UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica

ALAIDE CECÍLIA DE LIMA

O uso de história em quadrinhos para o estudo de sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico

RECIFE-PE

2024

ALAIDE CECÍLIA DE LIMA

O uso de história em quadrinhos para o estudo de sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Didática da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida.

RECIFE

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Lima, Alaide Cecília de.
O uso de história em quadrinhos para o estudo de sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico / Alaide Cecília de Lima. - Recife, 2024.
99 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2024.
Orientação: Jadilson Ramos de Almeida.
Inclui referências.

1. Pensamento algébrico; 2. História em quadrinho; 3. Sequência recursiva. I. Almeida, Jadilson Ramos de. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

ALAIDE CECÍLIA DE LIMA

O USO DE HISTÓRIA EM QUADRINHO PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 01/08/2024

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Orientador e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____
Profa. Dra. Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Dra. Claudianny Amorim Noronha (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

____
Prof. Dra. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

“We are diamonds taking shape” — Coldplay

AGRADECIMENTOS

O início de um grande sonho adolescente. Sim, desde adolescente no ensino médio lembro-me de quando era questionada a respeito de qual graduação eu queria fazer e, prontamente respondia: quero fazer mestrado! — Ora, que menina apressada — alguns resmungavam. O motivo? Não sei, só sei que foi assim, como dizia o personagem Chicó, no filme o Auto da Compadecida.

O desejo desse sonho, me levou a concluir a graduação e imediatamente ingressar na pós-graduação. Porém esse sonho veio acrescido de grandes desafios: pessoais, profissionais, sociais, políticos e entre outros.

Foram esses desafios que me ergueram ao longo desses dois anos e meio. Ao pensar que um dia, o meu eu do passado, desejou tanto estar ali. Aos que estiveram mais próximos a mim, sabem que não foram momentos fáceis, adversidades, principalmente pessoais, me desestabilizaram, mas os pensamentos positivos e determinação de persistência me levaram até o hoje, ou seja, até a realização desse sonho adolescente, que muitas pessoas ao meu redor abraçaram e sonharam junto a mim.

Em especial, quero agradecer imensamente aos meus pais, Mônica e Guilherme, pelo apoio em todos os momentos da minha vida, por não medirem esforços para que eu chegasse até aqui. Gratidão eterna.

Ao Caio, meu melhor amigo, namorado, companheiro de vida, obrigada, por me incentivar e acolher sempre que pensei em pular do barco, além de toda paciência e entendimento aos momentos em que precisei me ausentar.

Aos meus amigos de turma mais próximos, quero dizer: obrigada. Obrigada, por puxarem a minha orelha quando foi preciso, por vocês serem calmaria quando tudo parecia caminhar para turbulências, além de toda a ajuda nas etapas das pesquisas, leituras acadêmicas e diversos outros momentos ao longo do mestrado.

Ao meu orientador, eu não tenho palavras para expressar a tamanha gratidão por você, Jadilson. Foi mais que só um orientador, foi um parceiro e amigo que levarei para além da academia. Obrigada por se fazer presente durante toda essa jornada, pois foi muito importante poder contar com você e saber que vou poder continuar contando. Você inspira não só na forma de ensinar e aprender, mas como a pessoa que és, tens um coração gigante, igual coração de mãe, sempre cabe mais um, em especial, sempre cabe mais um orientando (risos).

Eu não poderia deixar de agradecer ao grupo de pesquisa, AL-JABR (Grupo de Pesquisa em História Epistemologia e Didática da Álgebra), ou seja, a cada um dos participantes do grupo, o meu muito obrigada. Vocês fazem com que o nosso grupo seja tão especial, por nos ajudarmos tão bem, um ao outro e, por transformarem cada reunião em momentos leves e descontraídos, sem esquecer do nosso momento para um bom lanchinho em cada encontro, é muito gratificante estar com vocês, eu amo.

A banca, agradeço as considerações, por atribuírem tempo e dedicação a esta pesquisa. Fico feliz em ter uma banca só de mulheres, ainda mais, mulheres essas que eu tanto admiro, cada uma com um referencial que me chama a atenção, vocês são mulheres fortes demais que vivem da ciência e pesquisa, meio esse que por muitas vezes, nós mulheres, não somos valorizadas.

A profª Elisângela Bastos, gratidão eterna, por ser uma das minhas maiores incentivadoras e uma grande inspiração para mim, sempre lembrarei dos nossos momentos de estudos e conversas descontraídas durante o nosso dia no Lacape.

Aos sujeitos dessa pesquisa, sem eles certamente não seria possível desenvolver os nossos objetivos.

A Universidade Federal de Pernambuco e ao Programa de pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, por todo acolhimento e investimento em minha pesquisa.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar a contribuição de uma História em Quadrinhos como recurso didático para o estudo de sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico, fundamentando-se na Teoria da Objetivação. Assim, nesta pesquisa envolvemos o pensamento algébrico para o estudo de generalizações de padrões com sequências recursivas com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de ensino, localizada na Região Metropolitana do Recife. A atividade proposta foi realizada por meio de tarefas expostas em uma História em Quadrinhos, dividida em 3 etapas, cada uma das etapas com uma sequência recursiva e níveis graduais de complexidade. A teoria na qual nos fundamentamos (a Teoria da Objetivação), utiliza-se de três vetores que caracterizam o pensamento algébrico sendo eles, a indeterminação, denotação e analiticidade, sendo o último vetor, o analítico, o que distingue o pensamento algébrico do pensamento aritmético. Durante a atividade, buscamos focar a nossa análise nas estratégias de resolução das tarefas por parte dos alunos, visto que, é por meio da atividade que o saber ele é materializado, transformado e ampliado, assim, acontece as reflexões por parte dos seres humanos mediadas pelos sentidos. Para a teoria, esses sentidos são denominados de meios semióticos de objetivação, pelo fato de a Teoria da Objetivação ser de natureza multimodal, então, foram necessários nos atentarmos aos gestos, desenhos, escritas, movimentos, entre outros meios. Para isso, precisou-se que a atividade fosse capturada por meio de vídeo-gravação. A atividade foi realizada com os 3 grupos (cada um com 3 alunos) que se dispuseram a participar da pesquisa. Embora a turma do 8º ano contasse com 49 alunos, apenas 9 participaram da pesquisa, e apenas 1 grupo, composto por 3 alunas, foi analisado. Infelizmente, os outros dois grupos não atingiram os objetivos necessários para a análise, mesmo com o acompanhamento próximo da professora pesquisadora. Fatores internos e externos ao ambiente de sala de aula que dificultaram o desenvolvimento da pesquisa nesses grupos. Contudo, entendemos que colaboramos por meio da pesquisa, na reflexão do uso dos padrões de generalização para além da sala de aula.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. História em Quadrinho. Sequência Recursiva. Generalização. Teoria da Objetivação.

ABSTRACT

This study aims to analyze the contribution of a comic book as a didactic resource for studying recursive sequences and developing algebraic thinking, based on the Theory of Objectification. The research involved algebraic thinking for studying pattern generalizations with recursive sequences among 8th-grade students from a public school in the Metropolitan Region of Recife. The proposed activity was conducted through tasks presented in a comic book, divided into three stages, each with a recursive sequence and increasing complexity levels. The theoretical framework, the Theory of Objectification, employs three vectors characterizing algebraic thinking: indetermination, denotation, and analyticity, with the latter distinguishing algebraic from arithmetic thinking. During the activity, we focused our analysis on the students' task-solving strategies, as knowledge is materialized, transformed, and expanded through activity, leading to reflections by human beings mediated by the senses. In this theory, these senses are referred to as semiotic means of objectification, since the Theory of Objectification is multimodal in nature. Therefore, we had to pay attention to gestures, drawings, writings, movements, and other means. For this reason, the activity had to be recorded on video. The activity was conducted with three groups (each consisting of three students) who volunteered to participate in the research. Although the 8th-grade class had 49 students, only 9 participated in the study, and only one group, composed of three female students, was analyzed. Unfortunately, the other two groups did not achieve the necessary objectives for analysis, even with the close monitoring of the researcher-teacher. Internal and external factors in the classroom environment hindered the development of the research in these groups. However, we believe that our research contributed to the reflection on the use of generalization patterns beyond the classroom.

Keywords: Algebraic Thinking. Comic Book. Recursive Sequence. Generalization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

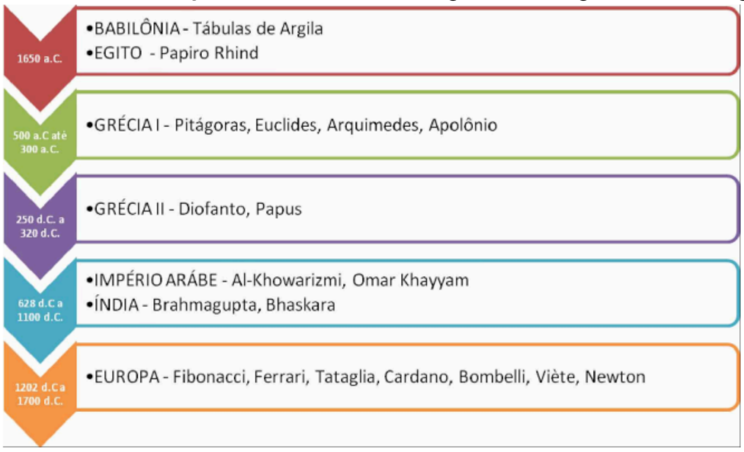
SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

“Os homens não fazem, senão, adaptar-se à natureza” (Leontiev, 1978, p. 265), é assim que tem sido desde o surgimento da humanidade, e não foi diferente com a criação da Álgebra, a qual não possui uma data exata de surgimento, mas de que surgiu, assim como as demais ciências, das necessidades em que os homens tiveram para solucionar problemas do seu cotidiano, problemas esses que o uso apenas da aritmética não era suficiente para encontrar a solução (Silva; Lima; Oliveira, 2021, p. 348).

Grandes civilizações contribuíram para a criação da álgebra (Santos, 2016, p. 20). Os primeiros relatos partem da civilização da babilônia, que demonstraram ter um conhecimento formalizado, fazendo o uso de equações lineares, quadráticas e cúbicas, que foi possível de ser verificado em seus registros (Silva; Lima; Oliveira, 2021, p. 350). Seguido dos egípcios, que desenvolveram os papiros, um dos documentos mais importantes para álgebra, por meio dele os egípcios possibilitaram aos cientistas compreenderem a matemática do Egito (Silva; Lima; Oliveira, 2020, p. 349). E, aos poucos, a álgebra foi se desenvolvendo e evoluindo em outras civilizações, conforme podemos observar na sistematização abaixo a sua ordem cronológica.

Figura 1 - Sistematização da ordem cronológica do surgimento da álgebra



Fonte: Alves (2016, p. 41)

Em constante desenvolvimento, ao longo do tempo, a álgebra ia atravessando muitas civilizações, fato esse que para muitos autores dos séculos XX e XXI, seria necessário uma nomeação e/ou referência ao título de pai da álgebra.

No círculos de estudiosos da área, haviam contradições, alguns acreditavam que seria o Diofanto de Alexandria (a. 200-284), matemático grego, uma vez que ele foi o primeiro a utilizar para representação de incógnitas por meio da letra "sigma" do alfabeto grego, além de contribuir para resolução de equações (Santos, 2016), porém, o autor Boyer (1974), acreditava que esta denominação deveria ser feita ao árabe Al - Khowarizmi, que realizou introduções de símbolos, operações básicas e entre outros fatores que nos levam às equações de hoje, compostas de igualdade, variáveis e as demais operações.

Como podemos observar nas citações passadas, tanto Diofanto como Al-Khowarizmi deram contribuições importantíssimas para a álgebra e seu desenvolvimento. E, desde então, os conceitos da álgebra vêm sendo utilizados em diversas áreas de conhecimento, sendo a matemática a área de conhecimento em que se encontra mais inserida a álgebra. Por um levantamento de pesquisa feito por Santos Junior (2013), com alguns autores, um dos campos da matemática que os alunos mais apresentam dificuldades, é o campo da álgebra.

Coelho e Aguiar (2018), expressaram-se afirmando que o ensino da Álgebra atualmente, tem se restringindo a questões técnicas e operacionais, deixando de lado o desenvolvimento dos conceitos algébricos e do pensar algebricamente, o que podemos associar a forma como os professores a tratam, ou seja, fazendo o uso de uma linguagem para resolver problemas e utilizando-se de processos mecânicos para resolução de equações.

O estudo da álgebra possui um formalismo mais rebuscado, para Gil (2008, p. 11), que apresenta uma reflexão de que esse formalismo acaba demandando do aluno um nível mais alto de abstração. Dessa forma, para que este estudo se concretize, é necessário que o professor esteja lado a lado com o aluno, trabalhando os conceitos e procedimentos algébricos.

Assim, busca-se evitar a dificuldade na aprendizagem, bem como uma aversão do aluno à álgebra, em especial a matéria de matemática, pelo motivo de não conseguir compreendê-la. Consequentemente, busca-se evitar que sejam realizados comentários como este, de um aluno da sétima série, informando que a Álgebra “é muito difícil e, apesar de muito instrutiva, noventa por cento das vezes é muito frustrante. Significa horas de aulas que nem chegamos perto de entender” (House, 1995, p.1).

Assim, deseja-se que a álgebra seja uma grande aliada para o aluno no momento em que ele for resolver/desenvolver problemas algébricos, independentemente do contexto, pois, os problemas algébricos não se restringem, apenas, a equações algébricas.

Alinhados a esses pensamentos, enfatizam-se situações que envolvem a generalização de padrões, destacando o desenvolvimento do pensamento algébrico como elemento central. Assim, é esperado que as questões técnicas e operacionais para resolução de exercícios do conteúdo de álgebra, sejam deixadas de lado, concentrando, exclusivamente, no trabalho com a álgebra para ajudar o aluno a desenvolver tanto o pensamento algébrico de forma lógica-abstrata, quanto a habilidade de generalizar padrões na resolução de problemas.

Ao falarmos em padrões, é importante frisar quando Devlin (2002) diz que, a matemática não se constitui apenas de equações e fórmulas, a matemática pode ser vista como uma ciência constituída por padrões. Os padrões podem ser vistos e associados a situações presentes:

> Na natureza, nas pinturas, na poesia, na arquitetura, na dança, no ritmo, nos crochês, nas rendas, nos ladrilhos dos pisos e das paredes, em tudo que nos rodeia, no nosso corpo, nos animais, nas plantas, há formas ou sequências cujos padrões possibilitam generalizações. Apreciá-los, reconhecê-los, identificá-los, criá-los, generalizá-los e algebrizar é fazer Matemática, é reconhecer o mundo em que vivemos (Gigante; Dos Santos, 2012, p. 45)

Dessa forma, queremos quebrar a definição de que para muitos a álgebra significa:

> Vagamente, um conjunto de letras, números e operações separados por um sinal de igual ou por outros, a fórmula resolvente do 2º grau, ou apenas resolver equações, sistemas de equações, descobrir o valor desconhecido, ou outro tipo de actividades onde se utilize incógnitas e letras (Vale et al., 2007).

Por esses e outros fundamentos, a álgebra é parte essencial no ensino da matemática e está preconizada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por meio da unidade temática intitulada Álgebra, com habilidades e competências específicas, desenvolvidas desde os anos iniciais ao ensino médio na educação básica de ensino. Nossa pesquisa, foi contemplada pela habilidade (EF08MA11), que se encontra na unidade temática da álgebra, referente a sequência recursiva para o trabalho com generalizações de padrões, em que envolvemos o pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação (TO).

A teoria escolhida tem muito a ver com o grupo de pesquisa que a pós-graduanda faz parte, o qual foi fundado pelo seu orientador. Tendo como objetivo pesquisar questões históricas, epistemológicas e didáticas envolvendo o ensino-aprendizagem da álgebra, por isso, o nome intitulado por Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra (AL-JABR). Além disso, com a intenção de contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, e, com a formação dos pesquisadores da área, o grupo dedica-se especificamente ao estudo voltado para a perspectiva da Teoria da Objetivação, a teoria que busca o desenvolvimento do saber e do ser (sujeito). Dessa forma, a pesquisadora buscou desenvolver sua pesquisa com objetivos sincronizados com a teoria estudada pelo grupo no qual está inserida.

Para atingir os objetivos da pesquisa, utilizou-se de História em Quadrinhos (HQ), como uma ferramenta de suporte didático metodológico para apresentação das sequências, de forma a instigar os pesquisados – alunos do 8º ano – a participarem da pesquisa, além da ludicidade, garantindo uma boa visualização das imagens e textos verbais e não verbais presentes na HQ, para o aluno/leitor.

Com relação à teoria em questão, a Teoria da Objetivação foi criada pelo Profº. Dr. Luis Radford, na década de 90, uma teoria de ensino-aprendizagem histórico-cultural, em que o autor, se apoia em três diferentes condições para categorizar o pensamento algébrico. (1) o vetor da indeterminação, (2) da denotação da indeterminação e (3) da analiticidade, esse último, considerado o vetor analítico, o principal elemento que distingue o pensamento algébrico do pensamento aritmético (Radford, 2018).

Assim, podendo definir o objetivo geral desta pesquisa de **identificar os elementos do pensamento algébrico que emergem em uma atividade de ensino-aprendizagem sobre sequências recursivas apresentada por uma História em Quadrinho**. E, para que este objetivo seja alcançado, precisaremos seguir com alguns objetivos específicos: **analisar e identificar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para resolver os problemas de sequências recursivas contidas na História em Quadrinhos; identificar na resolução dos alunos a presença dos três elementos categorizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade).**

Por fim, uma breve apresentação dos capítulos seguintes neste trabalho, visto que já foi apresentado a questão da pesquisa e dos objetivos, tanto geral como específicos, seguimos discutindo a álgebra de forma mais abrangente e detalhada, além da sua importância no ensino dos padrões, e sobre as sequências na qual iremos focar para esta pesquisa, as sequências recursivas, tudo presente no capítulo 2, divididos em subtópicos.

No capítulo 3, abordamos o pensamento algébrico na perspectiva da teoria da objetivação, apresentando os vetores que categorizam o pensamento algébrico. Já no capítulo 4, falamos sobre a origem das histórias em quadrinhos, desde sua principal origem, o marco inicial, até a sua chegada para o ensino aqui no Brasil.

Na metodologia, inserida no capítulo 5 deste trabalho, definimos como foi feita a coleta de dados, explicitando onde e com quais sujeitos, sendo realizada em uma escola da região metropolitana do Recife com uma turma do 8º ano, que possuía 49 alunos, porém apenas 9 participaram da pesquisa. Desta forma, dividimos os 9 em 3 grupos de 3, porém conseguimos os registros de apenas um dos grupos. Além disso, também detalhamos a respeito da HQ criada pela autora, a plataforma escolhida e os critérios para sua criação.

Já no capítulo 6 trouxemos a análise da pesquisa, das 3 tarefas disponibilizadas que foram realizadas pelo grupo analisado. Relatando analiticamente como foi observada a pesquisa por meio da vídeo-gravação e os meios semióticos que foram objetivados. Por fim, abordamos as considerações finais.

2. A ÁLGEBRA

Neste Capítulo, buscamos expandir a compreensão a respeito dos conceitos algébricos, o que nos leva a argumentar sobre o surgimento da álgebra e suas fundamentações. Além disso, ressalta que o seu surgimento ocorreu devido ao homem estar sempre em busca de adaptar-se ao meio.

> Pela sua atividade, os homens não fazem, senão, adaptar-se à natureza. Eles modificam-na em função do desenvolvimento das suas necessidades. Criam os objetos que devem satisfazer as suas necessidades e igualmente os meios de produção desses objetos, dos instrumentos às máquinas mais complexas (Leontiev, 1978, p. 265).

Pois, assim que os seres humanos deixaram de ser nômades e se fixaram em agrupamentos de pessoas, a necessidade de controle da produção agrícola e pecuária levou à criação dos registros numéricos (Coelho; Aguiar, 2018, p. 176). Os registros numéricos com o tempo passaram a não representar apenas os números em si, mas também o objeto a ser contado, como discute Coelho e Aguiar (2018), que muitas vezes o ato de contagem está atrelado ao processo mental de abstração.

Ao contrário de outras grandes áreas da matemática, a construção da Álgebra como área do conhecimento, ao longo do tempo, se deu por um processo de passagem do tratamento de questões concretas a questões abstratas. Portanto, a origem da álgebra vai se inspirar em um tempo que se situa na “formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas que já são usadas na Antiguidade – no Egito, na Babilônia, na China e na Índia” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p.5). Também como aponta Fiorentini et al., que a álgebra se desenvolveu em diversas civilizações e pôde receber contribuição de diversas culturas, nesse caso, pode ser possível falar de:

> uma “álgebra egípcia”, de uma “álgebra babilônica”, de uma “álgebra grega pré-diofantina”, de uma “álgebra diofantina”, de uma “álgebra chinesa”, de uma “álgebra hindu”, de uma “álgebra arábica”, de uma “álgebra da cultura europeia renascentista” etc (Fiorentini et al., 2016, p. 79)

Dividindo-se em duas fases, como cita Baumgart (1992), em que existe a Álgebra antiga e a Álgebra moderna, a antiga ou elementar, tratando-se de estudos referentes às equações e seus respectivos métodos de resolução, enquanto a moderna ou abstrata estuda as estruturas matemáticas, como, anéis, grupos e corpos.

Então, não se identifica um momento histórico específico do surgimento da Álgebra (2016, p.79), mesmo que Diofanto seja mais conhecido e considerado o pai da Álgebra, para alguns autores, Boyer (1974) diz que, essa denominação cabe a Al - Khowarizmi, pois, a obra dele está inteiramente expressa em palavras, já a de Diofanto utilizava o que ficou conhecido como uma segunda fase do desenvolvimento da Álgebra, a *álgebra sincopada*, que foi o “emprego de símbolos de modo que as abreviações expressassem quantidades e operações” (Santos, 2016, p.20).

O desenvolvimento da Álgebra ficou caracterizado por três fases evolutivas por Nesselmann (1842, p. 206), a segunda fase foi a expressa por Diofanto, como já citado anteriormente, enquanto a primeira fase e a terceira ficaram conhecidas, respectivamente, como a álgebra retórica, “em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos” e álgebra simbólica, “em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam” (Eves, 2002, p. 206), a princípio François Viète (1540-1603) fez a introdução desses novos símbolos, e matemáticos posteriores a ele deram continuidade a simbologia (Silva, 2021, p.24)

Até o século XV, os estudos na Europa Ocidental utilizavam a álgebra retórica e somente em meados do século XVII houve a imposição do uso da álgebra simbólica, de acordo com Eves (2002). Apesar de que não há, ainda hoje, uniformidade no uso de símbolos, por exemplo, "os americanos escrevem “3.1416” como aproximação de “π”, e muitos europeus escrevem “3,1416”. O símbolo “=” é usado às vezes para “aproxima-se de um limite” e às vezes para “é aproximadamente igual a” Baumgart (1992, p. 3)

Outro resgate importante que Fiorentini et al. (2016, p.81) nos traz, é sobre Diofanto ter sido o primeiro a utilizar símbolos literais para representar as variáveis, e o primeiro a utilizar uma linguagem mais resumida e direta para expressar o pensamento algébrico, que por sua vez, o pensamento algébrico inclui a capacidade de:

> lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de

> equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10).

A respeito da perspectiva entre a Álgebra e o pensamento algébrico, vamos abordar na próxima seção no segmento da Teoria da Objetivação (TO), evidenciando o ensino dos padrões e as generalizações algébricas.

2.1 Álgebra no ensino dos padrões

A TO visa defender que os cidadãos sejam críticos e atuantes na sociedade, ou seja, que a educação precisa ir além da dimensão do saber, além do conteúdo matemático, visto que, a TO concebe o ensino-aprendizagem como um único processo que envolve tanto o saber quanto o ser. Dessa forma, a aprendizagem não irá se explicar e nem se justificar apenas em termos de saberes, por isso o ser é considerado com a mesma importância, em que a transformação acontece tanto para os professores, quanto para os alunos (Silva, 2021).

Conforme defende Radford (2014), a atividade no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem devem possibilitar aos participantes "uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos e à criação de um espaço político e social dentro do qual os sujeitos possam desenvolver subjetividades reflexivas, solidárias e responsáveis" (Radford, 2014, p. 136, tradução nossa).

