamente apresenta poder mais elevado do que as formas alternativas (razão de verossimilhanças e Wald); o teste Wald apresentou o pior desempenho global.

Os testes baseados na inclusão de uma potência dos valores ajustados ou de uma potência do preditor linear estimado como variável de teste apresentaram poderes maiores em comparação aos testes baseados na adição de potências dos regressores como variáveis de teste para todos os testes em estudo.

De acordo com a Tabela 5.39, nota-se que, assim como no caso de não-linearidade no preditor linear, o teste apresenta baixo poder para pequenos valores de ϕ . Essa tabela exhibe os percentuais de rejeição do teste escore no caso em que os dados são gerados utilizando a função de ligação log-log complementar, mas o modelo é estimado com base na função de ligação logística para $n = 20$, utilizando potências do preditor linear ajustado e dos valores preditos como variáveis de teste e $\phi = 10$ e 20 .

Tabela 5.2: Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.

Regressor Adicionado	$n = 20$				$n = 40$				$n = 60$				$n = 100$				$n = 200$			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	1.28	6.86	13.24		1.06	6.02	12.23		0.97	5.21	10.46		1.19	5.03	10.10		0.95	5.31	10.48	
$\hat{\mu}_t^3$	1.33	6.72	13.06		1.16	6.00	11.51		1.04	5.27	10.57		1.04	5.41	10.77		1.12	5.17	10.42	
$\hat{\mu}_t^4$	1.35	6.80	13.45		1.19	5.97	11.70		0.95	5.31	10.53		1.02	5.28	10.77		1.07	5.40	10.37	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	0.85	7.18	14.07		1.00	5.83	11.48		1.02	5.54	11.03		1.05	5.14	10.50		0.92	5.00	9.93	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	0.94	7.10	13.92		0.99	5.66	11.59		1.02	5.63	10.94		1.03	5.11	10.42		0.96	4.79	10.04	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.90	6.94	14.20		1.05	5.59	11.63		0.98	5.53	11.02		0.98	5.14	10.34		1.02	4.79	10.12	
$\hat{\eta}_t^2$	1.27	6.90	13.71		1.20	5.84	11.93		0.92	5.21	10.72		1.12	5.12	10.80		1.03	5.51	10.23	
$\hat{\eta}_t^3$	1.33	7.24	13.40		1.19	5.91	11.78		0.87	5.23	10.69		1.12	5.04	10.62		1.03	5.51	10.55	
$\hat{\eta}_t^4$	1.27	7.00	13.69		1.13	5.94	11.95		0.87	5.26	10.52		1.12	5.23	10.44		1.07	5.45	10.64	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.12	7.08	13.73		1.19	5.88	12.25		0.91	5.26	10.88		1.13	5.27	10.63		0.95	5.31	10.86	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	0.46	6.40	14.37		0.79	5.61	11.61		0.88	5.34	10.63		0.96	5.20	10.35		1.01	5.10	10.42	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.11	6.96	13.75		1.19	5.99	12.33		0.93	5.22	10.79		1.08	5.17	10.64		0.95	5.40	10.86	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	0.78	6.61	14.47		0.93	5.97	12.11		0.90	5.23	10.99		1.14	5.34	10.61		0.84	4.57	9.53	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	0.06	5.10	13.76		0.62	5.20	11.63		0.88	4.92	10.58		0.89	5.20	10.60		0.73	4.81	10.18	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	0.86	6.37	13.80		0.99	5.65	11.99		0.91	5.84	11.58		0.95	5.21	10.59		0.91	4.83	9.82	

Tabela 5.3: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.

Regressor Adicionado	$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 200$		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	2.53	8.34	14.76	1.54	6.75	12.84	1.13	5.60	10.82	1.32	5.27	10.41	1.00	5.37	10.50
$\hat{\mu}_t^3$	2.44	8.05	14.51	1.56	6.55	12.27	1.35	5.68	11.07	1.14	5.77	11.04	1.17	5.33	10.51
$\hat{\mu}_t^4$	2.46	8.50	15.03	1.50	6.69	12.43	1.14	5.80	10.87	1.14	5.55	11.06	1.13	5.46	10.49
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.17	10.52	17.82	1.64	7.14	13.01	1.39	6.41	12.05	1.29	5.66	11.07	0.98	5.15	10.24
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.10	10.62	17.68	1.73	7.01	13.05	1.32	6.48	11.88	1.25	5.53	11.10	1.04	5.06	10.41
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.04	10.62	17.81	1.76	6.94	13.19	1.39	6.35	11.86	1.22	5.62	10.93	1.16	5.01	10.40
$\hat{\eta}_t^2$	2.48	8.87	15.24	1.60	6.50	12.44	1.13	5.72	11.10	1.23	5.29	11.00	1.12	5.64	10.42
$\hat{\eta}_t^3$	2.44	8.91	14.68	1.58	6.61	12.40	1.14	5.61	11.12	1.27	5.24	10.83	1.07	5.65	10.61
$\hat{\eta}_t^4$	2.41	8.72	14.93	1.59	6.77	12.64	1.13	5.64	11.16	1.23	5.52	10.66	1.12	5.59	10.73
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	3.05	10.56	17.45	1.95	7.31	13.84	1.30	6.23	11.93	1.36	5.78	11.28	1.13	5.51	11.04
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	5.67	15.92	25.15	2.18	9.00	15.46	1.71	7.13	12.98	1.42	6.21	11.67	1.18	5.56	11.03
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	3.05	10.60	17.41	1.93	7.44	13.93	1.31	6.21	11.93	1.38	5.71	11.15	1.08	5.61	11.13
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	4.05	13.25	21.20	2.22	8.40	14.91	1.48	6.65	12.80	1.56	6.23	11.37	0.91	5.00	9.99
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	10.01	23.70	34.42	3.23	10.92	18.78	2.10	8.07	14.34	1.50	6.82	12.88	1.13	5.64	11.28
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.19	12.65	20.60	1.91	8.19	14.72	1.55	7.29	13.28	1.22	6.03	11.50	0.96	5.10	10.23

Tabela 5.4: Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação logística.

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	3.43	9.70	16.00		1.97	7.39	13.51		1.36	6.04	11.28		1.49	5.44	10.59		1.05	5.53	10.62	
$\hat{\mu}_t^3$	3.57	9.53	16.05		1.90	7.14	13.06		1.56	6.02	11.42		1.20	6.04	11.21		1.21	5.42	10.57	
$\hat{\mu}_t^4$	3.65	9.91	16.25		1.83	7.20	12.88		1.40	6.17	11.24		1.28	5.86	11.33		1.26	5.58	10.66	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	6.02	14.02	21.21		2.37	8.51	14.44		1.82	7.26	12.89		1.53	6.17	11.61		1.06	5.42	10.51	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	5.85	13.92	20.82		2.55	8.48	14.39		1.89	7.31	12.90		1.52	6.05	11.74		1.12	5.28	10.63	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	5.85	14.00	21.03		2.59	8.59	14.44		1.78	7.19	12.70		1.41	6.22	11.73		1.29	5.21	10.68	
$\hat{\eta}_t^2$	3.71	10.09	16.49		1.96	7.17	13.08		1.35	6.13	11.56		1.49	5.48	11.19		1.21	5.72	10.63	
$\hat{\eta}_t^3$	3.65	10.14	15.88		2.02	7.23	13.03		1.37	5.97	11.46		1.41	5.58	11.10		1.14	5.73	10.65	
$\hat{\eta}_t^4$	3.77	10.06	16.01		2.07	7.32	13.14		1.33	5.95	11.46		1.38	5.54	10.89		1.19	5.65	10.78	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.74	13.54	20.57		2.76	8.77	15.37		1.91	7.19	12.84		1.60	6.43	11.80		1.22	5.75	11.38	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	13.12	25.02	34.12		4.45	12.12	19.15		2.88	8.92	15.07		1.99	7.22	13.10		1.38	5.99	11.58	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.65	13.62	20.59		2.82	8.91	15.54		1.95	7.09	13.04		1.63	6.40	11.55		1.20	5.80	11.37	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	8.82	18.84	26.33		3.65	10.55	17.57		2.20	8.30	14.31		1.90	7.02	12.19		1.09	5.31	10.36	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t1}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	25.49	39.58	48.80		6.91	17.03	25.47		3.78	11.37	18.20		2.38	8.68	15.08		1.52	6.46	12.42	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	8.54	18.24	26.16		3.19	10.52	17.23		2.39	8.56	14.91		1.58	6.83	12.47		1.16	5.49	10.68	

Tabela 5.5: Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.

Regressor Adicionado	$n = 20$						$n = 40$						$n = 60$						$n = 100$						$n = 200$					
	α			α			α			α			α			α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	1.29	7.02	13.42	1.09	6.08	11.51	0.90	5.50	10.89	1.27	5.44	10.88	0.97	5.02	10.04															
$\hat{\mu}_t^3$	1.29	7.12	13.25	1.17	5.78	11.40	0.96	5.54	10.99	1.18	5.63	10.64	1.05	5.02	10.09															
$\hat{\mu}_t^4$	1.28	7.05	13.32	1.13	5.61	11.54	0.92	5.60	10.98	1.21	5.54	10.53	1.06	5.11	10.14															
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	0.88	6.68	13.50	0.89	5.45	11.23	0.99	5.59	11.32	1.01	5.36	10.74	1.09	5.07	10.04															
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	0.94	6.52	13.80	0.91	5.49	11.28	1.07	5.47	11.50	1.09	5.47	10.81	1.19	5.07	10.20															
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.93	6.49	13.76	0.91	5.47	11.38	0.96	5.52	11.42	1.09	5.55	10.75	1.12	4.98	10.03															
$\hat{\eta}_t^2$	1.28	7.05	13.24	1.13	5.93	11.56	1.01	5.56	10.75	1.19	5.44	10.77	1.02	4.96	10.13															
$\hat{\eta}_t^3$	1.20	6.79	13.28	1.28	6.31	12.22	0.93	5.64	10.96	1.17	5.26	10.47	0.95	5.32	10.44															
$\hat{\eta}_t^4$	1.12	6.81	13.18	1.27	6.09	12.12	1.13	5.46	10.93	1.17	5.26	10.40	1.01	5.17	10.61															
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	0.84	6.71	13.93	0.94	5.97	11.78	1.03	5.56	11.21	1.05	5.33	10.94	0.93	5.33	10.79															
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	0.41	6.10	13.98	0.77	5.31	11.51	1.01	5.13	10.93	1.01	5.50	10.82	1.09	5.08	10.23															
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	0.88	6.68	13.97	0.95	5.87	11.99	0.96	5.54	10.88	1.14	5.44	10.71	0.99	5.38	10.80															
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	0.68	6.62	14.48	0.98	6.17	12.29	0.94	5.64	11.25	1.10	5.27	10.39	1.00	5.19	10.72															
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	0.10	4.88	13.57	0.69	5.13	11.58	0.93	5.46	10.98	0.97	5.60	10.91	0.85	4.92	10.34															
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	0.74	6.66	14.82	1.03	6.13	12.12	0.92	5.73	11.29	1.15	5.39	10.54	1.04	5.33	10.57															

Tabela 5.6: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.

Regressor Adicionado	$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 200$		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	2.50	8.59	14.88	1.59	6.58	12.12	1.26	5.83	11.29	1.36	5.71	11.18	1.05	5.11	10.17
$\hat{\mu}_t^3$	2.47	8.57	14.77	1.53	6.41	12.08	1.20	5.83	11.30	1.39	5.96	10.86	1.10	5.12	10.21
$\hat{\mu}_t^4$	2.43	8.63	14.61	1.58	6.33	12.10	1.22	6.04	11.40	1.43	5.80	10.80	1.14	5.22	10.20
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	2.97	10.24	17.44	1.64	6.84	12.62	1.51	6.33	12.60	1.28	5.96	11.33	1.18	5.36	10.23
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	2.99	10.31	17.58	1.55	6.73	12.80	1.41	6.36	12.59	1.27	5.88	11.33	1.30	5.30	10.40
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	2.91	10.21	17.84	1.59	6.84	13.11	1.47	6.41	12.61	1.31	6.01	11.36	1.22	5.31	10.33
$\hat{\eta}_t^2$	2.47	8.61	14.82	1.60	6.60	12.29	1.29	5.86	11.20	1.32	5.62	11.03	1.07	5.13	10.23
$\hat{\eta}_t^3$	2.19	8.50	14.88	1.57	6.84	12.79	1.18	6.05	11.28	1.33	5.39	10.64	1.02	5.47	10.56
$\hat{\eta}_t^4$	2.13	8.70	14.86	1.66	6.73	12.67	1.30	5.91	11.27	1.27	5.46	10.69	1.07	5.47	10.69
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	2.83	10.61	17.68	1.69	7.39	13.60	1.42	6.44	12.22	1.32	5.76	11.53	1.00	5.62	11.06
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	5.45	15.52	24.37	2.12	8.69	15.60	1.80	7.04	13.54	1.49	6.35	12.35	1.35	5.67	10.87
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.72	10.60	17.85	1.81	7.36	13.43	1.28	6.36	11.89	1.28	5.89	11.22	1.06	5.57	11.01
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	4.19	13.25	21.36	1.96	8.46	15.02	1.55	7.14	13.09	1.44	5.97	11.34	1.17	5.56	11.13
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	9.64	23.40	33.49	2.98	10.97	18.77	2.28	8.62	15.08	1.72	7.09	13.25	1.23	5.64	11.41
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.10	13.48	21.43	2.04	8.32	14.89	1.61	7.04	12.83	1.45	6.17	11.37	1.25	5.63	11.04

Tabela 5.7: Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação probit.

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	3.68	10.05	16.13		2.05	7.33	12.66		1.51	6.30	11.78		1.44	5.97	11.39		1.17	5.26	10.32	
$\hat{\mu}_t^3$	3.67	10.10	16.00		2.00	7.10	12.53		1.43	6.22	11.61		1.56	6.11	11.17		1.16	5.20	10.37	
$\hat{\mu}_t^4$	3.77	9.95	15.95		1.99	7.03	12.55		1.44	6.39	11.82		1.59	6.03	11.10		1.19	5.36	10.31	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	5.70	13.61	20.91		2.47	8.32	14.23		2.09	7.32	13.67		1.54	6.48	11.86		1.33	5.57	10.52	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	5.55	13.91	21.11		2.51	8.22	14.11		2.01	7.30	13.55		1.61	6.34	11.89		1.42	5.51	10.67	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	5.37	13.88	21.27		2.56	8.08	14.57		1.96	7.29	13.66		1.55	6.46	11.88		1.32	5.53	10.58	
$\hat{\eta}_t^2$	3.63	9.92	16.25		2.08	7.17	12.86		1.57	6.30	11.65		1.49	5.89	11.25		1.19	5.25	10.45	
$\hat{\eta}_t^3$	3.37	10.00	16.26		2.04	7.48	13.60		1.53	6.61	11.80		1.49	5.56	10.77		1.12	5.62	10.65	
$\hat{\eta}_t^4$	3.35	9.86	16.03		2.11	7.41	13.26		1.54	6.36	11.55		1.44	5.63	10.96		1.15	5.59	10.75	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.74	13.98	21.05		2.66	8.85	15.22		1.87	7.28	13.35		1.61	6.38	11.88		1.09	5.85	11.20	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	12.68	24.55	33.47		4.17	12.10	19.40		2.87	9.27	15.90		2.11	7.44	13.70		1.51	6.24	11.47	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.60	14.13	20.97		2.62	8.77	14.96		1.94	7.15	13.11		1.46	6.21	11.83		1.14	5.86	11.29	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	8.70	19.09	26.80		3.45	10.47	17.13		2.21	8.55	15.14		1.83	6.58	12.32		1.29	5.93	11.62	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t1}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	25.09	38.95	48.48		7.02	17.37	25.69		4.37	12.11	19.33		2.75	8.87	15.50		1.52	6.45	12.44	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	8.86	19.36	26.65		3.51	10.54	17.41		2.33	8.64	14.65		1.85	6.87	12.19		1.45	6.02	11.46	

Tabela 5.8: Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.

Regressor Adicionado	$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 200$		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	1.19	6.97	13.47	1.24	5.99	11.68	0.96	5.54	10.89	1.15	5.48	10.92	0.96	5.35	10.54
$\hat{\mu}_t^3$	0.97	7.06	13.45	1.17	6.06	11.55	0.98	5.37	10.93	1.10	5.50	10.82	1.09	5.25	10.54
$\hat{\mu}_t^4$	0.95	6.93	13.42	1.15	6.10	11.66	1.03	5.33	10.94	1.15	5.34	10.87	1.15	5.20	10.71
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.02	7.05	14.37	0.97	5.66	11.67	1.03	5.30	10.59	0.93	5.26	10.42	1.10	5.22	10.23
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	0.94	7.17	14.59	0.96	5.53	11.34	0.90	5.32	10.71	0.91	5.33	10.55	1.11	5.30	10.62
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.90	7.06	14.57	1.03	5.55	11.32	0.80	5.21	10.68	0.88	5.15	10.46	1.07	5.23	10.80
$\hat{\eta}_t^2$	1.02	6.91	13.49	1.18	6.20	11.40	1.04	5.47	10.90	1.01	5.50	10.66	1.07	5.25	10.52
$\hat{\eta}_t^3$	1.20	7.07	13.49	1.08	5.98	11.71	1.11	5.35	10.73	1.06	5.40	10.74	1.01	5.36	10.13
$\hat{\eta}_t^4$	1.16	7.14	13.76	1.13	6.22	11.69	1.29	5.50	10.90	1.14	5.20	10.72	0.85	5.35	10.67
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	0.94	6.94	14.13	0.98	5.89	12.20	1.08	5.55	10.94	1.15	5.70	11.03	1.15	5.14	10.25
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	0.50	6.67	15.07	0.78	5.27	11.80	0.82	5.28	10.80	1.01	5.27	11.43	0.95	5.26	10.21
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	0.91	6.90	14.24	1.09	5.99	11.82	1.29	5.63	11.10	1.09	5.71	10.79	1.04	5.04	10.55
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	0.61	6.42	14.55	0.85	5.95	12.36	1.23	5.63	11.24	1.00	5.46	10.63	1.06	5.20	10.46
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	0.09	5.10	14.25	0.75	5.11	11.97	0.76	5.15	10.71	0.99	5.39	10.77	0.83	4.96	10.00
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	0.63	6.41	14.80	0.90	5.98	12.26	1.20	5.49	11.12	1.07	5.41	10.54	1.11	5.38	10.17

Tabela 5.9: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.

Regressor Adicionado	$n = 20$				$n = 40$				$n = 60$				$n = 100$				$n = 200$			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	2.18	8.59	15.08		1.69	6.53	12.28		1.18	5.90	11.38		1.25	5.69	11.11		1.03	5.43	10.68	
$\hat{\mu}_t^3$	2.09	8.52	15.07		1.61	6.77	12.17		1.19	5.68	11.42		1.28	5.67	11.02		1.15	5.33	10.65	
$\hat{\mu}_t^4$	2.10	8.62	14.91		1.59	6.58	12.32		1.26	5.88	11.36		1.27	5.69	11.19		1.19	5.37	10.82	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.25	10.76	18.41		1.80	7.06	13.28		1.43	6.06	11.46		1.19	5.82	10.93		1.21	5.43	10.55	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.20	10.97	18.35		1.75	7.13	13.16		1.35	6.15	11.45		1.09	5.70	11.07		1.21	5.46	10.88	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.20	11.15	18.46		1.84	7.20	13.19		1.21	6.08	11.58		1.15	5.57	11.08		1.21	5.50	11.03	
$\hat{\eta}_t^2$	2.21	8.55	14.90		1.58	6.72	12.17		1.26	5.95	11.25		1.15	5.74	10.92		1.12	5.39	10.66	
$\hat{\eta}_t^3$	2.40	8.65	14.93		1.47	6.79	12.33		1.35	5.82	11.28		1.28	5.52	10.96		1.08	5.47	10.34	
$\hat{\eta}_t^4$	2.32	8.71	15.18		1.60	6.93	12.27		1.53	5.85	11.25		1.22	5.60	10.92		0.91	5.50	10.73	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	3.11	10.69	17.91		1.88	7.42	13.63		1.42	6.45	11.98		1.41	6.07	11.52		1.38	5.36	10.62	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	5.89	16.47	25.63		2.23	8.70	15.57		1.61	7.12	13.18		1.54	6.51	12.72		1.18	5.70	10.92	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	3.11	10.78	17.90		1.83	7.54	13.41		1.63	6.57	11.81		1.39	6.32	11.39		1.24	5.30	10.89	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	3.87	13.20	21.50		2.05	8.49	15.06		1.78	6.86	12.99		1.44	6.07	11.54		1.20	5.51	10.82	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	9.98	24.20	34.95		3.03	11.28	18.88		2.09	8.31	14.78		1.63	6.91	12.99		1.11	5.82	11.01	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	3.91	13.15	21.48		1.95	8.18	15.24		1.78	7.03	12.91		1.44	6.12	11.44		1.27	5.76	10.65	

Tabela 5.10: Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação log-log complementar.

