UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

PENSAMENTO ALGÉBRICO E O USO DE ARTEFATOS TECNOLÓGICOS DIGITAIS: UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

RECIFE
2024

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

PENSAMENTO ALGÉBRICO E O USO DE ARTEFATOS TECNOLÓGICOS DIGITAIS: UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de grau de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (UFRPE)

RECIFE
2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Almeida, Matheus Souza de.
Pensamento algébrico e o uso de artefatos tecnológicos digitais: um processo formativo com professoras dos anos iniciais do ensino fundamental / Matheus Souza de Almeida. - Recife, 2024.
148f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2024.
Orientação: Jadilson Ramos de Almeida.
Inclui referências.

1. Teoria da objetivação; 2. Álgebra escolar; 3. Formação de professores que ensinam matemática; 4. Tecnologias digitais em educação matemática. I. Almeida, Jadilson Ramos de. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

PENSAMENTO ALGÉBRICO E O USO DE ARTEFATOS TECNOLÓGICOS DIGITAIS: UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de grau de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Aprovado em: 19/12/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Orientador e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profa. Dra. Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rodolfo Vergel Causado (Examinador Externo)
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti (Examinadora Externa)
Universidade Federal de São Paulo

Dedico esta dissertação à minha querida irmã, Melyssa, com quem eu aprendo nas atividades cotidianas da vida concreta que a ética comunitária tem suas ambivalências, mas torna-se possível quando decidimos agir com compromisso, responsabilidade e cuidado mútuos. Como preconiza a filosofia africana Ubuntu, “eu sou porque nós somos”!

AGRADECIMENTOS

Embora minhas conquistas acadêmico-profissionais tenham demandado momentos de esforço e dedicação pessoais, minha trajetória é marcada não meramente por um Eu individual, mas por um Eu coletivo, um Eu-com-os-Outros que se constitui na pluralidade das relações humanas dentro e fora da universidade. Assim sendo, agradeço profundamente a cada um dos coletivos que têm contribuído com a constituição do Matheus, seja professor, pesquisador ou meu eu mais íntimo.

À mãe do céu, Nossa Senhora, e ao pai, Deus, por me permitirem viver, esperançar, sonhar, lutar, realizar... Enfim, por me concederem a dádiva da vida: com foco, força e fé!

À minha família. Em especial, à minha mãe Karla Simone, por me incentivar com respeito e afeto, desde criança, a ter autonomia e liberdade para questionar, duvidar, criar..., ou seja, vir a ser quem eu quisesse ser. À minha irmã Melyssa, pela parceria mútua em cada etapa das nossas vidas e por me encorajar a ir além daquilo que eu possa imaginar. À minha avó Maria Helena (vovó Lena), pelos momentos de cuidado, apoio e torcida ao longo da vida. Às minhas tias Kelma e Katiane, por me inspirarem a idealizar realidades outras por meio da educação formal.

Ao meu orientador Jadilson Almeida, por aceitar embarcar em algumas das minhas aventuras acadêmicas durante o mestrado, por manter a calmaria diante dos meus inúmeros questionamentos, por conduzir as correções dos textos com outras interrogações, alimentando minha curiosidade criativa, e por possibilitar engajar-me em alguns dos projetos sob a coordenação dele no âmbito do *Grupo Al-Jabr de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra*.

À banca, constituída pelas professoras Cristiane Pessoa e Vanessa Moretti e pelo professor Rodolfo Vergel, por aceitarem o convite para participar desse momento tão especial em minha vida, pela leitura cuidadosa do meu texto e pelas excelentes contribuições para o refinamento da pesquisa.

À querida professora Mari Noeli, pelas apostas, pelo incentivo, pelas conversas, pelas trocas respeitosas e carinhosas, por me presentear com sua gentileza, sabedoria, sagacidade e eloquência, por me doar seu “espólio” de livros da área da Educação Matemática antes de se aposentar... Lembro bem da energia, da vibração e do abraço genuínos no dia em que eu compartilhei a notícia que tinha passado na seleção para bolsista do PIBID... Talvez ali havia uma previsão de que aquela conquista seria um divisor de águas na minha formação. Embora

suas titulações acadêmicas sejam na área da Língua Portuguesa, a considero uma educadora matemática nata! Registro aqui minhas eternas gratidão e saudade.

Às professoras Anna Paula Avelar e Elisângela Espíndola e ao professor Ross Nascimento, por me abrirem as portas iniciais na área da Educação Matemática durante a graduação. Dentre tantos encontros com eles: a professora Anna, a qual tenho um carinho imenso, foi um acalento nas disciplinas de Psicologia 1 e 2, além de sempre lançar o seu olhar de águia me dizendo que eu iria longe; a professora Elisângela me orientou no PIBID, no PIBIC e no TCC, bem como me oportunizou algumas conquistas importantes devido ao seu comprometimento com a excelência; e o professor Ross me convidou a engajar-se nos grupos de pesquisa *LACAPE – Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino* e *GERE – Grupo de Estudos em Recursos para a Educação*.

Ao grupo Al-Abr por ter sido um espaço de contribuição para o meu amadurecimento acadêmico por meio da participação em projetos de pesquisa, ensino e extensão. Particularmente, sou grato à minha querida amiga Regina Lima, pelos momentos de estudos, pelas aprendizagens, pelas lutas e pelas vivências em conjunto para além das nossas pesquisas.

Ao professor Luis Radford pela gentileza e humildade em me escutar atenciosa e cuidadosamente nos encontros que tivemos em Natal-RN, durante o Estágio de Pesquisa em Teoria da Objetivação em março de 2023; e, posteriormente, em Recife-PE, durante o I Encontro Brasileiro sobre a Teoria da Objetivação (I EBTO) em abril de 2024. Além disso, agradeço pela solicitude em me esclarecer, por mensagens de e-mail, algumas questões relacionadas à TO.

À professora Bernadete Morey, em nome da Rede Internacional de Colaboração Acadêmica em Teoria da Objetivação (RICTO); por aceitar minha inscrição (mesmo eu sendo recém-aprovado no mestrado), em 2022, para a participação no estágio de pesquisa presencial promovido pela RICTO; por incentivar em uma conversa, que tivemos em um restaurante em Natal-RN, que trouxéssemos Radford para Recife-PE; bem como pelas palavras de motivação, durante uma reunião científica do I EBTO, para estudar fora.

Ao professor Carlos Eduardo Monteiro, por expandir meus horizontes na disciplina de Aspectos Socioculturais em Educação Matemática cursada durante o mestrado, pela admiração mútua, pelo acolhimento, pelas palavras gentis de motivação e pelo suporte para eu seguir firme na minha caminhada!

À professora Paula Baltar, pelas excelentes contribuições ao meu texto nos seminários da linha de pesquisa de Didática da Matemática, por abrir as portas da sua sala de aula na

disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática 2 para eu realizar o estágio de docência, pelas aprendizagens, pelas boas conversas, pelas caronas e pelo acolhimento.

Ao GERE, pela contribuição com a minha formação como pesquisador. Em especial, à professora Verônica Gitirana, por me acolher no grupo quando eu ainda era estudante da graduação, pela sabedoria em conduzir colaborativamente as práticas investigativas e pelo suporte para eu seguir firme na minha caminhada!

Às três professoras que participaram do estudo piloto e às cinco professoras que participaram da pesquisa final. Longe de hierarquizar profissões, sempre falo nos contatos que tenho com as pedagogas, nos espaços de formação continuada, sobre a importância delas para a educação em particular e para a sociedade em geral. Diante de tanta desvalorização profissional de cunho governamental e social para com os professores da Educação Básica, torna-se crucial evidenciar que parte do que conquistei e tenho conquistado foi possível pelo o que aprendi com eles. Particularmente, tive excelentes professoras que me marcaram nos anos iniciais do Ensino Fundamental... (Inclusive, o nome de algumas delas aparecem como codinomes das professoras participantes da pesquisa.) O apreço das pedagogas por aprender, a fim de aprimorar suas práticas profissionais, me inspira! Gratidão!

Às políticas sociais que me possibilitaram acessar lugares “inimagináveis”. Em especial, à Rede Salesiana de Escolas pela bolsa de estudos ao longo do Ensino Fundamental. À Secretaria de Educação de Pernambuco, pelo financiamento do meu intercâmbio na Nova Zelândia, durante o Ensino Médio por meio do Programa Ganhe o Mundo, como estudante de escola técnica da rede pública estadual. À CAPES pelo aporte financeiro no PIBID. À UFRPE pela bolsa de monitoria no NACES. À FACEPE pelas bolsas de iniciação científica e de mestrado. Enfim, gratidão a todas instituições e agências de fomento que oportunizaram, materialmente, a concretização de alguns dos meus sonhos!

Aos amigos de turma do mestrado, especialmente àqueles que tive trocas mais próximas: Emily Joyce, Thaís, Thatiane e Kaiomarcos. Ao grupo de rolês por Recife, em acréscimo aos anteriores: Tainá, Mirele, Caio e Gabriella.

À Maria Helena, minha amiga que acompanhou diretamente parte dessa jornada de pesquisa e foi essencial no processo de produção dos dados! Meu muito obrigado pelas trocas no 104!

Às minhas analistas, Yasmine (2021-2023) e Bárbara (2023) pelo suporte psicológico e emocional, principalmente nas minhas questões relacionadas à academia. Sem elas eu não teria feito algumas das tantas (re)elaborações...

Ao professor Marcelo Borba que me mostrou ser um indivíduo acolhedor – além do alto nível de competência e excelência que possui como pesquisador –, abrindo as portas do *GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática* para me receber, bem como me permitindo caminhar ao seu lado e seguir em frente nos meus sonhos...

A todos que me incentivam, me apoiam, me inspiram e acreditam no meu potencial, mesmo nos meus momentos de vulnerabilidade...

Por fim, agradeço a mim, por ir mesmo com medo, por ter coragem de recalcular a rota quando necessário, por reconhecer a importância constante de mudar, por me manter firme nos meus princípios e naquilo que defendo e acredito enquanto projeto de Educação (Matemática), de sociedade, de vida, de ser humano. Certamente, aquele aluno dedicado desde a época da escola, que amava Matemática e acreditava que as suas conquistas deveriam ser diretamente proporcionais a seu esforço e sua dedicação, deve estar orgulhoso do que ele tem se tornado...

“Sonhar não é apenas um ato político necessário, mas também uma conotação da forma histórico-social de estar sendo de mulheres e homens. Faz parte da natureza humana que, dentro da história, se acha em permanente processo de tornar-se”

(Freire, 2020b, p. 126).

RESUMO

No contexto educacional brasileiro, as atuais demandas curriculares propostas pela Base Nacional Comum Curricular, na área de Matemática, destacam a relevância do trabalho com os alunos acerca do pensamento algébrico, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Apesar disso, não há uma definição precisa nesse documento normativo quanto a esse tipo de pensamento matemático. Diante dessa problemática, o objetivo desta pesquisa é caracterizar o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais. Para tanto, tomamos como fundamentação teórico-metodológica a Teoria da Objetivação (TO), que defende o entrelaçamento entre a produção histórico-cultural de saberes e subjetividades na Educação Matemática. Particularmente, o referencial teórico refere-se à perspectiva de pensamento algébrico preconizada na TO. Para a produção dos dados, realizamos um curso de formação continuada com professoras de uma rede municipal do estado de Pernambuco. Por meio de uma análise multimodal das videogravações dos encontros formativos, observamos que, inicialmente, o pequeno grupo em foco recorreu às estratégias de testar a igualdade por tentativa e erro e transpor termos ou coeficientes para resolver o primeiro problema proposto, revelando indícios de raciocínio aritmético. Nesse cenário, mediante o trabalho coletivo com o pesquisador-formador, constatamos que as professoras se encontraram com uma forma de pensar algebricamente as equações, mobilizando a estratégia de neutralizar termos ou coeficientes, isto é, operando com grandezas determinadas e indeterminadas em ambos os membros da igualdade. Assim sendo, ao considerarmos elementos como as falas, os gestos, as simulações e as escritas em cena, indicamos que os vetores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade) emergiram durante as atividades formativas. Dentre os resultados, sublinhamos a importância da dinamicidade das simulações interativas digitais, envolvendo a metáfora da balança de dois pratos, na superação da perspectiva operacional para uma compreensão relacional da relação de igualdade, além da ressignificação do trabalho com o indeterminado. Em suma, ressaltamos que o engajamento coletivo movimentou discussões e reflexões para além das estratégias de simplificação de equações, como: o currículo de matemática, o papel dos artefatos culturais e as relações em torno do processo de ensino-aprendizagem da álgebra escolar.

Palavras-chave: Teoria da Objetivação; Álgebra escolar; Formação de professores que ensinam Matemática; Tecnologias digitais em Educação Matemática.

ABSTRACT

In the Brazilian educational context, current curricular demands proposed by the National Common Curricular Base in the area of mathematics highlight the relevance of working with students on algebraic thinking, starting in the early years of elementary school. Despite this, there is no precise definition in this normative document regarding this type of mathematical thinking. Given this problem, the objective of this research is to characterize the algebraic thinking that emerges from the collective engagement of early-year teachers in formative activities involving the introductory study of equations with digital interactive simulations. To this end, we took as our theoretical-methodological foundation the theory of objectification (TO), which defends the intertwining between the historical-cultural production of knowledge and subjectivities in mathematics education. In particular, the theoretical framework refers to the perspective of algebraic thinking advocated in the TO. To produce the data, we conducted a continuing education course with teachers from a municipal network in the state of Pernambuco. Through a multimodal analysis of the video recordings of the teacher education sessions, we observed that, initially, the small group in focus resorted to strategies of testing equality through trial and error and transposing terms or coefficients to solve the first problem proposed, revealing signs of arithmetic reasoning. In this scenario, through collective work with the researcher-educator, we found that the teachers found a way of thinking about the equations algebraically, mobilizing the strategy of neutralizing terms or coefficients, that is, operating with determined and indeterminate quantities in both members of the equality. Therefore, when we consider elements such as speech, gestures, simulations and writings in the scene, we indicate that the vectors of algebraic thinking (indeterminacy, denotation and analyticity) emerged during the teacher education activities. Among the results, we emphasize the importance of the dynamic nature of digital interactive simulations, involving the metaphor of a two-pan balance, in overcoming the operational perspective for a relational understanding of the equality relation, in addition to the redefinition of work with the undetermined. In short, we emphasize that collective engagement moved discussions and reflections beyond the strategies of simplifying equations, such as: the mathematics curriculum, the role of cultural artifacts and the relations around the teaching-learning process of school algebra.

Keywords: Theory of objectification; School algebra; Education of teachers who teach mathematics; Digital technologies in mathematics education.

RESUMEN

En el contexto educativo brasileño, las demandas curriculares actuales propuestas por la Base Curricular Común Nacional, en el área de Matemáticas, resaltan la relevancia de trabajar con los estudiantes el pensamiento algebraico, desde los primeros años de la Escuela Primaria. Pese a ello, no existe una definición precisa en este documento normativo respecto a este tipo de pensamiento matemático. Frente a esta problemática, el objetivo de esta investigación es caracterizar el pensamiento algebraico que emerge, a partir de la participación colectiva de docentes de los primeros años, en actividades formativas que involucran el estudio introductorio de ecuaciones con simulaciones digitales interactivas. Para ello, tomamos como fundamento teórico-metodológico la Teoría de la Objetificación (TO), que defiende el entrelazamiento entre la producción histórico-cultural de conocimientos y las subjetividades en la Educación Matemática. En particular, el marco teórico hace referencia a la perspectiva del pensamiento algebraico defendida en la TO. Para producir los datos, realizamos un curso de formación continua con profesores de una red municipal del estado de Pernambuco. A través de un análisis multimodal de grabaciones en video de reuniones de capacitación, observamos que, inicialmente, el pequeño grupo en foco recurrió a las estrategias de probar la igualdad mediante prueba y error y transponer términos o coeficientes para resolver el primer problema propuesto, revelando evidencias de razonamiento aritmético. En este escenario, a través del trabajo colectivo con el investigador-formador, encontramos que los docentes se encontraron con una forma de pensar las ecuaciones de manera algebraica, movilizando la estrategia de neutralizar términos o coeficientes, es decir, operar con magnitudes determinadas e indeterminadas en ambos miembros. de igualdad. Por lo tanto, cuando consideramos elementos como discursos, gestos, simulaciones y escrituras en escena, indicamos que los vectores del pensamiento algebraico (indeterminación, denotación y analiticidad) surgieron durante las actividades de formación. Entre los resultados, destacamos la importancia del dinamismo de las simulaciones digitales interactivas, involucrando la metáfora de una escala de dos platos, en la superación de la perspectiva operativa hacia una comprensión relacional de la relación de igualdad, además del nuevo significado de trabajar con lo indeterminado. En resumen, enfatizamos que el compromiso colectivo llevó las discusiones y reflexiones más allá de las estrategias de simplificación de ecuaciones, tales como: el currículo de matemáticas, el papel de los artefactos culturales y las relaciones en torno al proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar.

Palabras clave: Teoría de la objetivación; Álgebra escolar; Formación de docentes que imparten Matemáticas; Tecnologías digitales en la Educación Matemática.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Vetores caracterizadores dos pensamentos aritmético e algébrico 37
Figura 2 – Pesquisas sobre o estudo introdutório das equações a partir de problemas de enunciado 44
Figura 3 – Relação dialética entre saber e conhecimento 51
Figura 4 – Aprendizagem segundo a TO 53
Figura 5 – Atividade de ensino-aprendizagem e seus possíveis momentos 54
Figura 6 – Ostensivos da tela do EIB no modo básico 73
Figura 7 – Ostensivos da tela do EI no modo Resolva! 74
Figura 8 – Eixos considerados no planejamento das atividades formativas 76
Figura 9 – Tópicos do curso de formação continuada 76
Figura 10 – Estrutura das atividades formativas envolvendo os problemas de enunciado..... 77
Figura 11 – Principais momentos da atividade formativa 78
Figura 12 – Síntese das compreensões iniciais das professoras acerca da álgebra escolar nos anos iniciais 89
Figura 13 – Disposição física do pequeno grupo 92
Figura 14 – Tela do notebook com a primeira simulação proposta na tradução do problema 1 93
Figura 15 – Print da primeira simulação proposta na tradução do problema 1 93
Figura 16 – Tela do notebook com a segunda simulação proposta na tradução do problema 1 95
Figura 17 – Print da segunda simulação proposta na tradução do problema 1 95
Figura 18 – Gestos de apontamentos para o simulador digital que denotam o raciocínio numérico 98
Figura 19 – Estratégia proposta por Rosália 100
Figura 20 – Percepção de uma função do simulador digital 102
Figura 21 – Gestos de apontamentos para o simulador digital que denotam o raciocínio proto-analítico 103
Figura 22 – Resolução aritmética do primeiro problema de enunciado no SSI 104
Figura 23 – Gestos que denotam a operação com a indeterminação 106
Figura 24 – Resolução algébrica do primeiro problema de enunciado no SSI 107
Figura 25 – Disposição física das professoras no momento de discussão geral do primeiro problema de enunciado 107
Figura 26 – Resolução algébrica apresentada na discussão geral do primeiro problema 109
Figura 27 – Movimento com as mãos para denotar a igualdade 111
Figura 28 – Resoluções aritmética e algébrica do problema 1 no SSA 112
Figura 29 – Empilhamento das grandezas determinadas e indeterminadas 116
Figura 30 – Resolução algébrica do segundo problema de enunciado no SSI 118
Figura 31 – Gestos de Andréia na resolução do problema 2 121
Figura 32 – Gestos de Sirlene na resolução do problema 2 122
Figura 33 – Suporte tecnológico à Sirlene 123
Figura 34 – Andréia pensativa com a mão no queixo 124
Figura 35 – Resolução algébrica do problema 2 no SSA 126

Figura 36 – Síntese das compreensões finais das professoras acerca da álgebra escolar nos anos iniciais..129

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades da BNCC sobre relação de igualdade 28
Quadro 2 – Problema dos cartões e envelopes 40
Quadro 3 – Problemas de enunciados elaborados e resolvidos em grupos 42
Quadro 4 – Problema das latas e sacolas 43
Quadro 5 – Problema das canetinhas e estojos 44
Quadro 6 – Os problemas dos cartões e os sistemas semióticos 45
Quadro 7 – Principais características do pensamento aritmético e algébrico a partir de tarefas envolvendo equações 46
Quadro 8 – Informações gerais das pesquisas sobre formação de professores 61
Quadro 9 – Informações gerais do curso de formação continuada 69
Quadro 10 – Problemas de enunciado da pesquisa 80
Quadro 11 – Ações para cada problema de enunciado proposto na pesquisa 81
Quadro 12 – Primeiro problema de enunciado proposto na pesquisa 91
Quadro 13 – Síntese dos indícios de pensamento algébrico que emergiram na atividade formativa envolvendo o primeiro problema de enunciado 113
Quadro 14 – Segundo problema de enunciado proposto na pesquisa 115
Quadro 15 – Síntese dos elementos do pensamento algébrico que emergiram na atividade formativa envolvendo o segundo problema de enunciado 127

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEA	Atividade de Ensino-Aprendizagem
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CPE	Currículo de Pernambuco
D	Dissertação
EBTO	Encontro Brasileiro sobre a Teoria da Objetivação
EI	Explorador da Igualdade
EIB	Explorador da Igualdade: Básico
PHET	*Physics Education Technology*
RICTO	Rede Internacional de Colaboração Acadêmica em Teoria da Objetivação
SSA	Sistema Semiótico Alfanumérico
SSC	Sistema Semiótico Concreto
SSI	Sistema Semiótico Icônico
SSSC	Sistemas Semióticos de Significação Cultural
T	Tese
TO	Teoria da Objetivação

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 20

1.1 Experiências acadêmicas 20

1.2 Nosso posicionamento teórico: por que a Teoria da Objetivação? 22

1.3 Caminhos anteriores: o que as pesquisas apontam? 22

1.4 Questões curriculares em torno da álgebra e das tecnologias digitais 27

1.5 Questão de pesquisa 31

1.6 Objetivos 31

1.6.1 Objetivo geral 31

1.6.2 Objetivos específicos 31

1.7 Apresentação do percurso da dissertação 32

2. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ENCONTRO COM UMA PERSPECTIVA TEÓRICA? 33

2.1 O que é álgebra? O que é pensamento algébrico? 33

2.2 Álgebra escolar e as relações de igualdade 35

2.3 Pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação 37

2.3.1 Elementos caracterizadores do pensamento algébrico 37

2.3.2 Caminhos anteriores: alguns resultados de pesquisas sobre o estudo introdutório das equações 40

2.3.3 Sistemas semióticos no movimento de pensar algebricamente 45

2.4 Principais características dos pensamentos aritmético e algébrico a partir de tarefas envolvendo equações 46

3. TEORIA DA OBJETIVAÇÃO 50

3.1 Saber e conhecimento 50

3.2 Aprendizagem 52

3.3 Atividade de ensino-aprendizagem 53

3.4 Processos de objetivação 56

3.5 Processos de subjetivação 56

3.6 Artefatos culturais 57

4. FORMAÇÃO DE PROFESSORES NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO 59

4.1 Pesquisas na formação de professores fundamentadas pela TO: um levantamento bibliográfico 60

4.2 Contribuições das pesquisas para a formação de professores: alguns pressupostos teóricos e metodológicos da TO......67

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS......69

5.1 Caracterização do tipo de pesquisa......69

5.2 Descrição do setor de formação......71

5.3 Procedimento de produção dos dados......73

5.3.1 Aspectos gerais dos artefatos tecnológicos digitais......73

5.3.2 Estruturação das atividades formativas......75

5.3.3 Tarefas propostas na pesquisa......79

5.3.4 Formas de registros dos dados......82

5.3 Procedimento de análise dos dados......83

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO......85

6.1 Episódio 1 – Movimentos iniciais: dos saberes algébricos constituídos histórica e culturalmente a um convite para repensar a álgebra escolar......85

6.2 Episódio 2 – Atividades formativas referentes às resoluções de problemas envolvendo o estudo introdutório de equações com simulações interativas digitais......90

6.2.1 Atividade formativa envolvendo o primeiro problema de enunciado sobre equações......91

6.2.2 Atividade formativa envolvendo o segundo problema de enunciado sobre equações......114

6.3 Episódio 3 – Movimentos finais: um encontro com uma forma de pensar algebricamente?......128

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS......132

REFERÊNCIAS......140

1. INTRODUÇÃO

Há diversos fatores que podem justificar a proposição de uma pesquisa científica: vivências pessoais, trajetória acadêmica e/ou profissional, literatura, escolha do marco teórico, demandas sociais, educacionais, tecnológicas, científicas, econômicas, entre outros. Nesse sentido, a fim de justificarmos a relevância desta dissertação, apresentamos nossos argumentos em quatro frentes: (i) experiências acadêmicas, (ii) nosso posicionamento teórico: por que a teoria da objetivação?, (iii) caminhos anteriores: o que as pesquisas apontam?, e (iv) questões curriculares em torno da álgebra e das tecnologias digitais. Isso porque acreditamos que desde meu engajamento pessoal[1] até questões educacionais mais amplas sinalizam a nossa preocupação com o ensino-aprendizagem de Matemática situado em um movimento histórico-cultural que sofre influência de diversas variáveis contextuais.

1.1 Experiências acadêmicas

Meu encontro com pesquisas na área da formação de professores se deu desde o primeiro período enquanto discente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Especificamente, alguns textos apresentados pela professora Mari Noeli na disciplina de Produção de Textos Acadêmicos, tais como Fiorentini e Crecci (2015), Canôas (2015), Onuchic e Huanca (2013), me despertaram interesse nas reflexões acerca do papel dos professores nos processos de ensino-aprendizagem e me convidaram a trilhar o caminho na Educação Matemática.

Outro marco na minha formação inicial foi a imersão na área da Didática da Matemática, principalmente por meio da parceria que estabeleci com a professora Elisângela Espíndola durante minha participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Essa experiência culminou, posteriormente, na proposição de um projeto de pesquisa para o Programa de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), executado no período de agosto de 2020 a julho de 2022.

Assim sendo, as motivações para a proposição da presente pesquisa de mestrado decorrem, sobretudo, dos estudos de Almeida e Espíndola (2023) que constataram a relevância

---

[1] Ao longo do texto, nos colocamos ora na primeira pessoa do singular ora na primeira pessoa do plural, haja vista que, embora a dissertação seja uma produção coletiva entre orientando-orientador, há experiências particulares do autor que precisam ser explicitadas.

de simulações interativas digitais que podem despertar a curiosidade, a ludicidade, a experimentação, a interpretação e a problematização de situações-problema no estudo das relações de igualdade. Tal projeto, intitulado por *Do cálculo do termo desconhecido à equação do 1° grau: recursos para o estudo de relações e propriedades de igualdade no Ensino Fundamental*, foi aprovado nos editais de 2020 e 2021 direcionados ao PIBIC da FACEPE, na área de Ciências Humanas e subárea Ensino-Aprendizagem.

Norteado pelas investigações empreendidas no âmbito do PIBIC, expandi os estudos em meu trabalho de monografia da Licenciatura em Matemática (Almeida, 2022), tendo como uma das finalidades analisar a utilização das referidas simulações interativas digitais em uma aula on-line com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Grosso modo, os resultados desses trabalhos suscitam possibilidades metodológicas no que tange às práticas de ensino-aprendizagem da álgebra escolar, considerando um ambiente rico em artefatos tecnológicos digitais para a mediação da atividade envolvendo a interação entre os alunos e professores.

Outrossim, um espaço importante na minha formação inicial foi meu envolvimento no Grupo Al-Jabr de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra[2] (CNPq/UFRPE), sob a liderança do Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida, que vem desenvolvendo algumas pesquisas alicerçadas na concepção de Pensamento Algébrico preconizada na Teoria da Objetivação.

Particularmente, em 2021, participei do grupo de formadores de um curso de extensão, proposto pelo Al-Jabr, intitulado por *Conhecimento didático acerca da álgebra: um projeto de formação continuada com professores dos anos iniciais do ensino fundamental à luz da teoria da objetivação*, que foi aprovado e financiado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), por intermédio do edital SBEM-DNE 01/2020 do Programa SBEM FormAção. Por conseguinte, no ano de 2022, integrei-me à equipe técnica de um projeto de pesquisa, com aporte financeiro proveniente do edital FACEPE 16/2021 – Auxílio a Projetos de Pesquisa para Jovens Pesquisadores (APQ-JP), que visou aprofundar os estudos em uma segunda edição da referida formação, sob a coordenação do líder do Al-Jabr.

No âmbito da pós-graduação, participei de um estágio presencial de pesquisa em Teoria da Objetivação com o próprio teórico Luis Radford, professor emérito da *Laurentian University of Sudbury* do Canadá, e a colaboração de pesquisadores de outros estados do país. Esse estágio foi promovido pela Rede Internacional de Colaboração Acadêmica em Teoria da Objetivação

[2] Para mais informações, acessar o espelho do grupo no Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil do CNPq: http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8314162828668513.

(RICTO), entre os dias 20 a 23 de março de 2023, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Como fruto dessa experiência, fomos convidados a propor um capítulo, intitulado por *A materialização do pensamento algébrico por professoras dos anos iniciais com o uso de simulação interativa acerca das relações de igualdade* (Almeida; Ramos de Almeida, 2024, no prelo), para um livro organizado pelas professoras Claudianny Amorim Noronha (UFRN) e Shirley Takeco Gobara (UFMS).

Além disso, no segundo semestre de 2023, participei, junto com alguns membros do Al-Jabr, da escrita do projeto do I Encontro Brasileiro sobre a Teoria da Objetivação (I EBTO)[3], submetido e aprovado no Edital PAEP nº 11/2023 do Programa de Apoio a Eventos no País da CAPES. Coordenado pelo líder do grupo de pesquisa Al-Jabr, o I EBTO aconteceu presencialmente entre os dias 24 a 26 de abril de 2024, na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), com o apoio financeiro da CAPES, da FACEPE e dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEdumatec) e Ensino das Ciências (PPGEC). Nesse evento, fui membro da equipe da comissão organizadora.

Essas (e outras) experiências acadêmicas, nos pilares do ensino, pesquisa e extensão, me possibilitaram um delineamento para a proposição desta dissertação.

1.2 Nosso posicionamento teórico: por que a Teoria da Objetivação?

No que concerne à escolha teórico-metodológica deste trabalho, argumentamos que a fundamentação na Teoria da Objetivação (TO) se deu pelo fato de que ela fornece um arcabouço sistemático para refletir e analisar não somente a dimensão do saber (conhecer) como também a dimensão do ser (vir a ser) no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Apesar de intitular-se por Teoria da **Objetivação**, dando ênfase à transformação contínua dos saberes histórico-culturais, não apenas esse processo ganha destaque nesta teoria. A TO defende que os processos de objetivação e subjetivação estão entrelaçados na vivência de uma atividade. Partindo desse pressuposto, ressaltamos que compreendemos os participantes da nossa pesquisa como seres em fluxo, em evolução constante e contínua, que podem transformar a si mesmos por meio da (Educação) Matemática.

1.3 Caminhos anteriores: o que as pesquisas apontam?

Na procura por uma literatura que estabelecesse interlocuções entre o quadro teórico e o pensamento algébrico, a formação de professores e/ou as tecnologias digitais, restringimos,

[3] Para mais informações, acessar: https://www.even3.com.br/iebto2024/.

a priori[4], a nossa fonte de pesquisa para dossiês temáticos publicados em periódicos brasileiros e internacionais nos últimos cinco anos. Essa restrição justifica-se pela relevância que um número temático sobre determinado tema tem para uma comunidade científica que investiga naquele campo, uma vez que pode congregar editores convidados, pesquisadores nacionais (de diversas regiões do país) e internacionais ou até mesmo o(s) autor(res) da teoria ou do modelo teórico em questão. O que institui um acervo de diversas pesquisas acerca de um eixo temático. A partir dessa busca, encontramos uma edição especial em âmbito nacional e dois números temáticos no cenário internacional. As análises dos artigos das referidas edições temáticas aconteceram em três etapas: (I) leitura dos títulos, palavras-chave e resumos, (II) seleção da literatura que contempla a interconexão entre a TO e o pensamento algébrico, a formação de professores e/ou as tecnologias digitais; e (III) leitura dos trabalhos selecionados na etapa anterior. A seguir, discorremos sobre as pesquisas levantadas.

No Brasil, temos a edição especial cujo título é *A Teoria da Objetivação*, publicada em 2021 pelo periódico *REMATEC: Revista Matemática, Ensino e Cultura* e organizada pela Profa. Dra. Bernadete Morey (UFRN) e pelo Prof. Dr. Luis Radford (Laurentian University – Canadá). O número apresenta um panorama geral do terreno da TO, constituído por 12 artigos científicos propostos por pesquisadores da área da Educação Matemática e do Ensino das Ciências do Brasil, México, Colômbia, Venezuela, Itália e Chile.

Na primeira e segunda etapa da análise dessa edição brasileira, identificamos que nove artigos não atendiam o critério de seleção adotado, enquanto três estudos dialogavam com os temas em tela. Na terceira etapa, realizamos a leitura do trabalho de Camilotti e Gobara (2021) sobre o processo de emancipação coletiva na formação continuada de professores fundamentada pela TO; do estudo de Prieto G e Arredondo (2021) acerca do uso do GeoGebra na formação de professores de Matemática; bem como do artigo de Silva e Ramos de Almeida (2021), que discute sobre o pensamento algébrico e a TO.

Com o objetivo de propiciar uma reflexão acerca do processo de emancipação coletiva no que tange às práticas educativas alienantes de uma equipe de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública, o artigo de Camilotti e Gobara (2021), excerto da tese da primeira autora (Camilotti, 2020) sob orientação da coautora, suscita a importância de uma formação continuada fundamentada na TO para o surgimento de novas subjetividades

[4] No desenvolvimento da pesquisa, fomos sentindo a necessidade de estabelecer diálogos com outras pesquisas que não tomam a Teoria da Objetivação como fundamento. A exemplo, no capítulo seguinte trazemos alguns estudos que assumem outras perspectivas de álgebra escolar e de pensamento algébrico

a partir da desconstrução, pelas professoras, das suas práticas educativas alienantes com ênfase na transmissão de informações e no trabalho individual.

Enquanto o artigo de Silva e Ramos de Almeida (2021), recorte da dissertação da primeira autora (Silva, 2021) sob orientação do coautor, objetivou compreender os diferentes meios semióticos de objetivação emergentes na realização de uma tarefa, envolvendo generalização de padrões, por uma aluna do 8° ano do Ensino Fundamental e, por conseguinte, identificar os distintos níveis de generalização algébrica que ela conseguiu alcançar. Por meio da análise de vídeo gravado da vivência da atividade, os autores apontam que a aluna trabalhou com as três formas de pensamento algébrico: factual (ou concreta), contextual e simbólica (ou padrão).

O artigo proposto por Prieto G e Arredondo (2021) buscou analisar o processo de construção geométrica de um triângulo com uso do software GeoGebra a partir do trabalho coletivo envolvendo dois futuros professores de Matemática e um formador. Dentre os resultados, os autores destacam a relevância das articulações entre diferentes meios semióticos – a saber: gestos, palavras e notação geométrica – para o encontro com o saber geométrico em cena por parte dos sujeitos envolvidos.

Como podemos perceber, o estudo de Camilotti e Gobara (2021) nos fornece indícios de como elaborar uma formação continuada de professores vislumbrando a emancipação coletiva, por meio de práticas e reflexões não alienantes. Por outro lado, a pesquisa de Silva e Ramos de Almeida (2021) nos aponta como analisar a generalização algébrica por meio de uma abordagem multimodal, principalmente acerca de quais perguntas devemos fazer para que emerja o pensamento algébrico por parte dos participantes da investigação. Enquanto a investigação de Prieto G e Arredondo (2021) apresenta caminhos de como articular o artefato tecnológico digital com os diferentes meios semióticos em cena.

Em âmbito internacional, o primeiro número temático encontrado, intitulado *Aportes de la Teoría de la Objetivación y la Teoría Histórico-Cultural a la Investigación en Educación Matemática*, foi publicado em 2023 pelo periódico *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)* e reúne oito trabalhos. A apresentação desta edição conta com a participação dos professores doutores Rodolfo Vergel da Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), na Colômbia, e Vanessa Dias Moretti da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), no Brasil.

Adotando a mesma justificativa de exclusão e inclusão dos trabalhos que o periódico anterior, identificamos que sete artigos não atendiam o critério de seleção proposto, enquanto um estudo (Minosso; Panossian, 2023) estabelecia um diálogo entre os temas formação de professores e pensamento algébrico

Minosso e Panossian (2023) apresentam, no artigo selecionado, um recorte da tese de doutorado do autor (Minosso, 2023) sob a orientação da coautora. Procurando apresentar os indícios do processo de objetivação revelados por professores dos anos iniciais em uma formação on-line acerca do reconhecimento de grandezas variáveis, os autores analisam a discussão de uma tarefa, que aborda conceitos algébricos relativos à função matemática, considerando as tensões, as hesitações e outros meios de objetivação na interação entre pesquisador e professores.

Embora o objeto matemático do estudo de Minosso e Panossian (2023) seja diferente da presente pesquisa, ele indica caminhos de como trabalhar o pensamento algébrico na formação continuada de professores dos anos iniciais.

O outro número especial, encontrado no cenário internacional, foi organizado pelas professoras doutoras Claudianny Amorim Noronha (UFRN), Shirley Takeco Gobara (UFMS) e Luanna Priscila da Silva Gomes (UFRN). Intitulada por *Teoria da Objetivação: os caminhos de uma teoria em movimento* e publicada em 2024 pelo periódico venezuelano *Revista Paradigma*, a edição conta com 10 artigos.

Dentre os artigos publicados nesse último número, utilizando o filtro de exclusão e inclusão supramencionado, identificamos que seis artigos não correspondiam ao critério de seleção e quatro estudos se articulavam com a nossa proposta.

Romeiro, Moretti e Radford (2024) apresentam um recorte da tese da primeira autora (Romeiro, 2023) sob orientação dos coautores, visando ilustrar os aspectos teóricos e metodológicos da Teoria da Objetivação que podem subsidiar atividades de formação com professores. Particularmente, os autores apontam a potencialidade de uma análise multissemiótica para revelar as formas de generalização que emergiram das atividades coletivas com os professores envolvendo o movimento do pensamento algébrico.

Camilotti, Fernández e López (2024) realizaram um levantamento bibliográfico, a fim de apresentar o estado do conhecimento de pesquisas na área de formação de professores fundamentadas pela TO. Ao selecionar 29 artigos científicos, os autores apontam suas contribuições para delinear uma proposta de formação de professores de matemática no México. Os aspectos relevantes destacados foram: reflexões críticas acerca de suas práticas pedagógicas pelos próprios professores, inspirações da noção de trabalho conjunto, ações pautadas pela ética comunitária (Camilotti; Fernández; López, 2024).

O trabalho de Brandemberg, Sánchez e Castillo (2024) apresenta elementos do processo de objetivação das formas geométricas a partir da elaboração simuladores com o uso do software GeoGebra por parte de discentes de um curso de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagem. Nesse sentido, os autores destacam a relevância dos meios semióticos de objetivação para representar o saber geométrico em foco.

Sousa (2024) propõe-se a investigar as articulações possíveis entre as tendências História da Matemática e Tecnologias Digitais tomando a TO como fundamento. Para tanto, a autora realizou um levantamento bibliográfico, do qual encontrou 25 trabalhos: 22 sobre a primeira tendência supracitada e 3 sobre a segunda. Grosso modo, Sousa (2024) ressalta que a interlocução entre História da Matemática e Tecnologias Digitais é um terreno investigativo novo a ser desbravado pelos estudiosos da TO.

Dessa última edição temática, os trabalhos de Romeiro, Moretti e Radford (2024) e Camilotti, Fernández e López (2024) norteiam a nossa pesquisa, sobretudo, pelas indicações de como organizar uma formação de professores alicerçada pela TO, enquanto que os estudos de Brandemberg, Sánchez e Castillo (2024) e Sousa (2024) subsidiam reflexões sobre as tecnologias digitais em uma perspectiva histórico-cultural.

Em suma, o fato de identificarmos apenas uma edição temática no Brasil, e outras duas em âmbito internacional, converge com os apontamentos, realizados por Minosso, Díaz-Urdaneta e Panossian (2022), que o emprego da TO como fundamento teórico e metodológico é recente em território brasileiro. Na revisão da literatura proposta pelos autores, 19 pesquisas foram selecionadas, sendo 11 dissertações e 8 teses. Minosso, Díaz-Urdaneta e Panossian (2022) observaram que, predominantemente, os pesquisadores buscam analisar os processos de objetivação e subjetivação de alunos da Educação Básica, assim como o processo de ensino-aprendizagem da álgebra.

Diante disso, constatamos a escassez de trabalhos que interseccionam as interfaces “pensamento algébrico”, “formação de professores” e “tecnologias digitais” tomando a TO como alicerce. Portanto, destacamos a relevância da presente pesquisa tanto do ponto de vista científico, ao nos comprometermos com a ampliação das pesquisas brasileiras com base na TO, quanto do ponto de vista tecnológico e social, ao buscarmos promover a formação continuada de professores com o uso de artefatos tecnológicos digitais frente às demandas curriculares atuais para o ensino e a aprendizagem da álgebra escolar.

1.4 Questões curriculares em torno da álgebra e das tecnologias digitais

Empreendemos considerações sobre o currículo de Matemática, por acreditarmos que, em consonância com Radford em Moretti, Panossian e Radford (2018), os conteúdos conceituais carregam valores políticos e econômicos. “Por isso, ao pensar sobre os conteúdos conceituais que vamos oferecer às novas gerações, sempre devemos ir além dos conteúdos conceituais em si e nos perguntarmos sobre o projeto social em que estão inseridos” (Radford em Moretti; Panossian; Radford, 2018, p. 267). Consequentemente, é essencial debater sobre as prescrições normativas das aprendizagens fundamentais para os alunos brasileiros e pernambucanos de diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, e não apenas centrar os esforços na formação por competências e habilidades.

Em virtude do que é apregoado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) e no Currículo de Pernambuco – CPE (Pernambuco, 2019) sobre as tendências atuais em Educação Matemática que não compreendem a álgebra como um bloco de conteúdo isolado, mas sim como uma forma de pensar matematicamente, consideramos a importância de ressignificar os processos de ensino-aprendizagem da álgebra que privilegiam somente a linguagem alfanumérica a fim de concebê-la como uma área do conhecimento humano advinda de vivências históricas e culturais (Panossian; Sousa; Moura, 2017).

Nesse sentido, ressaltamos que, embora as prescrições normativas reforcem a essencialidade do pensamento algébrico para os alunos da Educação Básica, não há uma definição precisa desse tipo de pensamento matemático na BNCC e no CPE. Por sua vez, as inquietações que perpassam esse cenário são: O que é “álgebra”? O que é “pensar algebricamente”? O que caracteriza o “pensamento algébrico”? Na tentativa de respondermos esses questionamentos, buscamos confrontar e problematizar, nesta pesquisa, o currículo de Matemática na formação continuada de professores.

Assim sendo, partindo dos pressupostos acerca da (des)construção curricular defendida por Cyrino e Grando (2022), visamos problematizar a álgebra enquanto um modo de pensar e generalizar, por meio de atividades que convidem a ressignificar os significados[5] atribuídos às grandezas determinadas e indeterminadas.