Para os alunos terem esses desenvolvimentos, de sujeitos reflexivos e éticos, e que consigam se posicionar de forma crítica nas práticas matemáticas, é necessário que o trabalho de forma mais aprofundada com a matemática seja desenvolvido desde os anos iniciais. Dessa forma, estimulando os alunos ao pensamento algébrico, com uma habitual exploração das generalizações dos padrões, sem que sejam restringidos a questões superficiais, técnicas e introdutórias.

Assim como é recomendado por Vale et al. (2007, p.5), "os alunos devem começar a aprendizagem da Álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões". Por meio dos padrões, vamos ganhando familiaridade e caminhando para a introdução da Álgebra, que "pode ser definida como um sistema matemático utilizado para generalizar algumas operações matemáticas, permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números" (Vale et al., 2007, p.6). Ou seja, a consequência que irá restar será do desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme exemplificado por Orton e Orton (1999), e para isso se faz "necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas" (Brasil, 2018, p. 270).

Os três níveis da educação básica, pelos quais a álgebra perpassa, faz com que seja visualizado o seu desenvolvimento. Nos anos iniciais o trabalho com a álgebra ainda acontece de uma forma mais superficial da "regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (Brasil, 2018, p.270), nessa fase, não é proposto o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam (Brasil, 2018, p. 270). Diferentemente do Ensino Fundamental dos anos finais, que como exposto pela BNCC, tem os estudos da álgebra retomados nesse nível de educação, além de um aprofundamento e ampliação do que foi visto durante os anos iniciais do ensino fundamental. Segundo a BNCC, nessa fase do ensino fundamental, especificamente nos anos finais,

> Os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (Brasil, 2018, p. 270-271).

Para que os alunos obtenham sucesso no estudo da álgebra, é preciso que haja melhoria na forma como a aritmética é introduzida nos anos iniciais do ensino fundamental, pois as limitações de seu ensino acarretam consequências e dificuldades para os alunos ao depararem-se com o trabalho algébrico. Porém, isso não acontece apenas por parte dos alunos; os professores também enfrentam desafios para aprender e ensinar álgebra. Segundo Vergel e Rojas (2013), essa dificuldade chega a um nível gradativo, principalmente nos dois últimos anos do ensino fundamental, em que o uso de símbolos literais ou letras, e o significado atribuído a essas letras em contextos matemáticos, tornam-se ainda mais evidentes.

Para Vale et al., "os alunos precisam de entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas” (2007, p. 193). A ideia de que a exploração por padrões ajuda os alunos a desenvolverem as suas capacidades de raciocínio algébrico, foi defendida por investigadores (Mason; Burton e Stacey 1992; Reys et al., 1995) e organizações (e.g. NCTM, 1991, 2000). Quando queremos que os alunos aprendam uma matemática mais significativa, promovemos um ambiente de ensino-aprendizagem que tem a ver com a realidade dele, os padrões tornam-se um grande aliado.

Segundo Vale et al. (2011, p. 9), “padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades”, e para Jungbluth, Silveira e Grando (2019, p. 98) essas regularidades em sequência, estabelecem um padrão, ou seja, o padrão é composto por regularidades.

O estudo de padrões apoia-se na aprendizagem dos alunos para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e previsões (Vale et al., 2007, p.5). Uma vez que identificamos padrões em diversas situações do cotidiano e de experiências vivenciadas.

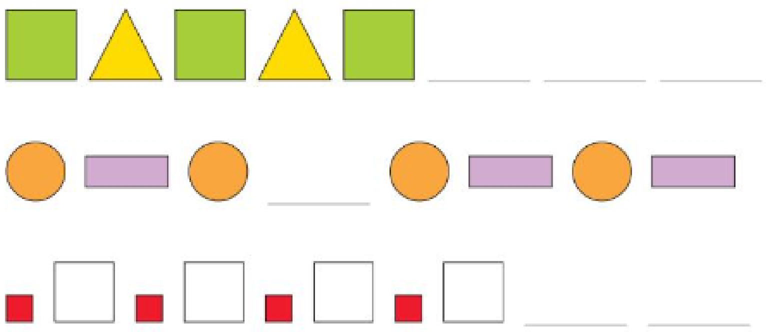
Intencionalmente, para esta pesquisa, as sequências planejadas apresentam um padrão com regularidades, uma vez que se faz necessário o uso dos padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico, além de outros elementos definidos por Radford na TO, a teoria em questão que utilizamos como embasamento teórico e sobre a qual falaremos em tópicos mais adiante. Com relação às sequências que desenvolvemos para esta pesquisa, tratam-se de sequências recursivas; explicaremos mais adiante a motivação.

2.1.1 Sequência recursiva

Antes da abordagem deste subtópico específico de sequência recursiva e a motivação do seu uso para a pesquisa, se faz necessário a distinção entre os tipos de sequências. Conceitualmente, as sequências são denominadas conjuntos ou grupos, em que os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.

As sequências podem ser apresentadas como numéricas e não numéricas, estas podendo ser sequências recursivas ou não recursivas. No caso das numéricas são formadas por uma lista, podendo ser ou não bem definida e que possui uma lei de formação, auxiliando para que sejam encontrados os termos desconhecidos da sequência, por exemplo, (0, 2, 4, 6, 8, 10,...) é a sequência dos números naturais pares e (1, 3, 5, 7, 9, 11,...) é a sequência dos números naturais ímpares. Já as sequências não numéricas, independe de números, possuem diversas representações, por exemplo, essas três sequências de figuras geométricas, mostradas na imagem abaixo:

Figura 2 - Sequências de figuras geométricas



Fonte: Ensinar Hoje - (https://ensinarhoje.com/atividade-1o-ano-sequencia-numerica-de-figuras-e-acontecimentos/)

Ambas as sequências podem ser recursivas ou não recursivas.

As sequências recursivas costumam apresentar alguns termos iniciais na sequência, e esses termos são dependentes. Para que seja encontrado algum termo, precisa-se ser mostrado ou já ter sido identificado o anterior, diferentemente das sequências não recursivas, as quais não possuem essa dependência entre os termos para que os seguintes possam ser encontrados.

O conteúdo envolvendo sequências, encontra-se exposto na BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente nos 7º e 8º anos. Por este motivo, apresentaremos as referidas habilidades na forma gradativa de ensino, as habilidades que envolvem o ensino de sequências e padrões (Quadro 1). Mas vale ressaltar que, de acordo com Vale et al. (2011), as crianças podem trabalhar desde muito cedo, desde os anos iniciais do ensino fundamental, com os padrões de repetição e é desejável uma exploração aprofundada que inclua processos de generalização. Se possível, podem iniciar utilizando materiais manipuláveis e, mais adiante, representações envolvendo desenhos, gráficos, tabelas e outras representações visuais.

Quadro 1 - Habilidades envolvendo Sequências

UNIDADE TEMÁTICA: ÁLGEBRA	
ANO	HABILIDADE
7 ANO	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
8 ANO	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Cada habilidade nos serviu de inspiração, reforçando, o passo a passo da construção das sequências utilizadas na pesquisa.

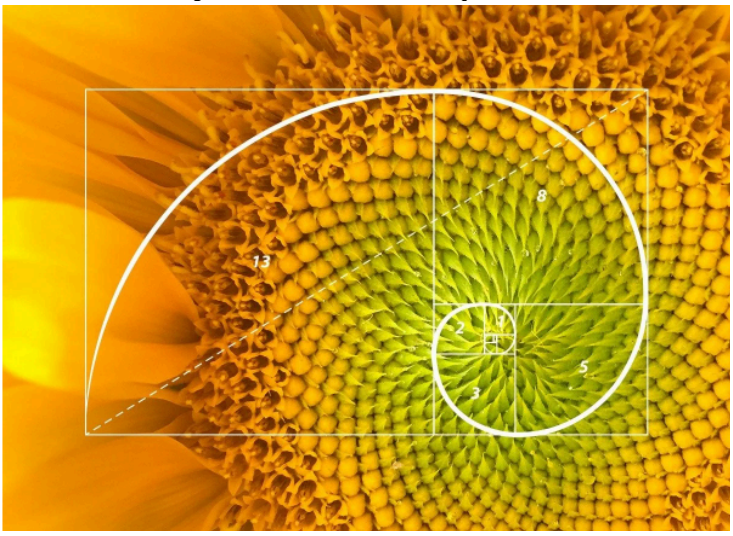
Notamos, por meio das habilidades, presentes no quadro 1, que é necessário durante o 7º ano: o aluno conseguir classificar as sequências em recursivas e as não recursivas, além disso, visualizar as sequências não apenas na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento. A partir desta habilidade, investigamos as sequências tanto recursivas como não recursivas, e encontramos padrões variados, para além da sala de aula de matemática, como, por exemplo: obras de arte; estampas de tecidos; na natureza. A habilidade, também, despertou adentrarmos na literatura, que se encontra na BNCC na área de Linguagens e suas tecnologias, e reforçamos mais uma inspiração para o trabalho com HQs, visto que, elas englobam conceitos das artes e literatura.

Quanto a nossa motivação de utilizar apenas de sequências recursivas para esta pesquisa, vem do desejo de que os alunos construam o algoritmo, uma lei de formação das respectivas sequências apresentadas. Isso é o que acontece quando o aluno chega a atingir o ápice do pensamento algébrico para a TO. Portanto, exploraremos e nos apoiaremos em trabalhar com a habilidade EF08MA11, presente para o 8º ano na BNCC, porém não deixando as demais habilidades de lado, uma vez que elas se complementam ao decorrer do aprendizado do conteúdo matemático.

Os exemplos dados anteriormente, tanto das sequências numéricas quanto das sequências não numéricas, são exemplos de sequências recursivas. Neste tipo de sequência, é comum a aparição dos seus primeiros valores e definição de outros, durante a sequência em relação aos termos iniciais, seguindo uma regra ou padrão. Assim, as sequências podem "ser crescentes, decrescentes, lineares ou não lineares, ou seja, sua tradução algébrica pode ser feita ou não a partir de uma expressão polinomial do 1.º grau" (Barbosa et al., 2011).

Cada sequência representa um padrão e esses padrões não são encontrados apenas na sala de aula de sequências recursivas, é possível de vê-los nas nossas vivências sociais, por exemplo, os espirais de girassóis, que se trata de um exemplo clássico da Sequência de Fibonacci, como demonstrado por Azevedo et al. (2021, p. 275) que traz os termos $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$, e sua recursividade está no fato de, a partir do segundo termo, os subsequentes são obtidos por meio da soma dos dois termos anteriores: $2 = 1 + 1$; $3 = 1 + 2$; $5 = 2 + 3$ e assim por diante, dessa maneira acontecendo a formação áurea no espiral de um girassol.

Figura 3 - Sementes do girassol



Fonte: Guiame (https://guiame.com.br/colunistas/cris-beloni/assinatura-de-deus-voce-ja-ouviu-falar-que-deus-usou-um-codigo-para-criar-o-mundo.html)

As generalizações desses padrões podem possibilitar que os alunos percebam que podem decifrar por meio de um padrão os termos próximos e os mais distantes da sequência, como aborda Stacey (1989), fazendo então uma segregação entre dois tipos de generalizações, a generalização próxima e a distante:

> A generalização próxima é utilizada para designar uma questão que pode ser resolvida passo-a-passo com um desenho ou através de contagem e a generalização distante designa uma questão que vai além de limites razoáveis da prática de abordagem passo-a-passo (Stacey, 1989, p. 150).

Geralmente, na generalização próxima, através do modo de contagem, os alunos se apoiam usando uma tabela, o que normalmente envolve relações recursivas, pois como sabemos as sequências recursivas são um dos métodos de identificação de alguns tipos de padrões. E, com relação à generalização distante, a intenção é de que consigam construir uma lei de formação, ou seja, o padrão que irá permitir construir qualquer termo da sequência (Barbosa, 2010; Stacey, 1989; Vale, 2006).

Assim, nos interessa que o aluno realize a relação com generalização distante durante a resolução das sequências, pois, dessa forma, podemos analisar as estratégias de resolução caracterizadas, com base nos elementos categorizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade).

3. O Pensamento Algébrico

Neste capítulo, tratamos sobre a Teoria da Objetivação, teoria de ensino-aprendizagem, que nos serviu como suporte teórico, para compreensão do pensamento algébrico em sua perspectiva. No subtópico abaixo apresentamos os detalhes a respeito da teoria.

3.1 A Teoria Da Objetivação

A Teoria da Objetivação (TO), trata-se de uma teoria com perspectiva sociocultural, opondo-se “a estudos racionalistas e idealistas, visto que a TO evidencia o movimento” (Gomes, 2020, p.82), ou seja, trabalhamos com uma interpretação de que o pensamento não se limitará a uma atividade unicamente mental, pois para Radford (2006), pensar é uma prática social multimodal e assim, ele mobiliza a perceber, o pensamento, materialmente de formas diferentes.

"A humanidade é constituída pela sua historicidade e pelas tradições e crenças das sociedades (Lima; Noronha, 2023, p. 5)", ao nascer o indivíduo, já deve possuir o saber, que ao longo da sua vida sofrerá modificações. A TO considera como uma entidade geral, para que assim, seja diferenciada a cultura de um povo para outro. Segundo Radford (2020b), o saber está materializado na vida dos indivíduos de concretamente, sendo um sistema de pensamento e ação cultural e historicamente constituídos.

Como dito anteriormente, esse saber passa por modificações ao longo do tempo, dos anos, em virtude de que as diversas práticas culturais e históricas vão sendo realizadas de outras formas e maneiras totalmente diferentes. Pois, a atividade também funciona como um sistema dinâmico para a TO, de forma que satisfaz as necessidades humanas.

Assim, deixando evidente na teoria estudada que, "a materialização ou atualização do saber em uma forma perceptível, sensível, concreta, é denominada na TO como conhecimento" (Radford, 2021). Dito isso, podemos observar a diferença entre o saber e o conhecimento, para Radford (2017b, 2020), o saber sendo pura potencialidade, enquanto o conhecimento uma atualização do saber, que pode ser materializado quando o aluno pensar algebricamente, por meio de uma atividade e refletido pelos indivíduos sobre as necessidades de mudanças

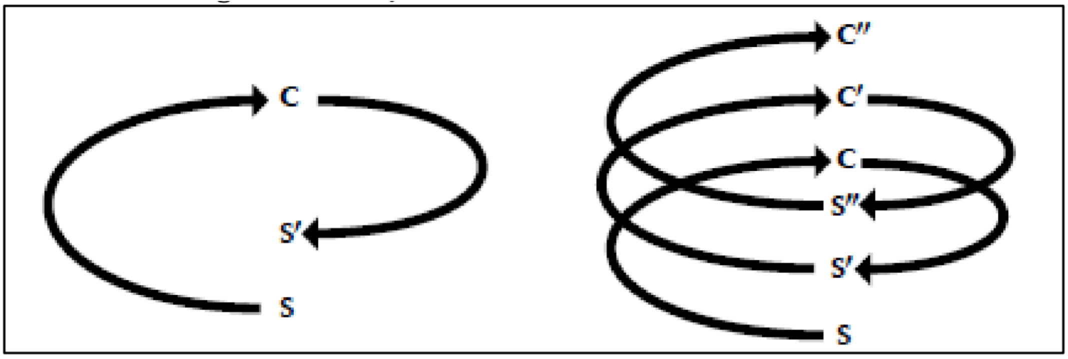
(Radford, 2017b).

O sentido da palavra potencialidade, adotado por Aristóteles, com o intuito de trazer o significado de movimento, poder ou disposição (Morey, 2020), seu uso pode ser comparado a um instrumento musical, a bateria, por exemplo, que tem a potencialidade de emitir um som, enquanto o aluno tem a potencialidade de pensar algebricamente (Silva, 2021, p. 38).

Para compreender melhor essa relação dialética entre o saber e o conhecimento, a imagem abaixo exemplifica, o que Radford explica:

> nela o saber S, colocado em movimento por meio de uma atividade (representada pelas flechas pretas), é revelado à consciência em forma de conhecimento C. Na atividade os sujeitos podem ajustar, refinar e expandir o saber S, resultando em um novo saber S'. Esse novo saber S', que é uma potencialidade, pode se materializar em outro conhecimento C' por meio de uma atividade (Radford, 2017b)

Figura 4 - Relação dialética entre saber e conhecimento



Fonte: Radford (2017b, p. 110)

> Assim, a aprendizagem, para a Teoria da Objetivação, é definida como o resultado dos processos de objetivação e processos de subjetivação, pois para a teoria a aprendizagem não é somente conhecer, porém tornar-se, ou melhor, ela considera o emocional como um elemento fundamental para a aprendizagem e transformação do sujeito em um ser social (Radford, 2020b, 2021).

Com isso, quando a atividade é abordada nos conceitos da TO, para que apareçam os processos de objetivação e subjetivação, é preciso o trabalho ombro a ombro, da professora com os alunos, em busca de uma obra comum, além disso, o cuidado, a responsabilidade e o compromisso com o outro, denominado o labor conjunto. Dessa forma, a TO desperta um projeto que transforma o meio social.

Para podermos compreender melhor o papel da TO no pensamento algébrico, apresentaremos no próximo subtópico a visão dos indivíduos, ao transformarem-se em seres éticos e reflexivos, capazes de desenvolver diversos problemas originários de contextos sociais. Além disso, abordamos os elementos que caracterizam o pensamento algébrico.

3.2 O Pensamento Algébrico na Teoria da Objetivação

Para o estudo do pensamento algébrico, não precisa que o indivíduo fique preso ao uso de equações e variáveis, por exemplo. “Assim, nossa concepção de álgebra e pensamento algébrico não se detém apenas a uma manipulação simbólica e abstrata” (Gomes, 2020, p. 82).

Devido à relação cultural que se tem entre a álgebra e aritmética, conforme é apontado por Rojas e Vergel (2018) a álgebra historicamente apresentou diversas concepções. Segundo Miguel et al. (1992), todas as concepções buscavam reduzir o pensamento algébrico ao simbolismo alfanumérico, deixando de lado toda passagem que acontece no desenvolvimento do pensamento algébrico até chegar a utilização da simbologia.

As concepções, portanto, apresentam uma visão da álgebra mecânica, com regras para resolução de problemas. A fim de modificar essa visão tecnicista, alguns autores apoiaram-se em outros vieses para definir a álgebra escolar, como por exemplo, Lins e Gimenez (1997, p. 137), tem a visão de que “a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”, e como Silva cita Modanez:

> Com base em suas pesquisas, Modanez (2003) elencou o ensino da álgebra escolar em três categorias, sendo a primeira a visão mais clássica, em sua perspectiva, a que o pensamento algébrico é visto como uma ampliação do pensamento aritmético. A segunda propõe o desenvolvimento inter-relacionado da álgebra e da aritmética, ou seja, que a álgebra e a aritmética sejam desenvolvidas concomitantemente. E a última defende uma semi-dependência dos pensamentos algébricos e aritméticos. (Modanez 2003, apud, Silva, 2021, p.28)

Nota-se nas citações por parte dos autores as retratações da aproximação que a álgebra tem com aritmética, uma vez que as “propriedades dos números e operações funciona como uma estratégia facilitadora no processo de resolução de uma equação, indica uma ação compreensiva ao invés de mecânica, com significado" (Gomes, 2020, p. 84). Dessa forma, evidenciamos que o uso das operações com as devidas propriedades colabora para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Vejamos no quadro abaixo a sistematização das características entre os pensamentos aritmético e algébrico.

Quadro 2 - Pensamento Aritmético x Pensamento Algébrico

Pensamento aritmético	- Concebe quantidades desconhecidas como indeterminadas. E elas não são tratadas em primeiro plano; - Considera métodos baseados em raciocínios com números conhecidos (e não com quantidades indeterminadas), como o método de "tentativa e erro", de proporcionalidade, dentre outros; - O indeterminado pode ser nomeado por meio de diferentes linguagens.
Pensamento algébrico	- Concebe quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, isto é, há um sentido ao indeterminado; - Não considera a "tentativa e erro" e outros métodos aritméticos na resolução de problemas; - Faz uso de premissas, em um processo dedutivo-analítico; - O indeterminado pode ser nomeado por meio de diferentes linguagens; - Não pode ser alcançado por caminhos indiretos; - A incógnita é tratada em primeiro plano.

Fonte: Gomes (2020, p. 84-85)

Conforme a perspectiva de Radford (2018), a ruptura entre o pensamento algébrico e o aritmético, é o que destaca o pensamento analítico como o principal diferencial entre a álgebra e aritmética, podendo a indeterminação e a denotação também estarem presentes no pensar aritmeticamente (Radford, 2018). A diferença entre ambos os pensamentos é a mobilização de que no pensamento algébrico, o estudante ele irá trabalhar com quantidades indeterminadas de forma analítica, com base em umas premissas para realizar deduções a fim de alcançar alguns resultados, operando com o desconhecido como se o conhecesse (Rojas; Vergel, 2018).

Para melhor compreensão das diferenciações e características específicas de ambos os pensamentos, apresentamos o quadro 3 a seguir.

Quadro 3 - Características específicas do pensamento algébrico segundo Radford (2010)

Pensamento aritmético	- Indeterminação - Denotação
Pensamento algébrico	- Indeterminação - Analiticidade - Denotação

Fonte: Adaptado de Gomes (2020)

Como pode-se observar no quadro acima, o pensamento algébrico apresenta três elementos inter-relacionados, e para Radford (2006), eles categorizam o pensamento algébrico. “O primeiro elemento lida com um senso de indeterminação que é próprio para objetos algébricos básicos, como incógnitas, variáveis e parâmetros” (Almeida; Câmara, 2017, p. 46), já o segundo é o “elemento caracterizador do pensamento algébrico” (Almeida; Câmara, 2017, p. 46), e por fim, “o terceiro elemento do pensar algebricamente é o modo particular simbólico de designar objetos” (Almeida; Câmara, 2017, p. 47), que no quadro 3, apresenta-se como denotação, podendo também nomear-se como denotação semiótica ou designação simbólica.

Apesar de Radford (2006, 2009, 2010a, 2010b, 2011b) caracterizar em uma ordem os três vetores, abordamos inicialmente sobre o vetor da analiticidade, uma vez que ele distingue o pensamento algébrico do aritmético e iremos compará-los.

3.2.1 Analiticidade

A analiticidade implica o tratamento, nas operações, com as quantidades indeterminadas como se elas fossem conhecidas (Fernandes; Healy, 2016, p. 239). Sendo essa ação o primeiro vetor designado pelo pensamento analítico. Radford (2008), destaca a importância da analiticidade em uma resolução matemática, pois é possível que a resolução seja alcançada por meio de palpites, o que trata de uma estratégia aritmética, pois não parte de uma proposição específica.

Silva (2021): segundo Vergel (2015b) a analiticidade é mediada pelos meios semióticos de objetivação. Para melhor compreensão, vejamos a explicação dada por Radford no exemplo da resolução de uma equação do primeiro grau:

> Deixe-me considerar a equação $2x + 2 = 10 + x$. Na perspectiva do pensamento algébrico que estou delineando aqui, uma solução por

> tentativa e erro não seria considerada como algébrica, mesmo que a tarefa inclua números indeterminados e os alunos estejam trabalhando com notações. Em uma solução baseada em tentativa e erro, os alunos estão recorrendo apenas a conceitos aritméticos. Por outro lado, se os alunos deduzirem $2x + 2 = 10 + x$ que $2x = 8 + x$ (subtraindo 2 de ambos os lados da equação), etc., podemos dizer que os alunos estão pensando algebricamente. Eles estão trabalhando através das consequências de assumir que $2x + 2$ é igual a $10 + x$ (Radford, 2018a, p. 9, tradução nossa)

No exemplo acima dado por Radford para solucionar a equação utilizando o pensamento algébrico, o aluno teria que trabalhar com o sinal da igualdade de forma que houvesse uma indicação de equivalência, uma vez que precisaria realizar subtração da mesma quantidade em ambos os lados da equação. Vejamos esse exemplo no quadro a seguir.

Quadro 4 - Resolução da equação $2x + 2 = 10 + x$

Ação 1: (-2)	$2x + 2 = 10 + x$	(-2)
Ação 2: (-x)	$2x = 8 + x$	(-x)
Ação 3:	$x = 8$	

Fonte: Adaptado de Gomes e Noronha (2020)

Essas ações 1, 2 e 3 mostradas no quadro acima, são ações que demonstram deduções, ou seja, fundamentando-se em uma sucessão de certezas. Quando as subtrações são realizadas em ambos os lados, tanto por números quanto pelas incógnitas e quando a equação $2x + 2 = 10 + x$ é assumida como uma premissa, implica “a visualização da equação em sua totalidade, bidirecionalmente, por intermédio do símbolo de igualdade” (Gomes; Noronha, 2020, p. 143).