Regressor Adicionado	$n = 20$				$n = 40$				$n = 60$				$n = 100$				$n = 200$			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	3.38	9.96	16.44		2.16	7.21	12.90		1.41	6.26	11.74		1.47	5.98	11.38		1.13	5.52	10.76	
$\hat{\mu}_t^3$	3.29	9.97	16.43		2.19	7.34	12.82		1.41	6.18	11.81		1.41	5.91	11.36		1.22	5.40	10.77	
$\hat{\mu}_t^4$	3.31	9.86	16.21		2.12	7.23	12.91		1.53	6.26	11.81		1.41	5.94	11.40		1.22	5.56	11.01	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	5.76	14.41	21.59		2.63	8.47	14.82		1.81	7.05	12.30		1.36	6.35	11.51		1.31	5.66	10.97	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	5.86	14.69	21.23		2.67	8.43	14.72		1.70	6.99	12.36		1.36	6.16	11.61		1.33	5.76	11.19	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	5.91	14.53	21.44		2.49	8.43	4.74		1.62	6.81	12.50		1.48	5.96	11.58		1.30	5.72	11.26	
$\hat{\eta}_t^2$	3.30	10.03	16.38		2.18	7.25	12.69		1.56	6.31	11.69		1.41	5.95	11.20		1.23	5.47	10.77	
$\hat{\eta}_t^3$	3.57	9.92	16.13		1.98	7.43	12.92		1.64	6.36	11.70		1.43	5.82	11.22		1.13	5.60	10.40	
$\hat{\eta}_t^4$	3.54	10.13	16.49		2.09	7.57	12.84		1.87	6.24	11.75		1.32	5.82	11.17		1.00	5.50	10.78	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.71	13.89	21.26		2.69	8.84	14.98		1.93	7.32	12.95		1.65	6.41	11.93		1.52	5.57	10.88	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	13.80	25.72	34.19		4.18	12.36	19.48		2.71	9.11	15.60		2.05	7.56	14.23		1.41	6.29	11.42	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.60	14.21	21.17		2.81	8.88	14.72		2.23	7.33	13.01		1.74	6.77	11.96		1.37	5.48	11.07	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	8.80	19.11	27.07		3.65	10.73	17.72		2.53	8.23	14.66		1.99	6.84	12.39		1.38	5.89	11.19	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t1}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	25.90	40.03	48.48		7.11	17.29	25.78		4.22	11.59	18.89		2.52	8.67	15.16		1.52	6.52	11.99	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	8.89	19.16	27.03		3.64	10.73	17.54		2.56	8.34	14.40		1.86	6.88	12.41		1.48	6.14	11.12	

Tabela 5.11: Taxas de rejeição do teste escore, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.

Regressor Adicionado	n = 20						n = 40						n = 60						n = 100						n = 200						
	α			α			α			α			α			α			α			α			α						
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%				
$\hat{\mu}_t^2$ $\hat{\mu}_t^3$ $\hat{\mu}_t^4$	1.27	6.97	13.33	1.05	6.23	11.86	1.00	5.72	11.27	1.13	5.10	10.30	1.09	5.46	10.35	1.27	6.99	13.60	1.06	5.97	11.81	1.04	5.75	11.07	1.14	5.20	10.16	1.15	5.31	10.16	
	1.35	7.05	13.72	1.06	5.87	11.64	1.09	5.59	11.29	1.04	5.40	10.09	1.16	5.23	9.97	1.01	6.96	13.92	1.08	6.03	11.69	0.93	5.47	11.08	0.92	5.04	10.15	0.92	5.15	10.15	
	1.04	7.02	13.77	1.08	5.88	11.70	0.92	5.48	11.15	0.86	5.03	10.45	0.91	5.16	10.22	1.05	7.05	13.65	1.10	5.88	11.62	0.91	5.57	11.11	0.85	5.13	10.42	0.89	5.10	10.15	
	1.27	6.98	13.63	1.00	6.13	11.93	1.04	5.69	11.33	1.16	5.32	10.14	1.20	5.29	10.09	1.16	6.26	12.84	1.18	6.13	11.83	1.06	5.28	11.12	1.11	5.12	10.17	1.06	5.36	10.44	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.14	6.54	12.85	1.22	6.13	11.85	0.96	5.29	11.19	1.13	5.22	10.14	1.11	5.30	10.78	0.96	6.39	13.40	1.02	6.34	12.27	1.14	5.77	11.49	1.10	5.26	10.45	1.07	5.02	10.34	
	0.50	6.62	14.32	0.96	5.89	12.33	0.85	5.47	11.24	0.77	5.26	10.19	0.92	5.03	10.66	0.91	6.61	13.37	1.16	6.19	12.13	1.03	5.27	11.10	1.00	5.52	10.47	1.12	5.07	10.00	
	0.63	6.32	14.14	1.02	6.22	12.87	1.08	5.58	11.11	1.16	5.45	10.85	0.88	5.07	10.18	0.96	6.37	13.95	0.89	5.79	12.21	1.04	5.34	11.14	1.22	5.27	10.50	0.92	5.12	10.39	
	0.05	4.94	13.80	0.63	5.56	11.71	0.86	5.23	11.08	0.81	5.40	10.91	0.86	5.16	10.44	0.69	6.37	13.95	0.89	5.79	12.21	1.04	5.34	11.14	1.22	5.27	10.50	0.92	5.12	10.39	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$																															

Tabela 5.12: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.

Regressor Adicionado	$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 200$		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	2.19	8.44	14.84	1.51	6.86	12.36	1.28	6.22	11.62	1.28	5.29	10.41	1.18	5.59	10.48
$\hat{\mu}_t^3$	2.34	8.60	15.42	1.45	6.58	12.55	1.23	6.22	11.49	1.27	5.41	10.40	1.22	5.47	10.26
$\hat{\mu}_t^4$	2.34	8.74	15.22	1.43	6.50	12.35	1.24	6.00	11.83	1.21	5.62	10.38	1.25	5.36	10.10
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.07	10.74	17.25	1.88	7.48	13.09	1.32	6.29	12.09	1.11	5.46	10.79	1.00	5.41	10.47
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.15	10.53	17.38	1.84	7.48	12.96	1.32	6.50	12.24	1.04	5.67	11.05	1.01	5.37	10.52
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.15	10.38	17.26	1.81	7.25	13.14	1.27	6.53	12.47	1.05	5.71	10.98	1.03	5.22	10.36
$\hat{\eta}_t^2$	2.50	8.50	14.98	1.49	6.70	12.45	1.24	6.17	11.86	1.31	5.50	10.31	1.27	5.40	10.27
$\hat{\eta}_t^3$	2.20	8.02	14.25	1.76	6.71	12.45	1.31	5.62	11.62	1.21	5.36	10.45	1.12	5.41	10.62
$\hat{\eta}_t^4$	2.15	8.04	14.48	1.66	6.77	12.62	1.16	5.65	11.70	1.25	5.45	10.16	1.17	5.41	10.90
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	2.99	10.07	17.58	1.87	7.83	13.73	1.56	6.60	12.45	1.42	5.77	10.98	1.19	5.25	10.55
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	5.94	15.84	24.11	2.44	9.32	16.33	1.61	7.54	13.61	1.32	6.09	11.65	1.20	5.64	11.32
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.90	10.13	17.34	1.83	7.53	13.53	1.47	6.40	12.09	1.31	6.02	10.90	1.31	5.22	10.32
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	4.01	12.86	20.62	2.16	8.59	15.34	1.69	7.05	12.89	1.47	6.25	11.64	1.02	5.37	10.57
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	10.30	23.51	33.14	3.61	11.21	18.94	2.20	8.57	15.45	1.54	7.06	13.06	1.19	5.99	11.46
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.10	12.81	20.79	2.16	8.33	14.85	1.78	6.82	13.00	1.61	5.87	11.58	1.10	5.39	10.69

Tabela 5.13: Taxas de rejeição do teste Wald, considerando um modelo que utiliza função de ligação Cauchy.

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	3.47	10.00	16.36		2.04	7.46	13.03		1.52	6.60	12.12		1.51	5.65	10.53		1.24	5.78	10.63	
$\hat{\mu}_t^3$	3.53	9.97	16.69		1.92	7.20	13.08		1.43	6.68	11.97		1.46	5.62	10.58		1.28	5.60	10.43	
$\hat{\mu}_t^4$	3.46	10.07	16.58		1.84	7.04	13.01		1.46	6.52	12.30		1.39	5.76	10.58		1.31	5.38	10.25	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	5.67	13.73	20.44		2.78	8.67	14.76		1.71	7.19	12.97		1.38	5.97	11.24		1.12	5.61	10.80	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	5.64	13.69	20.30		2.74	8.58	14.53		1.67	7.24	13.15		1.25	6.10	11.46		1.11	5.58	10.79	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	5.92	13.21	20.27		2.70	8.63	14.47		1.78	7.28	13.20		1.20	6.12	11.45		1.16	5.43	10.58	
$\hat{\eta}_t^2$	3.62	10.05	16.33		1.94	7.44	13.24		1.49	6.75	12.46		1.47	5.70	10.56		1.30	5.51	10.38	
$\hat{\eta}_t^3$	3.38	9.39	15.35		2.37	7.28	13.03		1.69	6.32	12.13		1.42	5.75	10.76		1.33	5.66	10.82	
$\hat{\eta}_t^4$	3.54	9.58	15.20		2.43	7.28	12.98		1.78	6.53	12.03		1.48	5.73	10.34		1.28	5.62	10.98	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.41	13.21	20.84		2.91	9.09	15.01		2.10	7.52	13.31		1.68	6.28	11.68		1.31	5.52	10.80	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	13.08	24.04	32.00		4.50	12.76	20.08		2.69	9.25	15.98		1.88	6.99	12.98		1.44	6.24	12.04	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.40	13.10	20.35		3.04	9.01	14.85		2.11	7.14	13.22		1.61	6.35	11.53		1.44	5.57	10.50	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	8.11	17.80	25.49		3.75	11.13	17.52		2.63	8.56	14.49		1.94	7.03	12.56		1.27	5.68	11.06	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	24.40	37.52	46.44		7.23	17.02	25.31		4.26	12.07	19.38		2.45	8.73	15.32		1.63	6.79	12.63	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	8.30	18.10	25.67		3.91	10.88	17.31		2.88	8.57	14.60		2.04	6.92	12.47		1.39	5.80	11.14	

Tabela 5.14: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$					$\alpha = 5\%$					$\alpha = 10\%$				
	δ					δ					δ				
	1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8	
$\hat{\mu}_t^2$	1.33	1.76	2.24	2.40		5.71	6.91	7.72	8.32		10.76	12.17	13.81	14.09	
$\hat{\mu}_t^3$	1.76	5.49	13.47	25.81		7.77	17.94	34.40	54.21		14.47	28.41	48.42	68.72	
$\hat{\mu}_t^4$	2.10	6.55	17.36	34.91		8.18	19.81	39.69	64.33		14.19	30.13	52.86	76.82	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.42	1.79	2.78	4.18		5.57	6.96	10.18	13.68		10.71	13.12	17.91	23.31	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.48	1.84	3.46	5.50		5.90	8.02	12.36	17.68		10.80	14.29	20.82	28.92	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.44	2.14	4.09	7.06		5.96	8.52	13.86	20.73		11.45	15.75	23.66	33.20	
$\hat{\eta}_t^2$	2.31	6.73	18.97	38.27		8.09	19.44	39.81	65.57		14.05	29.97	53.25	77.50	
$\hat{\eta}_t^3$	2.28	6.33	16.47	33.86		8.00	18.29	36.97	60.78		13.83	27.93	49.72	72.57	
$\hat{\eta}_t^4$	2.23	5.69	14.48	29.21		7.84	16.80	33.51	54.72		13.61	26.08	45.49	67.67	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.79	4.83	12.16	26.45		7.40	15.73	31.70	53.84		13.22	25.04	44.25	67.69	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.41	1.66	2.61	4.38		5.83	7.40	11.28	16.41		10.91	14.06	19.54	27.34	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.80	4.95	12.43	26.83		7.50	16.01	32.06	54.39		13.24	25.08	44.63	67.96	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.56	3.80	9.66	21.12		6.94	13.47	26.24	44.82		12.91	22.32	38.88	59.45	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.22	1.63	2.21	3.13		5.26	6.61	8.46	11.37		10.61	12.68	15.87	20.77	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	1.62	4.56	11.72	28.20		7.34	15.09	31.03	55.49		13.68	23.97	44.48	69.05	

Tabela 5.15: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$				$\alpha = 5\%$				$\alpha = 10\%$			
	δ				δ				δ			
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8
$\hat{\mu}_t^2$ $\hat{\mu}_t^3$ $\hat{\mu}_t^4$	1.67	2.44	2.88	3.21	6.31	8.63	9.97	10.51	11.23	14.73	16.96	17.53
	2.86	12.44	34.14	61.29	10.45	30.71	59.87	84.02	18.01	43.30	72.98	91.04
	3.01	14.00	41.06	73.68	11.05	33.41	67.01	90.86	18.43	46.31	78.27	95.26
(x_{t1}^2, x_{t2}^2) (x_{t1}^3, x_{t2}^3) (x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.56	3.20	6.04	11.02	6.60	11.00	19.11	30.66	12.40	18.83	30.00	44.26
	1.45	3.47	6.67	12.70	6.72	11.64	20.79	33.08	12.38	19.85	32.11	47.33
	1.40	3.41	7.00	13.51	6.85	12.22	22.04	35.41	12.61	20.71	33.59	49.19
$\hat{\eta}_t^2$ $\hat{\eta}_t^3$ $\hat{\eta}_t^4$	2.87	13.96	41.71	75.97	11.21	33.34	68.82	92.14	18.14	45.87	78.90	95.96
	2.82	12.79	38.11	70.68	10.63	30.98	63.92	89.38	18.24	43.27	75.84	94.37
	2.77	11.88	34.09	64.55	9.97	28.24	58.47	84.66	17.30	39.88	70.84	91.73
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.22	9.54	30.46	63.21	9.06	25.93	56.71	85.23	16.23	37.67	69.18	91.74
	1.43	2.36	4.05	7.07	6.04	9.20	14.19	22.17	11.63	16.37	23.95	34.49
	2.15	9.37	30.36	63.10	9.04	25.86	56.69	85.19	16.25	37.58	69.29	91.89
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.11	7.84	26.69	56.91	8.01	22.05	49.43	79.65	15.27	33.22	62.86	88.08
	1.39	2.06	4.25	7.04	6.28	8.82	14.33	21.78	11.82	16.12	23.88	34.29
	2.29	9.92	33.42	69.82	9.52	27.02	60.35	89.03	16.56	38.56	71.99	94.10

Tabela 5.16: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	2.13	4.94	8.17	10.72	8.21	14.95	20.61	26.96	14.45	23.21	30.92	37.77	14.45	23.21	30.92	37.77	14.45	23.21
$\hat{\mu}_t^3$	4.56	24.33	60.40	88.65	14.88	47.66	82.71	97.33	24.48	60.90	90.18	98.85	24.48	60.90	90.18	98.85	24.48	60.90
$\hat{\mu}_t^4$	5.52	30.38	72.74	96.28	16.32	53.58	89.13	99.23	25.77	66.29	94.03	99.74	25.77	66.29	94.03	99.74	25.77	66.29
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.86	5.60	14.32	30.16	7.45	17.32	34.61	56.55	14.16	27.43	47.91	70.25	14.16	27.43	47.91	70.25	14.16	27.43
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.76	6.29	16.50	34.44	7.47	18.59	37.95	61.42	14.48	29.25	51.71	74.46	14.48	29.25	51.71	74.46	14.48	29.25
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.96	6.83	18.74	38.83	7.77	19.71	40.51	65.10	14.88	30.66	54.29	77.21	14.88	30.66	54.29	77.21	14.88	30.66
$\hat{\eta}_t^2$	5.76	31.43	74.53	97.07	16.16	54.65	89.83	99.43	25.48	66.45	94.41	99.81	25.48	66.45	94.41	99.81	25.48	66.45
$\hat{\eta}_t^3$	5.36	28.59	69.63	95.24	15.48	51.47	86.86	98.88	24.13	63.18	92.65	99.48	24.13	63.18	92.65	99.48	24.13	63.18
$\hat{\eta}_t^4$	4.93	24.76	62.57	91.94	14.17	46.76	82.82	97.71	22.86	59.19	89.75	98.99	22.86	59.19	89.75	98.99	22.86	59.19
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	4.04	22.27	62.96	93.84	12.71	44.40	82.87	98.49	20.67	56.59	89.73	99.46	20.67	56.59	89.73	99.46	20.67	56.59
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.51	4.83	12.02	27.18	6.92	14.86	30.96	52.69	13.20	25.14	44.99	67.39	13.20	25.14	44.99	67.39	13.20	25.14
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	4.11	22.72	63.45	94.01	12.79	44.59	82.92	98.52	20.56	56.92	89.79	99.47	20.56	56.92	89.79	99.47	20.56	56.92
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	2.93	17.45	54.17	89.94	10.91	38.35	76.80	97.36	18.26	50.81	85.61	98.83	18.26	50.81	85.61	98.83	18.26	50.81
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.57	4.14	10.25	24.01	6.93	14.26	28.64	49.63	12.97	23.50	41.37	63.99	12.97	23.50	41.37	63.99	12.97	23.50
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	3.60	21.52	65.42	95.72	11.50	42.10	83.92	99.05	19.72	55.67	90.84	99.64	19.72	55.67	90.84	99.64	19.72	55.67

Tabela 5.17: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	2.81	10.63	26.74	47.77	11.43	29.98	54.69	75.00	19.23	41.79	66.88	84.04	19.23	41.79	66.88	84.04	19.23	41.79
$\hat{\mu}_t^3$	5.95	30.68	69.69	91.84	17.26	54.92	87.42	98.13	26.43	67.08	93.32	99.25	26.43	67.08	93.32	99.25	26.43	67.08
$\hat{\mu}_t^4$	7.72	45.10	89.42	99.60	20.93	68.09	96.96	99.98	30.90	78.54	98.60	100.00	30.90	78.54	98.60	100.00	30.90	78.54
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.89	7.30	22.54	47.54	8.72	22.16	47.73	73.72	15.15	33.45	60.73	84.00	15.15	33.45	60.73	84.00	15.15	33.45
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	2.21	8.76	27.27	55.86	9.23	25.15	53.79	80.59	16.54	37.03	66.44	88.62	16.54	37.03	66.44	88.62	16.54	37.03
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	2.50	10.32	31.63	62.56	9.75	27.13	57.14	83.95	17.24	39.38	69.56	90.97	17.24	39.38	69.56	90.97	17.24	39.38
$\hat{\eta}_t^2$	7.35	45.24	91.06	99.82	21.62	70.14	97.75	99.99	30.99	79.40	98.90	100.00	30.99	79.40	98.90	100.00	30.99	79.40
$\hat{\eta}_t^3$	6.65	40.56	86.58	99.37	19.99	65.88	96.43	99.92	29.66	75.87	98.14	99.94	29.66	75.87	98.14	99.94	29.66	75.87
$\hat{\eta}_t^4$	5.93	34.87	81.00	98.53	17.97	60.48	94.09	99.80	27.89	71.24	96.91	99.92	27.89	71.24	96.91	99.92	27.89	71.24
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.05	34.75	84.14	99.26	16.52	60.06	95.15	99.94	26.07	71.43	97.49	99.99	26.07	71.43	97.49	99.99	26.07	71.43
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.24	7.08	23.11	52.05	7.69	20.55	46.83	75.81	14.61	32.05	60.67	85.72	14.61	32.05	60.67	85.72	14.61	32.05
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.04	34.85	84.24	99.32	16.67	60.80	95.35	99.96	26.25	71.65	97.56	100.00	26.25	71.65	97.56	100.00	26.25	71.65
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	3.97	28.77	78.57	98.67	14.29	53.73	92.57	99.81	23.28	66.10	96.09	99.95	23.28	66.10	96.09	99.95	23.28	66.10
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.72	5.82	18.95	45.84	7.53	18.49	41.11	70.03	13.83	28.41	55.13	81.23	13.83	28.41	55.13	81.23	13.83	28.41
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	5.66	38.34	89.98	99.89	16.41	62.27	96.85	100.00	26.31	73.95	98.76	100.00	26.31	73.95	98.76	100.00	26.31	73.95