[5] Com base em Radford (2021a), entendemos por *significado* tudo aquilo que os sujeitos atribuem às coisas que os cercam, como parte fundante do processo de significação cultural. Para o teórico, as noções de natureza do mundo, da verdade e do indivíduo são constitutivas desse processo. Por sua vez, consideramos a *ressignificação* como um reencontro ou um novo encontro com (novas) formas de se relacionar com os saberes e seres disponíveis histórica e culturalmente.

Especificamente, daremos ênfase na relação de igualdade e na noção de equivalência, devido não somente a notoriedade que esse objeto de conhecimento tem na unidade temática "Álgebra" da área de Matemática da BNCC e CPE, mas sobretudo pela sua relevância para a emergência do pensamento algébrico, como disposto no Quadro 1:

Quadro 1 – Habilidades da BNCC sobre relação de igualdade

	Anos Escolares	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
Anos iniciais	3º ano	Relação de igualdade	(EF03MA11): Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença, *(por exemplo, 3 + 4 = 7, então 7 = 3 + 4, indicando sentido de equivalência na igualdade; ou ainda a ideia de que é possível que adições e subtrações entre números diferentes deem o mesmo resultado. Assim 15 – 10 = 5, 25 – 20 = 5 são subtrações diferentes com resultados iguais. Então 15 – 10 = 25 – 20 ou ainda 30 + 20 = 15 + 35, pois as duas somas são iguais)*.
	4º ano	Propriedades da igualdade	(EF04MA14): Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
			(EF04MA15): Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
	5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10): Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
			(EF05MA11): Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
Anos finais	6º ano	Propriedades da igualdade	(EF06MA14): Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas *(por exemplo, explorando a metáfora da balança)*.
	7° ano	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: Brasil (2018) e Pernambuco (2019)[6].

[6] As partes das habilidades EF03MA11 e EF06MA14 entre parênteses e em itálico no Quadro 1 referem-se às informações adicionais, apresentadas no CPE, em relação à BNCC.

Como apresentado no Quadro 1, há 7 habilidades, referentes aos temas, que permeiam os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Com isso, a BNCC e CPE apontam a importância da continuidade dos estudos das relações de igualdade, e temáticas correlatas, do 3º ao 7º ano. Entretanto, embora o trabalho com a álgebra deva estar presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os documentos assinalam que, nessa etapa de escolarização, não se deve introduzir o uso de letras para denotar regularidades, mesmo que sejam de simples compreensão. A exemplo dessa proposta, temos:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Brasil, 2018, p. 270).

A situação acima é uma possível ilustração de como a unidade temática “Álgebra” está relacionada com a de “Números”, mas vai além das operações a serem realizadas. Pois, o objetivo é perceber que, partindo de duas premissas equivalentes entre si, conseguimos deduzir uma terceira equivalência.

Um outro ponto a ser tensionado é que estamos interessados no estudo introdutório das equações, abrangendo as noções tanto em torno da relação de igualdade quanto do trabalho com grandezas indeterminadas (Radford, 2022a, 2022b, 2022c). Nesse sentido, podemos observar que, embora a BNCC e o CPE apresentem habilidades relacionadas ao processo de introdução às equações (EF04MA14, EF04MA15, EF05MA10 e EF05MA11; ver Quadro 1), os objetos de conhecimento não são nomeados de tal forma, apenas no 7º ano do Ensino Fundamental quando se inicia o trabalho com a linguagem alfanumérica. Entretanto, para a vertente de álgebra que estamos assumindo nesta dissertação, o trabalho com relações de igualdade envolvendo o cálculo do termo desconhecido já se caracteriza como equações, independente da forma que denotamos o sinal de igualdade, as operações e a indeterminação.

Além dessas prescrições curriculares para o processo de ensino-aprendizagem da álgebra, estabelecemos uma interlocução com o tema das tecnologias digitais. A respeito disso, embora essas habilidades (Quadro 1) não explicitem sobre o uso das tecnologias digitais para ensinar e aprender álgebra, recorremos a quinta competência geral da BNCC e do CPE para a Educação Básica:

> Compreender, utilizar e criar **tecnologias digitais** de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p. 9; Pernambuco, 2019, p. 17, grifo nosso).

Sublinhamos que, em Almeida (2022), a implementação das tecnologias digitais em uma aula on-line de Matemática, para o estudo dos temas *relação de igualdade* e a *noção de equivalência*, ocorreu a partir de um viés instrumental. Expandindo as discussões sobre a integração das tecnologias digitais na Educação Matemática, buscamos compreendê-la, nesta dissertação, em uma perspectiva crítica, reflexiva, ética e significativa, a fim de superar as indicações gerais propostas na BNCC e no CPE.

Convém ressaltar ainda que, é inegável o poder de ação, seja direta ou indiretamente, das tecnologias digitais no cotidiano dos seres humanos (Borba *et al.* 2023; Borba; Souto; Canedo Junior, 2022; Borba, 2021). Mas, como utilizá-las nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática em um viés não alienante?

Estritamente, os referidos documentos oficiais advertem, na quinta competência da área de Matemática para o Ensino Fundamental, que se deve "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive *tecnologias digitais* disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (Brasil, 2018, p. 267; Pernambuco, 2019, p. 41, grifo nosso). Nesse sentido, é ressaltado a importância, para o campo da Matemática, da elaboração, modelação e resolução de problemas mediados por tecnologias digitais.

Para além das orientações curriculares, concebemos as tecnologias digitais, a partir dos preceitos da Teoria da Objetivação, enquanto artefatos que fazem parte da atividade matemática, situada em um movimento materialista, dialético, histórico e cultural (Vargas-Plaça; Gobara; Radford, 2022; Vargas, 2020; Camilotti, 2020). Conforme Radford, Salinas-Hernández e Sacristán (2023), "os artefatos não são vistos como mediadores, mas como parte da atividade professor-aluno, mais especificamente, parte da textura material da matemática e do pensamento matemático".

Mediante o exposto, evidenciamos que a nossa intenção é propiciar um ambiente potencial de pensamento, ação e reflexão pautado na problematização do currículo de Matemática, no contexto da formação continuada de professores. Isso porque, com base nas ideias de trabalho conjunto propostas por Radford (2021a), faz-se essencial a reflexão crítica acerca da temática, que compreenda os espaços coletivos de formação de professores como colaborativos e de possibilidades contínuas de encontros com novos saberes e novas formas de vir a ser no mundo. Tal fato justifica a proposta desta pesquisa, haja vista que, para que os professores possam identificar e incitar a emergência do pensamento algébrico, por parte dos alunos, eles mesmos precisam emergir o pensamento algébrico.

Para tanto, estabelecemos articulações entre a álgebra e as tecnologias digitais – os simuladores digitais *Explorador da Igualdade: Básico* e *Explorador da Igualdade* – em um viés não alienante, considerando suas potencialidades e limitações, nas quais as participantes da pesquisa-formação possam problematizar não apenas os saberes em cena (sejam matemáticos, tecnológicos ou pedagógicos), como também refletiam sobre si mesmos.

Portanto, a partir da compreensão da relação dialética entre a produção do conhecimento e a produção de novas subjetividades, traçamos a questão de pesquisa e os objetivos para respondê-la, elencados nas próximas seções.

1.5 Questão de pesquisa

- Como pode ser caracterizado o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais?

1.6 Objetivos

1.6.1 Objetivo geral

- Caracterizar o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais.

1.6.2 Objetivos específicos

- Identificar os três vetores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade) que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais;
- Reconhecer os meios semióticos de objetivação que emergem, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais.

1.7 Apresentação do percurso da dissertação

Para apresentar o percurso da dissertação, estruturamos o texto em cinco capítulos tendo por finalidade responder à questão e aos objetivos da pesquisa. Ressaltamos que a organização textual segue um movimento lógico, uma espécie de "linha do tempo", do meu encontro coletivo no âmbito do grupo de pesquisa Al-Jabr com os respectivos temas: pensamento algébrico (objeto), Teoria da Objetivação (fundamento) e formação de professores (contexto).

No capítulo intitulado *Álgebra e pensamento algébrico: um encontro com uma perspectiva teórica?*, levantamos alguns questionamentos em torno da álgebra escolar, em particular sobre o saber *equações*, a fim de caracterizarmos qual perspectiva de pensamento algébrico estamos nos fundamentando em nosso estudo. Acreditamos, assim, que essa seção do texto propicia aos leitores, que não são familiarizados com a Teoria da Objetivação, se introduzirem na teoria por meio das discussões no campo da álgebra.

No capítulo intitulado *Teoria da Objetivação*, mergulhamos em alguns conceitos essenciais da TO, como: saber, conhecimento, aprendizagem, atividade de ensino-aprendizagem, processos de objetivação, processos de subjetivação e artefatos culturais, visando destacar o projeto de Educação (Matemática) que acreditamos e defendemos. Tais reflexões nos auxiliam teórica e metodologicamente na produção e análise dos dados.

No capítulo intitulado *Formação de professores na perspectiva da Teoria da Objetivação*, apresentamos um levantamento de pesquisas brasileiras a nível de mestrado e doutorado que buscam discutir sobre o processo formativo de professores tomando a TO como fundamento. Esta seção emerge das nossas inquietações de aprofundar as reflexões acerca do trabalho docente, do processo de aprendizagem docente, entre outros aspectos.

No capítulo de *Resultados e Discussão*, analisamos os dados que evidenciam a nossa defesa de que o trabalho coletivo desenvolvido com as professoras participantes da pesquisa, mediante atividades formativas, influenciou na resolução de problemas sobre equações com simulações interativas digitais. A partir disso, conseguimos sustentar uma caracterização do pensamento algébrico com o uso de artefatos tecnológicos digitais.

No capítulo das *Considerações Finais*, retomamos os principais achados da pesquisa, articulando-os com a questão e os nossos objetivos, além tecermos alguns apontamentos das contribuições desta dissertação para minha constituição enquanto pesquisador em formação na área da Educação Matemática. Por fim, indicamos alguns caminhos investigativos futuros possíveis.

2. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ENCONTRO COM UMA PERSPECTIVA TEÓRICA?

2.1 O que é álgebra? O que é pensamento algébrico?

Nas salas de aula de Matemática, especificamente nos tópicos de álgebra, muitos professores já devem ter escutado esta pergunta: quem inventou de colocar letras na Matemática? Tal inquietação pode desencadear outras questões, a saber: o que significa, por que, quando e como as letras são introduzidas no ensino de Matemática?

A História da Matemática, particularmente da Álgebra, nos mostra que nem sempre as grandezas indeterminadas (incógnitas, variáveis, parâmetros etc.) foram denotadas por intermédio de letras. Conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a linguagem algébrica passou por três grandes estágios: retórico, sincopado e simbólico.

No estágio da linguagem retórica, as ideias algébricas eram expressas por meio da linguagem corrente, a exemplo da escrita cuneiforme registrada nas tábuas de argila e das recitações orais pelos Babilônicos (Radford, 2011b). Essa fase se refere à época das civilizações antigas, como os egípcios (2000 a.C.) e os babilônicos (1700 a.C.).

No estágio da linguagem sincopada, as ideias algébricas deixaram de ser expressas apenas por meio de palavras e passaram a ser representadas também por intermédio de expressões concisas e abreviadas referentes às grandezas desconhecidas (Radford, 2021a). Essa fase remete à época em que Diofanto introduziu o termo *arithmos* para indicar uma incógnita em suas equações.

No estágio da linguagem simbólica, as ideias algébricas começaram a ser expressas por meio de uma simbologia que representava as quantidades indeterminadas. Essa fase é marcada pela introdução das letras para denotar as incógnitas por parte do matemático francês François Viète (1540-1603).

Mediante a descrição desses estágios,

> Retomamos assim a compreensão de que tanto o campo da álgebra quanto o de outros conhecimentos matemáticos foram elaborados historicamente por indivíduos de diversas civilizações, em diferentes épocas, para atender às necessidades postas pela experiência prática e de seu próprio desenvolvimento como ciência, sendo seus símbolos a possibilidade de representação e concretização para comunicação de seus conceitos, bem como de seus processos de generalização e abstração (Sousa; Panossian; Cedro, 2014, p. 31).

Por outro lado, convém mencionar a crítica de Radford (2011a) de que, em um panorama sociocultural do desenvolvimento da álgebra, as linguagens algébricas emergiram por necessidades históricas e não apenas como um movimento linear de "evolução matemática" até chegar na "abstração pura" dos objetos matemáticos. Como exemplo dessa colocação, o autor destaca que:

> [...] a álgebra sincopada não foi um estágio intermediário de maturação no qual o conhecimento tirou uma espécie de descanso em seu caminhar em direção ao simbolismo. Ao invés disso, foi uma mera estratégia técnica imposta pelas limitações da escrita e pela falta da imprensa em tempos passados aos diligentes escribas que tinham de copiar os manuscritos à mão (Radford, 2011a, p. 77).[7]

Tais reflexões nos colocam diante da necessidade de considerarmos o movimento histórico-cultural dos conceitos na organização das práticas de ensino de Matemática, em particular da álgebra escolar – aquela trabalhada na Educação Básica –, e não focarmos meramente na manipulação do simbolismo alfanumérico desprovida de significados.

Segundo Ramos de Almeida (2017), na contemporaneidade, há duas vertentes acerca da álgebra escolar, as quais compreendem-na como: (a) uma *linguagem específica* utilizada para representar valores, essencialmente desconhecidos; e (b) uma *maneira peculiar de pensar* acerca de situações matemáticas. Nesse contexto, acreditamos que compreender a álgebra escolar restrita à linguagem alfanumérica implica desconsiderar outras linguagens e, consequentemente, o movimento lógico dos entes algébricos em outros contextos histórico-culturais. Em outros termos, precisamos direcionar nossos olhares para o tipo de raciocínio que emerge na resolução de problemas a fim de identificarmos quais estratégias e justificativas são utilizadas no trabalho com as grandezas desconhecidas.

Sendo assim, torna-se necessário priorizar, na introdução da álgebra escolar, aquilo que a BNCC aponta como desenvolvimento do pensamento algébrico. Mas, retomamos os questionamentos supramencionados na introdução: O que é "álgebra"? O que é "pensar algebricamente"? O que caracteriza o "pensamento algébrico"?

Algumas investigações (Radford, 2021b; Gomes; Noronha, 2020; Ramos de Almeida; Câmara dos Santos, 2017) têm apontado que, na literatura, não há um consenso da definição de pensamento algébrico. Para alguns pesquisadores, como Kaput (2008) e Lins (1992), existe uma continuidade entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico, na qual a álgebra é compreendida como uma aritmética generalizada; enquanto outros, a exemplo Filloy e Rojano (1989) e Radford (2021b), sustentam rupturas epistemológicas entre esses tipos de pensamentos matemáticos.

---

[7] Considerada uma questão de coerência na tradução para o português brasileiro, a frase foi modificada sem alteração de sentido.

Para além desses estudos, se por um lado, Ramos de Almeida e Câmara dos Santos (2017) buscaram uma definição para pensamento algébrico, por outro, caminhamos em direção à perspectiva de pensamento algébrico proposta na TO. Isso porque essa posição teórica reconhece a existência de uma relação relevante entre os pensamentos aritmético e algébrico, mas ressalta as rupturas epistemológicas ao considerar impossível extrair toda álgebra escolar da aritmética. Nesse sentido, se faz necessário tensionar a compreensão de que aprender aritmética é pré-requisito para aprender álgebra e abrir caminhos, assim como outras investigações (Gomes, 2020; Vergel; Rojas, 2018; Vergel, 2016), para refletir por onde iniciarmos.

2.2 Álgebra escolar e as relações de igualdade

O movimento curricular proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) demanda que a unidade temática Álgebra seja trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (ver Quadro 1 na subseção 1.4). Até chegar a sistematizar a compreensão das equações polinomiais do primeiro grau nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente a partir do 7º ano, temos um trabalho inicial com o que a BNCC denomina como relação de igualdade. Mas, o que entendemos por relação de igualdade?

> Em termos matemáticos, a **relação de igualdade** é uma **relação de equivalência**. Isso quer dizer que é simétrica (se a = b então b = a, para quaisquer elementos a e b), é reflexiva (a = a, para todo o elemento a) e é transitiva (se a = b e c = b, então a = c para quaisquer elementos a, b e c) (Ponte; Branco; Matos, 2010, p. 19, grifo nosso).

Para além da definição Matemática, no ensino da álgebra escolar, algumas pesquisas apontam o papel do símbolo "=" no estudo das relações de igualdade (Ponte; Branco; Matos, 2010; Cavalcanti, 2008, Kieran, 1981). Dentre as concepções do símbolo de "=" apontadas na literatura, há duas perspectivas predominantes no Ensino de Matemática: a operacional e a relacional. Segundo Kieran (1981), na perspectiva operacional, o sinal de igual indica uma operação a ser realizada; enquanto na perspectiva relacional, o sinal de igual indica uma equivalência entre ambos os membros da igualdade. Nesse sentido, a primeira perspectiva está relacionada ao campo da aritmética e a segunda refere-se ao campo da álgebra. Consequentemente, indagamo-nos: será que o significado atribuído ao sinal de igualdade nas resoluções de problemas envolvendo equações é condição necessária e suficiente para afirmarmos se os sujeitos estão pensando algebricamente?

De imediato, a resposta para essa pergunta é não. Como problematizamos na introdução, na perspectiva de álgebra proposta na TO, o trabalho com relações de igualdade envolvendo o cálculo do termo desconhecido já se caracteriza como equações, independentemente da forma que o sinal de igualdade, as operações e o indeterminado são denotados. Logo, para analisarmos a emergência do pensamento algébrico no processo de resolução de equações, precisamos considerar os significados atribuídos: (i) ao indeterminado; (ii) à noção de igualdade; (iii) às operações matemáticas (Radford, 2022a, 2022b, 2021b).

Por sua vez, temos o princípio de equivalência, que justifica a realização das operações em ambos os lados da relação igualdade:

● **Princípio aditivo:** "A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade: $\forall$ $a, b, c \in Z$, $a = b \Leftrightarrow a + b = b + c$" (Hefez, 2016, p. 4). Em linguagem natural, podemos fazer a seguinte leitura: ao somar qualquer número inteiro a ambos os lados da igualdade, obtemos uma igualdade equivalente à igualdade inicial.

● **Princípio multiplicativo:** "A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade: $\forall$ $a, b, c \in Z \backslash \{0\}$, $a = b \Leftrightarrow a \times b = b \times c$" (Hefez, 2016, p. 7). Em linguagem natural, podemos fazer a seguinte leitura: ao multiplicar ambos os membros da igualdade por qualquer número inteiro diferente de zero, temos uma igualdade equivalente à igualdade inicial.

Certamente, não tivemos o objetivo de abordar diretamente todos esses elementos conceituais durante o processo formativo com as professoras dos anos iniciais. Entretanto, esperávamos que, mediante as atividades formativas, elas se encontrassem com esses saberes.

Pensando nas possibilidades de tipos de problemas a serem trabalhados nos anos iniciais, recorremos à tese de Araujo (2009) sobre o ensino de equações, que elucida quais casos podem levar ao campo da aritmética ou ao campo da álgebra.

> Vergnaud (1987) considera que os problemas cuja tradução algébrica realizada dão origem a equações dos tipos x + a = b, ax = b ou ax + b = c não são os mais adequados para convencer os alunos menos familiarizados com o domínio algébrico de que a álgebra se constitui uma ferramenta mais eficaz e econômica para resolvê-los, até porque, em primeiro lugar, a resolução dos problemas que conduzem a esses tipos de equações pode ser realizada eficazmente por procedimentos aritméticos. Em segundo lugar, o processo de resolução das equações apresentadas sob as formas x + a = b, ax = b ou ax + b = c faz apelo a métodos aritméticos mesmo quando são utilizadas escritas algébricas. Vergnaud afirma que é a partir de problemas que dão origem a equações do tipo ax + b = cx + d que a álgebra se torna uma ferramenta mais pertinente que a aritmética para resolvê-los. O processo de resolução desse tipo de equação se realiza com a ajuda de transformações que conservam um sentido de igualdade que não é próprio do pensamento aritmético (Araújo, 2009, p. 52).

Ressaltamos que, sem desconsiderar os tipos de equações x + a = b, ax = b e ax + b = c, damos ênfase ao trabalho com o tipo ax + b = cx + d, por meio de problemas de enunciado, a fim de caracterizar a emergência do pensamento algébrico.

Mediante o exposto, reconhecemos a relevância dessa tese e de outros estudos (Lira, 2022; Barbosa; Almouloud, 2022; Barbosa; Lima, 2019; Araújo, 2009; Cavalcanti 2008) no campo da álgebra escolar, particularmente aqueles desenvolvidos no âmbito do antigo grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática (Câmara dos Santos, 2017), que teve e tem uma forte influência no estado de Pernambuco e no Brasil. Contudo, ressaltamos que caminhamos em outra direção. Isso não implica afirmar que essas investigações não são necessárias para compreender os fenômenos educativos nas salas de aula de Matemática, mas sim que são insuficientes para o debate sobre a álgebra inicial que buscamos empreender nesta dissertação.

2.3 Pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação

Além dos conceitos bases (apresentados adiante no capítulo 3), a TO possui uma concepção própria de pensamento algébrico, que fundamenta as análises dos dados produzidos nesta investigação.

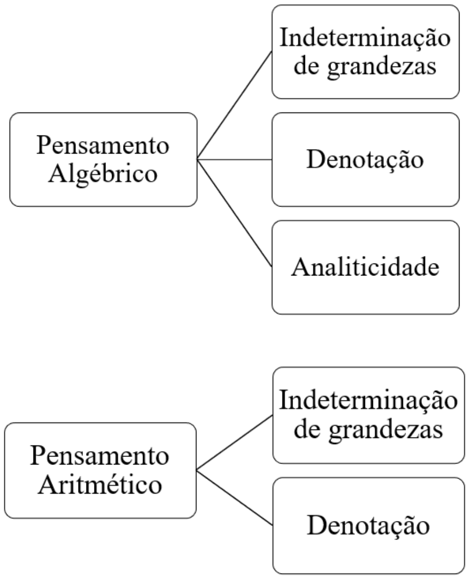
Segundo Radford (2011c), o *pensamento* possui uma natureza multimodal, isto é, abrange tanto os componentes materiais quanto os ideacionais. Como exemplos de componentes materiais, temos: gestos, fala, escrita, ritmos, signos, etc. Quanto aos aspectos ideacionais, temos a fala interior e a imaginação do sujeito. Desse modo, as conexões entre esses componentes exprimem a unidade do pensamento humano, assim como sua emergência e evolução.

Na TO, a caracterização do pensamento algébrico é constituída por três elementos – *indeterminação de grandezas*, *denotação* e *analiticidade* – que aparecem por meio de diferentes *sistemas semióticos*. Nas próximas seções, nos debruçamos sobre essas discussões.

2.3.1 Elementos caracterizadores do pensamento algébrico

Diferentemente da vertente que defende uma continuidade entre a aritmética e a álgebra, Radford (2014) sustenta que há ruptura entre essas duas áreas. Nesse cenário, levando em conta que os professores que ensinam Matemática podem confundir o ensino de álgebra com o ensino de aritmética, ou o inverso (Radford, 2008; 2014), elucidamos as diferenças e os aspectos específicos dos pensamentos algébrico e do aritmético na Figura 1:

Figura 1 – Vetores caracterizadores dos pensamentos aritmético e algébrico



Fonte: Elaboração própria.

Reiteramos que o nosso posicionamento teórico é a perspectiva de pensamento algébrico apresentada na Teoria da Objetivação, a qual reconhece a existência de uma relação relevante entre o pensamento aritmético e algébrico, mas ressalta as *rupturas epistemológicas* ao considerar impossível extrair toda álgebra escolar da aritmética. Nesse sentido, Radford (2021b, p. 173) preconiza que:

> Na perspectiva da teoria da objetivação, a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do objeto sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas. Mais precisamente, em nossa perspectiva, três condições caracterizariam o pensamento algébrico: a primeira tem a ver com os objetos do raciocínio; a segunda com a forma como os objetos são simbolizados (se trata, então, de um problema semiótico) e a terceira sobre como se raciocina sobre objetos do raciocínio.

De acordo com Radford (2021b), os três elementos que caracterizam o pensamento algébrico são: a *indeterminação de grandezas*, a *denotação* e a *analiticidade*. A *analiticidade* configura-se como o principal elemento caracterizador do pensamento algébrico, uma vez que os outros dois elementos também caracterizam o pensamento aritmético (Radford, 2021b).

O *raciocínio analítico* constitui-se por duas características fundamentais: (a) o estabelecimento de relações entre grandezas determinadas e indeterminadas, operando com as grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas; e (b) a realização de operações de forma dedutiva, deduzindo as proposições. De modo geral, pensar analiticamente demanda considerar o indeterminado como se fosse determinado e deduzir a partir das premissas.

Já a *indeterminação de grandezas* se refere ao trabalho com as grandezas não determinadas ou desconhecidas e são designadas por incógnitas, variáveis, parâmetros, entre outros signos. Contudo, com base em Gomes e Noronha (2020), pontuamos que a álgebra não se restringe ao uso de indeterminações na elaboração e resolução de problemas, pois, para caracterizar o pensamento algébrico, é necessário compreender o sentido do indeterminado, provido de significado e não meramente da utilização de técnicas e procedimentos mecânicos para a manipulação das letras e números. Em outras palavras, o trabalho com grandezas desconhecidas acontece como parte conhecida dos problemas e não necessariamente são denotadas por meio do simbolismo alfanumérico (Radford, 2021b).

Por fim, temos a *denotação* que tange às diversas formas de nomear e simbolizar as grandezas indeterminadas envolvidas no problema. Algumas das maneiras de denotar são: desenhos, gestos, fala, escrita, simbolismo alfanumérico, signos não corriqueiros, ou até mesmo a combinação deles.

Para entendermos melhor os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico, recorremos ao exemplo de uma equação polinomial do 1º grau "7n + 2 = 6n + 8" discutido por Radford (2021a). A fim de encontrar o valor do termo desconhecido "n" (o indeterminado), os estudantes podem trabalhar com o sinal de igualdade "=" em uma perspectiva relacional, isto é, com a noção de equivalência entre as operações dos membros esquerdo e direito da relação de igualdade. Nesse viés, para resolver o problema, seria necessário realizar a subtração de "2" e "6n" em ambos os lados da equação, para concluir que "n = 6". Tal exemplo requer um raciocínio lógico-dedutivo, isto é, assumir as premissas como verdade e operar com o desconhecido como se fosse conhecido para determinar o valor da incógnita.

Por outro lado, se o método utilizado fosse o de tentativa e erro, no qual os alunos poderiam substituir "n" por "1", "2", e assim sucessivamente, até chegar em "6", não se faria presente o vetor da *analiticidade*. Nesse caso, na perspectiva da TO, mesmo com a presença da *indeterminação de grandezas* e da *denotação*, os alunos estariam pensando aritmeticamente. Mas, a questão que nos interessa é: como convidar os estudantes e professores a pensar analiticamente em problemas de equações do tipo Ax + B = Cx + D?

O trabalho de Filloy e Rojano (1989) indica que, em problemas de equação do tipo Ax + B = C, os alunos geralmente utilizam métodos aritméticos. Isso porque, adotando a perspectiva operacional do sinal de igualdade "=", os alunos entendem o que está do lado direito como um resultado das operações no lado esquerdo; logo, eles subtraem B de C e dividem por A. Entretanto, em equações com incógnitas em ambos os lados, do tipo Ax + B = Cx + D esse método de resolução não é mais eficaz. Nesse caso, os alunos podem recorrer a um raciocínio verdadeiramente algébrico: operar dedutivamente com a grandeza desconhecida como se fosse conhecida. É nesse tipo de equação que procuramos aprofundar nossos estudos.

A resolução do exemplo supracitado pode acontecer por meios semióticos variados, como a fala ou a escrita, com a possibilidade de uso de diversos artefatos (lápis, papel, etc.). No contexto desta pesquisa, utilizaremos as simulações interativas como artefatos tecnológicos digitais para explorar tarefas, análogas a essa, quanto ao saber equações.

2.3.2 Caminhos anteriores: alguns resultados de pesquisas sobre o estudo introdutório das equações

Algumas investigações (Radford, 2022a; 2022b; 2021a; 2021b) têm se debruçado sobre a introdução de equações na álgebra escolar, particularmente sobre o papel dos problemas com enunciado. Como preconiza Radford (2021a), os problemas de enunciado revelam alguns aspectos da *natureza do mundo*, como ele é pensado matematicamente, além de apresentar uma estrutura para exemplificar como *a verdade* pode se constituir. Desse modo, o autor defende que os problemas de enunciado não possuem neutralidade cognitiva e muito menos cultural.

É importante ressaltar que a classe de problemas de enunciado abordada nos estudos do professor Luis Radford, assim como em outras investigações que tomam a Teoria da Objetivação como fundamento, é limitada, mas necessária para trabalhar introdutoriamente com o saber equações. Nesse cenário, é possível se deparar com as ideias basilares relacionadas às simplificações das equações polinomiais do 1º grau, para isolar a incógnita e encontrar a solução, que se fundamentam em duas regras: *al-jabr* e *al-muqabala* (Radford, 2021a).

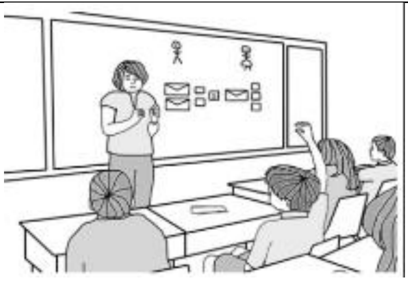
> Al-jabr significa restauração (era transpor os termos) quando um elemento precisa ser suprimido em um lado de uma expressão, para ser restaurado ao ser colocado do outro lado e al-muqabala se constitui em comparação (ou balanceamento), que é reduzir os termos semelhantes a um único termo (Silva; Morey, 2021).

Certamente, essas regras não devem ser introduzidas de modo obrigatório na sala de aula de Matemática por intermédio da denominação e dos seus significados históricos. Radford (2021a) menciona elas para reconhecermos a natureza histórico-cultural dos saberes algébricos.

Vejamos alguns exemplos práticos no Quadro 2 de como o pensamento algébrico pode emergir em sala de aula na perspectiva da TO.

Quadro 2 – Problema dos cartões e envelopes

Enunciado do problema	Ilustração do problema

Sylvain e Chantal têm cartões de hóquei. Chantal tem três cartões e Sylvain tem dois cartões. Sua mãe coloca alguns cartões em três envelopes e se certifica de colocar a mesma quantidade de cartões em cada envelope. Ela dá um envelope para Chantal e dois para Sylvain. Agora, as duas crianças têm a mesma quantidade de cartões de hóquei. Quantos cartões de hóquei estão dentro de cada envelope?	

Fonte: Radford (2017b).

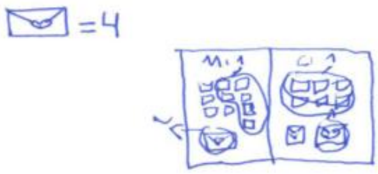
Como podemos observar, o problema disposto no Quadro 2 envolve grandezas desconhecidas (quantidade de cartões dentro dos envelopes) e grandezas conhecidas (quantidade de cartões). Ele pode ser resolvido com diferentes artefatos: materiais concretos, quadro, piloto, caderno, lápis, etc. Além disso, as informações do enunciado podem ser traduzidas para outras linguagens, como na ilustração do problema, ou até mesmo para a linguagem alfanumérica: $2x + 2 = x + 3$.

Nesse cenário, para solucionar o problema, é necessário subtrair dois de cada membro da relação de igualdade, o que equivale a retirar dois cartões em cada lado da situação-problema, obtendo a seguinte equação equivalente: $2x = x + 1$. Por conseguinte, é preciso subtrair "x" de cada membro da relação de igualdade, o que equivale a retirar um envelope em cada lado da situação-problema, concluindo que $x = 1$, isto é, há um cartão no envelope. Ao utilizar essa estratégia de resolução, podemos observar o aparecimento do pensamento algébrico na atividade, estritamente por meio de seus respectivos vetores: a indeterminação (quantidade desconhecida de cartões dentro dos envelopes); a denotação (que pode ser pelo material concreto do envelope ou pela simbologia "x" para representar a incógnita); e a analiticidade (operando em ambos os lados da relação de igualdade, ressignificando o sinal de "=" para uma perspectiva relacional e as operações com o indeterminado).

No entanto, é indispensável pontuar que, para a perspectiva de pensamento algébrico que estamos trabalhando, o pensamento não emerge individualmente, mas sim a partir do engajamento coletivo entre os sujeitos envolvidos. Para refletir sobre a dimensão coletiva da aprendizagem defendida na TO, discorremos um outro exemplo proposto nos estudos de Radford (2021a).

Do ponto de vista das relações humanas estabelecidas em sala de aula, Radford (2021a) tece considerações sobre dois grupos de alunos na elaboração e resolução de problemas acerca das equações. Nesse estudo, foi requerido, inicialmente, que os alunos elaborassem um problema envolvendo o saber algébrico em cena; e posteriormente, trocassem os problemas entre os grupos a fim de resolverem e comentarem em conjunto sobre essas produções.

Quadro 3 – Problemas de enunciados elaborados e resolvidos em grupos

Enunciados dos problemas	Ilustrações dos problemas
Problema proposto pela equipe A: Para o Natal, Calin recebeu três caixas de Webkinz e Samantha recebeu uma caixa. Ele [Calin] já tem 4 Webkinz. E Samantha já tem 28 Webkinz. Agora os dois têm a mesma quantidade [de Webkinz].	**Resolução proposta pela equipe B:** 
Problema proposto pela equipe B: Martine tem 10 adesivos em sua coleção. Ela recebe um envelope de adesivos pelo seu aniversário. A Cassidy tem 6 adesivos em sua coleção. E (recebe) 2 envelopes de adesivos para o Natal. Quantos adesivos há em cada envelope?	**Resolução proposta pela equipe A:** 

Fonte: Radford (2021a).

Grosso modo, os problemas elaborados e resolvidos em grupos, apresentados no Quadro 3, desencadearam reflexões sobre: as estruturas dos enunciados, as estratégias de resoluções, as argumentações subjacentes, as estruturas das respostas, entre outros aspectos. Nesse contexto, Radford (2021a) destaca a relevância da dimensão do ser (vir a ser). Com isso, o autor consegue ilustrar que os momentos de debates, questionamentos, contradições e tensões são essenciais nos processos de ensino-aprendizagem de Matemática não alienantes, mas que ao mesmo tempo deve ser pautado pelo respeito, compromisso, responsabilidade e solidariedade para com o outro.

Salientamos que, por mais que os processos de subjetivação não sejam objeto de estudo primário da nossa pesquisa, eles estão entrelaçados com os processos de objetivação. O que requer uma preocupação, tanto no planejamento quanto na vivência do processo formativo, para a produção de saberes algébricos e de formas de colaboração humana.

Quanto às produções brasileiras acerca do tema, temos alguns estudos a nível de mestrado e doutorado, elencados a seguir.

Em sua tese de doutorado, Gomes (2020) defende a constituição da proto-analiticidade no processo de introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo a autora, a proto-analiticidade caracteriza-se como uma fase que antecede o pensamento analítico, quando ocorre ou a ação com o indeterminado como se fosse determinado ou o método dedutivo a partir das premissas apresentadas. Para sustentar a proposição do pensamento proto-analítico, Gomes (2020) apresenta as estratégias propostas por crianças do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental para resolver tarefas envolvendo sentenças matemáticas com um dos termos desconhecidos. Assim, dialogamos com esse trabalho a fim de verificarmos a emergência ou não da proto-analiticidade durante o processo formativo.

Em sua dissertação de mestrado, Martins (2023) apresenta o trabalho envolvendo quatro problemas de enunciado com estudantes da Educação de Jovens e Adultos. Levando em consideração que alguns desses alunos têm como principal fonte de renda a coleta de resíduos recicláveis, a autora elaborou os problemas envolvendo os materiais sacolas e latas, como ilustrado no Quadro 4:

Quadro 4 – Problema das latas e sacolas

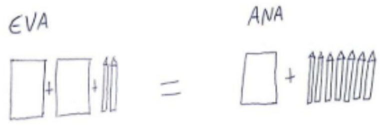
Enunciado do problema	**Ilustração do problema**
Problema 3: Agora Luiza tem 2 sacolas e uma lata. João tem 1 sacola e mais 6 latas. Sabendo que eles coletaram a mesma quantidade e o número de latas na sacola é sempre o mesmo, quantas latas há em cada sacola?	

Fonte: Martins (2023).

O problema apresentado no Quadro 2 pode ser traduzido para a linguagem alfanumérica como: $2x + 1 = x + 6$. Mas, no cenário da pesquisa de Martins (2023), os participantes eram não leitores e os problemas foram lidos pela pesquisadora. Com isso, o trabalho com problemas, em nível de complexidade crescente, se deu por meio do material concreto e propiciou o encontro coletivo com uma nova estratégia para encontrar o valor desconhecido, como argumenta a autora.

Em sua dissertação de mestrado, Silva (2024) apresenta o trabalho envolvendo quatro problemas de enunciado com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Levando em conta que os canetinhas e estojos são utilizadas nas práticas escolares pelas participantes da pesquisa, a autora elaborou os problemas envolvendo os materiais canetinhas e estojos, como exemplificado no Quadro 5:

Quadro 5 – Problema das canetinhas e estojos

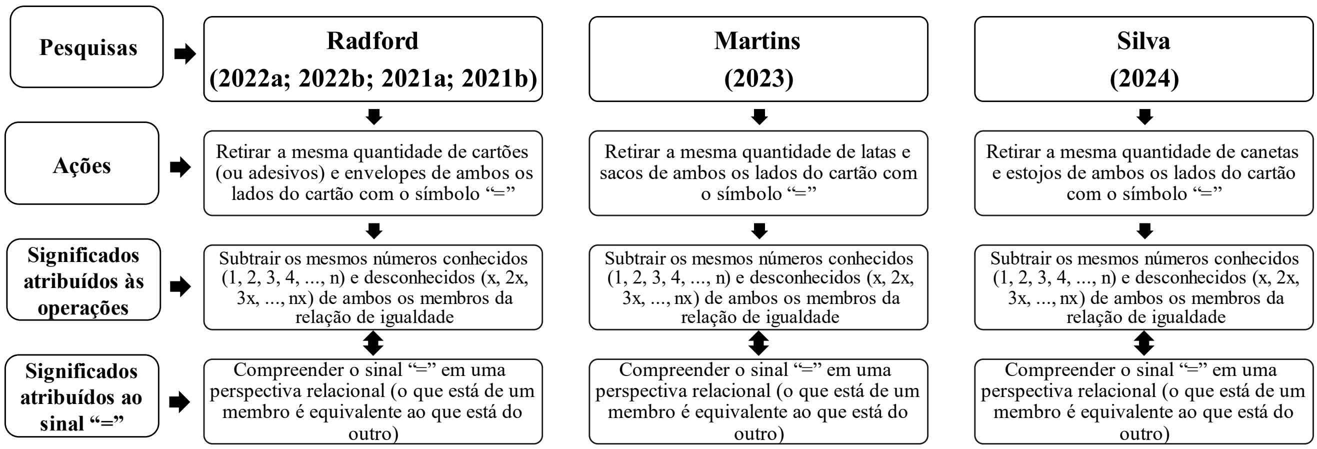
Enunciado do problema	Ilustração do problema
Problema 3: A professora presenteou Eva com 2 estojos com quantidades iguais de canetinhas dentro e 2 canetinhas soltas. Por sua vez, Ana recebeu apenas um estojo com a mesma quantidade de canetinhas das que foram oferecidas à Eva e mais 7 canetinhas soltas. Sabendo que Eva e a Ana ganharam a mesma quantidade de canetinhas, quantas canetinhas têm em cada estojo?	

Fonte: Silva (2024).

Assim como no estudo de Martins (2023), os problemas da investigação de Silva (2024) possuem um nível de complexidade crescente. Nesse último trabalho, a autora aponta que as professoras conseguiram traduzir os problemas para o simbolismo alfanumérico, mas que prefeririam trabalhar com os alunos por meio de materiais concretos e desenhos.

Em suma, sintetizamos, na Figura 2, alguns resultados das pesquisas de Radford (2022a; 2022b; 2021a; 2021b), Martins (2023) e Silva (2024), discutidas nesta subseção, sobre o estudo introdutório das equações a partir de problemas de enunciado.

Figura 2 – Pesquisas sobre o estudo introdutório das equações a partir de problemas de enunciado



Fonte: Elaboração própria.

Outro ponto relevante a ser ressaltado é que as estratégias de simplificação de equações estão intimamente relacionadas aos sistemas semióticos que emergem durante as resoluções. A seguir, adentramos nessa discussão.

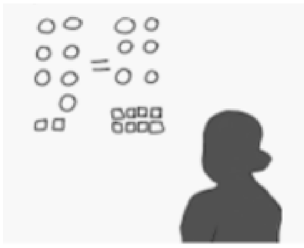
2.3.3 Sistemas semióticos no movimento de pensar algebricamente

Conforme Radford (2021b), no estudo introdutório das equações, há alguns sistemas semióticos para o surgimento do pensamento algébrico, são eles:

- Sistema Semiótico Concreto (SSC): constitui-se por objetos materiais;
- Sistema Semiótico Icônico (SSI): constitui-se pela substituição de objetos concretos pelos desenhos de imagens icônicas;
- Sistema Semiótico Alfanumérico (SSA): constitui-se pelos objetos simbólicos.

Para ilustrarmos esses sistemas no Quadro 6, recorremos novamente aos problemas dos cartões proposto por Radford (2021a, 2026b):

Quadro 6 – Os problemas dos cartões e os sistemas semióticos

Sistema Semiótico Concreto (SSC)	**Sistema Semiótico Icônico (SSI)**	**Sistema Semiótico Alfanumérico (SSA)**
		3x + 1 = x + 5 (referente à ilustração no SSC) 7n + 2 = 6n + 8 (referente à ilustração no SSC)

Fonte: Elaboração própria com base em Radford (2021b, 2017b).

Com efeito, os sistemas semióticos concreto, icônico e alfanumérico remetem, respectivamente, às linguagens algébricas – retórica, sincopada e simbólica – discorridas no início deste capítulo. Entretanto, como salienta Radford (2011a), não devemos considerar uma linearidade, muito menos uma relação hierárquica entre essas formas de denotar os entes algébricos, muito embora a linguagem alfanumérica seja mais sofisticada por sintetizar as ideias matemáticas. Assim sendo, reiteramos a importância de organizar o ensino dos saberes algébricos levando em conta esse movimento lógico e histórico, não necessariamente apontando seus nomes e características, mas transitando entre esses sistemas semióticos ao considerar as necessidades de aprendizagens estudantil e docente, até que cheguem em um nível mais elevado de sofisticação algébrica.