Somente a presença do desconhecido não irá garantir que os alunos pensem algebricamente. Podemos conceber a analiticidade no processo introdutório da álgebra, visto que o pensamento analítico é o principal diferencial entre as operações com números conhecidos e desconhecidos. Assim, operar algebricamente é reconhecer, refletir e analisar tais indeterminações, como se elas já fossem conhecidas (Radford, 2013).

3.2.2 Indeterminação

Segundo Gomes (2020, p. 89) é necessário estabelecer um sentido ao indeterminado e agir baseado em premissas, num processo de raciocínio analítico-dedutivo, assim conferindo, então, sentido ao indeterminado.

Educadores e pesquisadores durante muito tempo acreditaram que o uso do simbolismo alfanumérico era o apogeu do pensamento algébrico, dessa forma a ideia de que as crianças perpassam pelo pensamento algébrico desde as primeiras etapas escolares, foi reduzida (Radford, 2018). Porém, “na perspectiva da TO, o indeterminado não compreende apenas o simbolismo alfanumérico, mas, sim, o operar com o desconhecido como se fosse conhecido, ou seja, atribuindo significado” (Marques, 2022, p. 42). Para Radford,

> naturalmente, o simbolismo alfanumérico constitui um poderoso sistema semiótico. Com uma sintaxe muito precisa e um sistema extremamente condensado de significados, o simbolismo alfanumérico oferece uma enorme variedade de possibilidades para efetuar cálculos de forma eficiente - cálculos que podem ser difíceis, se não impossíveis, de efetuar com outros sistemas semióticos (gestos, por exemplo, ou mesmo linguagem natural) (Radford, 2018, p. 8, tradução nossa)

Quando a álgebra é introduzida mais cedo ao ensino considera-se que os alunos pensem algebricamente sem fazer o uso do simbolismo alfanumérico, uma vez que alunos do ensino fundamental anos iniciais não tem o contato com o simbolismo alfanumérico, assim podendo surgir diversos modos de representar o indeterminado. Podemos também considerar que a TO considera as múltiplas formas de pensamento e linguagem (Gomes, 2020, p. 90).

Por exemplo, conforme exposto no quadro 4, o vetor da indeterminação pode ser denotado tanto pela letra “x”, pois a indeterminação concebe-se utilizar incógnitas, variáveis e entre outros, nas sentenças matemáticas, como também quando o estudante percebe que é possível o “x” da equação assumir diversos valores e significados (Radford, 2006, 2010b). Pois, como é dito por Almeida e Santos:

> É essa indeterminação, em oposição à determinação numérica, que torna possível, por exemplo, a substituição de uma variável ou incógnita por outra, ou seja, não faz sentido fazer a substituição de 3 por 3 em aritmética, mas, em álgebra, faz sentido a substituição de uma incógnita por outra, sob determinadas condições (Almeida; Câmara, 2017, p. 46)

Então, devemos ter cuidado ao nos referirmos ao indeterminado, pois é possível de apresenta-se como um caráter aritmético ao tentar solucionar a equação por meio de tentativa e erro. Podemos então observar que "a indeterminação apresenta um caráter algébrico quando não se distingue entre quantidades conhecidas e desconhecidas" (Gomes, 2020, p. 90).

3.2.3 Denotação

Assim como a Analiticidade e a Indeterminação, a Denotação para Radford (2009, 2010, 2013, 2014) é também um dos elementos que categorizam o pensamento algébrico.

A denotação "remete à forma, tipo ou qual meio semiótico os alunos utilizam para nomear o indeterminado de uma equação" (Gomes, 2020, p.91). Ou seja, ao tentar solucionar uma equação, por exemplo, o aluno apoia-se nas análises multimodais envolvendo as diversas modalidades sensoriais, as quais são: táteis, perceptivas, cinestésicas, de modo a se converter em componente essencial dos processos cognitivos (Arzarello, 2006).

Além das modalidades sensoriais, envolvidas, a TO defende que os alunos podem utilizar os gestos, os símbolos matemáticos, a linguagem natural ou até mesmo a combinação destes, com o intuito de nomear ou simbolizar o indeterminado (Radford, 2021). Não significa que os signos algébricos são iguais ou que podem ser substituídos um pelo outro, o que irá tornar cada um deles único é como os significamos (Radford, 2010).

No entanto, pode-se notar que no processo de ensino-aprendizagem o pensamento, também, torna-se externo e corporal definido por diversas formas, Radford diz que o indivíduo pode pensar com e através do corpo, assim, esse posicionamento "valoriza o papel das diferentes formas de manifestação da linguagem e aborda o pensamento como uma unidade dinâmica" (Gomes, 2020, p. 91). Então, Radford pontua a postura mediadora assumida na solução de problemas:

> [...] fazem parte desses meios que permitem aos estudantes objetivarem o saber – isto é, tomar consciência de aspectos conceituais que, por sua própria generalidade, não pode ser plenamente indicada no domínio do concreto. Além disso, os gestos, eles incluem sinais, gráficos, fórmulas, tabelas, desenhos, palavras, calculadoras, regras, e assim por diante. [...] são importantes porque, em ambientes de aprendizagem, cumprem uma função importante: são elementos importantes para os estudantes no processo de objetivação do saber. Os gestos ajudam os estudantes a

> tomarem suas intenções aparentes, a perceber relações matemáticas e tomar consciência dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos (Radford, 2005, p. 143, tradução nossa).

E vale a ressalva de que os gestos se fazem presentes em vários contextos, por estar integrado ao nosso processo histórico e cultural, é bastante comum o uso dos gestos em uma fala com os colegas, ao celular e até mesmo sozinho. Às vezes fazemos o uso dos gestos sem ao menos saber o significado e motivo em uma determinada situação, porém, a discussão aqui presente aos gestos, está interligada ao contexto das aulas de matemática (Radford, 2005).

E "na TO, o conhecimento matemático e sua representação está ligada a um contexto cultural específico e é produzido socialmente, então, para essa concepção, os signos possuem um significado cultural" (Gomes, 2020, p 91). Na nossa pesquisa, entendemos que o vetor denotação apresenta diversas formas e modos de expressões, então irá nos interessar identificar quais os meios e recursos os alunos vão utilizar para identificar o indeterminado. Sabendo que a denotação é um dos vetores essenciais para o pensamento algébrico.

4. HISTÓRIA EM QUADRINHOS

Neste capítulo, buscamos enfatizar sobre a origem da HQ até sua chegada ao Brasil, e principalmente sobre a importância de se ter a HQ no processo pedagógico, assim podendo compreender o seu uso para o ensino e como um dos alvos deste trabalho, para o ensino da matemática.

4.1 Origem da história em quadrinhos

A origem das Histórias em Quadrinhos (HQ) foi associada às pinturas rupestres, ocorridas na pré-história. Outros falam que surgiram Egito antigo, ou até mesmo com a invenção da imprensa e os folhetins do período da revolução francesa, ou ainda no período imperial inglês, basicamente onde se desenvolveu uma forma de contar uma história por meio de imagens (Cunha, 2012 p. 3). Apesar das grandes diferenças entre o contexto cultural e material, estrutura e organização da história, todas as situações a imagem era essencial para "narrar os acontecimentos através de desenhos sucessivos" (Luyten,1987, p.16).

Com a grande movimentação da imprensa no século XIX, o gênero literário teve um maior destaque e ficou marcado pelas mãos do artista americano Richard F. Outcault, em que ele desenhava sequências de imagens retratando pequenas histórias e balões representando diálogos de personagens em uma coluna de jornal (Feijó, 1997). O quadrinista ficou conhecido por ilustrar um garoto de pijama amarelo, ao qual recebeu o nome de Yellow Kid (menino/garoto amarelo), fazendo um enorme sucesso. Semanalmente, um jornal de grande circulação nos Estados Unidos lançava uma sequência com balões e falas. Abaixo temos uma imagem da The Yellow Kid and His New Phonograph, a mais famosa das sequências de balões do Yellow Kid, lançada em 1896 por Richard Outcault.

Figura 5 - The Yellow Kid and His New Phonograph

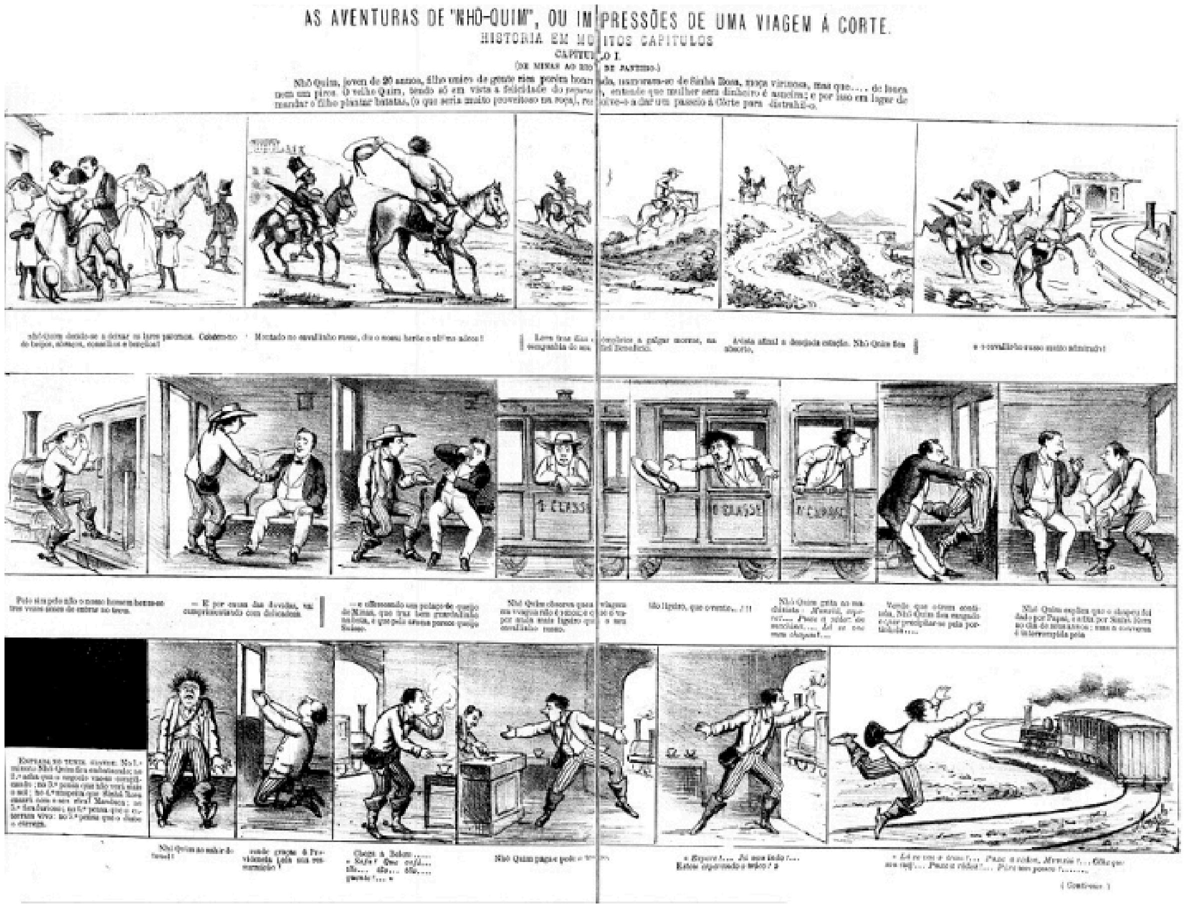
Fonte: Nanquim (https://nanquim.com.br/1895-yellow-kid/)

Para Mccloud (2005, p.9), a melhor definição de uma HQ é que são “imagens pictóricas e outras justapostas em sequência deliberada destinadas a transmitir informações e/ou produzir uma resposta no espectador”. O termo “histórias em quadrinhos” que aparece no Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, não é muito diferente da definição dada por Mccloud, no dicionário, a HQ é descrita como "sequência de desenhos, geralmente com diálogos em balões, que contam uma história”.

De certa forma, a HQ passa a se tornar um meio de comunicação, segundo Eisner (1989), esse meio faz o uso de dois tipos de linguagem humana: verbal e não-verbal. No caso da primeira, irá utilizar vocábulos no idioma vigente para expressar informação. Já a segunda, utiliza tanto imagens quanto gestos para expressar informações; sendo a decodificação de ambas as linguagens considerada leitura.

Falamos recentemente da chegada da HQ no mundo, e no Brasil o registro que temos é de que a primeira HQ foi criada em 1869, recebendo o nome de “As aventuras de Nhô Quim” por Ângelo Agostini, com duas nacionalidades, italiano e brasileiro, foi considerado o primeiro quadrinista do Brasil. Agostini, era envolvido em causas sociais e políticas, em suas publicações artísticas sempre demonstrava uma luta tentando trazer as ilustrações e retratos explorando o humor para divertir seus leitores, sem ofensas aos valores religiosos ou hábitos da sociedade (Vergueiro, 2011, p.44).

Figura 6 - As aventuras de Nhô Quim



Fonte: Nação HQ (https://nacao.net/2006/01/30/as-aventura-de-nho-quim-ou-impressoes-de-uma-viagem-a-corte/)

A obra “As aventuras de Nhô Quim” é considerada a primeira do gênero literário no país, porque a sua estrutura tem uma narrativa gráfica inovadora que possui um personagem fixo durante toda a história. Relatando as aventuras de Nhô-Quim, após se apaixonar por uma moça pobre e o seu pai desaprovar o romance e mandá-lo para um passeio à Corte, com o objetivo de cessar o romance. Com fortes críticas, o autor relata problemas urbanos da época, dos costumes sociais e políticos.

A partir de então, vieram cada vez mais HQ, não só publicadas por Agostini, mas também diversos outros quadrinistas brasileiros. A maioria dos quadrinistas eram desenhistas, e à medida que os quadrinhos iam tomando uma proporção maior de conhecimento, mais engajados na produção, os quadrinistas ficavam. A produção das HQ era ainda maior em períodos-chave, aproveitavam esses períodos para destacar os contextos que mais marcavam a população e os transformavam em HQ.

Mas por muito tempo, como cita Andrade, a HQ:

> Foi mal interpretada mediante a pouca compreensão de seu potencial. Apesar de se estabelecer inicialmente pela vertente do entretenimento não significa que esteja restrita a ela, ao contrário, o aspecto prazeroso que atrai o público consumidor dessas obras pode se tornar um grande e forte aliado na perspectiva de aproveitamento máximo dessa linguagem no processo pedagógico (Andrade, 2019, p.16).

Demorou muito para que as HQ estivessem presente no processo pedagógico e ser um instrumento facilitador do ensino e aprendizagem, mesmo com tantas mudanças dos dias atuais ainda existem controvérsias do trabalho de HQ na educação, “a relação de ‘amizade’ entre educação e HQ ainda não conquistou o status de ‘amor’ tão desejado por autores, editores, educadores e pesquisadores da área” (Setubal; Rebouças, 2015, p. 304). Mas gradualmente essa relação está sendo acordada.

A trajetória da introdução da HQ na educação, aqui no Brasil, foi no ano de 1970, quando tivemos a fundação do Laboratório de Histórias em Quadrinhos, da Universidade de São Paulo (USP), se destacando, hoje, como o centro mais importante de estudo a respeito das HQs no Brasil. Porém, com a oficialização por parte da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) em 1996, indicando que houvesse a implementação de outras linguagens e manifestações artísticas, incluindo a HQ. Então, considerando que a:

> LDB abriu o caminho do ensino para as HQ, mas foi no ano seguinte, com a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que traziam uma releitura das práticas pedagógicas aplicadas na escola e criavam um novo referencial a ser adotado pelos professores (Setubal; Rebouças, 2015, p. 324).

Como visto, para Brasil (1997) os parâmetros curriculares da área de artes e da língua portuguesa começaram incluir as HQ, para o ensino fundamental até o ensino médio, na área de artes para os anos iniciais a HQ foi incluída como expressão e comunicação, na prática dos alunos. Já para os anos finais do ensino fundamental o PCN de artes menciona a necessidade de o aluno ser competente na leitura de HQ e outras formas visuais (Brasil, 1998a). Na língua portuguesa há referência específica tanto à charge e sua leitura crítica (Brasil, 1998b) quanto às tiras de jornal, para que todos reconheçam a HQ como um suporte pedagógico, dessa forma, trabalhando o gênero em sala de aula. Ao chegar no ensino médio no tópico de linguagens, códigos e suas tecnologias, existem referências às manifestações artificiais e deixam clara a necessidade de leitura aprofundada dos quadrinhos, com o objetivo de se perceber os recursos visuais do texto (Brasil, 2006, p. 185).

Porém, somente na metade do século XX uma grande mudança na área pedagógica, os professores tiveram uma aceitação da “presença de HQ na sala de aula, derrubando a argumentação de que tais publicações eram destinadas apenas ao lazer, superficiais e com conteúdo pouco sério” (Vergueiro, 2010). Além disso, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que dar a oportunidade de ingresso ao ensino superior em todo território brasileiro, passou a incluir questões referentes às HQ ligadas ao humor, verificando o domínio de leitura de outras linguagens, que não apenas as transmitidas pelo código verbal escrito (Vergueiro, 2010).

Então podemos observar que a HQ está bastante consolidada no ensino, porém ainda de uma forma restrita, voltada apenas para área de linguagens, códigos e suas tecnologias, e neste trabalho temos o foco de utilizá-la para o ensino da matemática, que detalharemos no subtópico adiante.

4.2 História em quadrinhos para o ensino de matemática

A visualização da imagem para a criança é uma parte integrante do processo de significação, auxiliando o aluno na compreensão do texto, já que a criança não lê apenas as palavras, mas compreende fazendo uma “leitura” das ilustrações. Reily (2003) coloca a importância da “imagem” como instrumento mediador de aprendizagem, afirmando seu valor semiótico que muitas vezes é subestimado.

E Frizzo e Bernardi (2001) ressaltam que, as apresentações em figuras são mais interativas, levando a um melhor desempenho da memória, facilitando a compreensão dos conteúdos e desenvolvendo a criatividade por parte dos alunos. Dessa forma, a ideia de que a HQ é apenas um instrumento para diversão é deixada de lado e passa a ser vista, também, como um material pedagógico, auxiliando amplamente, em diversas áreas do conhecimento.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a HQ possui destaque no processo pedagógico apenas na área de língua portuguesa, podemos visualizar nas habilidades de prática de linguagem presentes do 1º ao 5º ano, e nos 6º e 7º anos:

> (EF15LP14) Construir o sentido de histórias em quadrinhos e tirinhas, relacionando imagens e palavras e interpretando recursos gráficos (tipos de balões, de letras, onomatopeias); (Brasil, 2018, p.97)
> (EF67LP28) Ler, de forma autônoma, e compreender – selecionando procedimentos e estratégias de leitura adequados a diferentes objetivos e levando em conta características dos gêneros e suportes –, romances infantojuvenis, contos populares, contos de terror, lendas brasileiras, indígenas e africanas, narrativas de aventuras, narrativas de enigma, mitos, crônicas, autobiografias, histórias em quadrinhos, mangás, poemas de forma livre e fixa (como sonetos e cordéis), vídeo-poemas, poemas visuais, dentre outros, expressando avaliação sobre o texto lido e estabelecendo preferências por gêneros, temas, autores (Brasil, 2018, p.169).

A utilização das HQs como um instrumento para o ensino e desenvolvimento da aprendizagem é fundamental, pois "além de proporcionar a leitura prazerosa, uma forma divertida de incorporar conhecimento e auxiliar na superação de dificuldades encontradas no processo de aprendizagem" (Nakamura; Voltolini; Bertoloto, 2021, p.1).

Em particular, observamos que a matemática é considerada uma das disciplinas na qual os alunos possuem uma maior dificuldade, por isso pensamos em envolver a HQ como um recurso didático que possibilita a contextualização para o ensino de matemática, conforme é destacado por Leite e Lins (2019, p.2), "o uso de Histórias em Quadrinhos nas salas de aulas pode ser tratado como um método ou prática pedagógica para melhorar o ensino da Matemática".

Dessa forma, a adesão ao HQ como recurso didático, principalmente na matemática, é:

> Favorável tanto para o docente, que pode sair de uma rotina exaustiva, quanto para o aluno que tem a possibilidade de aprender e se divertir ao passo que lê ou cria uma HQ. Não se trata do abandono dos livros didáticos por parte dos professores, mas sim da busca por práticas educativas que incentivem e melhorem a compreensão dos estudantes nos conceitos matemáticos (Cordeiro; Cardozo; Silva; 2018, p.123)

Dessa forma, deixando a cargo do professor planejar qual é a melhor forma de trabalhar com a HQ em sala de aula. De acordo com Cavalcante e Cedro (2015), as HQ, se utilizadas de maneira correta, podem contribuir para reflexões dos alunos, proporcionando um conhecimento matemático realmente significativo.

É importante refletirmos sobre o uso da HQ para além da sala, pois, não é somente fazer a aplicação do seu uso, é necessário ter motivação e se apoiar no contexto ideal para o seu uso. Apesar de parecer uma ideia recente, mas não é, o uso da contextualização é possível ser encontrado em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que relatam a importância de um ensino contextualizado (Brasil, 1998). Também, há sua aparição na BNCC, que define o conceito de contextualização como “a inclusão, a valorização das diferenças e o atendimento à pluralidade e à diversidade cultural resgatando e respeitando as várias manifestações de cada comunidade” (Brasil, 2018, p. 11). Ou seja, a importância de contextualizar o conhecimento escolar, deve derivar de situações práticas da vida social ao mesmo tempo que os contextos possuem significados para os alunos (Brasil, 2018, p. 84).

A origem do termo, dada por Kato e Kawasaki, também evidencia a organização para a colocação da contextualização, sendo assim, tendo uma "derivação do termo ‘contexto’, cujo significado literal vem do latim *contextu,* e pode ser entendido por um encadeamento de ideias de um texto, ou seja, a forma como estão ligadas entre si a diferentes partes de um todo organizado.” (2007, p. 2).

Para poder contextualizar, podemos concluir que é necessário que haja uma adequação, principalmente ao seu uso com a matemática, para que atinja a realidade do aluno, como enfatiza Gitirana e Bittar (2013) na reflexão a seguir, quando pretende-se contextualizar:

> É necessário que ocorra a inclusão da rotina, das experiências e das eventualidades diárias dos estudantes, levando isso para a sala de aula, implementando diversas situações conhecidas pelos mesmos, com intuito de tornar a contextualização um recurso facilitador da aprendizagem provocando a solução de problemas reais do aluno (Gitirana; Bittar, 2013).

Podemos já considerar que deve ser evitado o uso da contextualização de forma indevida, partindo da hipótese de que o “uso da contextualização por parte do professor, e também, do estudante, pode contribuir como método de ensino de matemática, tal como, instrumento de verificação de aprendizagem” (dos Santos; Silva; Lucena, 2016). Primeiro o estudante busca o conceito matemático solucionando situações reais, e depois, se utiliza de situações reais para explicar o conceito, ou seja, será por meio da contextualização que o professor possibilitará os seus alunos a aplicar em diversos e reais contextos os conhecimentos matemáticos aprendidos na sala de aula. Sendo importante salientar que contextualizar é uma tarefa inicial e essencial, das atribuições do professor (Tufano, 2001), ele irá apenas potencializar didaticamente e oportunizar ao aluno o conhecimento da matemática para além de uma teoria.

Há quatro tipos de categorização da contextualização descrita por Gitirana e Carvalho (2010), as quais emergiram após análise de livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático - PNLD, sendo eles a contextualização em: práticas sociais; articulações internas à matemática; história da matemática e articulações com outras áreas do conhecimento. Precisamos compreender cada tipo e a sua relação entre o conteúdo matemático:

> **práticas sociais**, ou seja, na junção do conteúdo matemático com acontecimentos comuns do dia a dia; **articulações internas à matemática**, envolvendo conteúdo específicos da própria matemática; **história da matemática** - o uso de fatos históricos matemáticos e **articulações com outras áreas do conhecimento**, em que é feita a união da matemática com Física, Geografia, dentre outras. (Lima, 2021, p. 25)

Gitirana e Bittar (2013) refletem que, nos livros didáticos de Matemática destinados à educação básica, tem certa dificuldade em contextualizar conceitos. É comum alguns problemas serem associados às práticas sociais, porém podem fugir muito da realidade, como o exemplo citado abaixo:

> "Joãozinho estava 'morrendo' com fome e comeu 5 pizzas e meia, se cada pizza custa 15,00 reais, quanto Joãozinho gastou?" - não é nada comum estar com fome e comer 5 pizzas e meia, fugindo totalmente de uma prática social unida ao conteúdo matemático (Lima, 2021, p. 26).