Tabela 5.18: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.8
$\hat{\mu}_t^2$	5.43	24.27	52.60	77.50	15.51	44.23	73.68	90.16	24.13	57.30	83.24	94.66	24.13	57.30	83.24	94.66	24.13	94.66
$\hat{\mu}_t^3$	12.68	66.12	97.59	99.99	31.05	86.23	99.74	100.00	42.60	91.91	99.92	100.00	42.60	91.91	99.92	100.00	42.60	100.00
$\hat{\mu}_t^4$	16.18	79.21	99.78	100.00	35.17	92.55	99.97	100.00	47.48	96.17	100.00	100.00	47.48	96.17	100.00	100.00	47.48	100.00
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.89	15.84	47.49	80.23	11.68	35.17	71.02	93.14	18.94	48.04	81.38	96.69	18.94	48.04	81.38	96.69	18.94	96.69
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.68	16.46	49.44	82.23	12.39	37.55	73.29	94.43	19.55	50.05	82.88	97.37	19.55	50.05	82.88	97.37	19.55	97.37
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.35	15.85	48.92	82.10	12.55	38.25	74.50	94.92	19.83	50.88	83.67	97.55	19.83	50.88	83.67	97.55	19.83	97.55
$\hat{\eta}_t^2$	16.25	80.04	99.80	100.00	33.77	92.32	99.98	100.00	47.02	96.31	99.99	100.00	47.02	96.31	99.99	100.00	47.02	100.00
$\hat{\eta}_t^3$	14.55	74.90	99.48	100.00	31.58	89.83	99.93	100.00	44.09	94.47	99.99	100.00	44.09	94.47	99.99	100.00	44.09	100.00
$\hat{\eta}_t^4$	12.85	68.82	98.79	100.00	28.56	85.69	99.80	100.00	40.64	91.94	99.89	100.00	40.64	91.94	99.89	100.00	40.64	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	11.80	71.71	99.52	100.00	27.48	87.77	99.96	100.00	38.67	92.83	99.98	100.00	38.67	92.83	99.98	100.00	38.67	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.37	10.87	36.85	70.31	9.76	28.07	61.51	88.78	16.86	40.50	73.54	93.97	16.86	40.50	73.54	93.97	16.86	93.97
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	11.90	72.26	99.52	100.00	27.76	88.01	99.95	100.00	38.80	93.05	99.98	100.00	38.80	93.05	99.98	100.00	38.80	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	13.86	77.32	99.69	100.00	29.54	90.94	99.98	100.00	41.25	95.39	99.99	100.00	41.25	95.39	99.99	100.00	41.25	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	2.42	10.20	32.91	65.46	8.87	25.59	56.87	85.24	15.51	37.02	69.31	91.92	15.51	37.02	69.31	91.92	15.51	91.92
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	13.06	76.75	99.65	100.00	29.07	90.80	99.98	100.00	40.67	95.25	99.99	100.00	40.67	95.25	99.99	100.00	40.67	100.00

Tabela 5.19: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$					$\alpha = 5\%$					$\alpha = 10\%$				
	δ					δ					δ				
	1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8	
$\hat{\mu}_t^2$	1.23	1.45	1.69	1.60		5.48	6.34	6.68	6.79		10.39	11.31	12.10	11.98	
$\hat{\mu}_t^3$	1.77	5.51	13.29	25.21		7.67	17.74	33.99	53.28		14.38	28.10	47.99	67.95	
$\hat{\mu}_t^4$	1.91	6.09	16.13	32.86		7.98	19.41	38.68	62.66		14.06	29.83	52.15	76.01	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.39	1.74	2.64	3.94		5.45	6.75	9.80	13.29		10.56	12.91	17.45	22.38	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.48	1.80	3.23	4.92		5.75	7.68	11.81	16.64		10.75	14.03	20.09	27.66	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.36	1.93	3.68	6.06		5.93	8.24	13.22	19.43		11.10	15.24	22.75	31.35	
$\hat{\eta}_t^2$	2.07	6.29	17.82	36.48		7.78	18.75	38.80	64.64		13.76	29.72	52.77	77.37	
$\hat{\eta}_t^3$	2.11	5.53	15.14	31.81		7.62	17.58	35.64	59.61		13.41	27.10	48.93	71.95	
$\hat{\eta}_t^4$	1.93	4.80	12.76	26.25		7.08	15.59	31.63	53.23		13.22	25.11	44.37	66.93	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.59	4.06	10.38	22.80		6.76	14.19	29.13	50.32		12.57	23.90	42.68	65.49	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.40	1.43	2.20	3.42		5.69	7.08	10.42	14.82		10.80	13.52	18.59	25.24	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.69	4.21	10.67	23.37		6.80	14.52	29.41	50.71		12.69	23.96	42.98	65.96	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.46	3.22	7.86	17.67		6.68	12.51	24.56	42.31		12.39	21.08	36.83	57.01	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.19	1.48	1.95	2.40		5.26	6.32	7.76	10.11		10.49	12.54	14.84	18.78	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	1.34	3.41	8.86	22.52		6.74	13.47	27.88	51.31		13.28	22.63	41.82	66.15	

Tabela 5.20: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$					$\alpha = 5\%$					$\alpha = 10\%$				
	δ					δ					δ				
	1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8		1.2	1.4	1.6	1.8	
$\hat{\mu}_t^2$	1.47	2.15	2.44	2.55		6.07	8.13	9.13	9.23		11.08	14.19	16.11	16.42	
$\hat{\mu}_t^3$	2.90	12.71	34.86	62.08		10.45	30.72	59.86	84.04		18.05	43.48	73.14	91.09	
$\hat{\mu}_t^4$	2.98	13.96	40.93	73.45		11.12	33.40	67.04	90.85		18.30	46.28	78.14	95.19	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.58	3.27	6.20	11.43		6.46	10.87	18.93	30.55		12.23	18.60	29.77	44.05	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.41	3.35	6.57	12.60		6.66	11.51	20.62	32.91		12.35	19.82	31.96	47.25	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.35	3.33	6.81	13.21		6.83	12.18	21.98	35.36		12.55	20.52	33.44	49.00	
$\hat{\eta}_t^2$	2.77	13.94	41.62	75.98		11.04	32.98	68.56	92.11		18.09	45.77	78.85	96.01	
$\hat{\eta}_t^3$	2.76	12.65	38.15	71.09		10.54	30.75	64.23	89.61		18.12	43.27	75.94	94.46	
$\hat{\eta}_t^4$	2.61	11.51	33.86	65.05		9.87	27.71	58.44	84.88		17.24	40.00	71.10	91.96	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	2.06	9.03	29.99	62.41		9.09	25.92	56.42	85.28		15.81	37.44	68.65	91.53	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.31	2.29	3.77	6.80		6.02	8.95	13.71	21.67		11.66	16.30	23.54	33.80	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.08	9.28	30.19	62.81		9.07	25.85	56.56	85.22		16.11	37.41	69.01	91.76	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	2.00	7.45	25.90	55.98		7.84	21.86	49.14	79.39		15.00	32.66	62.43	87.73	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.27	1.92	3.77	6.23		6.16	8.47	13.70	20.61		11.64	15.39	23.03	33.07	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.34	9.95	33.90	70.56		9.18	26.32	59.81	88.81		16.06	37.83	71.33	93.96	

Tabela 5.21: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$				$\alpha = 5\%$				$\alpha = 10\%$			
	δ				δ				δ			
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8
$\hat{\mu}_t^2$ $\hat{\mu}_t^3$ $\hat{\mu}_t^4$	2.03	4.70	7.25	9.28	7.73	14.07	19.21	24.19	14.10	22.36	29.58	35.92
	4.57	24.46	60.68	88.78	14.87	47.61	82.68	97.31	24.45	60.87	90.09	98.85
	5.45	30.17	72.47	96.15	16.29	53.52	89.02	99.21	25.65	66.29	93.99	99.71
(x_{t1}^2, x_{t2}^2) (x_{t1}^3, x_{t2}^3) (x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.71	5.27	13.66	29.20	7.43	17.09	34.24	56.14	13.99	27.23	47.58	69.86
	1.77	6.07	16.01	33.89	7.42	18.23	37.53	60.97	14.40	28.96	51.36	74.08
	1.95	6.77	18.75	38.43	7.67	19.17	39.88	64.29	14.60	30.08	53.60	76.50
$\hat{\eta}_t^2$ $\hat{\eta}_t^3$ $\hat{\eta}_t^4$	5.65	31.07	74.37	97.10	15.97	54.30	89.81	99.40	25.48	66.45	94.37	99.83
	5.20	28.09	69.40	95.30	15.24	51.09	86.75	98.93	24.04	63.04	92.65	99.51
	4.73	24.59	62.71	92.23	13.98	46.41	82.91	97.81	22.75	59.23	89.84	99.09
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	3.85	21.56	61.93	93.57	12.48	43.97	82.64	98.44	20.41	56.29	89.66	99.41
	1.47	4.80	11.77	26.24	6.82	14.52	30.14	51.56	13.00	24.85	44.32	66.36
	3.87	21.58	62.40	93.66	12.63	44.18	82.69	98.49	20.41	56.53	89.64	99.45
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.91	16.90	53.57	89.64	10.71	37.86	76.52	97.36	17.92	50.12	85.25	98.79
	1.46	3.84	9.32	22.35	6.84	13.89	27.87	48.89	12.77	23.02	40.38	62.52
	3.48	21.04	64.93	95.57	11.26	41.43	83.56	99.00	19.34	54.98	90.52	99.63

Tabela 5.22: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	2.66	10.23	25.26	44.75	11.26	29.35	53.39	73.24	18.95	40.95	65.85	82.92	18.95	40.95	65.85	82.92	18.95	40.95
$\hat{\mu}_t^3$	5.99	30.90	70.10	92.14	17.25	55.03	87.45	98.17	26.42	67.18	93.36	99.29	26.42	67.18	93.36	99.29	26.42	67.18
$\hat{\mu}_t^4$	7.70	45.15	89.39	99.59	20.89	68.11	96.94	99.98	30.75	78.48	98.60	99.99	30.75	78.48	98.60	99.99	30.75	78.48
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.86	7.09	22.06	46.96	8.59	21.95	47.24	73.44	15.19	33.28	60.49	83.90	15.19	33.28	60.49	83.90	15.19	33.28
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	2.23	8.79	27.43	55.66	9.08	24.85	53.20	80.20	16.32	36.49	65.97	88.30	16.32	36.49	65.97	88.30	16.32	36.49
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	2.40	10.07	30.93	61.41	9.51	26.51	56.51	83.37	17.00	38.89	69.04	90.62	17.00	38.89	69.04	90.62	17.00	38.89
$\hat{\eta}_t^2$	7.23	45.12	91.16	99.83	21.11	69.57	97.73	99.99	31.02	79.53	98.91	100.00	31.02	79.53	98.91	100.00	31.02	79.53
$\hat{\eta}_t^3$	6.45	39.97	86.60	99.36	19.70	65.88	96.46	99.92	29.64	75.98	98.19	99.94	29.64	75.98	98.19	99.94	29.64	75.98
$\hat{\eta}_t^4$	5.73	34.53	81.24	98.63	18.08	61.02	94.38	99.85	27.75	71.35	97.02	99.92	27.75	71.35	97.02	99.92	27.75	71.35
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	4.98	34.35	83.92	99.25	16.09	59.51	95.00	99.94	25.76	71.28	97.45	99.99	25.76	71.28	97.45	99.99	25.76	71.28
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.15	6.76	22.28	50.28	7.80	20.34	46.15	75.09	14.38	31.43	59.65	84.98	14.38	31.43	59.65	84.98	14.38	31.43
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	4.92	34.70	84.06	99.32	16.34	60.37	95.20	99.95	25.84	71.35	97.54	100.00	25.84	71.35	97.54	100.00	25.84	71.35
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	3.78	27.89	77.77	98.62	13.92	53.11	92.34	99.81	22.79	65.52	95.96	99.95	22.79	65.52	95.96	99.95	22.79	65.52
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.63	5.61	18.13	44.09	7.36	17.76	39.77	68.54	13.73	27.82	54.22	80.32	13.73	27.82	54.22	80.32	13.73	27.82
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	5.27	37.15	89.50	99.87	15.85	61.37	96.77	100.00	25.77	73.52	98.70	100.00	25.77	73.52	98.70	100.00	25.77	73.52

Tabela 5.23: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.8
$\hat{\mu}_t^2$	5.08	22.66	49.91	74.41	15.22	43.39	72.21	89.05	23.73	56.45	82.30	94.00	23.73	56.45	82.30	94.00	23.73	94.00
$\hat{\mu}_t^3$	12.63	66.13	97.59	99.99	31.04	86.24	99.74	100.00	42.53	91.88	99.92	100.00	42.53	91.88	99.92	100.00	42.53	100.00
$\hat{\mu}_t^4$	16.07	78.91	99.77	100.00	35.06	92.52	99.97	100.00	47.53	96.13	100.00	100.00	47.53	96.13	100.00	100.00	47.53	100.00
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.85	15.74	47.34	80.18	11.66	35.00	70.89	93.05	18.91	48.03	81.31	96.69	18.91	48.03	81.31	96.69	18.91	96.69
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.67	16.33	49.15	82.04	12.40	37.59	73.36	94.41	19.40	49.71	82.75	97.33	19.40	49.71	82.75	97.33	19.40	97.33
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.34	15.83	48.76	82.02	12.49	38.14	74.32	94.87	19.59	50.55	83.54	97.50	19.59	50.55	83.54	97.50	19.59	97.50
$\hat{\eta}_t^2$	16.16	80.04	99.79	100.00	33.87	92.45	99.98	100.00	47.02	96.32	99.99	100.00	47.02	96.32	99.99	100.00	47.02	100.00
$\hat{\eta}_t^3$	14.42	75.23	99.51	100.00	31.57	89.93	99.93	100.00	43.98	94.51	99.99	100.00	43.98	94.51	99.99	100.00	43.98	100.00
$\hat{\eta}_t^4$	12.75	69.02	98.84	100.00	28.27	85.85	99.81	100.00	40.55	91.98	99.92	100.00	40.55	91.98	99.92	100.00	40.55	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	11.63	71.34	99.52	100.00	27.36	87.74	99.96	100.00	38.45	92.75	99.98	100.00	38.45	92.75	99.98	100.00	38.45	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.35	10.84	36.56	69.90	9.75	27.97	61.28	88.56	16.74	40.22	73.23	93.83	16.74	40.22	73.23	93.83	16.74	93.83
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	11.45	71.05	99.49	100.00	27.39	87.84	99.95	100.00	38.51	92.86	99.98	100.00	38.51	92.86	99.98	100.00	38.51	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	13.60	76.91	99.68	100.00	28.82	90.69	99.98	100.00	40.69	95.18	99.99	100.00	40.69	95.18	99.99	100.00	40.69	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	2.32	9.75	31.85	64.17	8.78	25.12	56.16	84.65	15.33	36.60	68.97	91.66	15.33	36.60	68.97	91.66	15.33	91.66
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	12.67	76.28	99.66	100.00	28.55	90.64	99.98	100.00	40.17	95.03	99.99	100.00	40.17	95.03	99.99	100.00	40.17	100.00

Tabela 5.24: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	1.04	1.12	0.98	0.91	5.12	5.22	5.35	5.06	9.86	10.21	10.46	10.01	10.01	10.21	10.46	10.01	10.01	10.21
$\hat{\mu}_t^3$	1.69	5.34	12.89	24.53	7.77	17.68	33.72	52.84	14.29	27.84	47.54	67.47	14.29	27.84	47.54	67.47	14.29	27.84
$\hat{\mu}_t^4$	1.84	6.01	15.71	31.85	7.62	18.47	37.00	60.38	13.88	29.01	51.19	74.77	13.88	29.01	51.19	74.77	13.88	29.01
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.42	1.67	2.48	3.53	5.24	6.47	9.09	12.34	10.39	12.39	16.80	21.40	10.39	12.39	16.80	21.40	10.39	12.39
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.36	1.64	2.82	4.28	5.55	7.15	10.82	15.27	10.48	13.41	19.09	25.78	10.48	13.41	19.09	25.78	10.48	13.41
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.34	1.73	3.32	5.25	5.75	7.85	12.46	17.80	11.04	14.65	21.45	29.45	11.04	14.65	21.45	29.45	11.04	14.65
$\hat{\eta}_t^2$	1.75	5.24	14.81	31.68	7.12	17.41	36.62	61.47	13.08	28.43	50.76	75.69	13.08	28.43	50.76	75.69	13.08	28.43
$\hat{\eta}_t^3$	1.55	4.28	11.48	25.05	6.62	15.02	31.90	54.49	12.58	25.26	46.33	69.94	12.58	25.26	46.33	69.94	12.58	25.26
$\hat{\eta}_t^4$	1.49	3.44	9.18	19.19	6.32	13.15	27.67	47.75	12.23	23.10	41.45	63.80	12.23	23.10	41.45	63.80	12.23	23.10
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.33	3.31	8.23	18.32	6.52	13.47	27.13	46.99	12.03	22.01	39.97	61.96	12.03	22.01	39.97	61.96	12.03	22.01
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.34	1.32	2.05	2.94	5.63	6.69	9.80	13.55	10.64	12.98	17.70	23.25	10.64	12.98	17.70	23.25	10.64	12.98
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.33	3.32	8.13	18.14	6.44	13.25	26.70	46.55	12.15	22.11	40.14	62.39	12.15	22.11	40.14	62.39	12.15	22.11
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.10	2.36	5.52	12.49	6.09	10.83	21.20	36.56	11.83	19.51	33.57	52.28	11.83	19.51	33.57	52.28	11.83	19.51
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.13	1.44	1.82	2.08	5.32	6.24	7.29	9.28	0.48	2.29	4.30	7.51	0.48	2.29	4.30	7.51	0.48	2.29
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	1.09	2.48	6.51	15.98	6.01	11.45	23.71	44.28	11.97	20.13	37.19	59.92	11.97	20.13	37.19	59.92	11.97	20.13