2.4 Principais características dos pensamentos aritmético e algébrico a partir de tarefas envolvendo equações

Como vimos ao longo deste capítulo, não é o simples fato de trabalharmos com as grandezas indeterminadas que caracteriza se estamos pensando algebricamente na perspectiva da Teoria da Objetivação. Trabalhamos com a indeterminação, bem como com sua denotação, tanto no campo da álgebra quanto no campo da aritmética. O que define se estamos pensando algebricamente ou não é o tipo de raciocínio que emerge durante a atividade coletiva, isto é, a analiticidade.

Ademais, no processo de introdução do estudo de equações nos anos iniciais do Ensino Fundamental, observamos nas investigações anteriores (Radford, 2022a, 2022b, 2021b; Araújo, 2009) que em determinados tipos de tarefas as estratégias aritméticas são mais pertinentes e em outros os procedimentos algébricos se fazem mais eficaz. Nesse contexto, quando olhamos para a emergência do principal vetor do pensamento algébrico, precisamos analisar se há uma reconceituação do sinal de igualdade (para uma perspectiva relacional) e das operações (com valores desconhecidos).

Sintetizamos tais compreensões no Quadro 7:

Quadro 7 – Principais características do pensamento aritmético e algébrico a partir de tarefas envolvendo equações

Alguns tipos de equações	**Possíveis compreensões do sinal "="**	**Operações e as grandezas envolvidas**	**Elementos dos pensamentos**	**Possíveis pensamentos matemáticos**
x + B = C	Operacional	Operações com grandezas determinadas e indeterminadas	**Indeterminação** (valor desconhecido, termo desconhecido, incógnita, grandeza indeterminada, grandeza desconhecida, etc.) **Denotação** (Geralmente representada como o valor faltante em uma sentença matemática. Mas, pode ser representada por letras. Ou, por materiais concretos. Exemplo: ? + 3 = 5) **Tipo de raciocínio: numérico**	Pensamento aritmético

			subtrair B de C **(operação inversa da adição)** ou atribuir valores para o termo faltante e comparar o resultado de cada lado igualdade **(tentativa e erro)**	
Ax = B	Operacional	Operações com grandezas determinadas e indeterminadas	**Indeterminação** (valor desconhecido, termo desconhecido, incógnita, grandeza indeterminada, grandeza desconhecida, etc.) **Denotação** (Geralmente representada como o valor faltante em uma sentença matemática. Exemplo: 2.$\square$ = 10) **Tipo de raciocínio: numérico** dividir B por A **(operação inversa da multiplicação)** ou atribuir valores para o termo faltante e comparar o resultado cada membro da igualdade **(tentativa e erro)**	Pensamento aritmético
Ax + B = C	Operacional ou Relacional	Operações com grandezas determinadas e indeterminadas	**Indeterminação** (valor desconhecido, incógnita, grandeza indeterminada, grandeza desconhecida, etc.) **Denotação** (Comumente representada pela simbologia “x”. Mas, pode ser representada por outras letras. Ou, por materiais concretos, como nos problemas apresentados nos estudos de Silva (2024) e Martins (2023): sacolas e estojos.) **Tipo de raciocínio: numérico** subtrair B de D e dividir por A **(operação inversa da adição e da multiplicação)** ou atribuir valores para “x” e comparar o resultado de cada lado igualdade **(tentativa e erro)** **ou proto-analítico**	Pensamento aritmético

			(Dedução a partir das premissas, mas não opera com o indeterminado como se fosse determinado)	
Ax + B = Cx + D	Operacional ou Relacional	Operações com grandezas determinadas e indeterminadas	**Indeterminação** (valor desconhecido, incógnita, grandeza indeterminada, grandeza desconhecida, etc.) **Denotação** (Comumente representada pela simbologia “x”. Mas, pode ser representada por outras letras. Ou, por materiais concretos, como nos problemas apresentados nos estudos de Radford (2022a; 2022b; 2021a; 2021b) Silva (2024) e Martins (2023): envelopes, sacolas e estojos.) **Tipo de raciocínio: numérico** atribuir valores para “x” e comparar o resultado de cada lado igualdade **(tentativa e erro)** **ou proto-analítico** subtrair B de D (operação inversa da adição) e subtrair C de A (trabalho com indeterminado como se fosse determinado**)** ou **analítico** (Dedução a partir das premissas e trabalho com o indeterminado como se fosse determinado)	Pensamento aritmético ou algébrico

Fonte: Elaboração própria.

No caso do tipo de equação Ax + B = C, fica claro que a compreensão do sinal de igualdade em uma perspectiva relacional não é suficiente para determinar que há pensamento algébrico. Mesmo o raciocínio não sendo necessariamente numérico, pode ser proto-analítico – sem operar com a incógnita, apenas com números, em ambos os lados. Ou seja, ainda é pensamento aritmético.

Já no tipo de equação Ax + B = Cx + D, elucidamos que os raciocínios no campo aritmético não são tão intuitivos e fáceis. O raciocínio analítico se apresenta de modo mais eficaz. Os alunos podem até compreender a estratégia de “passar o termo ou coeficiente com o sinal invertido”, mas muitos deles não entendem o porquê. Em suma, se o raciocínio for numérico ou proto-analítico, teremos o pensamento aritmético, caso seja raciocínio analítico, teremos o pensamento algébrico.

Por fim, ressaltamos que o Quadro 7 evidencia que não é meramente o tipo de tarefa que define se estamos pensando algebricamente ou não, mas a forma como a atividade é planejada e vivenciada em sala de aula – no nosso contexto, ao longo do processo formativo. Logo, faz-se necessário elucidar, no próximo capítulo, que pressupostos acerca da Educação (Matemática) tomamos como fundamento nesta pesquisa.

3. TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

O cerne das reflexões e discussões propostas nesta dissertação é alicerçado por uma teoria de ensino e aprendizagem inspirada na corrente filosófica do materialismo dialético e na perspectiva histórico-cultural de Vygotsky e seus colaboradores: a Teoria da Objetivação – TO. No capítulo anterior, introduzimos alguns elementos fundamentais dessa teoria mediante um debate particular sobre a vertente de álgebra e de pensamento algébrico que estamos assumindo em nossa investigação. Nesta seção, nos aprofundamos em outros aspectos mais amplos.

Além de amparar-se nas proposições de Hegel e Marx, a TO toma como base os estudos de Vygotsky e seus colaboradores, assim como a concepção de educação libertadora de Freire. Distanciando-se da pedagogia tradicional, centrada nos professores, e da pedagogia construtivista, centrada nos alunos, a TO propõe um elo entre os professores e os alunos por meio do *trabalho conjunto* nas *atividades de ensino-aprendizagem*.

Antes de aprofundarmo-nos nesses e em outros conceitos da Teoria da Objetivação, convém destacar, conforme Radford (2021a), que essa teoria compreende:

> (...) o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural que visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas histórica e culturalmente constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento (Radford, 2021a, p. 38).

Como podemos observar, a Teoria da Objetivação direciona suas preocupações para as questões culturais, históricas, políticas e sociais, acentuando um objetivo particular para a Educação Matemática: propor práticas coletivas de colaboração humana que potencializam não apenas a atualização do saber matemático como também a transformação contínua do ser.

Para um melhor entendimento da TO, consideramos indispensável esmiuçar, nas subseções seguintes, alguns de seus conceitos subjacentes, são eles: saber e conhecimento, aprendizagem, atividade de ensino-aprendizagem, processos de objetivação, processos de subjetivação e artefatos culturais.

3.1 Saber e conhecimento

Na TO, o *saber* é concebido como um arquétipo de pensamento, ação e reflexão produzido histórica e culturalmente mediante um trabalho coletivo sensível, material e corporificado (Radford, 2021a). Nesse sentido, segundo o teórico, o saber é uma entidade geral e dinâmica, uma vez que ele se situa em um determinado contexto, variando de acordo com a cultura da comunidade e se movimentando dentro de um período histórico.

Partindo do pressuposto que o saber está presente na história e na cultura, Radford (2021a) recorre ao conceito aristotélico de *potencialidad*e – que se refere à capacidade dos seres vivos de fazer algo – para argumentar que todo saber é potencial, haja vista que todos nós temos a capacidade de encontrá-lo. Por sua vez, o autor ampara-se no conceito de *atualidade* de Aristóteles, que está atrelado à concretização daquilo que antes era apenas potencialidade. Assim sendo, a atualização do saber, na TO, diz respeito ao saber potencial em movimento, ato ou ação.

Diante do conceito de saber, Radford (2021a) define o *conhecimento* como a *materialização* ou a *atualização* do saber. Com isso, o autor ressalta que o conhecimento aparece por meio da atividade humana, na qual podemos percebê-lo, senti-lo e apreendê-lo pela consciência. Dito de outra forma, a relação entre saber e conhecimento se dá na atividade, ou ainda, o conhecimento é o resultado do encontro com o saber mediado por uma atividade (Radford, 2021a).

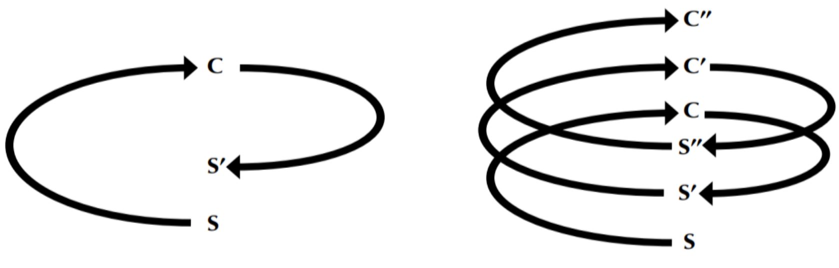
Entretanto, como afirma Radford (2021a), é importante destacar que não se trata de uma conexão entre duas entidades já estabelecidas por meio de uma atividade já consolidada, porque:

> A atividade é uma entidade em relação dialética com o saber e o conhecimento. Realmente, a atividade é algo que se desdobra no tempo e no espaço, que move o saber e, enquanto o move, o materializa e o converte em conhecimento. Ao mesmo tempo, no desdobramento da atividade, a mesma materialização afeta a atividade. Existe uma estreita relação dialética entre a atividade e o que está surgindo (Radford, 2021a, p. 78).

Para a compreensão dessa relação dialética entre saber e conhecimento, tomemos como exemplo o saber *equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita*. Nesse contexto, ao encontrarmos esse saber em problemas matemáticos, podemos chegar a conhecer as formas de resolvê-los (a exemplo: por tentativa e erro ou trabalhando com a incógnita como se ela fosse conhecida), por meio de uma atividade mediadora.

Na Figura 3, ilustramos como acontece a relação dialética entre saber e conhecimento:

Figura 3 – Relação dialética entre saber e conhecimento



Fonte: Radford (2017).

Como vimos, o saber (S) é um sistema dinâmico, isto é, suas partes e interconexões estão sempre em movimento, em transformação contínua. Esse saber materializado pela atividade humana (simbolizada pelas setas na Figura 3), o conhecimento (C), passa a ser um novo saber potencializado (S') que, consequentemente, se atualiza e se materializa em um novo conhecimento (C'). Esse processo contínuo e inacabado, representado pelo espiral na Figura 3, é a relação dialética entre a atividade e o que está surgindo nela.

Pelo exposto até aqui, segundo Radford (2021a), o conhecimento é sempre uma forma *singular* da materialização do saber. Desse modo, a atualização do saber não é realizada em sua totalidade, há sempre a possibilidade de emergir novos problemas, reflexões e investigações, ou seja, o conhecimento é um *excesso*, haja vista que ele não apenas confirma e afirma o saber potencial, mas também o nega, na tentativa de ir além daquilo que já foi posto. Por exemplo, na materialização do saber proposto nos problemas desta pesquisa, temos, como termos e coeficientes das equações, inteiros positivos. No entanto, como ilustração do *excesso* desse saber, não centramos as reflexões sobre equações envolvendo termos ou coeficientes com frações ou inteiros negativos.

3.2 Aprendizagem

Partindo do questionamento referente à distinção entre o conceito de aprendizagem proposto na TO e os que se propõem nas pedagogias tradicional e construtivista, Radford (2021a) pondera dois elementos que evidenciam essa diferenciação.

Em conformidade com o autor, o conceito de saber é o primeiro elemento. Mediante o que foi salientado na seção anterior, o saber não é algo que possa ser passado para outro indivíduo, como se fosse um produto mercadológico, como é sugerido na perspectiva do ensino transmissivo. Por outro lado, não é algo produzido subjetivamente, conforme o viés da pedagogia focada na criança. Portanto, na TO, o saber configura-se como "uma entidade histórico-cultural sempre em movimento" (Radford, 2021a, p. 116).

O uso do conceito de consciência é o segundo elemento. As correntes pedagógicas tradicionais, construtivistas e outras não necessitam do conceito de consciência para conceituar a aprendizagem. Na TO, a aprendizagem é a criação da consciência e, ao mesmo tempo, a conscientização. Desse modo, como afirma o autor, haveria um declínio nesta teoria caso fosse removido o conceito de consciência. Assim, temos a seguinte definição de aprendizagem na Teoria da Objetivação:

> A aprendizagem é um encontro contínuo e tenso de transformação dialética mútua entre um mundo cultural, ou seja, um mundo cultural que transcende o indivíduo como um indivíduo único, e indivíduos únicos que o encontram. No curso dessa fusão, **o mundo que aparece à consciência** e a **consciência que surge** deste encontro são continuamente transformados. É por esta razão que os processos de objetivação estão enredados em processos de subjetivação – processos de criação de um eu particular (e único) (Radford, 2021a, p. 114, grifo nosso).

Como disposto acima, é perceptível que tanto os processos de objetivação quanto os processos de subjetivação são indispensáveis para a definição de aprendizagem, compreendida como o resultado parcial desses processos (ver Figura 4):

Figura 4 – Aprendizagem segundo a TO

Fonte: Camilotti (2020; adaptada de Radford, 2017, 2020).

Ademais, o processo de aprendizagem vincula-se à atividade de ensino-aprendizagem. Na TO, estar engajado *criativa* e *ativamente* é condição necessária, mas não suficiente para o desenvolvimento de uma atividade. A atividade de ensino-aprendizagem deve propiciar um ambiente potencial para que os sujeitos possam se posicionar *criticamente* acerca do saber cultural. Logo, os três advérbios que caracterizam a aprendizagem: *criativamente*, *ativamente* e *criticamente* (Radford, 2021a).

3.3 Atividade de ensino-aprendizagem

Tendo em vista que, antes de ser vivenciada em sala de aula, a atividade precisa ser planejada previamente pelos professores, Radford (2021a) salienta seu componente didático, estruturado por: objeto, objetivo e tarefa. Essa estrutura foi preconizada por Leont'ev (1978), em um contexto mais amplo, permitindo-nos analisar "as várias camadas da intenção pedagógica da atividade de ensino-aprendizagem" (Radford, 2021a, p. 123).

Segundo o autor da TO, toda atividade de ensino-aprendizagem possui um objeto, que é determinado pelo professor, mediante seu projeto didático, e os alunos podem encontrá-lo enquanto formas histórico-culturais de, por exemplo, pensamento algébrico sobre relações de igualdade. Nesse sentido, a fim de que a atividade se direcione para o seu objeto, um ou mais objetivos precisam ser determinados.

Retomando o nosso exemplo no campo algébrico, esses objetivos podem ser sobre elaborar e/ou resolver problemas envolvendo relações de igualdade matemática. Visando alcançar os objetivos da atividade, é importante conceber uma tarefa específica. Nesse caso, a tarefa pode versar sobre a elaboração e resolução de problemas, compostos por uma complexidade crescente de conceitos, envolvendo a equivalência entre operações matemáticas com números específicos ou o cálculo do termo desconhecido em situações de igualdade ou equivalência.

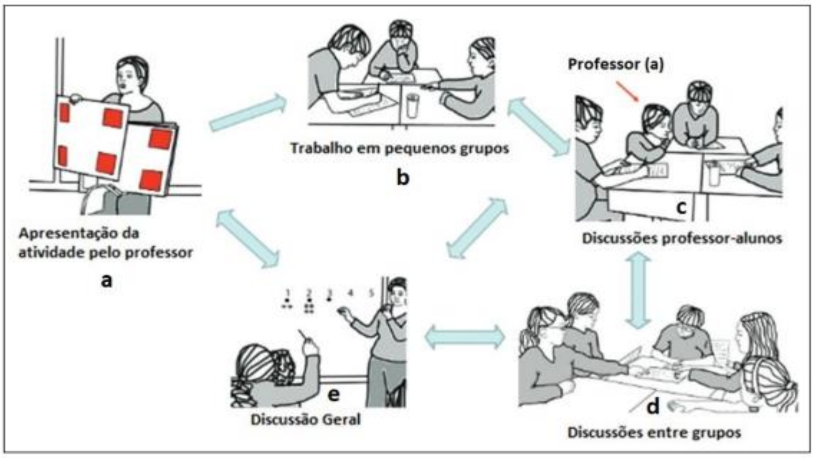
Com isso, Radford (2021a) defende que a atividade, compreendida como atividade de ensino-aprendizagem, é um "processo que materializa o saber em algo inteligível" (p. 125). Na TO, a atividade de ensino-aprendizagem é chamada de *labor conjunto*.

O *labor conjunto* abrange uma perspectiva diferente da atividade em sala de aula, bem como dos papéis dos professores e alunos. A atividade de ensino-aprendizagem na TO é dotada de significados dados ao saber histórico-cultural de modo criativo, ativo e crítico. Além disso, os professores e alunos trabalham colaborativamente, lado a lado, mas não realizam as mesmas ações. É por isso que nos referimos com o substantivo composto "ensino-aprendizagem", pois, no labor conjunto, essas duas atividades não vistas dissociadas, a atividade do professor ou a atividade do aluno, mas como uma mesma atividade, isto é, o trabalho ombro a ombro de professores-alunos (Radford, 2021a). Assim sendo, a definição de labor conjunto é:

> Para satisfazer as suas necessidades (necessidades de sobrevivência assim como as necessidades artísticas, espirituais, e outras necessidades criadas por/na sociedade), os seres humanos engajam-se ativamente no mundo. Eles produzem. E o que produzem para satisfazer as suas necessidades ocorre num processo social que é, ao mesmo tempo, o processo de inscrição dos indivíduos no mundo social e a produção da sua própria existência. O nome deste processo é o que denominei de **labor conjunto**. O **labor conjunto** sensorial e material é considerado o campo último da experiência estética, da subjetividade e da cognição. (RADFORD, 2021a, p. 52, grifo nosso).

Na Teoria da Objetivação, uma vez que a atividade é um sistema dinâmico e complexo, geralmente os momentos dela são identificados. Comumente, o autor sugere a seguinte organização da turma (Figura 5), separada em pequenos grupos, para os momentos da atividade em classe:

Figura 5 – Atividade de ensino-aprendizagem e seus possíveis momentos



Fonte: Radford (2021a, p.126).

Convém ressaltar, novamente, que a atividade medeia o saber (S) e o conhecimento (S), e a recíproca (S e C medeiam a atividade) é verdadeira. Nesse sentido, Radford (2021a, p 126) aponta que: "A natureza dialética da atividade pode ser melhor compreendida se tivermos em mente a ideia de que uma atividade é um processo situado no espaço e no tempo que, embora afetado pelo projeto didático, não pode ser determinado antecipadamente".

Em síntese, os aspectos temporal e contextual são fatores essenciais para o desempenho da atividade. Como os professores e alunos se engajam na atividade e como se relacionam uns com os outros nas instituições influenciam a maneira que a atividade acontece. Consequentemente, professores e pesquisadores podem estipular, porém nunca conseguirão prever o processo, uma vez que ele não deve ser nem mecânico e nem determinístico (Radford, 2021a).

Como vimos até aqui, o conceito foi originalmente concebido a partir do ambiente da sala de aula da Educação Básica, com o olhar para as relações entre professores e alunos. Alguns estudos, como Romeiro (2023) e Ramos de Almeida e Martins (2022), têm adaptado ele para o contexto da formação de professores, procurando investigar as relações entre professores e formadores. Nesta dissertação, fazemos o mesmo movimento, referindo-nos como *atividade formativa* a fim de salientar nossa preocupação de que as professoras se encontrem não apenas com o objeto-objetivo-tarefa, isto é, a estrutura de uma atividade matemática, mas que se constituam no processo formativo enquanto profissionais críticas, reflexivas e éticas.

3.4 Processos de objetivação

Segundo Radford (2021a), os processos de objetivação dizem respeito à materialização do saber ou a transformação dele em algo passível de tornar-se um objeto de consciência, por parte dos alunos e professores, intencionado pelo projeto didático. Para tornar evidente os processos de objetivação pelos quais os saberes histórico-culturais são progressivamente encontrados, professores e alunos utilizam diversos signos, artefatos, entre outros dispositivos linguísticos. Nesse contexto, o autor define os *meios semióticos de objetivação* como sendo:

> Os objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos e signos que os indivíduos usam intencionalmente nos processos de criação de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar claras suas intenções e para realizar suas ações a fim de atingir o objeto de suas atividades, são chamados de meios semióticos de objetivação. Estes, são semióticos na medida em que são peças-chave na produção de significados embutidos nos processos de objetivação (Radford, 2021a, p. 136).

Além dos meios para denotar os saberes materializados, consideramos que, nos momentos da atividade em sala de aula, a expectativa é que o esforço e compreensão matemática dos alunos se direcione ao objeto da atividade, de modo atento e consciente. Contudo, como salienta o teórico, não há uma linearidade no movimento de consciência. A consciência dos alunos pode ir em direções distintas, permitindo perceber o objeto de saber da atividade ou não. Logo, os processos de objetivação podem estar ocorrendo ou não em algum momento da atividade.

Na TO, o núcleo do processo de objetivação denomina-se como *nó semiótico*, é a parte da atividade cujos meios semióticos de diferentes naturezas começam a exercer um papel fundamental, ou seja, quando os professores e alunos apresentam suas interpretações e maneiras de ação frente aos modos de pensar e fazer matematicamente, constituídos na história e cultura. Ou ainda: “um nó semiótico é uma parte do labor conjunto, onde os signos corporificados e outros signos de vários sistemas semióticos são colocados para trabalharem juntos nos processos de objetivação” (Radford, 2021a, p. 138).

Por fim, temos a *contração semiótica*, que se refere ao processo de tomada de consciência do problema em cena, em um nível mais profundo, comprovando a ocorrência da aprendizagem. Nesse processo, os alunos revelam, a partir da contração da atividade anterior, um refinamento na ligação entre os meios semióticos.

3.5 Processos de subjetivação

Na TO, o espaço de atuação, que funde o eu e a atuação, é compreendido por meio dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC). Os SSSC são dinâmicos e originados na atividade prática e sensorial dos seres humanos. Esses sistemas inter-relacionam as concepções sobre: (i) *a natureza do mundo* (a exemplo, como os objetos matemáticos existem); (ii) *verdade* (como ocorre o estabelecimento de verdade); e (iii) *a natureza dos indivíduos* (como os indivíduos atuam em um determinado contexto temporal).

> Os SSSC são cheios de tensões, assim como as atividades de onde eles emanam. Eles têm uma função normativa (implícita, explícita ou ambas) e necessariamente transmitem visões políticas e éticas; por exemplo, como nos mostramos aos outros e como se espera que nos comportemos socialmente e sejamos reconhecidos pelos outros (Radford, 2021a, p. 239).

Conforme o autor, é somente por intermédio das suas materializações no mundo concreto que o Ser pode ser manifestado, sendo prestigiado como o que é. A constante materialização do Ser está embutida no Ser, mas não é ele propriamente dito. Dessa forma, na TO, o vir a ser é a denominação para a materialização do Ser. A concretude do sujeito cultural único é uma subjetividade. Por se afetar reflexivamente pelas materializações do Ser, a subjetividade é singular e está enredada em um processo contínuo de vir a ser: "um projeto de vida inacabado e sem fim" (Radford, 2021a, p. 245). Os processos de subjetivação são definidos como:

> Esses processos nos quais o Ser se mostra sempre em movimento e sempre diferente é o que chamamos de processos de subjetivação. Eles são definidos como aqueles processos pelos quais professores e alunos se **posicionam**, ao mesmo tempo em que são **posicionados** por outros contra o sempre contestado pano de fundo da cultura e da história (Radford, 2021a, p. 245, grifo nosso).

Sublinhamos que esse posicionamento no processo de ensino-aprendizagem requer uma dimensão ética. A ética, denominada na TO por ética comunitária, possui três elementos: i) responsabilidade, ii) compromisso, e iii) o cuidado com os outros. De acordo com Radford (2021a), esses três elementos são importantes por orientarem e aparecem como estrutura essencial da subjetividade.

3.6 Artefatos culturais

Como aponta a pesquisa de Silva (2024), é muito comum, nas práticas escolares, os professores dos anos iniciais sentirem a necessidade de trabalhar com os recursos didáticos (materiais manipulativos, jogos, etc.) em atividades matemáticas para contribuir com a aprendizagem dos alunos (Grando, 2015). Com o advento da pandemia da Covid-19 e do ensino remoto, uma outra necessidade se instaurou para uns e se acentuou para outros: o trabalho com os recursos didáticos digitais (Almeida; Espíndola, 2023). Culturalmente, esses recursos fazem parte da prática profissional de alguns professores. Mas, como eles podem ser compreendidos na perspectiva da TO?

Contrastando com as abordagens cognitivistas mentais, Radford (2011c) afirma que o *pensamento* não está presente somente "na cabeça", pois ele se materializa no corpo (a exemplo, por meio da percepção, da visualização ou dos gestos), constituindo-se como uma *prática social tangível*, mediante o uso de signos (como palavras faladas e escritas, símbolos matemáticos etc.) e *artefatos culturais* variados (jogos matemáticos, materiais manipulativos, calculadora, softwares educacionais, entre outros). Assim, o pensamento é definido como uma unidade dinâmica, em constante mudança ao longo de um processo histórico e cultural, abrangendo tanto os componentes ideacionais (interno) quanto os materiais (externo).

Assumindo a vertente de pensamento defendida na TO, conseguimos ter acesso às formas como os sujeitos estão pensando algebricamente por meio dos aspectos materiais, ou seja, da sua *materialização*. A fim de argumentarmos sobre o que entendemos por *materialização do pensamento*, recorremos à concepção de *cognição sensorial*, proposta por Radford (2021a), na qual mente, corpo e mundo são compreendidos como entidades inter-relacionadas. Inspirado na perspectiva Vygostkyana e na filosofia materialista histórico-dialética de Marx, Radford (2021, p. 147a) afirma que: "A cognição sensorial enfatiza a ideia de que nosso pensamento, sentimentos, ações e todas as nossas relações com o mundo (ouvir, perceber, cheirar, sentir, etc.), são entrelaçamentos históricos de nosso corpo e a cultura material e ideacional".

Desse modo, ao considerar que o pensamento algébrico é um saber – uma entidade geral constituída histórica e culturalmente, a TO pondera que os sujeitos podem encontrá-lo por meio de uma atividade humana, materializando-o singularmente. Segundo Radford (2021a), é a partir da capacidade de compreender, pensar, agir e refletir sobre os problemas em cena que o conhecimento singular emerge como a materialização do saber. No contexto da nossa pesquisa ampla, visamos oportunizar aos professores dos anos iniciais se encontrarem com o saber algébrico relações de igualdade em atividades formativas e com a necessidade de usar simulações interativas, assumidas como *artefatos tecnológicos digitais*, para a materialização do pensamento algébrico.

Diante disso, recorremos a outro aspecto fundamental na teoria em questão: o papel dos *artefatos culturais*. Conforme Vargas-Plaça, Gobara e Radford (2022) e Radford (2014; 2020), a importância dos *artefatos* reside no fato de que eles são dotados de inteligência histórica, haja vista que foram concebidos por seres humanos a fim de suprir suas necessidades culturais, e podem auxiliar na resolução de situações-problema pelos sujeitos em uma atividade.

4. FORMAÇÃO DE PROFESSORES NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Este capítulo trata-se de uma versão ampliada e atualizada de um levantamento bibliográfico, realizado por Almeida, Silva e Ramos de Almeida (2024). Diante da efervescência das pesquisas no campo da formação de professores fundamentadas na TO, fizemos o esforço de capturar as contribuições das investigações a níveis de mestrado e doutorado, a fim de delinear uma proposta de formação continuada (contexto da nossa pesquisa) e dialogar com os resultados desta dissertação.

As discussões e reflexões propostas aqui estão respaldadas na compreensão, defendidas por Moretti e Moura (2010) e Moretti (2011), de que a formação de professores pautada em perspectiva histórico-cultural pressupõe o entendimento consistente do que caracteriza o *trabalho docente*. De modo geral, os autores sustentam que "o conceito de trabalho traduz-se como sendo a atividade humana intencional adequada a um fim e orientada por objetivos, por meio da qual o homem transforma a natureza e produz a si mesmo" (Moretti; Moura, 2010, p. 347). Nesse viés, o trabalho docente está atrelado à constituição do ser professor(a) que, na Teoria da Objetivação (TO), assume atribuições específicas.

Como a TO é uma teoria de ensino-aprendizagem com raízes epistemológicas histórico-cultural e materialista-dialética, há uma preocupação, em seu bojo, para além da formação de conceitos (saberes), reforçando também seu interesse pela formação de sujeitos participativos, criativos, questionadores, críticos, reflexivos, solidários, inclusivos e éticos (Radford, 2021a). Especificamente, os professores assumem o papel de instigar, questionar, problematizar, colaborar, trabalhar lado a lado com os alunos, contribuir com produção da obra comum, entre outros aspectos. Nesse sentido, a TO compreende

> (...) professores e alunos como seres em fluxo, como projetos de vida inacabados e em contínua evolução, em busca de si mesmos, coproduzindo a si mesmos, todos os dias, enquanto se engajam eticamente em um mesmo esforço onde sofrem, lutam, e encontram prazer e realização juntos (Radford, 2021, p. 14).

Amparados nos fundamentos da TO, salientamos que o trabalho docente está relacionado ao *planejamento de atividades de ensino-aprendizagem*, com um determinado objetivo, uma tarefa (situação problema, exercício etc.) e um objeto (saberes disponíveis histórica e culturalmente), bem como à *vivência dessas atividades* em sala de aula (presencial ou não) com os alunos, visando se encontrar e produzir, conjuntamente, novos saberes e novas subjetividades.

Ademais, considerando a corrente histórico-cultural da TO, pontuamos que o trabalho docente está atrelado ainda ao movimento contínuo de *avaliação das vivências das atividades de ensino-aprendizagem*, particularmente das suas variáveis contextuais, a fim refletir sobre os entraves, os as limitações, os avanços e as possibilidades, para assim apresentar outras propostas de atividades que convidem os indivíduos a produzirem novas dimensões objetivas e subjetivas.

Por sua vez, compreendendo a natureza materialista-dialética da TO, o trabalho docente refere-se aos movimentos dialéticos em torno de uma atividade que, por conseguinte, requer o desenvolvimento de uma nova atividade e assim sucessivamente, em um processo permanente e inacabável.

Em suma, a TO reforça a relevância do entrelaçamento entre a dimensão do saber (conhecer) e a dimensão do ser (vir a ser) nos processos de ensino-aprendizagem, tendo por finalidade contribuir para uma educação libertadora e não alienante, conforme os pressupostos do patrono da Educação brasileira (Freire, 2024, 2020a, 2020b, 2019).

Os aspectos supracitados, assim como outros elementos, acerca dos subsídios teóricos e metodológicos da TO para a formação de professores podem ser aprofundados em estudos como Romeiro, Moretti e Radford (2024), Almeida *et al.* (2024) Ramos de Almeida e Martins (2022) e Vargas-Plaça e Radford (2021).

4.1 Pesquisas na formação de professores fundamentadas pela TO: um levantamento bibliográfico

A fim de subsidiar o delineamento de uma proposta de formação continuada (contexto da nossa pesquisa), fizemos um levantamento bibliográfico, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[8], quanto às investigações no campo da formação de professores alicerçadas pela TO. Utilizando os termos "Teoria da Objetivação" e "'Teoria da Objetivação' and 'Formação de Professores'" para filtrar nossa busca, identificamos que 13 trabalhos que atendiam o escopo do levantamento. A partir da leitura dos títulos, palavras-chave e/ou resumos dos trabalhos, observamos que seis inserem-se na área da Educação Matemática, três inserem-se na área do Ensino das Ciências e dois estabelecem uma interlocução entre essas áreas.

Considerando nossa área de atuação, selecionamos e analisamos as 10 pesquisas na área da Educação Matemática: sete teses e três dissertações, publicadas nos últimos cinco anos

[8]https://bdtd.ibict.br/vufind/

(2020-2024). Esse intervalo temporal evidencia a pertinência e a atualidade da temática. No Quadro 8, apresentamos os aspectos gerais dessas pesquisas:

Quadro 8 – Informações gerais das pesquisas sobre formação de professores

Modalidade da produção	Título	Autoria	Orientador(a) e Coorientador(a)	Programas e instituição	Ano
Tese (T1)	Formação permanente de professores de ciências e matemática no contexto sul-amazônico: um novo olhar para as práticas pedagógicas	Keycinara Batista de Lima	Profa. Dra. Shirley Takeco Gobara	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PPGEC) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)	2024
Tese (T2)	Formação inicial de professores(as) indígenas em diálogos integradores de aprendizagem na objetivação cultural	Cristiane do Socorro dos Santos Nery	Prof. Dr. Iran Abreu Mendes	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA)	2023
Tese (T3)	Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais	Iraji de Oliveira Romeiro	Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti e Prof. Dr. Luis Radford	Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)	2023
Tese (T4)	Contribuições dos saberes de astronomia para a formação do professor de matemática: um estudo na perspectiva da teoria da objetivação	Gerson Eugenio Costa	Profa. Dra. Bernadete B. Morey e Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)	2023
Tese (T5)	Ensino e aprendizagem de geometria na perspectiva da teoria da objetivação	Pedro Justino Júnior	Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey. e Prof. Dr. Luís Radford.		2022
Tese (T6)	A teoria da objetivação e o processo de tomada de consciência sobre o pensamento algébrico: uma experiência de	Ângelo Gustavo Mendes Costa	Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha		2022

	ensino remoto com futuros professores de matemática				
Tese (T7)	A matemática recreativa e suas potencialidades didático-pedagógicas à luz da teoria da objetivação	Maria da Conceição Alves Bezerra	Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey		2021
Dissertação (D1)	Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática	Andressa Gomes dos Santos	Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)	2022
Dissertação (D2)	Formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental no contexto remoto: um olhar para processos de objetivação em tarefas de generalização de padrões	Zaine Hete Ribeiro de Oliveira	Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida e Profa. Dra. Juliana Martins	Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) da UFRPE	2022
Dissertação (D3)	Resolução, análise e elaboração de tarefas investigativas de geometria dinâmica: estudo de saberes na formação de professores	Rafael Enrique Gutiérrez Araujo	Prof. Dr. Vinícius Pazuch	Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM) da Universidade Federal do ABC (UFABC)	2020

Fonte: Elaboração própria a partir de Almeida, Silva e Ramos de Almeida (2024).

Por sua vez, focando na questão de pesquisa e no objetivo geral das teses e dissertações, procuramos analisar os pontos de partida dos estudos elencados no Quadro 9, ou seja, os resultados que os pesquisadores pretendiam alcançar. Por conseguinte, discorremos alguns achados investigativos que sustentam a proposição dessas pesquisas.

Quadro 9 – Problema e objetivo geral das pesquisas

	Problema	**Objetivo geral**

T1	Como a Teoria da Objetivação pode contribuir para dar novos significados às práticas pedagógicas de professores de Ciências Naturais e Matemática no contexto das escolas do campo, ribeirinhas e urbanas?	Analisar as contribuições da Teoria da Objetivação para as práticas pedagógicas dos professores do ensino fundamental no ensino e aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática no contexto das escolas do campo, ribeirinhas e urbanas.
T2	Quais as potencialidades da coprodução de atividades para o ensino de matemática na formação inicial de professores(as) indígenas, a partir da valorização das práticas socioculturais de suas etnias?	Analisar o engajamento dos(as) professores(as) indígenas em formação e da professora formadora, no processo de coprodução de atividades para o ensino de matemática, considerando as práticas socioculturais das etnias indígenas do Amapá e norte do Pará.
T3	Que formas de generalização são manifestadas por professores em processo formativo em serviço ao resolverem situações envolvendo o conhecimento algébrico nos anos iniciais?	Identificar as formas de manifestação da generalização por professores em atividade conjunta ao resolverem situações envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais.
T4	Quais as contribuições de uma proposta formativa desenvolvida a partir da inserção de saberes da Astronomia para a formação do professor de Matemática da Educação Básica, considerando a Teoria da Objetivação? Quais as características necessárias para um curso introdutório de Astronomia, direcionado aos professores de Matemática, baseados em uma abordagem sociocultural, para que a proposta formativa contribua para a aprendizagem de saberes de Astronomia e de Matemática proporcionando uma experiência educacional coletiva, enriquecedora e inclusiva?	Investigar, a partir da Teoria da Objetivação, as características de um curso introdutório de Astronomia para o professor de Matemática, que contribua para a aprendizagem de saberes de Astronomia e de Matemática e proporcione uma experiência educacional coletiva, enriquecedora e inclusiva.
T5	Como a Teoria da Objetivação pode subsidiar a elaboração de uma proposta de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana no curso de formação de professores na Uni Púnguè?	Apontar os parâmetros essenciais para desenhar uma proposta de ensino e aprendizagem de Geometria, fundamentada na Teoria da Objetivação (TO), no curso de formação inicial de professores de Matemática, na Universidade Púnguè, em Moçambique.
T6	Como uma abordagem a partir do referencial teórico da Teoria da Objetivação, possibilita uma gradual e progressiva tomada de consciência na concepção de pensamento algébrico de futuros professores de matemática (FPM)?	Analisar como se dá o processo de tomada de consciência sobre o pensamento algébrico de licenciandos do curso de Matemática, a partir de uma abordagem da relação álgebra-aritmética na perspectiva da Teoria da Objetivação.
T7	Quais características da Matemática Recreativa podem ser evidenciadas por meio dos princípios da Teoria da Objetivação, potencializando seu uso em sala de aula?	Investigar contribuições teórico-metodológicas da Teoria da Objetivação para a proposição de tarefas de Matemática Recreativa em sala de aula.
D1	De que forma os saberes matemáticos envolvendo média geométrica emergem a partir do manuseio da escala dos números com licenciandos em Matemática?	Conhecer os processos matemáticos envolvendo a média geométrica, que permearam a formação de licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números.

D2	Como os docentes, em labor conjunto, vivenciam processos de objetivação em torno da álgebra para o ensino nos anos iniciais, no contexto remoto de uma formação continuada ancorada na Teoria da objetivação?	Identificar indícios dos processos de objetivação para o ensino da álgebra nos anos iniciais, vivenciados por docentes no contexto remoto de uma formação continuada ancorada na Teoria da Objetivação.
D3	Como um grupo de professores que ensinam matemática, em um contexto de formação continuada, mobilizam saberes vinculados à resolução, à análise e à elaboração de TIGD para o ensino de geometria na Educação Básica?	Analisar a forma em que um grupo de professores que ensinam matemática, em um contexto de formação continuada, mobilizam saberes vinculados à resolução, à análise e à elaboração de TIGD para o ensino de geometria na Educação Básica.

Fonte: Elaboração própria a partir de Almeida, Silva e Ramos de Almeida (2024).

Em sua tese de doutorado, Lima (2024) buscou analisar as contribuições que a TO poderia agregar na formação permanente de professores em serviço – atuando no Ensino Fundamental de escolas do campo ribeirinhas – e licenciandos em Matemática – estagiários em escolas da zona urbana –. Dentre as constatações da pesquisa, ao identificar que as práticas profissionais dos professores se alicerçavam em abordagens transmissivas, a pesquisadora realizou uma formação docente em torno destes conceitos da TO: saber, conhecimento, processos de objetivação e subjetivação, aprendizagem, atividade de ensino-aprendizagem (AEA) e Labor Conjunto. Por conseguinte, ela acompanhou os movimentos de elaboração e vivência de AEA's, propostas pelos participantes da pesquisa, para trabalhar os saberes de Ciências e Matemática. Em suma, Lima (2024) ressalta que as mudanças, quanto ao planejamento e desenvolvimento das aulas por parte dos (futuros) professores, possibilitou a superação das ações individualistas para o trabalho coletivo.

A partir do trabalho coletivo entre os(as) professores(as) indígenas em formação inicial e uma formadora, Nery (2023) tematiza acerca da coprodução de atividades matemáticas que buscam valorizar práticas socioculturais dos povos indígenas que vivem no Amapá e norte do Pará. Nesse sentido, a autora relaciona as simbologias e os significados emergentes nas atividades formativas aos meios semióticos de objetivação, destacando suas potencialidades para a formação inicial docente e a educação escolar indígenas. Ademais, a tese evidencia o processo de tomada de consciência dos saberes disponíveis histórica e culturalmente por parte dos(as) professores(as) em formação, particularmente do encontro com os sistemas de numeração na língua materna – compreendido como um conhecimento matemático sociocultural indígena (Nery, 2023).

Em colaboração com o Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural (GEPPEDH), Romeiro (2023), planejou Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) para serem trabalhadas em atividades formativas com professores dos anos iniciais a partir de um experimento formativo de caráter longitudinal, totalizando 20 encontros entre os anos de 2018 e 2019. Nesse contexto, a pesquisadora defende que, quando os professores se encontrarem com situações relacionadas às sequências e as resoluções se dão por contagem, a generalização aritmética e a generalização aritmética sofisticada são desencadeadas, ambas relativas ao pensamento aritmético. Por outro lado, a tese propõe que os professores desencadeiam a generalização algébrica quando se depararam com uma situação relativa à relação funcional, movimentando, assim, o pensamento algébrico na vertente da TO. De modo geral, ao enfocar no processo de objetivação de uma professora ao longo do experimento formativo e sua interação com o coletivo que estava inserida para a realização das SDA, Romeiro (2023) sustenta a relevância do trabalho conjunto entre professores e formadores para movimentar o pensamento algébrico.

Costa (2023), em sua tese, se debruça sobre um recorte dos resultados de um curso com professores de Matemática, intitulado por *Introdução à Astronomia na Perspectiva da Teoria da Objetivação*. Para a elaboração das atividades do curso, a pesquisa se alicerçou em alguns conceitos da TO, como: estrutura da atividade (objeto-objetivo-tarefa), labor conjunto, ética comunitária, entre outros. Assim, a partir de cinco encontros em 2022, o curso propiciou aos professores se encontrarem com estes saberes da Astronomia: a) Os principais movimentos da Terra; b) As estações do ano; c) Sistema Solar: o Sol e os planetas; d) Sistema Solar: tamanhos, distâncias e órbitas; e) Interpretação de dados da NASA sobre cometas e asteroides (Costa, 2023). Grosso modo, o autor sustenta a importância do curso para a formação coletiva de professores de Matemática, ressaltando as relações entre professores e professor-pesquisador.

Em sua tese de doutorado, Justino-Júnior (2022), considerando sua experiência como docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Pedagógica em Moçambique, se propõe a apresentar um percurso para (re)pensar a formação inicial de professores de Matemática para o ensino e a aprendizagem de Geometria Euclidiana, fundamentando-se teórica e metodologicamente na TO. Devido ao contexto pandêmico da Covid-19, o pesquisador se atém à análise de documentos acerca do ensino e da aprendizagem de Geometria na Universidade Púnguè e à apresentação do planejamento de quatro atividades, balizadas pelos conceitos de labor conjunto e ética comunitária, para serem vivenciadas com futuros professores de Matemática.