Ou seja, o contexto precisa ter em sua função especificidade e clareza, a fim de possibilitar a aprendizagem. É importante, também, que antes de qualquer aplicação de contextualização, o professor esteja atento a uma análise prévia para potencializar didaticamente o instrumento que será utilizado para trabalho.

Neste trabalho, por exemplo, utilizaremos a HQ como já foi dito, que para Denardi et al. (2012, p.158), a HQ pode ser vista como um agente facilitador de aplicação prática para docentes das mais variadas áreas do saber, principalmente em matemática, pois, estimula várias competências cognitivas e emocionais do aluno.

5. METODOLOGIA

Esta pesquisa é de cunho qualitativo, mediante as caracterizações, adotadas por Ludke e André (1986) e Carrasco e Hernández (2000), temos as que mais nos aproximam, sendo estas: o pesquisador como um participante atuante durante o processo de produção dos dados; os dados predominantemente descritivos; a importância do processo é maior do que o resultado.

Como neste tópico tratamos dos aspectos metodológicos desta pesquisa, com o foco de apresentarmos algumas informações que contemplem os participantes, o local escolhido, os instrumentos de produção dos dados e as especificações da análise com base na Teoria da Objetivação (TO) por Luís Radford, nada mais justo que sinalizar os objetivos da pesquisa, ainda que já apresentados na Introdução.

Objetivo Geral:

- Identificar os elementos do pensamento algébrico que emergem em uma atividade de ensino-aprendizagem sobre sequências recursivas apresentada por uma História em Quadrinho.

Objetivos Específicos:

- Analisar e identificar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para resolver os problemas de sequências recursivas contidas na História em Quadrinhos;
- Identificar na resolução dos alunos a presença dos três elementos categorizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade).

5.1 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola do município de Camaragibe, situado na Região Metropolitana do Recife. Essa escola possui duas turmas de 8º anos, uma no turno da manhã e a outra no turno da tarde. Para o estudo escolhemos a turma do turno vespertino, pelo fato de ser mais oportuno para a pesquisadora juntamente com a organização da escola, uma vez que a pesquisadora não era a professora da turma e nem na referida escola em que foi realizada a pesquisa.

Com relação ao ano letivo escolhido, deve-se ao fato do nosso objetivo de pesquisa trabalhar com sequência recursiva na HQ elaborada, e o conteúdo está disposto e definido pela BNCC na habilidade EF08MA11, presente na unidade temática da álgebra para esse ano, que se trata de “identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes” (Brasil, 2018, p. 313).

A turma que participou da pesquisa é composta por quarenta e nove alunos, em que a maioria dos alunos são oriundos das proximidades da escola, e muitos estão na escola desde o 6º ano. Essa turma é bastante heterogênea entre si, formada por grupos de amizades fortes, que convivem para além da sala de aula.

Devido aos grupos de amizades, o trabalho do professor regente, em alguns momentos, é prejudicado, pois as interações entre esses grupos são muito fortes, interferindo durante a aula, sendo necessário a fala repetida por atenção. Outra questão que dificulta a atenção da turma, é o uso dos aparelhos eletrônicos durante as aulas, pois apesar de ser proibido o seu uso em sala de aula, por meio da lei estadual de Nº 15.507/2015, que se encontra em vigor, os alunos a descumprem e fazem o uso constantemente.

Apesar de ser desafiador o trabalho com a turma, os alunos possuem interesse quando surge algo diferente das aulas tradicionais, foi o que sentimos ao levarmos a HQ para sala de aula de matemática, mesmo com muitos questionamentos, sendo um deles: por qual motivo usar a HQ na sala de aula de matemática?

Respondendo à pergunta, as histórias em quadrinhos (HQ) são uma grande ferramenta que utiliza do entretenimento, na grande maioria das vezes, entretenimento esse que faz parte do processo histórico e cultural. Visto que por meio da HQ é possível expressar-se de diversas formas, fazendo abordagens que contemplam fatos tanto históricos como atuais, além da imersão à cultura, podendo perpassar por diversas culturas, que é possível de ser vista por meio de uma HQ.

O uso da HQ por um professor de matemática, é bastante importante, pois,

> A produção de textos nas aulas de matemática cumpre um papel importante para a aprendizagem do aluno e favorece a avaliação dessa aprendizagem em processo. Organizar o trabalho em matemática de modo a garantir a aproximação dessa área do conhecimento e da língua materna, além de ser uma proposta interdisciplinar, favorece a valorização de diferentes habilidades que compõem a realidade complexa de qualquer sala

de aula. (Smole, 2001, p. 29).

Logo, o trabalho com a HQ, tem a intenção de viabilizar o trabalho com a leitura, a interpretação e a produção de textos, deixando evidente que por meio das produções o aprendizado pode se tornar eficaz (Durães, 2021, p.76). Além de que as HQ permitem a compreensão textual com mais facilidade, visto que para a leitura desse gênero o leitor costuma estar mais aberto, sendo chamada de *leitura de prazer*, por Fonseca e Cardoso (2009) e Recalde e Gomes (2013), "[...] ou seja, aquela que a pessoa busca por diversão e não como obrigação [...]", além de propiciar o desenvolvimento de produções criativas (artísticas ou raciocínio fora do contexto estabelecido em aula), (Francischini, Silva, Gomes, Barbosa, 2020).

Dessa forma, a HQ foi utilizada nesta pesquisa para ser um suporte pedagógico para o trabalho com sequências recursivas, assim, sendo um caminho facilitador e instigante para os alunos, durante cada etapa, e as respectivas tarefas envolvendo a generalização das sequências.

A pesquisadora teve um momento de diálogo com a turma, explicando passo a passo da pesquisa e do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), que seria necessário para a participação voluntária durante a pesquisa. Porém, apenas nove dos quarenta e nove alunos desta turma tiveram a devolutiva do TCLE. Infelizmente, os demais esqueceram de solicitar aos responsáveis a assinatura, por diversos motivos, durante o período estipulado para devolutiva do termo. Mesmo com a situação, no dia da realização da pesquisa, os alunos que não devolveram os termos assinados, se dispuseram a participar, porém por serem menores de idade não foi possível ser feita a coleta dos dados. Como uma atividade complementar, a professora regente em sala solicitou que eles realizassem as tarefas propostas na pesquisa, sem que seus dados fossem coletados.

Então, dando o prosseguimento da pesquisa, dividimos a sala da seguinte maneira: os nove alunos com autorização, colocamos em três grupos de três, deixamos a escolha deles, a organização dos grupos e os posicionamos em lugares estratégicos da sala, para que melhor pudéssemos ouvi-los e gravá-los. Por ser uma sala bastante comunicativa, tivemos bastante dispersão por parte dos alunos, com conversas entre si, além disso, por ainda não ter sido feita a instalação, do sistema de ar-condicionado, era necessário que as janelas ficassem abertas e o uso dos ventiladores, e associado ao barulho externo a sala, interferiu na acústica do ambiente. Aos quarenta alunos restantes, como os seus dados não viriam a ser coletados, solicitamos a criação de grupos maiores, como sugestão 5 grupos de 8 pessoas, para realização das tarefas, e deixamos eles à vontade para escolherem seus grupos. Com a sala organizada, iniciamos as explicações de forma mais detalhada da pesquisa.

Vale ressaltar um ponto importante, a pesquisa não seguiu para o conselho de ética, uma vez que, ela não se faz obrigatória no programa de pós-graduação do qual a pesquisadora faz parte. Porém, durante a realização da pesquisa em campo, foi necessária a realização de uma gravação, com recurso de vídeo e áudio. Os alunos do 8º ano (sujeitos da pesquisa) eram todos menores de idade, nesse caso sendo preciso encaminhar aos responsáveis legais dos alunos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Anexo I).

5.2 Locus da pesquisa

A localização da escola é no município de Camaragibe, ela atende aos moradores do próprio município e adjacências. Por ser localizada em um município da Região Metropolitana do Recife (RMR), a escola possui uma infraestrutura relativamente aceitável para as aulas, e, consequentemente, para realização da pesquisa. É uma escola atendida pela Secretaria Estadual de Educação, dentro de um grupo de instituições mais modernizadas, pois é contemplada por novos laboratórios, nas áreas de ciências exatas e da natureza e de informática, além de biblioteca e quadra esportiva.

A escolha da escola, foi devido ao fato de a pesquisadora já ter tido o contato em outros momentos com a escola, por meio da participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), durante a graduação em Licenciatura em Matemática, assim, possibilitando o contato mais fácil com a escola para a realização da pesquisa.

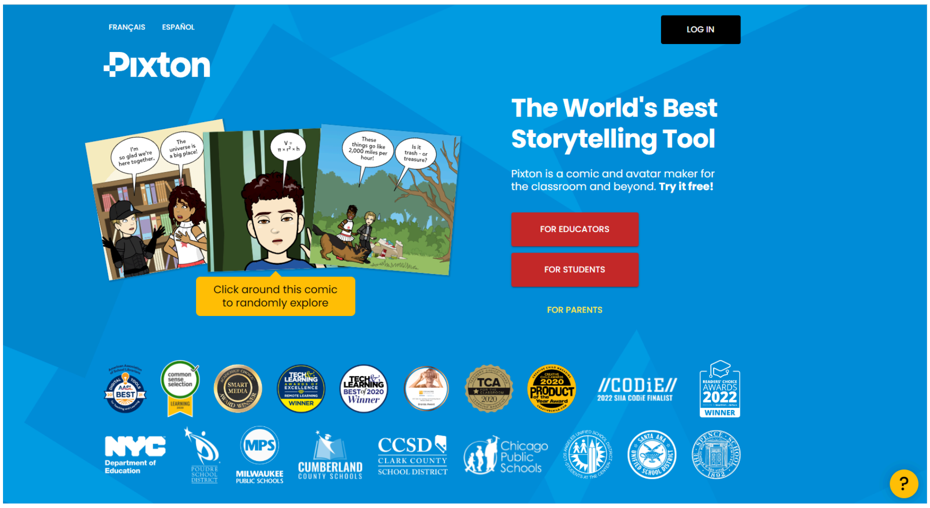
Todo o processo da pesquisa foi conversado com um dos gestores da escola, as necessidades que a pesquisa possui, como por exemplo, empréstimos de aulas, espaços, e da autorização dos responsáveis dos alunos, para que pudessem participar da investigação e da vídeo-gravação durante a pesquisa. Assim, buscamos deixar mais claro e objetivo, o nosso planejamento para a escola. Com relação a vídeo-gravação é uma das particularidades da TO, devido ao fato dela analisar não apenas a escrita, mas os gestos, movimentos e outros movimentos durante o desenvolvimento de uma atividade.

5.3 Apresentação da HQ

A HQ foi elaborada pela autora desta pesquisa, na plataforma digital Pixton, uma ferramenta online que permite a criação de HQ, contendo diversas formas de cenários, personagens, objetos e diversos detalhes para explorar a imaginação de quem a utiliza.

Assim, buscou fazer a autora, durante o processo de criação da HQ, utilizou-se da imaginação, de cenários diversos em que os personagens pudessem parecer estar explorando e vivendo uma aventura para além da matemática.

Figura 7 - Pixton - A ferramenta utilizada para construção da HQ



Fonte: Pixton, 2023

Escolhemos esta ferramenta, por toda a sua estrutura para construção de uma HQ, deixando evidente os traços de uma boa HQ. As criações nessa plataforma permitem a visualização clara e aparente, daquilo que se quer mostrar, como por exemplo, expressões feitas pelos personagens, além dos diálogos de forma natural, das conexões emotivas, entre outros fatores que contemplam a construção de uma HQ.

Além disso, a autora já teve contato com essa e outras ferramentas, possibilitando perceber as diferenças, vantagens e desvantagens durante a criação de uma HQ, assim, conseguindo fazer uma escolha mais assertiva da ferramenta para a pesquisa, que contribuiria com maior praticidade para a produção.

Após a elaboração da HQ, realizamos a impressão com o visual de um livreto. Como a HQ possui três partes, deixamos cada parte em livretos individuais, parte I, parte II e parte III, respectivamente contendo 6, 6 e 5 páginas. Cada parte da HQ possui uma tarefa contendo uma sequência recursiva, que para continuar a história, é necessário que o aluno desenvolva a tarefa da parte em que está.

As tarefas possuem nível gradual de complexidade, pois a ideia por trás dessa determinação é alinhada a um dos nossos objetivos específicos, de verificar se alunos estão ou não pensando algebricamente, e se na resolução há presença dos três elementos categorizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade). Esperávamos com isso, compreender como em cada etapa os alunos desenvolvem as suas habilidades, quais caminhos utilizaram para chegar à resolução e se, na segunda e terceira etapa, respectivamente, utilizam de recursos da primeira e segunda para desenvolver. Com o sentido de que, cada uma das 3 etapas trata-se de uma construção em que uma complementa a outra, pois na primeira o aluno precisava confirmar se os números que faltavam na sequência são os indicados; na segunda etapa indicar três termos próximos, a sequência dada; e por fim, na terceira etapa, indicar dois termos distantes e o termo geral da sequência.

A expectativa era de que a cada tarefa os alunos fossem evoluindo, uma vez que o grau de complexidade iria aumentando, ou seja, que a cada problema houvesse um desenvolvimento sucessivo com o objetivo de identificarmos cada vetor até atingir o pensamento algébrico. Tivemos também a contribuição da HQ, que foi pensada para ser utilizada como um recurso pedagógico no trabalho, com conceitos e conteúdos da matemática, ajudando de forma favorável o trabalho docente, neste caso o da pesquisadora e dando a possibilidade aos alunos de desenvolver os problemas se divertindo, com uma leitura prazerosa.

5.3.1 Produção das tarefas

A HQ foi dividida em três partes, cada uma contendo uma tarefa representada por uma sequência recursiva. Para os alunos, registramos na própria HQ essas sequências como enigmas que precisavam de soluções, assim atrelando ao nosso primeiro objetivo específico, de discutir os conceitos algébricos relacionados às sequências recursivas em um nível gradual de complexidade. Dessa forma, podemos compreender melhor a percepção dos alunos e analisar as estratégias de resolução por meio dos vetores da indeterminação, denotação e analiticidade.

Outro ponto importante que destacamos para a construção da HQ, é a relação que precisamos formar entre a HQ e o público-alvo. Destinada ao público do 8º ano, com faixa etária entre 13 e 14 anos, nos preocupamos em desenvolver uma história cativante, na qual os alunos pudessem despertar o desejo pela leitura, e na continuação dela. Dessa forma, achamos pertinente a fala a respeito de cada uma dessas partes.

A parte I, inicia com o personagem Luca, em uma caminhada matinal em um parque próximo a sua casa. Durante a caminhada, Luca se depara com uma mala em meio ao parque vazio, em seguida, sua amiga Selena, passeando no parque, o cumprimenta. Eles nem imaginavam a aventura que viveriam após esse encontro. Selena, super curiosa, questiona logo se Luca está indo viajar, por encontrá-lo com uma mala. Luca explica toda a situação. Os dois iniciam uma averiguação na mala, e observam que ela se encontra fechada, e para abrir necessitam de uma senha que contém cinco termos.

A senha da mala, na primeira sequência recursiva na HQ, fornece apenas três termos possíveis de serem visualizados, sendo eles o 1º, 2º e 4º termo, assim, faltando o 3º e o 5º termo. Podemos visualizar na figura 8, a forma como a primeira sequência está representada.

Figura 8 - Sequência recursiva da parte I da HQ

Fonte: Imagem produzida pela autora.

Nesta primeira parte da HQ, os próprios personagens, ao longo da história, descobrem o mistério dos dois termos que faltam na sequência. A nossa ideia para a sequência surgiu após uma conversa entre a pesquisadora e o professor orientador deste projeto, que sugeriu a leitura do subtópico 6.4.1 — Intenção e percepção — que se encontra no livro do Profº. Dr. Luis Radford, o livro está intitulado como Teoria da Objetivação: Uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática.

No subtópico do livro, encontra-se o exemplo de uma tarefa realizada com alunos entre 7º ano e 8º ano, com o propósito de um estudo longitudinal. Nesse estudo, foi solicitado aos alunos que verificassem uma generalização em torno de uma sequência figural, especificamente, em um primeiro momento, foram entregues a eles os quatro primeiros termos de uma sequência, e pediu-se que representassem os termos cinco e seis. Depois foi entregue o 8º termo, este, desenhado por uma aluna imaginária. A finalidade era discutir com os alunos se estava correto ou não, o termo da aluna imaginária.

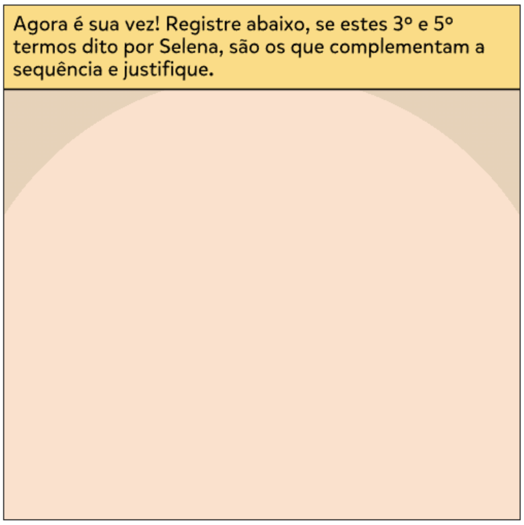
Então, reproduzimos para a HQ essa última situação, semelhante ao exemplo dado por Radford em seu livro. Na sequência recursiva exposta na HQ (figura 6), os personagens (Luca e Selena) descobrem ambos os termos que estão faltando (o 3º e o 5º termo) para completar a sequência, e só assim realizar a abertura da mala. Vamos observar o diálogo entre os personagens na figura 7, quando descobrem os dois termos que estavam faltando.

Figura 9 - Trecho com sobre a Primeira sequência da HQ

Fonte: Imagem produzida pela autora.

A ideia da HQ era que os alunos pudessem participar da história, complementando-a de alguma forma. Então, resolvemos de forma reflexiva, solicitar aos grupos participantes da pesquisa a justificativa deles sobre os valores que estavam faltando, após verem as respostas dos personagens, afirmando se estavam corretos ou não.

Figura 10 - Tarefa da primeira sequência

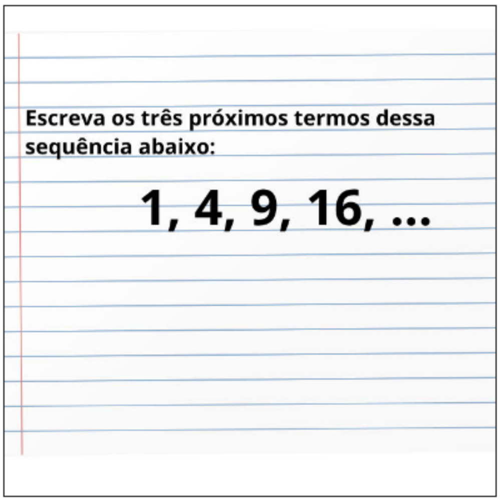


Fonte: Imagem produzida pela autora.

Já na parte II, trazemos a confirmação para os alunos, de que os dois termos ditos por Selena, estavam corretos de fato. Então, os personagens puderam abrir a mala, que era o objetivo após a confirmação dos termos. Depois da abertura da mala, os personagens caem em um universo alternativo, cheio de aventuras que precisam desvendá-las.

Ao entrar no universo alternativo, os personagens começaram a vivenciar aventuras, que os levaram a se deparar com mais outras duas sequências, cada uma delas foi colocada em uma parte da HQ. A sequência recursiva da parte II, apresentava os 4 primeiros termos, e solicitamos aos alunos encontrarem os 3 termos seguintes, como mostraremos na figura 11.

Figura 11 - Sequência recursiva da parte II da HQ



Fonte: Imagem produzida pela autora.

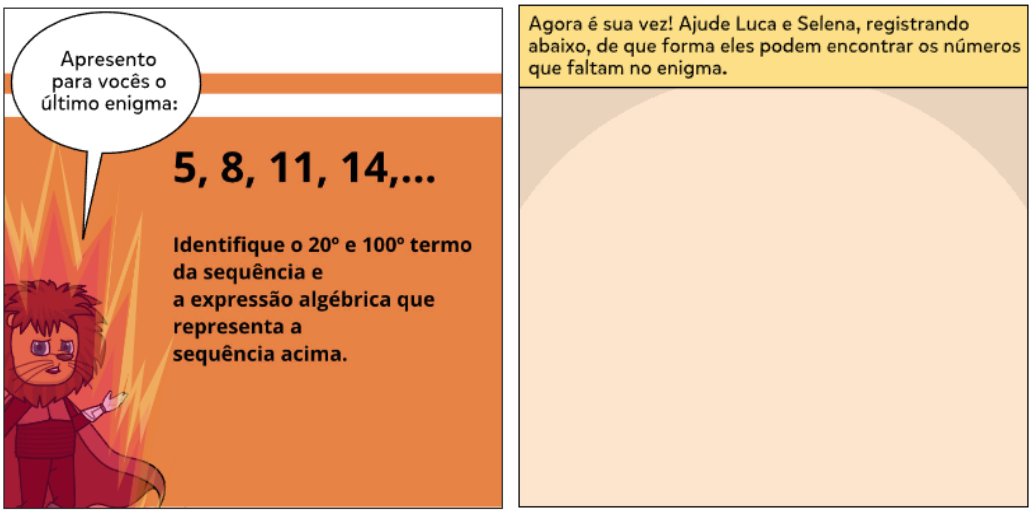
Solicitamos o comando descrito na figura acima, como seria a primeira sequência que os alunos teriam que encontrar os termos, então, achamos interessante iniciarmos com o pedido dos termos próximos. Trabalhando o caso de uma generalização próxima, apesar de estarmos cientes de que neste caso de generalização, é comum que os alunos resolvam passo-a-passo por meio da contagem e encontrem um caminho que tenha maior facilidade para resolução, como, por exemplo, o pensamento aritmético.

Com uma generalização distante, seria mais desafiador para esse segundo momento, pois neste caso, a nossa intenção é que os alunos consigam encontrar o padrão que representa a sequência, sendo possível alcançarem uma lei de formação, como consequência. A ideia para as tarefas era de que as sequências recursivas seguissem um nível gradual de complexidade, então na parte III da HQ, utilizamos uma sequência recursiva, solicitando dois termos, o 20º e o 100º, ou seja, solicitamos uma generalização distante. Além disso exigimos nesta tarefa de forma direta, o encontro da lei de formação da sequência.

Nas tarefas anteriores, não solicitamos a lei de formação, mas isso não significou que os alunos não pudessem encontrá-las, até porque durante o diálogo entre alunos e a pesquisadora, houve tentativas da pesquisadora em conduzir os alunos ao encontro da lei de formação para cada sequência recursiva. Porém, a nossa solicitação só veio na última parte, pois acreditamos que o trabalho com uma generalização distante e as lacunas entre os termos viriam gerar uma dificuldade maior.

Então, dando continuidade à descrição, a respeito da sequência presente na parte III da HQ, redigimos aos alunos, a seguinte situação, a qual os personagens mais uma vez vão precisar da ajuda dos alunos para solucionar o enigma. Ainda em um universo paralelo e com o desejo de voltar ao universo deles, porém, precisavam passar pela última fase, uma sequência um pouco mais complexa em relação às duas primeiras (Figura 12).

Figura 12 - Sequência recursiva da parte III e tarefa



Fonte: Imagem produzida pela autora

Nesta sequência recursiva, o nosso maior desejo era que o aluno atingisse o nível máximo do pensamento algébrico, a partir de conseguir solucionar a lei de formação exigida, trabalhando com o simbolismo alfanumérico, chegando ao pensamento algébrico simbólico.

Durante toda a atividade, a pesquisadora se fez presente conversando e interagindo com os alunos, tentando ao máximo estreitar as relações, tanto dela com os alunos, quanto entre os próprios alunos. Essa atitude visou integrar uma das fases do labor conjunto, o qual detalharemos no tópico de metodologia da aplicação da tarefa, mas vale a ressalva que esse envolvimento entre os alunos e a pesquisadora com os alunos, foi bastante importante para a construção do objetivo da tarefa e consequentemente da atividade.