Tabela 5.25: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 40$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	1.30	1.90	2.02	1.80	5.70	7.55	8.21	8.01	10.71	13.29	14.85	14.62	10.71	13.29	14.85	14.62	10.71	13.29
$\hat{\mu}_t^3$	2.96	12.90	35.22	62.60	10.45	30.85	60.14	84.24	17.94	43.49	73.16	91.17	17.94	43.49	73.16	91.17	17.94	43.49
$\hat{\mu}_t^4$	2.93	13.76	40.62	73.11	11.09	33.27	67.06	90.77	18.21	46.05	78.15	95.17	18.21	46.05	78.15	95.17	18.21	46.05
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.53	3.07	5.81	11.06	6.31	10.57	18.55	29.85	12.07	18.32	29.41	43.80	12.07	18.32	29.41	43.80	12.07	18.32
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.31	3.28	6.28	12.00	6.56	11.38	20.19	32.62	11.94	19.20	31.31	46.48	11.94	19.20	31.31	46.48	11.94	19.20
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.34	3.27	6.72	12.97	6.81	11.92	21.62	34.72	12.33	20.05	32.85	48.56	12.33	20.05	32.85	48.56	12.33	20.05
$\hat{\eta}_t^2$	2.65	13.53	40.83	75.42	10.74	32.25	67.89	91.79	17.86	45.51	78.60	95.91	17.86	45.51	78.60	95.91	17.86	45.51
$\hat{\eta}_t^3$	2.51	12.02	37.02	70.20	10.25	30.04	63.78	89.47	17.89	42.85	75.56	94.42	17.89	42.85	75.56	94.42	17.89	42.85
$\hat{\eta}_t^4$	2.26	10.28	31.53	62.82	9.41	26.80	57.80	84.53	16.80	39.33	70.74	91.83	16.80	39.33	70.74	91.83	16.80	39.33
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.97	8.70	28.86	61.09	8.99	25.26	55.67	84.97	15.46	36.61	68.09	91.14	15.46	36.61	68.09	91.14	15.46	36.61
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.39	2.28	3.72	6.74	5.82	8.54	12.98	20.48	11.38	15.75	22.78	32.61	11.38	15.75	22.78	32.61	11.38	15.75
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.00	8.82	29.38	61.56	8.81	25.04	55.68	84.80	15.62	36.70	68.22	91.33	15.62	36.70	68.22	91.33	15.62	36.70
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.83	6.59	23.96	53.24	7.24	20.45	47.14	77.68	14.20	31.39	60.82	86.86	14.20	31.39	60.82	86.86	14.20	31.39
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.30	1.78	3.54	5.73	6.03	8.03	12.83	19.18	11.46	14.88	21.98	31.60	11.46	14.88	21.98	31.60	11.46	14.88
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.25	9.26	32.00	68.30	8.76	25.14	58.16	87.95	15.20	36.34	69.77	93.36	15.20	36.34	69.77	93.36	15.20	36.34

Tabela 5.26: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 60$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$							
	δ						δ						δ							
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8				
$\hat{\mu}_t^2$ $\hat{\mu}_t^3$ $\hat{\mu}_t^4$	1.89	4.05	5.96	7.45	7.40	13.21	17.55	21.42	13.32	21.03	27.44	33.30	13.32	21.03	27.44	33.30	13.32	21.03	27.44	33.30
	4.66	24.87	61.16	89.01	14.80	47.55	82.65	97.29	24.38	60.86	90.04	98.84	24.38	60.86	90.04	98.84	24.38	60.86	90.04	98.84
	5.27	29.64	72.05	95.93	16.06	53.19	88.73	99.15	25.47	65.99	93.91	99.70	25.47	65.99	93.91	99.70	25.47	65.99	93.91	99.70
	(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.69	5.18	13.44	28.95	7.24	16.85	33.52	55.68	13.77	26.74	47.03	69.34	13.77	26.74	47.03	69.34	13.77	26.74	47.03
$\hat{\eta}_t^2$ $\hat{\eta}_t^3$ $\hat{\eta}_t^4$	1.75	5.84	15.60	33.07	7.19	17.69	36.63	59.91	14.22	28.55	50.61	73.60	14.22	28.55	50.61	73.60	14.22	28.55	50.61	73.60
	1.87	6.56	17.90	37.31	7.52	18.70	39.01	63.23	14.16	29.37	52.76	75.81	14.16	29.37	52.76	75.81	14.16	29.37	52.76	75.81
	5.24	30.20	73.46	96.96	15.58	53.92	89.65	99.43	25.22	66.02	94.24	99.83	25.22	66.02	94.24	99.83	25.22	66.02	94.24	99.83
	4.94	27.09	68.55	95.12	14.39	50.05	86.47	98.89	23.51	62.74	92.52	99.54	23.51	62.74	92.52	99.54	23.51	62.74	92.52	99.54
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	4.34	23.23	61.23	91.78	13.48	45.28	82.17	97.71	22.06	58.60	89.70	99.06	22.06	58.60	89.70	99.06	22.06	58.60	89.70	99.06
	3.63	20.92	61.22	93.24	12.11	43.06	82.03	98.30	19.86	55.49	89.21	99.35	19.86	55.49	89.21	99.35	19.86	55.49	89.21	99.35
	1.47	4.47	11.08	24.70	6.54	13.87	28.99	49.74	12.81	24.36	43.18	64.58	12.81	24.36	43.18	64.58	12.81	24.36	43.18	64.58
	3.55	20.27	60.66	93.11	11.98	43.04	82.09	98.38	19.85	55.70	89.15	99.37	19.85	55.70	89.15	99.37	19.85	55.70	89.15	99.37
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$ $(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$ $(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.77	16.08	52.36	88.96	10.01	36.22	75.12	96.98	17.20	49.02	84.53	98.67	17.20	49.02	84.53	98.67	17.20	49.02	84.53	98.67
	1.31	3.48	8.31	20.02	6.64	12.89	26.12	46.55	12.30	22.09	38.87	60.57	12.30	22.09	38.87	60.57	12.30	22.09	38.87	60.57
	3.14	19.56	62.26	94.74	10.49	39.41	82.21	98.94	18.57	53.46	89.81	99.56	18.57	53.46	89.81	99.56	18.57	53.46	89.81	99.56

Tabela 5.27: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 100$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4
$\hat{\mu}_t^2$	2.39	9.53	23.40	40.45	10.58	27.64	50.35	70.03	18.15	39.63	64.20	81.00	18.15	39.63	64.20	81.00	18.15	39.63
$\hat{\mu}_t^3$	5.95	30.96	70.41	92.33	17.27	55.10	87.62	98.19	26.45	67.30	93.45	99.32	26.45	67.30	93.45	99.32	26.45	67.30
$\hat{\mu}_t^4$	7.54	44.77	89.28	99.56	20.59	67.76	96.86	99.98	30.67	78.28	98.59	99.99	30.67	78.28	98.59	99.99	30.67	78.28
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.88	6.95	21.65	46.29	8.24	21.31	46.25	72.73	14.98	32.87	60.03	83.51	14.98	32.87	60.03	83.51	14.98	32.87
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	2.11	8.33	26.36	54.26	8.69	24.15	52.36	79.37	16.01	35.89	65.38	87.77	16.01	35.89	65.38	87.77	16.01	35.89
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	2.16	8.93	28.85	58.60	9.23	25.71	55.52	82.72	16.57	38.00	68.32	90.13	16.57	38.00	68.32	90.13	16.57	38.00
$\hat{\eta}_t^2$	7.01	44.90	91.03	99.82	20.97	69.40	97.70	99.99	30.79	79.38	98.89	100.00	30.79	79.38	98.89	100.00	30.79	79.38
$\hat{\eta}_t^3$	5.84	38.60	85.85	99.36	19.25	65.50	96.41	99.93	29.28	75.72	98.18	99.95	29.28	75.72	98.18	99.95	29.28	75.72
$\hat{\eta}_t^4$	5.08	32.71	80.24	98.48	17.27	59.99	94.14	99.87	27.61	71.25	96.97	99.92	27.61	71.25	96.97	99.92	27.61	71.25
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	4.62	33.03	83.11	99.21	15.62	58.84	94.82	99.92	25.17	70.67	97.34	99.99	25.17	70.67	97.34	99.99	25.17	70.67
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.93	5.91	19.79	46.27	7.52	19.39	44.10	72.81	14.23	30.68	58.43	83.81	14.23	30.68	58.43	83.81	14.23	30.68
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	4.63	33.50	83.34	99.30	15.87	59.45	94.98	99.94	25.29	70.80	97.48	100.00	25.29	70.80	97.48	100.00	25.29	70.80
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	3.43	26.17	76.26	98.40	13.51	52.06	91.95	99.79	22.38	64.88	95.86	99.95	22.38	64.88	95.86	99.95	22.38	64.88
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.49	4.91	16.14	39.83	7.15	16.68	37.53	66.11	13.30	26.79	52.26	78.27	13.30	26.79	52.26	78.27	13.30	26.79
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.69	34.96	88.50	99.83	15.12	59.94	96.47	100.00	24.91	72.43	98.49	100.00	24.91	72.43	98.49	100.00	24.91	72.43

Tabela 5.28: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 200$.

Regressor Adicionado	$\alpha = 1\%$						$\alpha = 5\%$						$\alpha = 10\%$					
	δ						δ						δ					
	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.8
$\hat{\mu}_t^2$	4.69	20.94	46.49	70.26	14.61	41.91	70.19	87.57	23.19	55.04	80.94	93.09	23.19	55.04	80.94	93.09	23.19	93.09
$\hat{\mu}_t^3$	12.51	65.80	97.55	99.99	31.00	86.23	99.73	100.00	42.58	91.88	99.92	100.00	42.58	91.88	99.92	100.00	42.58	100.00
$\hat{\mu}_t^4$	15.91	78.76	99.77	100.00	35.00	92.46	99.97	100.00	47.45	96.13	100.00	100.00	47.45	96.13	100.00	100.00	47.45	100.00
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	3.80	15.61	47.19	80.08	11.70	35.02	70.87	93.02	18.88	47.77	81.21	96.59	18.88	47.77	81.21	96.59	18.88	96.59
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	3.59	16.14	48.74	81.72	12.37	37.51	73.19	94.39	19.43	49.54	82.71	97.28	19.43	49.54	82.71	97.28	19.43	97.28
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	3.23	15.47	48.29	81.70	12.40	38.10	74.29	94.82	19.44	50.27	83.37	97.49	19.44	50.27	83.37	97.49	19.44	97.49
$\hat{\eta}_t^2$	15.60	79.60	99.80	100.00	33.67	92.42	99.98	100.00	46.67	96.22	99.99	100.00	46.67	96.22	99.99	100.00	46.67	100.00
$\hat{\eta}_t^3$	14.07	74.97	99.54	100.00	31.14	89.80	99.93	100.00	43.56	94.46	99.99	100.00	43.56	94.46	99.99	100.00	43.56	100.00
$\hat{\eta}_t^4$	12.37	68.70	98.83	100.00	27.94	85.73	99.80	100.00	40.16	91.98	99.92	100.00	40.16	91.98	99.92	100.00	40.16	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	11.01	70.28	99.47	100.00	26.67	87.26	99.96	100.00	38.16	92.60	99.98	100.00	38.16	92.60	99.98	100.00	38.16	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.36	10.72	36.20	69.33	9.57	27.50	60.78	88.19	16.45	39.77	72.85	93.72	16.45	39.77	72.85	93.72	16.45	93.72
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	11.04	70.35	99.46	100.00	26.65	87.34	99.95	100.00	38.21	92.74	99.98	100.00	38.21	92.74	99.98	100.00	38.21	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	12.42	75.01	99.64	100.00	27.83	90.15	99.98	100.00	39.69	94.88	99.99	100.00	39.69	94.88	99.99	100.00	39.69	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	2.20	9.10	30.20	62.25	8.56	24.52	55.17	83.72	14.96	35.88	68.03	91.14	14.96	35.88	68.03	91.14	14.96	91.14
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	11.67	74.53	99.63	100.00	27.11	90.02	99.98	100.00	39.23	94.78	99.99	100.00	39.23	94.78	99.99	100.00	39.23	100.00

Tabela 5.29: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação probit).

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	2.49	8.99	16.38		3.51	11.09	19.50		4.28	12.85	20.61		8.04	22.36	33.31		15.79	34.42	46.46	
$\hat{\mu}_t^3$	1.94	7.40	14.34		2.25	9.61	16.64		3.16	10.69	17.85		5.79	17.52	27.87		9.31	24.89	35.89	
$\hat{\mu}_t^4$	1.56	6.67	12.88		2.03	8.41	15.01		2.50	9.33	16.18		4.91	14.49	24.42		6.17	19.26	28.79	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.36	5.98	11.92		1.22	5.72	11.40		1.33	5.38	10.30		1.45	6.41	12.42		1.95	8.64	15.57	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.14	5.54	11.28		1.05	5.25	10.97		1.11	5.07	10.33		1.15	5.76	11.30		1.53	7.38	13.79	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.03	5.44	10.78		1.00	5.14	10.56		1.11	4.73	10.19		1.15	5.18	10.80		1.32	6.79	12.72	
$\hat{\eta}_t^2$	2.71	9.46	16.69		3.48	11.65	19.91		4.08	12.54	21.00		8.62	22.74	33.79		13.53	31.58	43.31	
$\hat{\eta}_t^3$	4.09	12.36	19.92		5.56	15.48	23.58		7.13	17.22	26.12		13.16	30.87	42.72		27.48	48.51	61.40	
$\hat{\eta}_t^4$	4.08	12.10	19.02		5.52	15.32	23.21		6.34	16.82	25.37		12.80	29.61	41.49		22.61	44.27	55.79	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	2.53	9.35	16.27		3.77	11.77	19.35		4.08	12.48	20.74		8.26	22.60	32.29		18.67	36.76	49.00	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.57	6.92	12.6		1.27	5.97	11.37		1.27	6.06	11.13		1.88	6.83	13.35		2.15	9.27	16.10	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.87	9.92	16.59		4.33	12.88	20.70		4.92	13.95	22.39		9.34	23.85	33.98		19.60	39.07	51.56	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.96	8.43	15.09		3.10	10.67	18.37		3.73	11.78	19.24		6.67	20.59	30.49		15.27	33.71	44.98	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.67	6.68	12.48		1.30	6.12	11.64		1.42	6.01	11.89		1.74	6.88	13.51		2.12	8.59	15.27	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	2.01	8.94	15.42		3.41	10.92	18.84		4.35	12.28	20.20		7.39	20.67	31.51		15.76	33.73	45.92	

Tabela 5.30: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação probit).

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	2.24	8.19	15.80	3.33	10.64	19.11	10% 19.11	4.08	12.44	20.14	7.73	21.93	32.75	15.06	34.08	45.70				
$\hat{\mu}_t^3$	1.76	7.07	13.52	2.18	9.44	16.45	10% 16.45	3.07	10.27	17.46	5.81	17.23	27.52	8.93	24.61	35.44				
$\hat{\mu}_t^4$	1.57	6.59	12.71	1.95	8.15	14.81	10% 14.81	2.46	9.10	16.04	4.67	14.40	24.11	5.89	18.96	28.45				
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.29	5.79	11.37	1.11	5.77	11.20	10% 11.20	1.32	5.34	10.24	1.44	6.35	12.28	1.90	8.51	15.47				
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.18	5.50	10.98	1.07	5.25	10.95	10% 10.95	1.10	5.06	10.24	1.17	5.81	11.17	1.55	7.40	13.73				
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.05	5.52	10.68	1.00	5.10	10.50	10% 10.50	1.09	4.73	10.23	1.17	5.24	10.84	1.29	6.87	12.70				
$\hat{\eta}_t^2$	2.55	8.64	15.58	3.12	11.05	19.30	10% 19.30	3.71	12.06	20.26	8.16	22.28	33.18	12.99	30.67	42.44				
$\hat{\eta}_t^3$	3.11	11.06	18.70	4.35	14.07	22.42	10% 22.42	5.91	15.83	25.04	12.14	30.00	41.97	26.03	47.73	60.62				
$\hat{\eta}_t^4$	2.91	10.71	17.62	4.18	14.13	21.85	10% 21.85	5.49	15.24	24.18	12.02	28.96	40.47	21.01	42.67	54.92				
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	2.27	8.60	15.54	3.42	10.99	18.53	10% 18.53	3.84	11.73	20.07	7.83	21.86	31.81	17.88	35.82	47.97				
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.26	6.30	12.1	1.13	5.51	11.00	10% 11.00	1.17	5.90	10.91	1.80	6.73	13.20	2.03	9.00	15.94				
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	2.17	9.01	15.55	3.49	11.46	19.56	10% 19.56	4.20	12.79	21.20	8.29	22.76	33.03	18.65	38.05	50.84				
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.59	7.72	14.43	2.73	9.78	17.22	10% 17.22	3.18	10.68	18.19	6.08	19.34	29.65	14.42	32.87	43.90				
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.37	6.12	11.69	1.13	5.53	10.87	10% 10.87	1.26	5.78	11.21	1.61	6.65	13.31	1.92	8.30	14.86				
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	1.61	7.95	14.33	2.64	9.76	17.37	10% 17.37	3.40	10.81	18.52	6.44	19.61	30.33	14.35	32.70	44.79				

Tabela 5.31: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação probit).

Regressor Adicionado	n = 20			n = 40			n = 60			n = 100			n = 200		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	1.91	7.48	14.74	2.96	10.20	18.44	3.53	12.13	19.68	7.15	21.19	31.80	14.10	32.96	44.92
$\hat{\mu}_t^3$	1.64	6.79	12.98	2.13	9.06	16.30	3.02	10.12	17.23	5.68	16.84	27.13	8.57	24.10	35.00
$\hat{\mu}_t^4$	1.58	6.52	12.61	1.97	8.30	14.64	2.51	9.02	15.89	4.55	14.24	23.87	5.79	18.72	28.17
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.12	5.58	11.05	1.11	5.83	10.95	1.34	5.36	10.22	1.39	6.35	12.23	1.83	8.33	15.36
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.16	5.47	10.74	1.03	5.30	10.85	1.06	5.06	10.33	1.23	5.81	11.10	1.60	7.32	13.67
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.02	5.45	10.45	1.07	5.06	10.56	1.12	4.78	10.29	1.17	5.27	10.81	1.30	6.93	12.74
$\hat{\eta}_t^2$	2.05	7.38	14.70	2.64	10.42	18.43	3.28	11.47	19.40	7.41	21.33	32.25	12.05	29.52	41.35
$\hat{\eta}_t^3$	1.65	8.45	15.89	2.71	11.79	19.74	3.95	13.40	22.87	9.69	27.67	40.13	23.09	45.41	59.34
$\hat{\eta}_t^4$	1.44	7.99	15.25	2.04	11.36	19.42	3.25	12.28	21.16	9.19	25.88	38.26	18.14	39.75	53.18
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	1.59	7.41	13.99	2.74	9.76	17.15	3.16	10.84	18.81	6.89	20.55	30.70	16.58	34.12	46.65
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.15	5.74	11.2	1.10	5.30	10.68	1.16	5.57	10.49	1.58	6.51	12.81	1.84	8.59	15.25
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	1.41	7.34	13.27	2.14	9.22	16.90	3.01	10.52	18.53	6.88	20.38	31.11	16.79	35.90	48.57
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	1.37	6.48	12.94	2.01	8.18	15.25	2.11	9.11	16.43	4.99	17.35	27.94	12.61	30.38	41.89
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.17	5.66	10.57	1.04	5.08	10.22	0.95	5.25	10.62	1.50	6.38	12.69	1.66	7.97	14.33
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	1.22	6.74	12.25	1.56	7.73	14.61	1.98	8.54	15.75	4.51	16.49	27.86	11.56	29.81	42.42

Tabela 5.32: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).