A partir das compreensões iniciais de futuros professores de um curso de Licenciatura em Matemática a distância sobre pensamento algébrico, Costa (2022) buscou movimentar o saber pensamento algébrico em uma perspectiva não alienante, fundamentando-se na caracterização proposta pela TO. Para tanto, o autor propôs um curso de extensão com cinco encontros formativos. Mediante as análises das atividades vivenciadas, a pesquisa de doutorado destaca a relevância do processo de tomada de consciência, progressivo e gradualmente, pelos licenciandos em Matemática. Nesse sentido, Costa (2022) sustenta que houve uma transformação e um refinamento, por parte dos futuros professores de Matemática, acerca do que poderia ser ou não caracterizado como pensar algebricamente.

Bezerra (2021), tomando como base as noções de labor conjunto e ética comunitária propostas na TO, dispõe uma Proposta Didático-Pedagógica com atividades constituídas por cinco tarefas de Matemática Recreativa (problemas recreativos, quebra-cabeças e jogos matemáticos) para serem trabalhadas com futuros professores de Matemática. Dentre os resultados da tese, a autora analisa o desenvolvimento de uma oficina sobre Matemática Recreativa e de um encontro formativo com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN. A partir disso, a pesquisa sustenta que as tarefas de Matemática Recreativa alicerçadas na TO podem viabilizar uma formação coletiva com futuros professores de Matemática em uma abordagem histórico-cultural.

Em sua dissertação de mestrado, com a intenção de atrelar a história ao ensino de Matemática, Santos (2022) propôs uma formação com licenciados em Matemática, a qual movimentou conceitos relacionados à média geométrica. A partir da vivência de sete atividades formativas e de uma análise semiótica fundamentada na TO, a pesquisa defende que os artefatos provenientes da história podem possibilitar o encontro com diversos saberes matemáticos. Ademais, embora a TO tenha alicerçado apenas metodologicamente a investigação, a autora considera importante aprofundar, em estudos futuros, o emprego teórico na análise dos dados nessa linha de pesquisa.

Oliveira (2022) se debruça sobre um recorte de uma formação continuada de professores no contexto remoto, constituída por oito encontros em 2021, proposta no contexto do grupo de pesquisa Al-Jabr. Dentre os achados, o estudo evidencia que, apesar de ter identificado a emergência do pensamento algébrico propriamente dito, os encontros de um pequeno grupo da formação, envolvendo três professoras e uma formadora, passou por processos de objetivação quando se defrontaram com tarefas relacionadas à generalização de padrões. Além disso, a autora pontua que houve um encontro com a caracterização de pensamento algébrico proposta na TO, as noções de sequência repetitiva e de crescimento, bem como com a distinção entre as definições generalização aritmética e generalização algébrica.

Pensando na proposição de curso de formação continuada com professores que ensinam Matemática, Gutiérrez Araujo (2020) adaptou os conceitos de saber e labor conjunto para esse contexto. Nesse caminho, mediante um recorte dos dados produzidos nesse curso, o autor defende que os professores se encontraram com os saberes profissionais relativos às tarefas investigativas de geometria dinâmica (TIGD), a saber: (a) resolver TIGD; (b) analisar TIGD; (c) elaborar TIGD. Ademais, a pesquisa ressalta a importância do desenvolvimento de atividades formativas fundamentadas nos preceitos da TO, especificamente nas formas de colaboração humana éticas e solidárias.

4.2 Contribuições das pesquisas para a formação de professores: alguns pressupostos teóricos e metodológicos da TO

Mediante os aspectos gerais supramencionados das pesquisas, constatamos que, dentre os conceitos centrais da TO, o que aparece em todas as investigações analisadas é o de atividade, em especial atividade de ensino-aprendizagem. A versão primária desses conceitos foi proposta a partir do cenário da Educação Básica, com foco nas relações entre alunos e professores. Assim, reconhecendo a necessidade de compreender as relações entre professores e formadores no contexto de processos formativos, esses estudos e outros (Ramos de Almeida; Martins, 2022; Vargas-Plaça; Radford, 2021) repensaram tais conceitos.

Quanto à abordagem de análise multimodal das atividades de formação de professores, estamos de acordo com as indicações de Moretti e Radford (2023) que, ao assumir essa perspectiva metodológica, as pesquisas no campo da formação de professores podem agregar significativamente na compreensão acerca do processo de aprendizagem docente. Nesse sentido, sublinhamos que algumas das pesquisas supracitadas (T3, T4, T6, T7 e D1) assumiram a multimodalidade para analisar como os (futuros) professores tomam ou podem tomar consciência dos saberes matemáticos e de ciências em cena. Ademais, as investigações foram realizadas nos espaços de formação inicial (T2, T5, T6, T7 e D1), de formação continuada (T3, T4, D3 e D4) e até mesmo em ambos os cenários (T1).

No que se tange às implicações amplas acerca dos saberes em cena para a área da Educação Matemática, as teses e dissertações apresentam resultados significativos referentes ao movimento dos conceitos algébricos e/ou aritméticos (T2, T3, T6 e D2), geométricos (T5, D1 e D3), astronômicos (T4) e da Matemática Recreativa (T7) em processos formativos.

Especificamente sobre as relações entre pensamento algébrico e formação de professores, três trabalhos (T3, T6 e D2) analisados trazem repercussões para nossa dissertação. Romeiro (2023) destaca a importância da superação da aritmetização por meio da atividade conjunta envolvendo os problemas desencadeadores de aprendizagem que favorecem a manifestação da generalização algébrica. Por sua vez, Costa (2022) defende que a tomada de consciência da caracterização de pensamento algébrico na perspectiva da TO é essencial para ressignificar a compreensão prévia sobre o movimento de pensar algebricamente por parte dos futuros professores de Matemática. Na mesma linha de Costa (2022), Oliveira (2022) sustenta, que as professoras passaram pelo processo de objetivação no campo da álgebra, particularmente com relação à definição de generalização algébrica e às noções de sequência repetitiva e de crescimento.

Quanto ao diálogo entre tecnologias digitais e formação de professores, identificamos apenas a dissertação de Gutiérrez Araujo (2020) que ressalta a relevância dos aspectos tecnológicos na elaboração de tarefas para a formação de professores. Além disso, o estudo pontua que os professores, que se encontraram com a tecnologia digital em cena – o GeoGebra – pela primeira vez, tendem a limitar o seu uso da mesma forma que os artefatos analógicos, como o lápis e papel, sem explorar as dimensões dinâmicas. Nesse contexto, fica evidente que a dinamicidade é um elemento fundamental no uso de artefatos tecnológicos digitais, como também veremos nos resultados da nossa pesquisa.

Outro ponto relevante a ser destacado é que, embora Radford (2021a) defenda a necessidade de considerar um enlace entre os processos de objetivação e subjetivação na organização e no desenvolvimento de uma atividade de ensino-aprendizagem, observamos, pelas questões, objetivos e resultados, que o interesse das pesquisas analisadas estava direcionado à dimensão do saber não relegando a dimensão do ser, haja vista que reconhecem a importância do trabalho coletivo entre professores e formadores.

Por outro lado, apesar de não ter sido a finalidade deste capítulo se debruçar acerca das pesquisas na área do Ensino das Ciências, identificamos que as teses de Camiotti (2020) e Ximenes (2020) apresentam as seguintes contribuições para a formação de professores pautada na TO: (a) reflexão crítica sobre a prática docente; (b) valorização do trabalho conjunto; (c) superação de posturas e práticas alienantes; (d) transformação da subjetividade docente; (e) constituição da identidade profissional docente como um intelectual crítico. Desse modo, reconhecemos a relevância desses aspectos, que colocam em relevo a dimensão do ser, e os consideramos no planejamento das atividades formativas propostas na nossa pesquisa.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

5.1 Caracterização do tipo de pesquisa

Reconhecendo a necessidade de articular as interfaces entre as práticas reflexiva, investigativa e educativa na área da Educação Matemática, apontada por Fiorentini e Lorenzato (2012), o presente trabalho se incumbiu de propor um curso de formação continuada com professores dos inicias do Ensino Fundamental. Nesse processo formativo, tivemos a intenção de movimentar o processo de tomada de consciência por parte dos professores sobre as possibilidades de ensino-aprendizagem acerca das equações com o uso de tecnologias digitais, a fim de alcançarmos o objetivo geral da pesquisa: *caracterizar o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais*. Para encontrarmos colaboradores, divulgamos um formulário para a inscrição no curso contendo as seguintes informações:

Quadro 9 – Informações gerais do curso de formação continuada

Título do curso de formação continuada: “Pensamento algébrico e o uso de recursos digitais nos anos iniciais do ensino fundamental”
Responsáveis: Grupo Al-Jabr de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra (UFPE/UFRPE/CNPq), em parceria com a Secretaria Municipal de Educação participante da pesquisa.
Resumo: Com as recentes demandas curriculares propostas pela BNCC e pelos currículos estaduais e municipais, tem sido discutido muito sobre o papel da álgebra na Educação Básica. Mas, o que é álgebra? O que é pensamento algébrico? Como pensar algebricamente? Por onde começar? Neste curso, pretende-se refletir sobre essas questões a partir de atividades formativas.
Tópicos: Introdução à álgebra escolar; Resoluções de problemas; Estudo introdutório das equações; Recursos digitais; BNCC; Currículo do município da pesquisa.
Datas: 24/08/2024 e 31/08/2024
Horário: das 8h às 12h
Local: Auditório da Secretaria de Educação do município da pesquisa
Público-alvo: prioridade aos professores dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental
Quantidade de vagas: 20
Prazo de inscrição: 10/08/2024
Certificação: o curso teve carga horária de 8h, sendo necessária a participação nos dois encontros.

Fonte: Acervo da pesquisa.

No preenchimento do formulário, os professores precisavam apresentar informações como: nome completo, e-mail, WhatsApp e ano escolar de atuação profissional. Convém mencionar que a preferência por professores dos 4º e 5º anos se deu exatamente devido às discussões curriculares em torno do objeto matemático (como destacado na seção 1.4 deste texto). Além disso, pontuamos que tínhamos o intuito de trabalharmos com dois pequenos grupos de três professores. Todavia, levando em consideração nossas experiências anteriores em projetos de formação continuada, particularmente no que diz respeito à dificuldade de os participantes permanecerem até o fim do curso, isto é, a evasão nesse cenário, colocamos a quantidade de 20 vagas, das quais 17 foram preenchidas, mas apenas cinco professoras participaram.

Mediante a proposição do curso supramencionado, caracterizamos o tipo de investigação como pesquisa-formação (Longarezi; Silva, 2008, 2013), a qual articula dois eixos: a pesquisa e a formação continuada de professores. Segundo Longarezi e Silva (2008), para a pesquisa propiciar a formação docente, é necessária a constituição do espaço e das condições na instituição educacional a fim de que a comunidade escolar seja orientada a partir da atividade de ensino nos processos formativos dos participantes da pesquisa. É com essa compreensão que os autores conceituam a pesquisa-formação:

> Dialeticamente, esses processos formativos potencializam e legitimam a pesquisa como instrumento de compreensão e transformação da realidade, balizada em princípios e fundamentos científicos. Na interface desse processo, a pesquisa forma e a formação constitui a pesquisa (Longarezi; Silva, 2008, p. 4059).

Na pesquisa-formação, o pesquisador se insere no ambiente de estudo ora como formador, desenvolvendo uma prática pedagógica para a formação crítica dos professores em atualização dos saberes, ora como investigador, sistematizando, analisando e compreendendo como ocorre esse processo formativo com professores. Sendo assim, consideramos que “a pesquisa tem como princípio e fim a prática social” (Longarezi; Silva, 2008, p. 4059) e, particularmente, fundamentamo-nos nos pressupostos freireanos de formação docente, estabelecendo um elo entre a teoria e a prática educativa (Freire, 2024, 2020a, 2020b, 2019).

Como podemos perceber, a presente pesquisa-formação caracteriza-se como um estudo de aprofundamento das análises das relações de uma pequena amostra de professoras dos anos iniciais, e não como um estudo de generalização quantitativa de grandes amostras. Logo, a natureza desta investigação é qualitativa uma vez que “a pesquisa qualitativa ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes" (Godoy, 1995, p. 21). A fim de esclarecermos o contexto do fenômeno investigado, discorreremos adiante.

5.2 Descrição do setor de formação

Tendo por finalidade cumprir com o critério de priorização deste projeto de pesquisa de mestrado – aprovado no Edital FACEPE 35/2022 PBPG em seu item 3.3.1, letra d: Educação e Conhecimento –, quanto às áreas estratégicas para o desenvolvimento do estado de Pernambuco, estabelecemos uma parceria com a Secretaria Municipal de Educação de uma cidade da região metropolitana do Recife. Nesse sentido, as participantes da presente investigação foram professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental da referida rede.

Para conhecermos melhor a realidade da Secretaria Municipal de Educação a qual as participantes da pesquisa eram vinculadas, realizamos uma entrevista semiestruturada, no formato on-line por meio do Google Meet em março de 2024, com o Gerente de Formação, seguindo este roteiro:

- Como funciona o setor de formação? Qual a duração das formações? Qual a frequência?
- Como ocorrem as formações? Em média, atendem quantos professores? Como eles são separados?
- Há quantos formadores no setor de formação? Como ocorrem as formações dos formadores?
- Qual a disponibilidade de recursos durante as formações? Há computadores disponíveis?

A partir desse diálogo sobre as formações, a infraestrutura, os professores, os formadores e os documentos oficiais, descrevemos os aspectos levantados.

Quanto ao funcionamento do setor de formação, os encontros formativos são periódicos e ocorrem pelo menos uma vez ao mês. Ademais, as formações são organizadas por etapas de escolarização: Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos.

Na etapa dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o setor recebe, em média, 40 professores por ano escolar e a divisão dos encontros formativos se dá, sobretudo, por dois polos: polo 1 (mais central) e polo 2 (mais afastado do centro). As formações acontecem com grupos de professores de cada ano escolar, nos dias de aula-atividade em cada turno (manhã e tarde) que eles trabalham. Estritamente, os professores dos 1º, 2º e 3º anos são recebidos nas terças (polo 2) e quartas (polo 1); já os professores dos 4º e 5º anos são recebidos nas quintas (polos 1 e 2).

Outro aspecto importante é que o setor possui parcerias com o Programa Educar Pra Valer e o Programa Criança Alfabetizada (PCA) do estado de Pernambuco. Essa última contempla os professores da Educação Infantil e dos anos iniciais.

No que se refere aos espaços das formações, podem ocorrer no auditório da secretaria, no auditório de alguma escola ou outro espaço disponível no município, não há ambiente fixo.

No que tange aos formadores, há sete: dois da área de Matemática, três da área de Língua Portuguesa e dois do ciclo de alfabetização (1º e 2º anos). Os formadores trabalham em conjunto por área. Além disso, o processo formativo dos formadores acontece com os programas parceiros e as formações internas – com o chefe do setor, a diretoria de ensino e/ou participação em cursos e eventos promovidos pelo SME.

Quanto aos documentos oficiais utilizados pela rede, o setor de formação adota o currículo do município, os descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) (provas externas) e a matriz de referência do Educar Pra Valer (que segue a organização das habilidades da BNCC). Especificamente sobre a formação, há um plano formativo de cunho interno que ainda não está oficialmente homologado. De modo geral, o setor se ampara na lei da escola integral.

Sobre a disponibilidade de recursos, depende do espaço que a formação acontecer. Em algumas escolas, há laboratórios e tablets. Na sede, tem quatro tablets disponíveis.

No que diz respeito aos conteúdos trabalhados ao longo do ano letivo, as formações são planejadas priorizando as matrizes do SAEB e SAEPE. Como os descritores dessas provas externas são de 2001, eles não estão em consonância com a BNCC. Com isso, outros conteúdos são priorizados durante as formações e a álgebra fica para o final do ano.

Além de levantarmos os aspectos supracitados, também sondamos as condições e restrições efetivas para funcionamento do contexto da pesquisa – o curso de formação continuada. Uma semana antes da formação, em agosto de 2024, marcamos uma reunião com uma das formadoras da rede, que iria colaborar no processo de registros dos dados, para dialogarmos sobre a organização do curso. Nesse encontro, a formadora informou que os tablets da sede não estariam disponíveis, mas que haveria projetor, quadro, piloto, folha de ofício, bem como o espaço físico do auditório.

Frente à indisponibilidade de aparelhos eletrônicos (como tablet, notebook ou computador) por parte da rede, entramos em contato com os professores, por meio do

WhatsApp, e solicitamos que quem tivesse notebook levasse, voluntariamente, para os encontros. A partir desse contato, mantivemos uma comunicação mais próxima com as participantes, passando alguns informes e tirando eventuais dúvidas.

5.3 Procedimento de produção dos dados

O planejamento para a produção dos dados foi feito a partir da descrição dos *aspectos gerais dos artefatos tecnológicos digitais*, da *estruturação das atividades formativas*, da apresentação da *proposta de tarefas* e da descrição das *formas de registros dos dados.* A seguir, apresentamos esses subtópicos.

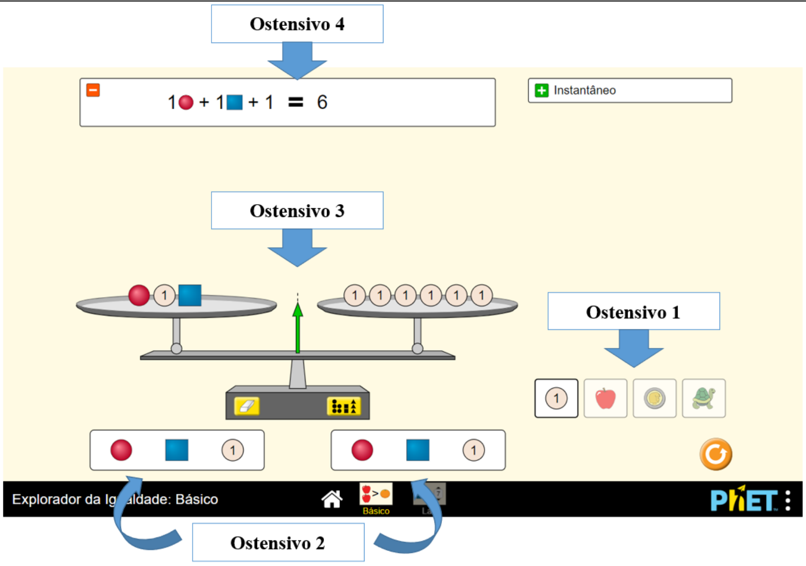
5.3.1 Aspectos gerais dos artefatos tecnológicos digitais

Considerando a diversidade de artefatos tecnológicos digitais (livros digitais, jogos digitais, vídeos interativos, etc.) disponíveis atualmente na internet para o estudo de equações, damos ênfase aos simuladores Explorador da Igualdade: Básico (EIB) e Explorador da Igualdade (EI), pertencentes à plataforma *Physics Education Technology – PhET*[9] Simulações Interativas da Universidade do Colorado Boulder.

Almeida e Espíndola (2023) buscaram analisar o *Explorador da Igualdade: Básico* (EIB) e o *Explorador da Igualdade* (EI), tomando como base na Teoria Antropológica do Didático proposta por Chevallard (2018). Um dos resultados ressaltados pelos autores é que esses simuladores digitais possuem aspectos ostensivos[10] (O), fundamentais para manuseá-los.

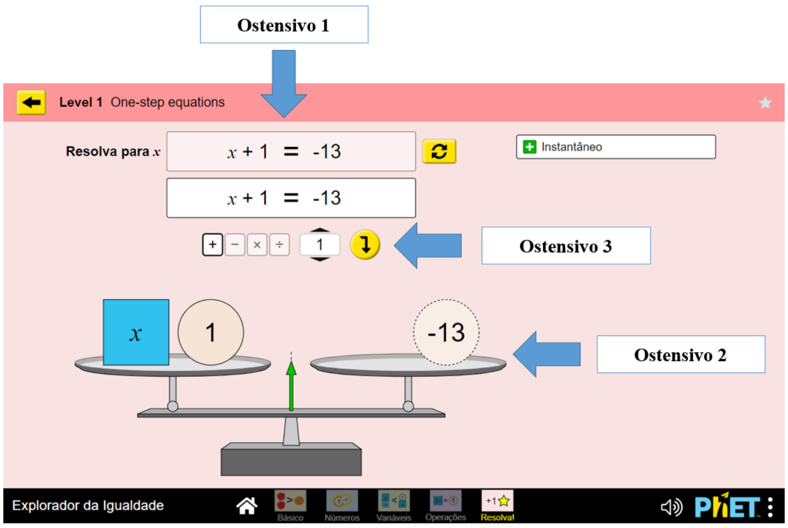
Figura 6 – Ostensivos da tela do EIB no modo básico

[9] Para mais informações, acessar: https://phet.colorado.edu/pt_BR/.
[10] Objetos perceptíveis e tangíveis pelos sujeitos na realização de uma atividade matemática.



Fonte: Almeida e Espíndola (2023).

Figura 7 – Ostensivos da tela do EI no modo Resolva!



Fonte: Almeida e Espíndola (2023).

Como podemos observar nas Figuras 6 e 7, os autores elencaram os seguintes ostensivos para o EIB no modo *básico*: O_1 – Tipos dos objetos; O_2 – Objetos a serem inseridos na balança de dois pratos; O_3 – Balança de dois pratos; e O_4 – Sentença matemática com o sinal de igualdade. No modo *lab*, há apenas uma diferença com relação ao modo básico no O_1 – Tipos dos objetos, pois nesse caso o ostensivo possibilita que os alunos possam atribuir os valores para as massas dos objetos, que variam de 1 a 20 (Almeida; Espíndola, 2023). Quanto ao EI, os autores apontam estes ostensivos: O_1 – Equação polinomial do 1º grau em linguagem alfanumérica; O_2 – Balança de dois pratos como uma metáfora da equação polinomial do 1º grau; e O_3 – Operadores para resolver a equação polinomial do 1º grau.

Partindo dessas considerações, conceituamos as funções desses artefatos tecnológicos digitais sob a lente da Teoria da Objetivação. Especificamente, acreditamos que os aspectos ostensivos do EIB e do EI podem ser compreendidos como signos que os indivíduos podem utilizar intencionalmente para produzir significações culturais de modo a tomar consciência sobre o objeto da atividade (Radford, 2021a). Além disso, os signos do EIB estão situados no Sistema Semiótico Icônico (SSI), uma vez que a balança de dois pratos e outros objetos concretos são substituídos por desenhos de imagens icônicas a fim de apresentar as relações de igualdade. Enquanto os signos do EI estão situados predominantemente no Sistema Semiótico Alfanumérico (SSA), haja vista que as equações são apresentadas por letras, números e símbolos.

5.3.2 Estruturação das atividades formativas

Como supracitado, nos inserimos no contexto da formação tanto como formador quanto pesquisador, com o intuito de produzir dados, de formar e se formar coletivamente com as participantes da pesquisa. Por sua vez, organizamos a formação na modalidade presencial, com atividades formativas para cada encontro, com momentos de trabalho em pequenos grupos e no grupo geral. A formação foi estruturada em dois encontros de 4 horas cada, totalizando uma carga horária de 8 horas, para discussões e reflexões sobre as resoluções de tarefas algébricas, em um nível de complexidade crescente, envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas.

Inspirando-nos na concepção do Labor Conjunto, proposta na TO, bem como na sua ampliação metodológica para o contexto da formação continuada de professores, planejamos as atividades formativas amparando-nos tanto no eixo da produção de saberes quanto no eixo da produção de subjetividades, como ilustramos na Figura 8:

Figura 8 – Eixos considerados no planejamento das atividades formativas

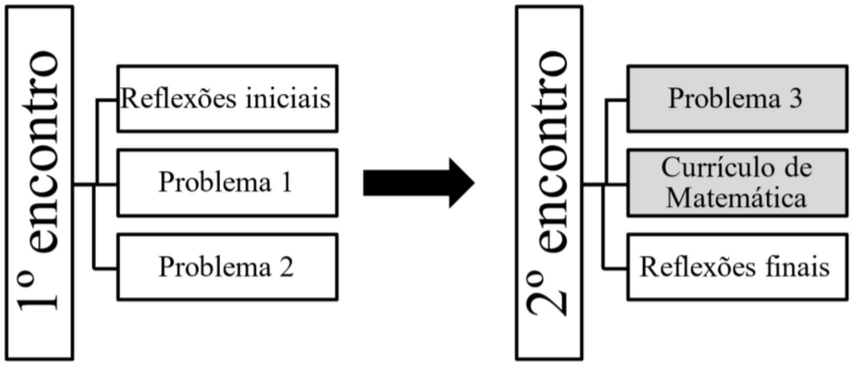
Fonte: Elaboração própria.

Salientamos que os dois eixos apresentados na Figura 8 buscaram convidar as professoras a se encontrarem com discussões e reflexões não alienantes e pautadas pela ética comunitária – escutando, respeitando, acolhendo e reconhecendo a voz do outro (Almeida *et al*. 2024; Radford, 2021a). Entretanto, não garantimos que isso ocorreu nas vivências das atividades formativas, uma vez que os sujeitos envolvidos são seres históricos com necessidades culturais e que, para observarmos as mudanças nas posturas dos seres, o tempo da pesquisa-formação é um fato crucial. Assim sendo, evidenciamos aqui que não temos a intenção de provar se houve ou não o Labor Conjunto entre o formador e as professoras.

Desde o primeiro contato, apresentamos um panorama geral do projeto didático dos encontros formativos, destacando que a forma de trabalho seria coletiva e que o foco da nossa pesquisa-formação não era identificar os conhecimentos dos professores, mas sim movimentar as possibilidades de aprendizagem docente.

Especificamente, os tópicos abordados ao longo dos dois encontros foram:

Figura 9 – Tópicos do curso de formação continuada

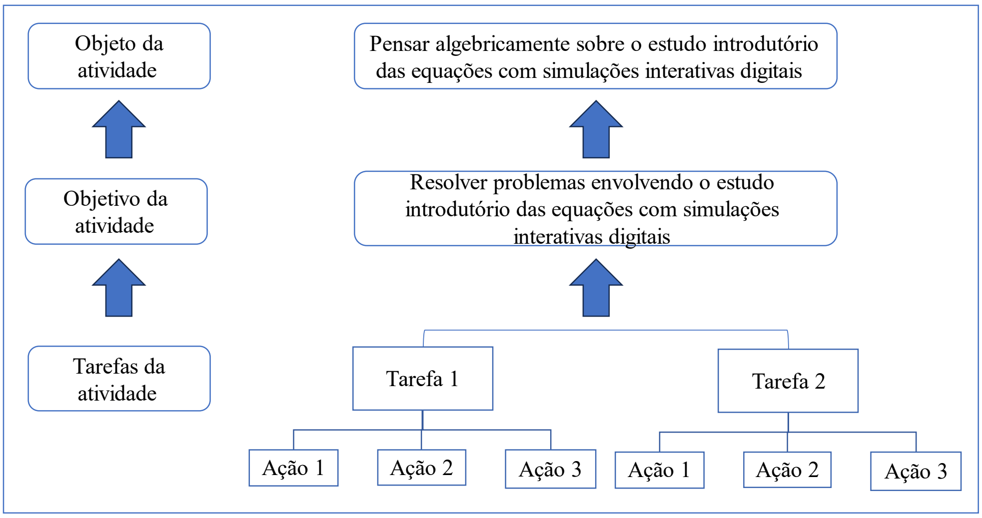


Fonte: Elaboração própria.

Como disposto na Figura 9, os tópicos reflexões iniciais, problema 1 e 2 e reflexões finais fizeram parte diretamente das nossas análises, enquanto o problema 3 e o currículo de Matemática não. Justificamos esse fato argumentando que o problema 3 referia-se a uma tarefa com o Explorador da Igualdade, ou seja, no SSA, para que as professoras elaborassem um problema de enunciado. Com efeito, o tempo do curso não permitia isso, mas o objetivo foi justamente tensionar as dificuldades que temos ao elaborar problemas, uma habilidade requerida na BNCC, ou até mesmo com a linguagem simbólica sem ter se desenvolvido em outras linguagens previamente. Além disso, a discussão curricular teve como foco contribuir mais com o processo formativo das professoras em si do que atender aos objetivos da pesquisa.

Como vimos, a noção de atividade assume um forte sentido social de envolvimento dos sujeitos engajados para resolver uma determinada tarefa com um determinado objetivo a fim de alcançar um objeto. Assim, Radford (2021a) propõe que toda atividade de ensino-aprendizagem possui esta estrutura: objeto-objetivo-tarefa. No nosso contexto, as atividades formativas (ver Figura 10), em torno dos problemas de enunciado, foram estruturadas da seguinte forma:

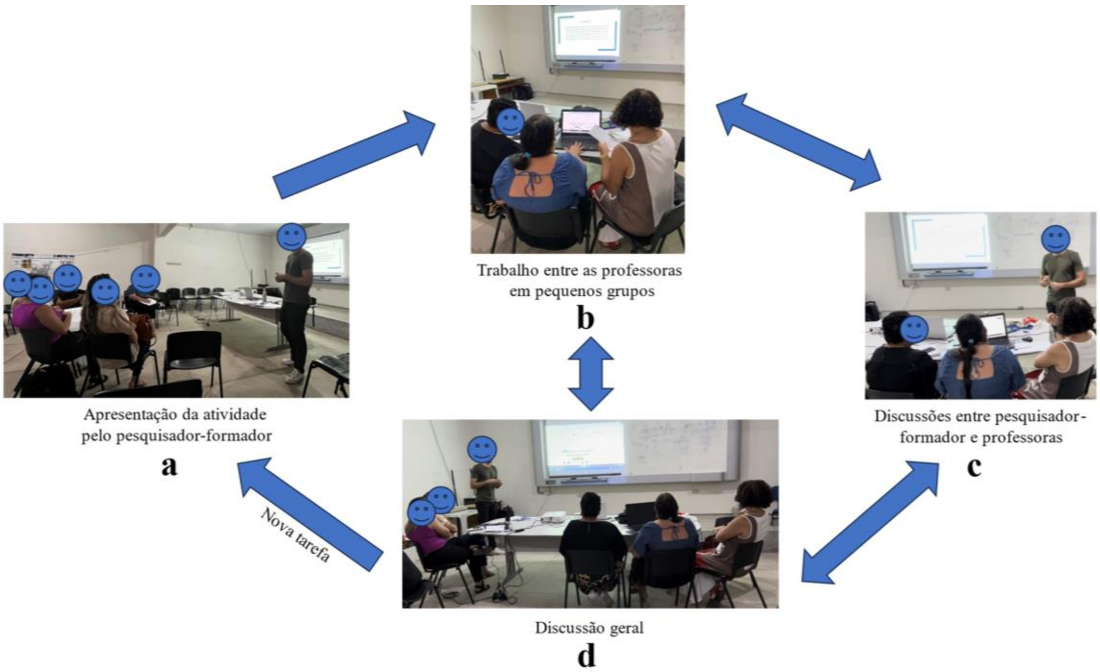
Figura 10 – Estrutura das atividades formativas envolvendo os problemas de enunciado



Fonte: Elaboração própria.

Quanto às formas de engajamento coletivo, vivenciamos as atividades formativas por meio das diferentes etapas propostas por Radford (2021a):

Figura 11 – Principais momentos da atividade formativa



Fonte: Elaboração própria com base em Radford (2021a).

Na apresentação da atividade pelo pesquisador-formador, as tarefas foram explicadas a fim de que as professoras pudessem compreender o que estava sendo requerido. Por conseguinte, no trabalho em pequenos grupos, as professoras discutiam entre si e com o pesquisador-formador. Por fim, havia a discussão geral das proposições dos pequenos grupos.

Como ilustrado na Figura 11, após o momento a, não tinha uma hierarquia entre os momentos b, c e d.

Quanto ao trabalho coletivo, salientamos que as cinco participantes – apresentadas neste texto por codinomes – foram divididas em dois grupos: um grupo constituído pelas professoras Andréia, Rosália e Sirlene e outro grupo constituído pelas professoras Márcia e Sandra. A escolha dos grupos se deu por ordem de chegada. Devido à ausência das professoras Andréia, Márcia e Sandra no segundo encontro, restringimos as nossas análises relacionadas aos momentos das atividades formativas envolvendo explicitamente o grupo formado pelas Andréia, Rosália e Sirlene. Além disso, como não colocamos um dos principais momentos das atividades – previsto na versão inaugural proposta por Radford (2021a) –, as "discussões entre os pequenos grupos", não comprometemos, no segundo encontro, o formato ilustrado na Figura 11, apenas houve uma nova roupagem na discussão geral.

5.3.3 Tarefas propostas na pesquisa

A partir das orientações de dimensões matemática e social, elencamos três perguntas indispensáveis para a organização de tarefas para formação de professores com base em Radford (2021a):

1. Quais aspectos devem ser elencados na definição dos problemas matemáticos que as professoras serão convidadas a resolver?
2. Os problemas matemáticos devem ser disponibilizados às professoras em que ordem?
3. Quais as formas de colaboração humana podem convidar as professoras a se engajarem com esses problemas?

Sobre a primeira questão, como discutimos no primeiro capítulo desta dissertação, no que diz respeito às equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita, pesquisadores, como Barbosa e Almouloud (2022), Barbosa e Lima (2019), Araújo (2009) e Filloy e Rojano (1989), destacam duas grandes categorias: (i) equações com a incógnita em apenas um membro da igualdade, isto é, $Ax + B = C$; e (ii) equações com a incógnita em ambos os membros da igualdade, ou seja, $Ax + B = Cx + D$. Essa categorização se deve aos procedimentos de resolução, os quais destacamos alguns deles adiante.

Quanto aos problemas de equação do tipo $Ax + B = C$, alguns trabalhos na literatura apontam que os estudantes tendem a utilizar métodos aritméticos (Gomes; 2020, Radford, 2022b). Isso porque eles geralmente assumem uma compreensão operacional do sinal de igualdade "=", tomando o que está do lado direito como resultado da operação disposta no lado esquerdo, assim, subtraem B de C e dividem por A. Ou até mesmo recorrem a uma estratégia mais primitiva: testam a indeterminação “x” até encontrar (ou não) o resultado da equação.

Por outro lado, em problemas de equação do tipo Ax + B = Cx + D, os procedimentos de resolução, citados anteriormente, podem não ser mais tão eficazes. Nesse cenário, os estudantes podem recorrer a um raciocínio genuinamente algébrico: ao operar dedutivamente com o desconhecido como se fosse uma grandeza determinada. Para ilustrarmos melhor o que queremos afirmar com isso, vamos recorrer aos três elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Por exemplo, para resolver a equação 4x + 2 = 3x + 6, pode-se trabalhar com o sinal de igualdade “=” em uma perspectiva relacional. Nesse caso, mediante a noção de equivalência entre as operações nos lados esquerdo e direito da relação de igualdade, pode-se subtrair “2” e “3x” em ambos os lados da equação, para concluir que “x = 4”. Assim, conforme Radford (2022a; 2022b; 2021b), teríamos: a **indeterminação**, a incógnita x; a **denotação**, em linguagem alfanumérica; a **analiticidade**, presente no raciocínio lógico dedutivo e no trabalho com o indeterminado em primeiro plano.

Ademais, com base em Moretti e Radford (2023b, 2015), tensionamos que a escolha do tipo de tarefa na organização do ensino de Matemática é condição necessária, mas não suficiente para determinarmos o tipo de raciocínio que irá emergir na vivência de uma atividade. Certamente, não desconsideramos os apontamentos da literatura quanto aos procedimentos de resolução de determinados tipos de equações, porém, ao assumirmos os pressupostos de uma perspectiva histórico-cultural, precisamos movimentar coletivamente os aspectos lógicos e históricos dos conceitos matemáticos (Moretti; Radford, 2023b, 2015).

Com efeito, considerando os apontamentos de Radford (2021a, 2021b, 2022a, 2022b) sobre o processo de introdução à álgebra escolar, damos ênfase ao tipo de equação Ax + B = Cx + D. Assim, inspirados nos problemas de enunciados propostos pelo autor, elaboramos as seguintes tarefas desta pesquisa-formação:

Quadro 10 – Problemas de enunciado da pesquisa

Problema 1
João foi desafiado a descobrir a massa de um cubo azul presente em uma balança de dois pratos equilibrada. No total, há três cubos azuis e nove bolinhas beges (todas com 1g de massa) nessa balança. Ajude João a resolver isso sabendo que tem dois cubos e três bolinhas em um lado, enquanto no outro lado há um cubo e seis bolinhas.

Problema 2
Ana, Maria e Fernanda foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrada. Sabendo que, em um prato da balança, há três esferas vermelhas e uma esfera bege e, no outro prato da balança, há uma esfera vermelha e cinco esferas beges, qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas? Considere a esfera bege com 1g de massa.

Fonte: Elaboração própria.

Segundo Radford (2022b, p. 3), "a gama de problemas que podem ser formulados em linguagem natural e traduzidos para SSC e SSI é muito limitada, mas é suficiente para facilitar o primeiro encontro dos jovens estudantes com o pensamento algébrico". Atrelado a esse pressuposto, também assumimos no planejamento das tarefas que:

> "Os problemas de enunciado não são neutros nem cognitivamente e nem culturalmente. (...) Inevitavelmente, os problemas mostram ostensivamente alguns aspectos da natureza do mundo, como ele é matematizado, e fornecem a base para ilustrar como a verdade pode ser estabelecida." (Radford, 2021b, p. 183)

Quanto à segunda questão supramencionada, a ordem dos problemas propostos justifica-se pelo nível de complexidade dos procedimentos de resolução. A partir dos estudos de Radford pontuamos que, para responder diretamente a equação, no primeiro problema, é necessário "eliminar" objetos iguais em ambos os lados, ou seja, realizar a operação da subtração. Enquanto no segundo problema, além da estratégia anterior, precisa-se "separar" em partes proporcionais os objetos presentes em ambos os lados, para reduzir o coeficiente da incógnita a um, isto é, realizar a operação da divisão.

Por sua vez, para ambos os problemas, sugerimos algumas ações, dispostas no Quadro 11, de modo que as professoras tomassem decisões e interagissem umas com as outras:

Quadro 11 – Ações para cada problema de enunciado proposto na pesquisa

Ação 1 – Resolução do problema com o uso do simulador. **Instrução:** Com o uso do simulador Explorador da Igualdade: Básico, resolvam o problema. **Ação 2 –** Escrita da resolução do problema em linguagem natural.

Instrução: Escrevam uma carta para um colega que ainda não sabe resolver equações. Vocês devem explicar, de forma clara, justa e convincente, como resolver o problema. a. Clara: vocês compreendem o texto? b. Justa: a resolução é correta? c. Convincente: os argumentos são coerentes? **Ação 3 –** Escrita da resolução do problema em linguagem alfanumérica. **Instrução:** Vocês conseguem traduzir o enunciado desse problema para uma equação em linguagem simbólica? Como vocês podem resolvê-la? Descrevam o passo a passo.

Fonte: Elaboração própria com base em Radford (2021a).

Do ponto de vista da formação, todas as ações elencadas anteriormente foram fundamentais para propiciar o engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador. Todavia, levando em conta os objetivos da pesquisa, damos ênfase na ação 1 nas análises dos dados. Além dessas ações, visando contemplar a terceira questão supracitada acerca da dimensão social, "em particular, fomentamos formas coletivas de produção de saber e modos de colaboração humana de natureza não alienante. A organização social da tarefa consiste em fomentar formas e meios de interação que promovam posições críticas, solidariedade, responsabilidade e o cuidado com o Outro" (Radford, 2021a, p. 178). Tal fato se deu, ao longo do processo formativo, ao passo que as professoras foram repensando suas posições nas relações umas com as outras.

De modo geral, acentuamos que há uma relação biunívoca entre as dimensões matemática e social nas tarefas propostas, isto é, acreditamos que a organização social afeta a organização matemática e vice-versa. Com isso, reiteramos que o trabalho coletivo influencia na resolução de problemas, particularmente por meio da diversidade de estratégias, de pontos de vistas, de formas de tentar argumentar e se posicionar diante da presença do outro, entre outros aspectos.

5.3.4 Formas de registros dos dados

Os dados foram registrados pelas(os): (a) gravações dos encontros, no formato de vídeo e áudio, para analisarmos os gestos e a fala dos pequenos e do grande grupo; (b) gravações das telas dos notebooks; (c) produções escritas das professoras para responderem as tarefas; e (d) registros escritos do pesquisador-formador, no diário de bordo, com algumas observações sobre a pesquisa-formação.

Para registrar os dados, o pesquisador contou com a colaboração de uma formadora do município e uma pessoa externa à instituição, cada uma delas ficou responsável por gravar um grupo. Além disso, a última pessoa gravou os momentos de discussão no grande grupo.

A diversidade dos registros dos dados justifica-se pela abordagem multimodal (Arzarello, 2006) do pensamento algébrico que compreende diferentes meios semióticos para representá-lo (Radford, 2018, 2011c), além da nossa preocupação em atingir não apenas os objetivos da pesquisa como também contribuir com a formação dos professores.

5.3 Procedimento de análise dos dados

Radford (2015b) sugere, metodologicamente, três fases para as análises: 1) *Seleção dos segmentos salientes*, que evidenciem os processos de objetivação e subjetivação; 2) *Análise dos episódios fundamentada na teoria e com foco nas questões de pesquisa em cena*; e 3) *Interpretação do desenvolvimento do diálogo*, apontando as reações gestuais, emotivas etc. Partindo desses pressupostos, elencamos, a seguir, os passos que seguimos nas análises dos dados desta pesquisa:

- **1º passo:** assistimos os vídeos e escutamos os áudios;
- **2º passo:** transcrevemos as falas e os movimentos dos participantes, elencando-os por linhas enumeradas no formato “N-n” (o qual “N” refere-se ao número da categoria de análise e “n” à ordem da linha. Por exemplo: em “2.10”, “2” refere-se ao segundo episódio e “10” a linha do discurso naquele episódio.);
- **3º passo:** focamos nos excertos das atividades formativas que abordavam a tradução, resolução, discussão e reflexão dos problemas de enunciado;
- **4º passo:** focamos nos excertos das atividades formativas que ilustravam como os vetores caracterizadores do pensamento algébrico emergiram (ou não);
- **5º passo:** focamos nos excertos das atividades formativas que evidenciaram os meios semióticos (gestos, fala e escrita) nos movimentos de pensar algebricamente;
- **6º passo:** focamos nos excertos da pesquisa-formação envolvendo reflexões gerais e as relações no trabalho coletivo que corroboram com as inferências envolvendo as resoluções dos problemas;
- **7º passo:** ilustramos as resoluções e o cenário da investigação por meio de figuras;
- **8º passo:** sintetizamos as constatações por meio de quadros.

Ressaltamos que esses passos seguem uma lógica bidirecional e não possuem uma escala crescente de prioridade, ou seja, retomamos cada um deles, ao longo das análises, quando se fez necessário.