A HQ foi um grande diferencial, enriquecendo a forma de aplicações das tarefas com que veremos adiante, no tópico metodologia da aplicação da tarefa. Mas vale ressaltar que a HQ completa se encontra no apêndice I deste texto.

5.4 Metodologia da aplicação da tarefa

Antes de relatamos a metodologia da aplicação da tarefa, e a vivência da atividade, é importante falarmos e refletirmos sobre o termo atividade na perspectiva da TO.

Almeida e Martins, diz que “[...] é algo que vai além das pessoas interagirem com o propósito de fazer algo” (2022, p.5), por meio do trabalho em conjunto, o professor e o aluno estão em uma atividade contínua, buscando satisfazer suas necessidades, acarretando na tomada de consciência dos conceitos matemáticos (processos de objetivação) (Minoso; Panossian; Lambach, 2021, p. 719).

Radford (2009, 2013, 2014, 2021, 2022) proporciona uma argumentação ímpar para na Teoria da Objetivação, pois, o termo atividade "pode ser empregado constantemente para representar diversas circunstâncias e distintos significados, por exemplo, podendo ser como “[...] um *sistema dinâmico* onde os indivíduos interagem coletivamente com um *forte* sentido social, o que torna os produtos da atividade também coletivos” (Radford, 2021, p. 52).

A atividade faz com que os sujeitos, durante o seu desenvolvimento, precisem se apropriar do mundo cultural e das interações sociais, visando a realidade, além de ter uma boa comunicação e linguagem, em particular para este caso, o conhecimento matemático também é importante, assim, podendo se entrelaçar durante a atividade na busca das suas necessidades. Dessa maneira, Radford diz que:

> A atividade deve ser vista como uma fonte de vida; um esforço conjunto em que passamos a agir, pensar e sentir juntos [...] devemos conceber a atividade como um esforço conjunto, e o trabalho conjunto, como um trabalho de estudantes e de professores e alunos trabalhando lado a lado, protegidos em formas não individualistas de cooperação humana e formas comunitárias de produção de saberes (Radford, 2017c, p. 156).

Sendo assim, para Radford (2015), a TO irá tentar entender a aprendizagem não apenas como um resultado individual, pois a atividade humana é exclusivamente social, mesmo quando o sujeito está só, a atividade social não desaparece (Radford, 2018a). Imagine que um aluno ao desenvolver uma tarefa sozinho de forma física, mesmo assim ele necessitará de recursos para o desenvolvimento, recursos sejam eles históricos, culturais e sociais, por exemplo, um lápis, uma caneta, um computador, a linguagem e diversos outros, dessa forma a atividade sempre será social.

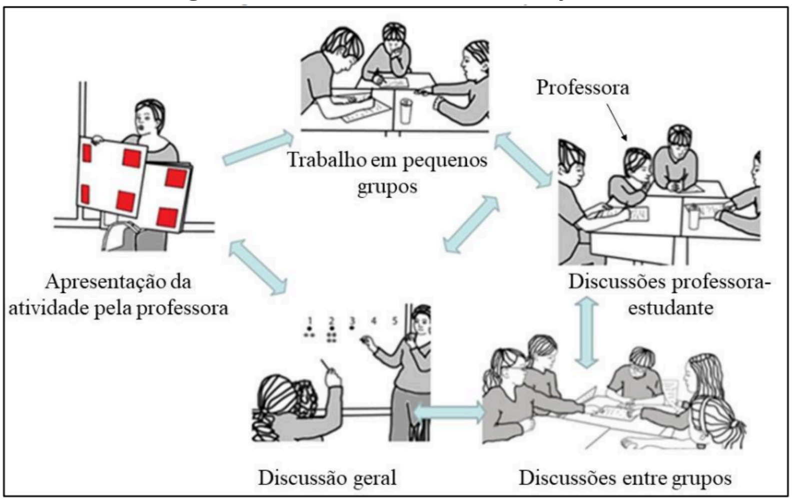
Então, observamos necessário a identificação dos alunos como sujeitos históricos, culturais e sociais, como dito por Minosso, Díaz-Urdaneta e Panossian (2022, p.3), assim, compreendemos que os alunos passam a tornar-se conscientes nas formas de "pensar e agir culturalmente constituídas e como subjetividades em formação, professores e alunos se posicionam em práticas matemáticas" (Radford, 2015, p. 553).

Para que se possa desenvolver e entender a atividade, é necessário que se tenha uma tarefa, na qual a "estrutura objeto-meta-tarefa é, portanto, uma parte central do design da atividade da sala de aula" (Radford, 2015, p. 555). O objeto irá se referir aos saberes matemáticos; a meta é a intencionalidade do professor; por fim, a tarefa são as ações e os problemas sequenciais que os alunos vão mobilizar durante o desenvolvimento da atividade em sala de aula.

Além disso, a TO "[...] reconceitualiza o trabalho conjunto para trazer à tona a importância ontológica e epistemológica da atividade como forma de vida" (Radford, 2017, p. 255). Sendo o trabalho em conjunto, em que foi renomeado por Radford (2020) de "labor conjunto", permitindo considerar a atividade proposta em sala de aula como uma unidade de análise para a TO.

O labor conjunto (Figura 13) é constituído em várias fases, como mostraremos na imagem abaixo que por sua vez, é exemplificada com setas bidirecionais, ligadas às fases, definidas por: apresentação da atividade pela professora, trabalhos em pequenos grupos, discussões professora-estudante, discussões entre grupos e discussão geral. A ideia que as setas bidirecionais transmitem, nessa circunstância, é a indicação de que o professor pode retomar algum e/ou alguns momentos caso ele ache necessário durante a dinâmica da atividade.

Figura 13 - As fases do labor conjunto



Fonte: Radford (2020, p.30, tradução nossa)

O labor conjunto é marcado pela intenção de ensinar algo, além disso, um tipo específico de atividade e, para Radford (2020, 2021), ele irá mostrar-se na vivência da sala de aula durante uma atividade de ensino e aprendizagem, em que o professor a produziu, fazendo com que as interações entre os sujeitos assumam um modelo específico. Além disso, a obra comum, como Hegel denominou, entre os participantes, faz com que exista uma conexão intensa durante o trabalho coletivo.

A proposta é que aconteçam diversos debates, uma vez que na TO o ensino e aprendizagem acontece no sentido de fazer com que o aluno tome consciência do saber matemático na medida em que ele compreende a necessidade em se posicionar criticamente diante do saber e identificar as diferentes formas possíveis de resolver problemas (Herrera, 2020).

Além disso, os processos de subjetivação, que se refere ao ser, e os processos de objetivação, que se referem ao saber, conforme já explicado no tópico 3.1. Eles ocorrem em simultaneidade na construção do labor conjunto, ou seja, o processo da atividade levará em conta a construção social do indivíduo, havendo respeito mútuo, atenção a fala do outro, e a vez em que o outro está falando, o que pode ser identificado como a ética comunitária (Radford, 2020). Radford (2017c), organiza-a em três pontos que compõem a estrutura essencial da subjetividade: a responsabilidade, o cuidado e o compromisso com o outro.

> A responsabilidade está relacionada com a união com o outro, atender ao chamado do outro. O cuidado faz referência ao ato de ver a nós mesmos no outro, reconhecer nossa vulnerabilidade a vulnerabilidade do outro. E o

> compromisso é buscar fazer o que for possível para a realização da obra comum (Silva, 2021, p.41).

Apesar de frisar a importância dos dois processos citados acima, não destacamos o estudo da transformação do ser e sim, a materialização do saber algébrico. Além disso, há também os três principais conceitos que a TO emerge, o saber, o conhecimento e a aprendizagem. Em uma entrevista concedida, Radford diz que:

> [...] o saber aparece como uma síntese de generalização codificada da ação humana – o trabalho humano –, de modo que, para o aluno, o saber aparece como pura potencialidade. Já o conhecimento é considerado nessa teoria como a atualização do saber e a aprendizagem é compreendida como a tomada de consciência de objetos e sistemas de pensamento que são sintetizados a partir da prática social. (Moretti; Panossian; Moura, 2015, p.246)

Para que ocorra este processo, Radford (2015) sugere que a estrutura da tarefa seja de forma sequencial ou com grau de dificuldade crescente, para que assim possa ser levado em consideração os conhecimentos e o interesse dos alunos. Então, dessa forma, nos inspiramos para que as nossas sequências recursivas apresentadas ao longo da atividade fossem aumentando o grau de complexidade, ao mesmo tempo que provocasse o interesse na participação.

O momento para aplicação da HQ foi bem curto, a pesquisadora dirigiu-se até a escola pretendida, no dia e horário marcado, uma vez que só foram cedidas duas aulas da professora de matemática, regente da turma do 8º ano. A pesquisa foi realizada dentro da própria sala de aula, a turma era composta por 49 alunos, em que apenas 9 deles participaram da pesquisa, porém os demais 40 alunos permaneceram na sala de aula, uma vez que, a escola estava sem salas extras disponíveis, e dessa forma, aconteceu a realização da atividade.

5.5 Instrumento de produção dos dados e especificidades da análise

Neste tópico, apresentaremos a realidade sob a perspectiva do embasamento teórico que orienta esta pesquisa, visando explorar as maneiras como os alunos generalizam durante o processo da atividade, pois, para Radford (2017b), com base na TO, “a materialização do saber algébrico é algo particular, singular, que surge no projeto didático estabelecido, mas não podemos determinar previamente se irá ou não acontecer" (apud, Silva, 2021, p. 73).

A metodologia que utilizamos é de uma análise multimodal, pois partimos do princípio de que o pensamento algébrico possui essa natureza, como é pautada na TO. Para isso, precisamos considerar qualquer meio de manifestação, seja pela fala, representações escritas, gestos, artefatos, movimentos e entre outros que possamos identificar indícios de objetivação do saber algébrico, uma vez que, a metodologia considera e relaciona os "recursos cognitivos, físicos e perceptíveis que os alunos utilizam quando trabalham com ideias matemáticas" (Vergel, 2016, p. 26, tradução nossa).

Então, durante o desenvolvimento da atividade, foi necessária uma vídeo-gravação, a fim de conseguirmos observar os detalhes que auxiliaram no momento da análise da pesquisa. Dessa forma, conseguimos identificar os registros de meios semióticos, processos de objetivação, além disso, averiguando com mais precisão os objetivos específicos de **analisar e identificar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para resolver os problemas de sequências recursivas contidas na História em Quadrinhos, e identificar na resolução dos alunos a presença dos três elementos categorizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade).**

Então, devemos levar em consideração que, na atividade de ensino-aprendizagem, os alunos recorrem aos distintos recursos semióticos, com isso, eles são aplicados para representar os pensamentos, reflexões e ações" (Marques, 2022, p. 64-65). Ou seja, a atividade será um trabalho, pois, segundo Romeiro e Moretti (2021, p. 461) não é uma ação inata e individual, mas sim mediada pelas relações humanas, pelos signos, instrumentos, entre outros.

Com isso, vale a ressalva para a apresentação da análise da pesquisa que será abordada no próximo capítulo. Houve participação de 9 alunos, divididos em 3 grupos com 3 participantes cada. A professora pesquisadora também tentou organizar a sala, para que pudesse circular bem entre os 3 grupos, uma vez que sua intenção era dialogar e manter o diálogo, com os grupos, durante a realização da pesquisa.

Após a organização dos 3 grupos, fomos às informações para realização da atividade. Solicitamos aos alunos, sempre que fossem iniciar uma parte da HQ (dividida em III etapas) realizarem uma primeira leitura silenciosa e individual, depois uma releitura de forma coletiva com seus respectivos grupos, para que, após isso, pudessem resolver a tarefa da etapa.

Apesar de 3 grupos participantes da pesquisa, a análise foi de apenas um grupo, visto que, após observar as vídeo-gravações e registros das tarefas, os outros dois grupos, não trouxeram arcabouços suficientes para a análise, devido à estrutura oferecida pelo ambiente da escola, o que dificultou para que isso acontecesse. Pois, além da superlotação na sala de aula, fazendo com que houvesse distrações por parte dos alunos durante a realização da pesquisa, fatores como climatização também impulsionaram para a desestimulação dos participantes que reclamaram do calor durante a pesquisa.

Assim, dois dos três grupos se dispersaram muito, não conseguiram manter a concentração. Apenas um grupo foi mais desenvolto, mantendo o comprometimento em participar da pesquisa, ignorando fatores externos. No capítulo a seguir analisaremos o grupo, o qual conseguimos realizar toda a pesquisa.

6. A ANÁLISE

Neste capítulo apresentaremos as análises das tarefas realizadas durante a atividade. A análise, será apenas de um grupo, conforme já explicamos no subtópico 5.5 do capítulo anterior.

No mais, o grupo que será analisado é composto por três garotas, com os codinomes Ana, Bia e Camila, elas apresentaram um comportamento envolvente pela pesquisa, porém, apenas uma das três meninas, têm destaque durante as falas. A aluna Ana foi bastante desenvolta, demonstrando protagonismo durante toda a atividade. Enquanto Bia e Camila foram tímidas durante os diálogos e a resolução das tarefas.

Como Ana demonstrou o gosto pela fala, trazendo argumentos durante toda a atividade, ela tomou a maior parte do diálogo. Juntamente a professora pesquisadora que, que por sua vez, aproveitou que Ana emergia um comportamento que, quando impulsionada, levava-a ao objetivo da pesquisa, aproveitou-se para alcançar o que se desejava. Porém, em momento algum houve desmerecimento, ou muito menos exclusão das demais participantes, mas, neste caso, trabalhou-se com a intenção de ensinar algo com a atividade, não somente a Ana, mas para as alunas Bia e Camila também.

Com isso, achamos pertinente e necessário, deixar claro que em nenhum momento houve a falta de compromisso e cuidado com o outro por parte da aluna Ana e da professora pesquisadora. A aluna Ana, sempre atenta e solícita para explicar às amigas o que estava acontecendo, como por exemplo, perguntando em alguns momentos da pesquisa, se elas estavam compreendendo, e até mesmo em alguns momentos, parando para explicar a elas o que estava sendo feito.

Além disso, houve momentos em que era possível ver a troca de olhares entre as meninas, principalmente por parte de Ana. Ocorreram trocas de olhares de confirmação e seguido de uma afirmação ao movimentar a cabeça de Ana com as amigas, de forma positiva, gerando o entendimento de que tudo estava bem e de que estavam compreendendo naquele determinado ponto da atividade.

Compreendemos o não destaque e o envolvimento parcial, por parte das garotas Bia e Camila, como timidez, então resolvemos não insistir e respeitamos o espaço delas. Além disso, entendemos também que mesmo tímidas, elas estavam satisfeitas em participarem da atividade. Elas sorriem durante toda a pesquisa, demonstram empatia e ao fim disseram que gostaram muito de participar e abraçaram a professora pesquisadora para se despedir.

No próximo subtópico, poderá ser visto de forma mais detalhada e concisa, a análise da primeira tarefa, que consiste nos alunos justificarem se os dois termos faltosos, que são complementados pelos personagens da HQ, na sequência apresentada, estão corretos e de que forma os personagens chegaram naquele determinado resultado. A sequência dada é 9, 11, _, 15, _, e em seguida os personagens da HQ a complementam com os valores dos 3º e 5º termos, 13 e 17, respectivamente.

6.1 A primeira análise

Neste tópico apresentaremos a análise da sequência recursiva (figura 7) que está apresentada na parte I da HQ. Na figura abaixo está o grupo que analisaremos, formado por três meninas, Ana (lado esquerdo da imagem), Bia (no meio da imagem) e Camila (lado direito da imagem), vale ressaltar que os nomes citados das participantes são fictícios.

Figura 14: Ana, Bia e Camila realizando a leitura em grupo

Fonte: Imagem produzida pela autora.

As meninas estavam bastante animadas, apesar de que as alunas Bia e Camila observaram mais e argumentaram em poucos momentos, assim, a aluna Ana esteve quase que todo o momento com sua fala ativa, com questionamentos e argumentos.

Ao solicitarmos a leitura em grupo, Ana se prontificou a ler em todas as etapas, e ao mesmo tempo em que realizava a leitura fazia explicações, a qual acreditava ser relevante para o seu grupo, veremos com mais detalhe no quadro 5 a seguir.

Quadro 5 - 1º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	**Episódio 1**	**Comentários interpretativos**
01	**Ana:** de 9 para 11, aumenta 2, de 11 para 13, aumenta 2, de 13 para 15, aumenta 2. Então a sequência tá aumentando de 2 em 2. Eu esqueci o nome agora para o número, mas o número que vai mudando é de 2 na sequência.	Observa que de um termo para o outro da sequência é adicionado duas unidades
02	**Professora pesquisadora:** caso a senha tivesse 6 dígitos, qual seria o 6º dígito?	Solicita a generalização próxima, após a explicação dada pela aluna Ana.
03	**Ana:** 19, o sexto dígito. 	Ana movimenta os dedos indicador e o médio, contando de dois em dois, explorando cada termo da sequência, até chegar ao sexto termo.
04	**Professora pesquisadora:** Então o 3º e 5º termo estão corretos?	
05	**Ana:** Devido à semelhança, do 9 para o 11, qual a semelhança do 11 para o 13?	A aluna Ana responde retornando com uma pergunta para o grupo.
06	**Camila:** muda de 2 em 2.	
07	**Ana:** Então qual a distância? de 9 para 11 são 2, já sabendo essa semelhança podemos ver que de 9 para 11, aumenta 2, então vai dar para adivinhar, determinar a sequência por aí, quais são os próximos números.	Utiliza a palavra semelhança referente ao aumento de 2 unidades que acontece de um termo para o outro.

08	**Professora pesquisadora:** Então, se pensarmos que a senha tem uma continuidade, qual seria o 20º número?	Tentativa que a aluna faça uma generalização distante.
09	**Ana:** O 6º seria 19, o 7º seria 21, o 8º é 23, 20º é 47. Acho que é mais fácil escrever.	Ana, continua com o pensamento de contar a cada 2 unidades de um termo para o outro da sequência.
10	**Bia:** Por que escrever?	
11	**Ana:** É como se tivesse que explicar para a sala toda, a pessoa precisa entender o porquê, então a finalidade é isso.	
12	**Bia:** É possível perceber, então, que o seu padrão…	
13	**Ana:** É possível perceber o fator determinante, o número 2. De 9 para 11, aumenta 2, de 11 para 13, aumenta 2, de 13 para 15, aumenta 2, de 15 para 17, aumenta 2. Então, sim, as respostas estão corretas, é isso.	Ana, modifica a palavra semelhança para fator determinante, justificando o que acontece entre o primeiro e os seguintes termos da sequência, concluindo que a resposta dada pelos personagens da HQ está correta.

Fonte: Elaborado pela autora.

Apesar da desenvoltura, nesta primeira parte da análise, o grupo não atingiu nenhuma mobilização do pensamento algébrico, porém observamos indícios de uma generalização aritmética. Os atributos que foram seguidos por Ana, não são possíveis de serem transformados em hipótese e deduzidos a uma fórmula algébrica por meio da utilização feita (Radford, 2013a), uma vez que para encontrar o termo seguinte somam duas unidades ao valor do termo anterior.

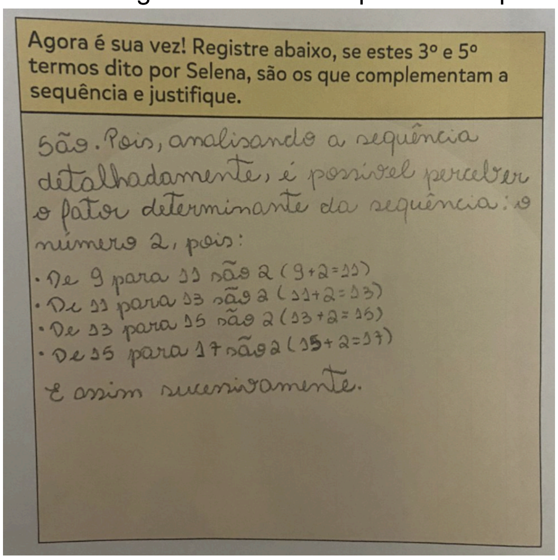
Então, a aluna Ana compreende que os termos da sequência são gerados ao adicionar duas unidades de um termo para o outro. Prontamente, quando a professora pesquisadora pergunta no enunciado 02, pelo 6º termo, Ana em silêncio começa a movimentar os dois dedos fazendo menção ao aumento das duas unidades, para cada termo, iniciando do último termo (5º termo) apresentado na sequência. Então como pode ser visto no enunciado 03, Ana, toca sobre a mesa com dois dedos, o indicador e o médio, para responder qual seria o 6º termo. A mesma situação se repete para o enunciado 09, quando Ana, faz os movimentos, até chegar ao resultado do 20º termo.

O gesto realizado por Ana, é um dos meios semióticos que os alunos manifestam para demonstrar e objetivar seu pensamento, que segundo Radford (2003), esses meios semióticos ajudam o aluno a tornar aparente suas ideias e intenções, assim podendo responder os questionamentos dos problemas propostos.

Após a contagem, Ana demonstra estar cansada da repetição, em seguida, no enunciado 09, sinaliza que é melhor escrever. Sua amiga, Bia, que estava em silêncio até o momento, apenas fazendo gestos de concordância com a cabeça durante as falas de Ana, questiona, no enunciado 10, o motivo da escrita. Então, podemos observar no enunciado 12 que Bia, mais uma vez, se lança a acrescentar, deixando de forma subentendida, que o padrão da sequência seria o aumento de duas unidades de um termo para o outro. Apesar de Bia não complementar sua fala, com a interrupção da Ana, com o intuito de complementá-la.

Ao finalizar o debate, Ana começa a escrever no espaço fornecido na HQ (Figura 10), deixando a explicação registrada conforme na figura abaixo.

Figura 15 - Registro da tarefa da primeira sequência


Agora é sua vez! Registre abaixo, se estes 3º e 5º termos dito por Selena, são os que complementam a sequência e justifique.

São. Pois, analisando a sequência detalhadamente, é possível perceber o fator determinante da sequência: o número 2, pois:

- De 9 para 11 são 2 (9+2=11)
- De 11 para 13 são 2 (11+2=13)
- De 13 para 15 são 2 (13+2=15)
- De 15 para 17 são 2 (15+2=17)

E assim sucessivamente.

Fonte: Registro feito pela autora.

A justificativa da figura acima, está correta numericamente, porém, segundo Radford (2013a), apenas a identificação dessa característica demonstra que o grupo realizou uma generalização aritmética, uma vez que, os alunos somam de dois em dois a quantidade para cada termo da sequência, criando um procedimento e não a dedução de uma fórmula.

Como a HQ apresenta 3 tipos de sequências recursivas, exploraremos as atribuições dada pelo grupo de Ana, Bia e Camila, às outras sequências, em busca de identificar as formas de pensamento algébrico, que os alunos podem a vir mobilizar ao tentar resolver uma tarefa de generalização de padrões, assim, buscaremos encontrar os meios semióticos de objetivação e a presença dos três vetores caracterizadores do pensamento algébrico.

6.2 A segunda análise

Na parte II da HQ trouxemos uma outra sequência recursiva, desta vez apresentamos apenas os quatros primeiros termos (1, 4, 9, 16, …) e solicitamos que escrevessem os três termos seguintes, ou seja, o 5º, 6º e 7º termo. No quadro 6, podemos ver o início da tentativa do grupo das meninas Ana, Bia e Camila, em solucionar a sequência.

Quadro 6 - 2º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 2	Comentários interpretativos
01	Ana: Desta vez não é soma.	Após a leitura, Ana afirma que não pode ser uma soma dessa vez.
02	Professora pesquisadora: Por que não pode ser soma?	A professora questiona, para melhor compreender a afirmação.
03	Ana: Porque de 1 para quatro a diferença é de 3, só que não tem como ser isso. Porque de 4 para 9 não são 3, seriam 7.	Ana, refere-se a soma, reforçando que não tem como encontrar os termos por meio da soma, destacando a diferença que acontece entre os valores de um termo para o outro da sequência.
04	Bia: E nem de 9 para 16.	Bia complementa o pensamento de Ana, frisando outros dois termos expostos na sequência.
05	Ana: Então pode ser algum fator, pode ser Mínimo Múltiplo Comum ou Divisor Comum. Tem que analisar a semelhança para ver o que todos têm em comum. Não acho que seja par, porque 1 não é par, 9 também não é par.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Após uma leitura atenta, feita pelo grupo, da parte II e da tarefa apresentada na HQ, a integrante Ana declarou com convicção que desta vez não se tratava de uma soma. A professora pesquisadora pede que ela explique melhor sua afirmação para compreender o raciocínio por trás da sua afirmação. Ana, então, começa a detalhar sua análise durante suas falas no episódio 2, trazendo observações da sequência, tentando perceber que não é possível determinar os termos por meio de uma soma entre eles, pois existe uma diferença constante entre os valores de um termo para o outro, que ao seu ver não se enquadra a uma soma.