Regressor Adicionado	$n = 20$						$n = 40$						$n = 60$						$n = 100$						$n = 200$					
	α						α						α						α						α					
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	13.90	35.31	49.89	30.28	56.72	70.65	54.29	78.03	87.21	84.64	95.28	97.71	99.76	99.99	100.00	99.76	99.99	100.00	99.76	99.99	100.00	99.76	99.99	100.00	99.76	99.99	100.00	99.76	99.99	100.00
$\hat{\mu}_t^3$	25.31	48.11	61.46	45.50	71.15	81.74	74.39	89.82	94.30	93.79	98.51	99.37	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\hat{\mu}_t^4$	29.62	52.29	65.30	50.08	74.37	84.20	78.18	92.05	95.64	95.11	98.91	99.59	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.33	7.16	13.37	2.57	10.44	18.15	1.52	7.91	15.13	6.26	18.21	28.67	45.27	72.43	83.59	45.27	72.43	83.59	45.27	72.43	83.59	45.27	72.43	83.59	45.27	72.43	83.59	45.27	72.43	83.59
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.03	5.78	11.44	2.31	10.11	17.47	1.38	6.75	13.37	5.47	15.75	26.25	38.92	65.84	78.47	38.92	65.84	78.47	38.92	65.84	78.47	38.92	65.84	78.47	38.92	65.84	78.47	38.92	65.84	78.47
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.91	4.71	9.68	1.88	9.30	16.52	1.27	5.89	11.95	4.55	14.49	23.64	32.99	59.10	71.89	32.99	59.10	71.89	32.99	59.10	71.89	32.99	59.10	71.89	32.99	59.10	71.89	32.99	59.10	71.89
$\hat{\eta}_t^2$	27.37	50.75	63.93	48.62	72.82	83.39	77.30	91.77	95.49	95.02	98.82	99.54	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\hat{\eta}_t^3$	0.92	4.40	9.18	2.79	9.65	17.26	12.91	33.04	45.64	7.22	21.68	32.51	92.57	98.13	99.24	92.57	98.13	99.24	92.57	98.13	99.24	92.57	98.13	99.24	92.57	98.13	99.24	92.57	98.13	99.24
$\hat{\eta}_t^4$	23.80	46.92	60.89	42.38	67.08	77.75	67.92	89.06	93.69	91.66	97.95	99.07	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	17.77	39.53	53.33	38.64	63.78	75.15	64.80	85.58	92.09	90.95	97.65	98.94	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.34	6.84	13.65	1.52	6.34	12.50	1.58	7.30	14.52	7.10	21.51	32.51	34.61	60.28	73.34	34.61	60.28	73.34	34.61	60.28	73.34	34.61	60.28	73.34	34.61	60.28	73.34	34.61	60.28	73.34
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	20.04	41.18	53.65	38.84	65.14	76.22	65.59	86.69	92.61	91.90	97.88	99.02	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	14.46	34.80	46.93	33.56	56.91	69.44	56.92	81.23	89.03	88.22	96.47	98.34	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	0.99	5.16	10.61	1.30	6.76	13.01	1.70	7.52	14.80	5.28	17.84	29.04	28.73	54.22	68.01	28.73	54.22	68.01	28.73	54.22	68.01	28.73	54.22	68.01	28.73	54.22	68.01	28.73	54.22	68.01
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	15.17	35.03	47.46	34.13	57.90	69.94	56.87	81.65	88.94	88.09	96.49	98.41	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Tabela 5.33: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).

Regressor Adicionado	$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 200$		
	α			α			α			α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	14.46	35.25	49.92	30.77	56.54	70.43	54.10	77.91	87.00	84.32	95.09	97.64	99.74	99.99	100.00
$\hat{\mu}_t^3$	23.73	47.56	60.79	44.91	70.77	81.28	73.51	89.62	94.16	93.44	98.47	99.31	100.00	100.00	100.00
$\hat{\mu}_t^4$	28.60	51.14	64.35	49.37	73.87	83.87	77.74	91.98	95.53	95.01	98.88	99.58	100.00	100.00	100.00
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.45	7.50	14.09	2.61	10.74	18.66	1.62	8.17	15.52	6.40	18.56	29.03	45.47	72.60	83.63
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.09	6.02	11.80	2.38	10.29	17.56	1.46	6.94	13.53	5.58	15.88	26.40	38.78	66.13	78.60
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.97	4.85	9.73	1.94	9.42	16.46	1.31	6.01	12.02	4.62	14.35	23.65	32.88	58.86	71.80
$\hat{\eta}_t^2$	25.59	49.61	63.06	47.41	72.09	82.99	76.50	91.45	95.28	94.71	98.79	99.50	100.00	100.00	100.00
$\hat{\eta}_t^3$	0.81	4.34	9.07	2.76	9.81	17.78	13.29	33.38	46.22	7.71	22.19	33.32	91.66	97.96	99.18
$\hat{\eta}_t^4$	22.90	45.64	59.79	40.48	65.98	77.05	66.96	88.39	93.51	91.37	97.79	99.02	100.00	100.00	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	15.71	38.24	52.35	37.49	63.33	74.92	64.71	85.45	91.97	90.22	97.60	98.91	100.00	100.00	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.75	7.67	14.44	1.59	6.77	13.14	1.79	7.86	15.10	7.45	21.92	32.84	35.29	60.65	73.61
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	17.18	40.38	53.49	39.13	64.88	76.07	65.60	86.49	92.55	91.75	97.89	99.01	100.00	100.00	100.00
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	12.92	33.00	45.91	32.77	57.23	68.99	56.09	80.90	88.97	87.56	96.30	98.29	100.00	100.00	100.00
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.11	5.51	11.28	1.50	7.31	13.63	1.94	8.10	15.64	5.45	18.25	29.38	29.94	54.78	68.16
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	13.03	32.70	46.12	32.44	57.60	69.55	56.36	81.21	88.86	88.10	96.42	98.37	100.00	100.00	100.00

Tabela 5.34: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar).

Regressor Adicionado	$n = 20$				$n = 40$				$n = 60$				$n = 100$				$n = 200$			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	15.27	36.36	50.51		31.45	57.32	70.80		55.13	78.32	87.13		84.35	95.12	97.56		99.73	99.99	100.00	
$\hat{\mu}_t^3$	23.30	46.75	60.15		43.95	70.05	81.22		73.19	89.48	94.23		93.10	98.44	99.29		100.00	100.00	100.00	
$\hat{\mu}_t^4$	26.31	49.74	63.34		48.14	73.20	83.66		77.06	91.69	95.47		94.84	98.88	99.57		100.00	100.00	100.00	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	1.46	7.66	14.50		2.65	10.99	18.69		1.65	8.60	16.00		6.46	18.89	29.36		45.96	72.82	83.71	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.14	6.08	12.05		2.35	10.23	17.63		1.55	6.97	13.62		5.63	15.95	26.32		38.70	66.17	78.64	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	0.91	4.86	9.90		1.85	9.24	16.26		1.33	6.04	12.07		4.62	14.30	23.58		32.48	58.45	71.48	
$\hat{\eta}_t^2$	23.60	48.48	62.00		45.49	71.34	82.76		76.04	91.19	95.19		94.51	98.74	99.49		100.00	100.00	100.00	
$\hat{\eta}_t^3$	0.66	4.24	8.84		2.41	9.46	17.99		12.75	32.62	45.94		7.57	22.48	33.78		90.44	97.71	99.05	
$\hat{\eta}_t^4$	20.23	44.38	58.34		38.14	64.39	76.50		66.00	87.92	93.18		90.92	97.61	98.99		100.00	100.00	100.00	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	14.60	36.23	51.12		36.09	62.19	74.18		64.80	85.14	91.67		89.87	97.49	98.91		100.00	100.00	100.00	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	1.99	8.19	15.17		1.69	7.18	13.81		2.11	8.75	16.09		7.84	22.29	33.43		35.70	61.34	74.05	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	15.72	38.12	51.89		37.41	63.55	75.72		64.97	86.22	92.39		91.58	97.79	98.99		100.00	100.00	100.00	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	10.96	30.16	43.60		30.60	56.13	68.03		56.29	81.13	88.82		87.23	96.23	98.25		100.00	100.00	100.00	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.18	5.80	11.88		1.76	7.75	14.06		2.33	9.11	16.89		6.11	18.69	29.72		30.71	55.40	68.43	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	10.80	29.87	43.37		29.82	55.65	68.17		56.14	80.69	88.62		87.00	96.22	98.30		100.00	100.00	100.00	

Tabela 5.35: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%	10%	1%	5%	10%	10%	1%	5%	10%	10%	1%	5%	10%	10%	1%	5%	10%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	7.19	21.85	34.02	34.02	15.18	33.48	45.79	45.79	20.31	41.00	54.22	54.22	48.85	75.46	84.23	84.23	74.32	89.87	94.98	94.98
$\hat{\mu}_t^3$	6.12	19.05	29.02	29.02	11.87	28.38	40.52	40.52	15.26	33.67	46.16	46.16	39.88	67.12	78.41	78.41	56.42	81.06	88.62	88.62
$\hat{\mu}_t^4$	4.93	16.63	25.03	25.03	9.48	24.37	35.86	35.86	11.71	28.91	39.73	39.73	33.26	58.23	72.11	72.11	42.19	69.51	80.48	80.48
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	2.09	9.53	16.63	16.63	2.19	9.19	16.66	16.66	1.67	7.74	13.95	13.95	3.89	13.30	22.52	22.52	10.64	26.57	38.23	38.23
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.75	7.95	14.73	14.73	2.03	8.38	15.40	15.40	1.40	6.88	12.43	12.43	3.12	10.48	18.18	18.18	7.62	20.34	30.85	30.85
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.58	6.79	13.49	13.49	1.70	7.40	14.28	14.28	1.25	5.93	11.71	11.71	2.35	8.73	15.72	15.72	5.52	16.03	26.08	26.08
$\hat{\eta}_t^2$	7.02	20.70	32.50	32.50	14.42	32.37	44.15	44.15	18.57	37.82	51.06	51.06	46.54	72.14	83.11	83.11	65.65	86.09	92.36	92.36
$\hat{\eta}_t^3$	9.11	27.12	39.95	39.95	16.20	37.96	52.22	52.22	24.26	50.03	62.69	62.69	58.44	82.10	89.43	89.43	90.08	97.21	98.76	98.76
$\hat{\eta}_t^4$	8.48	25.53	38.50	38.50	13.60	34.81	48.47	48.47	21.80	45.59	58.71	58.71	53.37	78.39	87.24	87.24	82.33	94.05	97.08	97.08
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	5.52	19.88	31.72	31.72	11.69	29.62	42.42	42.42	16.93	39.44	52.54	52.54	47.68	73.08	82.99	82.99	83.96	95.02	97.49	97.49
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.14	9.29	17.49	17.49	1.81	7.71	14.82	14.82	1.78	8.13	14.61	14.61	5.30	16.06	27.10	27.10	11.17	28.48	39.66	39.66
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	5.63	19.65	31.30	31.30	10.29	28.61	41.42	41.42	16.68	39.00	52.54	52.54	47.29	71.27	81.97	81.97	82.69	94.40	97.36	97.36
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	4.39	15.83	26.20	26.20	7.87	24.13	36.44	36.44	12.81	33.21	46.28	46.28	38.00	65.65	77.04	77.04	80.09	92.34	95.91	95.91
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	1.86	8.08	14.69	14.69	1.66	7.02	14.04	14.04	2.04	8.44	16.24	16.24	4.70	14.31	24.27	24.27	9.31	23.82	35.83	35.83
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.13	15.53	26.00	26.00	8.38	24.34	36.81	36.81	12.53	33.79	46.15	46.15	38.38	65.87	77.43	77.43	79.44	92.18	95.89	95.89

Tabela 5.36: Taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).

Regressor Adicionado	$n = 20$				$n = 40$				$n = 60$				$n = 100$				$n = 200$			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	7.51	23.21	35.06		15.65	34.41	46.64		20.78	41.97	54.82		50.63	75.74	84.68		75.94	90.39	95.21	
$\hat{\mu}_t^3$	6.14	19.89	29.87		12.35	29.21	41.38		15.76	34.50	46.84		41.05	67.93	78.83		57.76	81.58	89.10	
$\hat{\mu}_t^4$	4.97	17.26	25.76		9.86	25.05	36.72		11.99	29.68	40.40		34.44	58.81	72.51		43.75	70.15	81.18	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	2.46	9.63	17.26		2.31	9.26	16.82		1.75	7.84	14.19		4.10	13.53	22.64		10.93	27.03	38.62	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	1.84	8.30	15.24		1.94	8.42	15.37		1.40	6.84	12.46		3.13	10.64	18.43		7.67	20.27	31.21	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.51	6.90	13.69		1.70	7.34	14.19		1.23	5.90	11.63		2.39	8.64	15.73		5.43	16.12	26.17	
$\hat{\eta}_t^2$	7.49	21.88	33.97		14.76	33.46	45.19		18.99	39.13	52.01		48.51	72.76	83.70		67.54	86.90	92.63	
$\hat{\eta}_t^3$	10.67	27.82	41.19		17.79	39.97	53.39		25.92	51.46	63.27		59.67	82.27	89.43		90.18	97.30	98.74	
$\hat{\eta}_t^4$	9.62	26.49	39.39		15.21	36.61	50.00		23.94	46.98	59.36		54.28	78.77	87.69		82.91	94.18	97.10	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	6.24	21.16	32.37		13.46	30.74	43.66		18.27	40.63	53.67		49.23	73.48	83.32		84.43	95.20	97.59	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.40	10.13	18.46		1.93	8.40	15.33		1.92	8.49	15.44		5.73	16.53	27.51		11.55	29.29	40.47	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	6.97	20.82	32.25		11.89	29.94	42.88		18.46	40.34	53.60		48.11	71.97	82.47		83.15	94.59	97.34	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	4.97	17.01	27.13		9.24	25.73	37.63		14.36	34.90	47.66		39.70	66.67	77.50		81.28	92.75	96.14	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	2.20	8.95	15.62		1.97	7.70	15.09		2.20	8.83	17.00		4.93	14.76	24.89		9.55	24.66	36.75	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	4.70	16.56	27.15		9.68	26.20	38.01		14.17	35.19	47.64		39.94	67.00	77.85		80.26	92.56	96.06	

Tabela 5.37: Taxas de rejeição do teste Wald sob a hipótese alternativa (ligação Cauchy).

Regressor Adicionado	n = 20				n = 40				n = 60				n = 100				n = 200			
	α				α				α				α				α			
	1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%		1%	5%	10%	
$\hat{\mu}_t^2$	8.44	24.91	35.84		16.50	35.67	47.87		21.45	43.10	55.86		51.54	76.34	85.17		76.84	90.73	95.40	
$\hat{\mu}_t^3$	6.47	20.39	30.57		13.08	29.93	42.31		16.34	35.29	47.88		43.00	68.77	79.19		59.08	82.31	89.68	
$\hat{\mu}_t^4$	4.97	17.65	26.27		10.21	25.68	37.36		12.52	30.23	41.11		35.23	59.70	73.09		45.15	71.27	81.71	
(x_{t1}^2, x_{t2}^2)	2.88	10.08	18.13		2.42	9.64	17.22		1.83	8.11	14.36		4.21	13.75	22.88		11.26	27.55	38.96	
(x_{t1}^3, x_{t2}^3)	2.10	8.69	15.82		2.09	8.56	15.49		1.38	6.95	12.50		3.19	10.74	18.57		7.79	20.72	31.53	
(x_{t1}^4, x_{t2}^4)	1.75	7.38	14.39		1.80	7.60	14.08		1.19	5.92	11.69		2.40	8.70	15.66		5.59	16.31	26.35	
$\hat{\eta}_t^2$	7.63	22.81	34.71		15.51	34.93	46.44		20.14	40.39	52.99		49.50	74.01	84.28		69.43	87.50	93.03	
$\hat{\eta}_t^3$	10.51	29.87	42.31		16.88	42.12	55.07		26.39	52.46	63.97		60.01	82.89	89.77		90.61	97.33	98.76	
$\hat{\eta}_t^4$	10.41	28.62	40.91		14.74	39.24	51.68		23.22	48.40	60.83		55.90	79.61	88.15		83.46	94.48	97.30	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3)$	7.26	22.17	34.09		14.38	32.31	45.37		20.34	41.99	55.51		52.03	74.63	83.94		84.95	95.39	97.70	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t2}^2, x_{t2}^3)$	2.87	11.12	19.73		2.21	9.15	16.40		2.42	9.24	16.56		6.32	17.65	28.38		12.44	30.38	41.37	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3)$	7.37	21.93	33.81		13.27	31.69	45.00		19.11	42.24	55.17		49.91	73.03	83.05		83.58	94.83	97.42	
$(\hat{\mu}_t^2, \hat{\mu}_t^3, \hat{\mu}_t^4)$	6.12	18.20	28.73		9.95	27.59	39.66		15.89	37.18	49.21		42.31	67.73	78.67		81.80	93.20	96.42	
$(x_{t1}^2, x_{t1}^3, x_{t1}^4, x_{t2}^2, x_{t2}^3, x_{t2}^4)$	2.59	9.97	17.31		2.52	8.72	16.62		2.73	10.06	18.39		5.68	15.87	25.97		10.70	26.20	37.86	
$(\hat{\eta}_t^2, \hat{\eta}_t^3, \hat{\eta}_t^4)$	5.69	18.25	28.62		10.22	27.68	40.24		15.62	36.68	49.34		41.38	68.02	78.93		80.43	93.21	96.21	

Tabela 5.38: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (não-linearidade), $n = 20$, $\phi = 10$ e 20 .

Regressor Adicionado	α	$\phi = 10$				$\phi = 20$			
		δ							
		1.2	1.4	1.6	1.8	1.2	1.4	1.6	1.8
$\hat{\eta}_t^2$	1%	1.09	1.60	2.66	4.31	1.30	2.18	3.74	7.02
	5%	5.74	7.19	9.54	13.25	5.96	8.43	12.61	19.78
	10%	10.93	12.90	15.83	20.52	11.80	15.34	21.58	30.17
$\hat{\mu}_t^4$	1%	1.16	1.52	2.52	3.36	1.32	2.14	3.41	6.03
	5%	5.66	6.66	8.71	11.88	5.75	8.30	11.65	18.08
	10%	10.31	12.29	14.61	18.91	11.68	14.80	20.36	28.13

Tabela 5.39: Taxas de rejeição do teste escore sob a hipótese alternativa (ligação log-log complementar), $n = 20$, $\phi = 10$ e 20 .

Regressor Adicionado	$\phi = 10$			$\phi = 20$		
	α			α		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$\hat{\mu}_t^2$	1.38	7.47	14.27	1.60	9.58	17.18
$\hat{\mu}_t^3$	2.29	9.90	17.25	3.16	12.93	21.55
$\hat{\mu}_t^4$	2.94	11.39	18.86	3.62	15.01	23.12
$\hat{\eta}_t^2$	2.76	10.92	18.25	3.85	14.00	22.63
$\hat{\eta}_t^3$	1.55	5.85	11.88	1.31	5.57	11.05
$\hat{\eta}_t^4$	2.68	10.29	17.51	4.06	13.49	21.66

CAPÍTULO 6

Aplicação

Neste capítulo apresentaremos uma aplicação do teste de especificação proposto na Seção 4.3. Consideramos os dados de gasolina de Prater (1956). A variável dependente é a proporção de petróleo cru que é transformado em gasolina após o processo de destilação e fracionamento. As variáveis independentes são: gravidade do petróleo cru (graus API), pressão do vapor de petróleo cru (lbf/in²), petróleo cru a 10% do ponto ASTM (i.e., a temperatura em que 10% do petróleo cru é vaporizado) e temperatura (°F) em que toda a gasolina se evapora. Os dados consistem de um conjunto de dez valores das primeiras três variáveis independentes que correspondem aos diferentes tipos de petróleo cru que são submetidos a experimentação sob diferentes condições de destilação. O conjunto de dados contém 32 observações. A especificação do modelo para a resposta média usa um intercepto ($x_1 = 1$), nove variáveis dummy para os primeiros nove níveis do petróleo cru ($x_2, \dots, x_{10}$) e temperatura (°F) em que a gasolina é vaporizada (x_{11}).

Os parâmetros são estimados através da maximização da função de log-verossimilhança utilizando o método quasi-Newton BFGS com primeiras derivadas analíticas. Os valores iniciais para os parâmetros desconhecidos são escolhidos de acordo com a regra proposta por Ferrari & Cribari-Neto (2004). O modelo é especificado como

$$g(\mu_t) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_{11} x_{t11}. \quad (6.1)$$

A função de ligação logística foi utilizada. As estimativas dos parâmetros são apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Estimativas dos parâmetros para os dados de gasolina de Prater.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	p -valor
β_1	-6.15957	0.18232	0.00000
β_2	1.72773	0.10123	0.00000
β_3	1.32260	0.11790	0.00000
β_4	1.57231	0.11610	0.00000
β_5	1.05971	0.10236	0.00000
β_6	1.13375	0.10352	0.00000
β_7	1.04016	0.10604	0.00000
β_8	0.54369	0.10913	0.00000
β_9	0.49590	0.10893	0.00001
β_{10}	0.38579	0.11859	0.00114
β_{11}	0.01097	0.00041	0.00000
ϕ	440.27838	110.02562	—

O nosso objetivo reside em testar se o modelo utilizado está corretamente especificado. Para tanto, utilizaremos o teste RESET proposto na presente dissertação implementado através do teste escore. Consideramos diferentes escolhas de variável de teste, ou seja, da variável utilizada para aumentar a componente sistemática e que tem sua significância testada: $\hat{\eta}_t^2$, $\hat{\eta}_t^3$, $\hat{\eta}_t^4$, $\hat{\mu}_t^2$, $\hat{\mu}_t^3$ e $\hat{\mu}_t^4$. As correspondentes estatísticas de teste são 16.401, 16.303, 15.537, 14.711, 13.065 e 11.682, indicando, assim, que a hipótese nula de especificação correta é rejeitada mesmo a níveis nominais muito pequenos.