Considerando a amplitude de dados produzidos, selecionamos e organizamos os resultados a partir de episódios que julgamos relevantes para atendermos à questão e, em particular, aos objetivos da pesquisa: *Episódio 1* – Movimentos iniciais: dos saberes algébricos constituídos histórica e culturalmente a um convite para repensar a álgebra escolar; *Episódio 2* – Atividades formativas referentes às resoluções de problemas envolvendo o estudo introdutório de equações com simulações interativas; *Episódio 3* – Movimentos finais: um encontro com uma nova forma de pensar algebricamente?

Convém ressaltar que as análises realizadas no episódio 2 dão conta de responder às nossas inquietações. Entretanto, lançamos olhares para os episódios 1 e 3 com o intuito de compreendermos as reflexões introdutórias e conclusivas da formação que corroboram com as nossas constatações no episódio 2.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 Episódio 1 – Movimentos iniciais: dos saberes algébricos constituídos histórica e culturalmente a um convite para repensar a álgebra escolar

Ressaltamos, antes de tudo, que nossa posição teórica acerca da álgebra escolar se refere à concepção de álgebra defendida na Teoria da Objetivação – TO. Essa vertente problematiza e refuta a compreensão de que o ensino-aprendizagem da aritmética é pré-requisito para o ensino-aprendizagem da álgebra. Nesse sentido, Radford (2022a, 2022b, 2021b) indica caminhos, assim como outras investigações (Silva, 2024; Romeiro, 2023; Martins, 2023; Oliveira, 2022; Gomes, 2020; Vergel; Rojas, 2018; Vergel, 2016), para (re)pensarmos o processo de introdução à álgebra escolar. Tais caminhos serão retomados adiante.

Por ora, nos debruçamos sobre alguns questionamentos iniciais propostos às professoras, bem como suas respostas. Propusemos estas indagações a fim de movimentar os saberes, relativos ao campo da álgebra e do seu ensino, que as professoras já se encontraram ao longo das suas trajetórias profissionais em outros contextos. Foram elas: o que é álgebra? O que é pensamento algébrico? Como pensar algebricamente? E por onde começar?

A partir dessas questões, não tínhamos a intenção de elencar quais conhecimentos as professoras "possuíam ou não", mas pretendíamos levantar as possibilidades de aprendizagem docente, readaptando o planejamento das atividades formativas a depender das necessidades contextuais. Em outras palavras, partindo dos preceitos de Radford (2021a), compreendemos o conhecimento aqui como uma entidade particular que se materializa no engajamento coletivo entre professoras e pesquisador-formador por meio de saberes movimentados durante o processo formativo. Com efeito, partir dos saberes disponíveis histórica e culturalmente se fez fundamental para que pudéssemos alcançar seus excessos, isto é, outras formas de concebê-los e, assim, superá-los.

Para tanto, o pesquisador-formador convidou às professoras a desenharem, escreverem, representarem etc., em uma folha, as principais ideias que vinham à mente ao se depararem diante de tais questionamentos. Até o momento, estavam presentes as professoras Andréia, Márcia, Rosália e Sirlene. A professora Sandra chegou um pouco após a apresentação do projeto didático da formação, mas o pesquisador-formador explicou para ela os pontos de discussão e pediu que ela acompanhasse, como podemos observar no diálogo a seguir:

> **1.1 Pesquisador-formador:** Concluíram?
> **1.2 Sandra:** Pode ficar à vontade, viu. Pode continuar, porque eu cheguei atrasada...

1.3 Pesquisador-formador: Certo, mas você pode acompanhar as discussões a partir do que a gente for colocando aqui... O que vocês pensaram a partir dessas perguntas?
1.4 Sirlene: Eu pensei assim... O pensamento vai desenvolver nos alunos novas estratégias utilizando os materiais ou criando eles. Vamos supor, a bola, que é uma esfera, né. Aquela batata que vem em um cilindro. Às vezes, utilizar as coisas do cotidiano deles. E como a colega falou, eu anotei aqui, eu achei importante o que ela falou... Desde os anos iniciais, desde lá uma situação com as criancinhas, já lidando com essas formas para que não cheguem a ver o "bicho", né. Porque o "bicho" é esse, chegar e ver tudo de uma vez. E outra coisa, a gente dá para os alunos o conteúdo e chega lá tudo o que a gente tem que dá. E eles tem que aprender esse pensamento, porque eu passo dias estudando em casa e arrumando estratégias... Caixa de papelão, caixa de sapato, eu vou levando tudo para sala de aula, palito de churrasco, a gente faz equipes e trata de fazer as formas tanto planas como espaciais, tridimensionais, e eles tem aprendido muito com isso. [...] Eles gostam da prática!
1.5 Pesquisador-formador: Uma coisa que você falou e que é bem interessante é sobre a questão dos materiais do cotidiano, que geralmente quem trabalha nos anos iniciais tenta articular. Não somente trabalha com o quadro, mas também com outros recursos. E isso aparece lá no título [da formação], com ênfase nos recursos digitais, mas justamente pensando nisso... Como podemos levar os alunos a pensar com os recursos? Como podemos, a partir do que vai ser trabalhado aqui, pensar em outros recursos, sejam digitais ou não, para trabalhar o pensamento algébrico e a álgebra nos anos iniciais? Então vamos refletir sobre isso ao longo dos encontros... Mais alguém pensou em alguma coisa?

Como podemos perceber na linha 1.4, apesar de Sirlene não ter destacado aspectos da álgebra escolar, um ponto fica em destaque: o papel dos recursos didáticos – compreendidos aqui como artefatos da cultura profissional dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental – nos processos de ensino-aprendizagem de Matemática. O discurso dela sinaliza a relevância da dimensão prática, por meio da utilização e criação de materiais, para o desenvolvimento do pensamento. Tal aspecto se articula com a nossa defesa (linha 1.5) que os artefatos culturais, digitais ou não, são elementos consubstanciais para a emergência do pensamento algébrico (Radford; Salinas-Hernández; Sacristán, 2023; Vargas-Plaça; Gobara; Radford, 2022; Radford, 2020, 2014, 2011c).

Seguindo o diálogo e respondendo o questionamento do pesquisador-formador (final da linha 1.5), Andréia fez esta colocação:

1.6 Andréia: O senhor perguntou o que era álgebra e eu sai juntando tudo... Essas quatro perguntas eu fiz uma resposta só. Quando eu penso em álgebra, eu já vou logo pensando nessa coisa de fazer uma relação de igualdade. Vai começar na Educação Infantil, mesmo sem o professor saber que está dando essa regularidade, mesmo ele não tendo essa intenção de estar fazendo, que é quando ele coloca uma figura "um triângulo, um quadrado e um círculo" e ele pede para fazer a continuação da sequência disso, ele já está trabalhando ali a álgebra mesmo sem ter essa intenção. E quando vai para números, quando

> começa ali o primeiro e segundo ano, aí a criança coloca “um mais dois é igual a dois mais um” [1 + 2 = 2 +1]. Para ele ter o entendimento que é a mesma coisa, tem que ser mostrado para ele, fazer ele pensar algebricamente de uma outra forma, mostrar para ele que aquilo tem uma regularidade, que é a mesma coisa. Eu coloquei aqui assim... Que no início desenvolve no aluno a capacidade de resolução de problemas. É por onde a gente vai começar! Começar esse pensamento algébrico é trazer dentro dos problemas do cotidiano. Como eu vou fazer... E se for dessa forma? É perguntar mesmo. Quem tem outra solução?
> **1.7 Sandra:** Às vezes, eles se surpreendem porque a gente mesmo não chegou nisso [solução], né?
> **1.8 Márcia:** Eu pensei assim... A questão da regularidade, a questão das incógnitas, para eles fazerem essa relação entre as formas geométricas e as coisas do cotidiano, dos objetos que estão no dia a dia. Essa questão também de identificar que no cálculo, na soma, se a gente trocar [comutar] os termos, o resultado vai ser o mesmo. Então, fazer com que eles pensem, né, que tem uma regularidade nas coisas. Ter a percepção que pode fazer de uma forma, de outra... Fazer com que eles reflitam, né?!
> **1.9 Sandra:** Mostrar aquele número que está faltando, né? Qual é? Esse é o pensamento algébrico, né? Qual a resposta aí? Qual o caminho? Qual o número que está faltando ali? Pensar para saber qual o número que está faltando...
> **1.10 Pesquisador-formador:** Isso que vocês trazem é bem interessante porque remete também ao que vamos ver mais à frente...

A partir desse trecho do diálogo, observamos palavras-chave que destacam a compreensão das professoras acerca da álgebra escolar. Na linha 1.6, Andréia mencionou: “relação de igualdade”, “regularidade”, “sequência”, “capacidade de resolução de problemas” e “problemas do cotidiano”. Já Márcia destacou elementos como “regularidade” e “incógnitas” (linha 1.8). Por sua vez, na linha 1.9, Sandra pontuou a respeito do “número que está faltando”. Além dos conteúdos, as professoras destacaram aspectos relacionados à percepção, identificação e reflexão como parte desse processo de introdução à álgebra.

Conforme Ramos de Almeida (2017), há duas compreensões amplas acerca da álgebra escolar na contemporaneidade. São elas: (i) uma linguagem específica para denotar grandezas, especificamente desconhecidas; e (ii) uma forma particular de pensar sobre as situações matemáticas. Pelos discursos das professoras – “fazer com que eles reflitam” (linha 1.8) e “pensar para saber qual o número que está faltando” (linha 1.9) –, podemos perceber que, de modo geral, as percepções supracitadas estão mais atreladas à segunda compreensão da álgebra escolar proposta por Ramos de Almeida (2017). Entretanto, concordamos com o autor que, mais do que estabelecer uma dicotomia entre essas compreensões, precisamos focar no trabalho com o pensamento algébrico, de modo que os alunos tomem consciência dos objetos algébricos e utilizem as diversas formas de linguagens algébricas para denotar tal pensamento.

Outrossim, um fato importante a ser considerado desse movimento inicial é que, mesmo chegando alguns minutos depois de ter iniciado o processo formativo, Sandra se sentiu confortável para se posicionar e contribuir com as colocações das outras colegas. Como propõe Radford (2021a), nos termos da TO, essa confiança no outro é indispensável para que o trabalho coletivo se desenvolva. A importância do trabalho coletivo na formação de professores também tem sido ressaltada por outras pesquisas, como Romeiro, Moretti e Radford (2024), Almeida *et al.* (2024), Moretti e Radford (2023a), Romeiro (2023), Almeida, Lima, Ramos de Almeida e Martins (2022) e Ramos de Almeida e Martins (2022).

Por fim, Rosália pontuou:

> **1.11 Rosália:** Eu coloquei assim... As regularidades, as formas geométricas, a posição dos números, a sequência, que ele sabe que vai seguir aquela sequência... Aí fui subindo, eu fui para os números desconhecidos, que é inversão das operações e também a igualdade, e também o uso de letras, números, aquele bendito x, aquele bendito y, né? E as várias problemáticas dentro da resolução, que é o desafio.
> **1.12 Pesquisador-formador:** Uma coisa interessante da sua fala, que elas mencionaram, foi sobre o termo desconhecido e você falou "encontrar o valor desconhecido e o valor de x e y". E eu lanço o questionamento: nos anos iniciais será que trabalhamos com x e y? Como trabalhamos? Para refletir...
> **1.13 Sandra:** No finalzinho, lá no quinto ano.
> **1.14 Andréia:** Talvez com figuras, a questão da figura mesmo, é colocar uma figura que lá na frente ele possa entender que representa um x ou y. Mas aí nos anos iniciais vai começar realmente com uma figura.
> [...]
> **1.15 Andréia:** Eu fiz um simulado ontem no quinto ano, aí tinha "x", aparece em uma reta numérica... Na reta numérica já aparece!
> **1.16 Rosália:** Isso!
> **1.17 Sirlene:** Para achar o valor de "y".
> **1.18 Andréia:** É! Reta numérica! Como eu estava fazendo um curso de Matemática para concurso, eu sempre digo para eles [alunos]. "Eu também estudo Matemática e na minha Matemática eu vejo y, vejo y ao quadrado..." E eles "é sério, tia?" "É, é, vocês nem sabem o que espera por vocês...".
> **1.19 Sandra:** É só o início...
> **1.20 Andréia:** É, é...

A partir da observação do excerto supramencionado, destacamos os seguintes termos do discurso de Rosália: "regularidades", "sequência", "números desconhecidos", "inversão das operações", "igualdade", "letras", "x" e "y" (linha 1.11). Nesse cenário, constatamos a percepção das grandezas indeterminadas relacionadas às letras, especificamente x e y. Por sua vez, as professoras exemplificaram com um contexto em que as letras "x" e "y" aparecem na reta numérica (linhas 1.15 e 1.17). Entretanto, estas questões se instauram: o uso de letras implica no trabalho com a álgebra? No estudo introdutório de equações, utilizamos letras para denotar a indeterminação? Tomando como suporte os estudos de Radford (2022a, 2022b, 2021b), trazemos elas à tona adiante.

Por outro lado, começamos a ver, nas linhas 1.15 e 1.18, a preocupação da professora Andréia em trazer seus alunos para dentro da discussão, ou seja, a necessidade de que os pontos levantados no processo formativo sobre o ensino estivessem articulados às possibilidades de aprendizagem estudantil. Essa fala e outras, ao longo da pesquisa-formação, reforçam a posição da TO de que há um processo dialético entre ensinar-aprender (Radford, 2021a).

Ademais, convém ressaltar que, embora o pesquisador-formador tenha entregado uma folha a cada professora, percebemos que não houve uma rigidez para que esse movimento introdutório fosse individual, isolado, haja vista que as professoras expressaram suas ideias em voz alta, trocaram entre elas e contribuíram umas com as outras. Por conseguinte, apresentamos as sínteses desses movimentos iniciais, ilustradas na Figura 12:

Figura 12 – Síntese das compreensões iniciais das professoras acerca da álgebra escolar nos anos iniciais

Fonte: Elaboração própria.

Em suma, salientamos que, quando lançamos as perguntas supracitadas, não esperávamos obter respostas fechadas, prontas e acabadas, uma vez que são indagações complexas, filosóficas e que demandam um aprofundamento epistemológico, por meio de momentos de estudos, leituras, pesquisas, formações etc., para caracterizar e sistematizar tais aspectos. Nesse sentido, as percepções advindas desse momento inicial contribuíram com os movimentos subsequentes, principalmente considerando o repertório histórico-cultural das professoras e as possibilidades de ampliá-los ao longo dos encontros formativos.

Para a ampliação do repertório no que concerne à álgebra escolar, segundo Radford (2021b), um caminho possível é compreender que *o pensamento algébrico não é caracterizado pelo uso do simbolismo alfanumérico*. Apesar de alguns problemas usarem explicitamente as letras para representar as grandezas desconhecidas (incógnitas, parâmetros, variáveis, etc.), o tipo de raciocínio pode não ser analítico, isto é, quando não há nem uma significação às letras e muito menos uma dedução a partir das hipóteses. A exemplo, para resolver a equação 4x + 2 = 2x + 6, é possível atribuir valores conhecidos (1, 2, ...) "x", até concluir que o resultado é 4. Nesse contexto, mesmo trabalhando com o simbolismo alfanumérico, o tipo de raciocínio mobilizado estaria no campo da aritmética, ou seja, haveria a emergência do pensamento aritmético no processo de resolução da equação (Radford, 2022a, 2022b, 2021b). Para o campo da álgebra, discutimos na próxima subseção.

Outro caminho importante, defendido pelo teórico, está relacionado à compreensão de que a *álgebra não é uma aritmética generalizada*. Para Radford (2021b), assim como no estudo de Filloy e Rojano (1989), existem rupturas epistemológicas entre esses campos da matemática. Por sua vez, embora o autor considere que há uma relação entre os pensamentos aritmético e algébrico, como constatamos na subseção adiante, é impossível extrair toda álgebra escolar da aritmética.

Os caminhos supramencionados, além de nortearam as discussões iniciais e finais do processo formativo (episódio 1 e 3), estão permeados em nossas análises quanto às duas atividades formativas que ilustram os encontros com os saberes algébricos por parte das professoras participantes da pesquisa.

6.2 Episódio 2 – Atividades formativas referentes às resoluções de problemas envolvendo o estudo introdutório de equações com simulações interativas digitais

No segundo episódio, apresentamos excertos nos quais as professoras foram convidadas a resolver equações do tipo Ax + B = Cx + D (com incógnitas em ambos os membros da relação de igualdade). No que diz respeito à álgebra inicial, Radford (2022a, 2022b, 2021b) sugere que o trabalho com equações desse tipo pode favorecer a emergência do pensamento algébrico mediante a reconceituação do sinal de igualdade, em uma perspectiva relacional, e das operações envolvendo as grandezas indeterminadas. Em outras palavras, considerando a noção de equivalência em ambos os membros da igualdade, compreende-se que pode operar (adicionar, subtrair, multiplicar e/ou dividir) nos dois lados, inclusive com as incógnitas.

Visando movimentar esses apontamentos ao longo do processo formativo, vivenciamos atividades formativas com relação aos problemas de enunciado envolvendo noções introdutórias de equações. Quanto a esses tipos de problemas, Radford (2022a, 2022b, 2021a, 2021b) acentua a importância da familiarização com a leitura, a interpretação e a tradução do enunciado para outras linguagens que permitam resolver a questão. Sendo assim, organizamos esta seção em duas subseções que ilustram trechos nos quais convidamos as professoras a se encontrarem coletivamente com outra forma histórico-cultural de pensar as equações.

6.2.1 Atividade formativa envolvendo o primeiro problema de enunciado sobre equações

O primeiro problema de enunciado proposto às professoras trata-se da equação que pode ser representada na linguagem alfanumérica da seguinte forma: $2x + 3 = x + 6$. Certamente, como aponta Radford (2021b), na resolução de problemas envolvendo equações desse tipo, os estudantes tendem, inicialmente, a atribuir valores numéricos à indeterminação em cena, utilizando procedimentos de tentativa e erro. No caso da equação apresentada, pode-se determinar, valores para x, por exemplo: $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$, até concluir (ou não) que x seria essa última tentativa. Nesse cenário, não se pensa analiticamente, isto é, por um processo lógico-dedutivo, muito menos trabalha-se com a grandeza indeterminada em primeiro plano. Logo, conforme o autor, mesmo chegando à solução da equação, recorre-se a um raciocínio puramente aritmético quando se utiliza a técnica de tentativa e erro.

Assim, fundamentados na noção de ensino-aprendizagem, proposta na TO, enquanto um processo único, acreditamos que as formas como os alunos aprendem estão intrinsecamente relacionadas às formas como os professores ensinam. E mais, os professores ensinam a partir do repertório de saberes disponíveis histórica e culturalmente na escola ou em outras instituições sociais (Radford, 2021a).

Partindo de estudos anteriores que versam sobre o tema, com foco tanto na aprendizagem estudantil (Radford, 2022a, 2022b, 2021b; Gomes, 2020; Martins, 2023) quanto na aprendizagem docente (Silva, 2024), tínhamos a hipótese de que as professoras recorreriam, inicialmente, aos procedimentos aritméticos. Com isso, planejamos as atividades formativas visando que elas superassem as estratégias aritméticas e assumissem como premissa que poderiam operar com o indeterminado em ambos os lados da igualdade, ou seja, pensassem algebricamente a partir da resolução de problemas sobre equações. Para tanto, trabalhamos em torno do seguinte problema de enunciado:

Quadro 12 – Primeiro problema de enunciado proposto na pesquisa

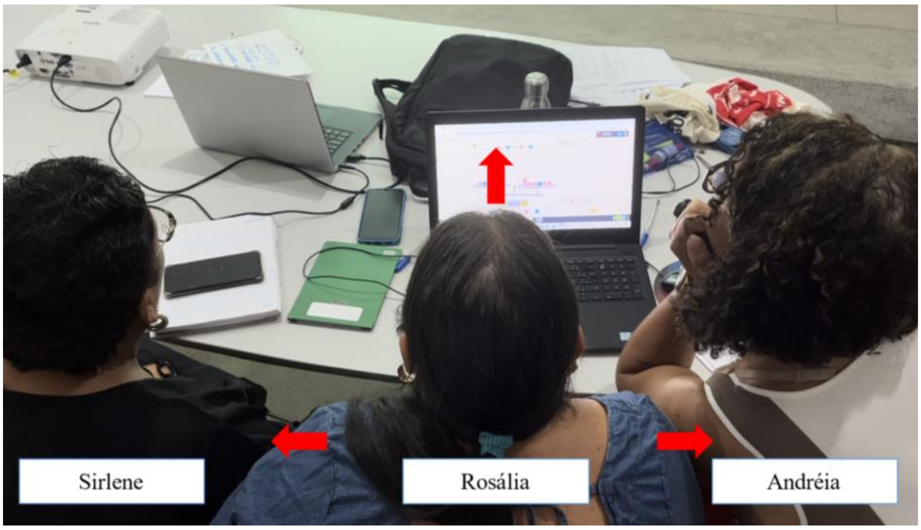
Problema 1: João foi desafiado a descobrir a massa de um cubo azul presente em uma balança de dois pratos equilibrada. No total, há três cubos azuis e nove bolinhas beges (todas com 1g de massa) nessa balança. Ajude João a resolver isso sabendo que tem dois cubos e três bolinhas em um lado, enquanto no outro lado há um cubo e seis bolinhas.

Fonte: Elaboração própria.

O primeiro problema de enunciado envolve uma pessoa (João) que possui esferas beges e cubos azuis. As esferas beges (grandezas conhecidas) possuem 1g cada uma delas. Não se sabe as gramas dos cubos azuis (grandezas desconhecidas). Por sua vez, o problema gira em torno de considerar as grandezas determinadas e indeterminadas presentes em uma balança de dois pratos, de modo que ela esteja equilibrada (igualdade), a fim de simplificar a equação e obter o valor, em gramas, de um cubo azul (a indeterminação).

Antes de adentrarmos explicitamente nas discussões da resolução do problema 1, é indispensável mencionar a disposição física do pequeno grupo analisado. Como ilustrado na Figura 13, Rosália estava na posição central de frente para o notebook, Sirlene a sua esquerda e Andréia a sua direita – manuseando o mouse. Tais posições físicas se mantêm fixas até certo ponto das interações entre as professoras e parecem determinar quais funções elas ocupam dentro das atividades formativas. Mais adiante, retomamos esse ponto e tecemos um panorama geral sobre as relações estabelecidas entre Andréia, Rosália e Sirlene, uma vez que elas foram essenciais para o engajamento coletivo na resolução dos problemas envolvendo equações com o simulador digital.

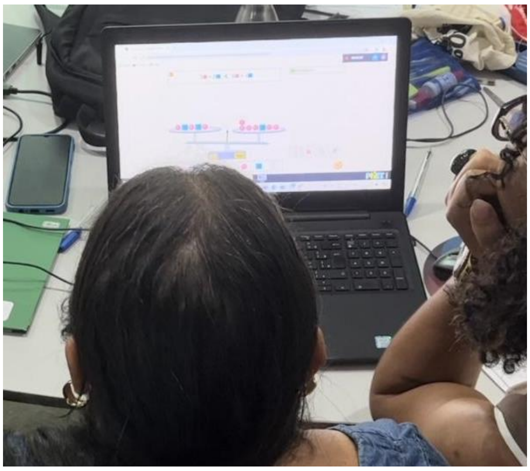
Figura 13 – Disposição física do pequeno grupo



Fonte: Acervo da pesquisa.

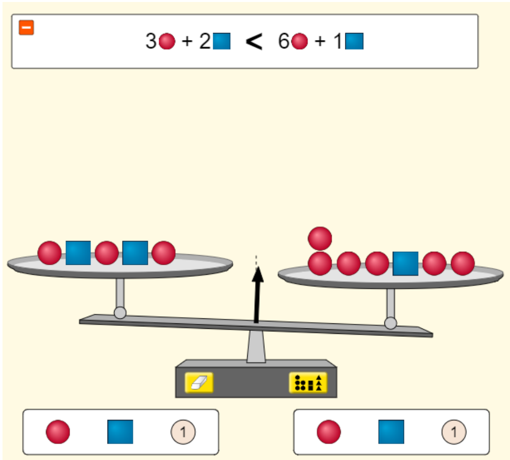
Para resolver o primeiro problema, o pesquisador-formador sugeriu que as professoras explorassem o simulador. Nesse movimento, elas foram lendo o enunciado da questão, interpretando-o e traduzindo-o para o *Explorador da Igualdade: Básico* (linhas 2.1 a 2.4). Logo de início, o pequeno grupo apresentou dificuldades de ordem tecnológica (linhas 2.5 e 2.6). As professoras não conseguiram identificar, no simulador, o que seria a esfera bege com 1g de massa. Nesse caso, elas utilizaram a esfera vermelha, conforme ilustrado nas Figuras 14 e 15:

Figura 14 – Tela do notebook com a primeira simulação proposta na tradução do problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 15 – Print da primeira simulação proposta na tradução do problema 1



Fonte: Elaboração própria a partir do Explorador da Igualdade: Básico.

A partir das Figuras 14 e 15, observamos que, ao simularem o problema, as professoras se depararam com uma desigualdade e com o desequilíbrio da balança de dois pratos, justamente por considerar a esfera vermelha ao invés da esfera bege, em desencontro com as informações do enunciado. Diante desse cenário, o pesquisador-formador as confrontou sobre a percepção da esfera bege no simulador (linha 2.7) e, posteriormente, indicou sua localização. Por conseguinte, as professoras alegaram que associaram a representação da esfera bege no simulador apenas ao numeral 1 (linhas 2.15 e 2.16), como podemos observar neste diálogo:

2.1 Andréia: [...] três bolinhas...
2.2 Rosália: Ali são nove bolinhas beges! Né, não? Não, não, não...
[Andréia retomou a leitura do enunciado em voz alta junto com Rosália.]
2.3 Andréia: Vamos supor que seja bege [a bolinha na simulação apresentada por elas]... Se cada uma tem uma grama, ele quer saber o que?
2.4 Rosália: Tem três cubos e três bolinhas em um lado... Enquanto no outro lado há um cubo e seis bolinhas. E do nada baixou? [Questionando quanto ao desequilíbrio da balança de dois pratos.]
2.5 Andréia: E aqui está maior [apontou para o lado direito da balança], mais pesado, do que esse daqui [apontou para o lado esquerdo da balança]...

> **2.6 Rosália:** Então, ele disse que era menor [apontou para o lado esquerdo da desigualdade] do que o outro [apontou para o lado direito da desigualdade].
> [O pesquisador-formador interveio na discussão.]
> **2.7 Pesquisador-formador:** Nesse caso aí, tem uma questão que a gente precisa identificar. O cubo azul [percebido pelas professoras no simulador] e a esfera... Qual a cor da esfera? O que o problema está dizendo?
> **2.8 Rosália:** Bege. Eu disse bege! Está vendo tu... [tocou em Andréia.] Mas onde é que estão as beges aí? [apontando para o simulador.]
> [O formador apontou para a esfera bege no simulador].
> **2.9 Rosália:** Então devolve as bolinhas aí. [risos.]
> **2.10 Pesquisador-formador:** Vocês estão vendo qual cor aí? [em relação às esferas vermelhas da simulação.]
> **2.11 Rosália:** Vermelho!
> **2.12 Pesquisador-formador:** E essas daqui?
> **2.13 Andréia:** Eu não identifiquei esfera, não... A gente não identificou esfera, a gente identificou...
> **2.14 Rosália:** A cor!
> **2.15 Andréia:** [...] pela cor! E daí esse “1” eu não identifiquei esfera. Você identificou? [apontou para Rosália.]
> **2.16 Rosália:** Não, até então eu achava que era um número qualquer aqui.
> **2.17 Andréia:** Que estava dizendo que era a grama de massa...
> **2.18 Rosália:** Isso... Da esfera.
> **2.19 Pesquisador-formador:** Ah, entendi.
> **2.20 Andréia:** Tu entendesses?
> **2.21 Rosália:** Tira logo para a gente resolver esse negócio bem bonitinho...
> [Andréia seguiu manuseando o mouse e retirando os objetos da balança.]

Como indicam estudos anteriores que utilizaram um artefato cultural de natureza digital – o GeoGebra –, ações envolvendo visualização e experimentação dinâmicas são importantes para observarmos o encontro de (futuros) professores com os saberes matemáticos subjacentes às atividades propostas (Brandemberg; Sánchez; Castillo, 2024; Prieto G; Arredondo, 2021; Gutierrez Araujo, 2020; Prieto G; Arredondo, 2021). Assim sendo, a partir da discussão do pequeno grupo (linhas 2.1 a 2.21) sobre a visualização de determinado objeto do artefato tecnológico digital em tela, ressaltamos que uma das nossas preocupações no planejamento das atividades formativas foi a de não explanar, de imediato, todas as funcionalidades do simulador para as professoras, a fim de que elas explorassem, questionassem e investigassem como o *Explorador da Igualdade: Básico* poderia contribuir ou não para a resolução do problema. Desse modo, a explicitação de determinado aspecto digital foi emergindo mediante o trabalho lado a lado entre as professoras e o pesquisador-formador, levando em conta as especificidades e as necessidades que foram surgindo ao longo das atividades formativas.

Notamos, nesse diálogo inicial, que a percepção equivocada dos objetos do simulador (linhas 2.11, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18), no processo de tradução do enunciado para a simulação, acarretou em uma situação de desequilíbrio na balança e, por conseguinte, em uma sentença de desigualdade (ver Figuras 14 e 15). Nesse cenário, além da tensão entre esfera bege versus esfera vermelha, destacamos a relação dialética entre objetos de saberes matemáticos, como igualdade versus desigualdade e equação versus inequação, por meio da constatação do equilíbrio e desequilíbrio da balança de dois pratos presente no simulador digital. Como propõe a TO, essa perspectiva dialética pressupõe a discussão e a argumentação entre ideias distintas de modo que novos saberes se materializem como síntese (Radford, 2021a).

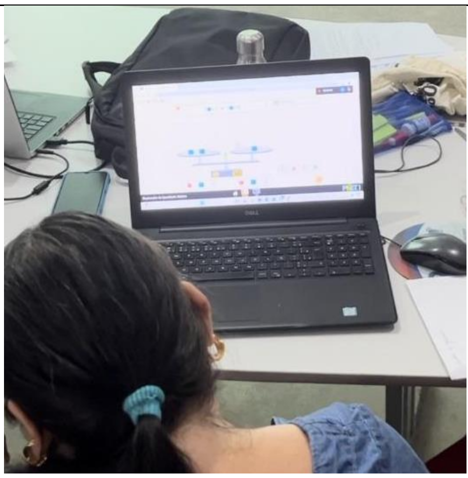
Chamamos a atenção ainda para o fato de que, embora existam algumas críticas quanto à metáfora da balança, a saber: ser um recurso ultrapassado ou a impossibilidade de trabalhar com números inteiros negativos, observamos sua pertinência na compreensão da noção de equivalência da igualdade. Inclusive, muitos estudos, como Lira (2022), Barbosa e Lima (2019) e Araújo (2019), apontam a presença dessa metáfora nos livros didáticos e nos exemplos apresentados por professores nas aulas de Matemática sobre o tema. Além disso, o Currículo de Pernambuco sugere, na habilidade EF06MA14, que tal metáfora seja explorada (ver Quando 1 na seção 1.4).

No contexto desta pesquisa-formação, mediante a tradução do enunciado para o artefato tecnológico digital, as professoras tomaram consciência das suas dificuldades iniciais por meio da dinamicidade da metáfora da balança. Talvez com o uso do lápis e papel ou piloto e quadro, por exemplo, esse equívoco no processo de tradução, bem como outros posteriores no processo de simplificação das equações, não seria tão simples de visualizar estaticamente. Além disso, como qualquer metáfora, a balança de dois pratos possui suas limitações. No entanto, é necessário compreender que estabelecemos uma comparação parcial entre o artefato e o objeto matemático, não assumindo a balança como uma representação das equações em sua totalidade.

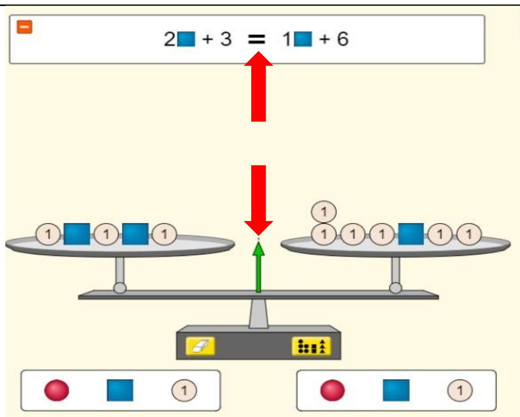
Conforme Radford (2021, p. 85), “O desdobramento afeta, move e transforma o surgimento, e o surgimento afeta, move e transforma o desdobramento”. Com isso, a compreensão do que não é equação, ou seja, da inequação, nos leva à compreensão profunda do que é equação. Segundo Moretti, Panossian e Radford (2018), essa relação dialética entre coisas distintas produz uma entidade híbrida a partir da fusão entre conceito e indivíduo.

Considerando agora a esfera bege do simulador digital, o pequeno grupo, constituído por Andréia, Rosália e Sirlene, traduziu o problema para o artefato tecnológico digital da seguinte forma:

Figura 16 – Tela do notebook com a segunda simulação proposta na tradução do problema 1	**Figura 17 –** Print da segunda simulação proposta na tradução do problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.



Fonte: Elaboração própria a partir do Explorador da Igualdade: Básico.

Como ilustrado nas Figuras 16 e 17, as professoras conseguiram traduzir corretamente a equação, proposta no enunciado do problema 1, para o simulador. Além da percepção da relação de igualdade presente na simulação (ver Figura 17), tal aspecto pode ser constatado pela seta verde (ver Figura 17) que denota o equilíbrio entre os pratos da balança.

A partir dos aspectos indicados na Figura 17, corroboramos com a nossa defesa sobre a relevância da metáfora da balança para a reconceituação do sinal de igualdade, a fim de superar a perspectiva operacional, puramente aritmética, para a perspectiva relacional, conforme defendem os estudos de Radford (2022a; 2022b; 2021b).

A perspectiva operacional refere-se ao trabalho exclusivo com o sinal de "=" como se os termos de um membro fossem o resultado das operações entre os termos do outro membro (Ponte; Branco; Matos, 2010; Cavalcanti, 2008; Kieran, 1981). Adiante, notamos essa perspectiva inicial, por parte das professoras, no processo de resolução da equação proposta no problema 1.

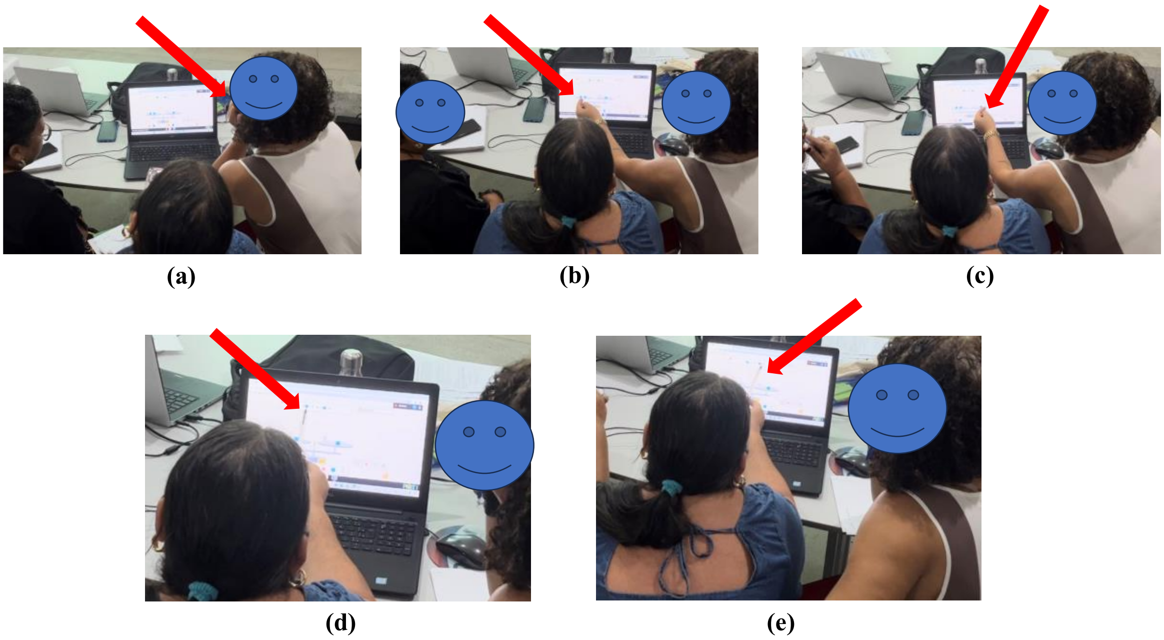
Por outro lado, como apontam Ponte, Branco e Matos (2010), Cavalcanti (2008) e Kieran (1981), a perspectiva relacional compreende o trabalho com o sinal de "=" mediante a noção de equivalência entre os membros da igualdade, isto é, que é possível operar em ambos os lados, sejam com grandezas determinadas ou indeterminadas. Visando se encontrar com essa última forma de pensar sobre problemas envolvendo equações, a discussão entre o pequeno grupo e o pesquisador-formador continua:

2.22 Andréia: Agora sim...
2.23 Professor-formador: Então vocês conseguiram... Vamos ler o problema agora, né?
2.24 Andréia: Hum...
2.25 Pesquisador-formador: Vocês pensaram em quê para simular aí?

2.26 Rosália: A gente seguiu o comando [apontou para o problema projetado no quadro]...
2.27 Professor-formador: O enunciado... O que diz o enunciado?
2.28 Andréia: Todas têm uma grama de massa, então se todas tem uma grama de massa, ele tá dizendo... [retomou a leitura do enunciado e apontou para a projeção no quadro.]
2.29 Andréia: ...dois cubos e três bolinhas de um lado. E a gente colocou dois cubos e três bolinhas [apontou para o lado esquerdo da balança].
2.30 Rosália: Seguiu o comando, bem direitinho...
2.31 Andréia: E no outro lado, há cinco cubos e seis bolinhas. [apontou para o lado direito da balança.]
2.32 Rosália e Andréia: Não, não... Há um cubo e seis bolinhas.
2.33 Sirlene: É!
2.34 Andréia: Aí como todos tem uma grama, né, uma equivalência... [apontou para a balança equilibrada.]
2.35 Pesquisador-formador: Inicialmente, vocês perceberam que quando vocês simularam levando em consideração a bolinha vermelha, a balança tinha ficado desequilibrada...
2.36 Rosália e Andréia: Sim... [balançou a cabeça para cima e para baixo como movimento de concordância.]
2.37 Pesquisador-formador: O que isso significa? Que as massas...
2.38 Andréia: Eram diferentes!
2.39 Pesquisador-formador: Nesse caso aí, as massas do lado direito são equivalentes às [massas] do outro lado.
2.40 Andréia: Sim, sim... [balançou a cabeça como movimento de concordância.]
2.41 Rosália: Certo!
2.42 Pesquisador-formador: Então como é que a gente pode descobrir só a massa de um cubo azul por essa simulação aí?
[Andréia ficou pensativa e depois começou a contar silenciosamente, apontando para o simulador...]
2.43 Andréia: Dois gramas.
2.44 Sirlene: Dois!
2.45 Pesquisador-formador: Dois gramas? Como vocês pensaram?
2.46 Andréia: Eu pensei assim... Eu saí somando... Um, dois, três, quatro, cinco, seis, e um [em referência ao cubo]... Sete! [apontando para o lado direito da balança.] Eu, na minha concepção... Aí aqui tem um, dois, três, com mais dois [cubos equivalentes a dois gramas], sete. [apontando para o lado esquerdo da balança.]
2.47 Rosália: Espera aí, viu... Algo está errado com a minha versão aqui, porque não é sinal de igualdade aqui? [apontou para a relação de igualdade.] Tem que bater para um lado e para o outro. Seis mais um [cubo, equivalente a dois gramas], sete, vamos dizer que seja oito. [apontou para o lado direito da equação]. Três, mais dois [cubos equivalentes a dois gramas], sete o outro [lado]. [apontou para o lado esquerdo equação]. Não está batendo, não... Se for dois.
2.48 Andréia: Mas bate...
2.49 Rosália: Vai dar sete, mulher!
2.50 Andréia: Ah, sim...
[Andréia começou a contar e a conferir.]
2.51 Rosália: Estás entendendo? Aí aqui vai dar oito! Como é que pode?

A partir desse excerto do diálogo, percebemos que, depois de terem sido confrontadas pelo pesquisador-formador a respeito da resolução do problema (linhas 2.25, 2.27, 2.37 e 2.45), Andréia ficou pensativa (ver Figura 18 (a)), sugeriu uma resposta (linha 2.44) e explicou como raciocinou (linha 2.46). Nesse cenário, ao atribuir o valor de dois gramas para o cubo, ela o testou na simulação proposta, mediante a visualização e apontamentos para ambos os membros da balança, como ilustramos na Figura 18 (b) e (c):

Figura 18 – Gestos de apontamentos para o simulador digital que denotam o raciocínio numérico



Fonte: Acervo da pesquisa.

Por sua vez, Rosália confrontou "não é sinal de igualdade aqui?" e testou também o "2" na relação de igualdade (ver Figura 18 (d) e (e)), constatando um erro (linha 2.47). Conjuntamente, Rosália esclareceu a Andréia qual foi o equívoco no processo de resolução: o valor proposto não mantinha uma relação de igualdade, mas sim a desigualdade 7 < 8 (linhas 2.49 e 2.51). Com isso, podemos inferir que, na primeira solução proposta para o problema em discussão, o pequeno grupo se amparou na estratégia de *testar a igualdade por tentativa e erros*. Segundo Araújo (2009), essa técnica, para resolver equações, consiste em substituir valores numéricos na incógnita, transformando as expressões algébricas em expressões numéricas. Ainda assim, não conseguiram obter o resultado.

Na perspectiva de Radford (2022a; 2022b; 2021b), o tipo de pensamento manifestado até então foi o aritmético, haja vista que identificamos a presença do raciocínio numérico acerca da indeterminação (massa de um cubo azul), assim como sua denotação pela linguagem materna – “a massa de um cubo azul” – e apontamento para o ícone do cubo presente no simulador (ver Figura 18 (b) e (d)), mas sem vestígios de pensamento analítico.

Nesse movimento inicial, observamos que o pequeno grupo focou na visualização ora da balança de dois pratos ora da relação de igualdade, articulando uma com a outra. Em análises anteriores, Almeida e Espíndola (2023) já tinham apontado que o diálogo entre esses aspectos do artefato tecnológico digital em jogo contribui para acessar o saber matemático equações. No contexto indicado aqui, constatamos que a articulação entre esses aspectos do simulador digital foi essencial para confrontar uma tentativa de resolução errônea. Além disso, os gestos de apontamento para o simulador digital sinalizam o movimento de pensamento acerca dos saberes em tela (Brandemberg; Sánchez; Castillo, 2024; Prieto G; Arredondo, 2021).

Fundamentados em Radford (2021a), salientamos ainda a importância dos posicionamentos de concordância e discordância ao longo do trabalho coletivo; haja vista que, mediante as relações dialéticas entre argumentos e contra-argumentos, novas sínteses emergem. Nas linhas 2.47 a 2.51, constatamos exatamente isso. A partir do posicionamento de confrontamento por parte de Rosália, Andréia se deu conta que a resposta sugerida estava incorreta e juntas continuaram se engajando na resolução do problema.