Ana, segue deixando enfatizado que essa diferença específica entre os termos é o que impossibilita o uso da adição para encontrar os demais valores da sequência, isso fica ainda mais explícito em sua fala no enunciado 03, trazendo os termos iniciais da sequência, deixando a sua tentativa de descobrir o padrão da sequência evidente, para conseguir definir toda a sequência e como é encontrado cada termo.

Reforçando o argumento dado por Ana, a aluna Bia, intervém, concordando e dizendo que "nem de 9 para 16", existirá uma semelhança com os termos anteriores que possam ter algum indicativo de soma. Ana, complementa no enunciado 05, deixando evidente em sua fala, que ela e suas amigas não estão fazendo uma observação das características da sequência que ajuda a deduzir uma fórmula, mas sim buscam algum método matemático, já estudado, para tentar encaixar como resposta (Silva, 2021, p. 81).

Observando a persistência das meninas, em tentar encontrar um método matemático para satisfazer a sequência, a professora pesquisadora faz um questionamento para provocar e questioná-las, dando continuidade ao trabalho conjunto, professora-alunos, como pode ser visto no episódio 3 no quadro abaixo.

Quadro 7 - 3º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 3	Comentários interpretativos
06	**Professora pesquisadora:** O que vocês conseguem observar com relação ao número e a posição que ele está?	A professora, resolve tentar avançar nas discussões, propondo a visualização da relação entre posição do termo com o valor dele.
07	**Ana:** Como assim?	

08	**Professora pesquisadora:** Porque na primeira tá o número 1, na segunda posição está o número 4, na terceira o número 9. Pensem um pouco sobre isso.	
09	**Ana:** Pode ser qualquer coisa, pode ser divisão, múltiplo. Mas acho difícil ser divisão, não tem nenhum número que seja divisível.	Ana, foge da proposta feita pela professora. Foca apenas nos conteúdos para solucionar a sequência.
10	**Professora pesquisadora:** Pensem um pouco no que eu disse antes a respeito de cada termo da sequência e seus respectivos valores. O primeiro é o número 1, na segunda posição está o número 4, na terceira o número 9.	A professora reforça, o que falou anteriormente.

Fonte: Elaborado pela autora.

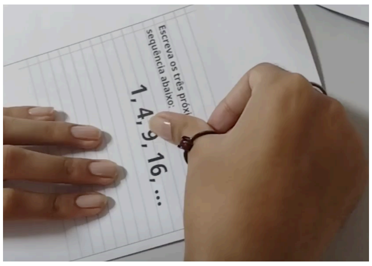
A professora pesquisadora propõe que observem a relação entre o valor do termo e a posição ocupada por ele, tentando ajudar o grupo com essa dica, para fortalecer o desenvolvimento da progressão nas discussões. Mas apenas Ana continua a interação, tanto no episódio acima e nos demais.

Nesse episódio 3, podemos observar que as falas de Ana, fogem da proposta feita. Ela demonstra continua presa a discussão do episódio 2 em tentar descobrir primeiro qual conteúdo matemático melhor se encaixa para solucionar a sequência, trazendo alternativas que não correspondem ao que era esperado por parte da professora pesquisadora, visto que, ela apenas repete o que foi frisado. Com isso, a professora pesquisadora prefere se afastar um pouco do grupo, deixando que as alunas reflitam sobre sua fala no enunciado 06.

A professora pesquisadora, ao se afastar, permanece observando esse momento na expectativa de que possa registrar algum sinal de progresso das alunas com base em sua dica. Alguns minutos depois (em torno de uns 4 minutos), a aluna Ana chama a professora pesquisadora e diz que teve uma ideia. Conforme está expresso no quadro abaixo.

Quadro 8 - 4º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 4	Comentários interpretativos

11	**Ana:** Eu tive uma ideia! Se a gente multiplicar, 1 vezes 1 dá 1, 2 vezes 2 dá 4, 3 vezes 3 dá 9, 4 vezes 4 dá 16, então o próximo, é 5 vezes 5 que dá 25.  	Enquanto fala, Ana aponta para cada termo.
12	**Professora pesquisadora:** E para vigésima posição qual seria o número?	A professora aproveita a ideia que Ana demonstrou ao encontrar o valor da 5º posição e questiona o resultado para um termo que está mais distante.
13	**Ana:** Seria na vigésima posição…20 multiplicando 20.	

Fonte: Elaborado pela autora.

A aluna Ana, expressa uma ideia, como exposto em sua fala no enunciado 12: "Eu tive uma ideia! Se a gente multiplicar, 1 vezes 1 dá 1, 2 vezes 2 dá 4, 3 vezes 3 dá 9, 4 vezes 4 dá 16, então o próximo, é 5 vezes 5 que dá 25". Ana, teve o que podemos chamar de atividade perceptiva, emergindo um dos meios semióticos de objetivação, assim, à maneira que Ana percebe ao olhar para a sequência que, cada posição é multiplicada por si, iniciando no primeiro termo e seguindo para os demais: "[...] 1 vezes 1 dá 1, 2 vezes 2 dá 4, 3 vezes 3 dá 9, 4 vezes 4 dá 16, então o próximo, é 5 vezes 5 que dá 25". Além disso, ela utiliza-se do gesto com o dedo, apontando para cada termo, enquanto fala (enunciado 11). Essa resolução, realizada pela aluna, fez com que ela fizesse uma distinção entre a posição dos termos e os valores de cada termo (Radford, 2013a).

A prova de que essa resolução acima, foi uma característica percebida das posições (1ª, 2ª, 3ª, 4ª) dos termos, por parte da aluna, é pelo fato de que já conhecia os termos previamente e, como consequência disso, conseguiu dar continuidade ao seu raciocínio, encontrando o valor do termo na 5ª posição, assim finalizando sua fala no enunciado 12.

Em seguida, no enunciado 13, a professora pesquisadora aproveita que Ana encontrou o valor do termo no 5º para perguntar à aluna: "E para vigésima posição qual seria o número?". E Ana, prontamente responde, conforme descrito no enunciado 14, repetindo a mesma característica utilizada para encontrar o valor da 5ª posição, multiplicando 20 por 20, ou seja, o valor do termo pelo valor da posição. Mas, vale a ressalva que, apesar de informar os resultados corretos para o 5º e 20º termo, Ana, não informa com clareza, ainda, o real significado da multiplicação entre os elementos presentes na operação feita, apenas demonstra que deve ser feito assim, para chegar ao resultado dos termos da sequência.

E assim, Ana assume essa característica, partindo de um princípio assumido, transformando-o em hipótese (Radford, 2013a), o que a leva a deduzir uma fórmula mais à frente nas discussões. Porém, a sua hipótese foi utilizada para generalizar termos tanto próximos, como o 5º termo, quanto mais distantes, como o 20º termo.

Com base nessas observações feitas pela aluna Ana, citadas no parágrafo acima, após ter tido uma interação com a professora pesquisadora, e ela, estava participando ativamente do processo com o grupo, podendo ver de perto a evolução na resolução da tarefa, assim, o trabalho ombro a ombro teve a intenção de ensinar algo. É possível notar, por meio da análise multimodal das respostas dadas, que a indeterminação está, ainda, bastante implícita e denotada por meio de números específicos e ações concretas (Radford, 2018), quando fala qual multiplicação será feita e aponta para o termo correto e assim segue de forma sucessiva com os demais, trabalhando os gestos, o ritmo e a fala, além da atividade perceptiva, esses foram os principais meios semióticos, até o momento que a aluna, Ana, emergiu.

Quadro 9 - 5º quadro interpretativo das análises

14	**Professora pesquisadora:** Isso mesmo. Agora se quisessem encontrar o valor dessa sequência para qualquer termo, o que faríamos? Qual operação você está fazendo para descobrir o termo da sequência? A partir de que?	

15	**Ana:** Da multiplicação.	
16	**Professora pesquisadora:** Multiplicação de que?	
17	**Ana:** Da posição. O da segunda posição vai ser multiplicado por 2, o da terceira por 3, ou seja, o 9, tá na terceira posição do resultado de 3 multiplicado por 3.	
18	**Professora pesquisadora:** Vocês entenderam o que ela acabou de dizer? Vocês concordam?	

Fonte: elaborado pela autora.

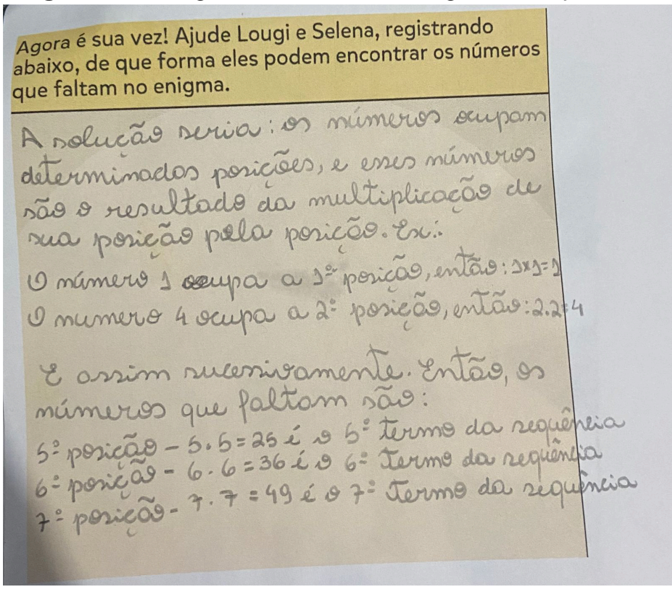
No episódio anterior, foram descobertos o 5º termo e o 20º termo, a professora pesquisadora observa que Ana, está bem apegada com a hipótese que assumiu, então tenta ajudar, a aluna, a progredir com sua argumentação, em busca de desenvolver os três elementos que categorizam o pensamento algébrico.

A professora pesquisadora a questiona no episódio 14 "[...] se quisessem encontrar o valor dessa sequência para qualquer termo, o que faríamos? [...] Qual operação você está fazendo para descobrir o termo da sequência? [...]", e Ana responde no episódio 15: "[...] multiplicação" e complementa no episódio 17: "da posição [...]".

Após esse momento de pergunta e resposta da professora pesquisadora com Ana, é possível observar que Ana, consegue informar o que foi feito para descobrir os termos da quinta e vigésima posição, pois, no episódio anterior a este, ela apenas disse que: "5 vezes 5 que dá 25" e "20 multiplicando 20", mas o que seria essa multiplicação entre os valores 5 e os valores 20?

Então, na sua fala ainda no episódio 18, ela deixa claro o que foi feito: "O da segunda posição vai ser multiplicado por 2, o da terceira por 3, ou seja, o 9, tá na terceira posição do resultado de 3 multiplicado por 3". Após isso, ela pede um lápis e escreve no espaço deixado na própria tarefa, o seu argumento, em relação à forma como encontrou os termos na sequência, conforme pode ser visto na figura abaixo.

Figura 16 - Registro da tarefa da segunda sequência



Fonte: Registro feito pela autora.

Do episódio 03 para o episódio 04, fica bastante evidente a diferença entre os níveis de generalização, o vetor indeterminação passa de uma forma implícita, para totalmente aparente, de forma explícita, além de ser denotado pela palavra "posição" visto que a aluna, Ana, percebe que existe uma relação entre o número do termo e o valor expresso no termo, e como ela consegue contextualizar a descoberta dessa relação, agora, escrevendo (imagem 16), trocando os gestos, os ritmos e os movimentos por frases “chaves” (Vergel, 2015b), constituindo outro principal meio semiótico. Além disso, nesse momento acontece a operação com o indeterminado, realizando o trabalho do vetor analítico.

Como já discutimos em nosso embasamento teórico, na perspectiva da TO, o indeterminado não é apenas representado pelo simbolismo alfanumérico, e é possível que isso cause uma estranheza, porém, é essa indeterminação, em oposição à determinação numérica, que permite, por exemplo, a substituição de uma variável ou incógnita por outra, chegando ao vetor que diferencia o pensamento algébrico do aritmético, conforme apontado por Radford (2018a) e discutido por Mestre e Oliveira, "a analiticidade, permite tratar as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas, ou seja, possibilitando operar (adicionar, subtrair, multiplicar, dividir) essas quantidades como se procede com quantidades numéricas conhecidas" (2014, p. 223). Radford (2010) diz que, ao focar nos conceitos de indeterminação e analiticidade pode ser assumido diversas formas, conduzindo a diferentes níveis de generalização e que alguns desses níveis são mais concretos, fazendo com que a indeterminação e a analiticidade apareçam de forma mais intuitiva, diferente dos outros níveis aparecendo de forma mais geral, deixando os conceitos se evidenciar explicitamente.

Mesmo denotando o indeterminado, pela palavra "posição" no episódio 04, a professora pesquisadora, prossegue com a discussão, participando ativamente com o grupo, para que encontrem o significado da indeterminação e com o objetivo de que seja resumido a um simples sinal. Como veremos com mais detalhe no episódio 05 a seguir.

Quadro 10 - 6º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 5	Comentários interpretativos
19	**Ana:** Então será a posição, na primeira posição temos o número 1, 1 vezes 1 é quanto?	
20	**Camila:** 1	
21	**Ana:** O 4, tá ocupando qual posição?	
22	**Bia:** Segunda	
23	**Ana:** Então, 2 vezes 2?	
24	**Ana:** 2 vezes 2?	
25	**Camila:** Calma… É 4.	
26	**Ana:** O número 9 ocupa qual posição? 3ª posição, 3 vezes 3 é 9.	Ana, continua a explicação, perguntando e respondendo ao mesmo tempo.
27	**Professora pesquisadora:** Então, percebam aquilo que eu falei antes, a relação entre a posição que os números ocupam com os números que estão presentes na sequência. A partir disso podemos observar uma correspondência.	
28	**Ana:** Que os números estão na posição referente a multiplicação deles entre si.	
29	**Professora pesquisadora:** Ok, mas caso eu queira encontrar a posição 'n' dessa sequência, qual seria o resultado?	

30	**Ana:** eu acredito que seria… a posição 'n', 'n' multiplicando 'n' que daria 'n', porque é o número desconhecido multiplicado por um desconhecido e o resultado daria algo desconhecido ainda.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Neste episódio, Ana compreende o seu avanço e busca explicar o que foi feito durante os episódios anteriores para as amigas, um pouco eufórica, porém, demonstrou entusiasmo e cuidado, durante o momento que explicava para as amigas, sua preocupação era visível, com relação se as amigas estavam entendendo o que estava sendo explicado.

Após esse momento, a professora pesquisadora, aproveita para garantir que o grupo determine o termo que ocupa a enésima posição, relembra a relação existente entre a posição do termo e o seu valor, solicitando que as alunas observem essa correspondência. No enunciado 28, Ana segue entusiasmada respondendo, "que os números estão na posição referente a multiplicação deles entre si" e então a professora pesquisadora pergunta de forma direta, "caso eu queira encontrar a posição 'n' dessa sequência, qual seria o resultado?" (enunciado 29), visto que a aluna, Ana, sabe o que fazer para encontrar cada termo da sequência, prontamente, ela responde, sem exitar, não demonstrando dificuldade.

Ana, inicia dizendo que seria pela posição n, então iria multiplicar esse valor por ele mesmo, "n multiplicando n". Em seguida, ela complementa que o resultado da multiplicação, é n, por não saber o valor, já que n é um valor desconhecido. Ana, passou a denotar, agora, a indeterminação não mais por meio da palavra posição, mas sim, pela letra n, ou seja, ela encontrou o significado da indeterminação resumindo a um simples sinal.

Apesar de utilizarem a mesma variável (n) da posição do termo, para o resultado da multiplicação, conversamos com o grupo e compreendemos que a variável posição não é a mesma variável do resultado da multiplicação da posição pela posição, apenas utilizaram o mesmo sinal (letra n) para expressar valores diferentes. Ana ainda diz que pode responder o valor da multiplicação feita, como sendo n^2.

Dessa forma, podemos concluir que durante toda a análise da segunda tarefa, emergiram os vetores do pensamento algébrico, com o auxílio das intervenções da professora pesquisadora em diversos momentos, trazendo falas importantes, que Segundo Radford (2022a, p. 1156, tradução nossa) "a fala não é apenas um instrumento de comunicação, mas também um instrumento de pensamento; a consciência se desenvolve principalmente com o auxílio da fala", assim, a professora pesquisadora conseguiu participar ativamente na progressão da discussão, o que foi bastante importante nessa parte da atividade, o trabalho colaborativo, mútuo e respeitoso, em que todos se propuseram a encontrar o que se era esperado.

6.3 A terceira análise

Dando continuidade à análise das tarefas, na parte III da HQ, trouxemos mais uma sequência recursiva com um nível de complexidade mais alto, comparado às outras duas sequências. Nesta os alunos precisam encontrar o 20º e 100º termo, além disso, precisam identificar a expressão algébrica que representa a sequência que está na figura abaixo.

Figura 17 - Sequência recursiva da parte III da HQ

Fonte: Imagem produzida pela autora

Quadro 11 - 7º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 6	Comentários interpretativos
01	**Professora pesquisadora:** Vocês devem lembrar da correspondência que podemos estabelecer, entre a posição que o número	A professora começa relembrando um ponto

	ocupa e o número que está na sequência. Por que a partir disso vamos conseguir perceber o que está variando entre um termo e outro. O que vocês conseguem perceber que está variando de um termo para o outro?	importante, que precisou ser observado para conseguir solucionar a sequência anterior.
02	**Ana:** É o número 3, de 3 em 3. 5 para 8, aumentou 3. Aí 8, o próximo termo, 9, 10, 11. É o 11. 	Ana observa as diferenças dos valores entre um termo e outro, e percebe que essa diferença é de três unidades. Por meio do gesto com os dedos, Ana conta a cada 3 unidades confirmando os valores dos termos expostos na sequência.

Fonte: Elaborado pela autora.

Neste episódio (6), a professora pesquisadora começa relembrando um ponto importante, que precisou ser observado para conseguir solucionar a sequência anterior. Prontamente, a aluna Ana começa a realizar movimentos com as mãos (enunciado 02), utilizando os dedos para contar, no intuito de encontrar a diferença de um termo para o outro, então, ela percebe que a diferença de um termo para o outro é a cada 3 unidades. Ana, confirma essa operação para os 4 primeiros termos mostrados na sequência.

Radford (2013a), afirma que, essa característica observada leva à criação de um procedimento, porém não permite deduzir uma fórmula, além disso, a aluna Ana, perpassou pelas etapas de generalização algébrica que foram explicitadas por Radford (2013a), em uma atividade de ensino-aprendizagem, aqui nesse caso a aluna começou a observação com os termos já dados e conhecidos da sequência, depois ela estabeleceu a relação entre as figuras assumindo um princípio que pode ser usado para encontrar outros termos não conhecidos, como o 20º e o 100º termo proposto na tarefa.

É possível que o aluno, quando visualiza esse princípio assumido, em determinadas situações do campo aritmético, passa a observar como a sequência foi construída, podendo identificar um padrão algébrico (Radford, 2003, 2004).

Quadro 12 - 8º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 7	Comentários interpretativos

03	**Ana:** Só que a questão pede o vigésimo e o centésimo termo da sequência. Que eu imagino que agora seria por multiplicação, multiplicaria 20 por 3 e 100 por 3 para agilizar o processo, porque não dá pra sair contando daqui até o 20 e o 100, iria demorar muito.	Após um tempo contando nos dedos, Ana reflete o tempo gasto para ir contando a cada três unidades e a necessidade de ter uma operação para agilizar o processo, segundo ela.
04	**Professora pesquisadora:** Vamos tentar com os termos mais próximos que temos aqui na situação da HQ, então se eu multiplicar, por exemplo, a primeira posição por 3, dá quanto? 3 vezes 1…	
05	**Ana:** 3	
06	**Professora pesquisadora:** E qual o número que está na primeira posição?	
07	**Ana:** 5	
08	**Professora pesquisadora:** E o que faltaria para chegar em 5? quando você diz que multiplica a posição por 3.	
09	**Ana**: Adicionei mais 2.	
10	**Professora pesquisadora:** Esse raciocínio funciona para os demais termos? Observem. Por exemplo, o próximo termo.	Solicita a observação para os demais termos.
11	**Ana:** Tá na segunda posição. 2 vezes 3 é 6 mais 2 dá 8.	Ana, compreende a solicitação e utiliza do raciocínio formado para solucionar o segundo termo da sequência.
12	**Professora pesquisadora:** E o próximo?	
13	**Ana:** 3 vezes 3, 9, 9 mais 2, 11. Então seguindo essa lógica o termo 20 seria assim. É 62 o resultado. Para o 100 fica assim.	Compreende o que está acontecendo para determinar cada termo e percebe que o mesmo acontecerá com os demais. Encontrando os valores do 20º e 100º termo.

Fonte: Elaborado pela autora.

Após ter uma atividade perceptiva a respeito da sequência, a aluna inicia o episódio 7, retomando o que é pedido na sequência, com relação aos termos distantes (o 20º e o 100º), Ana diz que "[...] não dá pra sair contando daqui até o 20 e o 100, iria demorar muito", de fato, contar termo a termo não é o esperado em uma sequência, afinal, essa sequência não é finita.

Então, Ana observa que irá precisar multiplicar esses valores por 3, "[...] para agilizar o processo [...]", como é dito por ela no enunciado 03. Com a afirmação dada, a professora pesquisadora observa que a aluna multiplicou a posição do termo por 3 e, solicita que Ana repita a situação para os primeiros termos da sequência, por exemplo, multiplicando 3 por 1 (a posição do primeiro termo da sequência). Então, o diálogo segue esse raciocínio, Ana multiplica 3 por 1 e, é questionada, "qual o número que está na primeira posição?", Ana responde: "5" e, mais uma vez (enunciado 08) a professora pesquisadora questiona e estimula a aluna a perceber que precisa de outra operação, além da operação da multiplicação, para obter-se o resultado do termo da primeira posição, conforme está expresso na sequência.

Então, Ana entende que, para chegar ao primeiro termo da sequência, deve-se multiplicar a posição por 3 e adicionar duas unidades, visto que, quando multiplicou 3 por 1 obteve 3, e para chegar em 5 faltam 2 unidades. A fim de estimular esse raciocínio, a professora pesquisadora pergunta: "esse raciocínio funciona para os demais termos?", Ana, segue repetindo o raciocínio para o segundo termo e para o terceiro termo, logo assume essa característica diretamente para os termos distantes, o 20º e o 100º. Enquanto escreve em seu caderno, Ana, repete em voz alta, descrevendo o cálculo que está sendo feito, $20\, x\, 3\ =\ 60\ +\ 2\ =\ 62$, "[..] é 62 o resultado" (enunciado 13), o mesmo acontece para o 100º termo, $100\, x\, 3\ =\ 300\ +\ 2\ =\ 302$. Infelizmente, não conseguimos o registro no caderno de Ana, desses cálculos.

Ana, durante o episódio 7, assume uma característica (multiplicar a posição do termo por 3 e adicionar 2 unidades) e a transforma em hipótese, utilizando-a em termos tanto próximos como distantes na sequência, não restringindo para alguns termos e, sim utilizando para todos. Além disso, ela trabalha com a linguagem natural, utilizando a escrita e a fala, assim, organizando as suas ideias e conseguindo usar números específicos para denotar e trabalhar com indeterminado.

Apesar do uso de números específicos, Ana, chega a forma encontrada por meio de um processo dedutivo. Uma vez que tomou como base a característica de adicionar 3 unidades ao valor do termo anterior para chegar ao termo seguinte, chegando a outra característica assumida, em que multiplica por 3 o número da posição do termo e adiciona 2 unidades, dessa forma, a característica assumida virou hipótese por meio de uma dedução analítica, pode-se dizer que, um princípio assumido levou à dedução da fórmula (Radford, 2013a).