Avaliamos o uso de outras funções de ligação (probit, Cauchy, log-log complementar e log-log). A hipótese nula de especificação correta não foi rejeitada, ao nível nominal de 10%, quando utilizamos a função de ligação log-log. A escolha da variável de teste foi feita como no teste anterior. As estatísticas de teste correspondentes foram: 1.6277, 1.2394, 1.1846, 1.5269, 1.6598 e 1.7458. Em suma, o teste RESET indica que a função de ligação que deve ser utilizada na modelagem é a função log-log; todas as especificações que empregam outras funções de ligação são rejeitadas pelo teste.

CAPÍTULO 7

Conclusões

A presente dissertação propôs um teste de especificação para o modelo de regressão beta, que é útil em situações em que a variável resposta assume valores no intervalo unitário padrão. O teste proposto é baseado no teste RESET, que foi desenvolvido para o modelo de regressão linear clássico. Diferentemente da especificação originalmente proposta, no contexto da classe de regressão beta é necessário recorrer a uma implementação assintótica do teste. Nós consideramos três vertentes, a saber: implementações via teste escore, teste da razão de verossimilhanças e teste Wald. Consideramos também diferentes escolhas das variáveis de teste utilizadas para aumento do modelo em avaliação; em particular, consideramos potências dos regressores, potências do preditor linear estimado e potências da estimativa da resposta média.

Os resultados de simulação de Monte Carlo indicaram que o melhor desempenho em amostras finitas é alcançado quando se utiliza o teste escore com uma potência do preditor linear estimado ou uma potência da resposta média estimada como variável de teste. As simulações foram realizadas nos contextos de não-linearidade e de erro na especificação da função de ligação. Uma aplicação a dados reais foi realizada.

APÊNDICE A

Programas de Simulação

Neste apêndice apresentamos os programas de simulação utilizados neste trabalho, os quais foram escritos na linguagem matricial de programação `Ox`. No Apêndice A.1 encontra-se o programa de simulação de Monte Carlo utilizado para avaliar o desempenho do teste proposto com relação à sua capacidade de identificar não-linearidades existentes e que não foram incorporadas na modelagem. O Apêndice A.2 apresenta o programa de simulação para o caso da avaliação do desempenho do teste no contexto de erro na especificação da função de ligação. Os Apêndices A.3 e A.4 apresentam as funções utilizadas pelos dois programas.

A.1 Não-linearidade

```

/*****
* PROGRAMA: betareset_linearidade.ox
* USO: Avaliar o desempenho do teste betareset (TAMANHO E PODER
*      DOS TESTES), com relação à sua capacidade de identificar
*      não-linearidades existentes e que não foram incorporadas
*      na modelagem. Para tanto utiliza-se o seguinte modelo sob H0:
*       $\text{logit}(\mu) = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2}$ 
*      Sob H1 as observacoes sao geradas a partir do modelo nao-linear
*       $\text{logit}(\mu) = [\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2}]^{\delta}$ .
*      Com  $\beta = \langle 1, -1, 0.8 \rangle$ ,  $\phi = 120$ ,  $X \sim U(0,1)$  e
*       $\delta = (1.2, 1.4, 1.6, 1.8)$ 
* AUTOR: Leonardo Bomfim de Lima
* VERSAO: 2.01
*****/
```

```

#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>
#include "funcoes_logit.ox"

const decl power = <2>; // Potencia da(s) nova(s) variavel(eis) adicionada(s).
const decl type = "preditor"; // variavel adicionada como variavel(eis) de teste
const decl NREP = 10000; // Número de Réplicas de Monte Carlo
const decl nMIN = 20; // Tamanho da amostra minimo
const decl nMAX = 20; // Tamanho da amostra maximo
const decl nINC = 20; // Incremento amostral
const decl deltaMIN = 1.1; // menor grau de afastamento de H0
const decl deltaMAX = 1.1; // Maior grau de afastamento de H0
const decl deltaINC = 0.1; // Incremento do afastamento

/* Inicio do Programa */
main()
{
decl tempoexe, m, k, p, pr, beta, phi, theta, eta, mu, niveis;
decl gerY, quantis, i, ynew, betaols, yols, varols, olsfitted;
decl vp0, result, dfunc1, resultr, betaolsr, yolsr, varolsr, olsfittedr, vp1, dfunc2;
decl fisherinv, fisherinvtil, etatil, mutil, Eteste, escoretal, cont, Econt, resultado_tam, resultado_poder;
decl s_mZ, arq, n, quantil90, quantil95, quantil99, qestimados, eta_2, mu_2, cont_1, Econt_1, cont_2;
decl Econt_2, cont_3, Econt_3, delta, l, d, nVAR = 2*columns(power);

// Inicio do tempo de execucao
tempoexe = timer();
arq = fopen("Linearidade preditor pot=2 n = 20-100.txt","w");
k = 2; // Numero de variaveis independentes no modelo s/ intercepto

// Niveis de significancia dos testes
niveis = <0.10; 0.05; 0.01>;

// Valores reais dos parametros
beta = <1, -1, 0.8>' ;
phi = 120;

fprintf(arq, "-----");
fprintf(arq, "Teste de Erro de Especificação da Regressão Beta");
fprintf(arq, "-----");
fprintf(arq, "Nova Variavel Adicionada:", type);
fprintf(arq, "-----");
fprintf(arq, "Potencia do Novo Regressor:", power, "\n");
fprintf(arq, "Tamanhos dos Testes");

ranseed("GM"); // Escolha do gerador de numeros aleatorios

// Laco para os diferentes tamanhos amostrais
for(n = nMIN; n <= nMAX ; n += nINC)
{

ranseed({1965, 2001}); // Escolha da Semente

// Inicializacao

```

```

Eteste = zeros(NREP, 3);
cont = zeros(3, columns(niveis)); // Inic. do Contador Aux. p/ os Tamanhos dos Testes
Econt = zeros(3, columns(niveis)); // Inic. do Contador dos Tamanhos dos Testes
resultado_poder = zeros(24, 3);
d = 0;

// Obtendo a matriz X restrita
s_mXr = 1~ranu(n,k);
pr = columns(s_mXr);

eta = s_mXr * beta;
mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));

ranseed(-1);

// Primeiro Laco de Monte Carlo
for(i = 0; i < NREP ; i++)
{

geraY(mu, phi, n, &gerY);
s_mY = gerY;
ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) ); // y*

// Maxima verossimilhanca restrita *****
if(pr > 1){ols2c(ynew, s_mXr, &betaolsr);}
else if(pr==1){betaolsr = meanc(ynew);}
yolsr = s_mXr*betaolsr;
varolsr = sumsqr(ynew-yolsr)/(n-pr);
olsfittedr = exp(yolsr) ./ (1 + exp(yolsr));
// valores iniciais
vp0 = betaolsr|(meanc( 1 ./ (varolsr*(olsfittedr.*(1.0-olsfittedr)))) - 1.0);
// Estimacao por maxima verossimilhanca restrita
resultur = MaxBFGS(logit_floglikr, &vp0, &dfunc1, 0, FALSE);
// Fim *****

// Adicao da(s) Nova(s) Variavel(eis)
if( type == "fitted"){ // Nova variavel Fitted
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
mutil = exp(etatil) ./ (1 + exp(etatil));
s_mZ = mutil.^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if( type == "preditor"){ // Nova variavel preditor
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
s_mZ = etatil.^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if( type == "regressor"){ // Nova variavel Regressor
if(columns(power) == 1){ // Adicao de uma variavel
s_mZ = s_mXr[1:k].^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if(columns(power) == 2){ // Adicao de duas variaveis
s_mZ = zeros(n, nVAR);

```

```

for(l = 0; l <= 1; l++){
s_mZ[l][1] = s_mXr[l][1:1].^power[l];
}
for(l = 2; l <= 3; l++){
s_mZ[l][1] = s_mXr[l][2:2].^power[l-2];
}
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if(columns(power) == 3){ // Adicao de duas variaveis
s_mZ = zeros(n, nVAR);
for(l = 0; l <= 2; l++){
s_mZ[l][1] = s_mXr[l][1:1].^power[l];
}
for(l = 3; l <= 5; l++){
s_mZ[l][1] = s_mXr[l][2:2].^power[l-3];
}
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
}

// Numero de parametros que estao sendo testados
// sempre os ultimos m parametros serao testados
m = columns(s_mZ);
p = columns(s_mX);
// Valores verdadeiros sob H0
theta = beta | zeros((p - pr),1) | phi;
// Maxima verossimilhanca irrestrita*****
if(p > 1){ols2c(ynew, s_mX, &betaols);}
else if(p==1){betaols = meanc(ynew);}
yols = s_mX*betaols;
varols = sumsqr(ynew-yols)/(n-p);
olsfitted = exp(yols) ./ (1 + exp(yols));
// valores iniciais
vp1 = betaols/(meanc( 1 ./ (varols*(olsfitted.*(1.0-olsfitted)))) - 1.0);
// estimacao por maxima verossimilhanca
result = MaxBFGS(logit_floglik, &vp1, &dfunc2, 0, FALSE);
// Fim *****

// Calculos sob Maxima verossimilhanca IRRESTRITA
logit_InversaFisherIrrest(vp1, p, &fisherinv);
// Calculos sob Maxima verossimilhanca RESTRITA
logit_InversaFisherRest(vp0, theta, pr, p, ynew, &fisherinvtil, &escoretil);
// Quantis da distribuicao Qui-Quadrado (m graus de liberdade)
quantis = (quanchi(1-niveis, m))';
// Estatisticas dos Testes
// Razao de Verossimilhanca
Eteste[i][0] = 2*(dfunc2-dfunc1);
// escore
Eteste[i][1] = (escoretil)*(fisherinvtil[pr:p-1][pr:p-1])*escoretil;
// Wald
Eteste[i][2] = (vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1])*(fisherinv[pr:p-1][pr:p-1])^(-1)*(vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1]);
cont= ((Eteste[i][0])' .> quantis);
Econt = Econt + cont;

```

```

} // fim do Primeiro laco de Monte Carlo

resultado_tam = zeros(columns(niveis), 3);
resultado_tam = ((Econt' ./NREP) .*100);
fprintf(arq,"-----");
fprintf(arq,"Tamanho da Amostra:", n,"\\n");
fprintf(arq, "%8.2f", "%c", {"RV", "Escore", "Wald"}, "%r",
{"10%", "5%", "1%"}, resultado_tam,"\\n");

quantil90 = sortc(Eteste)[(0.9*NREP - 1)][];
quantil95 = sortc(Eteste)[(0.95*NREP - 1)][];
quantil99 = sortc(Eteste)[(0.99*NREP - 1)][];
qestimados = quantil90 | quantil95 | quantil99;

for(delta = deltaMIN; delta <= deltaMAX ; delta += deltaINC)
{

ranseed(-1);

eta_2 = (s_mXr * beta).^delta;
mu_2 = exp(eta_2) ./ (1.0 + exp(eta_2));

// Inicializacao
Eteste = zeros(NREP, 3);
cont_1 = zeros(3, 1);
Econt_1 = zeros(3, 1);
cont_2 = zeros(3, 1);
Econt_2 = zeros(3, 1);
cont_3 = zeros(3, 1);
Econt_3 = zeros(3, 1);

// Segundo Laco de Monte Carlo
for(i = 0; i < NREP ; i++)
{
geraY(mu_2, phi, n, &gerY);
s_mY = gerY;
ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) ); // y*

// Maxima verossimilhanca restrita *****
if(pr > 1){ols2c(ynew, s_mXr, &betaolsr);}
else if(pr==1){betaolsr = meanc(ynew);}
yolsr = s_mXr*betaolsr;
varolsr = sumsqrc(ynew-yolsr)/(n-pr);
olsfittedr = exp(yolsr) ./ (1 + exp(yolsr));
// valores iniciais
vp0 = betaolsr|(meanc( 1 ./ (varolsr*(olsfittedr .*(1.0-olsfittedr)))) - 1.0);
// Estimacao por maxima verossimilhanca restrita
resultr = MaxBFGS(logit_floglikr, &vp0, &dfunc1, 0, FALSE);
// Fim *****

// Adicao da Nova Variavel
if( type == "fitted"){ // Nova variavel Fitted
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
mutil = exp(etatil) ./ (1 + exp(etatil));

```

```

s_mZ = mutil.^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if( type == "preditor"){ // Nova variavel preditor
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
s_mZ = etatil.^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if( type == "regressor"){ // Nova variavel Regressor
if(columns(power) == 1){ // Adicao de uma variavel
s_mZ = s_mXr[] [1:k].^power;
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if(columns(power) == 2){ // Adicao de duas variaveis
s_mZ = zeros(n, nVAR);
for(l = 0; l <= 1; l++){
s_mZ[] [l] = s_mXr[] [1:1].^power[l];
}
for(l = 2; l <= 3; l++){
s_mZ[] [l] = s_mXr[] [2:2].^power[l-2];
}
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
if(columns(power) == 3){ // Adicao de duas variaveis
s_mZ = zeros(n, nVAR);
for(l = 0; l <= 2; l++){
s_mZ[] [l] = s_mXr[] [1:1].^power[l];
}
for(l = 3; l <= 5; l++){
s_mZ[] [l] = s_mXr[] [2:2].^power[l-3];
}
s_mX = s_mXr ~ s_mZ;
}
}
// Numero de parametros que estao sendo testados
// sempre os ultimos m parametros serao testados
m = columns(s_mZ);
p = columns(s_mX);
// Valores verdadeiros sob H0
theta = beta | zeros((p - pr),1) | phi;
// Maxima verossimilhanca irrestrita*****
if(p > 1){ols2c(ynew, s_mX, &betaols);}
else if(p==1){betaols = meanc(ynew);}
yols = s_mX*betaols;
varols = sumsqrc(ynew-yols)/(n-p);
olsfitted = exp(yols) ./ (1 + exp(yols));
// valores iniciais
vp1 = betaols|(meanc( 1 ./ (varols*(olsfitted.*(1.0-olsfitted)))) - 1.0);
// estimacao por maxima verossimilhanca
result = MaxBFGS(logit_floglik, &vp1, &dfunc2, 0, FALSE);
// Fim *****

// Calculos sob Maxima verossimilhanca IRRESTRITA
logit_InversaFisherIrrest(vp1, p, &fisherin);

```

```

// Calculos sob Maxima verossimilhanca RESTRITA
logit_InversaFisherRest(vp0, theta, pr, p, ynew, &fisherinvtil, &escoretil);
// Estatisticas dos Testes
// Razao de Verossimilhanca
Eteste[i][0] = 2*(dfunc2-dfunc1);
// escore
Eteste[i][1] = (escoretil)*(fisherinvtil[pr:p-1][pr:p-1])*escoretil;
// Wald
Eteste[i][2] = (vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1])*(fisherinv[pr:p-1][pr:p-1])^(-1)*(vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1]);
cont_1= ((Eteste[i][0]) .<= qestimados[][0]);
Econt_1 = Econt_1 + cont_1;
cont_2= ((Eteste[i][1]) .<= qestimados[][1]);
Econt_2 = Econt_2 + cont_2;
cont_3= ((Eteste[i][2]) .<= qestimados[][2]);
Econt_3 = Econt_3 + cont_3;
} // Fim do Segundo laco de Monte Carlo

resultado_poder[0+d][] = ((ones(3,3) - ((Econt_1 ~ Econt_2 ~ Econt_3)./NREP)) .*100)[0][];
resultado_poder[8+d][] = ((ones(3,3) - ((Econt_1 ~ Econt_2 ~ Econt_3)./NREP)) .*100)[1][];
resultado_poder[16+d][] = ((ones(3,3) - ((Econt_1 ~ Econt_2 ~ Econt_3)./NREP)) .*100)[2][];
d++;
} // Fim do laco para os diferentes deltas

fprintf(arq,"-----");
fprintf(arq,"Resultado do Poder");
fprintf(arq,"Tamanho da Amostra:", n,"\n");
fprintf(arq,"%8.2f", "%c", {"RV", "Escore", "Wald"}, "%r",
{"1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8",
"1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8",
"1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8"}, resultado_poder,"\n");
} // Fim do laco para diferentes tamanhos amostrais

fprintf(arq,"\n");
fprintf(arq, "TEMPO DE EXECUCAO: ", timespan(tempoexe) );

} // fim de main

```

A.2 Função de Ligação Incorreta

```

/*****
* PROGRAMA: betareset_link.ox
*
* USO: Avaliar o desempenho do teste betareset (tamanho e poder do teste)
* no contexto de erro na especificacao na funcao de ligacao. Para tanto,
* gera-se os dados utilizando a funcao de ligacao "link" e o teste eh
* aplicado em um modelo estimado utilizando funcao de ligacao logistica.
* Com \beta = <-1.8, 1.4, 1.6>, \phi = 120 e X~U(0,1)
* AUTOR: Leonardo Bomfim
* VERSAO: 2.01
*****/

```

```

#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>
#include <oxfloat.h>

const decl link = "cloglog"; // Funcao de ligacao utilizada para gerar os dados

#include "funcoes_logit.ox" // Programa que contem funcoes sob a funcao de ligacao logistica
#include "funcoes_links.ox" // Programa que contem funcoes sob a funcao de ligacao "link"

const decl type = "fitted"; // Tipo da(s) nova(s) variavel(eis) adicionada(s)
const decl power = <2>;      // Potencia da(s) nova(s) variavel(eis) adicionada(s)

const decl NREP = 10000; // Numero de Replicas de Monte Carlo
const decl nMIN = 20; // Tamanho da amostra minimo
const decl nMAX = 20; // Tamanho da amostra maximo
const decl nINC = 20; // Incremento da amostra

/* Inicio do Programa */
main()
{
    decl tempoexe, m, k, p, pr, beta, phi, theta, eta, mu, niveis;
    decl gerY, quantis, i, ynew, betaols, yols, varols, phiolsr, phiols;
    decl vp0, result, dfunc1, resultr, betaolsr, yolsr, varolsr, mutilr, mutili, vp1, dfunc2;
    decl fisherinv, fisherinvtil, etatil, mutil, Eteste, escoretil, cont, Econt, resultado_tam, resultado_poder;
    decl s_mZ, arq, n, quantil90, quantil95, quantil99, qestimados;
    decl cont_1, Econt_1, cont_2, Econt_2, cont_3, Econt_3, gY, j, nvar;

    // Inicio do tempo de execucao
    tempoexe = timer();

    // Arquivo de texto
    arq = fopen("probit, fitted, pot = 2, n=20-200.txt", "w");

    // George Marsaglia: gerador de numeros uniformes pseudo-aleatorios
    ranseed("GM");

    k = 2; // Numero de variaveis independentes no modelo s/ intercepto

    nvar = 2*columns(power);

    // Niveis de significancia dos testes
    niveis = <0.01; 0.05; 0.10>;

    // Valores reais dos parametros
    beta = <-1.8, 1.4, 1.6>;
    phi = 120;

    // Impressao no arquivo de texto
    fprintf(arq, "\n");
    fprintf(arq, "***** Teste de especificacao em modelos de regressao beta ***** \n");

```

```

fprintf(arq,"Tipo da Variavel Adicionada: ", type);
fprintf(arq,"Funcao de ligacao utilizada para gerar os dados: ", link);
fprintf(arq,"Replicas de Monte Carlo: ", "%d ", NREP);
fprintf(arq,"Potencia do(s) Novo(s) Regressor(es): ", "%d ", power,"\n");

// Laco para os diferentes tamanhos amostrais
for(n = nMIN; n <= nMAX ; n += nINC)
{

ranseed({1965, 2001}); // Escolha da Semente

// Inicializacao
Eteste = zeros(NREP, 3);          // Matriz de estatisticas de teste
cont = zeros(3, columns(niveis)); // Inic. do Contador Aux. p/ os Tamanhos dos Testes
Econt = zeros(3, columns(niveis)); // Inic. do Contador dos Tamanhos dos Testes

// Obtendo a matriz X restrita
s_mXr = 1~ranu(n,k);

// Numero de variaveis independentes no modelo c/ intercepto
pr = columns(s_mXr);

eta = s_mXr * beta;

if(link == "cloglog"){
mu = 1 - exp(-exp(eta));
}
if(link == "probit"){
mu = probn(eta);
}
if(link == "cauchy"){
mu = (atan(eta)./M_PI) + 0.5;
}
if(link == "loglog"){
mu = exp(-exp(-eta));
}

ranseed(-1);

// Primeiro Laco de Monte Carlo (simulacoes de tamanho)
for(i = 0; i < NREP ; i++)
{

// Gerando a variavel resposta y
geraY(mu, phi, n, &gerY);
s_mY = gerY;

// y*
ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) );

//***** Maxima verossimilhanca restrita *****

// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