Até o momento, as professoras não tinham feito alterações na simulação. Após essa tentativa e erro, elas continuaram a discussão coletiva enquanto o pesquisador-formador estava no outro pequeno grupo. Nos movimentos de discussão do pequeno grupo em cena, as professoras testaram o valor 1 e, novamente, o 2 para a massa do cubo, mas não chegaram na resposta. Além disso, o pequeno grupo encontrou outra equação equivalente: ■ + 6 = ■ + 6. O caso ilustrado recai em um exemplo da propriedade reflexiva da relação igualdade; porém, as professoras não conseguiram concluir o problema justamente porque nessa situação o cubo “parece” assumir qualquer valor.

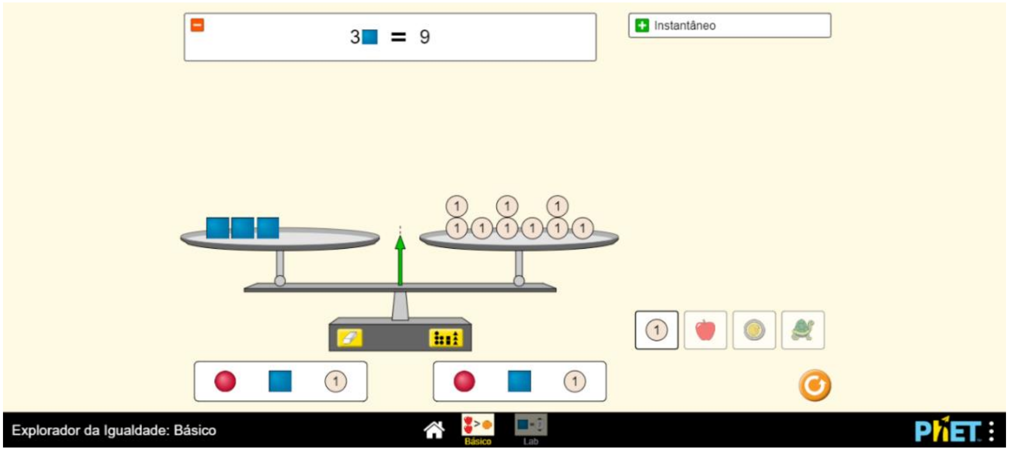
Reiteramos que elas recorreram outra vez à estratégia de *testar a igualdade por tentativa e erros* (Araújo, 2009) nos momentos supracitados. Acreditamos que tal constatação tenha relação com o fato de que, devido ao tempo didático, alguns professores acabam dando preferência ao trabalho envolvendo equações com uma incógnita presente em apenas um membro da igualdade, isto é, do tipo Ax + B = C, conforme assinala o estudo de Barbosa e Lima (2019). E, nesse tipo de equação, introdutoriamente recorre-se ao raciocínio aritmético (Radford, 2022a; 2022b; 2021b; Araújo, 2009; Filloy; Rojano, 1989).

Grosso modo, após gastar energias com o método de tentativa e erro, elas retomaram a equação inicial até que o pequeno grupo começou a trabalhar em torno de outra estratégia no processo de simplificação de equações, como podemos observar neste trecho:

> **2.52 Rosália:** Cada cubo equivale a três... Bota esse cubinho [apontou para o cubo do lado direito da balança] aqui [no lado esquerdo da balança] e essas três [apontou para as esferas do lado esquerdo da balança] para cá [no lado direito da balança].
> **2.53 Pesquisador-formador:** Equivale a que?
> **2.54 Rosália:** Três.
> **2.55 Pesquisador-formador:** Três o que?
> **2.56 Rosália e Andréia:** Três gramas.
> **2.57 Pesquisador-formador:** Como você concluiu isso?
> [Rosália ficou pensativa...]
> **2.58 Rosália:** Eu quis botar essas três danadinhas [esferas beges] aqui e esse [cubo] para cá.
> **2.59 Pesquisador-formador:** Vocês concordam?
> **2.60 Andréia:** Vamos ver!
> **2.61 Sirlene:** A gente tem que mexer mesmo [no simulador] ...

Frente à estratégia, apresentada por Rosália, de isolamento das grandezas indeterminadas em um prato da balança e das grandezas determinadas no outro prato da balança (linhas 2.52 e 2.58), o pesquisador-formador questionou o grupo (linhas 2.53, 2.57 e 2.59) a fim de compreender os argumentos que sustentavam tal proposição. Por conseguinte, as professoras Andréia e Sirlene indicaram a necessidade de simular o que Rosália estava propondo (linhas 2.60 e 2.61). Nesse contexto, Andréia seguiu os comandos de Rosália e juntas chegaram na seguinte simulação:

Figura 19 – Estratégia proposta por Rosália



Fonte: Elaboração própria a partir do Explorador da Igualdade: Básico.

Na Figura 19, podemos perceber que a estratégia de isolamento da incógnita é um caminho recorrente no processo de resolução de equações, como apontam os estudos de Radford (2022a, 2022b, 2021b). No caso proposto por Rosália – passar as três esferas beges para o lado direito e um cubo azul para o lado esquerdo –, o procedimento remete à uma técnica predominante, no Brasil, para resolver equações desse tipo: *transpor termos ou coeficientes*

(Araújo, 2009). Segundo o autor, a técnica de transposição de termos ou coeficientes consiste em transpor o termo ou coeficiente para o outro membro da igualdade com sua operação inversa, amparando-se em propriedades aritméticas. Apesar de ser um estudo antigo, nos deparamos aqui com o emprego bem sucedido dessa estratégia, como discorremos adiante; embora não se trate de um raciocínio algébrico na perspectiva da TO.

De acordo com Radford (2022b), um procedimento algébrico para isolar a incógnita, na equação $2x + 3 = x + 6$, demanda a aplicação de uma operação chave: eliminar objetos equivalentes de ambos os membros da equação. Nesse caso, para resolver, sinteticamente, a equação precisa-se subtrair "x" e "3" em ambos os lados da igualdade e concluir, dedutivamente, que $x = 3$. Entretanto, como a professora Rosália sugeriu uma outra equação equivalente ($3x = 9$), uma operação matemática adicional se fez necessária: separar as grandezas em partes proporcionais. Para Radford (2022b, p. 10), "esta nova operação é precursora do que mais tarde seria conhecido como operação algébrica de divisão. Os matemáticos árabes tinham um termo para essa ideia de separação: al-radd, que significa a diminuição do coeficiente da incógnita para 1".

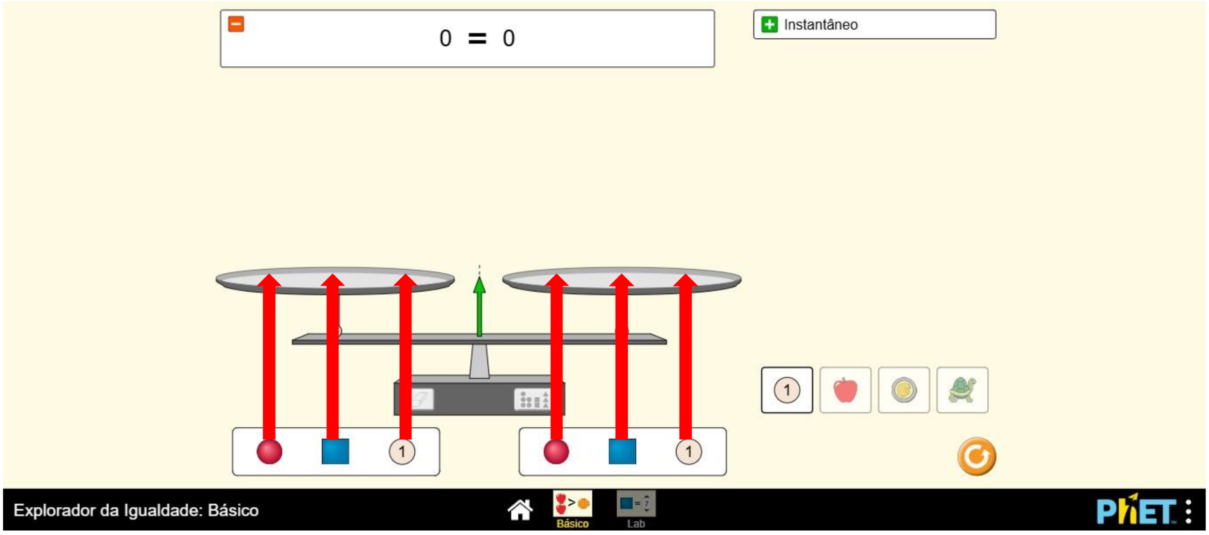
Em continuidade ao diálogo no pequeno grupo, a partir da visualização no simulador (ver Figura 19), as professoras Sirlene e Andréia concordaram com Rosália que a resposta seria três gramas (linhas 2.62 e 2.76).

2.62 Sirlene: Então o valor do cubo é três...
2.63 Rosália: É que só pode mexer entre eles [inserir os objetos dos lados direito e esquerdo nos respectivos lados da balança]. A gente não pode mexer solto [inserir de forma invertida os objetos dos lados direito e esquerdo nos lados da balança]. Não pode ficar mais nem menos. [apontou para o simulador]. Tem que ser seis bolinhas... As seis bolinhas mais três não ficam nove?
2.64 Andréia: Hum.
2.65 Rosália: E apenas dois cubos e mais um cubo. [apontou para o problema no slide projetado no quadro]. Ficam três cubos. [apontou para o simulador].
2.66 Andréia: Nove bolinhas... [apontou para o simulador e começou a contar]. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.
2.67 Rosália: E os primeiros três cubos... Dois cubos mais um cubo?
2.68 Andréia e Rosália: Três!
2.69 Sirlene: Muito bem!
2.70 Rosália: Muito bem! [tocou no ombro das duas colegas].
2.71 Rosália, Sirlene e Andréia: Eh!!!! [todas bateram palmas].
2.72 Sirlene: Será que está certo? Eu acho que está certo!
2.73 Rosália: Se tiver errado, eu não quero nem saber da história, viu?!
2.74 Andréia: Ele quer cada uma [esfera bege] tendo um grama...
2.75 Rosália: Quer dizer que aqui vale três. [apontou para um cubo azul no simulador]. Três, três, três. [apontou para um cubo azul e três esferas beges simultânea e sucessivamente].

2.76 Andréia: Sim! Aí aqui quer dizer que no caso que o cubo tem três gramas...
2.77 Rosália: Isso... A cada três bolinhas beges equivale a um cubo de três gramas.
[...]
2.78 Rosália: Porque ele quer a igualdade de quantidade e de forma.
[...]

Como observamos na linha 2.63, para explicar seu raciocínio, Rosália explicitou uma percepção de uma função do simulador digital. Os objetos do lado direito abaixo da balança podem apenas ser inseridos no respectivo lado da balança. O mesmo acontece para os objetos do lado esquerdo, conforme indicamos na Figura 20:

Figura 20 – Percepção de uma função do simulador digital



Fonte: Elaboração própria a partir do Explorador da Igualdade: Básico.

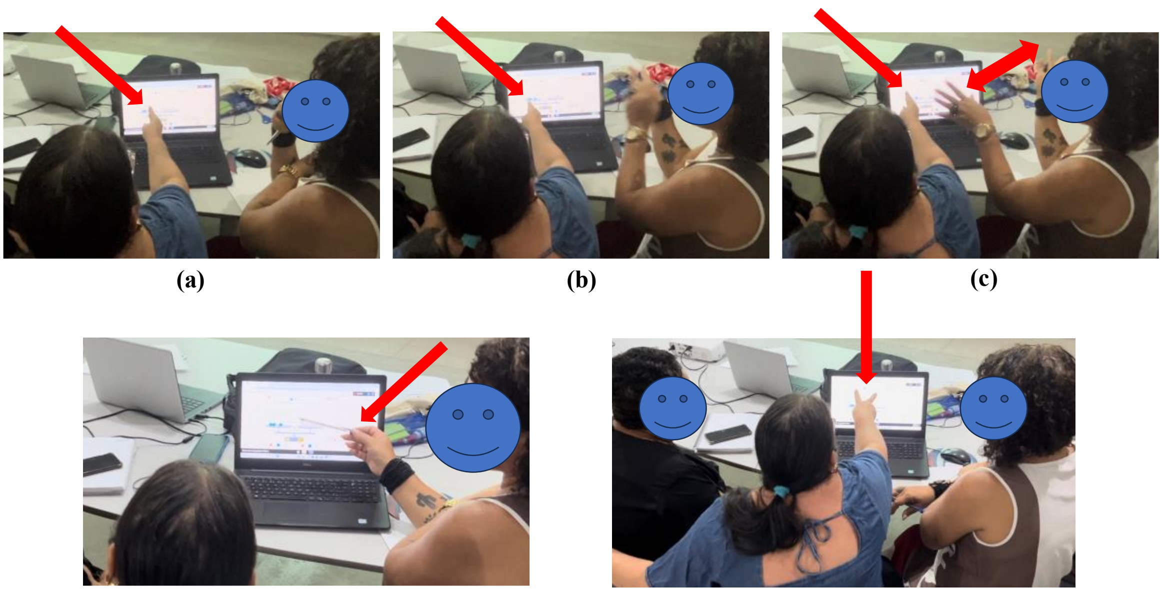
Diante da limitação imposta pela função do simulador ilustrada na Figura 20, inferimos que a professora adaptou a técnica de “passar para o outro lado da equação com a operação inversa” para o contexto do artefato tecnológico digital. Mas será que esse processo de resolução é válido para qualquer problema do tipo Ax + B = Cx + D que pode ser traduzido para o simulador digital em discussão?

Basicamente, o pequeno grupo retirou (subtraiu) e colocou (adicionou) objetos distintos em ambos os pratos (lados) da balança (equação), mas o que garante que as operações matemáticas realizadas são válidas é o fato de esses objetos serem equivalentes: um cubo azul equivale a três esferas beges (x = 3). Essa “coincidência” foi previamente planejada a fim de discutirmos com as professoras que se não houvesse uma equivalência entre os objetos “transpostos”, essa estratégia acarretaria em um desequilíbrio na balança e, portanto, em uma desigualdade.

Nesse ponto de discussão, instauram-se explicitamente duas dimensões do Sistema Semiótico de Significação Cultural (SSC): a natureza do mundo (matemático) e a natureza da verdade (Radford, 2021a). A premissa matemática assumida, quanto ao procedimento de isolamento da incógnita, não é válida para a resolução de qualquer problema no contexto do simulador digital. Com isso, a verdade estabelecida nessa estratégia não é geral e, portanto, não pode ser generalizada.

Para a conclusão do problema, constatamos uma comparação entre os objetos presentes nos lados esquerdo e direito da balança (linha 2.75, ver Figura 21). Nesse cenário, houve a separação (divisão) dos objetos em partes proporcionais em cada prato da balança. Assim, o pequeno grupo concluiu, a partir de premissas, que “três bolinhas beges equivale a um cubo de três gramas” (linha 2.77); porém, não operou com a grandeza desconhecida como se fosse conhecida, apenas trabalhou com o indeterminado em correspondência com a grandeza determinada. Na Figura 21, apresentamos os gestos de apontamento para o simulador digital que denotam as comparações entre os cubos azuis (a, b e c) e esferas beges (d), assim como a certificação de equilíbrio/igualdade entre os lados da balança/equação (c e e):

Figura 21 – Gestos de apontamentos para o simulador digital que denotam o raciocínio proto-analítico



(a) (b) (c)

(d) (e)

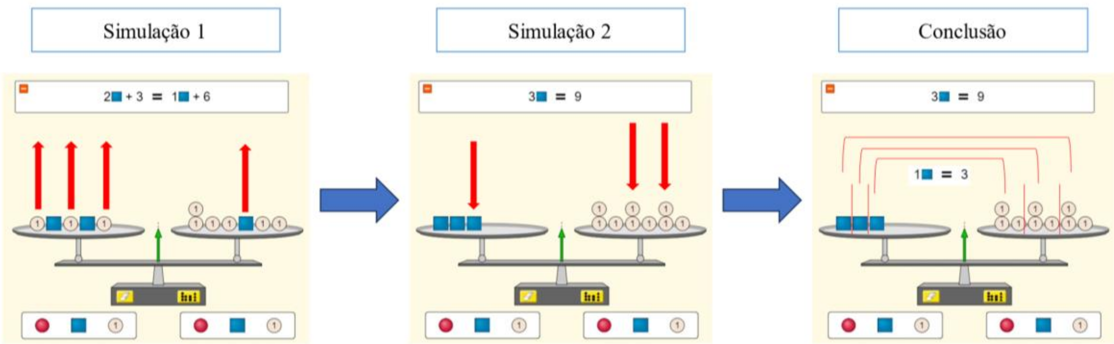
Fonte: Acervo da pesquisa.

Embora não tenha sido nossa finalidade analisar o pensamento proporcional, como nos estudos de Vergel e Léon (2024) e Marques e Ramos de Almeida (2024), observamos que as estratégias de comparação e separação empregadas pelas professoras apresentam indícios de

raciocínio proto-analítico. Conforme Gomes (2020), a proto-analiticidade emerge na resolução de equações quando há uma das características da analiticidade. Assim, em nossa compreensão, houve um **raciocínio lógico-dedutivo**, uma vez que tomaram como verdadeira a ideia de que poderia transpor os objetos e separá-los em partes proporcionais, mas **sem trabalhar com o indeterminado em primeiro plano**.

Na Figura 22, elencamos as simulações ilustrando o movimento de resolução do primeiro problema que o pequeno grupo tinha percorrido até o momento. As setas vermelhas para cima representam as ações de retirada dos objetos, enquanto as retas vermelhas para baixo representam as ações de inserções dos objetos.

Figura 22 – Resolução aritmética do primeiro problema de enunciado no SSI



Fonte: Elaboração própria.

Quando o pesquisador-formador se aproximou do pequeno grupo novamente para acompanhar a discussão, Rosália destacou que elas tiveram dificuldade com a interpretação do enunciado (linha 2.79). Como proposto por Radford (2021a), o reconhecimento das nossas vulnerabilidades diante do outro é fundamental no processo de aprendizagem coletiva, principalmente quando nos sentimos confortáveis para avançarmos em conjunto. Desse modo, o pesquisador-formador acolheu a colocação de Rosália (linha 2.80) e questionou qual o raciocínio que subsidiava a resolução do problema (linhas 2.82 e 2.83).

> **2.79 Rosália:** A gente percebeu um erro de leitura... Essas "nove bolinhas"... A gente achou que três cubos azuis e nove bolinhas todos valiam um grama... A gente errou! Até então, depois da boa leitura, as "nove bolinhas" equivalem cada uma delas a um grama. Quer dizer, não tem nada a ver com o cubo que vale um grama. Entendeu, professor? A gente errou ali... A gente imaginou que o cubo equivale a um grama, ele não vale um grama. Nove bolinhas beges... Está ali entre parênteses: todas com um grama! Erro de leitura. Aí foi quando a gente se atrapalhou também com a nossa balança.
> **2.80 Pesquisador-formador:** Entendi... Interessante esse movimento que vocês fizeram de retomar o problema.

> **2.81 Rosália:** A gente entendeu nossa balança agora, viu? Cada cubinho equivale a três gramas!
> **2.82 Pesquisador-formador:** Certo! Aí como vocês chegaram nessa conclusão? Coloca lá a simulação inicial, para a gente ir trabalhando e entendendo como vocês pensaram.
> [As professoras simularam.]
> **2.83 Pesquisador-formador:** Vocês chegaram na situação que nesse lado [esquerdo] tinha só um cubo e nesse lado [direito] tinha só três esferas beges. Mas como vocês chegaram nessa conclusão?
> **2.84 Rosália:** Transportou três bolinhas beges para o lado esquerdo, né?
> [...]

Ao serem confrontadas pelo pesquisador-formador, Rosália afirmou que "transportou" as esferas beges para o outro lado da balança (linha 2.84), corroborando com a nossa inferência de que elas tinham adaptado a técnica de transposição de termos ou coeficientes para o cenário do simulador digital.

Sem desconsiderar as estratégicas das professoras, ou seja, sem sobrepor a linha de raciocínio delas, o pesquisador-formador seguiu com os questionamentos (linhas 2.85, 2.87, 2.90 e 2.92) a fim de possibilitar ao pequeno grupo se encontrar com outra estratégia de resolução, conforme disposto no diálogo a seguir:

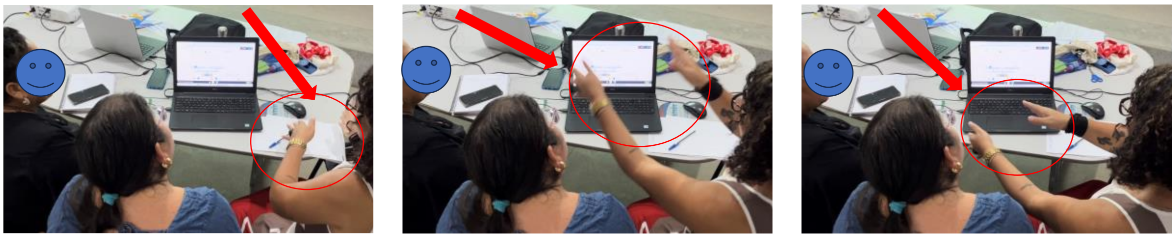
> **2.85 Pesquisador-formador:** Vamos lá... Quando você tirou uma esfera bege daqui, a balança ficou desequilibrada... Por que ela ficou desequilibrada? O que aconteceu com o outro lado?
> **2.86 Rosália:** Ah, tá... Entendi! Com uma massa maior!
> **2.87 Pesquisador-formador:** Se a gente tira de um lado, o que precisamos fazer?
> **2.88 Rosália e Andréia:** Tira do outro!
> **2.89 Rosália:** Ahhh, tem que ir equilibrando até chegar. Bora lá... Tira uma daí, outra dali, uma daí, outra dali...
> **2.90 Pesquisador-formador:** Vocês tiraram o que até aqui?
> **2.91 Andréia:** Quantidades conhecidas... Um grama de um lado, outro grama do outro.
> **2.92 Pesquisador-formador:** Como vocês concluem agora que um cubo é três gramas?
> **2.93 Rosália:** Uma vezes três, três, mais três, seis. Duas vezes três, seis. Ficaria igual...
> **2.94 Andréia:** Tira um [cubo] de um lado e um [cubo] do outro!
> **2.95 Rosália:** Isso! Muito bom!

Segundo Radford (2021a), pensar requer um esforço coletivo no envolvimento da atividade. Desse modo, após depositar energia material, intelectual e emocional, para pensar em estratégias de resolução relativas ao primeiro problema, as professoras foram instigadas pelo pesquisador-formador a continuar se engajando (linha 2.85).

No excerto contendo as linhas 2.85 a 2.95, notamos que, em conjunto com o pesquisador-formador, as professoras sugeriram uma outra forma de resolver (linhas 2.88, 2.89, 2.91, 2.93 e 2.94): retirar as mesmas quantidades conhecidas e desconhecidas em ambos os lados da balança (equação), mantendo o equilíbrio (equivalência). Especificamente, quando questionadas “Se a gente tira de um lado, o que precisamos fazer?” (linha 2.87), as professoras responderam “Tira do outro!” (linha 2.88). Ou seja, assumiram a premissa de que precisariam eliminar objetos iguais em ambos lados e que deveriam manter equações equivalentes entre si até encontrarem a solução, ao afirmarem na linha 2.89 que “tem que ir equilibrando até chegar” e “tira uma daí, outra dali”.

Um passo antes de concluir o problema, quando confrontadas “Como vocês concluem agora que um cubo é três gramas?” (linha 2.92), Rosália sugeriu a substituição de “3” na incógnita “x” da equação $2x = x + 3$ (ver simulação 4, Figura 24) e verbalizou as operações de adição e multiplicação. Por sua vez, na linha 2.94, Andréia afirmou que deveria retirar o cubo de um lado e do outro e Rosália concordou (linha 2.95). Nesse último ponto, observamos indícios de **raciocínio analítico**, uma vez que trabalharam com a grandeza indeterminada como se fosse determinada e assumiram a premissa de que poderiam operar em ambos os lados da balança/equação. Para tanto, o trabalho com o **indeterminado** (a massa do cubo azul) foi **denotado** predominantemente pelo discurso externo (linha 9.94) e também pelos movimentos gestuais que expressam a operação de subtração da incógnita dos lados direito (a) e esquerdo (c), dispostos na Figura 23:

Figura 23 – Gestos que denotam a operação com a indeterminação

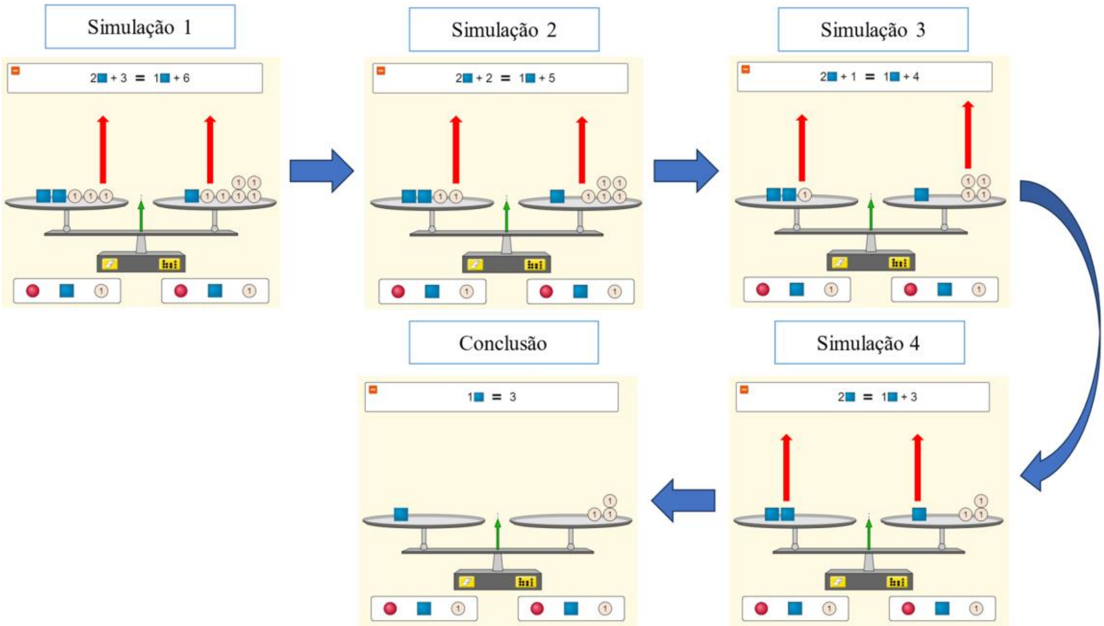


(a) **(b)** **(c)**

Fonte: Acervo da pesquisa.

Para Radford (2021a), o conceito de cognição sensorial compreende uma inter-relação entre mente, corpo e mundo. Na Figura 23 e na linha 2.94, observamos como o entrelaçamento entre a corporeidade e a cultura material e ideacional permitiu conjecturarmos acerca dos indícios de pensamento algébrico. Portanto, ao sofrerem, lutarem e se empenharem juntas com o pesquisador-formador, as professoras foram encontrando prazer e realização na atividade coletiva, além de produzirem conjuntamente uma nova estratégia para resolver o problema proposto, como sintetizada na Figura 24:

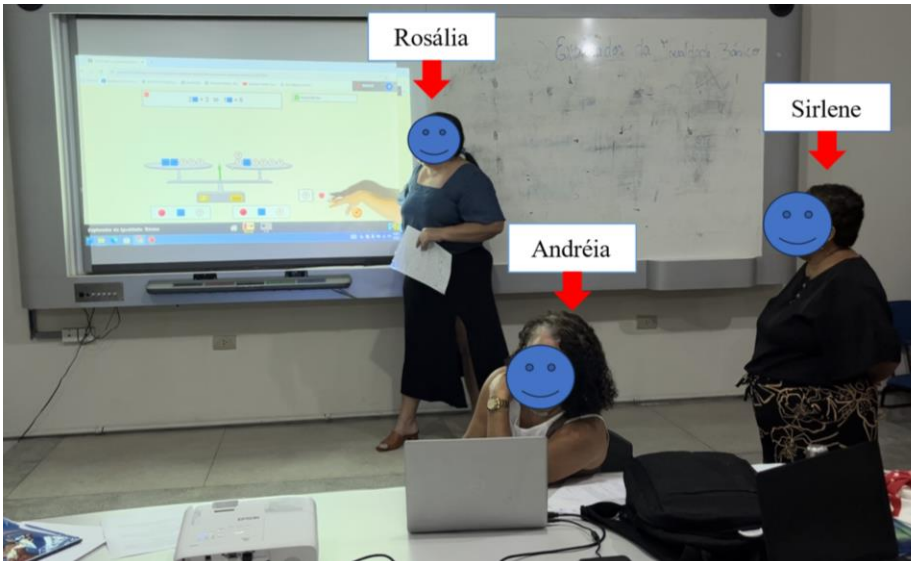
Figura 24 – Resolução algébrica do primeiro problema de enunciado no SSI



Fonte: Elaboração própria.

Em continuidade, no momento de discussão no grande grupo (ver Figura 25), Rosália ficou responsável por explicar a resolução a partir da projeção no quadro, Andréia ficou responsável por manusear o simulador digital e Sirlene ficou apenas observando. Retomando a nossa colocação inicial acerca das interações entre as professoras, a disposição física delas na discussão geral parece ser uma extensão das funções desempenhadas no pequeno grupo. Diante de tal cenário, nos preocupamos com a necessidade de todas estarem engajadas na atividade. Contudo, na perspectiva da TO, as formas de colaboração humana não são impostas, mas sim convidativas (Radford, 2021a). Assim, aguardamos um momento oportuno (na atividade formativa seguinte) para convidarmos as professoras a repensarem seus papéis no trabalho coletivo.

Figura 25 – Disposição física das professoras no momento de discussão geral do primeiro problema de enunciado



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na apresentação para o grande grupo, Rosália discursou como se estivesse explicando para seus alunos, articulando suas interpretações com a leitura direta do problema (linha 2.96). Além disso, ela foi fazendo perguntas para instigar a participação das colegas.

> **2.96 Rosália:** Já vou direto como se eu estivesse em uma sala de aula... Olha, hoje vamos falar de uma balança. Vejam só, tem um problema que a gente vai precisar resolver, é o problema de Joãozinho. [iniciou a leitura]. Joãozinho foi desafiado a descobrir a massa de um cubo azul. Se vocês observarem... Aqui ó, uma balança [apontou para o simulador projetado no quadro]. Aqui em baixo tem um graficozinho, tem cubos e tem bolinhas beges. É o que vai acontecer... Presta atenção! [retomou a leitura]. Presentes em dois pratos equilibrados... Dois pratos equilibrados [apontou para o simulador projetado no quadro e fez o gesto de equilíbrio]. No total, há três cubos azuis e nove bolinhas beges com 1 grama de massa. Quantas bolinhas beges é de um grama? Nove! Presta atenção para a gente não achar que ele também tem três cubos beges. Agora vamos ajudar Joãozinho, tá? [retomou a leitura]. Ajude João a resolver isso sabendo que tem dois cubos e três bolinhas em um lado. Bora lá... Vamos botar os três cubinhos?
> **2.97 Andréia:** Dois! Dois cubos!
> **2.98 Rosália:** Um, dois. Quantas bolinhas agora? Uma, duas, três. Do outro lado? Vamos botar a quantidade de Joãozinho... Um cubo azul e mais seis bolinhas. [contou silenciosamente]. ... três, quatro, cinco, seis.
> **2.99 Rosália:** Agora sim, a problemática! Vamos resolver! Se temos seis bolinhas e um cubo [de um lado] e três bolinhas do outro lado e dois cubos, quanto vale um cubinho desse azul [apontou para o cubo do simulador projetado no quadro]? Como é que a gente vai saber? Ah, tia, vamos fazer várias perguntas... Então vamos lá... Que tal a gente começar a retirar bolinhas, deixar só as bolinhas de um lado [fez um gesto para o lado direito] e os cubos do outro para a quantidade ficar, né? [fez o gesto com os dedos e as mãos]. Igualzinha. Vamos começar? Uma bolinha de um lado...Vamos minha assistente! Uma bolinha de um lado, outra bolinha do outro
> **2.100 Andréia:** Tem que tirar... Né isso? [tomou a iniciativa de tirar três bolinhas do lado direito.]

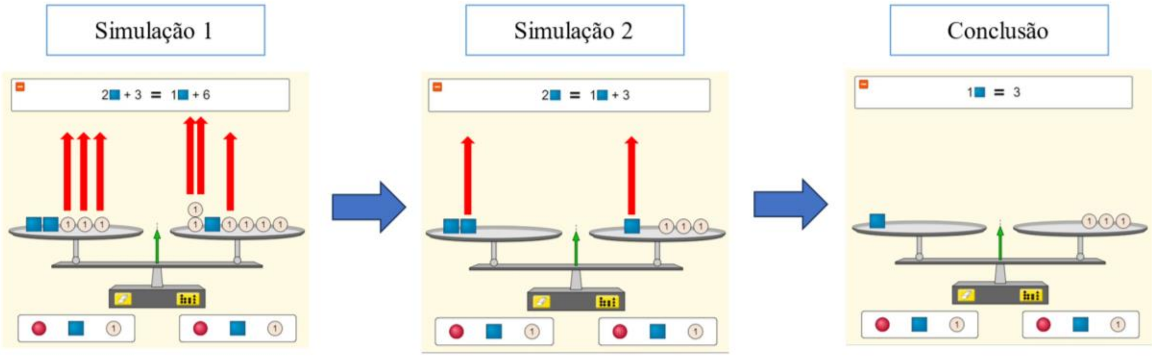
> **2.101 Rosália:** E o outro? Você não vai tirar não?
> **2.102 Sirlene:** Tem que tirar de um lado e do outro as bolinhas!
> **2.103 Rosália:** Vamos lá... Foi assim que a gente fez, professor. [Andréia retirou três bolinhas do lado esquerdo].
> **2.104 Rosália:** Houve alguma diferença entre os dois pratos? Tem um mais pesado e um mais leve? Eu acho que ninguém vai se tocar... Bora lá, pensar... Quanto será que vale esse cubinho azul? Se a gente retirar outro? [apontou para o cubo do lado direito]. Será que a gente vai descobrir? Quer tirar o outro? [Andréia tirou um cubo do lado esquerdo e Rosália apontou para a projeção do simulador no quadro]. E agora? [A balança ficou desequilibrada]. Vamos tirar mais um?
> **2.105 Sirlene:** Desse [deslizou o mouse para o lado esquerdo] ou desse [deslizou o mouse para o lado direito]?
> **2.106 Rosália:** Desse! [apontou para o lado esquerdo da balança]. E aí? Ah, veio a surpresa! Um, dois, três gramas equivalem ao nosso cubinho azulzinho. Quantas graminhas? Três! Então, um cubinho desse vale quantas gramas? Três! Vocês entenderam?

Como podemos observar do trecho contendo as linhas 2.96 a 106, houve uma leitura dinâmica, por meio de perguntas e colocações de cunho interpretativo do enunciado, para engajar o outro pequeno grupo. No que tange à organização social, a forma de apresentação da resolução do problema permitiu uma maior interação entre as professoras. Entretanto, ainda sentíamos a necessidade de que o pequeno grupo repensasse as posições assumidas até o momento, a fim de reconhecer as vozes uma da outra (Radford, 2021a). Retomamos essa discussão na resolução do segundo problema.

Do ponto de vista da dimensão matemática, um fato interessante no diálogo supracitado foi o movimento que Andréia fez ao retirar três esferas beges de um lado (linha 2.100) e três esferas beges do outro (linha 2.103). Aqui o pequeno grupo refinou a reconceitualização da operação em ambos os lados da balança/equação, deixando de subtrair apenas de um por um e retirando todas grandezas determinadas de cada membro.

Ademais, observamos a preocupação de Rosália e Sirlene de que o equilíbrio da balança (a equivalência da equação) se mantivesse, quando ponderaram que: “Tem que tirar de um lado e do outro as bolinhas” e “Houve alguma diferença entre os dois pratos? Tem um mais pesado e um mais leve?” (linha 2.104). Em outras palavras, à medida que as professoras foram se encontrando com novas estratégias de resolver o problema 1, as estratégias de resolução foram se refinando e podem ser sintetizadas na Figura 26:

Figura 26 – Resolução algébrica apresentada na discussão geral do primeiro problema



Fonte: Elaboração própria.

Assim como na discussão no pequeno grupo, na apresentação não observamos argumentações explícitas de que poderiam operar com o indeterminado em primeiro plano, apenas refinaram a estratégia, revelando indícios de pensamento algébrico. Segundo Radford (2021a), o processo de tomada de consciência não é linear, ele pressupõe tensões e contradições. Assim, é esperado que em um primeiro encontro com as estratégias algébricas trabalhadas na resolução de equações, os professores apresentem **indícios** de raciocínio analítico e não ele propriamente dito. Isso porque para que o discurso externo se torne cada vez mais consistente, refinado e robusto, precisa-se de novos encontros, já que a aprendizagem, na perspectiva da TO, é compreendida a partir de transformações contínuas.

Além da apresentação da resolução do problema, a professora Andréia levou para o grande grupo as preocupações delas em articular as vivências no processo formativo com outras possibilidades para a prática profissional docente (linhas 2.107 e 2.109). Este excerto permite percebermos uma síntese dos movimentos delas ao longo da atividade:

> **2.107 Andréia:** Mas para que a gente chegasse aí [apontou para a projeção], a gente também pensou em outras possibilidades, né?
> **2.108 Rosália:** Foi! [balançou a cabeça com uma expressão de concordância].
> **2.109 Andréia:** Outras possibilidades, por exemplo, de usar os próprios alunos para eles entenderem essa questão de igualdade [fez gesto com as mãos]. Para saber que para eu ter aquela mesma quantidade de um lado [apontou para o lado esquerdo] eu preciso ter a mesma quantidade do outro lado [apontou para o lado direito]. Então, para que eles perceberem isso, a gente pode utilizar eles como um exemplo. Eu posso pegar dois... [apontou para o lado direito]. E botar uma igualdade [apontou para si] e lá no outro lado eu tenho um [apontou para o lado esquerdo]. E para ficar igual? Eu faço o que? Eu tiro. [apontou para o lado esquerdo]. Então se eu for tirar, ele vai perceber que para um lado ficar igual ao outro, eu vou ter que tirar ou acrescentar. Vai depender de como vai ser envolvido isso, né? E a gente colocou isso, né?! Para eles perceberem isso, a gente vai ter que levar objetos, porque a gente sabe que eles vão ter coisas concretas. Dessa mesma forma que ela explicou. [apontou para a projeção no quadro]. Para eles percebem que o azul vai ter a mesma quantidade... Ali o azul só tem um [apontou para

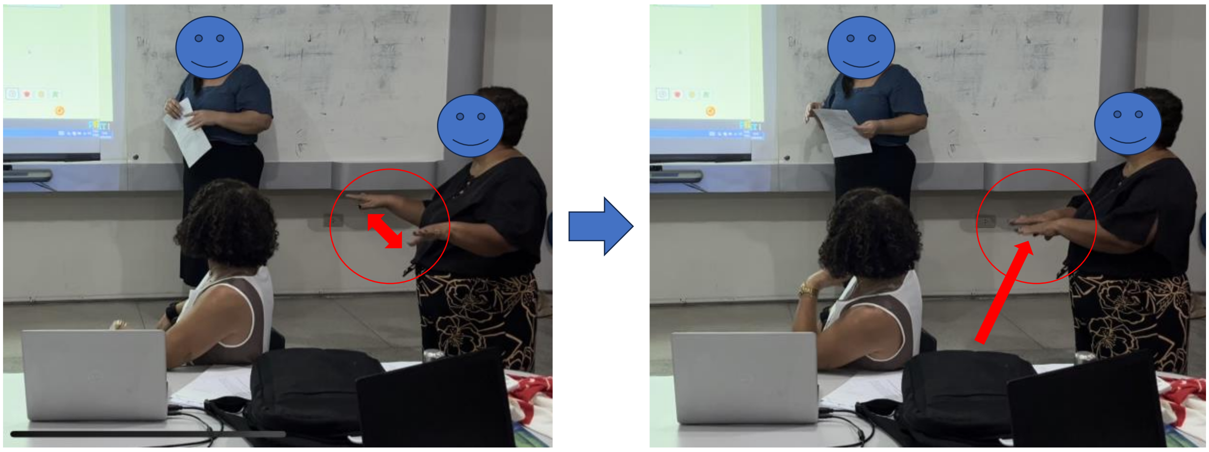
> a projeção no lado esquerdo], mas ali ele vai estar três [apontou para a projeção no lado esquerdo]. A gente sabe que a massa daquele ali [apontou] equivale a três se ele for igual aquele dali [apontou]. Então, para ele perceber isso, ele vai ter que entender que vai ter essa relação de tirar e colocar.
> **2.110 Sirlene:** ...da igualdade! [fez o gesto com as mãos].
> **2.111 Andréia:** Exatamente!

A partir do discurso de Andréia na linha 1.109, chamamos a atenção para a importância que o Sistema Semiótico Concreto (SSC) possui para a etapa de escolarização dos anos iniciais do Ensino Fundamental, principalmente quando ela afirmou: “Para eles perceberem isso, a gente vai ter que levar objetos, porque a gente sabe que eles vão ter coisas concretas”. Apesar de termos dado ênfase ao trabalho no Sistema Semiótico Icônico (SSI) com o artefato tecnológico digital em cena, salientamos que ele possui uma forte relação com o SSC por simular um artefato cultural muito utilizado nos estudos da álgebra inicial: a balança de dois pratos física. Além disso, outros artefatos culturais concretos podem ser utilizados no estudo introdutório das equações, como apontam as pesquisas de Silva (2024), Martins (2023) e Radford (2022a, 2022b, 2021b).

Outro ponto de observação, exemplificado nesse trecho (linhas 2.107 a 2.111), foi que as professoras estabeleceram, ao longo do processo formativo, conexões com a sala de aula, revelando uma preocupação em aprender para ensinar aos alunos. Nesse sentido, salientamos que a formação de professores, na perspectiva da TO, precisa movimentar o *ensino-aprendizagem* como substantivo composto; haja vista que, embora professores e alunos desempenhem papéis distintos em sala de aula, engajam-se em uma mesma atividade, no trabalho lado a lado entre professores-alunos (Radford, 2021a).

Como parte desse diálogo (linhas 2.107 a 2.111), notamos ainda que, embora Sirlene tenha ficado mais quieta ao longo da discussão geral, ela mobilizou outros elementos não discursivos, como o movimento com as mãos: abrindo (a) e fechando (b) na horizontal para denotar a igualdade (linha 2.110, ver Figura 27). Conforme Radford (2021a), o pensamento também se materializa no corpo. Aqui fica explícita a relevância da abordagem de análise multimodal, haja vista que, por intermédio de outros meios semióticos, como os gestos e movimentos, percebemos que Sirlene estava acompanhando a discussão no pequeno grupo.