Quadro 13 - 9º quadro interpretativo das análises

Nº do enunciado	Episódio 8	Comentários interpretativos
14	**Professora pesquisadora:** Se fosse para uma outra posição qualquer, como ficaria?	
15	**Ana:** $n{\cdot}3 = n3$ e $3n + 2 = 5n$	
16	**Professora pesquisadora:** Mas como surgiu esse 5n? Conseguimos adicionar uma coisa que é desconhecida, como o 'n' com o 2?	A professora questiona com intenção de que a aluna corrija, o que fez.
17	**Ana:** Consegue.	
18	**Professora pesquisadora:** Veja aqui, a segunda posição da sequência é 8. No lugar do 'n' faça a substituição, como ficaria?	A professora pesquisadora chama a atenção com relação a resposta dada pela aluna no enunciado 18, e pede para que veja se isso pode ser realizado, testando para o segundo termo da sequência.
19	**Ana:** Se o 'n' for 8, 3 vezes 8, é 24, mais 2 dá 25.	Ana, faz a substituição da letra n por 8 e resolvendo a operação.
20	**Professora pesquisadora:** 24 mais 2 é 25?	
21	**Ana:** Não, 26.	
22	**Professora pesquisadora:** Tudo bem, precisamos organizar só o raciocínio para encontrarmos qualquer termo 'n' da sequência. Como seria?	
23	**Ana:** $3{\cdot}n + 2$	Responde sem dificuldades.

Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse episódio 8, a professora pesquisadora começa fazendo uma pergunta para o grupo, “se fosse para uma outra posição qualquer, como ficaria?” (enunciado 14). Sem hesitar, de forma rápida e precisa, Ana escreve a equação: $n{\cdot}3 = n3$ e $3n + 2 = 5n$. A professora pesquisadora, questiona a aluna, a respeito do resultado da equação ser $5n$, além do questionamento, ela ajuda Ana a perceber que, essa equação descrita não pode ser igual a $5n$, entre os enunciados 16 a 21.

Ana, traz o simbolismo alfanumérico com significado, com a ajuda da professora pesquisadora, a aluna verifica que é possível de atribuir valor a variável n , como por exemplo no enunciado 19, ao fazer a substituição da variável n pelo valor 8, ela desenvolve o resultado por meio da característica assumida, mais uma vez, multiplicando a posição do termo por 3 e adicionando 2 unidades. Com isso, a professora pesquisadora retoma a pergunta inicial do enunciado: "[...]para encontrarmos qualquer termo n da sequência, como seria?", a fim de que tenha sido compreendida a discussão do uso da variável e, é, após a resposta dada por Ana, no enunciado 23 com a fórmula encontrada para a sequência.

Ana trabalhou com o simbolismo alfanumérico, demonstrando que o pensamento algébrico é de natureza multimodal (Radford 2018), utilizando dos meios semióticos de objetivação, como a fala e a escrita, esse último meio semiótico, a aluna fez rascunhos em seu caderno, infelizmente, não tivemos o acesso para fotografar, mas foi observado pela professora pesquisadora durante a pesquisa. Além do ganho de significado para o simbolismo alfanumérico nesse episódio, a letra n denota o indeterminado, fazendo com que ele apareça de forma totalmente explícita e o trabalho com o vetor analítico é realizado, a aluna trabalha com o desconhecido como se o conhecesse, assim, deixando evidente a analiticidade, o vetor que diferencia o pensamento aritmético do pensamento algébrico, quando multiplica por 3 a posição do termo (denotada pela letra n) e ao resultado, adiciona-se 2 unidades, concluindo-se que, emergiu o pensamento algébrico na tarefa.

Vale ressaltar o que foi dito na abertura desse capítulo (6), durante essa tarefa, especificamente, o diálogo foi frisado para análise somente entre a professora pesquisadora e a aluna Ana. Visto que, houve pouca ou quase nada de participação no diálogo por parte das alunas, Bia e Camila. Em algumas situações elas balançaram a cabeça dando a entender estarem de acordo com a fala de Ana. Devido a timidez das alunas, resolvemos não insistir com o diálogo.

Ana, teve o seu protagonismo, mas em nenhum momento faltou com ética ou respeito com as amigas, sempre se direcionava para as amigas com um olhar ou perguntando se estava tudo bem e, assim observamos a preocupação dela com as amigas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como apresentamos ao longo deste trabalho, os padrões estão presentes em diversas situações, não apenas nas salas de aula de matemática. Assim, deve-se ter uma visão da álgebra para além da simbologia, como, por exemplo, a utilização de sequências que estimulem o pensamento algébrico.

Para isso, buscamos, por meio do objetivo geral, identificar os elementos do pensamento algébrico que emergem em uma atividade de ensino-aprendizagem sobre sequências recursivas apresentadas por uma História em Quadrinho. Nos fundamentando na Teoria da Objetivação (TO), que não restringe o pensamento algébrico apenas ao simbolismo alfanumérico, pois parte de uma perspectiva que o pensamento é multimodal, dividido entre a parte material como os gestos, palavras faladas, desenhos, escritas e a outra parte conhecida como ideacional, tratando-se da imaginação e fala interior, conforme discutimos.

Além disso, apoia-se em três vetores que caracterizam o pensamento algébrico, na perspectiva da TO, sendo eles, a indeterminação (objetos do raciocínio), denotação (simbolização dos objetos) e a analiticidade (o raciocínio acerca dos objetos do raciocínio) (Radford, 2009, 2010a). Para identificarmos cada um dos vetores caracterizadores do pensamento algébrico, as tarefas presentes na atividade apresentavam sequências recursivas seguindo um nível gradual de complexidade, para que os alunos desenvolvessem o pensamento formado de forma contínua entre as etapas.

Aplicamos a atividade com uma turma do 8º ano de uma escola estadual da Região Metropolitana do Recife. Apesar da turma ter um quantitativo de 49 alunos, apenas 9 participaram da pesquisa, os demais 40 alunos não entregaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado, uma vez que todos eram menores de idade, então, só puderam participar da pesquisa os que entregaram. Apesar disso, fornecemos a HQ para leitura aos que tiveram interesse, uma vez que todos os 40 alunos permaneceram na mesma turma. Não imaginávamos que a HQ teria tanta repercussão por parte dos alunos que não trouxeram o termo assinado.

E dos 9 participantes divididos em 3 grupos com 3 alunos cada, apenas um grupo com 3 alunos foi analisado, devido às circunstâncias da sala de aula, o ambiente era bastante barulhento e quente. Como os 49 alunos estavam no mesmo ambiente, havia muitas conversas paralelas e interrupções por parte dos alunos que não estavam participando, o que acabou atrapalhando os alunos que estavam participando e, a vídeo-gravação.

Os dados produzidos para análise multimodal, durante a atividade, foram por meio de uma vídeo-gravação e além de utilizarmos as respostas escritas dos alunos na própria tarefa. Com isso, constatamos que o grupo analisado (das alunas Ana, Bia e Camila), na tentativa de responder às tarefas, utilizaram-se de estratégias, de meios semióticos de objetivação que as levaram a materializar o saber algébrico, que segundo Radford (2017), esse saber por ser considerado um saber histórico-cultural, a partir do momento que ele é materializado pelo aluno, ele passa a ser chamado de conhecimento, vindo a ser particular, singular.

Para a análise, a primeira parte da atividade, ficou evidente que o grupo analisado (das alunas Ana, Bia e Camila) não conseguiram desenvolver o pensamento algébrico, se apresentaram ainda um pouco 'perdidas' como funcionaria a atividade, apesar de que Ana, sempre tomava a frente em se pronunciar, sem timidez, diferente das outras meninas, Bia e Camila. Conseguiram manifestar meios semióticos, como o gesto, para a identificação de demais termos, e explicar por escrito que a cada termo era possível contar duas unidades para o resultado. Os indícios de generalização aritmética ficaram evidentes, conseguiram observar o aumento de duas unidades de um termo para outro, mas não conseguiram transformar a característica assumida em uma hipótese, fazendo com que fosse deduzida uma fórmula, para se chegar ao simbolismo alfanumérico.

Diferentemente na segunda parte da atividade, o pensamento algébrico ficou evidente, uma vez que conseguimos identificar a indeterminação totalmente explícita e sendo denotada pela palavra ‘posição’ e, o trabalho com o desconhecido como se o conhecesse, ou seja, operando com quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas, chegando ao vetor analítico, o vetor que diferencia o pensamento aritmético do pensamento algébrico. Dessa forma, o grupo das alunas (Ana, Bia e Camila) atingiu o que se esperava, por meio da mediação da professora pesquisadora que, colaborou para um trabalho coletivo, ombro a ombro, em busca de uma obra comum.

Durante essa tarefa, observamos e destacamos o protagonismo por parte da aluna Ana, especificamente, conseguiu utilizar-se de palavras-chave para tornar aparente suas intenções, seguido do encontro do simbolismo alfanumérico que representava a sequência. O que fez com que a pesquisadora, durante as interações, fizesse intervenções articuladas em pró da esperteza de Ana, ajudando a aluna a desenvolver seu raciocínio para chegar ao objetivo desejado.

Na terceira tarefa, a última sequência, apesar do grau de complexidade ser o maior, Ana, de forma muito tranquila e com o entrosamento com a professora pesquisadora, ela desenvolveu o pensamento algébrico, atingindo o nível máximo, podemos observar que através da dica dada pela professora pesquisadora, para que Ana resgatasse a observação realizada na tarefa anterior, como a correspondência feita entre o valor do termo e a sua posição, fez com que a aluna desenvolve sem muitas dificuldades a tarefa.

Para a pesquisa, sentimos a necessidade de um ambiente mais organizado, a estrutura da escola tem algumas falhas, que comprometem o trabalho a ser realizado pelos professores dessa escola. As salas não possuem uma boa acústica, devido ao fato da escola ainda não ter completado a instalação dos ar-condicionados, por isso, as portas e janelas das salas de aula precisam ficar abertas, fazendo com que o barulho externo adentre e atrapalhe a sala de aula. Também os ventiladores em sala emitem muito ruído, tornando difícil ouvir e falar para todos os alunos.

Além de que, alguns alunos não se dispuseram a participar da pesquisa e, não tinha outro espaço na escola no qual eles pudessem ficar, então, a pesquisa acabou sendo prejudicada por conversas paralelas e pelo uso de aparelhos eletrônicos desses alunos, mesmo com a professora regente da sala de aula e a professora pesquisadora chamando a atenção, quase não houve respeito por parte desses alunos.

Bem, reforço que esses detalhes interferiram para a pesquisa e obtenção de dados, uma vez que 9 alunos participaram da pesquisa, tivemos a formação de 3 grupos com 3 alunos cada, porém apenas 1 grupo conseguiu ter os recursos necessários para conduzir a análise. Os demais, tivemos muitos problemas com os áudios da vídeo-gravação e em observá-los, pois houve muitas distrações ao longo da atividade, assim, não conseguimos deduzir se os movimentos, gestos, escritas e entre outros, estavam relacionados aos meios semióticos de objetivação.

Apesar dos ocorridos, o uso da HQ durante a nossa atividade provocou o engajamento aos alunos que estavam participando, despertando uma curiosidade pela história e mais interesse em fazer parte da pesquisa e, aqueles alunos que não estavam dispostos a participarem ao ver a HQ se interessaram, infelizmente não puderam participar, pois precisávamos da autorização, mas disponibilizamos a HQ para leitura aos que quisessem ler, sem compromisso com a pesquisa.

Observamos que, por meio da HQ, podemos levar o aluno para uma dimensão além do ensino da matemática. Uma prática pedagógica na qual a comunicação pode ser verbal e/ou não-verbal; que incorpora a ludicidade; influência na imaginação do leitor; contextualiza; abrange diversas temáticas e disciplinas; articula o conteúdo ao cotidiano e diversos outros fatores positivos que reinventam a sala de aula. Assim, despertou o interesse do trabalho com a HQ para esta pesquisa, a fim de engajar os alunos para além de solucionar problemas com padrões de generalização, engajá-los a terem o contato com uma história envolvente e que despertasse a imaginação.

Visto que,

> Estamos inseridos em uma sociedade do conhecimento, da revolução da informação e da exigência da produção do conhecimento. E com isso, o professor passa a ser articulador e mediador entre o conhecimento elaborado e o conhecimento a ser produzido (Neves, 2012, p. 8).

A HQ produzida pela pesquisadora, na plataforma interativa Pixton, consta de alguns equívocos em relação ao contexto para a realidade, visto que, algumas informações durante a história são irreais ou improváveis de acontecer, pensando nisso, a pesquisadora sugere, ao ter o intuito que aplicá-la em sala de aula, o professor faça uma adaptação ao contexto da sua sala de aula e também a realidade de seus alunos, assim, podendo favorecer para uma leitura mais dinâmica e também prazerosa, que cause entusiasmo à medida que a leitura for acontecendo.

Com tudo descrito acima, houve inquietações da pesquisadora durante a realização da pesquisa prática em sala, por motivos do ambiente não ter sido favorável à pesquisa. Apesar disso, a pesquisa alcançou os nossos objetivos e podemos trazer contribuições importantes. Além de que, este trabalho favorece as pesquisas relacionadas à generalização de padrões utilizando o pensamento algébrico na perspectiva da TO e com um grande diferencial, trazendo a HQ como um material e suporte pedagógico para incrementar a atividade. Por fim, queremos destacar que, esperamos o surgimento de outras pesquisas relacionadas à temática, utilizando-se da Teoria da Objetivação como aporte teórico, além disso, podendo expandir e, ultrapassando as dificuldades encontradas nesta pesquisa, a fim de ampliar os estudos da matemática, especificamente os conhecimentos da álgebra.

8. REFERÊNCIAS

1895 – Yellow Kid. NANQUIM. Disponível em:<https://nanquim.com.br/1895-yellow-kid/ >. Acesso em: 10 mai 2023

AGOSTINI, A. **As aventuras de Nhô-Quim ou impressões de uma viagem à corte**. NAÇÃO HQ, 2006. Disponível em: https://nacao.net/2006/01/30/as-aventura-de-nho-quim-ou-impressoes-de-uma-viagem-a-corte/. Acesso em: 23 abr. 2023.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 10, p.34- 60, jun. 2017. Disponível em: <http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/1124#:~:text=Ap%C3%B3s%20nos>. Acesso em: 30 ago. 2021.

ANDRADE, I. J. Marques. As HQS na escola: **disseminando saberes e compartilhando aprendizagens.** 2019. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) – Unidade Acadêmica de Garanhuns, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Garanhuns, 2019.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, p. 267-299, 2006.

AZEVEDO, I. F., et al. Objetos de aprendizagem para o ensino de sequências repetitivas e recursivas nos anos iniciais. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação-REASE**, v. 7, n. 4, p. 271-283, 2021. Disponível em: <https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/965/449> Acesso: 5 set. 2021.

BARBOSA, A. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico**. 2010. 483 f. Tese (Doutoramento em Estudos da Criança (Matemática Elementar) – Universidade do Minho, Braga, 2010.

BARBOSA, J. C. **A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8., 2004, Recife: SBEM, 2004.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8., 2004, Recife. **Anais [...]**. Recife: SBEM, 2004.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:** álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BERLONI, Cris. **Assinatura de Deus: Você já ouviu falar que Deus usou um código para criar o mundo?** Guiame, 2022. Disponível em:

<https://guiame.com.br/colunistas/cris-beloni/assinatura-de-deus-voce-ja-ouviu-falar-que-deus-usou-um-codigo-para-criar-o-mundo.html>. Acesso em: 23 abr. 2023.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo, Blucher, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Ministério da Educação, Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 08 set. 2021.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: NCTM, 2007. Cap. 15, p. 669-705. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/292696143_Early_algebra_and_algebraic_reasoning. Acesso em: 08 set. 2020.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p.171-187, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?lang=pt#>. Acesso em: 07 jul. 2022.

CORDEIRO, N. J. N.; CARDOZO, D. A.; SILVA, M. N. da. Histórias em quadrinhos: algumas conexões com a matemática. **Revista Educação Matemática em Foco**, v.7, n.3, p 111-136, 2019. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/270285585.pdf. Acesso em: 10 de set. 2021.

COUTO, B. da S. **PENSAMENTO ALGÉBRICO: análise das comunicações científicas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática.** 2021. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2021.

CUNHA, R. M. História em Quadrinho: um olhar histórico. **Revista Científica Semana Acadêmica**, v. 1, p. 01-15, 2012. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/system/files/artigos/historiaemquadrinhoumolharhistorico.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2023

DAVIDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscou: Progresso, 1988.

DEVLIN, K. **Matemática:** a ciência dos padrões. Porto: Porto editora, 2002.

EISNER, Will. **Quadrinhos e Arte Sequencial**. 3ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

EVES, Howard. **Introdução da História da Matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FAUSTINO, T. A. S. **O pensamento algébrico em atividades relacionadas ao princípio multiplicativo:** empregando tecnologias móveis em uma sala inclusiva. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, SP, Brasil, 2015.

FEIJÓ, M. **Quadrinhos em Ação**: Um Século de História. São Paulo: Editora Moderna, 1997.

FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali; HEALY, Lulu. A emergência do pensamento algébrico nas atividades de aprendizes surdos. **Ciência & Educação**, v. 22, p. 237-252, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/jpNhrTKk6gVsXZLP3CpsjHd/?lang=pt> Acesso em: 10 jul. 2023.

FIORENTINI, D.; MARIA ÂNGELA MIORIM, M. Ângela; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 78–91, 2016. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384>. Acesso em: 18 jul. 2023.

Formação do Professor de Matemática: uma relação possível. In: PEREIRA, A. C. C.; CEDRO, W. L. (Orgs.). **Educação Matemática: diferentes contextos, diferentes abordagens**. Fortaleza: UECE, 2015. p. 85-107.

FRIZZO, B.; BERNARDI, G. Gibiquê - Sistema para Criação de Histórias em Quadrinhos. Trabalho Final de Graduação II. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, novembro/2001.

GARZÓN, P. J. R.; CAUSADO, R. V. Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. **RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa**, v. 3, n. 1, p. 19-30, 2018.

GIGANTE, A. M. B.; DOS SANTOS, M. B. **Práticas pedagógicas em Matemática:** espaço, tempo e corporeidade. Edelbra Editora Ltda, 2012.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J.; B. P. A matemática do contexto e o contexto na Matemática. In: CARVALHO, J.; B. P. (Coord.). Matemática: Ensino Fundamental. Ministério da Educação Básica, 2010, p. 4.

GOMES, L. P. S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental:** uma análise a partir da Teoria da Objetivação. 2020. 182 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020. Disponível em: < https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/29327>. Acesso: 15 jul. 2020.

GOMES, L. P. S; NORONHA, C. A. Caracterização do Pensamento Algébrico na Perspectiva da Teoria da Objetivação. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 135-151. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2020%20-%20Gobara%20_%20Radford%20-%20Teoria%20da%20objetivacao.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2023.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Ed. Objetiva, 2001.

HOUSE, P. A. Álgebra: Idéias e questões. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C.. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 3, p. 96-118, 2019.

KAPUT, J. What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum, 2008. p. 05-17.

KATO, D. S.; KAWASAKI, C. S. O significado pedagógico da contextualização para o ensino de ciências: análise dos documentos curriculares oficiais e de professores. **ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS**, v. 6, s.p., 2007.

KIERAN, Carolyn; PANG, JeongSuk; SCHIFTER, Deborah; NG, Swee Fong. **Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching**. Springer Nature, 2016.

KUENZER, A. Z. (org). **Ensino Médio:** construindo uma proposta para os que vivem do trabalho. São paulo: Cortez, 2002

LEITE, N. M. L.; LINS, A. F. História em quadrinhos digital: experiências exitosas de seu uso no ensino e na aprendizagem matemática. In: Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências, 2019. **Anais [...]**. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conapesc/2019/TRABALHO_EV1_26_MD1_SA4_ID645_28042019074942.pdf. Acesso em: 10 set. 2021.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LIMA, A. C. de. **Um estudo sobre a construção de histórias em quadrinhos para o ensino de Matemática por alunos do PIBID da UFRPE**. 2021. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2021.

LIMA, E. A.; NORONHA, C. A. Teoria da objetivação e a gestão democrática: contribuições para a formação. **Práticas Educativas, Memórias e Oralidades - Rev. Pemo**, *[S. l.]*, v. 5, p. e510426, 2023. DOI: 10.47149/pemo.v5.e510426. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/revpemo/article/view/10426>. Acesso em: 13 jul. 2024.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Métodos de Coleta de dados: observação, entrevista, e análise documental. In: LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. Epu, 1986. Cap. 3. p. 25-44.

LUYTEN, S. M. B. **O que é História em Quadrinhos**. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1987.

MARQUES, A. F. **O pensamento algébrico no 5o ano do ensino fundamental**: explorando tarefas de valor omisso. 2022. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. Pensar matematicamente (1982). **Barcelona: MEC-Labor**, 1992.

MCCLOUD, Scott. **Desvendando os Quadrinhos**. 2005. M. Book do Brasil Editora Ltda.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Ângela. **Álgebra ou geometria**: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39–54, 2016. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424>. Acesso em: 24 mai. 2023.

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento**. 11 ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. 92 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11235>. Acesso em: 12 maio 2023.

MOGOLLÓN, O. L. P. Contando cantidades: más allá del establecimiento de correspondencias uno a uno. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 71-93.

MORETTI, Vanessa Dias; VIRGENS, Wellington Pereira das; ROMEIRO, Iraji de Oliveira. **Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico**: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais. Bolema, v. 35, n. 71, p.1457-1477, 2021.

NAKAMURA, L. O. de O.; VOLTOLINI, A. G. M. F. da F.; BERTOLOTO, J. S. O uso de histórias em quadrinhos no ensino: teoria, prática e BNCC. **Revista Educação Pública**, v. 20, n. 29, 2020.

NCTM (1991). **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM.

NESSELMANN, G. H. **Die algebra der griechen**. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1842.

OLIVEIRA, W. A. Ensino de sequências: dos parâmetros curriculares nacionais à base nacional comum curricular. In: Encontro Brasileiro De Estudantes De

Pós-Graduação Em Educação Matemática, XXIII, 2019, São Paulo. **Anais[...]**. São Paulo: UNICSUL-Campus Anália Franco, 2019. p.10.

ORTON, A.; ORTON, J. Pattern and Approach to Algebra. In: A. Orton (Ed.), Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics, Londres: Cassel, 1999, p. 104-124.

PERNAMBUCO. **Parâmetros curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**. Recife: secretaria de educação. 2012. Disponível em:<http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf>. Acesso em: 8 set. 2019.

PERNAMBUCO: **Currículo para o Ensino Fundamental: Matemática. Secretária de Educação e Esportes**, Recife: secretaria de educação. 2019. Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf>. Acesso em: 8 mai. 2022.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDC, 2009.

RADFORD, L. Algebraic Thinking and The Generalization of Patterns: a semiotic perspective. In: PME-NA, 28., 2006, Mérida. **Anais [...]**. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. p. 1 - 21. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2019.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research In **Mathematics Education**, v. 12, n. 1, p.1-19, 2010a. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Algebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2022.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática**, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2014%20-%20De%20la%20teoria%20de%20la%20objetivacion%20Revista%20Latinoam%20de%20etnomatematicas.pdf>. Acesso em: 22 mai. 2022.

RADFORD, L. **Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs**: a semiotic-cultural approach to student's types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, v. 5, n. 1, p.37-70, 2003. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/79_gestures.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

RADFORD, L. La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In: ARRIGO, G. (ed.) **Alta Scuola Pedagogica**. Suíça: Alta Scuola Pedagogica, 2004, p. 11 - 27. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(2004)%20-%20La%20generalisation%20mathematique%20comme%20processus%20semiotique.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2022.

RADFORD, L. Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. PNA (**Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)**, v. 4, n. 2, p.37-62, 2010b. Disponível em:

<http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2022

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017, Cap. 4, p. 97-114. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2017%20-%20D%20Amore%20_%20Radford%20-%20ensenanza%20aprendizaje%20de%20las%20matematicas.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2022.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: CERME, 6., 2009, Lyon, França. **Anais [...]**. Lyon: INRP, 2009. p. 33 - 53. Disponível em: < http://www.luisradford.ca/pub/25_CERME6plenary1radford.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2023.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación[A journey through the theory of objectification]. In: GOBARA, S. Takeco; RADFORD, Luis (Orgs.), **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020b, p. 15-42.

RADFORD. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 2, p.257-277, 2013.