```

```

if(link == "cloglog"){
  gY = log(-log(1-s_mY));
}

if(link == "probit"){
  gY = quann(s_mY);
}
if(link == "cauchy"){
  gY = tan(M_PI.*(s_mY - 0.5));
}
if(link == "loglog"){
  gY = -log(-log(s_mY));
}

if(pr > 1){ols2c(gY, s_mXr, &betaolsr);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(pr==1){betaolsr = meanc(gY);} // quadrados de  $(X'X)^{-1} * X' * g(y)$ 

// Passos para calcular o valor inicial de phi
yolsr = s_mXr*betaolsr; //  $X(X'X)^{-1}X'*g(y)$ 
varolsr = sumsqrc(gY-yolsr)/(n-pr); //  $(g(y)-g(y)_{\text{hat}})^2/(n-k)$ 

if(link == "cloglog"){
  mutilr = 1 - exp(-exp(yolsr)); //  $g^{-1}(X(X'X)^{-1}X'*y_{\text{new}})$ 
  phiolsr = meanc( (mutilr.*(1.0-mutilr)) ./
  (varolsr.* ((1 - mutilr).* log(1 - mutilr)).^2)) - 1.0;
}
if(link == "probit"){
  mutilr = probn(yolsr);
  phiolsr = meanc( (mutilr.*(1.0-mutilr)) ./
  (varolsr.* (densn(yolsr).^2) ) ) - 1.0;
}
if(link == "cauchy"){
  mutilr = (atan(yolsr)./M_PI) + 0.5;
  phiolsr = meanc(((mutilr.*(1.0-mutilr)).* M_PI^2)
  ./ (varolsr.* (cos(M_PI.*(mutilr - 0.5))).^4 )) - 1.0;
}
if(link == "loglog"){
  mutilr = exp(-exp(-yolsr));
  phiolsr = meanc( (mutilr.*(1.0-mutilr)) ./
  (varolsr.* (mutilr.* log(mutilr)).^2 ) ) - 1.0;
}

// valores iniciais
vp0 = betaolsr | phiolsr;

// Estimacao por maxima verossimilhanca restrita
resultr = MaxBFGS(floglikr, &vp0, &dfunc1, 0, FALSE);
// Fim *****

// Adicao da(s) Nova(s) Variavel(eis)

```

```

if( type == "fitted"){ // Nova variavel Fitted
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];

if(link == "cloglog"){
mutil = 1 - exp(-exp(etatil));
}
if(link == "probit"){
mutil = probn(etatil);
}
if(link == "cauchy"){
mutil = (atan(etatil)./M_PI) + 0.5;
}
if(link == "loglog"){
mutil = exp(-exp(-etatil));
}

s_mZ = mutil.^power;
} // Fim do laço para fitted

if( type == "preditor"){ // Nova variavel preditor
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
s_mZ = etatil.^power;
} // Fim do laço para preditor

if( type == "regressor"){ // Nova variavel Regressor
if(columns(power) == 1){
s_mZ = s_mXr[] [1:k].^power;
}
if(columns(power) == 2){ // <,2,3>
s_mZ = zeros(n, nvar);

for(j = 0; j <= 1; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [1].^power[j];
}
for(j = 2; j <= 3; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [2].^power[j-2];
}
}

if(columns(power) == 3){ // <2,3,4>
s_mZ = zeros(n, nvar);
for(j = 0; j <= 2; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [1].^power[j];
}
for(j = 3; j <= 5; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [2].^power[j-3];
}
}

} // Fim do laço para regressor

s_mX = s_mXr ~ s_mZ;

```

```

// Numero de parametros que estao sendo testados
// sempre os ultimos m parametros serao testados
m = columns(s_mZ);
p = columns(s_mX);

// Valores verdadeiros sob H0
theta = beta | zeros(m,1) | phi; // zeros((pr-p),1) vetor de zeros com
// (numero de regressores adicionados) linhas

//***** Maxima verossimilhanca irrestrita *****
// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

if(p > 1){ols2c(gY, s_mX, &betaols);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(p==1){betaols = meanc(gY);} // quadrados de  $(X'X)^{-1} * X' * g(y)$ 

// Passos para calcular o valor inicial de phi
yols = s_mX*betaols; //  $X(X'X)^{-1} * X' * g(y)$ 
varols = sumsqrc(gY-yols)/(n-p); //  $(g(y)-g(y)_{\text{hat}})^2/(n-k)$ 

if(link == "cloglog"){
mutili = 1 - exp(-exp(yols)); //  $g^{-1}(X(X'X)^{-1} * X' * y_{\text{new}})$ 
phiols = meanc( (mutili.*(1.0-mutili)) ./
(varols.* ((1 - mutili).* log(1 - mutili)).^2)) - 1.0;
}
if(link == "probit"){
mutili = probn(yols);
phiols = meanc( (mutili.*(1.0-mutili))
./ (varols.* (densn(yols).^2) ) ) - 1.0;
}
if(link == "cauchy"){
mutili = (atan(yols)./M_PI) + 0.5;
phiols = meanc(((mutili.*(1.0-mutili)).* M_PI^2)
./ (varols.* (cos(M_PI.*(mutili - 0.5))).^4 )) - 1.0;
}
if(link == "loglog"){
mutili = exp(-exp(-yols));
phiols = meanc( (mutili.*(1.0-mutili)) ./
(varols.* (mutili.* log(mutili)).^2 ) ) - 1.0;
}

// valores iniciais
vp1 = betaols | phiols;

// estimacao por maxima verossimilhanca
result = MaxBFGS(floglik, &vp1, &dfunc2, 0, FALSE);
//println("\nCONVERGENCE STATUS: ", MaxConvergenceMsg(result));
// Fim *****

// Calculo da matriz de informacao de Fisher sob Maxima verossimilhanca IRRESTRITA
InversaFisherIrrest(vp1, p, &fisherinv);

// Calculo da matriz de informacao de Fisher e funcao escore sob Maxima verossimilhanca RESTRITA
InversaFisherRest(vp0, theta, pr, p, ynew, &fisherinvtil, &escoretil);

```

```

// Quantis da distribuicao Qui-Quadrado (m graus de liberdade)
quantis = (quanchi(1-niveis, m))';

// Estatisticas dos Testes
// escore
Eteste[i][0] = (escoret1)'*(fisherinvtil[pr:p-1][pr:p-1])*escoret1;
// Razao de Verossimilhanças
Eteste[i][1] = 2*(dfunc2-dfunc1);
// Wald
Eteste[i][2] = (vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1])'*(fisherinv[pr:p-1][pr:p-1])^(-1)*(vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1]);

cont= ((Eteste[i][1])' .> quantis);
Econt = Econt + cont;

} // fim do Primeiro laco de Monte Carlo

resultado_tam = zeros(columns(niveis), 3);
resultado_tam = ((Econt' ./NREP) .*100);

fprintf(arq,"-----");
fprintf(arq,"Tamanho da Amostra:", n);
fprintf(arq,"-----");
fprintf(arq,"Tamanho dos Testes");
fprintf(arq,"%8.2f", "%c", {"1%", "5%", "10%"} , "%r",
{"Escore", "RV", "Wald"}, resultado_tam,'\n');

// Quantis estimados
quantil90 = sortc(Eteste)[(0.9*NREP - 1)][1];
quantil95 = sortc(Eteste)[(0.95*NREP - 1)][1];
quantil99 = sortc(Eteste)[(0.99*NREP - 1)][1];
qestimados = quantil99 | quantil95 | quantil90;

ranseed(-1);

// Inicializacao
Eteste = zeros(NREP, 3);
cont_1 = zeros(3, 1);
Econt_1 = zeros(3, 1);
cont_2 = zeros(3, 1);
Econt_2 = zeros(3, 1);
cont_3 = zeros(3, 1);
Econt_3 = zeros(3, 1);

// Segundo Laco de Monte Carlo (simulacoes de poder)
for(i = 0; i < NREP ; i++)
{

geraY(mu, phi, n, &gerY); // Gerando y utilizando a funcao "link"
s_mY = gerY;

//***** Maxima verossimilhanca restrita *****

```

```

// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) ); // y* = g(y)

if(pr > 1){ols2c(ynew, s_mXr, &betaolsr);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(pr==1){betaolsr = meanc(ynew);} // quadrados de (X'X)^-1 * X'* ynew

// Passos para calcular o valor inicial de phi
yolsr = s_mXr*betaolsr; // X(X'X)^-1*X'*g(y)
mutilr = exp(yolsr) ./ (1 + exp(yolsr)); //g^-1(X(X'X)^-1*X'*ynew)
varolsr = sumsqrc(ynew-yolsr)/(n-pr); // (g(y)-g(y)hat)^2/(n-k)

// valores iniciais
vp0 = betaolsr|(meanc( 1 ./ (varolsr*(mutilr.*(1.0-mutilr)))) - 1.0);

// Estimacao por maxima verossimilhanca restrita
resultr = MaxBFGS(logit_floglikr, &vp0, &dfunc1, 0, FALSE);
//fprintfln(arq, "\nCONVERGENCE STATUS: ", MaxConvergenceMsg(resultr));

// Fim *****

// Adicao da Nova Variavel
if( type == "fitted"){ // Nova variavel Fitted
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
mutil = exp(etatil) ./ (1 + exp(etatil));
s_mZ = mutil.^power;
}

if( type == "preditor"){ // Nova variavel preditor
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
s_mZ = etatil.^power;
}

if( type == "regressor"){ // Nova variavel Regressor
if(columns(power) == 1){
s_mZ = s_mXr[] [1:k].^power;
}
if(columns(power) == 2){
s_mZ = zeros(n, nvar);

for(j = 0; j <= 1; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [1].^power[j];
}

for(j = 2; j <= 3; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [2].^power[j-2];
}
}

if(columns(power) == 3){
s_mZ = zeros(n, nvar);
for(j = 0; j <= 2; j++){

```

```

s_mZ[] [j] = s_mXr[] [1].^power[j];
}
for(j = 3; j <= 5; j++){
s_mZ[] [j] = s_mXr[] [2].^power[j-3];
}
}

}

s_mX = s_mXr ~ s_mZ;

// Numero de parametros que estao sendo testados
// sempre os ultimos m parametros serao testados
m = columns(s_mZ);
p = columns(s_mX);

// Valores verdadeiros sob H0
theta = beta | zeros(m,1) | phi;

//***** Maxima verossimilhanca irrestrita *****
// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

if(p > 1){ols2c(ynew, s_mX, &betaols);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(p==1){betaols = meanc(ynew);} // quadrados de  $(X'X)^{-1} * X' * ynew$ 

// Passos para calcular o valor inicial de phi
yols = s_mX*betaols; //  $X(X'X)^{-1}*X'*g(y)$ 
mutili = exp(yols) ./ (1 + exp(yols)); //  $g^{-1}(X(X'X)^{-1}*X'*ynew)$ 
varols = sumsqrc(ynew-yols)/(n-p); //  $(g(y)-g(y)hat)^2/(n-k)$ 

// valores iniciais
vp1 = betaols|(meanc( 1 ./ (varols*(mutili.*(1.0-mutili)))) - 1.0);

// estimacao por maxima verossimilhanca
result = MaxBFGS(logit_floglik, &vp1, &dfunc2, 0, FALSE);
// Fim *****

// Calculos sob Maxima verossimilhanca IRRESTRITA
logit_InversaFisherIrrest(vp1, p, &fisherinv);

// Calculos sob Maxima verossimilhanca RESTRITA
logit_InversaFisherRest(vp0, theta, pr, p, ynew, &fisherinvtil, &escoretil);

// Estatisticas dos Testes
// escore
Eteste[i][0] = (escoretil)'*(fisherinvtil[pr:p-1][pr:p-1])*escoretil;
// Razao de Verossimilhanca
Eteste[i][1] = 2*(dfunc2-dfunc1);
// Wald
Eteste[i][2] = (vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1])'*(fisherinv[pr:p-1][pr:p-1])^(-1)*(vp1[pr:p-1] - theta[pr:p-1]);

cont_1= ((Eteste[i][0]) .<= qestimados[] [0]);
Econt_1 = Econt_1 + cont_1;

```

```

cont_2= ((Eteste[i][1]) .<= qestimados[][1]);
Econt_2 = Econt_2 + cont_2;

cont_3= ((Eteste[i][2]) .<= qestimados[][2]);
Econt_3 = Econt_3 + cont_3;

} // Fim do Segundo laco de Monte Carlo

//println(Eteste);

resultado_poder = zeros(columns(niveis), 3);
resultado_poder = ((ones(3,3) - ((Econt_1 ~ Econt_2 ~ Econt_3)./NREP)) .*100);

fprintf(arq, "-----");
fprintf(arq, "Poder dos testes");
fprintf(arq, "%8.2f", "%c", {"1%", "5%", "10%"} , "%r",
{"Escore", "RV", "Wald"}, resultado_poder', "\n");

} // Fim do laco para diferentes tamanhos amostrais

fprintf(arq, "\n");
fprintf(arq, "TEMPO DE EXECUCAO: ", timespan(tempoexe) );

} // fim de main

```

A.3 Biblioteca de Funções

```

/*****
* PROGRAMA: funcoes_logit.ox
*
* USO: Contem as funcoes de log-verossimilhanças restrita e irrestrita,
*      bem como funcoes que calculam a inversa da matriz de informacao
*      de Fisher e a funcao que gera  $y \sim \text{beta}(\mu, \phi)$ .
*      Estas funcoes sao utilizadas quando o modelo utiliza ligacao
*      logistica
*
* AUTOR: Leonardo Bomfim de Lima
* VERSAO: 2.01
*****/

#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>

/* global variables */
static decl s_mY;
static decl s_mX;
static decl s_mXr;

```

```

/* Funcao de verossimilhanca irrestrita */

logit_floglik(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl k = rows(vP) - 1;
    decl eta = s_mX*vP[0:(k-1)];
    decl mu = exp(eta) ./ (1.0+exp(eta));
    decl phi = vP[k];
    decl ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) );
    decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0-mu)*phi, 0);
    decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0+exp(eta)) .^2 );

    adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi)
        - loggamma((1-mu)*phi) + (mu*phi-1) .* log(s_mY)
        + ( (1-mu)*phi-1 ) .* log(1-s_mY) ));

    // Gradiente analitico
    if(avScore)
    {
        (avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mX'*T*(ynew-munew);
        (avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
            polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +
            mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1.0-s_mY) ));
    }

    /* Testa se algum elemento de adFunc[0] eh NaN
       ou se adFunc[0] eh infinito */
    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;

    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

/* Funcao de verossimilhanca restrita */

logit_floglikr(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl k = rows(vP) - 1; //numero de betas, sem phi
    decl eta = s_mXr*vP[0:(k-1)]; // X*beta
    decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
    decl phi = vP[k];
    decl ynew = log( s_mY ./ (1.0 - s_mY) );
    decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0 - mu)*phi, 0);
    decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 );
    adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi) - loggamma((1.0 - mu)*phi)
        + (mu*phi - 1.0) .* log(s_mY) + ( (1.0 - mu)*phi - 1.0 ) .* log(1.0 - s_mY) ));
    if(avScore)
    {
        (avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mXr'*T*(ynew-munew);
        (avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
            polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +

```

```

        mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1.0-s_mY) )); }
if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; // 1 indica sucesso
}

/* Inversa de Fisher irrestrita */

logit_InversaFisherIrrest(const vp, const p, const adFunc){

decl etachapeu = s_mX * vp[0:(p-1)];
decl muchapeu = exp(etachapeu) ./ (1 + exp(etachapeu));
decl phichapeu = vp[p];
decl T = diag( exp(etachapeu) ./ (1.0+exp(etachapeu)) .^2 );// Derivada de mu_t com relacao a eta_t
decl psi1 = polygamma(muchapeu*phichapeu, 1);           // Componentes da matriz W
decl psi2 = polygamma((1.0-muchapeu)*phichapeu, 1);
decl W = diag(phichapeu*(psi1+psi2)) * T .^2;          // Matriz W
decl D = diag(psi1.*(muchapeu.^2)+psi2.*(1.0-muchapeu).^2-polygamma(phichapeu,1)); // Componentes da matriz diagonal d_t
decl vc = phichapeu*(psi1.*muchapeu-psi2.*(1-muchapeu)); // C_t
decl tempinv = invtsym(s_mX'*W*s_mX); // Inversa de X' W X
decl g = trace(D)-(1.0/phichapeu)*vc'*T'*s_mX*tempinv*s_mX'*T*vc; // Gamma = tr(D) - phi^-1*c'T'X(X'WX)^-1 X'Tc
decl K1 = tempinv*(g*unit(p)+(1/phichapeu)*s_mX'*T*vc*vc'*T'*s_mX*tempinv); // K_beta,beta
decl K2 = -tempinv*s_mX'*T*vc;
decl fisherinv = (1/(phichapeu*g))*((K1~K2)|(-vc'*T'*s_mX*tempinv~phichapeu)); // K^-1 inversa da matriz da
//matriz de informacao de Fisher

adFunc[0] = fisherinv;
return 1;
}

/* Inversa de Fisher restrita e funcao escore*/

logit_InversaFisherRest(const vp0, const theta, const pr, const p, const ynew, const adFunc1, const adFunc2){

decl etatil = s_mX * (vp0[0:pr-1] | theta[pr:(p - 1)]);
decl mutil = exp(etatil) ./ (1+exp(etatil));
decl phitil = vp0[pr];
decl psitil1 = polygamma(mutil*phitil, 1);
decl psitil2 = polygamma((1.0-mutil)*phitil, 1);
decl Ttil = diag( exp(etatil) ./ (1.0+exp(etatil)) .^2 );
decl Wtil = diag(phitil*(psitil1+psitil2)) * Ttil .^2;
decl vctil = phitil*(psitil1.*mutil-psitil2.*(1-mutil));
decl Dtil = diag(psitil1.*(mutil.^2)+psitil2.*(1.0-mutil).^2-polygamma(phitil,1));
decl tempinvtil = invtsym(s_mX'*Wtil*s_mX);
decl gtil = trace(Dtil)-(1.0/phitil)*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
decl K1til = tempinvtil*(gtil*unit(p)+(1/phitil)*s_mX'*Ttil*vctil*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil);
decl K2til = -tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
decl fisherinvtil = (1/(phitil*gtil))*((K1til~K2til)|(-vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil~phitil));

decl mustartil = polygamma(mutil*phitil, 0) - polygamma((1.0-mutil)*phitil, 0);
decl escoretil = phitil*(s_mX[pr:])*Ttil*(ynew -mustartil);

```

```

adFunc1[0] = fisherinvtil;
adFunc2[0] = escorettil;
return 1;
}

/* Gerando os Y's */

geraY(const mu, const phi, const n, const adFunc){
decl j;
decl vetorY = zeros(n, 1);

for(j = 0; j < n; j++)
{
vetorY[j] = ranbeta(1, 1, mu[j]*phi, (1-mu[j])*phi);
}

adFunc[0] = vetorY;
return 1;
}

/*****
* PROGRAMA: funcoes_links.ox
*
* USO: Contem as funcoes de log-verossimilhanças restrita e irrestrita,
*      bem como funcoes que calculam a inversa da matriz de informacao
*      de Fisher para a funcao de ligacao "link"
*
* AUTOR: Leonardo Bomfim de Lima
* VERSAO: 2.01
*****/

/* Funcao de verossimilhança irrestrita */

floglik(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
decl mu, T;
decl k = rows(vP) - 1;
decl eta = s_mX*vP[0:(k-1)];
decl phi = vP[k];
decl ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) );

if(link == "cloglog"){
mu = 1 - exp(-exp(eta));
T = diag( -(1-mu).*log(1-mu) );
}
if(link == "probit"){
mu = probn(eta);
}
}

```

```

T = diag(densn(eta));
}
if(link == "cauchy"){
mu = (atan(eta)./M_PI) + 0.5;
T = diag( (1/M_PI).*((cos(M_PI.*(mu - 0.5))).^2) );
}

if(link == "loglog"){
mu = exp(-exp(-eta));
T = diag( -mu.*log(mu) );
}

decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0-mu)*phi, 0);
adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi)
    - loggamma((1-mu)*phi) + (mu*phi-1) .* log(s_mY)
    + ( (1-mu)*phi-1 ) .* log(1-s_mY) ));

// Gradiente analitico
if(avScore)
{
    (avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mX'*T*(ynew-munew);
    (avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
        polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +
        mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1-s_mY) ));
}

/* Testa se algum elemento de adFunc[0] eh NaN
ou se adFunc[0] eh infinito */
if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;

else
return 1; // 1 indica sucesso
}

/* Funcao de verossimilhanca restrita */

floglikr(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{

decl k = rows(vP) - 1; //numero de betas, sem phi
decl eta = s_mXr*vP[0:(k-1)]; // X*beta
decl mu, T;

if(link == "cloglog"){
mu = 1 - exp(-exp(eta));
T = diag( -(1-mu).*log(1-mu) );
}

if(link == "probit"){
mu = probn(eta);
T = diag(densn(eta));
}

if(link == "cauchy"){

```

```

mu = (atan(eta)./M_PI) + 0.5;
T = diag( (1/M_PI).*((cos(M_PI.*(mu - 0.5))).^2) );
}
if(link == "loglog"){
mu = exp(-exp(-eta));
T = diag( -mu.*log(mu) );
}

decl phi = vP[k];
decl ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) );
decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0 - mu)*phi, 0);

adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi) - loggamma((1.0 - mu)*phi)
+ (mu*phi - 1.0) .* log(s_mY) + ( (1.0 - mu)*phi - 1.0 ) .* log(1.0 - s_mY) ));
if(avScore)
{
(avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mXr'*T*(ynew-munew);
(avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +
mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1.0-s_mY) ));
}
if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; // 1 indica sucesso
}

/* Inversa de Fisher irrestrita */
InversaFisherIrrest(const vp, const p, const adFunc){
decl etachapeu = s_mX * vp[0:(p-1)]; // X*beta
decl muchapeu, T;

if(link == "cloglog"){
muchapeu = 1 - exp(-exp(etachapeu));
T = diag( -(1-muchapeu).*log(1-muchapeu) );
}
if(link == "probit"){
muchapeu = probn(etachapeu);
T = diag( densn(etachapeu) );
}
if(link == "cauchy"){
muchapeu = (atan(etachapeu)./M_PI) + 0.5;
T = diag( (1/M_PI).*((cos(M_PI.*(muchapeu - 0.5))).^2) );
}
if(link == "loglog"){
muchapeu = exp(-exp(-etachapeu));
T = diag( -muchapeu.*log(muchapeu) );
}

decl phichapeu = vp[p];

decl psi1 = polygamma(muchapeu*phichapeu, 1); // Componentes da matriz W

```

```

decl psi2 = polygamma((1.0-muchapeu)*phichapeu, 1);
decl W = diag(phichapeu*(psi1+psi2)) * T.^2; // Matriz W
decl D = diag(psi1.*(muchapeu.^2)+psi2.*(1.0-muchapeu).^2-polygamma(phichapeu,1)); // Componentes da matriz diagonal d_t
decl vc = phichapeu*(psi1.*muchapeu-psi2.*(1-muchapeu)); // C_t
decl tempinv = invtsym(s_mX'*W*s_mX); // Inversa de X' W X
decl g = trace(D)-(1.0/phichapeu)*vc'*T'*s_mX*tempinv*s_mX'*T*vc; // Gamma = tr(D) - phi^-1*c'T'X(X' WX)^-1 X'Tc
decl K1 = tempinv*(g*unit(p)+(1/phichapeu)*s_mX'*T*vc*vc'*T'*s_mX*tempinv); // K_beta,beta
decl K2 = -tempinv*s_mX'*T*vc;

decl fisherinv = (1/(phichapeu*g))*((K1~K2)|(-vc'*T'*s_mX*tempinv~phichapeu)); // K^-1 inversa da matriz
// de informacao de Fisher

adFunc[0] = fisherinv;
return 1;
}

/* Inversa de Fisher restrita e funcao escore*/
InversaFisherRest(const vp0, const theta, const pr, const p, const ynew, const adFunc1, const adFunc2){

decl etatil = s_mX * (vp0[0:pr-1] | theta[pr:(p - 1)]); // X*beta sob H0
decl mutil, Ttil;

if(link == "cloglog"){
mutil = 1 - exp(-exp(etatil));
Ttil = diag( -(1-mutil).*log(1-mutil) );
}
if(link == "probit"){
mutil = probn(etatil);
Ttil = diag( densn(etatil) );
}
if(link == "cauchy"){
mutil = (atan(etatil)./M_PI) + 0.5;
Ttil = diag( (1/M_PI).*((cos(M_PI.*(mutil - 0.5))).^2) );
}
if(link == "loglog"){
mutil = exp(-exp(-etatil));
Ttil = diag( -mutil.*log(mutil) );
}

decl phitil = vp0[pr];
decl psitil1 = polygamma(mutil*phitil, 1);
decl psitil2 = polygamma((1.0-mutil)*phitil, 1);
decl Wtil = diag(phitil*(psitil1+psitil2)) * Ttil.^2;
decl Dtil = diag(psitil1.*(mutil.^2)+psitil2.*(1.0-mutil).^2-polygamma(phitil,1));
decl vctil = phitil*(psitil1.*mutil-psitil2.*(1-mutil));
decl tempinvtil = invtsym(s_mX'*Wtil*s_mX);
decl gtil = trace(Dtil)-(1.0/phitil)*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
decl K1til = tempinvtil*(gtil*unit(p)+(1/phitil)*s_mX'*Ttil*vctil*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil);
decl K2til = -tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
decl fisherinvtil = (1/(phitil*gtil))*((K1til~K2til)|(-vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil~phitil));
decl mustartil = polygamma(mutil*phitil, 0) - polygamma((1.0-mutil)*phitil, 0);

```

```
decl escoret1l = phitil*(s_mX[] [pr:])*Ttil*(ynew -mustartil);

adFunc1[0] = fisherinvtil;
adFunc2[0] = escoret1l;
return 1;
}
```

APÊNDICE B

Programa Utilizado na Aplicação

Neste apêndice apresentamos o programa utilizado na implementação do teste aos dados de gasolina de Prater apresentado no Capítulo 6.

```

/*****
 * PROGRAMA: betareset_prater.ox
 * USO: Aplica o teste betareset aos dados de gasolina de Prater.
 *      O teste eh aplicado para \alpha = 0.01, 0.05 e 0.10.
 *
 * AUTOR: Leonardo Bomfim de Lima
 * VERSAO: 1.01
 *****/

#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>

const decl type = "fitted"; // Tipo da(s) nova(s) variavel(eis) adicionada(s)
const decl power = <4>;     // Potencia da(s) nova(s) variavel(eis) adicionada(s)

/* global variables */
static decl s_mY;
static decl s_mX;
static decl s_mXr;

/* Funcao de verossimilhanca irrestrita */
floglik(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl k = rows(vP) - 1;

```

```

decl eta = s_mX*vP[0:(k-1)];
decl mu = exp(eta) ./ (1.0+exp(eta));
decl phi = vP[k];
decl ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) );
decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0-mu)*phi, 0);
decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0+exp(eta)) .^2 );

adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi)
    - loggamma((1-mu)*phi) + (mu*phi-1) .* log(s_mY)
    + ( (1-mu)*phi-1 ) .* log(1-s_mY) ));

// Gradiente analitico
if(avScore)
{
    (avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mX'*T*(ynew-munew);
    (avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
        polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +
        mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1.0-s_mY) ));
}

/* Testa se algum elemento de adFunc[0] eh NaN
ou se adFunc[0] eh infinito */
if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;

else
    return 1; // 1 indica sucesso
}

/* Funcao de verossimilhanca restrita */

floglikr(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl k = rows(vP) - 1; //numero de betas, sem phi
    decl eta = s_mXr*vP[0:(k-1)]; // X*beta
    decl mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
    decl phi = vP[k];
    decl ynew = log( s_mY ./ (1.0 - s_mY) );
    decl munew = polygamma(mu*phi, 0) - polygamma((1.0 - mu)*phi, 0);
    decl T = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 );
    adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mu*phi) - loggamma((1.0 - mu)*phi)
    + (mu*phi - 1.0) .* log(s_mY) + ( (1.0 - mu)*phi - 1.0 ) .* log(1.0 - s_mY) ));
    if(avScore)
    {
        (avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mXr'*T*(ynew-munew);
        (avScore[0])[k] = double(sumc( polygamma(phi, 0) - mu .*
            polygamma(mu*phi, 0) - (1.0-mu) .* polygamma( (1.0-mu)*phi, 0) +
            mu .* log(s_mY) + (1.0-mu) .* log(1.0-s_mY) ));
    }
    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
    return 0;
    else
    return 1; // 1 indica sucesso
}

```

```

/* Inicio do Programa */
main()
{

decl tempoeixe, m, k, p, pr, beta, phi, theta, eta, mu, niveis;
decl gerY, quantis, i, ynew, betaols, yols, varols, phiolsr, phiols;
decl vp0, result, dfunc1, resultr, betaolsr, yolsr, varolsr, mutilr, mutili, vp1, dfunc2;
decl fisherinv, fisherinvtil, etatil, mutil, Eteste, escoretil, cont, Econt, resultado_tam, resultado_poder;
decl s_mZ, arq, n, quantil90, quantil95, quantil99, qestimados;
decl cont_1, Econt_1, cont_2, Econt_2, cont_3, Econt_3, gY, j, nvar;
decl data, etachapeu, muchapeu, phichapeu, T, psi1, psi2, W, D, vc, tempinv, g;
decl K1, K2, phitil, psitil1, psitil2, Ttil, Wtil, vctil, Dtil, tempinvtil, gtil;
decl K1til, K2til, mustartil, vcalc;

// ler os dados
data = loadmat("pratergrouped.mat");
k = columns(data);
s_mXr = 1~data[] [4:(k-2)];
s_mY = data[] [k-1]/100;

nvar = 2*columns(power);

// Niveis de significancia dos testes
niveis = <0.01; 0.05; 0.10>;

// Impressao no arquivo de texto
println("\n");
println("***** Teste de especificacao em modelos de regressao beta ***** \n");
println("Tipo da Variavel Adicionada: ", type);
println("Potencia do(s) Novo(s) Regressor(es): ", "%0.1f ", power);

// Numero de variaveis independentes no modelo c/ intercepto
pr = columns(s_mXr);
n = rows(data);

if(max(s_mY) >= 1.0 || min(s_mY) <= 0.0)
{
println("\n\nERRO: DADOS FORA DO INTERVALO (0,1)!\n\n");
exit(2);
}

//***** Maxima verossimilhanca restrita *****
// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

ynew = log( s_mY ./ (1.0-s_mY) ); // y* = g(y)

if(pr > 1){ols2c(ynew, s_mXr, &betaolsr);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(pr==1){betaolsr = meanc(ynew);} // quadrados de (X'X)^-1 * X'* ynew

// Passos para calcular o valor inicial de phi

```

```

yolsr = s_mXr*betaolsr;          //  $X(X'X)^{-1}X'*g(y)$ 
mutilr = exp(yolsr) ./ (1 + exp(yolsr)); //  $g^{-1}(X(X'X)^{-1}X'*y_{new})$ 
varolsr = sumsqrc(ynew-yolsr)/(n-pr); //  $(g(y)-g(y)_{hat})^2/(n-k)$ 

// valores iniciais
vp0 = betaolsr|(meanc( 1 ./ (varolsr*(mutilr .* (1.0-mutilr)))) - 1.0);

// Estimacao por maxima verossimilhanca restrita
resultr = MaxBFGS(floglikr, &vp0, &dfunc1, 0, FALSE);

// Fim *****

// Adicao da Nova Variavel
if( type == "fitted"){ // Nova variavel Fitted
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
mutil = exp(etatil) ./ (1 + exp(etatil));
s_mZ = mutil.^power;
}

if( type == "preditor"){ // Nova variavel preditor
etatil = s_mXr * vp0[0:(pr-1)];
s_mZ = etatil.^power;
}

s_mX = s_mXr ~ s_mZ;

// Numero de parametros que estao sendo testados
// sempre os ultimos m parametros serao testados
m = columns(s_mZ);
p = columns(s_mX);

//***** Maxima verossimilhanca irrestrita *****
// Calculando os valores iniciais dos parametros sugeridos por Ferrari e Cribari-Neto (2004)

if(p > 1){ols2c(ynew, s_mX, &betaols);} // Retorna em betaols a est. de minimos
else if(p==1){betaols = meanc(ynew);} // quadrados de  $(X'X)^{-1} * X' * y_{new}$ 

// Passos para calcular o valor inicial de phi
yols = s_mX*betaols;          //  $X(X'X)^{-1}X'*g(y)$ 
mutili = exp(yols) ./ (1 + exp(yols)); //  $g^{-1}(X(X'X)^{-1}X'*y_{new})$ 
varols = sumsqrc(ynew-yols)/(n-p); //  $(g(y)-g(y)_{hat})^2/(n-k)$ 

// valores iniciais
vp1 = betaols|(meanc( 1 ./ (varols*(mutili .* (1.0-mutili)))) - 1.0);

// estimacao por maxima verossimilhanca
result = MaxBFGS(floglik, &vp1, &dfunc2, 0, FALSE);
// Fim *****

```

```

// Calculo da matriz de informacao de Fisher sob Maxima verossimilhanca IRRESTRITA

etachapeu = s_mX * vp1[0:(p-1)];
muchapeu = exp(etachapeu) ./ (1 + exp(etachapeu));
phichapeu = vp1[p];
T = diag( exp(etachapeu) ./ (1.0+exp(etachapeu)) .^2 );// Derivada de mu_t com relacao a eta_t
psi1 = polygamma(muchapeu*phichapeu, 1);          // Componentes da matriz W
psi2 = polygamma((1.0-muchapeu)*phichapeu, 1);
W = diag(phichapeu*(psi1+psi2)) * T .^2;          // Matriz W
D = diag(psi1.*(muchapeu.^2)+psi2.*(1.0-muchapeu).^2-polygamma(phichapeu,1)); // Componentes da matriz diagonal d_t
vc = phichapeu*(psi1.*muchapeu-psi2.*(1-muchapeu)); // C_t
tempinv = invsym(s_mX'*W*s_mX); // Inversa de X' W X
g = trace(D)-(1.0/phichapeu)*vc'*T'*s_mX*tempinv*s_mX'*T*vc; // Gamma = tr(D) - phi^-1*c'T'X(X' WX)^-1 X'Tc
K1 = tempinv*(g*unit(p)+(1/phichapeu)*s_mX'*T*vc*vc'*T'*s_mX*tempinv); // K_beta,beta
K2 = -tempinv*s_mX'*T*vc;
fisherinv = (1/(phichapeu*g))*((K1~K2)|(-vc'*T'*s_mX*tempinv~phichapeu)); // K^-1 inversa da inform de Fisher

// Calculo da matriz de informacao de Fisher e funcao escore sob Maxima verossimilhanca RESTRITA
etatil = s_mX * (vp0[0:pr-1] | zeros(m,1));
mutil = exp(etatil) ./ (1+exp(etatil));
phitil = vp0[pr];
psitil1 = polygamma(mutil*phitil, 1);
psitil2 = polygamma((1.0-mutil)*phitil, 1);
Ttil = diag( exp(etatil) ./ (1.0+exp(etatil)) .^2 );
Wtil = diag(phitil*(psitil1+psitil2)) * Ttil .^2;
vctil = phitil*(psitil1.*mutil-psitil2.*(1-mutil));
Dtil = diag(psitil1.*(mutil.^2)+psitil2.*(1.0-mutil).^2-polygamma(phitil,1));
tempinvtil = invsym(s_mX'*Wtil*s_mX);
gttil = trace(Dtil)-(1.0/phitil)*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
K1til = tempinvtil*(gttil*unit(p)+(1/phitil)*s_mX'*Ttil*vctil*vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil);
K2til = -tempinvtil*s_mX'*Ttil*vctil;
fisherinvtil = (1/(phitil*gttil))*((K1til~K2til)|(-vctil'*Ttil'*s_mX*tempinvtil~phitil));

mustartil = polygamma(mutil*phitil, 0) - polygamma((1.0-mutil)*phitil, 0);
escoretil = phitil*(s_mX[pr:])*Ttil*(ynew -mustartil);

// Quantis da distribuicao Qui-Quadrado (m graus de liberdade)
quantis = (quanchi(1-niveis, m))';

// Estatistica do Teste
// escore
Eteste = (escoretil)'*(fisherinvtil[pr:p-1][pr:p-1])*escoretil;

println("Estatistica de teste: ", Eteste);
println("Quantis da distribuicao qui-quadrado (1, 5 e 10 por cento): ", quantis, "\n");

} // fim de main

```

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, New York.
- [2] Buse, A. (1982). The likelihood ratio, Wald, and Lagrange multiplier tests: an expository note. *The American Statistician*, 36, 153-157.
- [3] Cox, D. & Hinkley (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London.
- [4] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (1999). R: yet another econometric programming environment. *Journal of Applied Econometrics*, 14, 319-329.
- [5] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (2003). Econometric and statistical computing using Ox. *Computational Economics*, 21, 277-295.
- [6] Dalgaard, P. (2002). *Introductory Statistics with R*. Springer, New York.
- [7] Doornik, J. A. (2001). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, 4th ed. Timberlake Consultants Press, London e <http://www.doornik.com>, Oxford.
- [8] Ferrari, S. L. P. & Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31, 799-815.
- [9] Fisher, R. A. (1925). Theory of statistical estimation. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 22, 700-725.
- [10] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.

- [11] Kieschnick, R. & McCullough B. D. (2003). Regression analysis of variates observed on $(0, 1)$: percentages, proportions and fractions. *Statistical Modelling*, 3, 193-213.
- [12] Knuth, D. (1986). *The T_EXbook*. Adisson-Wesley, New York.
- [13] Lehmann, E. L. & Casella, E. (1998) *Theory of Point Estimation*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- [14] Marsaglia, G. (1997). A random number generator for C. Postado no grupo de discussões `sci.stat.math`.
- [15] McCullagh, P. & Nelder J. A. (1989). *Generalized Linear Models*. Chapman & Hall, 2nd ed. New York.
- [16] Prater, N. H. (1956). Estimate gasoline yields from crude. *Petroleum Refiner*, 35, 236-238.
- [17] R Development Core Team (2005). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [18] Ramsey, J. B. (1969). Tests for specification errors in classical linear least squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 31, 350-371.
- [19] Ramsey, J. B. & Gilbert, R. (1972). A Monte Carlo study of some small sample properties of tests for specification error. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 180-186.
- [20] Ramsey, J. B. & Schmidt, P. (1976). Some further results on the use of OLS and BLUS residuals in specification error tests. *Journal of the American Statistical Association*, 71, 389-390.
- [21] Rao, C. R. (1948). Large Sample Tests of Statistical Hypotheses Concerning Several Parameters with Applications to Problems of Estimation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44, 50-57.
- [22] Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, 2nd ed. Wiley, New York.
- [23] Sen, P. K. & Singer, J. M. (1993). *Large Sample Methods in Statistics: An Introduction With Applications*. Chapman and Hall, New York.

- [24] Thursby, J. G. & Schmidt, P. (1977). Some properties of tests for specification error in a linear regression model. *Journal of the American Statistical Association*, 72, 635-641.
- [25] Vasconcellos, K. L. P. & Cribari-Neto, F. (2005). Improved maximum likelihood estimation in a new class of beta regression models. *Brazilian Journal of probability and Statistics*, 19, 13-31.
- [26] Venables, W. N. & Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*, 4th ed. Springer, New York.