Figura 27 – Movimento com as mãos para denotar a igualdade

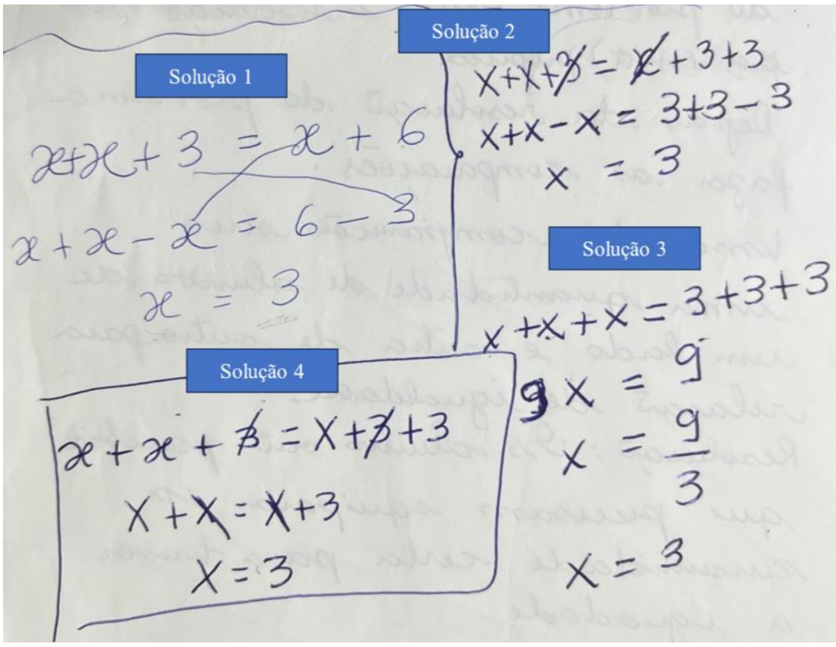


(a) (b)

Fonte: Acervo da pesquisa.

Discutimos até aqui questões relacionadas às resoluções do problema 1 no Sistema Semiótico Icônico (SSI) (Radford, 2021b). Embora não seja previsto, nos currículos prescritos, o trabalho com a linguagem alfanumérica nos anos iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 2018; Pernambuco, 2019), outros movimentos emergiram na atividade coletiva no que tange ao Sistema Semiótico Alfanumérico (SSA). Nesse cenário, buscamos tensionar com as professoras as linguagens que condizem com cada etapa de escolarização dos alunos, assim como a função desempenhada pelos artefatos – sejam tecnológicos digitais ou analógicos – no processo de resolução de problemas. Por sua vez, o pequeno grupo apresentou as seguintes soluções ilustradas na Figura 28:

Figura 28 – Resoluções aritmética e algébrica do problema 1 no SSA



Fonte: Acervo da pesquisa.

Assim como no SSI, os debates propostos no SSA foram longos. De modo geral, percebemos que, com a mudança de sistema semiótico, as professoras recorreram à estratégia de transposição de termos (ver soluções 1, 2 e 3 na Figura 28) mesmo depois de terem se encontrando com uma nova estratégia: a neutralização de termos ou coeficientes (ver solução 4 na Figura 28).

Novamente, a partir do trabalho ombro a ombro com o pesquisador-formador, as professoras conseguiram se encontrar com a estratégia de neutralizar os termos ou coeficientes no SSA. A respeito disso, argumentamos, com base em Radford (2021a), que a memória cultural de estratégias mobilizadas na resolução de problemas anteriores faz parte do movimento histórico do pensamento. Entretanto, é essencial que as atividades formativas contribuam para a ampliação do repertório histórico-cultural das professoras. Nesse ponto, deixamos em aberto para investigações futuras se debruçarem sobre as implicações que as mudanças de sistemas semióticos podem trazer para a emergência do pensamento algébrico.

Mediante o exposto, como síntese das análises envolvendo a atividade formativa referente ao problema 1, apresentamos o Quadro 13:

Quadro 13 – Síntese dos indícios de pensamento algébrico que emergiram na atividade formativa envolvendo o primeiro problema de enunciado

Meios semióticos de objetivação	Vetores do pensamento algébrico	Síntese das análises

Gestos com as mãos que remetem às noções de equilíbrio e de igualdade; Apontamentos com os dedos para indicar e contar as grandezas determinadas e indeterminadas; Gestos com as mãos que remetem ao movimento de retirar e separar (operações de subtração e divisão); Mão no queixo como expressão de pensativa; Discurso externo para socializar, argumentar e fundamentar o raciocínio; etc.	Indeterminação	• “Massa do cubo azul” (linguagem natural) • “” (linguagem icônica) • “x” (linguagem simbólica)
	Denotação	• O indeterminado foi traduzido do enunciado do problema em linguagem natural, para o simulador no Sistema Semiótico Icônico. • O indeterminado foi expresso no papel por meio da linguagem simbólica, a fim de apresentarem a resolução do problema no Sistema Semiótico Alfanumérico.
	Analiticidade	• Retiraram “”, de um por um, em ambos os lados da balança até concluírem que = 3g. • Retiraram três esferas beges e um cubos azuis em ambos os lados da balança até concluírem que = 3g. Em suma, resolveram por um processo lógico-dedutivo, ou seja, houve uma reconceituação acerca do sinal de igualdade em uma perspectiva relacional, assim como trabalharam com a indeterminação como se fosse determinada.

Fonte: Elaboração própria.

Grosso modo, notamos que, inicialmente, as professoras não estavam conseguindo alcançar o objeto da atividade formativa. Depois do trabalho ombro a ombro com pesquisador-formador, observamos a presença de nós *semióticos* nos segmentos da atividade formativa (a exemplo, ver linhas 2.108 a 2.118 e Figuras 23, 27 e 28) cujas professoras começaram a manifestar suas interpretações e mobilizar meios semióticos de diferentes naturezas (simulação interativa, falas, gestos etc.) para materializar o pensamento algébrico.

6.2.2 Atividade formativa envolvendo o segundo problema de enunciado sobre equações

O segundo problema de enunciado apresentado às professoras refere-se à equação que pode ser denotada na linguagem alfanumérica desta forma: $3x + 1 = x + 5$. Ao mobilizar o raciocínio analítico (Radford 2022a, 2022b, 2021b), pode-se subtrair “x” e “1” e depois dividir por “2” os termos e coeficientes em ambos os membros da igualdade, concluindo, por um processo lógico-dedutivo, que $x = 2$. Certamente, como as professoras gastaram energia na resolução do problema anterior, superando, no trabalho coletivo com o pesquisador-formador, as estratégias aritméticas e revelando indícios de pensamento algébrico, no final da discussão, a resolução deste problema se deu por um processo mais sintético.

Vimos na subseção anterior que o fato de Rosália ter sugerido uma equação (3x = 9) equivalente à equação inicial (2x + 1 = x + 3) permitiu que as professoras trabalhassem em torno de uma operação matemática: “separar” os cubos azuis e as esferas beges em partes proporcionais. Ou seja, para cada cubo azul, havia três esferas beges e, logo, x = 3. Essa operação também é conhecida, em outros contextos de resolução de equações, como divisão (Radford, 2022b). Apesar de termos planejado que a estratégia de separação do termo independente pelo coeficiente da incógnita seria introduzida na resolução do segundo problema, acreditamos que o encontro prévio com esse saber algébrico foi indispensável para o andamento da atividade formativa analisada nesta subseção.

Para vivência desta atividade formativa, apresentamos o seguinte problema:

Quadro 14 – Segundo problema de enunciado proposto na pesquisa

Problema 2: Ana, Maria e Fernanda foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrada. Sabendo que, em um prato da balança, há três esferas vermelhas e uma esfera bege e, no outro prato da balança, há uma esfera vermelha e cinco esferas beges, qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas? Considere a esfera bege com 1g de massa.

Fonte: Elaboração própria.

O segundo problema de enunciado envolve pessoas (Ana, Maria e Fernanda) que possuem esferas beges e vermelhas. As esferas beges (grandezas determinadas) têm 1g cada uma delas. Não se sabe as gramas das esferas vermelhas (grandezas indeterminadas). Por conseguinte, o problema gira em torno das grandezas, conhecidas e desconhecidas, presentes na balança de dois pratos de modo que ela esteja equilibrada (igualdade), visando reduzir a equação e encontrar o valor da grama de uma esfera vermelha (a indeterminação).

A seguir, acompanhamos a discussão do pequeno grupo na tradução do problema para o simulador digital:

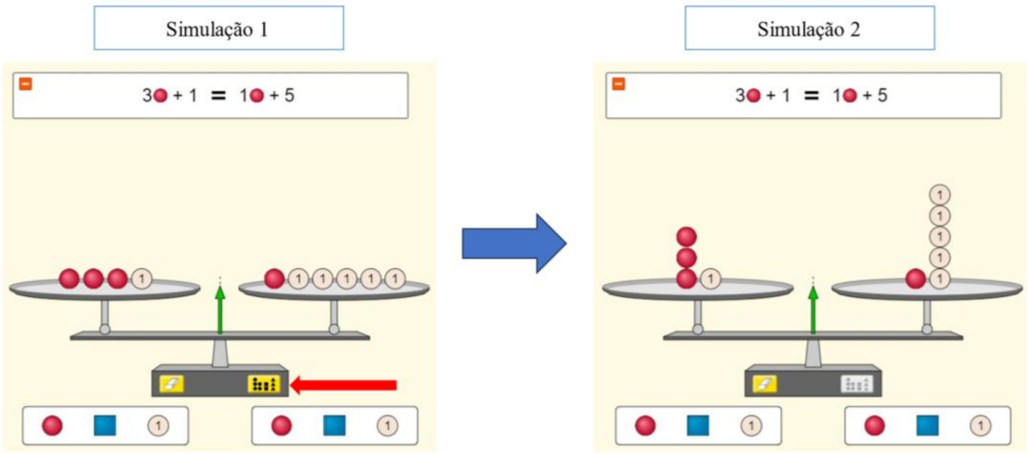
> **2.112 Rosália:** Vamos...
> **2.113 Andréia:** Vamos lá!
> **2.114 Rosália:** Espero que esse [o problema 2] seja mais fácil!
> **2.115 Andréia:** [iniciou a leitura do enunciado]. Ana, Maria e Fernanda foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrada. Sabendo que em um prato há três esferas vermelhas... [começou a simular o problema]. Um, dois, três. [retomou a leitura]. E uma esfera bege.

2.116 Andréia e Rosália: Okay!
2.118 Andréia: E no outro lado da balança, há uma esfera vermelha...
2.119 Rosália: Certo!
2.120 Andréia: E cinco bolinhas beges. [começou a simular o problema]. Um, dois, três, quatro, cinco. Okay, né?! Vamos fazer aquela coisa [utilizou a função de empilhamento] que elas [as professoras do outro grupo] botaram, né?
2.121 Rosália: Isso!

De acordo com Radford (2021a), ao desempenhar uma tarefa, nem sempre os indivíduos percebem o objeto de saber da atividade, ou seja, não existe uma linearidade no movimento de consciência. Mas, como podemos notar no diálogo supracitado (linhas 2.112 a 2.121), as professoras não tiveram dificuldades em traduzir o segundo problema, em linguagem natural, para o simulador digital. Em outras palavras, elas foram diretamente ao objeto da tarefa: pensar algebricamente sobre o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais.

Nesse processo de resolução da equação, as professoras utilizaram uma função do artefato tecnológico digital para empilhar, separadamente, as esferas vermelhas e as esferas beges. Em outros termos, elas organizaram as grandezas determinadas e indeterminadas para auxiliar na visualização. Na Figura 29, ilustramos tal movimento:

Figura 29 – Empilhamento das grandezas determinadas e indeterminadas



Fonte: Elaboração própria.

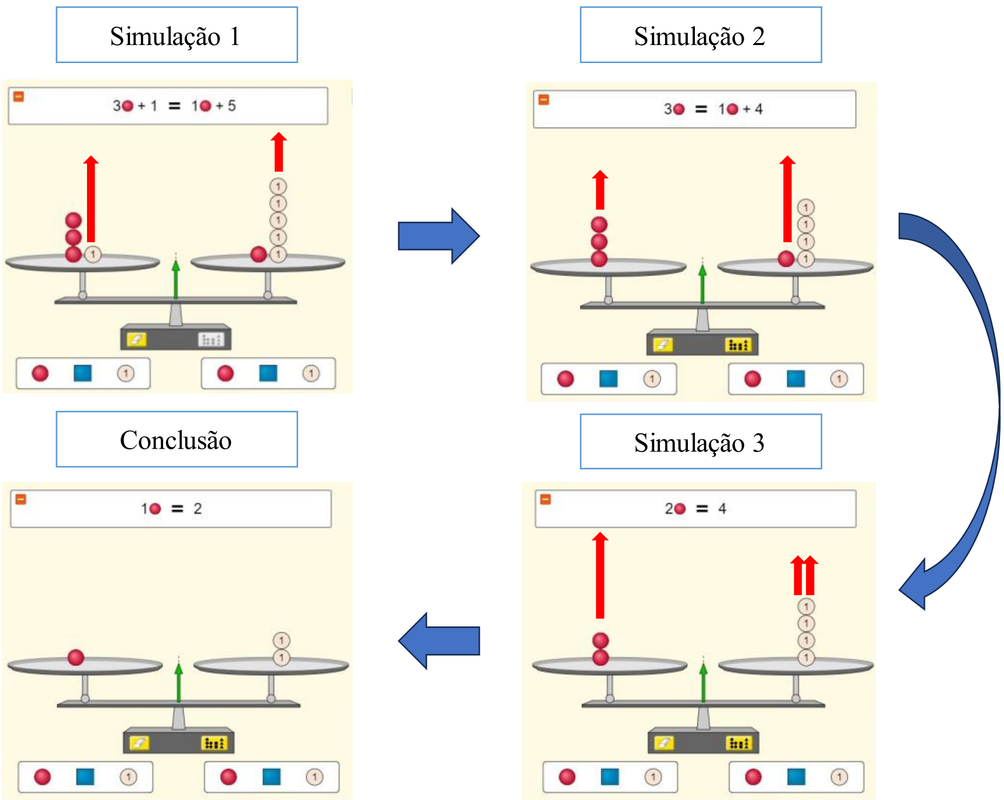
Acreditamos que a decisão de as professoras empilharem as grandezas determinadas e indeterminadas contribuiu para a reorganização do pensamento, tornando mais sintética a denotação da equação. Aqui elas passam a visualizar a equação, no SSI, não apenas como "x + x + x + 1 = x + 1 + 1 + 1 + 1 + 1", mas também como "3x + 1 = x + 5". Segundo Radford (2022b), "o que antes exigia muitas palavras e ações é reorganizado e contraído". Assim, percebemos, a partir dessa ação, que as professoras começaram a se esforçar para filtrar o necessário do desnecessário, bem como refinar suas atividades semióticas. O que vem a se configurar, posteriormente, uma contração semiótica (Radford, 2022b, 2021a), como podemos acompanhar na discussão a seguir:

> **2.122 Andréia:** Então, qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas? Considere a esfera bege com...
> **2.123 Rosália:** Um grama de massa!
> **2.124 Andréia:** Aí aqui já mudou, né?! Porque veja...
> **2.125 Rosália:** Eu gosto sempre de olhar para aqui [apontou para a relação de igualdade na simulação]. Você sempre tem que equilibrar ambos os lados... Porque se aqui [lado direito] já é cinco mais um, seis, três mais um, quatro... [ficou pensativa silenciosamente.]
> **2.126 Andréia:** Ela [a questão] quer saber o valor da esfera vermelha.
> **2.127 Rosália:** Certo!
> **2.128 Andréia:** Aí veja... Está equilibrada, não está equilibrada?
> **2.129 Rosália:** Está...
> **2.130 Sirlene:** Então vamos tirar de um lado e do outro.
> **2.131 Andréia:** E não podemos fazer como uma proporção?
> **2.132 Rosália:** É...
> **2.133 Andréia:** Então veja bem... Aqui...
> **2.134 Rosália:** Vai tirando!
> **2.135 Andréia:** Vou tirar então! Se eu tirar uma daqui... Vamos tirar as esferas vermelhas?
> **2.136 Rosália:** Não! Vamos tirar logo as esferas [beges]?
> **2.137 Sirlene:** Uma aqui e uma lá, né?
> **2.138 Andréia:** Se eu tirar aqui [direita] e uma aqui [esquerda], aí vai ficar três esferas [vermelhas] igual a...
> **2.139 Rosália e Andréia:** Certo!
> **2.140 Andréia:** Aí se eu tirar uma esfera [vermelha] daqui [esquerda] e uma daqui [direita]...
> **2.141 Rosália:** Cada uma [esfera vermelha] vale dois gramas!
> [Andréia retirou duas esferas beges do lado direito e uma esfera vermelha do outro esquerdo.]

A partir do discurso de Rosália (linha 2.125), percebemos que, na visualização da simulação, ela direcionou inicialmente o seu olhar para a relação de igualdade, enquanto Andréia focou no equilíbrio da balança de dois pratos (linha 2.128). Nesse cenário, Sirlene sugeriu operar em ambos os lados (linha 2.130) e Andréia perguntou se poderia iniciar pela subtração da incógnita em ambos os lados da equação (linha 2.135). Esse engajamento coletivo “se trata de um encontro que oferece a possibilidade de entrar em contato com outras vozes e perspectivas, não para benefício pessoal, mas para a criação de uma obra (uma ideia) comum” (Radford, 2021b, p. 192).

No excerto do diálogo contendo as linhas 2.122 a 2.141, observamos indícios de pensamento algébrico na resolução da equação. A **indeterminação** foi **denotada** por meio do discurso externo e do simulador, respectivamente, em linguagem corrente “massa da esfera vermelha" (linha 2.122) e no SSI. Por sua vez, quando assumiram a premissa de "tirar de um lado e do outro" quantidades iguais (linha 2.130), as professoras eliminaram uma esfera bege (linha 2.138) e uma esfera vermelha (linha 2.140) de cada prato da balança, obtendo dedutivamente que duas esferas vermelhas equivaliam a quatro esferas beges. Por sua vez, elas concluíram que uma esfera vermelha equivalia a duas beges (linha 2.141). Ao observarmos que o pequeno grupo **operou com o indeterminado** considerando a equivalência em ambos os lados, inferimos a presença da **analiticidade** e, consequentemente, que o **pensamento algébrico** emergiu. Ilustramos esse movimento na Figura 30:

Figura 30 – Resolução algébrica do segundo problema de enunciado no SSI



Fonte: Elaboração própria.

Na resolução ilustrada na Figura 30, um ponto que nos intrigou foi a passagem da equação "2x = 4" (simulação 3) para "x = 2" (conclusão). Diferentemente da simplificação da equação "3x + 1 = x + 5" (simulação 2) para "2x = 4" (simulação 3), a qual deixou evidente o tipo de raciocínio emergente nos discursos externos supramencionados (linhas 2.138 e 2.140), não ficou claro como o pequeno grupo pensou para chegar na conclusão. Embora Andréia tenha simulado a resposta final apresentada por Rosália, houve uma predominância do cultivo ao discurso interno de modo que não conseguimos compreender a estratégia final utilizada.

Conforme Radford (2021a), não acessamos os aspectos ideacionais do pensamento sem o amparo de aspectos materiais, isto é, meios semióticos de objetivação. Frente a esse impasse, para refinarmos nossa inferência, analisamos a discussão entre o pesquisador-formador e as professoras.

> **2.142 Pesquisador-formador:** Como vocês pensaram? Agora eu quero saber...
> **2.143 Rosália:** É... Andréia foi tirando as bolinhas aí...
> **2.144 Sirlene:** Andréia foi retirando...
> [O pesquisador retomou um comentário sobre a resolução de problemas.]
> **2.145 Pesquisador-formador:** Uma coisa que não mencionei [na discussão geral do problema 1] é a questão da interpretação do problema. A gente precisa ler o enunciado, perceber a estrutura... Muitas vezes o aluno memoriza a forma que está escrita e já vai procurando os dados. Mas a gente precisa trabalhar, além do cálculo matemático, essa questão da interpretação mesmo...
> **2.146 Sirlene:** É!
> **2.147 Rosália e Andréia:** Isso!

No trecho acima, o pesquisador-formador questionou as professoras como elas tinham pensado. Mas, antes de iniciar propriamente a discussão da resolução do problema 2, ele fez uma colocação referente ao processo de interpretação do enunciado, particularmente sobre a estrutura da escrita, que deve ser levado em consideração no ensino-aprendizagem. Nesse cenário, constatamos o que as pesquisas no campo da formação de professores alicerçadas na TO têm evidenciado: as atividades formativas vão além dos saberes algébricos, contribuindo ainda para a emergência dos saberes relacionados à organização do seu ensino (Romeiro; Moretti; Raford, 2024; Almeida *et. al.* 2024; Silva, 2024; Moretti; Radford, 2023; Romeiro, 2023; Almeida; Lima; Ramos de Almeida; Martins, 2022; Oliveira, 2022; Costa, 2022).

Em continuidade ao diálogo, Andréia começou a explicação da resolução:

> **2.148 Andréia:** Sabemos que de um lado há três esferas vermelhas e uma bege. A gente foi colocando, né, como está aí... [apontou para a simulação já proposta por eles e retomou a pergunta do problema.] Qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas?
> **2.149 Pesquisador-formador:** E aí, como faríamos nesse caso?
> **2.150 Rosália:** Tem que tirar logo as gramas [esferas beges]. Foi o que Andréia fez. Tirar gramas iguais [fez o gesto de retirada de um lado e do outro.]
> **2.151 Pesquisador-formador:** Certo! Eu queria escutar um pouco você... [apontou para Sirlene.]
> **2.152 Sirlene:** Sim, exatamente isso. Fomos retirando. Aí tiramos uma esfera [vermelha]. [aguardou Andréia manusear o simulador.] Precisamos tirar no outro lado [direito]. Aí identificamos que cada esfera [vermelha] vale duas [beges]. Aí tiramos mais uma esfera, mais duas beges e chegamos na conclusão que uma esfera vale duas [gramas].
> **2.153 Rosália:** Perfeito!

A partir do excerto acima, observamos que, apesar de Rosália ter iniciado a apresentação da argumentação (linha 2.150), a discussão tomou outro rumo. Preocupado com as posições que as professoras estavam assumindo até o momento – praticamente as mesmas funções da atividade anterior –, o pesquisador-formador convidou Sirlene para falar (linha 1.152). Essa postura convidativa evidencia que o projeto didático da formação não estava alicerçado apenas pelo eixo da produção de saberes, como também pelo eixo da produção de subjetividades. Conforme Radford (2021a), para que um coletivo se constitua como não alienante, precisamos da participação ativa de todos, norteada por princípios éticos que busquem dar abertura para o outro se expressar, bem como acolher o seu ponto de vista.

Por sua vez, Sirlene continuou descrevendo a resolução (linha 2.152), mas não argumentou o porquê tirou uma esfera vermelha de um lado e duas esferas beges do outro. Até esse momento, não tínhamos elementos discursivos ou gestuais que nos permitissem inferir a justificativa para elas eliminarem grandezas equivalentes, mas distintas, em ambos os pratos da balança, ou seja, dividirem os dois lados por dois.

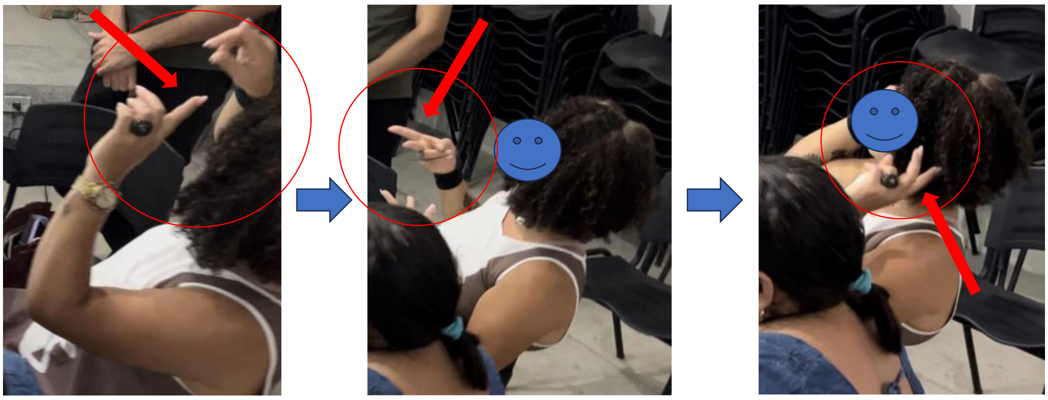
Em sequência à discussão, Andréia fez a seguinte colocação:

> **2.154 Andréia:** Agora essa relação, eu também fiquei pensando... Ficou duas esferas [vermelhas] ali, okay?! Mas aí, a partir do momento que eu olho o outro lado, eu consigo fazer essa relação: lá eu tenho quatro [esferas beges] e aqui eu tenho dois [esferas vermelhas]. Eu faço uma multiplicação... Na minha cabeça. [...] E o resultado dá dois!
> **2.155 Sirlene:** Já eu usei a divisão... Eu dividi, porque olha [apontou para a tela do notebook]... Duas dividi por dois e quatro divido por dois.
> **2.156 Pesquisador-formador:** Isso, exatamente!
> **2.157 Sirlene:** Foi isso que eu fiz.

Como podemos observar, nessa parte do diálogo (linhas 2.153 a 2.157), sem precisar simular novamente a equação, as professoras se desprenderam do artefato tecnológico digital e apresentaram dois argumentos sobre o raciocínio que tiveram para concluir o problema.

O primeiro argumento estava relacionado à operação de multiplicação. Nesse contexto, Andréia recorreu à ideia de proporcionalidade entre ambos os lados da equação (linha 2.156). Considerando que "2x = 4" (Figura 31 (a)) e "2 . 2 = 4" (Figura 31 (b)), ela concluiu que "x = 2" (Figura 31 (c)). Não ficou evidente que a multiplicação realizada mentalmente por Andréia foi, de fato, "2 . 2 = 4", mas, pelo discurso externo e gestos (**detonação** da **indeterminação** na Figura 31), inferimos isso. Nesse sentido, em termos matemáticos, teríamos uma linha de raciocínio pautada na propriedade transitiva da relação de igualdade: ao assumir duas premissas – a equação em cena e a multiplicação mental –, Andréia inferiu dedutivamente que a massa da esfera vermelha era de dois gramas. Portanto, constatamos indícios de **raciocínio analítico** e, consequentemente, de **pensamento algébrico** na perspectiva da TO (Radford, 2022a, 20222b, 20222b).

Figura 31 – Gestos de Andréia na resolução do problema 2



(a) (b) (c)

Fonte: Acervo da pesquisa.

Por conseguinte, o segundo argumento referia-se à operação de divisão. Nesse cenário, Sirlene, partindo da equação “2x = 4”, dividiu ambos os lados por dois e concluiu que “x = 2” (linha 2.166). Portanto, na resolução do segundo problema, pelos discursos dispostos nas linhas 2.130, 2.138, 2.140 e 2.155 (**denotação das grandezas conhecida e desconhecida**), constatamos explicitamente que, ao assumir como premissas que podiam realizar as operações matemáticas de “eliminar” (subtrair) e “separar” (dividir) em ambos os membros da balança de dois pratos equilibrada (equação), o pequeno grupo: (i) operou dedutivamente e (ii) trabalho com o **indeterminado** (“a massa da esfera vermelha”, linha 2.122) como se fosse determinado. Nesses pontos, observamos a presença da **analiticidade**.

Amparados nos estudos de Radford (2022a, 2022b, 2021a, 2021b), concluímos que a forma de pensar e proceder corrobora as três condições dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, haja vista que: a) a massa desconhecida da esfera vermelha (a incógnita) foi identificada como uma a **indeterminação**; b) a incógnita ou o termo desconhecido foi **denotado** por intermédio dos discursos externos e gestos; e c) o resultado (a massa da esfera vermelha é 2g) foi **deduzido** a partir de equações equivalentes entre si.

Na finalização desse momento, tivemos as seguintes colocações:

> **2.158 Pesquisador-formador:** Percebam que esse problema é parecido com outro, mas tem algumas coisas que mudam. E principalmente que vocês mobilizaram outras estratégias.
> **2.159 Sirlene:** Eu percebo também que nós vamos ser melhores professores. Isso eu tenho percebido... Porque faz a gente pensar em possibilidades. Eu

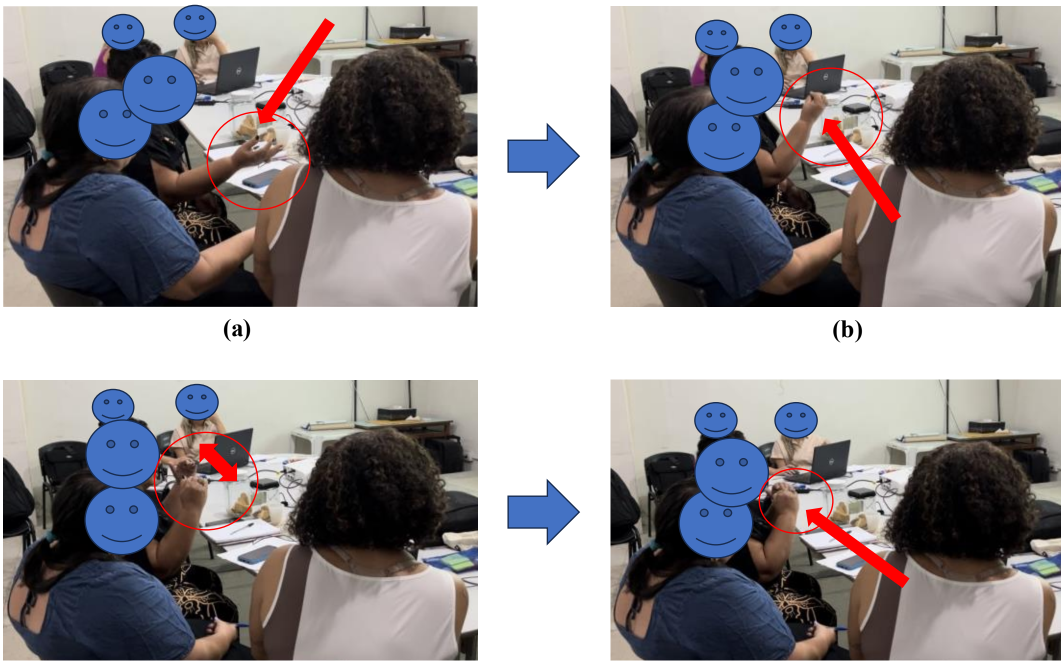
> usei aqui a multiplicação e ela [Andréia] a divisão. E a gente sabe que tirando de um lado tem que tirar do outro [fez os gestos de retirada, movimentando a mão de cima para baixo] para poder haver a equivalência, a igualdade [fez o gesto movimentando as duas mãos na horizontal fechadas e depois abrindo].
> **2.160 Rosália:** Com certeza!

Nesse diálogo, o pesquisador-formador teceu um comentário geral sobre as resoluções dos problemas. Em seguida, reiterou as estratégias mobilizadas e corroborou com a nossa constatação de que elas pensaram **analiticamente**, ao afirmar que: “a gente sabe que tirando de um lado tem que tirar do outro para poder haver a equivalência, a igualdade” (linha 2.159).

Além disso, Sirlene ressaltou a importância do processo formativo para o ser docente, quando afirmou, na linha 2.159, que “nós vamos ser melhores professores”, principalmente porque o processo formativo contribuiu para “pensar em possibilidades” acerca da introdução à álgebra escolar. Tal colocação ilustra que a aprendizagem, na perspectiva da TO, se dá por um processo que abrange tanto o encontro com novos saberes, como o vir a ser, nesse caso, professoras que ensinam álgebra nos anos iniciais a partir de outras possibilidades.

Atrelados aos elementos discursivos na linha 2.159, observamos que Sirlene utilizou o corpo para denotar a operação da subtração, movimentando a mão aberta e fechada (ver Figura 32, (a) e (b)), e a equivalência na equação, movimentando a mão na horizontal (ver Figura 32, (c) e (d)).

Figura 32 – Gestos de Sirlene na resolução do problema 2



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 32 ilustra exatamente o fato de que podemos observar a materialização do pensamento por meio do movimento corpóreo (Radford, 2021a). Nesse caso, os gestos com as mãos denotando a retirada de um objeto e a igualdade entre ambos os lados reforçam que o pensamento algébrico é uma prática social tangível, na qual o corpo materializa o componente ideacional (Radford, 2011c).

Como síntese das análises das discussões do pequeno grupo, ponderamos que, inicialmente, a operação “eliminar” (subtração), em ambos os lados da equação, ficou clara, enquanto a operação “separar” (dividir) não. Nesse sentido, para caracterizarmos o pensamento algébrico, foi fundamental nos debruçarmos acerca do engajamento coletivo em que professoras e pesquisador-formador “se implicam em comparações, distinções e tomadas de posição com respeito ao saber, o qual gera novas ideias ao longo do caminho, enquanto todos se constituem como subjetividades” (Radford, 2022b, p. 192).

Avançando nas análises, chegamos no momento da discussão geral do problema:

> **2.161 Rosália:** Mais um probleminha para a gente resolver em sala de aula e agora vem Ana, Maria e Fernanda. Elas foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrados. Continuamos nossa balança aqui [apontou para a projeção] bem equilibrada... Vamos agora começar? Sabendo que em um prato da balança é... [apontou para a projeção]... há três esferas vermelhas e uma bege.
> [Sirlene ficou com dificuldade em utilizar touchpad do notebook para simular. Nesse cenário, Andréia tentou ajudá-la e o formador sugeriu que utilizasse o mouse de Rosália. Andréia instalou o mouse no notebook e, então, Sirlene conseguiu utilizar o simulador seguindo os comandos de Rosália.]

Na apresentação final do problema 2, as professoras decidiram mudar alguns papéis que estavam assumindo na vivência da atividade. Nesse cenário, Rosália ficou responsável por ler e interpretar o enunciado (linhas 2.161 e 2.164), Sirlene ficou responsável por simular o problema com o uso do artefato tecnológico digital (linhas 2.162 e 2.166) e Andréia ficou responsável por explicar as estratégias de resolução (linhas 2.169, 2.171 2.173 e 2.177).

Com essas mudanças, podemos perceber que o coletivo enfrentou, inicialmente, dificuldades de ordem tecnológica, precisando substituir o touchpad do notebook pelo mouse externo. Nesse contexto, Sirlene recebeu o suporte do pesquisador-formador e da colega Andréia. O movimento, disposto na Figura 33, ilustra exatamente a vivência deste aspecto da colaboração humana considerado na organização das atividades formativas: um ambiente propício a uma forte interação entre as professoras, bem como entre o pesquisador-formador e as professoras.

Figura 33 – Suporte tecnológico à Sirlene

Fonte: Acervo da pesquisa.

Retomando a tradução do problema para o simulador digital, Sirlene questionou:

> **2.162 Sirlene:** São quantas do lado de cá [esquerdo]?
> **2.163 Rosália:** Três esferas vermelhas e uma esfera bege. No outro prato são uma esfera vermelha e cinco beges.
> **2.164 Rosália:** ...três, quatro e cinco. [contando as esferas beges do lado direito enquanto Sirlene simulava o problema.]
> [Sirlene ficou com dificuldade de colocar a última esfera bege.]
> **2.165 Rosália:** Lá em cima! [indicando para ela colocar em cima das outras esferas.]
> **2.166 Sirlene:** Sobe, esse menino! [e então conseguiu.]
> **2.167 Rosália:** Okay! Se vocês observarem os lados estão bem iguais... [fez o gesto com as mãos denotando uma igualdade.] E aí como vai ficar? Vou chamar aqui, convidar aqui, minha aluna, para me seguir... [convidou Andréia para a frente e pegou na mão dela.] O que aconteceu agora? Como é que a gente pode descobrir essa esfera vermelha? Qual a grama dela? O que você faria?
> [Andréia ficou pensativa com a mão no queixo.]

Pelo diálogo supracitado, notamos que, ao invés de simplesmente explanar a resolução do problema, Rosália convidou Andréia para engajar-se nesse movimento com ela (linha 2.167). Por sua vez, por meio de questionamentos e encorajamentos por parte de Rosália (2.167, 2.168, 2.169, 2.172, 2.174, 2.176, 2.181 e 2.183), o pequeno grupo seguiu em conjunto na explicação. Esses trechos ilustram que a formação de professores, pautada na Teoria da Objetivação, precisa propor ambientes nos quais os sujeitos "possam encontrar saberes culturais e vozes de formas conceituais profundas e, ao mesmo tempo, fazer a experiência da vida coletiva solidária, plural e inclusiva" (Radford, 2021a, p. 14).

Figura 34 – Andréia pensativa com a mão no queixo

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 34, ilustramos Andréia pensativa em “silêncio” após ter sido confrontada por Rosália. Esse momento de cultivo ao discurso interno, marcado predominantemente pelo componente ideacional do pensamento (Radford, 2011c), foi fundamental para que a discussão geral continuasse.

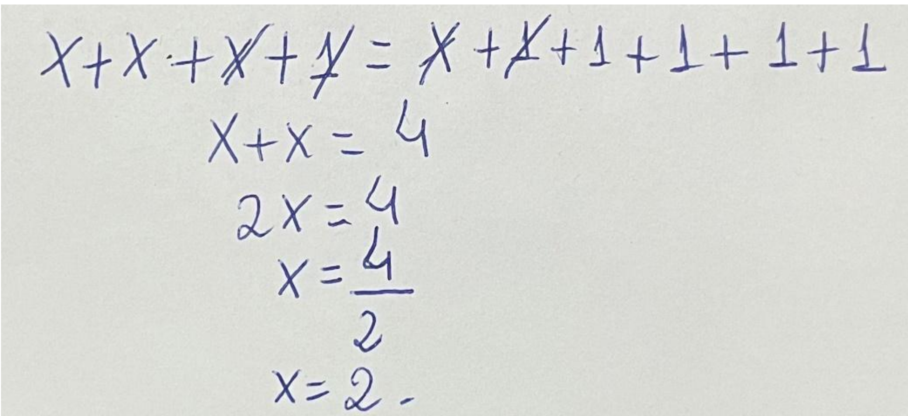
2.168 Rosália: Pensa!
2.169 Andréia: Eu vou tirar uma bege de um lado. [apontou para o lado direito.]
2.170 Rosália: Certo! Muito bem!
2.171 Andréia: Vou tirar a bege do outro lado.
2.172 Rosália: Hum... Perfeito! E agora? E aí? O que você pode retirar?
2.173 Andréia: Agora, já que não tem mais bege do lado esquerdo, eu vou tirar uma vermelha [lado esquerdo] e vou tirar outra vermelha [lado direito].
2.174 Rosália: Perfeito!
2.175 Sirlene: Equilibrou!
2.175 Rosália: E aí? O que aconteceu? Já consegue descobrir?
2.177 Andréia: Se eu tirar uma vermelha de lá [lado esquerdo], eu vou ter que tirar duas beges daqui [lado direito]...
2.178 Rosália: Hum... Será que você não realizou uma multiplicação? Ou eu posso dividir as quatro daqui e as duas de lá vermelhas por dois... Tira aí, por favor, dona Sirlene... E aí, descobriu?
2.179 Andréia: A esfera...
2.180 Sirlene: A esfera vermelha é igual a dois.
2.181 Rosália: Sirlene, pode falar você também, viu.
2.182 Sirlene: Eu estou falando!
[As professoras riram...]
2.183 Andréia: Vai...
2.184 Rosália: Pronto, tanto usou a multiplicação no meio do problema como também Sirlene apresentou a divisão como resolução na descoberta das gramas da vermelha. Aí finalizou assim!

Como podemos perceber no excerto contendo as linhas 2.168 a 2.184, todas as professoras contribuíram para a explicação do processo de resolução do problema. Andréia mencionou as operações iniciais realizadas com as grandezas determinadas e indeterminadas (linhas 2.169, 2.171 2.173 e 2.177). Sirlene evidenciou a importância da equivalência na passagem da simplificação da equação (linha 2.175). Rosália explicou o último argumento para chegar à conclusão (linha 2.178). E, por fim, Sirlene disse a resposta final (linha 2.180). Assim, ao assumirem a premissa de que poderia mobilizar a estratégia de neutralizar termos ou coeficientes (Araújo, 2009) como verdadeira, elas realizaram as operações de subtração e divisão em ambos os membros da equação, indicando mais uma vez que houve a emergência de um **pensamento analítico**, isto é, **algébrico**.

No movimento de discussão geral, passamos a constatar também indícios de mudanças de posturas das professoras durante o processo formativo, principalmente quanto ao/à: compartilhamento de responsabilidades; abertura para o outro falar, se expressar e se posicionar; participação ativa por parte de todas, escuta atenciosa e confrontamento respeitoso. Essa preocupação com a coparticipação destaca a importância de planejarmos e vivenciarmos intencionalmente atividades formativas que também levem em consideração a produção do ser, conforme os preceitos da TO (Radford, 2021a). Certamente, mesmo sabendo que não podíamos impor ou determinar às professoras novas formas de comportamento durante as atividades, trouxemos à tona algumas posturas convidativas que foram permitindo-as rever as posições que estavam assumindo na resolução dos problemas propostos.

Até aqui discutimos sobre as questões referentes às resoluções do problema 2 no SSI. Quanto aos movimentos no SSA (ver Figura 35), o pequeno grupo fez três resoluções possíveis nas folhas de rascunho, mas entregou apenas a seguinte solução na folha de resposta:

Figura 35 – Resolução algébrica do problema 2 no SSA



Fonte: Acervo da pesquisa.

Podemos perceber que assim como no SSI, o processo de resolução do problema 2 no SSA foi mais direto comparado ao problema 1. Como as professoras já tinham depositado energia intelectual, emocional e material para pensar sobre o problema anterior, o engajamento coletivo demandou esforços de outra natureza, a exemplo: perceber as novas operações em cena na simplificação de equações e mudar as formas de interação. Segundo Radford (2021a), pensar requer esforço coletivo na vivência de uma atividade. Assim, ao sofrerem, lutarem e se empenharem conjuntamente, o pesquisador-formador e as professoras foram encontrando prazer em realizar a atividade juntos.

Mediante o exposto, como síntese das análises da atividade formativa envolvendo o segundo problema, apresentamos o Quadro 15:

Quadro 15 – Síntese dos elementos do pensamento algébrico que emergiram na atividade formativa envolvendo o segundo problema de enunciado

Meios semióticos de objetivação	**Vetores do pensamento algébrico**	**Síntese das análises**
Gestos com as mãos que remetem às noções de equilíbrio e de igualdade; Gestos com as mãos que remetem ao movimento de retirar (operações de subtração); Mão no queixo como expressão de pensativa; Discurso externo para socializar, argumentar e fundamentar o raciocínio; etc.	Indeterminação	• “Massa da esfera vermelha” (linguagem natural) • “🔴” (linguagem icônica) • “x” (linguagem simbólica)
	Denotação	• O indeterminado foi traduzido do enunciado do problema, em linguagem natural, para o simulador no Sistema Semiótico Icônico. • O indeterminado foi expresso no papel por meio da linguagem simbólica, a fim de apresentarem a resolução do problema no Sistema Semiótico Alfanumérico.
	Analiticidade	• Retiraram uma esfera vermelha e uma esfera bege em ambos os lados da balança. A partir da equação 2.🔴 = 4g, dividiram ambos os lados por dois e concluíram que 🔴 = 2g. Em suma, resolveram por um processo lógico-dedutivo, ou seja, houve uma reconceituação acerca do sinal de igualdade em uma perspectiva relacional, assim como trabalharam com a indeterminação como se fosse determinada.

Fonte: Elaboração própria.

Grosso modo, constatamos, nessa última atividade formativa, a presença de uma contração semiótica (a exemplo, ver linha 2.155), haja vista que o processo de tomada de consciência do problema em discussão se deu um nível mais sintético e profundo, permitindo às professoras reconceitualizarem as operações com grandeza indeterminada e o sinal de igualdade como noção de equivalência na simplificação de equações lineares.

6.3 Episódio 3 – Movimentos finais: um encontro com uma forma de pensar algebricamente?

Como preconiza Radford (2021a, p. 114), "a aprendizagem é um encontro contínuo e tenso de transformação dialética mútua entre um mundo cultural, ou seja, um mundo cultural que transcende o indivíduo como um indivíduo único, e indivíduos únicos que o encontram". Assim sendo, constatamos, nos movimentos finais da formação, que o processo formativo propiciou a ampliação do repertório histórico-cultural, mediante o engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador, principalmente no que diz respeito à perspectiva de álgebra e de pensamento algébrico preconizada na Teoria da Objetivação (Radford, 2021a). Como pontuamos adiante, estamos certos de que a aprendizagem docente acerca dos saberes algébricos em cena não se esgota nessa formação.

Especificamente no final do último encontro, retomamos os questionamentos iniciais (linha 3.1) sobre ensino-aprendizagem de álgebra, a fim de nos certificarmos dos indicativos de saberes algébricos encontrados pelas professoras ao longo do processo formativo. Nesse contexto, olhamos para o seguinte diálogo:

> **3.1 Pesquisador-formador:** Se retomasse com vocês agora as questões iniciais... O que é álgebra? O que é pensamento algébrico? Como pensar algebricamente? E por onde começar? O que vocês pensam a partir desses dois encontros?
> **3.2 Rosália:** Hoje, o que é álgebra? Levar o aluno a compreender...
> **3.3 Sirlene:** Entender que a álgebra nos leva a entender as expressões de igualdade, né... Da mesma forma que você mexe de um lado você vai mexer do outro lado da expressão. Se você retira de um lado, você retira do outro. Se você coloca de um lado, adiciona, você tem que adicionar no outro. Então, ficou mais fácil de entender, saber por onde começar com essas expressões, com esse pensamento. Até porque eu não tinha notado essa relação. E a partir de hoje eu estou entendendo que da forma que a gente mexe de um lado vai mexer do outro. Pensamento algébrico... Diga aí! [olhou para Rosália e passou a palavra para ela.]
> **3.4 Rosália:** Existem vários caminhos para essa álgebra... Não é uma álgebra direta. Você pode percorrer vários caminhos sabendo que tem uma igualdade em ambos os lados. Resolução de problema vai existir, mas tem aquele caminho que você vai seguir, de equivalência, né, de um lado e do outro. Se pensar nos anos iniciais, principalmente, não são letras e sim números, tem o desconhecido, tem a operação, que nem todas as vezes é a inversão... Ai, é tão extenso, professor. Assim...
> **3.5 Sirlene:** E usar, assim, para os meninos, números e símbolos. Letras, no momento, nem pensar...

Como podemos perceber pelos discursos de Sirlene e Rosália (linhas 3.3 e 3.4), houve um avanço com relação às percepções sobre as indagações em cena. Por meio das palavras-chave “retirar”, “colocar”, “adicionar” e “mexer” em ambos os lados da igualdade, indicamos que as professoras reconceitualizaram o sinal de igualdade e as operações para resolver as equações. Tais aspectos pontuados possuem uma forte relação com o principal vetor que caracteriza o pensamento algébrico na perspectiva da TO: a *analiticidade* (Radford, 2021b). Isso porque, para operar dedutivamente nos problemas envolvendo equações, é necessário: (i) reconhecer uma “igualdade em ambos os lados”, no sentido de “equivalência”, e (ii) trabalhar com o “desconhecido” em primeiro plano.

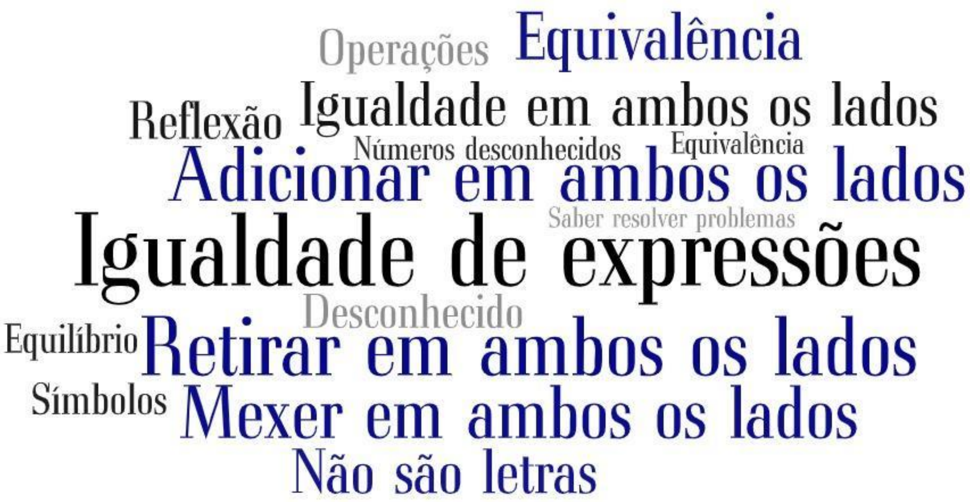
Ressaltamos ainda que as ações pontuadas por Sirlene, na resolução de equações, são características do SSI. Acreditamos que o enfoque no trabalho com equações no SSA possibilitaria encontros com outros saberes e, por conseguinte, outras colocações mais próximas do repertório matemático dos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, é necessário o desenvolvimento de outras investigações.

Ademais, observamos que, na linha 3.4, além de ter considerado a “igualdade em ambos os lados” e a “equivalência”, Rosália atribuiu um novo significado ao trabalho com *indeterminação* nos anos iniciais do Ensino Fundamental: “não são letras e sim números, tem o desconhecido, tem a operação, que nem todas as vezes é a inversão”. Como vimos ao longo desta dissertação, a indeterminação consiste em grandezas indeterminadas ou desconhecidas, a saber: incógnitas, variáveis, parâmetros, entre outras (Radford, 2021b). No caso desta pesquisa, as professoras trabalharam com as incógnitas propostas nos problemas de enunciado. Por sua vez, também é relevada uma preocupação com a *denotação* das grandezas, que não necessariamente deve ser por meio do simbolismo alfanumérico.

Portanto, mais do que uma compreensão de álgebra enquanto uma forma particular de pensar sobre as situações matemáticas (Ramos de Almeida, 2017), verificamos que as professoras se encontraram com as três condições que caracterizam o pensamento algébrico na perspectiva da TO: (i) a indeterminação, relacionada aos objetos do raciocínio; (ii) a denotação, referente à simbolização dos objetos, (iii) a analiticidade, relacionado ao processo de raciocínio dos objetos (Radford, 2022b).

Sintetizamos as inferências deste episódio na Figura 36:

Figura 36 – Síntese das compreensões finais das professoras acerca da álgebra escolar nos anos iniciais



Fonte: Elaboração própria.

Segundo Radford (2021a, p. 257), “a objetivação consiste em um encontro sempre inacabado e crítico com o saber”. Dada a continuidade e o inacabamento do processo de objetivação, o pesquisador-formador retomou um dos questionamentos, em um sentido retórico, visando provocar que as reflexões propostas na formação precisam continuar em movimento, como podemos observar no diálogo a seguir:

> **3.6 Pesquisador-formador:** E o que é álgebra? [Fez uma pergunta retórica e riu.]
> **3.7 Rosália:** Eu vou guardar para o resto da minha vida, professor... “O que é álgebra?” É uma reflexão, saber resolver problemas, são números desconhecidos, são símbolos...
> **3.8 Sirlene:** Equivalência!
> **3.9 Rosália:** Equivalência! É isso...
> **3.10 Sirlene:** Equilíbrio...
> **3.11 Rosália:** É isso mesmo?
> **3.12 Pesquisador-formador:** Sim...
> **3.13 Rosália:** Amém que eu acertei, Jesus...
> **3.14 Sirlene:** Parabéns, amiga!
> [Todos riram juntos.]
> **3.15 Rosália:** Essa minha companheira... É tudo isso, essa junção!

A última indagação (linha 3.6) apresentada pelo pesquisador-formador reforça exatamente a finalidade principal do processo formativo, bem como o espírito da TO: propor um ambiente no qual as participantes pudessem questionar, problematizar, criar, refletir e, sobretudo, se reinventar enquanto profissionais engajadas coletivamente em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações. Nesse sentido, “o mundo que aparece à consciência e a consciência que surge deste encontro são continuamente transformados” (Radford, 2021a, p. 114).

Além disso, inferimos, por meio dessas trocas finais (linhas 3.14 e 3.15) e ao longo do último encontro, que as professoras Rosália e Sirlene ficaram mais próximas, reforçando a ideia de que o encontro com o outro não é espontâneo e imediato (Radford, 2021a). Outros encontros formativos seriam necessários para legitimar tais impressões.

Grosso modo, conforme Radford (2021a, p. 259), o "entrelaçamento de processos de objetivação e subjetivação é apenas uma expressão prática do fato de que aprender é inevitavelmente saber e se tornar". Assim, mediante os excertos apresentados no episódio 3, corroboramos que houve, em certo sentido, uma ampliação do repertório histórico-cultural das professoras no que diz respeito tanto ao eixo da produção de saberes quanto ao eixo da produção de subjetividades.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da questão de pesquisa – *como pode ser caracterizado o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais?* –, realizamos uma pesquisa-formação com professoras de uma rede municipal do estado de Pernambuco. Para responder essa pergunta, traçamos este objetivo geral: *caracterizar o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais.*

Inspirados em Radford (2021a, 2017a, 2011c), a abordagem multimodal adotada nesta pesquisa buscou compreender o pensamento como uma unidade dinâmica, em constante mudança ao longo de um processo histórico e cultural, constituído tanto pelos componentes ideacionais (o discurso interno e a imaginação do sujeito) quanto pelos componentes materiais (gestos, discurso externo, escrita, ritmos, signos etc.). Assim, por meio de uma análise multissemiótica das videogravações dos encontros formativos, organizamos os resultados em três episódios: *Episódio 1* – Movimentos iniciais: dos saberes algébricos constituídos histórica e culturalmente a um convite para repensar a álgebra escolar; *Episódio 2* – Atividades formativas referentes às resoluções de problemas envolvendo o estudo introdutório de equações com simulações interativas digitais; *Episódio 3* – Movimentos finais: um encontro com uma forma de pensar algebricamente? A seguir, retomamos alguns aspectos relevantes desses três episódios.

Nos movimentos iniciais do processo formativo, nos deparamos com algumas compreensões da álgebra escolar nos anos iniciais, como: "fazer com que eles reflitam" (linha 1.8) e "pensar para saber qual o número que está faltando" (linha 1.9). Por sua vez, indicamos que esses significados estão atrelados à ideia contemporânea de álgebra como uma maneira particular de pensar sobre situações matemáticas (Ramos de Almeida, 2017). Para a ampliação do repertório das professoras no que concerne à álgebra escolar na perspectiva da TO, movimentamos dois pressupostos indicados por Radford (2021b): (i) *o pensamento algébrico não é caracterizado pelo uso do simbolismo alfanumérico* e (ii) *a álgebra não é uma aritmética generalizada.* Os resultados no episódio 2 ilustraram explicitamente esses movimentos por intermédio das atividades formativas.

Na atividade formativa envolvendo o primeiro problema de enunciado, que pode ser traduzido para a equação $2x + 3 = x + 6$, observamos que, inicialmente, as professoras recorreram à estratégia de testar a igualdade por tentativa e erro, que consiste em atribuir respostas possíveis para a incógnita até concluir ou não o problema (Radford, 2022a, 2022b, 2021b; Araújo, 2009). Ao testar os valores “1” e “2” para “x”, elas se depararam com uma desigualdade, chegando apenas no erro. Em seguida, o procedimento empregado pelo pequeno grupo foi interpretado como uma adaptação da técnica de transpor o termo ou coeficiente, que se refere a passar as grandezas determinadas ou indeterminadas para o outro lado da equação com a operação inversa (Araújo, 2009). Nesse cenário, as professoras isolaram as grandezas indeterminadas do lado esquerdo e as grandezas determinadas do lado direito, obtendo a equação: $3x = 9$. Por sua vez, o pequeno grupo separou proporcionalmente os objetos em ambos os lados da balança, ou seja, dividiu-se por três, concluindo que $x = 3$. Em ambos os procedimentos anteriores, identificamos, respectivamente, indícios de raciocínio numérico e proto-analítico e, logo, de pensamento aritmético. Por último, mediante o engajamento coletivo com o pesquisador-formador, notamos que as professoras utilizaram a estratégia de eliminar (subtrair) as grandezas determinadas (três esferas beges) e indeterminadas (um cubo azul) em ambos os membros da balança (equação). Ou seja, começaram a revelar indícios de **raciocínio analítico** ao trabalhar com o **indeterminado** como se fosse determinado, **denotando-o** com falas, gestos e escrita, mas não apresentaram argumentos explícitos para as operações realizadas na resolução do problema.

Na atividade formativa envolvendo o segundo problema de enunciado, que pode ser traduzido para a equação $3x + 1 = x + 5$, constatamos evidências de que as professoras se encontraram com uma forma de pensar algebricamente as equações, mobilizando a estratégia de neutralizar termos ou coeficientes, isto é, operando com grandezas determinadas (esferas beges) e indeterminadas (esferas vermelhas) em ambos os membros da igualdade (Araújo, 2009). Em resumo, sintetizamos as discussões delas na linguagem alfanumérica, nas quais obtiveram as seguintes equações equivalentes entre si: “$3x + 1 = x + 5$” (subtraíram 1 em ambos os lados); “$3x = x + 4$” (subtraíram x em ambos os lados); “$2x = 4$” (dividiram ambos os lados por 2); (e concluíram que) “$x = 2$”. Nos termos de Radford (2022a, 2022b, 2021b), o pequeno grupo se encontrou com os procedimentos algébricos de eliminar os objetos iguais (subtração) e separar os objetos em partes proporcionais (divisão) em ambos os lados da equação, assumindo uma perspectiva relacional da igualdade. Logo, o **raciocínio analítico** emergiu por meio do trabalho dedutivo com o **desconhecido** em primeiro plano, o qual foi **denotado** por meio de falas, gestos e escrita.

Mediante os resultados apresentados no segundo episódio, quanto às vivências das atividades formativas, acreditamos que conseguimos alcançar o objetivo específico de *identificar os três vetores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade) que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais*. Ademais, convém ressaltar que os tipos de raciocínios manifestados nas resoluções dos problemas propostos foram identificados por intermédio do reconhecimento de diversos meios semióticos de objetivação, como: os gestos com as mãos que remetem às noções de equilíbrio e de igualdade; apontamentos com os dedos para indicar e contar as grandezas determinadas e indeterminadas; gestos com as mãos que remetem ao movimento de retirar e separar (operações de subtração e divisão); mão no queixo como expressão de pensativa; discurso externo para socializar, argumentar e fundamentar o raciocínio; etc. O que reforça a pertinência e a legitimidade de uma análise do pensamento algébrico na formação de professores pautada na abordagem multimodal (Romeiro; Moretti, Radford, 2024; Silva, 2024; Moretti; Radford, 2023a; Romeiro, 2023). Assim sendo, também atingimos o objetivo específico de *reconhecer os meios semióticos de objetivação que emergem, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais*.

Nos movimentos finais do processo formativo, sustentamos que as professoras se encontraram com uma forma de pensar algebricamente acerca das equações, principalmente quando ressaltadas algumas compreensões acerca do ensino-aprendizagem da álgebra escolar nos anos iniciais: “igualdade em ambos os lados”, “equivalência” e “não são letras e sim números, tem o desconhecido, tem a operação, que nem todas as vezes é a inversão” (linha 3.4). Destarte, mais do que a ideia de álgebra como uma forma peculiar de pensar matematicamente (Ramos de Almeida, 2017), verificamos que as professoras se encontraram com as três condições que caracterizam o pensamento algébrico na perspectiva da TO: (a) a indeterminação – o desconhecido; (b) a denotação da indeterminação – como o desconhecido deve ser simbolizado; e (b) a analiticidade – o raciocínio lógico dedutivo para desvelar o desconhecido (Radford, 2022a, 2022b, 2021b).

Grosso modo, reiteramos que os resultados apresentados corroboram com a defesa de Radford (2022a, 2022b, 2021a, 2021b, 2011c) de que a caracterização do pensamento algébrico está além da identificação dos vetores (indeterminação, denotação e analiticidade) e do reconhecimento dos meios semióticos de objetivação, é necessário observar como esses aspectos emergem nas vivências das atividades – no nosso contexto, as atividades das professoras e do pesquisador-formador, o trabalho lado a lado entre professoras-pesquisador.

Lembro bem de uma fala de Radford, em uma das reuniões científicas no I EBTO, orientando que as pesquisas do Al-Jabr tivessem o cuidado com o fato de que o pensamento algébrico na perspectiva da TO não é algo abstrato, mas que se dá na concretude da atividade humana, ou seja, mais do que provar (a), (b) e (c) é essencial se ater as nuances do engajamento coletivo. Nesse sentido, a álgebra se materializou, nesta pesquisa, não como uma entidade geral, mas como uma forma particular por meio das estratégias mobilizadas, argumentos apresentados e compreensões acerca da organização do seu ensino. E mais, embora tenhamos tecido breves comentários sobre o engajamento coletivo nesta pesquisa-formação, reiteramos que, ao nos fundamentarmos teórica e metodologicamente nos preceitos da TO quanto ao trabalho conjunto pautado pela ética comunitária, não tivemos o objetivo de validar se houve ou não a emergência do eixo das formas de colaboração humana. A intenção foi apenas ilustrar que, mesmo dando foco nos processos de objetivação, esses não estão dissociados dos processos de subjetivação.

Outrossim, uma das colocações que tenho ressaltado, nas minhas participações no grupo de pesquisa Al-Jabr, é a importância da vigilância com a posição de, na tentativa de "provar" a emergência pensamento algébrico, perder de vista outras estratégias que surgem nas atividades, sejam com alunos ou professores. De acordo com Radford (2021b), não há hierarquia, muito menos uma dicotomia, entre a aritmética e a álgebra. Sendo assim, embora a álgebra seja mais sofisticada, não a torna soberana em relação às outras áreas da Matemática. Portanto, estamos convictos de que a compreensão das estratégias aritméticas, na resolução de equações, é fundamental, a fim de superá-las com foco no campo algébrico.

Ao longo das análises, nos questionamos sobre a reconceitualização dos significados atribuídos pelas participantes da pesquisa: (i) ao indeterminado – É trabalhado em primeiro plano? É deduzido a partir de premissas? –; (ii) à noção de igualdade – É em uma perspectiva relacional? Recorre-se à noção de equivalência? –; e (ii) às operações matemáticas – Opera-se com as grandezas determinadas e indeterminadas em ambos os lados da equação? –. Assim, deixamos essas perguntas guias que podem auxiliar futuras investigações que tenham como foco de análise o pensamento algébrico, na vertente da TO, a partir de atividades envolvendo resolução de equações.

No que tange às pesquisas sobre o estudo introdutório das equações nos anos iniciais do Ensino Fundamental, avançamos ao elaborarmos novos problemas de enunciado que podem ser resolvidos no contexto digital. Como vimos no capítulo de álgebra e pensamento algébrico, alguns estudos anteriores apresentam o trabalho com artefatos não digitais para denotar grandezas desconhecidas e conhecidas na resolução de problemas de enunciado; são eles: latas e sacos (Martins, 2023) e cartões e envelopes (Radford 2021b). Junto a isso, nesses estudos propõe-se um cartão com o sinal de igualdade (artefato estático). Embora não tenha sido objeto de debate primário dessas pesquisas analisar as relações entre os artefatos culturais e a emergência do pensamento algébrico, em nossa leitura, fica evidente o papel preponderante que essas articulações assumem nos movimentos de resolução dos problemas. Inclusive, acreditamos que a maneira que os sujeitos (professores ou alunos) manuseiam, gesticulam, apontam e discursam com os artefatos culturais, sejam digitais ou não, contribui para a materialização do saber algébrico em foco durante as atividades de ensino-aprendizagem ou de formação com professores.

Nesta dissertação, sublinhamos a importância da dinamicidade das simulações interativas digitais, relativas à metáfora da balança de dois pratos, na superação da perspectiva operacional para uma compreensão relacional da relação de igualdade. Tal simulador digital coloca em movimento não apenas as operações matemáticas com o indeterminado, como também uma abordagem dinâmica em torno da igualdade matemática por meio da noção de equilíbrio. Logo, fazemos aqui um convite explícito para que futuras pesquisas proponham novos problemas de enunciado e os articulem a outros artefatos culturais, a depender da realidade educacional.

Em suma, ao debruçarmo-nos sobre o movimento do pensamento algébrico no processo formativo com as professoras dos anos iniciais, apresentamos contribuições para discussões em torno: (i) do ensino-aprendizagem da álgebra escolar, principalmente no que tange à problematização curricular em torno do estudo introdutório das equações por meio de problemas de enunciado; (ii) da formação de professores para além dos saberes matemáticos em cena, destacando a importância do trabalho coletivo inspirado por uma ética comunitária (compromisso, responsabilidade e cuidado com o outro); e (iii) das tecnologias digitais em Educação Matemática, particularmente quanto à reconceituação acerca do papel dos artefatos culturais como elemento constitutivo do pensamento humano.

Os estudos anteriores sobre o tema das equações, que têm como enfoque tanto a aprendizagem estudantil (Radford, 2022a, 2022b, 2022b, Ludmila, 2023; Gomes, 2020) quanto a aprendizagem docente (Silva, 2024), pavimentaram caminhos para que pudéssemos avançar nas reflexões envolvendo as interlocuções: pensamento algébrico, formação de professores e tecnologias digitais. Com isso, não nos resta dúvidas de que esta dissertação pode trazer repercussões nestas dimensões:

- Curriculares: ao considerar as equações como objeto de conhecimento que deve ser introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
- Tecnológicas: ao defender que os artefatos tecnológicos digitais são parte constitutiva do pensamento humano, em particular com relação ao pensamento algébrico.
- Educacionais: ao elaborar e apresentar problemas de enunciado envolvendo equações que podem ser trabalhados com os alunos da Educação Básica ou em outros contextos de formação de professores (inicial ou continuada).
- Sociais: ao defender uma formação cidadã pautada em preceitos criativos, críticos, reflexivos, solidários, inclusivos e éticos (Radford, 2021a).
- Científicas: ao aprofundar e expandir os estudos acerca do pensamento algébrico, da formação de professores e das tecnologias digitais.

Os leitores podem chegar no final desta dissertação ainda se questionando: e qual o lugar dos artefatos tecnológicos digitais nesta pesquisa? Como pontuamos desde o início, não encontramos pesquisas brasileiras, fundamentadas na TO, que estabelecessem interlocução entre pensamento algébrico e tecnologias digitais (e formação de professores). Sendo assim, considerando o caráter original e inovador desta dissertação, abrimos algumas portas ao indicar que as simulações interativas digitais contribuíram para o encontro das professoras com os saberes algébricos em cena, mediante o manuseio e a visualização dinamicamente. Entretanto, acredito que outras investigações são necessárias para aprofundar esse debate.

Outro ponto crucial a ser destacado é que, apesar de não ter sido o objetivo desta pesquisa analisar as minhas ações em primeiro plano enquanto pesquisador-formador, as minhas posturas de confrontamentos respeitosos, escutas atenciosas, convites ao debate etc., durante o processo formativo e investigativo, foram fundamentais para colocar a perspectiva de pensamento algébrico advogada na Teoria da Objetivação em movimento. Certamente, se não é uma tarefa fácil superar o ensino tradicional para o construtivista, muito menos é simples superar o construtivismo para uma educação pautada no materialismo histórico-dialético. Nesse cenário, torna-se indispensável que nós, enquanto professores, formadores e pesquisadores, assumamos, continuamente, juntos uns com os outros, uma postura (auto)crítica, reflexiva, ética, solidária e amorosa (Radford, 2023a, 2023b, 2021a, 2015; Freire, 2024, 2020a, 2020b, 2019; hooks, 2021, 2020, 2017). Essa posição possui suas contradições, uma vez que todo trabalho coletivo demanda tensões, mas acredito que não há projetos futuros de Educação Matemática sem ressignificar o passado e lutar por mudanças significativas no presente.

Como possibilidades de estudos futuros, apresentamos as seguintes sugestões:

- Investigar a emergência do pensamento algébrico a partir do trabalho coletivo dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, envolvendo os problemas de enunciado sobre equações propostos nesta dissertação, com o uso do Explorador da Igualdade: Básico;
- Investigar a emergência do pensamento algébrico a partir do trabalho coletivo dos alunos ou/e professores dos anos finais do Ensino Fundamental com o uso do Explorador da Igualdade no Sistema Semiótico Alfanumérico;
- Analisar a importância das mudanças de sistemas semióticos (concreto, icônico e alfanumérico), envolvendo os problemas de enunciado sobre equações propostos nesta dissertação, para o desenvolvimento do pensamento algébrico;
- Analisar as diferenças entre o uso de artefatos tecnológicos digitais e analógicos, envolvendo os problemas de enunciado sobre equações propostos nesta dissertação, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por fim, ao reconhecer a necessidade de pesquisas sobre as Tecnologias Digitais em Educação Matemática em um viés não alienante, estou em sinergia com as indicações de Sousa (2024) sobre as possíveis articulações entre a Teoria da Objetivação, de autoria do professor Radford (2021a), e o construto teórico seres-humanos-com-mídias, proposto pelo professor Borba e colaboradores (Borba *et al.* 2023; Borba, 2021; Borba; Villarreal, 2005). Inclusive, antes mesmo da publicação do referido trabalho no recente número temático do periódico Paradigma, propus um projeto de pesquisa de doutorado – a ser desenvolvido a partir de 2025 no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual Paulista (Unesp) –; visando refinar as discussões e reflexões nessa linha, em diálogo com os estudos que já vêm sendo desenvolvidos no seio do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM).

Longe de perder o rigor científico, encerro esta dissertação retomando a epígrafe:

> "Sonhar não é apenas um ato político necessário, mas também uma conotação da forma histórico-social de estar sendo de mulheres e homens. Faz parte da natureza humana que, dentro da história, se acha em permanente processo de tornar-se"

(Freire, 2020, p. 126).

E por falar em sonhos “inimagináveis”, seguirei com um deles – o curso de doutorado. Afinal, como interrogaria Freire (2024, 2020a, 2020b, 2019): o que somos nós, homens e mulheres, seres humanos, sem utopias?

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Matheus Souza de. **Relação de igualdade e a noção de equivalência:** um estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota. 2022. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

ALMEIDA, Matheus Souza de; *et al.* Ética comunitária no processo formativo de professores que ensinam matemática: um movimento contínuo e inacabado. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 20, p. 170-190, 2024.

ALMEIDA, Matheus Souza de; ESPÍNDOLA, Elisângela Bastos de Mélo. The anthropological theory of the didactic as a methodological proposal to analyze digital resources. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 13, n. 4, p. 1-16, 9 nov. 2023.

ALMEIDA, Matheus Souza de; LIMA, Alaide Cecília de; RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson; MARTINS, Juliana. Pensamento algébrico em tarefas com generalização de padrões: uma análise das compreensões de professores em formação continuada on-line. **Educação Matemática em Revista**, v. 27, n. 75, p. 31-44, 2022.

ALMEIDA, Matheus Souza de; SILVA, Regina De Lima; RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson. Formação de professores na perspectiva da teoria da objetivação. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico. **Anais** [...] Campina Grande (PB) UEPB, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.29327/1413695.6-31. Acesso em: 28/09/2024.

ARAÚJO, Abraão Juvencio de. **O ensino de álgebra no Brasil e na França:** estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 291f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ARZARELLO, Ferdinando. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 267-299, 2006.

BARBOSA, Edelveis José Tavares; ALMOULOUD, Saddo Ag. Proposta de um percurso de estudo e pesquisa para formação docente sobre o ensino de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 25, p. 46-79, 2022.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Praxeologias do Professor: análise comparativa do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, p. 1357-1378, 2019.

BEZERRA, Maria da Conceição Alves. **A matemática recreativa e suas potencialidades didático-pedagógicas à luz da teoria da objetivação**. 2021. 217f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021.

BORBA, Marcelo de Carvalho. The future of mathematics education since COVID-19: Humans-with-media or humans-with-non-living-things. **Educational Studies in Mathematics**, v. 108, n. 1, p. 385-400, 2021.

BORBA, Marcelo C. *et al.* Humans-with-media: Twenty-five years of a theoretical construct in mathematics education. In: PEPIN, Birgit, GUEUDET, Guislaine, CHOPPIN, Jeffrey (Eds.). **Handbook of Digital Resources in Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, 2023. p. 191-216.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira; CANEDO-JUNIOR; Neil da Rocha. **Vídeos na Educação Matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022. (Tendências em Educação Matemática).

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer, 2005.

BRANDEMBERG, João Cláudio; SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. A objetivação de formas geométricas em processos de matematização na elaboração de simuladores com GeoGebra. **Paradigma**, Maracay, v. 45, n. 2, p. 1-21, 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CNE, 2018.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. **O trabalho com álgebra no ensino fundamental**: caminhos e descaminhos. In: TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs.). Investigações em didática da matemática [recurso eletrônico]. Recife: Ed. UFPE, 2017.

CAMILOTTI, Dirce Cristiane. **Pesquisa-formação com professores dos anos iniciais do ensino fundamental**: emancipação coletiva para o uso de artefatos tecnológicos digitais no ensino de ciências. 2020. 316f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2020.

CAMILOTTI, Dirce Cristiane; GOBARA, Shirley Takeco. Formação Continuada e Permanente de Professores: Emancipação Coletiva das Práticas Pedagógicas Alienantes. **REMATEC**, Belém, v. 16, n. 39, p. 01-18, 2021.

CAMILOTTI, Dirce Cristiane; FERNÁNDEZ, Felipe Castro; LÓPEZ, José Antonio Juárez. Estado del conocimiento sobre la formación de profesores desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. **Paradigma**, Maracay, v. 45, n. 2, p. e2024003, 2024.

CANÔAS, Silvia Swain. Profissão e Docência no Século XXI: o professor de Matemática em pauta. In: PINHEIRO, Niusarte Virginia *et. al.* **Educação Matemática**: diálogos teóricos e metodológicos. São Paulo, Editora Opção, 2015, p. 11-29.

CAVALCANTI, José Dilson Beserra. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. 2008. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

CHEVALLARD, Yves. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso (Orgs.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1ª ed. Curitiba, PR: CVR, 2018, p. 31-50.

COSTA, Ângelo Gustavo Mendes. **A teoria da objetivação e o processo de tomada de consciência sobre o pensamento algébrico**: uma experiência de ensino remoto com futuros professores de matemática. 2022. 326f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2022.

COSTA, Gerson Eugenio. **Contribuições dos saberes de astronomia para a formação do professor de matemática**: um estudo na perspectiva da teoria da objetivação. 2023. 159f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2023.

CYRINO, Marcia Cristina de Costa Trindade; GRANDO, Regina Célia Grando. (Des)construção curricular necessária: resistir, (re)existir, possibilidades insubordinadas criativamente. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, p. 1-25, 2022.

FILLOY, Eugenio; ROJANO, Teresa. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. **For the Learning of Mathematics**, v. 2, p.19-25, 1989.

FIORENTINI, Dario; CRECCI, Vanessa Moreira. Aprendizagem Docente na Formação Inicial Mediante Análise de Práticas de Ensinaraprender Matemática. In: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina (Orgs.). **A Formação do Professor que Ensina Matemática**: aprendizagem docente e políticas públicas. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015, p. 75-107 (Série Educação Matemática).

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3a ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. Campinas, v. 4, n. 1[10], 1993.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 62. Ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 73. Ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2020a.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da esperança**: um reencontro com a pedagogia do oprimido. 27. Ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2020b.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade**. 57. Ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2024.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **RAE**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GOMES, Luanna Priscila da Silva. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Teoria da Objetivação. 2020. 180f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

GOMES, Luanna Priscila da Silva; NORONHA, Claudianny Amorim. Caracterização do pensamento algébrico na perspectiva da teoria da objetivação. In: GOBARA, Shirley Takeco; RADFORD, Luis. **Teoria da objetivação**: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: editora Livraria da Física. 2020.

GUTIERREZ ARAUJO, Rafael Enrique. **Resolução, análise e elaboração de tarefas investigativas de geometria dinâmica**: estudo de saberes na formação de professores. 2020. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2020.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HOOKS, bell. **Ensinando a transgredir**: a educação como prática da liberdade. 2. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2017.

HOOKS, bell. **Tudo sobre o amor**: novas perspectivas. São Paulo: Elefante, 2020.

HOOKS, bell. **Ensinando pensamento crítico**: sabedoria prática. São Paulo: Elefante, 2020.

JUSTINO JÚNIOR, Pedro. **Ensino e aprendizagem de Geometria na perspectiva da teoria de objetivação**. 2022.156f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2022.

KAPUT, James J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In KAPUT, James J.; CARRAHER, David W.; BLANTON, Maria L. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008, p. 6-17.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**, v. 12, p. 317-326, 1981.

LEONT'EV, Aleksei Nikolaevich. **Activity, consciousness, and personality**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.

LIMA, Keycinara Batista de. **Formação permanente de professores de Ciências e Matemática no contexto sul-amazônico**: um novo olhar para as práticas pedagógicas. 2024. 220f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2024.

LINS, Romulo Campos. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. PhD thesis. University of Nottingham, UK, 1992.

LIRA, Felipe Alexandre de Lima. **A apropriação por professores de matemática de jogos sobre equação do primeiro grau propostos em livros didáticos**. 2022. 118f. Dissertação

(Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

LONGAREZI, Andréa Maturano; SILVA, Jorge Luiz. Interface entre pesquisa e formação de professores: delimitando o conceito de pesquisa-formação. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 8., 2008, Curitiba. **Anais** [...] Curitiba: Champagnat: Araucária, 2008. p. 4048-4061.

LONGAREZI, Andréa Maturano; SILVA, Jorge Luiz. Pesquisa-formação: um olhar para sua constituição conceitual e política. **Contrapontos**, v. 13, n. 03, p. 214-225, 2013.

MARQUES, Anailde Felix; RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson. Pensamento Algébrico no 5° ano do Ensino Fundamental: explorando uma tarefa de valor omisso. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 13, n. 30, p. 165–186, 2024.

MARTINS, Ludmila Wanderley. **O sinal de igual e noções iniciais de equação no primeiro segmento da educação de jovens e adultos**: uma experiência didática a luz da teoria da objetivação. 2023. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

MINOSSO, Anderson. **Indícios de objetivação dos nexos conceituais da álgebra por professores dos anos iniciais do ensino fundamental em um curso online**. 2023. 247f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

MINOSSO, Anderson; DÍAZ-URDANETA, Stephanie; PANOSSIAN, Maria Lucia. A tarefa na Teoria da Objetivação: um olhar a partir de pesquisas brasileiras. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, p. 1-24, 2022.

MINOSSO, Anderson; PANOSSIAN, Maria Lucia. Reconocimiento de magnitudes variables por profesores de los Primeros Años: Una mirada a través de la teoría de la objetivación. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática**, v. 3, n. 3, p. 1-23, 2023.

MORETTI, Vanessa Dias. A articulação entre a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática: o caso da Residência Pedagógica da Unifesp. **Educação**, v. 34, n. 03, p. 385-390, 2011.

MORETTI, Vanessa Dias; DE MOURA, Manoel Oriosvaldo. A Formação Docente na Perspectiva Histórico-Cultural: em busca da superação da competência individual. **Revista Psicologia Política**, v. 10, n. 20, p. 345-361, 2010.

MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lúcia; RADFORD, Luis. Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, v. 2, n. 1, p. 251-272, 2018.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. Análise multimodal de vídeos: contribuições da Teoria da Objetivação para a pesquisa sobre formação de professores que ensinam Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 17, p. 1-17, 2023a.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. Abordagem histórico-dialética dos conceitos na organização do ensino da matemática. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 49, e252104, 2023b.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática. In: VI Sipem - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais** [...] Goiás: SBEM-GO, 2015, p. 1-12.

NERY, Cristiane do Socorro dos Santos. **Formação inicial de professores(as) indígenas em diálogos integradores de aprendizagem na objetivação cultural**. 2023. 170f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2023.

OLIVEIRA, Zaine Hete Ribeiro de. **Formação continuada de professores dos anos iniciais do ensino fundamental no contexto remoto**: um olhar para processos de objetivação em tarefas de generalização de padrões. 2022. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; HUANCA, Roger. A Licenciatura em Matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, Maria Clara Rezende; BIANCHINI, Barbara Lutaif; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas, SP: Editora Papirus, 2013, p. 307-331 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

PANOSSIAN, Maria Lucia; SOUSA, Maria do Carmo; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. Nexos conceituais do conhecimento algébrico: um estudo a partir do movimento histórico e lógico. In: MORETTI, Vanessa Dias; CEDRO, Wellington Lima (Orgs.). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural**: um olhar sobre as pesquisas. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2017, p. 125-160.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Currículo de Pernambuco**. Ensino Fundamental. Área de Matemática. Recife: SE, 2019

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular – DGIDC, Lisboa, 2009.

PRIETO G, Juan Luis; ARREDONDO, Elizabeth-H. Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas. **REMATEC**, Belém, v. 16, n. 39, p. 77–100, 2021.

RADFORD, Luis. Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking And Learning**, v. 5, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, Luis. Iconicity and Contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, 2008.

RADFORD, Luis. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research In Mathematics Education**, v. 12, n. 1, p.1-19, 2010.

RADFORD, Luis. Sobre psicologia, epistemologia histórica e o ensono da Matemática: rumo a uma história sociocultural da Matemática. In: MOREY, B; MENDES, I. A. (Org.). **Cognição Matemática**: História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011a, p. 93-97.

RADFORD, Luis. A origem histórica do pensamento algébrico. In: MOREY, B; MENDES, I. A. (Org.). **Cognição Matemática**: História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011b, p. 117-153.

RADFORD, Luis. **Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking**. In: Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education. Ankara, Turkey, v. 4, p. 17-24, 2011c.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de generalización. In: RICO, L.; CAÑADAS, M. C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (Ed.). **Investigación en Didáctica de las Matemáticas**. Granada, Espanha: Editorial Comares, p. 3-12, 2013.

RADFORD, Luis. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, p. 257-277, 2014.

RADFORD, Luis. Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In: PEPIN, Birgit, ROESKEN-WINTER, Bettina (Eds). **From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education**: Exploring a mosaic of relationships and interactions. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham, p. 25-49, 2015.

RADFORD, Luis. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D’Amore, B., & Radford, L. (Orgs). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, p. 97-114. 2017.

RADFORD, Luis. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (Ed.). **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2020, p. 15 - 42.

RADFORD, Luis. **Teoria da objetivação**: uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021a.

RADFORD, Luis. O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. In: V. Moretti & L. Radford (Eds.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. Livraria da Física, p. 171-195, 2021b.

RADFORD, Luis. Introducing equations in early algebra. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, n. 6, p. 1151-1167, 2022a.

RADFORD, Luis. Álgebra temprana: La simplificación de ecuaciones. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1-14, 2022b.

RADFORD, Luis; SALINAS-HERNÁNDEZ, Ulises; SACRISTÁN, Ana Isabel. A dialogue between two theoretical perspectives on languages and resource use in mathematics teaching and learning. **ZDM – Mathematics Education**, v. 55, n. 3, p. 611-626, 2023.

RADFORD, Luis. Política, saber y ética: la necesidad de replantear la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 2, p. 45-68, 2023a.

RADFORD, Luis. Oltre lo sguardo subordinante del sé: l'incontro con l'altro dal punto di vista educativo. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 13, n. 2, p. 113-125, 2023b.

RADFORD, Luis. *et. al*. The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In J. Cai (Ed.). **First compendium for research in mathematics education** (pp. 700-721). Reston, VA: NCTM, 2017a.

RADFORD, Luis. **La fenomenología del significado**. In: SANTOS, C.; VIEIRA M. J; ALVES, F. (Orgs.). Docência, cognição e aprendizagem: Contextos diversos. Curitiba: Editora CRV. p. 15-29, 2017b.

RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson. Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. **EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 8, n. 1, p. 1-18, 2017.

RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson; MARTINS, Juliana. Labor Conjunto Remoto: uma proposta metodológica para formação continuada de professores que ensinam matemática. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 106-124, 2022.

RAMOS DE ALMEIDA, Jadilson; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017.

ROMEIRO, Iraji de Oliveria. **O Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais**. 2023. 272f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2023.

ROMEIRO, Iraji de Oliveira; MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. Da formação à pesquisa sobre professores que ensinam Matemática: contribuições da Teoria da Objetivação para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. **Paradigma**, Maracay, v. 45, n. 2, p. 1-23, 2024.

SANTOS, Andressa Gomes dos. **Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática**. 2002. 222f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais na Perspectiva da Teoria da Objetivação: um levantamento bibliográfico. **Paradigma**, Maracay, v. 45, n. 2, p. 1-20, 2024.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. (Série Educação Matemática).

SILVA, Rayssa de Moraes; RAMSOS DE ALMEIDA, Jadilson. Os meios semióticos de objetivação e o pensamento algébrico: uma análise à luz da Teoria da Objetivação. **REMATEC**, v. 16, n. 39, p. 19-38, 2 dez. 2021.

SILVA, Rosangela Araújo da; MOREY, Bernadete Barbosa. A álgebra islâmica antes de Omar Khayyam (1048-1131). **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 10, n. 1/2, p. 79-93, 2021.

SILVA, Simone Ferreira da. **Pensamento algébrico, relações de igualdade e simplificação de equações em um processo formativo com professoras dos anos iniciais à luz da teoria da objetivação**. 2024. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024.

VARGAS-PLAÇA, Jaqueline Santos. **O uso de tecnologia assistiva como artefato cultural no atendimento educacional especializado para alunos cegos ou baixa visão**. 2020. 349f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2020.

VARGAS-PLAÇA, Jaqueline Santos; GOBARA, Shirley Takeco; RADFORD, L. Tecnologia assistiva como artefato cultural tecnológico para aprendizagem de alunos com baixa visão. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 595-619, 2022.

VARGAS-PLAÇA, Jaqueline Santos; RADFORD, Luis. A formação de professores para o ensino de ciências na perspectiva na teoria da objetivação. **Interfaces da Educação**, v. 12, n. 36, p. 308-328, 2021.

VERGEL, Rodolfo Causado. **Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primária**. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

VERGEL, Rodolfo Causado. ¿ Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. **Uno: Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 68, p. 9-17, 2015.

VERGEL, Rodolfo; LEÓN, Rafael Moreno. Las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional. **Paradigma**, p. 1-23, 2024.

VERGEL, Rodolfo; ROJAS, Pedro Javier **Álgebra escolar y pensamiento algebraico:** aportes para el trabajo en aula. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018.