RADFORD, L. **Teoria da objetivação:** uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática / Luis Radford; tradução de Bernadete B. Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

REILY, L. H. As imagens: o lúdico e o absurdo no ensino de arte para pré-escolares-escolares surdos. In: Cidadania, Surdez e Linguagem: desafios e realidades, Cap. IX, pp. 161-192. São Paulo: Plexus Editora, 2003.

ROJAS, Pedro Javier; VERGEL, Rodolfo. Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. **RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa**, v. 3, n. 1, p. 19-30, 2018.

ROMEIRO, I. de O.; MORETTI, V. D. Partes, medidas e frações equivalentes: o movimento do pensamento teórico de professores que ensinam matemática. Obutchénie. **Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, v. 5, n. 2, p. 458–483, 2021. DOI: 10.14393/OBv5n2.a2021-61410.

SANTOS, André Oliveira dos. **A álgebra no ensino fundamental como ferramenta de generalização**. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

SANTOS, H. D. R.; SILVA, R. H. S.; LUCENA, R. Funções Matemáticas em quadrinhos: Contextualização com o Pixton. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO, 14., 2016, Recife. **Anais do XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação**. Recife, 2016.

SETUBAL, F. M. R.; REBOUÇAS, M. L. M. Quadrinhos e educação: uma relação complexa. **Revista brasileira de história da educação**, v. 15, n. 1, p. 301-334, 2015.

SILVA, E. N.; DE SOUZA LIMA, A. C.; DE OLIVEIRA, T. S. P. ESTUDO DA ÁLGEBRA: O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA FORMALIZAÇÃO SIMBÓLICA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 20, p. 347–356, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2851. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2851. Acesso em: 30 abr. 2023.

SILVA, Jéssica Goulart da et al. **O pensamento algébrico sob a ótica da teoria da objetivação: uma análise a partir de episódios de trabalho conjunto no 5º ano do ensino fundamental**. 2019. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino da Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

SILVA, Rayssa de Moraes da. **Pensamento Algébrico Em Tarefa Com Padrões:** uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. 2021. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics**, n. 20, p. 47-164, 1989.

TEODOSIO, E. de S.; SCIPIAO, L. R. de N. P. **Resolução de equações do segundo grau, à luz da Teoria da Objetivação. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 386–395, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.8017.

VALE, I.; CABRITA, I.; PALHARES, P.; BORRALHO, A. Os Padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Orgs.) **Números e Álgebra**, p. 193-213. Lisboa: SPCE, 2006.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra**. Lisboa SEM-SPCE, 2007. Disponível em http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf. Acesso em: 05 jun. 2022.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico**. Lisboa: Texto, 2011.

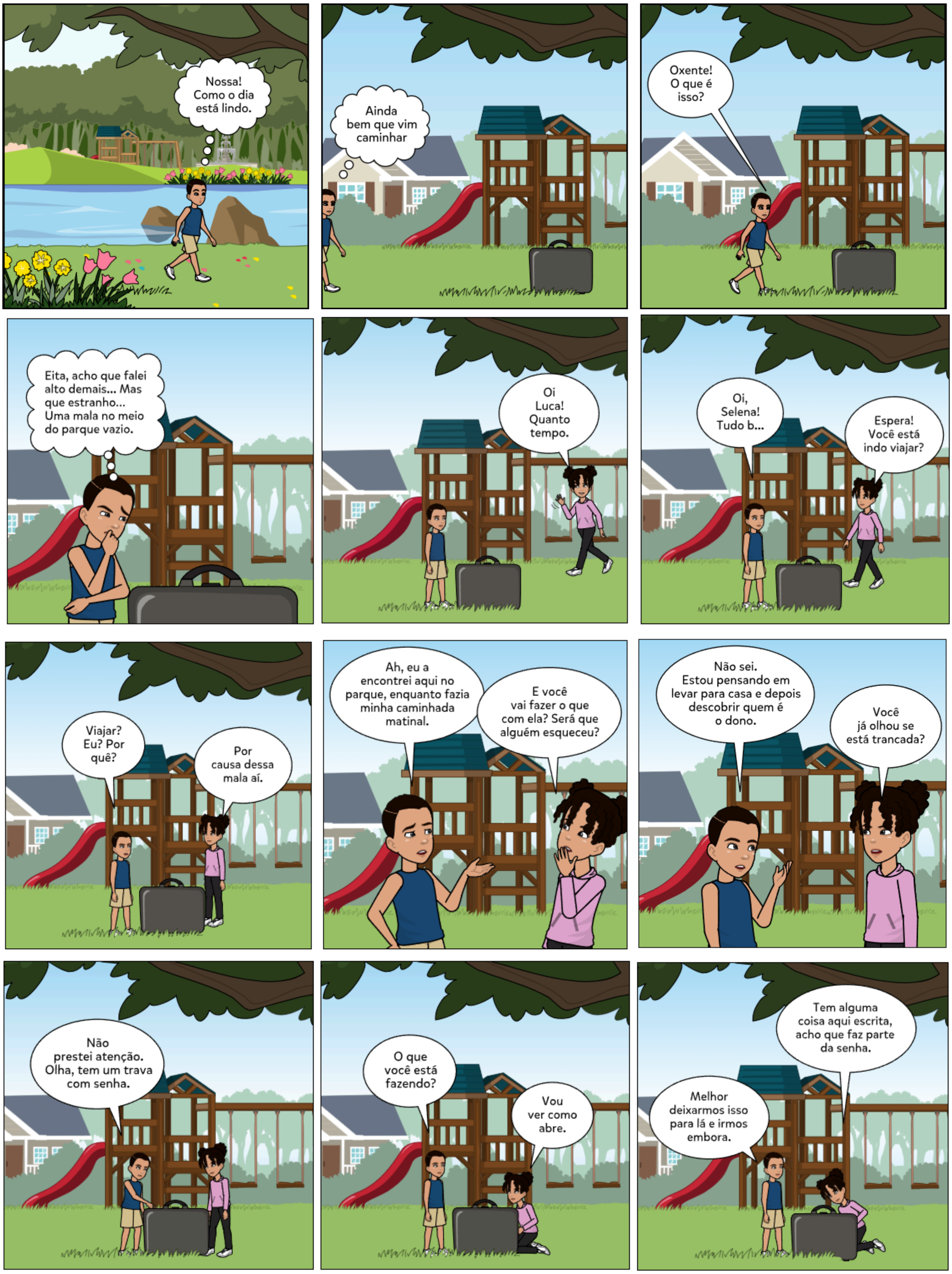
VERGEL, R. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática), Granada, Espanha, v. 9, n. 3, p.193-215, 2015.

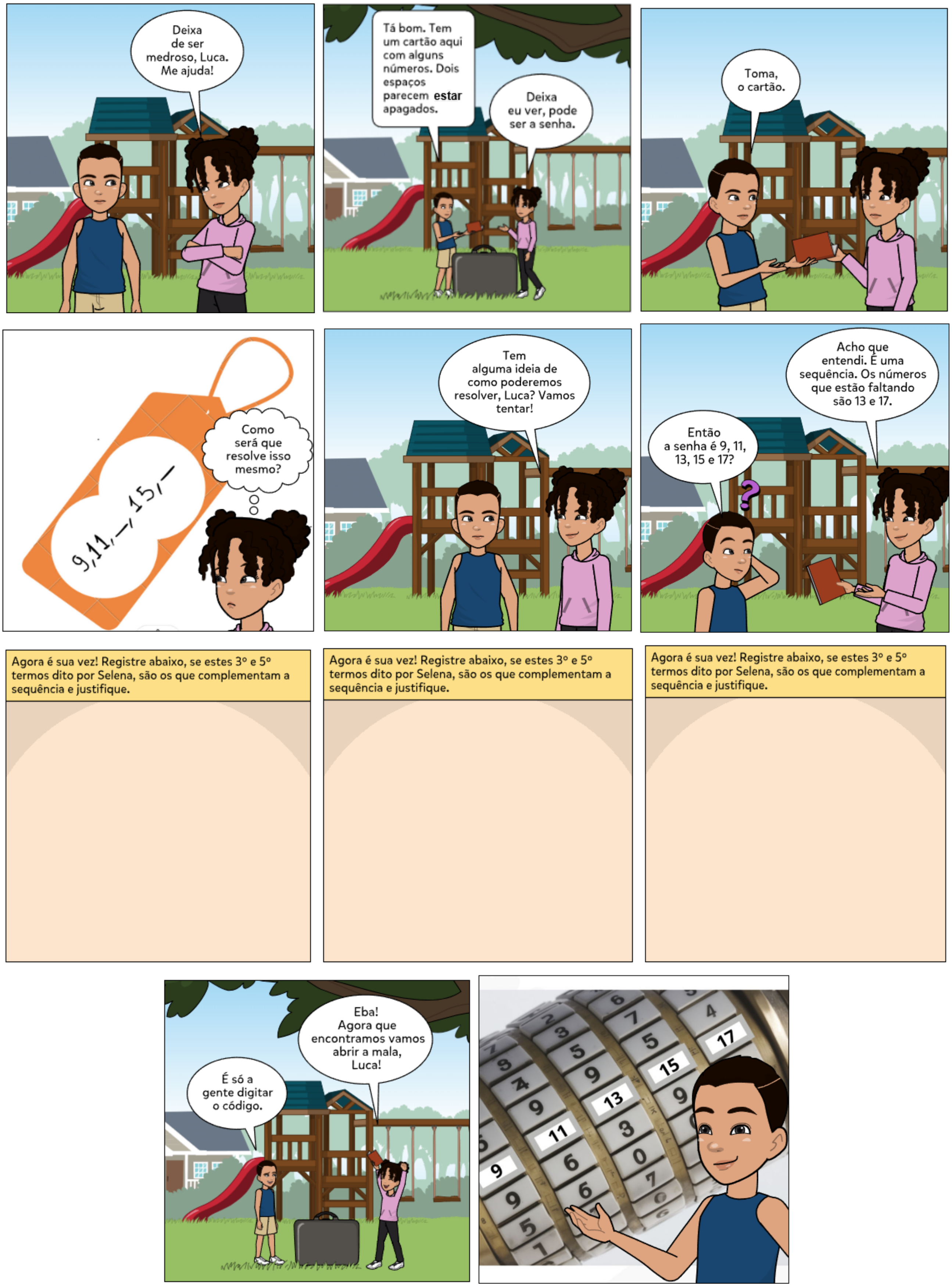
VERGEL, R.; ROJAS, P. **Procesos de generalización y pensamiento algebraico**. Educación científica y tecnológica. 2013.

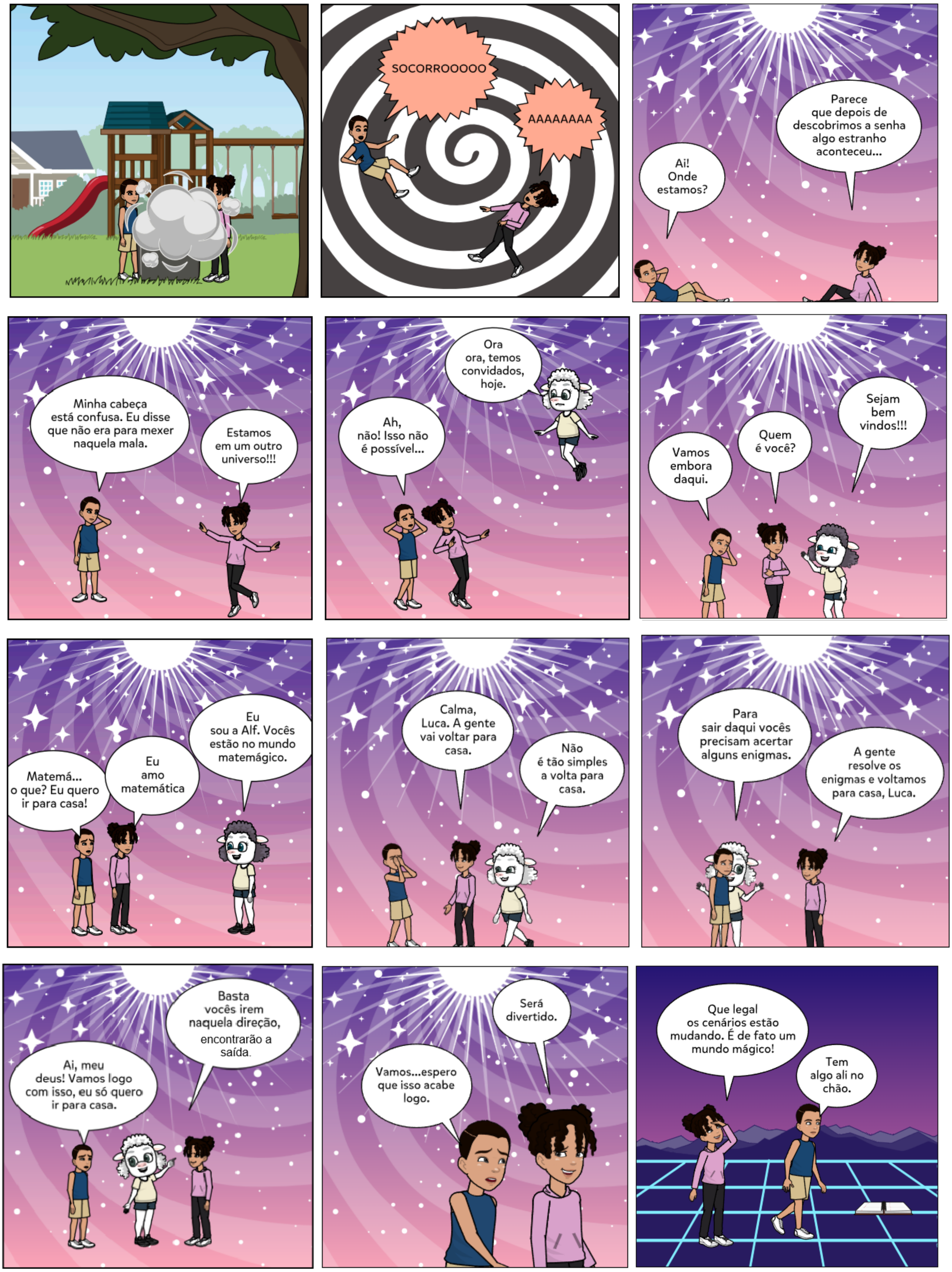
VERGUEIRO, W. Ao largo da crise: bons ventos para as histórias em quadrinhos comerciais no Brasil. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF THE LATIN AMERICAN ASSOCIATION, 29, 2010, Toronto, Canada. **[Anais...]**. Pittsburgh: LASA, 2010. p. 1-20.

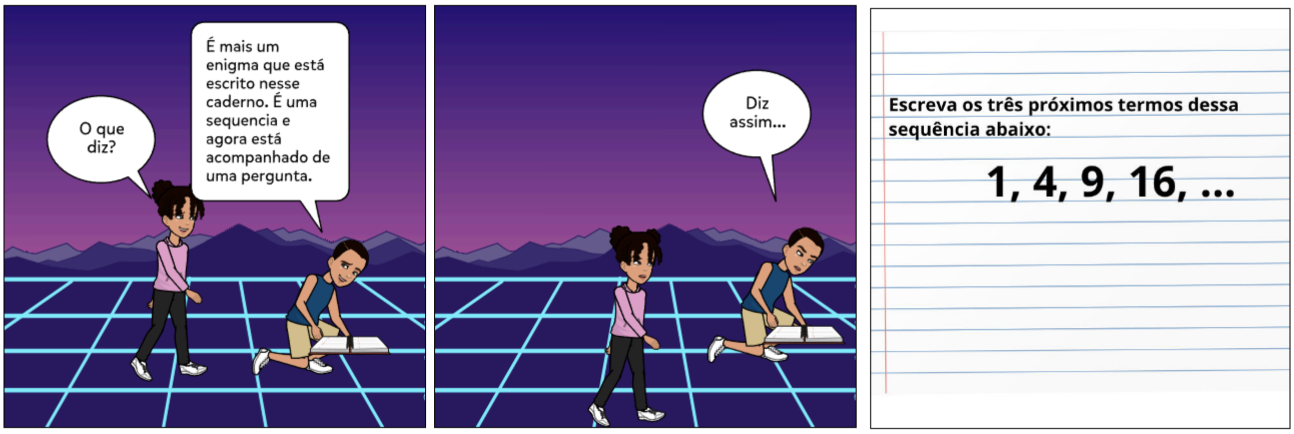
VERGUEIRO, Waldomiro. O humor gráfico no Brasil pela obra de três artistas: Ângelo Agostini, J. Carlos e Henfil. **Revista USP**, n. 88, p. 38-49, 2011.

APÊNDICE I


Nossa! Como o dia está lindo.
Ainda bem que vim caminhar
Oxente! O que é isso?
Eita, acho que falei alto demais... Mas que estranho... Uma mala no meio do parque vazio.
Oi Luca! Quanto tempo.
Oi, Selena! Tudo b...
Espera! Você está indo viajar?
Viajar? Eu? Por quê?
Por causa dessa mala aí.
Ah, eu a encontrei aqui no parque, enquanto fazia minha caminhada matinal.
E você vai fazer o que com ela? Será que alguém esqueceu?
Não sei. Estou pensando em levar para casa e depois descobrir quem é o dono.
Você já olhou se está trancada?
Não prestei atenção. Olha, tem um trava com senha.
O que você está fazendo?
Vou ver como abre.
Tem alguma coisa aqui escrita, acho que faz parte da senha.
Melhor deixarmos isso para lá e irmos embora.


Deixa de ser medroso, Luca. Me ajuda!
Tá bom. Tem um cartão aqui com alguns números. Dois espaços parecem estar apagados.
Deixa eu ver, pode ser a senha.
Toma, o cartão.
9,11,_,15,_
Como será que resolve isso mesmo?
Tem alguma ideia de como poderemos resolver, Luca? Vamos tentar!
Acho que entendi. É uma sequência. Os números que estão faltando são 13 e 17.
Então a senha é 9, 11, 13, 15 e 17?
Agora é sua vez! Registre abaixo, se estes 3º e 5º termos dito por Selena, são os que complementam a sequência e justifique.
Agora é sua vez! Registre abaixo, se estes 3º e 5º termos dito por Selena, são os que complementam a sequência e justifique.
Agora é sua vez! Registre abaixo, se estes 3º e 5º termos dito por Selena, são os que complementam a sequência e justifique.
Eba! Agora que encontramos vamos abrir a mala, Luca!
É só a gente digitar o código.


SOCORROOOOO
AAAAAAAA
Ai! Onde estamos?
Parece que depois de descobrimos a senha algo estranho aconteceu...
Minha cabeça está confusa. Eu disse que não era para mexer naquela mala.
Estamos em um outro universo!!!
Ah, não! Isso não é possível...
Ora ora, temos convidados, hoje.
Vamos embora daqui.
Quem é você?
Sejam bem vindos!!!
Matemá... o que? Eu quero ir para casa!
Eu amo matemática
Eu sou a Alf. Vocês estão no mundo matemágico.
Calma, Luca. A gente vai voltar para casa.
Não é tão simples a volta para casa.
Para sair daqui vocês precisam acertar alguns enigmas.
A gente resolve os enigmas e voltamos para casa, Luca.
Ai, meu deus! Vamos logo com isso, eu só quero ir para casa.
Basta vocês irem naquela direção, encontrarão a saída.
Vamos...espero que isso acabe logo.
Será divertido.
Que legal os cenários estão mudando. É de fato um mundo mágico!
Tem algo ali no chão.



Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.

Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.

Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.

Sou eu!
Pode dizer logo o enigma?
Ok! Para sair do mundo Matemágico, vocês devem resolver o último enigma.
Apresento para vocês o último enigma:
5, 8, 11, 14,...
Identifique o 20º e 100º termo da sequência e a expressão algébrica que representa a sequência acima.
Já chegamos até aqui e nossa equipe vai nos ajudar mais uma vez!
Selena, será que vamos conseguir?
Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.
Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.
Agora é sua vez! Ajude Luca e Selena, registrando abaixo, de que forma eles podem encontrar os números que faltam no enigma.
Vocês são realmente notáveis! Estão livres para retornar ao mundo de vocês.
Com trabalho em equipe podemos superar qualquer desafio!
Conseguimos, Selena! Somos ótimos em resolver sequências recursivas!
Olha onde estamos!!! Eu estou tão feliz em estar de volta.
Foi uma grande aventura. Mas nada melhor do que voltar para casa, ou melhor, para o nosso mundo!

ANEXO I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS)

Solicitamos a sua autorização para convidar o (a) seu/sua filho (a)________________________ {ou menor que está sob sua responsabilidade} para participar, como voluntário (a), da pesquisa **O uso de história em quadrinhos para o estudo de sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico**.

Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) (nome COMPLETO do pesquisador, com endereço pessoal completo e CEP/Telefone/e-mail para contato do pesquisador responsável, inclusive para ligações a cobrar). Também participam desta pesquisa os pesquisadores:(________________) Telefones para contato: (____________) e está sob a orientação de: _____________ Telefone: (____________), e-mail (________________).

O/a Senhor/a será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida a respeito da participação dele/a na pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e o/a Senhor/a concordar que o (a) menor faça parte do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias.

Uma via deste termo de consentimento lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável. O/a Senhor/a estará livre para decidir que ele/a participe ou não desta pesquisa. Caso não aceite que ele/a participe, não haverá nenhum problema, pois desistir que seu filho/a participe é um direito seu. Caso não concorde, não haverá penalização para ele/a, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- **Descrição da pesquisa e esclarecimento da participação:** O pesquisador deve justificar o motivo pelo qual a pesquisa está sendo desenvolvida e qual é o **OBJETIVO** dela. Em seguida, deve detalhar os procedimentos para a coleta de dados, explicando como ocorrerá a participação do voluntário nessa pesquisa: **O que será feito com o participante (ex: entrevista, responder um questionário, participação em um treinamento, participação em uma avaliação física, participação em um tratamento, permitir coleta de sangue etc). O pesquisador deve explicar: Onde será feita a coleta (qual o local físico ou virtual)? Como será feita a coleta (presencial ou online)? Individualmente ou em grupo? Em quantas vezes será feita a coleta? Qual o tempo de duração da coleta? O que será solicitado ao voluntário da pesquisa, para que a coleta de dados seja realizada**? OBS: O TCLE deve redigido de maneira concisa e de fácil compreensão por um indivíduo leigo, com qualquer grau de escolaridade. Não deve ser omisso em relação aos procedimentos, nem conter termos técnicos. Esse TCLE deve elaborado com sentenças redigidas com afirmações do pesquisador dirigidas ao participante de pesquisa. Termos de consentimento longos e excessivamente detalhados com teorias e referencias simplesmente copiadas do projeto detalhado não são desejáveis, segundo manual de orientações da CONEP.

- **RISCOS:** O pesquisador deve descrever os potenciais riscos aos participantes (em relação aos procedimentos a que serão submetidos), sem subestimá-los e explicar quais medidas serão tomadas para minimizar os possíveis riscos. OBS: Não é papel do pesquisador graduar os riscos, portanto, o TCLE não deve mencionar que os riscos serão mínimos. **Os riscos devem ser descritos de maneira explicita e em seguida, devem ser detalhadas as providências e as cautelas que serão adotadas para evitar ou diminuir os riscos associados à pesquisa.**

- **BENEFÍCIOS diretos/indiretos** para os voluntários: O TCLE deve apresentar, de forma clara e objetiva, os potenciais benefícios da pesquisa ao participante, sem supervalorizá-los. Caso o estudo não antecipe qualquer benefício direto ao participante, essa informação deve constar do TCLE de forma explícita, mencionando então os benefícios indiretos da pesquisa para a população em geral.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (gravações?, entrevistas?, fotos?, filmagens?, etc), ficarão armazenados em (pastas de arquivo? computador pessoal?), sob a responsabilidade do (pesquisador? Orientador?), no endereço (acima informado ou colocar o endereço do local), pelo período de mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

.

O (a) senhor (a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele/ela participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele/a na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, o (a) senhor (a) poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cephumanos.ufpe@ufpe.br).**

____

Assinatura do pesquisador (a)

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO/A VOLUNTÁRIO

Eu, _______________________________________, CPF_________________, abaixo assinado, responsável por _________________________________, autorizo a sua participação no estudo ____colocar o nome do estudo___, como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de seu acompanhamento/ assistência/tratamento) para mim ou para o (a) menor em questão.

Local e data __________________

Assinatura do (da) responsável: __________________________

Impressão Digital (opcional)

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do voluntário em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: